UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

FACULTAD DE CIENCIAS

SECCIÓN DE POST-GRADO Y 2da. ESPECIALIZACIÓN PROFESIONAL

TESIS PARA OPTAR EL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS, MENCIÓN: MATEMÁTICA APLICADA

TITULADA:

DINÁMICA UNIDIMENSIONAL Y EL TEOREMA DE DENJOY

PRESENTADO POR:

Quispe Condori, Ruth

LIMA – PERÚ
2003

TABLA DE CONTENIDO

RESUMEN

En el presente trabajo se analiza el comportamiento de las órbitas en homeomorfismos y difeomorfismos del círculo S^1 y se demuestran dos resultados importantísimos. El primero trata sobre las condiciones bajo las cuales un homeomorfismo del círculo S^1 es semiconjugado o conjugado a una rotación. En el segundo se trabaja bajo suposiciones de diferenciabilidad y se demuestra que un difeomorfismo es conjugado a una rotación añadiendo algunas hipótesis como que el difeomorfismo es de clase C^1 con derivada de variación acotada.

INTRODUCCIÓN

Siendo el objetivo principal y básico de la teoría cualitativa de los sistemas dinámicos el estudio de la estructura global de las órbitas, ya sea en funciones o en flujos, hemos optado por analizar el comportamiento de las órbitas en sistemas dinámicos unidimensionales. Analizaremos este comportamiento considerando los homeomorfismos y difeomorfismos del círculo S^1 ya que esto es el primer camino para poder estudiar situaciones que pueden surgir en dimensiones mayores pues algunos comportamientos dinámicos unidimensionales se mantienen, persisten o manifiestan las mismas reacciones.

El capitulo I está dedicado a dar las definiciones básicas de la dinámica unidimensional: órbitas, conjunto ϖ *–límite* y α *–límite*, semiconjugación y conjugación, levantamientos y la identificación de homeomorfismos del círculo con los de un intervalo; considerando algunas propiedades de importancia.

En el capítulo II se considera el desarrollo de la teoría clásica de los homeomorfismos del círculo S^1, ampliamente sustentada por H. Poincaré. Al realizar este estudio, Poincaré introduce un importante invariante dinámico llamado número de rotación, el cual mide la inclinación asintótica de las órbitas y puede ser de naturaleza racional o irracional. Cuando se considera un homeomorfismo con número de rotación racional la dinámica resulta ser trivial, más no así cuando se considera el número de rotación irracional pues en este caso la dinámica resulta ser más interesante, como veremos. El principal resultado en esta parte es que: se prueba que un homeomorfismo f del círculo S^1 con número de rotación irracional es conjugado o semiconjugado a una rotación dependiendo de, si f posee o no una órbita densa. Más precisamente, se prueba que cada órbita del homeomorfismo está ubicado en el círculo en el mismo orden como una órbita de la correspondiente rotación.

En el capítulo III se realiza el estudio de la dinámicas en difeomorfismos del círculo S^1. Denjoy trata de llegar a la misma primera conclusión del teorema de Poincaré, es decir, que f es connjugado a una rotación. Sin embargo, por el mismo Teorema de Poincaré esta conclusión será posible siempre y cuando el difeomorfismo posea una órbita densa, y para lograr esto último, será necesario agregar algunas hipótesis mucho más fuertes e importantes como son: que el difeomorfismo es de clase C^1 con derivada de variación acotada y también se tendrá en consideración el control de distorsión de los iterados.

Finalmente, en la parte del anexo, se presenta el ejemplo de Denjoy en donde se construye difemorfismo de clase C^1 que es no transitivo si se obvia la hipótesis de que la derivada es de variación acotada.

CAPITULO I

DEFINICIONES BÁSICAS SOBRE DINÁMICA UNIDIMENSIONAL

En el desarrollo del presente trabajo dedicado al estudio del comportamiento de las órbitas en homeomorfismos y difeomorfismos de S^1 será necesario introducir algunos conceptos previos.

I.1. ÓRBITAS Y LOS CONJUNTOS ϖ–LÍMITE Y α–LÍMITE

En lo que sigue, a menos que se diga lo contrario, $f : X \to X$ es un homeomorfismo de un espacio métrico X

DEFINICIÓN I.1.1. Los iterados de f son las funciones f^n definidas inductivamente por $f^1 = f, f^{n+1} = f^n \circ f, f^{-n} = (f^{-1})^n, f^0 = Id$ donde n es un entero positivo. De aquí, vemos que pueden haber iterados positivos y negativos.

DEFINICIÓN I.1.2. Sea $x \in X$. Se denomina *órbita de x* al máximo conjunto de iterados positivos e iterados negativos de x por f; simbólicamente podemos escribir:

$$O_f(x) = \{f^n(x) : n \in \boldsymbol{Z}\}$$

De acuerdo a la definición de $O_f(x)$, podemos definir

$O_f^+(x) = \{f^n(x) : n \in \boldsymbol{Z}^+\}$ llamada *órbita positiva*

y

$O_f^-(x) = \{f^n(x) : n \in \boldsymbol{Z}^-\}$ llamada *órbita negativa*

Es interesante observar que $y \in O_f(x)$ sí y sólo si $O_f(x) = O_f(y)$. En efecto, si $y \in O_f(x)$ entonces $y = f^n(x)$ y $f^m(y) = f^{m+n}(x)$. En otros términos, dos órbitas de x coinciden o son disjuntas.

DEFINICIÓN I.1.3. Diremos que x es un punto periódico de periodo n para f si están definidos los valores $f(x), f^2(x), \ldots, f^n(x)$ y se satisface que $f^n(x) = x$ y $f^i(x) \neq x$, $1 \leq i \leq n-1$.

Si $n = 1$, entonces $f(x) = x$, en este caso a x se le denomina punto fijo de f. Si la órbita $O_f^+(x)$ tiene un punto periódico de periodo n, entonces es finita y además tiene exactamente n elementos.

DEFINICIÓN I.1.4. Diremos que $x \in X$ es un punto errante de f si existe una vecindad U de x tal que

$$f^n(U) \cap U = \emptyset \text{ para todo } n \neq 0$$

En caso contrario, diremos que x es un punto no errante, es decir, si para toda vecindad U de x, existe $n \neq 0$ tal que

$$f^n(U) \cap U \neq \emptyset$$

La definición de punto no errante nos dice que siempre encontraremos un punto y cerca de x que después de un tiempo n, vuelve a estar cerca de x. Claro está que, si x es periódico entonces x es no errante, como veremos en la Proposición I.1.1.

Denotaremos al conjunto de todos los puntos no errantes de f por $\Omega(f)$, Per(f) al conjunto de todos los puntos periódicos de f y por fix(f) al conjunto de todos los puntos fijos de f.

DEFINICIÓN I.1.5. Se define el conjunto ϖ *–límite* de la órbita de $x \in X$, denotado por $\varpi(x)$, como el conjunto de los puntos $y \in X$ tales que existe una sucesión n_i con $\lim_{i\to\infty} f^{n_i}(x) = y$, es decir,

$$\varpi(x) = \left\{ y \in X : \text{ existe } n_i \text{ tal que } \lim_{i\to\infty} f^{n_i}(x) = y \right\}$$

El conjunto $\varpi(x)$ está formado por todos los puntos de acumulación de la sucesión de las iteraciones positivas del punto x.

Análogamente tenemos:

DEFINICIÓN I.1.6. Se define el conjunto α *–límite* de la órbita de $x \in X$ como el conjunto de los puntos $y \in X$ tales que existe una sucesión n_i y $\lim_{i\to-\infty} f^{n_i}(x) = y$, es decir,

$$\alpha(x) = \left\{ y \in X : \text{ existe } n_i \text{ tal que } \lim_{i\to-\infty} f^{n_i}(x) = y \right\}$$

El conjunto $\alpha(x)$ está formado por todos los puntos de acumulación de la sucesión de las iteraciones negativas del punto x.

Observaciones:

a) Está claro que si x es un punto fijo de f, entonces, $\varpi(x) = \{x\}$

b) También, si $O_f(x)$ es la órbita de f para el punto x e $y \in O_f(x)$ entonces $\varpi(x) = \varpi(y)$. En efecto, si $y \in O_f(x)$, entonces existe n tal que $y = f^{\,n}(x)$ de manera que $f^{\,m}(y) = f^{\,m+n}(x)$. Análogamente, con las mismas hipótesis se prueba que $\alpha(x) = \alpha(y)$

PROPOSICIÓN I.1.1. *El conjunto de los puntos no errantes $\Omega(f)$ satisface las siguientes propiedades*:

a) *$\Omega(f)$ es cerrado,*

b) *$\Omega(f)$ es invariante,*

c) $\mathrm{Per}(f) \subset \Omega(f)$,

d) *$\Omega(f)$ contiene a los conjuntos $\varpi(x)$ y $\alpha(x)$*

Prueba:

a) $\Omega(f)$ es cerrado

Sea $\{x_k\} \subset \Omega(f)$ tal que $x_k \to x$. Vamos a mostrar que $x \in \Omega(f)$. Sea U vecindad abierta conteniendo a x y como $\{x_k\} \in \Omega(f)$ entonces $x_k \in U$ para un k suficientemente grande, de manera que $f^{\,n}(U) \cap U \neq \emptyset$ para algún $n \neq 0$ y por definición de $\Omega(f)$, $x \in \Omega(f)$.

b) $\Omega(f)$ es invariante

Sea $x \in \Omega(f)$ y U vecindad abierta conteniendo a $f(x)$. Vamos a mostrar que $f^N(U) \cap U \neq \emptyset$ para algún $N \neq 0$. Hagamos $V = f^{-1}(U)$ que es la preimagen completa de U luego V es abierto que contiene a x, por tanto existe $n \neq 0$ tal que $f^n(V) \cap V \neq \emptyset$ entonces $f\left(f^n(V) \cap V\right) = f^N(U) \cap U \neq \emptyset$.

c) Per(f)$\subset \Omega(f)$. Obvio.

d) $\Omega(f)$ contiene a los conjuntos $\varpi(x)$ y $\alpha(x)$

Sea $y \in \varpi(x)$ entonces existe una sucesión $\{n_k\}_{k \in \mathbf{N}}$ tal que $\lim_{k \to \infty} f^{n_k}(x) = y$.

Sea U vecindad abierta conteniendo a y, como n_k es una sucesión creciente entonces $f^{n_k}(x) \in U$ entonces $x \in f^{-n_k}(U)$ luego $f^{n_{k+1}}(x) \in f^{n_{k+1}-n_k}(U)$ y $f^{n_{k+1}}(x) \in U$

■

El argumento para el conjunto α *–límite* es completamente similar.

PROPOSICIÓN I.1.2. *Sea $f : X \to X$ una aplicación de clase $C^k (k \geq 1)$ definido en un abierto $\Delta \subset X$ y $O_f^+(x) = \left\{f^n(x) : n \geq 0\right\}$ la semi-órbita positiva de f para el punto x. Si $O_f^+(x)$ está contenida en un subconjunto compacto $K \subset \Delta$, entonces:*

a) $\varpi(x) \neq \emptyset$

b) $\varpi(x)$ *es compacto*

c) $\varpi(x)$ *es invariante por f, esto es, $\varpi(x)$ está formado por órbitas de f.*

Prueba:

a) $\varpi(x) \neq \emptyset$.

Sea $i \in N$. Tenemos por hipótesis que $\left\{f^{i}(x)\right\} \subset K$. Entonces existe una subsucesión $\left\{f^{i_k}(x)\right\}$ que converge para un punto $y \in K$. Luego, podemos escoger $i_k \to \infty$ cuando $k \to \infty$ y $f^{i_k}(x) \to y$, luego por definición de $\varpi(x)$, $y \in \varpi(x)$.

b) $\varpi(x)$ es compacto

Tenemos $\varpi(x) \subset \overline{O_f^+(x)} \subset K$, por lo tanto, es suficiente mostrar que $\varpi(x)$ es cerrado. Sea $\{y_k\} \subset \varpi(x)$ tal que $y_k \to y$. Vamos a mostrar que $y \in \varpi(x)$. Como $y_k \in \varpi(x) \subset K$ compacto, entonces para cada y_k existe una subsucesión n_i^k, $i \in N$ tal que $n_i^k \to \infty$ y $f^{n_i^k}(x) \to y_k$ cuando $i \to \infty$..

Escojamos para cada sucesión n_i^k un $n_{j(k)}^k \geq k$ tal que la distancia

$$d\left(f^{n_{j(k)}^k}, y_k\right) < \frac{1}{k}$$

Luego usando la desigualdad triangular se tiene que:

$$d\left(f^{n_{j(k)}^k}, y\right) \leq d\left(f^{n_{j(k)}^k}, y_k\right) + d(y_k, y) < \frac{1}{k} + d(y_k, y)$$

así, se sigue que $d\left(f^{n_{j(k)}^k}, y\right) \to 0$ cuando $k \to \infty$ esto es $f^{n_{j(k)}^k} \to y$.

Como $n_{j(k)}^k \to \infty$ cuando $k \to \infty$ se sigue que $y \in \varpi(x)$.

c) $\varpi(x)$ es invariante por f

Sea $y \in \varpi(x)$ y sea $y_1 = f^{n_0}(y)$,vamos a probar que $y_1 \in \varpi(x)$.

Como $y \in \varpi(x)$ entonces existe una sucesión n_i tal que $n_i \to \infty$ y $f^{n_i}(x) \to y$ cuando $i \to \infty$; pero como f es continua se tiene que:

$$y_1 = f^{n_0}(y) = f^{n_0}\left(\lim_{i\to\infty} f^{n_i}(x)\right) = \lim_{i\to\infty} f^{n_0+n_i}(x)$$

tomando extremos : $y_1 = \lim_{i\to\infty} f^{n_0+n_i}(x)$ de donde tenemos la sucesión $m_i = (n_0 + n_i)$

tal que $m_i \to \infty$ y $f^{m_i}(x) \to y_1$ cuando $i \to \infty$, esto prueba que $y_1 \in \varpi(x)$.

■

Observación:

Las propiedades de la proposión I.1.2. son válidas también para el conjunto α *−límite* considerando obviamente la órbita negativa $O_f^-(x) = \{f^n(x) : n \in Z^-\}$ contenida en el subconjunto compacto $K \subset \Delta$ abierto. Además debemos anotar que si la órbita es periódica, entonces, coincide con el conjunto $\varpi(x)$.

Como para $x \in X$ el conjunto $\varpi(x)$ es no vacío, citamos el siguiente corolario.

COROLARIO I.1.1. *Si X es compacto y f : X → X, entonces* $\Omega(f) \neq \emptyset$.

I.2. CONJUGACIÓN Y SEMICONJUGACIÓN

Introducimos a continuación las nociones de semiconjugación y conjugación entre dos aplicaciones

DEFINICIÓN I.2.1. Sean $f, g : X \to X$ dos aplicaciones sobre el espacio métrico X. Diremos que h es una semiconjugación de f a g si $h : X \to X$ es una función continua tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & X \arrow[d, "h"] \\ X \arrow[r, "g"'] & X \end{tikzcd}$$

En este caso, $h \circ f = g \circ h$ y denominaremos a g un factor topológico de f.

DEFINICIÓN I.2.2. Sean $f, g : X \to X$ dos aplicaciones sobre el espacio métrico X. Diremos que f y g son topológicamente conjugados cuando existe un homeomorfismo $h : X \to X$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & X \arrow[d, "h"] \\ X \arrow[r, "g"'] & X \end{tikzcd}$$

esto quiere decir que $h \circ f = g \circ h$ ó $g = h \circ f \circ h^{-1}$. Esto implica que, $h \circ f^{\,n} = g^n \circ h$ para todo n entero. De aquí, la conjugación h lleva órbitas de f en órbitas de g.

En este caso, el homeomorfismo h se llama conjugación topológica.

Ejemplo:

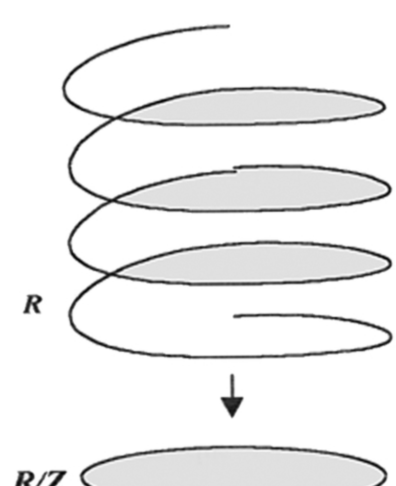
Sean $f(x,y) = \left(\frac{1}{2}x, 2y\right)$ y $g(x,y) = \left(\frac{1}{2}x + \frac{15}{2}y^3, 2y\right)$, f y g son conjugados por el homeomorfismo $h(x,y) = (x + y^3, y)$, es decir, $h \circ f = g \circ h$.

Observación

La relación de conjugación es una relación de equivalencia entre funciones definidas en X. La definición de conjugación es importante pues permite comparar las dinámicas de las órbitas entre dos homeomorfismos del espacio métrico X. Por ejemplo, en el capítulo II veremos que, una conjugación h lleva órbitas de f en órbitas de g. una conjugación h mantiene el periodo de las órbitas periódicas y además el número de rotación se mantiene bajo conjugaciones.

I.4. LEVANTAMIENOS

El círculo es la única variedad compacta conexa unidimensional, es por eso que encontramos al círculo en muchos estudios matemáticos. Ahora, podemos representar al círculo de distintas maneras. Se puede considerar el círculo unitario en $\boldsymbol{R}^2$, pero también podemos considerarlo como una variedad abstracta unidimensional la cual es el cociente de la recta real $\boldsymbol{R}$ por el grupo de enteros $\boldsymbol{Z}$. Denotaremos por S^1 al círculo unitario.



De lo anterior tenemos que

$$t \in \frac{\boldsymbol{R}}{\boldsymbol{Z}} \mapsto (\cos(2\pi t), \operatorname{sen}(2\pi t)) \in S^1 \subset \boldsymbol{R}^2$$

Entonces, el círculo S^1 es el espacio cociente de la recta real $\boldsymbol{R}$ por el grupo de traslaciones de enteros

$$S^1 = \frac{\boldsymbol{R}}{\boldsymbol{Z}}$$

DEFINICIÓN I.4.1. Una aplicación $\pi : \boldsymbol{R} \to S^1$ se llama aplicación de recubrimiento (o simplemente un recubrimiento) cuando cada punto $y \in S^1$ pertenece a un abierto $V \subset S^1$ tal que $\pi^{-1}(V) = \bigcup_{\alpha} I_\alpha$ es una reunión de abiertos I_α, disjuntos dos a dos, cada uno de los cuales se aplica por π homeomorficamente sobre V. El espacio $\boldsymbol{R}$ se llama un espacio de recubrimiento de S^1.

Ejemplo : la función $\pi : \boldsymbol{R} \to S^1$ definida por $\pi(x) = e^{2\pi ix} = (\cos(2\pi x), sen(2\pi x))$ es una función de recubrimiento de S^1..

Debemos notar que $\pi(x) = \pi(y)$ si y solo si $x - y \in \boldsymbol{Z}$ y π aplica el intervalo abierto $\langle 0, 1\rangle$ difeomorficamente sobre $S^1 - \pi(0)$.

DEFINICIÓN I.4.2.La aplicación $F : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ se llama levantamiento del homeomorfismo $f : S^1 \to S^1$ si $\pi \circ F = f \circ \pi$, donde π es función de recubrimiento de S^1.

Debemos observar que siempre existen muchos y diferentes levantamientos para una función $f : S^1 \to S^1$.En verdad, si F y $\widetilde{F}$ son dos levantamientos del homeomorfismo f, entonces existe un entero $n \in \boldsymbol{Z}$ tal que $F(x) - \widetilde{F}(x) = n, \forall x \in \boldsymbol{R}$, es decir, dos levantamientos se diferencian por un entero .(ver Proposición I.4.1.)

Observación:

Tengamos presente que, como el conjunto de los números reales **R es** ordenado y además como se está trabajando con dinámicas unidimensionales entonces el levantamiento $F:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ correspondiente al homeomorfismo $f:S^1\to S^1$ determina la orientación de f. En otras palabras, si F es creciente entonces f preserva orientación o sea f preserva el orden de puntos en el círculo. En cambio, si F es decreciente entonces f invierte orientación.

PROPOSICIÓN I.4.1. *Sea $f:S^1\to S^1$ una función continua, $\pi:\boldsymbol{R}\to S^1$ el cubrimiento universal de S^1 y $F:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ el levantamiento de f. Entonces, se cumple que $F(x+1)-F(x)\in\boldsymbol{Z}$ independientemente de x y del levantamiento.*

Prueba:

$\pi(F(x+1))=f(\pi(x+1))=f(\pi(x))=\pi(F(x))$ de manera que $F(x+1)-F(x)\in\boldsymbol{Z}$ y de aquí, es también independiente de x por continuidad. Si $\widetilde{F}$ es otro levantamiento de f entonces $\pi\left(\widetilde{F}(x)\right)=f(\pi(x))=\pi(F(x))$, así $\widetilde{F}-F$ es una función continua de valores enteros y de aquí, constante, de tal manera que $\widetilde{F}(x+1)-\widetilde{F}(x)=F(x+1)-F(x)$.

■

I.5. IDENTIFICACIÓN DE HOMEOMORFISMOS DEL CÍRCULO CON LOS DE UN INTERVALO

Al trabajar con homeomorfismos del círculo S^1, en los capítulos II y III será necesario identificar a éstos con homeomorfismos del intervalo para poder visualizar con mayor claridad algunos resultados, es decir, que en lugar de considerar homeomorfismos del círculo consideraremos homeomorfismos del intervalo, claro está, esto último con determinadas características. ¿Cómo hacer esto? A continuación pasaremos a describir:

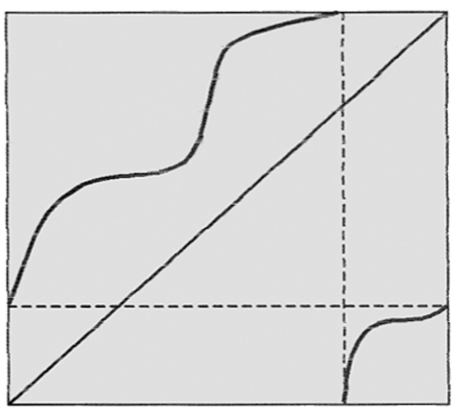
Sea la aplicación $\pi : R \to S^1$ fijando la orientación y la métrica en el círculo inducido la recta real. De aquí, dado $x \in S^1$, existe una única isometría preservando orientación $\phi_x : S^1 - \{x\} \to \langle 0, 1 \rangle$. A cada homeomorfismo $f : S^1 \to S^1$ podemos asociar una función $g : [0, 1] \to [0, 1]$ definido por $g(t) = \phi_{f(x)} \circ f \circ \phi_{f(x)}^{-1}(t)$ en $\langle 0, 1 \rangle$ y $g(0) = \lim_{t \to 0} g(t)$ y $g(1) = \lim_{t \to 1} g(t)$.

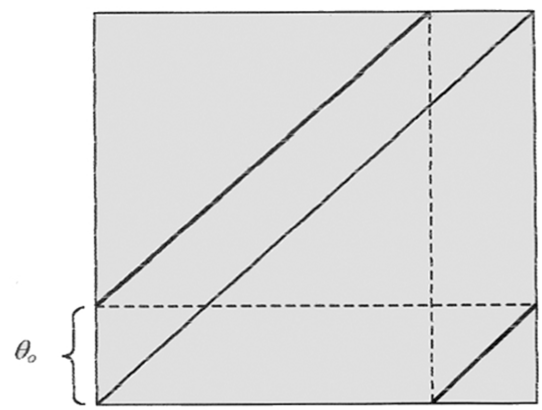
Observe que g es una función continua excepto en un punto $c = c(g) = \phi_{f(x)}(x)$ $\lim_{t \to c^-} g(t) = 1$ y $\lim_{t \to c^+} g(t) = 0$. Es decir, g es una función monótona del intervalo, la cual asume valores iguales en los puntos finales del intervalo, es continua excepto en un único punto en el interior del intervalo y los límites superior e inferior, existen en este punto y son iguales a los puntos finales del intervalo que define un homeomorfismo del círculo.

Por tanto, en lugar de considerar el homeomorfismo del círculo podemos considerar ciertas funciones de un intervalo compacto J, al conjunto de todos éstos denotaremos por $S(J)$, de manera que si $g \in S(J)$ entonces g satisface las siguientes propiedades:

1. g es suryectiva y la restricción de g al interior de J es inyectiva.
2. g tiene un punto de discontinuidad $c(g)$ y este punto pertenece al interior de J.
3. La imagen de los puntos en la frontera de J es un único punto en el interior de J.
4. g es monótona creciente en cada componente de $J - \{c(g)\}$.

Al realizar esta identificación de un homeomorfismo del círculo con el de un intervalo, el conjunto de rotaciones del círculo corresponde al conjunto $I(J)$ de funciones en $S(J)$ los cuales son lineales por partes con constante de inclinación igual a 1.





Rotación del ángulo θ_o

CAPITULO II

HOMEOMORFISMOS DEL CÍRCULO Y EL TEOREMA DE POINCARÉ

En este capítulo consideraremos la teoría clásica de homeomorfismo de S^1 iniciado por Poincaré. Al realizar este estudio, Poincaré introduce un importante invariante topológico llamado número de rotación, el cual mide la inclinación asintótica de las órbitas.

Ahora, un número de rotación puede ser racional o irracional, em ambos casos se garantiza la existencia de una semiconjugación, sólo que, en el caso racional la dinámica del homeomorfismo resulta ser trivial, como veremos más adelante. Entonces, lo interesante será considerar, el caso cuando el número de rotación es irracional..

II.1. NUMERO DE ROTACIÓN

En esta parte consideraremos el levantamiento para el cubrimiento universal en distintas ocasiones. Recordemos del Capítulo I: Sea $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ el levantamiento del homeomorfismo $f : S^1 \to S^1$y $\pi : \mathbf{R} \to S^1$ la función de recubrimiento, entonces se satisface $\pi \circ F = f \circ \pi$.

Si F es el levantamiento de f entonces $F(x+1) = F(x) + 1$ y más aún, $F(x+k) = F(x) + k$ para cualquier entero k, esto porque f preserva orientación. Entonces

$$F(x+1) - (x+1) = F(x) - x$$

así que $F - Id$ es una función periódica con periodo 1, donde Id es la función identidad. Similarmente, $F^n - Id$ es periódica de periodo 1 puesto que F^n es levantamiento de f^n. Usando esto, uno puede ver fácilmente que, si $|x - y| < 1$ entonces debemos tener también que $|F^n(x) - F^n(y)| < 1$.

PROPOSICIÓN II.1.1. *Sea $f : S^1 \to S^1$ um homeomorfismo preservando orientación y $F : \mathbf{R} \to R$ un levantamiento de f, entonces.*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F^n(x)}{n}$$

existe para cada $x \in R$ y es independiente de x.

Prueba:

i) Independencia de x

como $F - Id$ es periódica, entonces

$$|F^n(x) - F^n(y)| \leq |(F^n(x) - x) - (F^n(y) - y)| + |x - y| \leq |x - y| + 1$$

de manera que

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{F^n(x)}{n}-\frac{F^n(y)}{n}\right]=0$$

De aquí, si el límite existe, es independiente de x.

Para probar la existencia del límite, consideraremos dos casos, primeramente cuando f tiene puntos periódicos y en segundo lugar, cuando f no tiene puntos periódicos.

ii) Existencia del límite, si f tiene un punto periódico.

Si f tiene un punto periódico, éste será cubierto por un punto $y \in \boldsymbol{R}$ de manera que $F^m(y) = y+p$, algún $p \in \boldsymbol{Z}$, entonces $F^{mn}(y) = y+np$, así que:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F^{mn}(y)}{mn} = \lim_{n\to\infty}\frac{y+np}{mn} = \frac{p}{m}$$

Ahora, cada k puede ser escrito como $k = rm+q$, $q < m$, notemos que:

$$\frac{|F^k(y)-F^{rm}(y)|}{k} \leq \frac{M+1}{k}$$

donde $M = \max\limits_{q<m}|F^q(y)-y|$ es un número fijo, así que:

$$\lim_{k\to\infty}\frac{F^k(y)}{k} = \lim_{n\to\infty}\frac{F^{mn}(y)}{mn} = \frac{p}{m}$$

De aquí, si f tiene puntos periódicos, este límite existe, y es racional.

iii) Existencia del límite, si f no tiene puntos periódicos.

Si no existen puntos periódicos para f, entonces para todo $x \in \boldsymbol{R}$ se tiene que $F^m(x)-x$ no es un entero para ningún $m > 0$ y cualquier $x \in \boldsymbol{R}$. De aquí, para cada $x \in \boldsymbol{R}$ y cada entero $m \neq 0$ existe un entero P_m tales que:

$$P_m < F^m(x)-x < P_m+1$$

$$P_m < F^m(x) - x < P_m + 1 \qquad (1)$$

Debemos notar que P_m depende solamente de m (no de x) por las consideraciones de continuidad.

Si hacemos sucesivamente $x = 0, F^m(0), \ldots, F^{m(n-1)}(0)$ en la relación (1) obtenemos:

$$P_m < F^m(0) < P_m + 1$$

$$P_m < F^{2m}(0) - F^m(0) < P_m + 1$$

$$P_m < F^{3m}(0) - F^{2m}(0) < P_m + 1$$

$$\vdots$$

$$P_m < F^{mn}(0) - F^{m(n-1)}(0) < P_m + 1$$

Sumando miembro a miembro estas relaciones se tiene:

$$nP_m < F^{mn}(0) < n(P_m + 1) \qquad (2)$$

pero en la desigualdad original, para $x = 0$, escribimos:

$$P_m < F^m(0) < P_m + 1 \qquad (3)$$

Dividiendo (2) entre mn:

$$\frac{P_m}{m} < \frac{F^{mn}(0)}{mn} < \frac{P_m + 1}{m}$$

$$\frac{P_m}{m} - \frac{1}{m} < \frac{F^{mn}(0)}{mn} < \frac{P_m + 1}{m} + \frac{1}{m} \qquad (4)$$

A (4) le restamos (3) dividido entre n, de manera que:

$$\left| \frac{F^{mn}(0)}{mn} - \frac{F^{m}(0)}{m} \right| < \frac{1}{|m|} \tag{5}$$

Intercambiando los papeles de m por n, obtenemos:

$$\left| \frac{F^{mn}(0)}{mn} - \frac{F^{n}(0)}{n} \right| < \frac{1}{|n|} \tag{6}$$

Luego de (5) y (6)

$$\left| \frac{F^{m}(0)}{m} - \frac{F^{n}(0)}{n} \right| < \frac{1}{|m|} + \frac{1}{|n|} \tag{7}$$

De aquí, la sucesión $\frac{F^{k}(0)}{k}$ es de Cauchy y así se concluye que el límite existe.

■

DEFINICIÓN II.1.1. Al número $\tau(F) = \lim_{n\to\infty} \frac{F^{n}(x)}{n}$ se llama número de rotación del levantamiento F.

PROPOSICIÓN II.1.2. *Sea $f : S^1 \to S^1$ um homeomorfismo preservando orientación y denotemos por $\tau(F) + \mathbf{Z}$ la clase residual de $\tau(F)$, modulo los enteros. Entonces $\tau(F) + \mathbf{Z}$ es independiente del levantamiento, es decir, si F y $\widetilde{F}$ son dos levantamientos de f en S^1, entonces $\tau(F) = \tau\left(\widetilde{F}\right) (\mathrm{mod}\, Z)$.*

Prueba:

Sabemos que dos levantamientos cualesquiera difieren por una traslación, es decir si F y $\widetilde{F}$ son dos levantamientos del homeomorfismo f del circulo S^1, entonces existe un $k \in Z$ tales que $F(x) = \widetilde{F}(x) + k, \forall x \in R$, de aquí:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F^n(x)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\widetilde{F}^n(x) + nk}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\widetilde{F}^n(x)}{n} + k$$

Entonces, $\tau(F) = \tau\left(\widetilde{F}\right) + k$.

Concluyendo así que $\tau(F) = \tau\left(\widetilde{F}\right)(\mathrm{mod} Z)$.

■

Para la siguiente definición y proposición usaremos la notación $[x] = \max\{k \in Z / k \leq x\}$ que indica la parte entera de un número real.

Aún no hemos definido el número de rotación del homeomorfismo $f : S^1 \to S^1$, pero de acuerdo a la definición II.1.1. y a la proposición II.1.1. tenemos

DEFINICIÓN II.1.2.. El número de rotación del homeomorfismo $f : S^1 \to S^1$ denotado por $\tau(f)$, está dado por la parte fracionaria del número de rotación de un levantamiento de f. Es decir, si F es levantamiento de f, entonces $\tau(f)$ es un único número entre 0 y 1 tales que $\tau(F) - \tau(f)$ es un entero ó $\tau(f) = \tau(F) - [\tau(F)]$.

Este número de rotación es un importante invariante asociado a un homeomorfismo del círculo que esencialmente mide la cantidad promedio de puntos que rotan por una iteración del homeomorfismo, es decir, mide la inclinación asintótica de las órbitas.

PROPOSICIÓN II.1.3. *Si $h : S^1 \to S$ es un homeomorfismo preservando orientación, entonces,* $\tau(h^{-1} \circ f \circ h) = \tau(f)$.

La proposición nos dice que el número de rotación es invariante bajo conjugaciones topológicas preservando orientación.

Prueba:

Sean F y H los levantamientos de f y h, respectivamente, es decir:

$$f \circ \pi = \pi \circ F \qquad \text{y} \qquad h \circ \pi = \pi \circ H$$

donde $\pi : \mathbf{R} \to S^1$ es la función de recubrimiento. Entonces:

$$\pi \circ H^{-1} = h^{-1} \circ h \circ \pi \circ H^{-1} = h^{-1} \circ \pi \circ H \circ H^{-1} = h^{-1} \circ \pi$$

de manera que H^{-1} es un levantamiento de h^{-1}.

De la misma manera, $H^{-1} \circ F \circ H$ es un levantamiento de $h^{-1} \circ f \circ h$ ya que

$$\pi \circ H^{-1} \circ F \circ H = h^{-1} \circ \pi \circ F \circ H = h^{-1} \circ f \circ \pi \circ H = h^{-1} \circ f \circ h \circ \pi$$

Supóngase que $H(0) \in [0, 1\rangle$. Necesitamos hallar:

$$|(H^{-1} \circ F^n \circ H)(x) - F^n(x)| = |(H^{-1} \circ F \circ H)^n(x) - F^n(x)|$$

i) Para $x \in [0, 1\rangle$ tenemos $0 - 1 < H(x) - x < H(x) < H(1) < 2$ y por periodicidad $|H(x) - x| < 2$ para $x \in \mathbf{R}$.

Similarmente tenemos:

$$|H^{-1}(x) - x| < 2 \text{ para } x \in \mathbf{R}.$$

ii) Si $|y - x| < 2$ entonces $|F^n(y) - F^n(x)| < 3$ puesto que $|[y] - [x]| \leq 2$

$$-3 < [y]-[x]-1 = F^n([y]) - F^n([x+1]) < F^n(y) - F^n(x)$$

$$< F^n[y+1] - F^n[x] = [y]-[x]+1 \leq 3$$

De (i) y (ii) concluimos:

$$|(H^{-1} \circ F^n \circ H)(x) - F^n(x)| \leq |(H^{-1} \circ F^n \circ H)(x) - F^n(H(x))| + |F^n(H(x)) - F^n(x)|$$

$$< 2+3$$

de donde:

$$\frac{|(H^{-1} \circ F \circ H)^n(x) - F^n(x)|}{n} < \frac{5}{n}$$

concluyendo así que $\tau(H^{-1} \circ F \circ H) = \tau(F)$ por la proposición II.1.1.

■

En la proposición II.1.1., habíamos probado que si el homeomorfismo $f: S^1 \to S^1$ tiene puntos periódicos, entonces el número de rotación es racional, ahora probaremos la reciprocidad de esta proposición.

PROPOSICIÓN II.1.4. *Sea $f: S^1 \to S^1$ un homeomorfismo preservando orientación. Entonces, $\tau(f) \in \mathbb{Q}$ si y solo si f tiene un punto periódico.*

Prueba:

Solamente probaremos el primer "si", ya que el segundo, ya lo probamos como dijimos en la parte (ii) de la prueba de proposición II.1.1.

Supóngase que $\tau(f) = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$. Por la definición de τ se tiene

$$\tau(f^m) = \lim_{n\to\infty} \frac{(F^m)^n(x)}{n} = m \lim_{n\to\infty} \frac{F^{mn}(x)}{mn} = m\tau(f) (\text{mod } 1)$$

Así $\tau(f^q) = 0$ puesto que el número de rotación es definido arriba para un entero.

De manera que basta probar que si $\tau(f) = 0$ entonces f tiene un punto fijo.

Supongamos lo contrario, que $\tau(f) = 0$ y que f no tiene un punto fijo. Sea F un levantamiento tal que $F(0) \in [0,1\rangle$. Entonces $F(x) - x \in \boldsymbol{R} \setminus \boldsymbol{Z}$ para todo $x \in \boldsymbol{R}$ puesto que si $F(x) - x \in \boldsymbol{Z}$ implicaría que $\pi(x)$ es un punto fijo para f. Por tanto, $0 < F(x) - x < 1$ por el teorema del valor intermedio. Pero como $F - Id$ es continua en $[0,1]$ encontramos un máximo y un mínimo y por lo tanto, existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < \delta \leq F(x) - x \leq 1 - \delta < 1$$

por periodicidad de $F - Id$ esto es válido para todo $x \in \boldsymbol{R}$. En particular podemos tomar $x = F^i(0)$, y sumar desde $i = 0$ a $n-1$ obteniendo así:

$$n\delta \leq F^n(0) \leq n(1-\delta)$$

$$\delta \leq \frac{F^n(0)}{n} \leq 1 - \delta$$

Como $n \to \infty$ esto da $\tau(f) \neq 0$ probando lo pretendido por contradicción.

■

II.2. ROTACIONES DEL CÍRCULO.

Recordemos que el círculo puede ser representado en notación multiplicativa en el plano complejo

$$S^1 = \{z \in \boldsymbol{C} : |z| = 1\} = \{e^{2\pi i\varphi} : \varphi \in \boldsymbol{R}\}$$

o en notación aditiva

$$S^1 = \frac{\boldsymbol{R}}{\boldsymbol{Z}}$$

que es el espacio cociente de la recta real R por el grupo de traslaciones de enteros.

La función logaritmo:

$$e^{2\pi i\varphi} \mapsto \varphi$$

establece un isomorfismo entre estas dos representaciones.

Anteriormente estuvimos considerando homeomorfismos del círculo en general; en esta parte, trataremos de un tipo especial de ellos.

DEFINICIÓN II.2.1. Sea $f : S^1 \to S^1$ una aplicación, diremos que f es una rotación del círculo S^1 si es un homeomorfismo isométrico preservando orden en el círculo.

PROPOSICIÓN II.2.1. *Sea $f : S^1 \to S^1$ una rotación. Si $x \in S^1$ es un punto periódico de periodo n de f, entonces cualquier otro punto y es también un punto periódico de igual periodo.*

Prueba:

Sean $x, y \in S^1$ con x punto periódico de periodo n. Como f es una isometría, entonces la longitud de arco orientado positivamente de S^1 desde x a y es igual a la longitud de arco orientado positivamente entre $f^n(x)$ y $f^n(y)$, pero como $f^n(x) = x$ tenemos que la longitud de arco orientado de x a $f^n(y)$ es igual a la longitud de arco orientado x a y. De aquí: $f^n(y) = y$.

■

PROPOSICIÓN II.2.2. *Si $f : S^1 \to S^1$ es una rotación sin puntos periódicos entonces la órbita $O_f(x) = \{f^n(x) : n \in Z\}$ es densa en el círculo.*

Prueba:

Denotemos por A la clausura de la órbita $O_f(x) = \{f^n(x) : n \in Z\}$, es decir, $A = \overline{O_f(x)}$. La prueba de la proposición lo haremos por contradicción.

Debemos tener claro que A es cerrado e invariante, $f(A) = A$. Luego, hagamos $B = S^1 - A$ (Complemento de A), el cual es abierto y también invariante. Entonces quedaría por demostrar: $B = \emptyset$.

Supongamos que $B \neq \emptyset$ y B_o es una componente conexa de B, entonces para todo n, $f^n(B_o)$ es también una componente conexa de A. Puesto que f no tiene puntos periódicos, los intervalos $\{f^n(B_o) : n \in Z\}$ son disjuntos dos a dos, pero esto es imposible, porque ellos tienen igual longitud y la suma de las longitudes de estos intervalos no pueden exceder la longitud del círculo, pues esta es finita. Esto nos lleva a una contradicción. Por consiguiente, $B = \emptyset$ y las órbitas de una rotación son densas en el círculo.

■

II.3. EL TEOREMA DE POINCARÉ

En esta parte daremos una completa descripción del posible comportamiento de las órbitas para homeomorfismos del círculo S^1, pero este comportamiento va a depender de la racionalidad o irracionalidad del número de rotación. Y en la parte última estaremos demostrando el Teorema de Poincaré, en el cual considerando la irracionalidad del número de rotación se llegará a la conclusión de que el homeomorfismo f del círculo es conjugado o semiconjugado a una rotación, dependiento esto último de que si f es o no transitivo. Entonces consideremos los dos casos separados respecto a la naturaleza del número de rotación.

II.3.1. NÚMERO DE ROTACIÓN RACIONAL

PROPOSICIÓN II.3.1.1. *Si $f : S^1 \to S^1$ es un homeomorfismo preservando orientación con número de rotación racional. Entonces, toda órbita periódica tiene el mismo periodo.*

Prueba:

Si $\tau(f) = \frac{p}{q}$ con $p, q \in Z$ relativamente primos. Entonces necesitamos mostrar que para cualquier punto periódico $\pi(x)$ hay un levantamiento F de f tal que $F^q(x) = x + p$.

Supongamos que $\pi(x)$ es un punto periódico y F un levantamiento,tales que $F^r(x) = x + s$ para algún $r, s \in Z$, entonces tenemos que

$$k + \frac{p}{q} = \tau(f) = \lim_{n\to\infty} \frac{F^{nr}(x)}{nr} = \lim_{n\to\infty} \frac{x + ns}{nr} = \frac{s}{r}$$

pero podemos tomar F tal que $k = 0$, así que $s = mp$ y $r = mq$. Luego, supongamos $F^q(x) - p > x$ entonces por monoticidad:

$$F^{2q}(x) - 2p = F^q(F^q(x) - p) - p \geq F^q(x) - p > x$$

e inductivamente $F^r(x) - s = F^{mq}(x) - mp > x$, contrario a la asunción.

Así, $F^{mq}(x) - mp \leq x$ y similarmente probamos que $F^{mq}(x) - mp \geq x$, de donde concluimos que

$$F^q(x) = x + p$$

■

PROPOSICIÓN II.3.1.2. *Sea $f: S^1 \to S^1$ un homeomorfismo preservando orientación con número de rotación racional $\tau(f) = \frac{p}{q}$. Supóngase que p, q son relativamente primos y $\bar{x} \in S^1$ es tal que $f^q(\bar{x}) = \bar{x}$. Entonces, la ordenación de $\left\{\bar{x}, f(\bar{x}), f^2(\bar{x}), \ldots, f^{q-1}(\bar{x})\right\}$ en S^1 es la misma que $\left\{0, \frac{p}{q}, \frac{2p}{q}, \ldots, \frac{(q-1)p}{q}\right\}$ en S^1.*

Esta proposición nos dice que las órbitas periódicas de un homeomorfismo del círculo preservando orientación se comportan del mismo modo que las de una rotación del círculo con el mismo número de rotación.

Prueba:

Sea F un levantamiento de f tal que $F^q(x) = x + p$ para $x \in \pi^{-1}(\{\bar{x}\})$. Entonces el conjunto $A = \pi^{-1}\left\{\bar{x}, f(\bar{x}), f^2(\bar{x}), \ldots, f^{q-1}(\bar{x})\right\}$ determina una partición en el intervalo $[x, x+p]$ en $p.q$ subintervalos. Al mismo tiempo $[x, x+p]$ es particionado en subintervalos $[x, F(x)], [F(x), F^2(x)], \ldots, [F^{q-1}(x), F^q(x)]$ los cuales tienen interiores disjuntos. Ahora, F es una biyección entre cualesquiera dos de estos intervalos adyacentes en esta partición y preserva A, entonces cada intervalo $[F^i(x), F^{i+1}(x)]$ tiene exactamente $p-1$ puntos de A.

Si tomamos $k, r \in Z$ tal que el vecino derecho de x en A es $x_1 = F^k(x) - r$. Como $\overline{F} = F^k - r$ es creciente en $\boldsymbol{R}$ y preserva A, el hecho que el vecino derecho más próximo a x es $x_1 = \overline{F}(x)$ en A y que el intervalo $[x, F(x)]$ es dividido en p subintervalos por A, implica que $\overline{F}^p(x) = F(x)$.

Consequentemente, $f^{kp}(\bar{x}) = f(\bar{x})$, donde k es un único número entero entre 0 y $q-1$ tal que $kp \equiv 1 (\operatorname{mod} q)$. La órbita está por consiguiente ordenado como $\left\{\bar{x}, f^{k}(\bar{x}), f^{2k}(\bar{x}), \ldots, f^{(q-1)k}(\bar{x})\right\}$.

Ahora, sea $f = \Re_{\frac{p}{q}}$ la rotación por $\frac{p}{q}$. Entonces $\pi\left\{0, \frac{p}{q}, \ldots, \frac{p(q-1)}{q}\right\}$ es una órbita periódica en S^1, de manera que por el argumento anterior, está ordenado como $\left\{0, \frac{kp}{q}, \frac{2kp}{q}, \ldots, \frac{(q-1)kp}{q}\right\}$ con $kp \equiv 1 (\bmod q)$ como antes.

■

La siguiente proposición nos indica que para homeomorfismos del círculo con número de rotación racional todas las órbitas no periódicas son asintóticas a orbitas periódicas. Esto nos da una completa descripción de posibles órbitas con número de rotación racional. Pero antes definimos lo que son los puntos homoclínicos e heteroclínicos.

DEFINICIÓN II.3.1.1. Sea $f : X \to X$ un homeomorfismo de un espacio métrico (X, d), el punto $x \in X$ es llamado homoclínico para el punto $y \in X$ si

$$\lim_{n\to\infty} d\left(f^{n}(x), f^{n}(y)\right) = 0$$

y será llamado heteroclínico para los puntos $y_1, y_2 \in X$ si

$$\lim_{n\to\infty} d\left(f^{n}(x), f^{n}(y_1)\right) = \lim_{n\to-\infty} d\left(f^{n}(x), f^{n}(y_2)\right) = 0$$

PROPOSICIÓN II.3.1.3. *Sea $f : S^1 \to S^1$ un homeomorfismo preservando orientación con número de rotación racional $\tau(f) = \frac{p}{q} \in Q$, entonces son dos posibles tipos de órbitas no periódicas para f.*

i) *Si f tiene exactamente una órbita periódica, entonces cualquier otro punto es heteroclínico bajo f^{q} para dos puntos en la órbita periódica. Estos puntos son diferentes si el periodo es mayor que 1.*

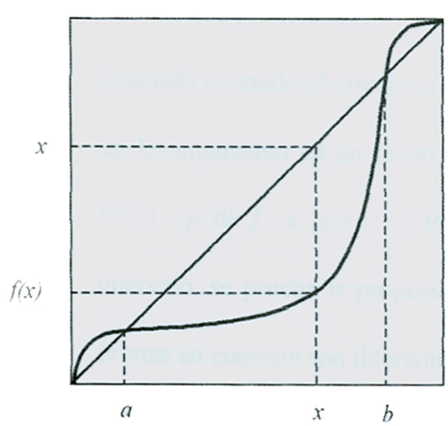
ii) *Si f tiene más de una órbita periódica, entonces cada punto no periódico es heteroclinico bajo f^q para dos puntos en orbitas periódicas diferentes.*

Para la prueba de esta proposición usaremos un lema, de manera que primeramente mencionaremos y probaremos el lema siguiente:

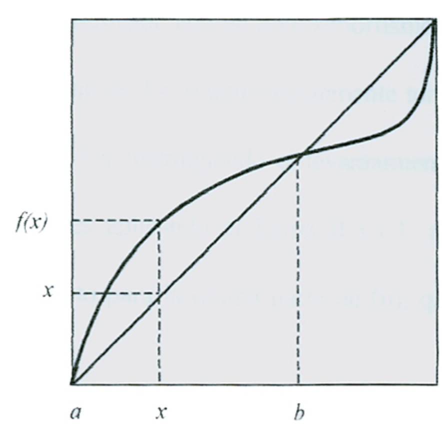
LEMA II.3.1.1. *Si $I \subset \boldsymbol{R}$ es un intervalo cerrado y $f : I \to I$ es una función continua no decreciente, entonces, todo $x \in I$ es asintótico a un punto fijo de f. Si f es creciente, por tanto invertible, entonces todo $x \in I$ es positivo o negativamente asintótico a puntos fijos adyacentes.*

Prueba:

Tenemos que notar que fix(f) es un conjunto cerrado y no vacío por el Teorema del Valor Intermedio. Si I = fix(f) entonces no habría nada que demostrar. Entonces, consideremos $x \in I \setminus \text{fix}(f)$ y sea $\langle a, b \rangle$ el máximo intervalo abierto contenido en $I \setminus \text{fix}(f)$ conteniendo a x.



f(x)<x



f(x)>x

Consideremos el caso cuando $f(x) > x$ para un $x \in \langle a, b \rangle$ (el otro caso será análogo). Entonces, sea $x_n = f^n(x)$ una sucesión no decreciente acotado por b, de aquí, será convergente para algún $x_o \in \langle a,b]$, es decir,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_o$$

de aquí

$$\lim_{n\to\infty} x_{n-1} = f(x_o)$$

entonces tenemos que $x \in \mathrm{fix}(f)$, y en verdad, $x_o = b$.

En el caso en que $f(x) < x$ tendremos que $f^{n}(x) \to a$ para todo $x \in \langle a,b\rangle$ cuando $n \to \infty$.

Ahora, si f es creciente, por tanto invertible, entonces tenemos que el signo de $f^{-1} - Id$ es opuesto al de $f - Id$ en el intervalo $\langle a,b\rangle$, así cada $x \in \langle a,b\rangle$ es positivo o negativamente asintótico a puntos fijos adyacentes.

■

Prueba de la Proposición II.3.1.3.

Notese primero que f^{q} puede ser identificado con un homeomorfismo de un intervalo cortando el círculo en el punto fijo de f^{q}, o equivalentemente tomando un levantamiento en un punto fijo z de f^{q} y restringiendo el levantamiento de $F^{q}(.) - p$ de f a $[z, z+1]$. Pero entonces aplicando el Lema II.3.1.1. a este intervalo, se prueba la proposición, excepto para la última parte de (ii), que las órbitas en cuestión son diferentes.

Pero si hay un intervalo $I = [a,b] \subset \boldsymbol{R}$ tal que a y b son ceros adyacentes de $F^{q} - Id - p$ y a, b proyectan a la misma órbita, entonces f tiene una sola órbita periódica porque si $\pi(a) = x \in S^1$ y $\pi(b) = f^{k}(x) \in S^1$ entonces $\bigcup_{n=0}^{q-1} f^{nk}\pi\langle a,b\rangle$

único iterado de y_0 ubicado entre x_1 y x_{k+1}, así que debe ser igual a $f(y_0)$.

Ahora, para construir la conjugación debemos observar de (i) que, es suficiente construir asumiendo que $p = 1$ (para conjugar f^k con $\Re_{\frac{1}{q}}$). Tomemos un homeomorfismo $h : [x_0, x_k] \to \left[1, \exp\frac{1}{q}\right]$.

Afirmación 2: $h \mid_{[x_0,x_k]\cap Per(f)}$ se extiende al conjunto de $Per(f)$

En efecto, sea $y \in Per(f)$ entonces $f^n(y) \in \langle x_0, x_k\rangle$ para algún $0 \leq n < q-1$ dependiendo de y. Luego, $h\left(f^n(y)\right) \in \left\langle 1, \exp\frac{1}{q}\right\rangle$. Ahora, como $\Re_\tau$ es una rotación entonces el punto $\Re_\tau^{-n}\left(h\left(f^n(y)\right)\right)$ es único y depende de y, así podemos definir la extensión de h como

$$h : Per(f) \to Per(\Re_\tau)$$

$$x \mapsto h(y) = \Re_\tau^{-n}\left(h\left(f^n(y)\right)\right)$$

con $0 \leq n < q-1$ dependiendo de y. De aquí, se prueba que $h \circ f = \Re_\tau \circ h$.

■

II.3.2. NÚMERO DE ROTACIÓN IRRACIONAL

El primer paso en este caso es mostrar que las órbitas de un homeomorfismo del círculo f con número de rotación $\tau(f) \in \boldsymbol{R} \setminus \boldsymbol{Q}$ son ordenadas como las de una rotación $\Re_{\tau(f)}$ por $\tau(f)$.

PROPOSICIÓN II.3.2.1. *Sean $F : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ un levantamiento de $f : S^1 \to S^1$ un homeomorfismo del círculo preservando orientación con número de rotación irracional $\tau(f) \in \boldsymbol{R} \setminus \boldsymbol{Q}$. Entonces para $n_1, n_2, m_1, m_2 \in \boldsymbol{Z}$ se cumple:*

$n_1\tau + m_1 < n_2\tau + m_2$ sí y sólo si $F^{n_1}(x) + m_1 < F^{n_2}(x) + m_2$ para $x \in \boldsymbol{R}$.

Prueba:

Primero observe que la expresión siguiente dada para $n_1, n_2, m_1, m_2 \in Z$

$$p(x) = F^{n_1}(x) + m_1 - F^{n_2}(x) - m_2$$

nunca cambia de signo, lo cual implica que es independiente del punto x, esto se debe a que si $p(\bullet)$ cambia de signo, existiría un $z \in R$ tales que $F^{n_1}(z) + m_1 - F^{n_2}(z) - m_2 = 0$, pero esto indica que z se está proyectando a ser un punto periódico, lo cual es imposible debido a que el número de rotación es irracional.

Ahora, asumamos que $F^{n_1}(0) + m_1 < F^{n_2}(0) + m_2$, si $y = F^{n_2}(0)$ obtenemos que $F^{n_1-n_2}(y) - y < m_2 - m_1$, pero esta desigualdad vale para todo $y \in R$, entonces, en particular tomemos $y = 0$, $y = F^{n_1-n_2}(0)$ obteniendo así:

$$F^{n_1-n_2}(0) < m_2 - m_1$$

y

$$F^{2(n_1-n_2)}(0) < F^{n_1-n_2}(0) + m_2 - m_1 < 2(m_2 - m_1)$$

e inductivamente probamos que $F^{n(n_1-n_2)}(0) < n(m_2 - m_1)$ y así

$$\tau = \lim_{n\to\infty} \frac{F^{n(n_1-n_2)}(0)}{n(n_1 - n_2)} < \lim_{n\to\infty} \frac{n(m_2 - m_1)}{n(n_1 - n_2)} = \frac{m_2 - m_1}{n_1 - n_2}$$

Concluyendo que $n_1\tau + m_1 < n_2\tau + m_2$ con la desigualdad estricta. Similarmente si $F^{n_1}(x) + m_1 > F^{n_2}(x) + m_2$, entonces $n_1\tau + m_1 > n_2\tau + m_2$, y la igualdad nunca ocurre en uno u otro lado, ya que $\tau \in R \setminus Q$ y f no tiene órbitas periódicas.

Nos faltaría probar que si $n_1\tau + m_1 < n_2\tau + m_2$ entonces

$F^{n_1}(x) + m_1 < F^{n_2}(x) + m_2$ para $x \in R$. Lo haremos por contradicción.

Supongamos que existe $x \in R$ tales que si $n_1\tau + m_1 < n_2\tau + m_2$ y que $F^{n_1}(x) + m_1 > F^{n_2}(x) + m_2$, o lo que es lo mismo que, $n_1\tau + m_1 < n_2\tau + m_2$ y $F^{n_2}(x) + m_2 < F^{n_1}(x) + m_1$, pero vemos nuevamente que la expresión $p(x) = F^{n_2}(x) + m_2 - F^{n_1}(x) - m_1$ nunca puede cambiar de signo ni para este punto x ni para cualquier otro punto, entonces, nunca cambia de signo cualquiera que sea x, luego esta expresión vale para todo $x \in R$.

Usando el argumento anterior, tomemos que si

$$F^{n_2}(x) + m_2 < F^{n_1}(x) + m_1$$

llegamos a que $n_2\tau + m_2 < n_1\tau + m_1$, o lo que es lo mismo, $n_1\tau + m_1 > n_2\tau + m_2$, esto contradice a la asunción hecha. De manera que si

$$n_1\tau + m_1 < n_2\tau + m_2 \text{ entonces } F^{n_1}(x) + m_1 < F^{n_2}(x) + m_2$$

■

La proposición anterior nos lleva a alguna semejanza que resultaba cuando considerabamos homeomorfismos con número de rotación racional: las órbitas periódicas son ordenadas del mismo modo que las órbitas de su correspondiente rotación. Además, determinamos que las órbitas no periódicas son asintóticas a unas que son periódicas. Esto último nos motiva a estudiar el comportamiento asintótico de órbitas para homeomorfismos con número de rotación irracional, es decir, cuando el homeomorfismo es libre de puntos periódicos.

Recordemos que para un $x \in S^1$, $\varpi(x)$ se define como el conjunto de puntos de acumulación de la sucesión $\{f^n(x)\}_{n \in Z^-}$.

PROPOSICIÓN II.3.2.2. *Sea $f : S^1 \to S^1$ un homeomorfismo preservando orientación con número de rotación $\tau(f) \in \boldsymbol{R} \setminus \boldsymbol{Q}$. Entonces:*

i) *El conjunto $\varpi(x)$ es independiente de x.*

ii) *$E = \varpi(x)$ es perfecto y, nunca denso ó el círculo.*

Antes de realizar la prueba, mencionaremos un lema a utilizarse en la prueba de la proposición.

LEMA II.3.2.1. *Sea $f : S^1 \to S^1$ un homeomorfismo preservando orientación con número de rotación $\tau(f) \in \boldsymbol{R} \setminus \boldsymbol{Q}$, $m, n \in Z$, $m \neq n$, $x \in S^1$ y $I \subset S^1$ un intervalo cerrado con puntos finales $f^m(x)$ y $f^n(x)$. Entonces, toda semiórbita intersecta I, es decir, $\forall y \in S^1$, existe $k > 0$ tal que $f^k(y) \in I$.*

Observación: Para $x \neq y \in S^1$ son exactamente dos intervalos en S^1 con puntos finales en x e y. El lema vale para cualquier selección.

Prueba:

Consideremos la órbita positiva $O_f^+(x) = \{f^n(x) : n \in Z^+\}$. La prueba para la órbita negativa es exactamente la misma. Para probar el lema es suficiente mostrar que el círculo S^1 está cubierto por iterados negativos de I, es decir, $S^1 \subset \bigcup_{k \in N} f^{-k}(I)$.

Consideremos $I_k = f^{-k(n-m)}(I)$, debemos observar que estos son contiguos, con interiores disjuntos, es decir, si $k \in N$, entonces I_k y I_{k+1} tienen un punto final en común. Esto nos dá dos posibilidades:

i) Estos intervalos cubren S^1 después de un número finito de iterados.

ii) Sus puntos finales convergen monotónicamente a un punto fijo de f^{n-m}.

Pero la segunda posibilidad es imposible ya que esto contradice que el número de rotación $\tau(f) \in R \setminus Q$, así que y es un elemento de $f^{-k(n-m)}(I)$ para algún $k > 0$, concluyendo finalmente que $f^{k(n-m)}(y) \in I$.

∎

Prueba de la proposición II.3.2.2.

i) Independencia de x

Necesitamos mostrar que $\varpi(x) = \varpi(y), \forall x, y \in S^1$. Sea $z \in \varpi(x)$ entonces existe una sucesión $a_n \in N$ tal que $f^{a_n}(x) \to z$. Por otro lado, sea $y \in S^1$, entonces por el lema anterior existe una sucesión $b_n \in N$ tal que $f^{b_n}(y) \in I_n = \left[f^{a_n}(x), f^{a_{n+1}}(x)\right]$ luego $f^{b_n}(y) \to z$, y así $z \in \varpi(y)$., de manera que $\varpi(x) \subset \varpi(y)$. Cambiando los papeles concluimos que $\varpi(x) = \varpi(y)$.

ii) $E = \varpi(x)$ es perfecto y, nunca denso o es el círculo S^1.

a) $E = \varpi(x)$ es perfecto

Como E es cerrado y sea $x = \varpi(x)$ (por la independencia) entonces existe una sucesión b_n tales que $\lim\limits_{n\to\infty} f^{b_n}(x) = x$ pero $f^{b_n}(x) \neq x$ para todo n ya que $\tau(f) \in R \setminus Q$ y no existen órbitas periódicas. De manera que, x es punto de acumulación de E ya que $f^{b_n}(x) \in E$ por invarianza.

b) $E = \varpi(x)$ es nunca denso o el círculo S^1

Notemos que E es el único conjunto minimal cerrado, no vacío y

f–invariante: Si $A \subset S^1$ es un conjunto no vacío, cerrado y $x \in A$ entonces $\left\{f^k(x)\right\}_{k\in Z} \subset A$ puesto que A es invariante y $E = \varpi(x) \subset A$ ya que A es cerrado. Por otro lado, $\emptyset$ y E son los únicos subconjuntos cerrados e invariantes de E y como la frontera ∂E de E es un subconjunto cerrado e invariante de E, concluimos que $\partial E = \emptyset$ ó $\partial E = E$.

- Si $\partial E = \emptyset$, entonces $E = S^1$ y por tanto, todas las órbitas son densas.
- Si $\partial E = E$, entonces tenemos que E es un conjunto perfecto simple con interior vacío, esto es, un conjunto de Cantor, por tanto, E es nunca denso.

$\blacksquare$

La proposición anterior muestra que la estructura orbital de homeomorfismos con número de rotación irracional es muy diferente que el de homeomorfismos con número de rotación racional. Mientras que en el caso de número de rotación racional todas las órbitas son periódicas o asintóticas a órbitas periódicas; para homeomorfismos del círculo con número de rotación irracional todas las órbitas son densas en el círculo o son asintóticas a un conjunto de Cantor.

Ahora, lo que pretendemos es ampliar esta divergencia, volviendo así al problema de conjugación. Es decir ¿Cuándo es que un homeomorfismo es equivalente a una rotación? En el caso de número de rotación racional, esto apenas es claro, ya que todas las órbitas de una rotación racional son periódicas con el mismo periodo y cualquier cambio de "coordenadas" produce nuevamente una función con solamente órbitas periódicas (una función f, de hecho, tal que $f^q = Id$).

Esto sin embargo, está ausente en el caso de número de rotación irracional y hay una íntima conexión con rotaciones irracionales, como veremos a continuación.

Antes de mencionar y probar el Teorema de Poincaré, debemos tener en cuenta que, el homeomorfismo f es transitivo si $E = S^1$ y es no transitivo, en caso contrario. Denotando $\Re_\tau$ la rotación por τ, mencionamos.

TEOREMA II.3.2.1. *(Teorema de Poincaré) Sea $f : S^1 \to S^1$ un homeomorfismo preservando orientación con número de rotación $\tau(f) \in \boldsymbol{R} \setminus \boldsymbol{Q}$. Luego:*

i) Si f es transitiva, entonces, f es conjugado a una rotación $\Re_\tau$.

ii) Si f es no transitivo, entonces, una rotación $\Re_\tau$ es un factor topológico de f por medio de una función continua, monótona no invertible $h : S^1 \to S^1$.

Prueba:

Escojamos un levantamiento $F : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ de f y sea $\tau = \tau(f), x \in \boldsymbol{R}$ y $B = \{F^n(x) + m\}_{n,m \in Z}$ el levantamiento total de la órbita de $\pi(x)$. Se define $H : B \to \boldsymbol{R}$ tal que $F^n(x) + m \longmapsto n\tau + m$ y por la proposición II.3.2.1. tenemos que esta función es monótona. También debemos notar que $H(B)$ es denso en $\boldsymbol{R}$.

Ahora, consideraremos la rotación $\widehat{\Re}_\tau : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ definido por $x \longmapsto x + \tau$ entonces $H \circ F = \widehat{\Re}_\tau \circ H$ en B, puesto que

$$H \circ F(F^n(x) + m) = H(F^{n+1}(x) + m) = (n+1)\tau + m$$

y

$$\widehat{\Re}_\tau \circ H(F^n(x) + m) = \widehat{\Re}_\tau(n\tau + m) = (n + 1)\tau + m$$

Afirmación: H tiene una extensión continua a la clausura $\overline{B}$ de B.

En efecto, si $y \in \overline{B}$ entonces existe una sucesión $\{x_n\}_{n\in N} \subset B$ tal que $y = \lim_{n\to\infty} x_n$. Queremos mostrar que H está definido en y, es decir, que $\lim_{n\to\infty} H(x_n)$ existe. Para mostrar que el límite existe y es independiente de la selección de la sucesión aproximada a y, observe primero que los límites superior e inferior existen y son independientes de la sucesión, puesto que H es monótona. Si los límites superior e inferior difieren, entonces $\boldsymbol{R}\setminus H(B)$ contiene un intervalo, lo cual contradice la densidad de $H(B)$.

Ahora, H puede ser fácilmente extendida a $\boldsymbol{R}$: Pueso que $H : \overline{B} \to \boldsymbol{R}$ es monótona y suryectiva (pues H es monótona y continua en B, $\overline{B}$ es cerrado y $H(B)$ es denso en $\boldsymbol{R}$) no hay elección en definir H en los intervalos complementarios a $\overline{B}$, estableciendo H =constante en estos intervalos, escogiendo la constante igual a los valores en los puntos finales. Entonces está dada una función $H : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ tales que $H \circ F = \widehat{\Re}_\tau \circ H$ y así tenemos una semiconjugación $h : S^1 \to S^1$ puesto que para $z \in B$ tenemos

$$H(z + 1) = H(F^n(x) + m + 1) = n\tau + m + 1 = H(z) + 1$$

y esta propiedad persiste bajo extensiones constinuas.

El teorema ahora sigue de la observación hecha, de que si f es transitiva, entonces todas las órbitas son densas en el círculo y $\overline{B} = \boldsymbol{R}$ y h es una biyección.

■

CAPITULO III

DIFEOMORFISMOS DEL CÍRCULO Y EL TEOREMA DE DENJOY

En el capitulo anterior bosquejamos la teoria clásica de homeomorfimos del círculo S^1 considerando números de rotación racional e irracional, y vimos que el caso más interesante es describir dinámicas de homeomorfismos con número de rotación irracional pues el caso racional resultó ser trivial. Considerando esto, Poincaré probó que un homeomorfismo del círculo con número de rotación irracional es semiconjugado o conjugado a una rotación, dependiendo de la no transitividad o transitividad del homeomorfismo.

En el presente capítulo, se trata de llegar a la misma primera conclusión del Teorema de Poincaré pero bajo efectos de diferenciabilidad sobre el homeomorfismo, este trabajo fue realizado por Denjoy. El prueba que un homeomorfismo continuamente diferenciable puede ser transitivo o no transitivo, y de aquí, conjugado o semiconjugado a una rotación (por el Teorema de Poincaré). Para una mayor comprensión dividiremos este resultado en dos partes, de acuerdo a las hipótesis que podamos considerar: El Teorema de Denjoy y el Ejemplo de Denjoy (anexo). En el teorema de Denjoy se prueba que un difeomorfismo del círculo de clase C^1 es transitiva y de aquí, conjugado a una rotación, siempre que la derivada del difeomorfismo sea de variación acotada. Ahora, en el ejemplo de Denjoy veremos que si dejamos de lado la hipótesis de que la derivada del difeomorfismo es de variación acotada, entonces el resultado no vale pues se construye un contraejemplo..

III.1. CONTROL DE DISTORSIÓN

DEFINICIÓN III.1.1. Sea $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ una función diferenciable donde **N** es al menos el círculo S^1 o el intervalo $[0, 1]$. Si $T \subset \mathbf{N}$ es un intervalo tal que $\left|f'(x)\right| \neq 0$ para cada $x \in T$, se define la distorsión de f en T como:

$$\text{Dist}(f, T) = \max_{x,y \in T} \log \frac{\left|f'(x)\right|}{\left|f'(y)\right|}$$

Aquí, $\left|f'(x)\right|$ denota la norma o valor absoluto de la derivada de f en el punto x.

LEMA III.1.1. *Sea $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ y $T \subset \mathbf{N}$ un intervalo tal que la restricción de $f^n \circ T$ es un difeomorfismo. Entonces*

$$\text{Dist}\left(f^n, T\right) \leq \sum_{i=0}^{n-1} \text{Dist}\left(f, f^i(T)\right)$$

Prueba:

Para $x \in T$ se tiene que:

$$\left(f^{n}\right)'(x) = \left(f^{n-1} \circ f\right)'(x)$$

Y por la Regla de la Cadena

$$\left(f^{n}\right)'(x) = \left(f^{n-1}\right)'(f(x)).f'(x)$$

$$= \left(f^{n-2} \circ f\right)'(f(x))f'(x)$$

$$= \left(f^{n-2}\right)' f^{2}(x) f'(f(x)).f'(x)$$

Y sucesivamente obtenemos que:

$$\left(f^{n}\right)'(x) = \prod_{i=0}^{n-1} f'\left(f^{i}(x)\right)$$

donde $\prod$ denota producto sucesivo. Entonces luego tenemos:

$$\log \frac{\left|\left(f^{n}\right)'(x)\right|}{\left|\left(f^{n}\right)'(y)\right|} = \log \frac{\left|\prod_{i=0}^{n-1} f'\left(f^{i}(x)\right)\right|}{\left|\prod_{i=0}^{n-1} f'\left(f^{i}(y)\right)\right|} = \log \prod_{i=0}^{n-1} \frac{\left|f'\left(f^{i}(x)\right)\right|}{\left|f'\left(f^{i}(y)\right)\right|} = \sum_{i=0}^{n-1} \log \frac{\left|f'\left(f^{i}(x)\right)\right|}{\left|f'\left(f^{i}(y)\right)\right|}$$

Ahora, como $f^{i}(x), f^{i}(y) \in f^{i}(T)$, por definición tenemos

$$\operatorname{Dist}\left(f, f^{i}(T)\right) = \max_{f^{i}(x), f^{i}(y) \in f^{i}(T)} \log \frac{\left|f'\left(f^{i}(x)\right)\right|}{\left|f'\left(f^{i}(y)\right)\right|}$$

de donde:

$$\log \frac{\left|f'\left(f^{i}(x)\right)\right|}{\left|f'\left(f^{i}(y)\right)\right|} \leq \operatorname{Dist}\left(f, f^{i}(T)\right)$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} \log \frac{\left|f'\left(f^i(x)\right)\right|}{\left|f'\left(f^i(y)\right)\right|} \leq \sum_{i=0}^{n-1} \operatorname{Dist}\left(f, f^i(T)\right)$$

$$\log \frac{\left|\left(f^n\right)'(x)\right|}{\left|\left(f^n\right)'(y)\right|} \leq \sum_{i=0}^{n-1} \operatorname{Dist}\left(f, f^i(T)\right)$$

$$\operatorname{Dist}\left(f^n, T\right) \leq \sum_{i=0}^{n-1} \operatorname{Dist}\left(f, f^i(T)\right)$$

■

COROLARIO III.1.1. *Sea $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ una función de clase C^2 tal que $f'(x) \neq 0$ $\forall x \in \mathbf{N}$. Entonces existe un $c > 0$ con la siguiente propiedad: Si $T \subset \mathbf{N}$ es un intervalo, entonces:*

$$\operatorname{Dist}\left(f^n, T\right) \leq c \sum_{i=0}^{n-1} \left|f^i(T)\right|$$

En particular, si además los intervalos $T, f(T), \ldots, f^{n-1}(T)$ son disjuntos dos a dos

$$\operatorname{Dist}\left(f^n, T\right) \leq c$$

Prueba:

Sean $x, y \in T$, como $f'(x) \neq 0, \forall x \in \mathbf{N}$, es decir la derivada no es cero. Supongamos por el ejemplo que $f'(x) > 0$ y, consideremos la función $h : x \mapsto \log\left|f'(x)\right|$, la cual es de clase C^1, entonces por el teorema del valor medio, existe $z \in \langle x, y\rangle$ tales que

$$h(x) - h(y) = h'(z)(x - y)$$

$$|h(x) - h(y)| = |h'(z)||x - y|$$

esto es que:

$$\left|\log\left|f'(x)\right| - \log\left|f'(y)\right|\right| = \frac{\left|f''(z)\right|}{\left|f'(z)\right|}|x-y|$$

$$\left|\log\frac{\left|f'(x)\right|}{\left|f'(y)\right|}\right| = \frac{\left|f''(z)\right|}{\left|f'(z)\right|}|x-y|$$

Escogemos

$$c = \sup\left\{\frac{\left|f''(z)\right|}{\left|f'(z)\right|}, z \in I = \langle x,y\rangle\right\}$$

Entonces

$$\log\frac{\left|f'(x)\right|}{\left|f'(y)\right|} \leq c|x-y| \leq |T|$$

$$\max_{x,y\in T}\log\frac{\left|f'(x)\right|}{\left|f'(y)\right|} \leq c|T|$$

obteniendo así

$$\mathrm{Dist}(f,T) \leq c|T| \tag{1}$$

Pero por el Lema III.1.1. teníamos que:

$$\mathrm{Dist}\left(f^n,T\right) \leq \sum_{i=0}^{n-1} \mathrm{Dist}\left(f,f^i(T)\right)$$

Luego por la desigualdad (1) tenemos que

$$\mathrm{Dist}\left(f^n, T\right) \leq c \sum_{i=0}^{n-1} \left|f^i(T)\right|.$$

Ahora, si además los intervalos $T, f(T), \ldots, f^{n-1}(T)$ son disjuntos se tiene:

$$\mathrm{Dist}\left(f^n, T\right) \leq c(N) \quad \text{(no dependiendo de } n\text{)}$$

$$\mathrm{Dist}\left(f^n, T\right) \leq c.$$

■

DEFINICIÓN III.1.3. Sea $f : [0,1] \to [0,1]$ una función asociada a una partición $P = \{x_0 = 0 < x_1 < \ldots < x_n = 1\}$, luego tenemos el número

$$V(f, P) = \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|.$$

Diremos que f es de variación acotada si la variación total denotada por $V(f,N)=\sup\left\{V(f,P); P \text{ es partición de } [0,1] = N\right\}$ es finita o equivalentemente, $V(f,N) < \infty$.

Además, debemos notar que toda función de Lipschitz y toda función continuamente diferenciable son de variación acotada.

COROLARIO III.1.2. *Sea f : $\mathbf{N}$ una función de clase C^1 para la cual $x \mapsto \left|\log\left|f'(x)\right|\right|$ tiene variación acotada. Entonces existe $c > 0$ con la siguiente propiedad: Si $T \subset \mathbf{N}$ es un intervalo tal que $T, f(T), \ldots, f^{n-1}(T)$ son intervalos disjuntos dos a dos, entonces:*

$$\mathrm{Dist}\left(f^n, T\right) \leq c$$

Prueba:

De acuerdo a las hipótesis, tenemos que la distorsión de f en el intervalo T es acotado por la variación de $\left|\log\left|f'(.)\right|\right|$ en este intervalo

$$\operatorname{Dist}(f,T) \leq V\left(\log\left|f'(.)\right|,T\right)$$

y por el Lema III.1.1. teníamos

$$\operatorname{Dist}\left(f^{n},T\right) \leq \sum_{i=0}^{n-1} \operatorname{Dist}\left(f,f^{i}(T)\right)$$

$$\operatorname{Dist}\left(f^{n},T\right) \leq \sum_{i=0}^{n-1} V\left(\log\left|f'(.)\right|,f^{i}(T)\right).$$

Ahora, como $T \subset \mathbf{N}$ es tal que $T, f\ (T), \ldots, f^{\ n-1}(T)$ son disjuntos dos a dos, obtenemos

$\operatorname{Dist}\left(f^{n},T\right) \leq V\left(\log\left|f'(.)\right|,\mathbf{N}\right)$ =variación total de la función $x \mapsto \log\left|f'(.)\right|$ en $\mathbf{N}$.

$$\operatorname{Dist}\left(f^{n},T\right) \leq c$$

■

II.2. EL TEOREMA DE DENJOY

A continuación pasaremos a probar el teorema de Denjoy, pero antes debemos considerar los siguientes lemas que se utilizaran para la prueba del teorema mencionado.

LEMA III.2.1. *Si $f : S^1 \to S^1$ es un homeomorfismo con número de rotación irracional, entonces para $x_0 \in S^1$ hay infinitos $n \in N$ tal que los intervalos $f^{k}\left(\left\langle x_0, f^{-n}(x_0)\right\rangle\right)$ para $0 \leq k < n$ son disjuntos dos a dos*

Si denotamos $f^{i}(x_0)$ por x_i, el lema nos indica que las dos siguientes sucesiones finitas:

$$x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$$

$$x_{-n}, x_{1-n}, \ldots, x_{-1}$$

alternan alrededor del círculo (en el sentido que ningún punto de una u otra sucesión es interior al arco $\langle x_0, f^{-n}(x_0)\rangle$). El lema solamente implica la ordenación en la órbita de x_0.

Prueba:

Con la notación $x_k = f^k(x)$ consideremos el intervalo $I = \langle x_0, x_{-n}\rangle = \langle x_0, f^{-n}(x_0)\rangle$.

Ahora como el homeomorfismo f es semiconjugado o conjugado a una rotación irracional (por el Teorema de Poincaré) entonces podemos considerar a f como una rotación irracional, pues solo estamos interesados en el ordenamiento de las órbitas.

Entonces, para probar el lema, escojemos primeramente en forma adecuada los n. Como f es considerada como una rotación, entonces las órbitas de x_0 son densas en el círculo, es decir, $\overline{O_f(x_0)} = S^1$. Luego, si $x_0 \in \overline{O_f(x_0)}$ entonces existe una sucesión $\{x_m\} \subset O_f(x_0)$ tales que $x_m \to x_0$, pero como $\{x_m\} \subset S^1$ entonces existe una subsucesión convergiendo a x_0. Escogemos esta subsucesión $\{x_{n_i}\} \subset \{x_m\}$ tales que x_{n_i} es la primera órbita que llega a la vecindad de x_0 denotada por $V_{x_0}(d(x_{n_{i-1}}, x_0))$. De acuerdo a esto, tenemos que $d(x_0, x_{n_{i-1}}) > d(x_0, x_{n_i})$ donde $n_{i-1} < n_i$.

Ahora tenemos que demostrar que $f^{l}\left(\langle x_0, f^{-n}(x_0)\rangle\right) \cap f^{j}\left(\langle x_0, f^{-n}(x_0)\rangle\right) = \emptyset$ para todo $0 \leq l$, $j < n$. Supongamos por contradicción que existen enteros $0 \leq l < j < n$

tales que

$$f^{l}\left(\left\langle x_0, f^{-n}(x_0)\right\rangle\right) \cap f^{j}\left(\left\langle x_0, f^{-n}(x_0)\right\rangle\right) \neq \emptyset$$

$$\left\langle x_0, f^{-n}(x_0)\right\rangle \cap f^{j-l}\left(\left\langle x_0, f^{-n}(x_0)\right\rangle\right) \neq \emptyset$$

de aquí vemos que $d(x_0, x_{j-l}) < d(x_0, x_{-n})$ para $0 \leq j - l < n$. Esto contradice la manera como hemos escogido los n_i.

■

LEMA III.2.2. *Sea $X = S^1$ ó $X = [0,1]$ con $Y \subset X$. Supóngase que $f : X \to X$ es tal que $f\mid_Y$ es de clase C^1 con f' de variación acotada y que $\left|f'\right|$ no es cero en Y. Sea $V < \infty$ la variación de $\varphi : x \mapsto \log\left|f'(x)\right|$. Si $I \subset Y$ es un intervalo tal que $I, f(I), \ldots, f^n(I)$ son intervalos disjuntos dos a dos en Y y $x, y \in I$ entonces*

$$\exp(-V) \leq \frac{|f'(x)|}{|f'(y)|} \leq \exp(V)$$

Prueba:

$$\left|\log\frac{\left|\left(f^n\right)'(x)\right|}{\left|\left(f^n\right)'(y)\right|}\right| = \left|\log\frac{\prod_{k=0}^{n-1}\left|f'\left(f^k(x)\right)\right|}{\prod_{k=0}^{n-1}\left|f'\left(f^k(y)\right)\right|}\right| = \left|\log\prod_{k=0}^{n-1}\frac{\left|f'\left(f^k(x)\right)\right|}{\left|f'\left(f^k(y)\right)\right|}\right|$$

$$= \left|\sum_{k=0}^{n-1}\left(\log\left|f'\left(f^k(x)\right)\right| - \log\left|f'\left(f^k(y)\right)\right|\right)\right|$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n-1}\left|\log\left|f'\left(f^k(x)\right)\right| - \log\left|f'\left(f^k(y)\right)\right|\right|$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \left| \varphi\left(f^k(x)\right) - \varphi\left(f^k(y)\right) \right| \leq V$$

luego:

$$\left| \log \frac{\left|\left(f^n\right)'(x)\right|}{\left|\left(f^n\right)'(y)\right|} \right| \leq V$$

$$-V \leq \log \frac{\left|\left(f^n\right)'(x)\right|}{\left|\left(f^n\right)'(y)\right|} \leq V$$

$$\exp(-V) \leq \frac{\left|\left(f^n\right)'(x)\right|}{\left|\left(f^n\right)'(y)\right|} \leq \exp(V)$$

■

LEMA III.2.3. *Si f es no conjugado a una rotacion, I es un intervalo en el complemento de $E = \varpi(x)$, $x_0 \in I$ y n es como en el Lema III.2.1. Entonces*

$$\exp(-V) \leq \left(f^n\right)'(x).\left(f^{-n}\right)'(x) \leq \exp(V)$$

para cada $x \in I$

Prueba:

Como todos los $x \in I$ tiene la misma imagen bajo la semiconjugcacion, la colección de $n \in N$ obtenida en el Lema III.2.1. no depende en $x \in I$.

Así podemos aplicar el Lema III.2.2. con $y = f^{-n}(x)$. Como la función $\varphi : x \mapsto \log\left|f'(x)\right|$ es de variación acotada y los intervalos $f^{k}\left(\left\langle x, f^{-n}(x)\right\rangle\right)$ son disjuntos dos a dos para infinitos n con $|k| < n$, tenemos

$$V \geq \sum_{k=0}^{n-1} \left| \varphi\left(f^{k}(x)\right) - \varphi\left(f^{k-n}(x)\right) \right|$$

$$\geq \left| \sum_{k=0}^{n-1} \left[\log\left|f'\left(f^{k}(x)\right)\right| - \log\left|f'\left(f^{k-n}(x)\right)\right| \right] \right|$$

$$= \left| \sum_{k=0}^{n-1} \log \frac{\left|f'\left(f^{k}(x)\right)\right|}{\left|f'\left(f^{k-n}(x)\right)\right|} \right|$$

$$= \left| \log \prod_{k=0}^{n-1} \frac{\left|f'\left(f^{k}(x)\right)\right|}{\left|f'\left(f^{k-n}(x\ \ )\right)\right|} \right|$$

$$= \left| \log \prod_{k=0}^{n-1} \left|f'\left(f^{k}(x)\right)\right| . \frac{1}{\left|f'\left(f^{k-n}(x)\right)\right|} \right|$$

y por la regla de la cadena obtenemos:

$$\left| \log \left| \left(f^{n}\right)'(x) \right| . \left| \left(f^{-n}\right)'(x) \right| \right| \leq V$$

y de aquí

$$\exp(-V) \leq \left(f^{n}\right)'(x). \left(f^{-n}\right)'(x) \leq \exp(V)$$

■

TEOREMA III.2.1. (*El Teorema de Denjoy*). *Un difeomorfismo $f : S^1 \to S^1$ de clase C^1 con un número de rotación $\tau(f) \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ y cuya derivada es de variación acotada, es transitiva y de aquí topológicamente conjugado a una rotación.*

Prueba:

Supongamos que f es no conjugado a una rotación, es decir, es no transitivo, luego existe un intervalo $I \subset S^1 \setminus E = \varpi(x)$. Observe que las imágenes y pre-imágenes son disjuntos dos a dos. Por otro lado, por la definición de longitud y por el Lema III.2.3. juntamente con el cálculo obvio $a + b \geq \max(a,b) \geq \sqrt{ab}$ para $a, b \geq 0$ tenemos que

$$l\left(f^n(I)\right) + l\left(f^{-n}(I)\right) = \int_I \left(f^n\right)'(x)dx + \int_I \left(f^{-n}\right)'(x)dx$$

$$= \int_I \left[\left(f^n\right)'(x)dx + \left(f^{-n}\right)'(x) \right] dx$$

$$\geq \int_I \sqrt{\left(f^n\right)'(x)dx . \left(f^{-n}\right)'(x)}\, dx$$

$$\geq \int_I \sqrt{\exp(-V)}\, dx = l(I)\, e^{-\frac{1}{2}}$$

para infinitos $n \in \mathbf{N}$. De aquí obtenemos que $\sum_{i=-\infty}^{\infty} l\left(f(I)\right) = \infty$, lo cual nos indica que los intervalos $\left\{f^{i}(I)\right\}_{i \in \mathbf{Z}}$ no pueden ser disjuntos, esto es una contradicción.

Así, un difemorfismo con derivada continua y de variación acotada y con número de rotación irracional es transitiva.

■

ANEXO

EL EJEMPLO DE DENJOY

El Teorema de Denjoy, descrito en el capítulo III es un tanto aproximado a ser óptimo. Sin embargo,, en esta parte del anexo, construiremos un ejemplo que muestra que la regularidad de hipótesis que se usó para demostrar el Teorema de Denjoy no pueden ser obviadas, pues si esto ocurriera, podemos conseguir un difeomorfismo del círculo no transitivo cuya primera derivada tiene exponente α –Hölder arbitrariamente aproximado a 1. Dicho de otra manera, un difeomorfismo del círculo puede resultar no transitivo si el requerimiento de la variación acotada es dejada de lado. La idea básica de la construcción es comenzar con una rotación irracional y reemplazar los puntos de una órbita por intervalos cerrados con longitudes escogidas convenientemente. La función resultante es no transitiva. Así, el ejemplo de Denjoy prueba que:

PROPOSICIÓN . Para $\tau \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$, $\alpha \in \langle 0, 1 \rangle$ existe un difemorfismo no transitivo de clase C^1 $f : S^1 \to S^1$ con derivada α – Hölder y número de rotación $\tau(f) = \tau$

Prueba:

Sea $k \in \mathbf{N}$, $\alpha = \dfrac{k}{k+1}$, $l_n = \left(|n| + (2k)^k + 1\right)^{-\left(1+\frac{1}{k}\right)}$ y $c_n = 2\left(\dfrac{l_{n+1}}{l_n} - 1\right) \geq -1$

Primeramente observemos que

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}} l_n < 2\sum_{n=0}^{\infty} l_n = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\left(|n| + (2k)^k + 1\right)^{1+\frac{1}{k}}} = 2\sum_{n=(2k)^k+1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{k}}} < 2\int_{(2k)^k}^{\infty} \frac{1}{x^{1+\frac{1}{k}}}dx = 1$$

teniendo entonces que

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}} l_n < 1$$

Para explotar las órbitas $x_n = (\Re_\tau)^n(x)$ de la rotación irracional $\Re_\tau$ por intervalos I_n de longitud l_n, insertamos los intervalos I_n dentro de S^1 en lugar de las órbitas x_n,de manera que ellos son ordenados en el mismo orden que los puntos x_n. Entonces, el espacio que existe entre cualquiera dos de tales intervalos I_m y I_n es exactamente

$$\left(1 - \sum_{n \in \mathbf{Z}} l_n\right) d(x_m, x_n) + \sum_{x_k \in (x_m, x_n)} l_k$$

Esta es la suma de las longitudes de los intervalos I_k insertados entre ambos intervalos y la longitud del arco del círculo de x_m a x_n, escala apropiada para reflejar el hecho que la longitud total de $S^1 - \bigcup_{n \in \mathbf{Z}} I_n$ es $1 - \sum_{n \in \mathbf{Z}} l_n$.

Entonces para definir un homeomorfismo del círculo f tal que $f(I_n) = I_{n+1}$ y $f\mid_{S^1 - \bigcup_{n \in \mathbf{Z}} I_n}$ es semiconjugado una rotación, es suficiente especificar la derivada $f'(x)$ puesto que f es entonces obtenido por integración.

En el intervalo $[a, a + l]$ definimos la función tentativa

$$g(a, l, x) = 1 - \frac{1}{l}|2(x - a) - l|$$

y note que $g\left(a, l, a + \frac{l}{2}\right) = 1$ y $\int_a^{a+l} g(a, l, x)dx = \frac{l}{2}$.

Denote el punto final izquierdo de I_n por a_n y sea

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in S^1 - \bigcup_{n \in \mathbf{Z}} I_n \\ 1 + c_n g(a_n, l_n, x) & \text{si } x \in I_n \end{cases}$$

Entonces, el homeomorfismo f estará dado por

$$f(x) = \int_{a_n}^{x} f'(t)dt + a_{n-1}$$

de manera que

$$f(a_n) = \int_{a_n}^{a_n} f'(t)dt + a_{n+1} = a_{n+1}$$

y

$$f(a_n + l_n) = \int_{a_n}^{a_n+l_n} f'(t)dt + a_{n+1} = \int_{a_n}^{a_n+l_n} (1 + c_n g(a_n, l_n, t))dt + a_{n+1}$$

$$= \int_{a_n}^{a_n+l_n} dt + c_n \int_{a_n}^{a_n+l_n} g(a_n, l_n, t)dt + a_{n-1}$$

$$= a_{n-1} + l_{n-1}$$

y así necesariamente tenemos que $f(I_n) = I_{n-1}$.

Es claro que, f así definido es un difeomorfismo ya que $f'(x) > 0$. Antes de probar que f' tiene exponente α –Hölder, consideremos la siguiente afirmación

Afirmación 1. Si $\alpha \in \langle 0, 1 \rangle$ y M_α una constante positiva, luego se cumple que si $|c_n| \leq M_\alpha \left(\frac{l_n}{2}\right)^\alpha$ para todo $n \in \mathbf{Z}$ entonces $\left|f'(x) - f'(y)\right| \leq M_\alpha |x - y|^\alpha$ en $I_n (n \in \mathbf{Z})$ y de aquí en S^1.

En efecto, si $x, y \in I_n$ tenemos que

$$\left|f'(x) - f'(y)\right| \leq M_\alpha \left(\frac{l_n}{2}\right)^\alpha [|g(a_n, l_n, x)| - |g(a_n, l_n, y)|]$$

$$\leq M_\alpha \left(\frac{l_n}{2}\right)^\alpha \left|1 - \frac{1}{l_n}|2(x - a_n) - l_n| - 1 + \frac{1}{l_n}|2(y - a_n) - l_n|\right|$$

$$= M_\alpha \left(\frac{l_n}{2}\right)^\alpha \frac{1}{l_n} ||2(y - a_n) - l_n| - |2(x - a_n) - l_n||$$

$$\leq M_\alpha\left(\frac{l_n}{2}\right)^\alpha \frac{2}{l_n}|y-x|. \text{ Hagamos } 1 = \alpha + \varepsilon$$

$$\leq M_\alpha 2^{1-\alpha}|y-x|^\alpha$$

Ahora sí, solo queda por probar que $|c_n| \leq M_\alpha\left(\frac{l_n}{2}\right)^\alpha$. Para probar esto consideremos el caso cuando $n \geq 0$ y sea $m = \left(n + (2k)^k + 1\right)$. Ahora, notemos que $(1+x)^{-\beta} = 1 - \beta.x + O(x^2)$ por la expansión de Taylor, luego tenemos

$$\left|\left(1+\frac{1}{m}\right)^{-\beta} - 1\right| < 2\beta.\frac{1}{m} \qquad (1)$$

para infinitos $m \in \mathbf{N}$. Por consiguiente

$$\frac{1}{2}|c_n|l_n^{-\alpha} = l_n^{-\frac{k}{k-1}}\left|\frac{l_{n-1}}{l_n} - 1\right| = m\left|\left(\frac{m+1}{m}\right)^{-\frac{k+1}{k}} - 1\right|$$

$$= m\left|\left(1+\frac{1}{m}\right)^{-\frac{k+1}{k}} - 1\right| < 2\frac{k+1}{k} = \frac{2}{\alpha}$$

y así

$$|c_n|\frac{l_n}{2^{-\alpha}}^{-\alpha} < \frac{2^2}{2^{-\alpha}\alpha}$$

$$|c_n|\left(\frac{l_n}{2}\right)^{-\alpha} < \frac{2^{2-\alpha}}{\alpha}$$

teniendo que

$|c_n| \leq M_\alpha\left(\frac{l_n}{2}\right)^\alpha$ con $M_\alpha = \frac{2^{2+\alpha}}{\alpha}$ esto para infinitos $n \in \mathbf{N}$.

El caso $n < 0$ es tratado similarmente, por tanto se concluye que

$$|c_n| \leq M_\alpha\left(\frac{l_n}{2}\right)^\alpha$$

así f' es α –Hölder continua.

BIBLIOGRAFÍA

1. Anatole Katok, Boris Hasselblatt. *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*. Cambridge University Press 1995. Estados Unidos de Norteamérica 387– 404.

2. Jacob Palis, Junior; Welington de Melo. *Introdução aos Sistemas Dinámiocs*. Editora Edgard Blücher, 4da. São Paulo 1998.

3. Lages Lima, Elon. *Grupo Fundamental e Espaços de Recobrimento*, IMPA; Rio de Janeiro, Brasil 1993.

4. Nitecki, Zbigniew. *Diffentiable Dynamics*. Mit Press Cambridge, MA, 1997.

5. Welington de Melo. *Lectures on one dimensional Dynamics*, 17° Colóquio Brasileiro de Matemática. Instituto de Matemética Pura e Aplicada do CNPq. Brasil.