

**UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS**

Sección de Posgrado y Segunda Especialización Profesional



Tesis para Optar el Grado Académico de
Maestro en Ciencias con mención en Física

**"Métodos Asintóticos en la Teoría de Oscilaciones No
Lineales de Sistemas Dinámicos Con Varios Grados De
Libertad"**

Presentada por:

Manuel Enrique Brocca Pobes

LIMA - PERÚ

2010

Índice general

1. Teoría de las oscilaciones	7
1.1. Coordenadas generalizadas	7
1.2. El principio de mínima acción	9
1.3. Oscilaciones	13
1.4. Movimiento alrededor de la posición de equilibrio	15
2. Método de perturbaciones	21
2.1. Método Directo	21
2.2. Método del promedio	24
2.2.1. Técnica del promedio de Krylov–Bogoliubov	24
2.2.2. Generalización del método del promedio	26
2.3. Método de múltiples escalas	30
2.3.1. Versión de derivada expandida	33
2.3.2. Procedimiento de expansión en dos variables	37
2.3.3. Aplicación del Método de la derivada expandida	39
2.4. Método de Krylov–Bogoliubov	44
2.4.1. Aplicación a la ecuación de Duffing	50
2.4.2. Aplicación a la ecuación de Van Der Pol	55
2.4.3. Características generales del método	62
3. Desarrollo del método de Krylov–Bogoliubov a sistemas	

dinámicos no lineales con dos grados de libertad	65
3.1. Desarrollo del método Krylov–Bogoliubov a sistemas dinámicos no lineales con dos grados de libertad	65
3.1.1. Determinación de la función ξ_{11}	71
3.1.2. Determinación de la función ξ_{21}	74
3.2. Aplicación del método de Krylov–Bogoliubov al sistema dinámico péndulo-resorte (SDPR)	75
3.2.1. Lagrangiano y ecuaciones de movimiento del sistema dinámico péndulo-resorte (SDPR)	75
3.2.2. Solución de las ecuaciones acopladas del SDPR por el método de Krylov Bogolivbov	80
3.2.3. Comparación de los resultados hallados utilizando el método de Krylov Bogolivbov con el método de Runge Kutta	85
3.2.4. Comparación de los resultados hallados por los métodos KB, RK y el experimento	109
4. Conclusiones	112

Resumen

Se estudia y desarrolla la expansión del método de Krylov–Bogoliubov para el caso de sistemas dinámicos no lineales con un grado de libertad al de dos grados de libertad. Hemos encontrado un sistema de ecuaciones que nos permite hallar en general soluciones analíticas aproximadas. Aunque este trabajo describe cómo hallar las soluciones hasta el segundo orden de aproximación se puede aplicar el procedimiento para obtener soluciones con un orden de aproximación mayor. Se ha aplicado el método expandido de Krylov–Bogoliubov desarrollado, al sistema péndulo-resorte hallándose una solución analítica hasta el primer orden de aproximación, posteriormente se han comparado los resultados hallados con el método numérico de Runge Kutta encontrándose un rango para el cual ambos métodos coinciden notablemente y otro en el cual discrepan.

Introducción

Muchos de los problemas que enfrentan actualmente los ingenieros, físicos y matemáticos es el modelar un fenómeno que pueda llevar a la obtención de una representación matemática de las relaciones existentes entre las diferentes variables involucradas en el fenómeno. Este proceso muchas veces conlleva a la obtención de ecuaciones diferenciales, cuya solución permite conocer la respuesta temporal del sistema. Hallar una solución analítica del problema si se trata de varias ecuaciones diferenciales se vuelve pues un trabajo difícil y en algunos casos imposible, por lo que se requiere hacer estudios que permitan obtener una solución aproximada para analizar el comportamiento del sistema. Uno de los métodos utilizados para el estudio de las oscilaciones no lineales es el desarrollado por Nikolay Krylov y Nikolay Bogoliubov en la que básicamente se demuestra que las soluciones del sistema en promedio se aproximan a la de la ecuación diferencial exacta, Krylov y Bogolyubov trabajaron juntos desde 1931 en los problemas de la mecánica y de las oscilaciones no lineales y fueron figuras claves en la Escuela de Kiev de la investigación de las oscilaciones no lineales. Entre algunos de sus trabajos destacan por ejemplo "la cuasi periodicidad de las soluciones no lineales en la mecánica (1934)" y el libro Introducción a la mecánica no lineal (1937, traducido al inglés en 1947) describiendo en esta última un algoritmo general, conocido como el método de Krylov–Bogolyubov, aplicado a sistemas dinámicos con varios grados de libertad de frecuencias de oscilación iguales. En el presente trabajo se extiende el método a sistemas dinámicos con dos grados de libertad con diferentes frecuencias de oscilación. Se estudia el método de Krylov–Bogoliubov para el caso de Sistemas dinámicos no

lineales con un grado de libertad y los métodos del promedio y el de múltiples variables llegándose a la conclusión que el primero es una generalización, donde se incluyen los efectos no lineales como son la dependencia temporal de la amplitud máxima y la frecuencia, además hemos comprobado la convergencia de los tres métodos hasta el segundo orden de aproximación. Este primer estudio es la base que nos permite luego hacer la expansión del método de Krylov–Bogoliubov para el caso de sistemas dinámicos no lineales con dos grados de libertad con diferentes frecuencias de oscilación. La expansión del método desarrollado permite encontrar un sistema de ecuaciones que nos permite hallar soluciones analíticas aproximadas. Aunque este trabajo describe cómo hallar las soluciones hasta el segundo orden de aproximación se puede aplicar el procedimiento para obtener soluciones con un orden de aproximación mayor. Además se ha observado que estas soluciones poseen términos proporcionales a la inversa de la diferencia de las frecuencias de los modos normales de oscilación del sistema, el cual permite la existencia de condiciones de resonancia. Se aplica el método expandido de Krylov–Bogoliubov desarrollado, al sistema péndulo-resorte hallándose una solución analítica hasta el primer orden de aproximación, el análisis de esta solución a través de las gráficas de las coordenada de posición con el tiempo y el ángulo θ con el tiempo, muestran el comportamiento del sistema el cual está en concordancia con su comportamiento real observado. La solución analítica aproximada hallada, predice también al menos una de las relaciones entre los modos normales de oscilación para que se presente la condición de resonancia valor que está en conformidad con lo establecido por otros autores. Es claro que una expansión de orden mayor nos daría otras relaciones entre los modos normales de oscilación para la condición de resonancia tema que puede ser estudiado posteriormente. Finalmente estos resultados se comparan con el método numérico de Runge Kutta, para las siguientes situaciones 1) cuando las frecuencias normales de oscilación toman valores lejos de la condición de resonancia y 2) cuando las frecuencias normales de oscilación toman valores cercanos a la condición de resonancia. En el primer caso, las soluciones no presentan términos que diverjen y se ve que ambos métodos dan los mismos resultados lo cual muestra pues que el método

expandido de Krylov–Bogoliubov desarrollado para el caso de sistemas dinámicos no lineales con dos grados de libertad funciona correctamente. En el segundo caso ambos métodos discrepan significativamente pues la condición de resonancia hace que algunos términos, anteriormente pequeños, sean ahora significativos frente a los demás. Una posterior comparación de este segundo caso con el experimento muestra que el método expandido de Krylov–Bogoliubov es el que más concuerda con los resultados experimentales. Este segundo caso deja abierto un tema de investigación como el de hallar todas las frecuencias normales de oscilación del sistema que satisfagan las condiciones de resonancia utilizando el método expandido de Krylov–Bogoliubov o el de investigar las diferencias entre el método expandido de KB y el método numérico de Runge Kutta. Para la comprensión del presente trabajo se ha organizado de la siguiente manera: En el capítulo 1 hacemos un resumen de la mecánica clásica como son las coordenadas generalizadas, el principio de mínima acción, oscilaciones y movimiento alrededor de la posición de equilibrio. En el capítulo dos hacemos referencias a los métodos de perturbación como el método directo, el método del promedio de Krylov–Bogoliubov, el método de múltiples escalas y el método de Krylov–Bogoliubov al caso de sistemas dinámicos con un grado de libertad, cada uno de estos métodos se presentan con ejemplos aplicativos para su rápida comprensión. En el capítulo tres se realiza la expansión del método de Krylov–Bogoliubov a sistemas dinámicos con dos grados de libertad, aplicándose los resultados obtenidos al sistema péndulo resorte, posteriormente casi al final de este capítulo se realiza la comparación de las soluciones obtenidas con el método expandido de Krylov–Bogoliubov y el método numérico de Runge Kutta, a través de gráficas que permiten apreciar las coincidencias y discrepancias de ambos métodos.

Capítulo 1

Teoría de las oscilaciones

Muchos de los problemas que enfrentan actualmente los ingenieros, físicos y matemáticos es el modelar un fenómeno que pueda llevar a la obtención de una representación matemática de las relaciones existentes entre las diferentes variables involucradas en el fenómeno. Este proceso conlleva necesariamente a la obtención de ecuaciones diferenciales, cuya solución permita conocer la respuesta temporal del sistema. Hallar una solución analítica del problema si se trata de varias ecuaciones diferenciales se vuelve pues un trabajo difícil y en algunos casos imposible, por lo que se requiere hacer estudios que permitan obtener una solución aproximada para analizar el comportamiento del sistema. La principal dificultad de estos estudios radica en la ausencia de un método general para tratarlos razón por la cual se recurre al uso de métodos de aproximación, métodos numéricos o una combinación de ambos. El estudio de las oscilaciones en sistemas no lineales ha tomado mucha importancia en los últimos tiempos y su desarrollo nos permite hallar soluciones más acordes a lo real que los métodos lineales, ya que consiste principalmente en afinar las aproximaciones teniendo en cuenta la influencia del entorno.

1.1. Coordenadas generalizadas

Uno de los conceptos fundamentales de la mecánica es el de punto material. Se denomina así a un objeto cuyas dimensiones pueden no considerarse cuando se describe

su movimiento. Por supuesto esta posibilidad depende de las condiciones concretas del problema. Así, podemos considerar los planetas como puntos materiales al estudiar su movimiento alrededor del Sol, pero evidentemente no, cuando se considera su rotación alrededor de sus ejes.

La posición de un punto material en el espacio está determinada por su vector de posición (\mathbf{r}) respecto de un sistema de coordenadas; La derivada de \mathbf{r} con respecto al tiempo ($\frac{d\mathbf{r}}{dt}$) se llama velocidad y la segunda derivada con respecto al tiempo ($\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$) es la aceleración del punto.

La posición de un sistema de N puntos materiales en el espacio 3D, se determina por el vector de posición de cada punto material, \mathbf{r}_i ($i=1,\dots,N$), es decir $3N$ coordenadas. En general, el número de magnitudes independientes que determinan de manera unívoca la posición de un sistema se llama número de grados de libertad del sistema. En el caso que se mueva libremente en el espacio el número de grados de libertad es igual a $3N$; Cuando el movimiento de los puntos materiales no es libre es decir si existen limitaciones sobre el movimiento, dadas por ecuaciones llamadas ligaduras[1] como:

$$f_i(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \dots, t) = 0 \quad i = 1, \dots, k \quad (1.1)$$

entonces el número de grados de libertad es $3N-k = s$. Tengamos en cuenta que las ligaduras del tipo representado por las ecuaciones (1.1), son holónomas, es el caso por ejemplo el de una partícula obligada a moverse a lo largo de una curva o sobre una superficie, en donde las ecuaciones que definen la curva o la superficie son las ecuaciones de ligadura. Las ligaduras que no pueden expresarse de esta forma se denominan no holónomas [2].

Además las ligaduras se clasifican según que sus ecuaciones contengan el tiempo como variable explícita (reónomas) o no (esclerónomas).

Las ligaduras introducen dos tipos de dificultades en la solución de los problemas mecánicos:

i) Las coordenadas de los vectores de posición \vec{r}_i , $i = 1, \dots, N$ ya no son todas independientes puesto que están relacionadas por las ecuaciones de ligadura, por lo tanto las

ecuaciones de movimiento no serán independientes.

ii) Aparecen fuerzas que hacen que el sistema cumpla en todo momento con las condiciones de ligadura y se llaman fuerzas de reacción de ligadura[3].

En el caso de ligaduras holónomas, la primera dificultad se resuelve introduciendo las coordenadas generalizadas. Hasta ahora hemos pensado implícitamente en coordenadas cartesianas. Como ya se mencionó un sistema de N partículas exento de ligaduras tiene $3N$ coordenadas independientes o grados de libertad, si existen ligaduras holónomas, expresadas por k ecuaciones de la forma (1.1), podremos utilizar éstas para eliminar k de las $3N$ coordenadas y nos quedaran $s = 3N - k$ coordenadas independientes y diremos que el sistema posee s grados de libertad. La eliminación de las coordenadas dependientes se puede expresar de otra manera, introduciendo s variables independientes nuevas $q_1, q_2, q_3, \dots, q_s$ en función de las cuales las antiguas coordenadas $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N$ se expresan mediante ecuaciones de la forma:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_1 &= \mathbf{r}_1(q_1, q_2, \dots, q_s, t) \\ \mathbf{r}_j &= \mathbf{r}_j(q_1, q_2, \dots, q_s, t) \\ \mathbf{r}_N &= \mathbf{r}_N(q_1, q_2, \dots, q_s, t)\end{aligned}\tag{1.2}$$

que contienen implícitamente las ligaduras. Estas son ecuaciones de transformación del sistema de variables (\mathbf{r}_i) al sistema de variables (\mathbf{q}_i) , o bien podremos considerar que las ecuaciones (1.2) son representaciones paramétricas de las variables (\mathbf{r}_i) . Se supone también que podemos pasar del sistema (\mathbf{q}_i) al sistema (\mathbf{r}_i) , es decir, que las ecuaciones (1.2) combinadas con las k ecuaciones de ligadura se pueden invertir para obtener cualquier (\mathbf{q}_i) en función de las variables (\mathbf{r}_i) y el tiempo[4].

1.2. El principio de mínima acción

La formulación general de la ley del movimiento de sistemas mecánicos es el principio de mínima acción o principio de Hamilton. Según este principio, todo sistema

mecánico está caracterizado por la función de Lagrange definida como

$$L(q_1, q_2, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s, t),$$

o simplemente

$$L(q, \dot{q}, t)$$

donde $q = (q_1, q_2, \dots, q_s)$ y $\dot{q} = (\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s)$ y el movimiento del sistema satisface la siguiente condición:

Supongamos que en los instantes $t = t_1$ y $t = t_2$ el sistema ocupa posiciones dadas, caracterizadas por los dos conjuntos de valores de las coordenadas $q^{(1)}$ y $q^{(2)}$; el sistema se mueve entre estas posiciones de manera que la integral

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt \quad (1.3)$$

toma un valor extremo, frecuentemente el mínimo[5].

Establezcamos ahora las ecuaciones diferenciales que determinan el extremo de la integral (1.3). Por simplicidad, empecemos suponiendo que el sistema tiene un solo grado de libertad, de manera que hace falta determinar una sola función $q(t)$.

Sea precisamente $q = q(t)$ la función para la cual S es un mínimo. Esto significa que S crece cuando se sustituye $q(t)$ por una función cualquiera:

$$q_i(t) + \delta q_i(t) \quad (i = 1, \dots, s) \quad (1.4)$$

donde $\delta q(t)$ es la variación de la función $q(t)$ y es una función cuyo valor es pequeño en todo el intervalo de t_1 a t_2 . Además suponemos que para $t = t_1$ y $t = t_2$ todas las funciones deben tomar los mismos valores q^1 y q^2 , es decir:

$$\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0 \quad (i = 1, \dots, s) \quad (1.5)$$

La variación de S cuando se reemplaza q por $q + \delta q$ esta dada por:

$$\int_{t_1}^{t_2} L(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}, t) dt - \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt$$

El desarrollo de esta diferencia en serie en potencias de δq y $\delta \dot{q}$ en la expresión bajo el signo integral, comienza por términos de primer orden. La condición necesaria de mínimo de S es que el conjunto de estos términos se anule, se llama la primera variación o simplemente variación de la integral.

Así, el principio de mínima acción puede escribirse:

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt = 0, \quad (1.6)$$

o efectuando la variación:

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) dt = 0$$

Teniendo en cuenta que $\delta \dot{q} = d(\delta q)/dt$, integramos por partes el segundo término y obtenemos:

$$\delta S = \sum_i \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q \right]_{t_1}^{t_2} + \sum_i \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt = 0 \quad (1.7)$$

el primer término de esta expresión desaparece en virtud de las condiciones (1.5). Queda una integral, la cual debe anularse para todo valor de δq . Esto es solamente posible si el integrando es idénticamente nulo y consecuentemente se obtiene la ecuación:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, s)$$

Si hay varios grados de libertad las s funciones diferentes $q_i(t)$ deben variar independientemente. Es evidente que entonces obtenemos s ecuaciones de la forma:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, s) \quad (1.8)$$

Estas son las ecuaciones diferenciales buscadas, en Mecánica se les llama ecuaciones de Lagrange. Si se conoce la función lagrangiana de un sistema mecánico dado entonces las ecuaciones establecen la relación entre las aceleraciones, las velocidades y las coordenadas, es decir, son las ecuaciones del movimiento del sistema.

Desde el punto de vista matemático las ecuaciones (1.8) forman un sistema de s ecuaciones diferenciales de segundo orden, con s funciones desconocidas $q_i(t)$. La solución

general del sistema contiene $2s$ constantes arbitrarias. Para determinarlas y por tanto, para definir completamente el movimiento del sistema mecánico, es necesario conocer las condiciones iniciales que caractericen el estado del sistema en un instante dado, por ejemplo los valores iniciales de las coordenadas y de las velocidades.

Sea un sistema mecánico compuesto de dos partes A y B, que siendo cerradas cada una tendrá su respectiva función lagrangiana L_A y L_B . Si se alejan estas partes suficientemente para que su interacción se haga despreciable, la función lagrangiana del sistema L en el límite tenderá a:

$$L = L_A + L_B \quad (1.9)$$

Esta aditividad de la función lagrangiana expresa el hecho de que las ecuaciones de movimiento de cada una de las partes del sistema, que no interactúen entre si, no pueden contener magnitudes físicas pertenecientes a las otras partes del sistema.

Es evidente que la multiplicación de la función lagrangiana de un sistema mecánico por una constante arbitraria no afecta a las ecuaciones del movimiento. Se podría pensar que de aquí resulta una indeterminación, las funciones de Lagrange de diferentes sistemas mecánicos aislados podrían multiplicarse por diferentes constantes arbitrarias; sin embargo, la propiedad de aditividad de la lagrangiana elimina esta indeterminación, puesto que no admite más que la multiplicación simultánea de las lagrangianas de todos los sistemas por una misma constante, lo que conduce simplemente a una arbitrariedad natural en la elección de las unidades de medida de esta magnitud física.

Se puede hacer una nueva consideración general: Sean dos funciones $L'(q, \dot{q}, t)$ y $L(q, \dot{q}, t)$ que solo difieran en la derivada total con respecto al tiempo de una función cualquiera de las coordenadas y del tiempo $f(q, t)$:

$$L'(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t) + \frac{d}{dt}f(q, t) \quad (1.10)$$

Las integrales calculadas para estas dos funciones están ligadas por la relación

$$S' = \int_{t_1}^{t_2} L'(q, \dot{q}, t)dt = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{df}{dt}dt = S + f(q^2, t_2) - f(q^1, t_1),$$

es decir, difieren en un término que desaparece al variar la acción. De modo que la condición $\delta S' = 0$ coincide con la condición $\delta S = 0$ y la forma de las ecuaciones de movimiento queda invariable. De esta manera, la función de Lagrange se define con la indeterminación aditiva de la derivada total, con respecto al tiempo, de cualquier función de las coordenadas y del tiempo.

1.3. Oscilaciones

Analizaremos el movimiento de sistemas conservativos, con ligaduras holónomas independientes del tiempo. Como se sabe la energía cinética es:

$$K = \sum_i \frac{1}{2} m_i |\vec{v}_i|^2$$

Para tener en cuenta las ligaduras es más cómodo pasar a coordenadas generalizadas según la relación

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_s)$$

donde $i = 1, 2, \dots, N$ y s es el número de grados de libertad del sistema

La energía cinética tiene la forma:

$$K = \sum_{i,j,k} \frac{1}{2} m_i \frac{\partial \vec{r}_i(q)}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i(q)}{\partial q_k} \dot{q}_j \dot{q}_k$$

o simplemente

$$K = \sum_{j,k} \frac{1}{2} m_{jk}(q) \dot{q}_j \dot{q}_k \quad (1.11)$$

donde:

$$m_{jk}(q) = \sum_i m_i \frac{\partial \vec{r}_i(q)}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i(q)}{\partial q_k} = m_{kj}(q)$$

representa un elemento de una matriz simétrica, definida positiva[6].

Si el sistema es conservativo entonces la energía potencial es función solo de la posición y en términos de las coordenadas generalizadas q_i , la energía potencial del sistema será escrita

$$U(q) = U(q_1, q_2, \dots, q_n)$$

y el lagrangiano del sistema es:

$$L = \sum_{j,k} \frac{1}{2} m_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k - U(q_1, q_2, \dots, q_n)$$

aplicando las ecuaciones de Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$$

tenemos las ecuaciones de movimiento

$$\sum_{k=1}^s \frac{d}{dt} (m_{jk} \dot{q}_k) + \frac{\partial U(q)}{\partial q_j} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, s) \quad (1.12)$$

Si para las coordenadas iniciales q_j^0 y su velocidad inicial $\dot{q}_j^0 = 0$ se verifica que $q_j(t) = q_j^0$ y $\dot{q}_j(t) = \dot{q}_j^0 = 0$ entonces $\ddot{q}_j^0(t) = 0$. Esto significa que el sistema se encuentra en equilibrio.

De las ecuaciones de movimiento (1.12) se obtiene:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial q_j} \right)_{q_j^0} = 0 \quad (1.13)$$

que es la condición que corresponde a un valor extremo de la energía potencial.

El concepto de estabilidad está relacionado al comportamiento del sistema para condiciones iniciales próximas al equilibrio. El equilibrio se dice estable si para condiciones iniciales $q_j(0) = q_j^0 + \delta q_j^0$, $\dot{q}_j(0) = 0$ con $\delta q_j^0 > 0$, entonces $\ddot{q}_j^0 < 0$, $\forall j$. Es decir las coordenadas deben variar hacia los valores de equilibrio. Ello impone algunas condiciones a la energía potencial. Desarrollando la ecuación (1.12), se tiene:

$$\sum_{k=1}^s \left(\sum_l \frac{\partial m_{jk}(q)}{\partial q_l} \dot{q}_l \dot{q}_k + m_{jk}(q) \ddot{q}_k \right) + \frac{\partial U}{\partial q_j} = 0$$

al imponer las condiciones de estabilidad obtenemos:

$$\sum_{k=1}^s m_{jk}(q^0 + \delta q^0) \ddot{q}_k(0) + \left(\frac{\partial U}{\partial q_j} \right)_{q^0 + \delta q^0} = 0$$

y si se expande el segundo término hasta el primer orden resulta:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial q_j} \right)_{q^0 + \delta q^0} = \left(\frac{\partial U}{\partial q_j} \right)_{q^0} + \sum_k \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_j \partial q_k} \right)_{q^0} \delta q_k^0$$

por lo que

$$\sum_{k=1}^s m_{jk}(q^0 + \delta q^0) \ddot{q}_k(0) + \left(\frac{\partial U}{\partial q_j} \right)_{q^0} + \sum_k \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_j \partial q_k} \right)_{q^0} \delta q_k^0 = 0$$

Como el segundo término de esta última ecuación es cero tenemos finalmente que

$$\sum_k \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_j \partial q_k} \right)_{q^0} \delta q_k^0 = - \sum_{k=1}^s m_{jk}(q^0 + \delta q^0) \ddot{q}_k(0) > 0$$

de donde:

$$\sum_k \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_j \partial q_k} \right)_{q^0} \delta q_k^0 > 0, \quad \forall j, k$$

es decir que se trata de un mínimo de la energía potencial[7].

1.4. Movimiento alrededor de la posición de equilibrio

Vamos a analizar el movimiento alrededor de una posición de equilibrio estable de un sistema de s grados de libertad. Como las desviaciones del sistema respecto al equilibrio y sus velocidades han de ser pequeñas, todas las funciones se podrán desarrollar en serie de Taylor alrededor de la posición de equilibrio. Conservaremos solamente los términos de segundo y tercer orden y representaremos por ξ_i las desviaciones de las coordenadas generalizadas respecto a las coordenadas del punto de equilibrio:

$$q_i = q_i^0 + \xi_i \tag{1.14}$$

y podremos tomarlas como nuevas coordenadas generalizadas del movimiento.

Desarrollando la energía potencial en torno a q_{0i} , obtenemos[8]

$$\begin{aligned} U(q^0 + \xi) &= U(q^0) + \sum_j \left(\frac{\partial U}{\partial q_j} \right)_{q^0} \xi_j + \frac{1}{2} \sum_{jk} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_j \partial q_k} \right)_{q^0} \xi_j \xi_k + \\ &\quad \frac{1}{6} \sum_{jkl} \left(\frac{\partial^3 U}{\partial q_j \partial q_k \partial q_l} \right)_{q^0} \xi_j \xi_k \xi_l + \dots, \end{aligned}$$

Los términos lineales en ξ_i se anulan automáticamente a consecuencia de las condiciones de equilibrio (1.13). El primer término de la serie es la energía potencial en la

posición de equilibrio y si desplazamos el cero arbitrario de potencial para que coincida con el potencial en equilibrio, también podremos anular este término. Como primera aproximación de U nos quedan, pues, los siguientes términos en ξ_i

$$U(q^0 + \xi) = \frac{1}{2} \sum_{jk} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_j \partial q_k} \right)_{q^0} \xi_j \xi_k + \frac{1}{6} \sum_{jkl} \left(\frac{\partial^3 U}{\partial q_j \partial q_k \partial q_l} \right)_{q^0} \xi_j \xi_k \xi_l \quad (1.15)$$

el cual puede expresarse

$$U = \frac{1}{2} \sum_{jk} U_{jk} \xi_j \xi_k + \frac{1}{6} \sum_{jkl} U_{jkl} \xi_j \xi_k \xi_l \quad (1.16)$$

donde las segundas derivadas de U se han designado por las constantes U_{jk} que sólo dependen de los valores en equilibrio de las q_i y las terceras derivadas se han reemplazado por las constantes U_{jkl} , tal como se muestran

$$U_{jk} = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_j \partial q_k} \right)_{q^0}$$

$$U_{jkl} = \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^3 U}{\partial q_j \partial q_k \partial q_l} \right)_{q^0}$$

Para la energía cinética podemos obtener un desarrollo en serie análogo. Como las coordenadas generalizadas no contienen explícitamente al tiempo, la energía cinética será una función cuadrática y homogénea de las velocidades:

$$T = \sum_{jk} \frac{1}{2} m_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k = \frac{1}{2} \sum_{jk} m_{jk} \dot{\xi}_j \dot{\xi}_k \quad (1.17)$$

Los coeficientes m_{ij} son en general funciones de las coordenadas q_k , pero pueden desarrollarse en serie de Taylor en torno a la configuración en equilibrio:

$$m_{jk}(q^0 + \xi) = m_{jk}(q^0) + \frac{1}{2} \sum_l \left(\frac{\partial m_{jk}}{\partial q_l} \right)_{q^0} \xi_l + \dots$$

Como la ecuación (1.17) ya es cuadrática en las $\dot{\xi}_i$ mantendremos solo los dos primeros términos de los desarrollos de m_{jk} .

Representaremos por T_{jk} a los valores constantes de las funciones m_{jk} en el equilibrio

y por T_{jkl} a las constantes del segundo término, de esta manera podemos escribir la energía cinética en la forma

$$T = \frac{1}{2} \sum_{jk} T_{jk} \dot{\xi}_j \dot{\xi}_k + \frac{1}{2} \sum_{jkl} T_{jkl} \dot{\xi}_l \dot{\xi}_j \dot{\xi}_k \quad (1.18)$$

Finalmente usando las ecuaciones (1.16) y (1.18) el lagrangiano que se obtiene es:

$$L = \frac{1}{2} \sum_{jk} (T_{jk} \dot{\xi}_j \dot{\xi}_k - U_{jk} \xi_j \xi_k) + \frac{1}{2} \sum_{jkl} T_{jkl} \xi_l \dot{\xi}_j \dot{\xi}_k - \frac{1}{6} \sum_{jkl} U_{jkl} \xi_j \xi_k \xi_l \quad (1.19)$$

si las oscilaciones son bastante pequeñas podemos despreciar los dos últimos términos de la función lagrangiana anterior y tendríamos

$$L = \frac{1}{2} \sum_{jk} (T_{jk} \dot{\xi}_j \dot{\xi}_k - U_{jk} \xi_j \xi_k)$$

Esta ecuación es bastante conocida y estudiada y da lugar a las llamadas oscilaciones lineales.

Las ecuaciones de Lagrange nos dan inmediatamente:

$$\sum_k (T_{lk} \ddot{\xi}_k - U_{lk} \xi_k) = 0 \quad (1.20)$$

Siguiendo la regla general de resolución de estas ecuaciones, se buscan s funciones incógnitas $\xi_k(t)$ de la forma:

$$\xi_k = A_k \exp(i\omega t) \quad (1.21)$$

donde las A_k son las constantes a determinar. Sustituyendo la ecuación (1.21) en (1.20), se obtiene un sistema de ecuaciones algebraicas lineales y homogéneas, a las que deben satisfacer las constantes A_k :

$$\sum_k (-\omega^2 T_{lk} + U_{lk}) A_k = 0 \quad (1.22)$$

Para que este sistema tenga soluciones distintas de cero, el determinante de sus coeficientes debe anularse

$$\left| U_{lk} - \omega^2 T_{lk} \right| = 0 \quad (1.23)$$

Esta es la ecuación característica y es de grado s respecto a ω^2 . En general tiene s raíces distintas reales y positivas ω_α^2 . Las magnitudes ω_α así definidas, se llaman frecuencias

propias del sistema.

Una vez determinadas las frecuencias propias ω_α , se sustituyen en las ecuaciones (1.22) y obtenemos los coeficientes correspondientes A_k . Si todas las raíces ω_α de la ecuación característica son distintas, los coeficientes A_k son proporcionales a los menores del determinante (1.23). Sean $\Delta_{k\alpha}$ estos menores, entonces se tiene como solución particular de (1.20)

$$\xi_k = \Delta_{k\alpha} C_\alpha \exp(i\omega_\alpha t) \quad (1.24)$$

siendo C_α una constante compleja arbitraria.

La solución general es la suma de s soluciones particulares. Tomando la parte real escribimos:

$$\xi_k = \operatorname{re} \sum_{\alpha=1}^s \Delta_{k\alpha} C_\alpha \exp(i\omega_\alpha t) \equiv \sum_{\alpha} \Delta_{k\alpha} \Theta_\alpha \quad (1.25)$$

donde

$$\Theta_\alpha = \operatorname{re} [C_\alpha \exp(i\omega_\alpha t)] \quad (1.26)$$

Así la variación con el tiempo de cada coordenada del sistema es una superposición de s oscilaciones periódicas simples $\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_s$ de amplitudes y fases arbitrarias, pero de frecuencias completamente determinadas.

Surge la cuestión natural de si es posible escoger las coordenadas generalizadas de modo tal que cada una de ellas realice una oscilación simple. La forma de la integral (1.24) indica el medio de resolver el problema. En efecto considerando las s relaciones (1.24) como un sistema de s incógnitas Θ_α se puede, resolviendo este sistema, expresar las magnitudes $\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_s$ en función de las coordenadas $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s$. Las magnitudes Θ_α pueden por lo tanto considerarse como nuevas coordenadas generalizadas, llamadas coordenadas *normales* (o principales) y las oscilaciones periódicas simples que realizan se llaman oscilaciones normales del sistema.

Como consecuencia de su definición las coordenadas normales, Θ_α , satisfacen a las ecuaciones:

$$\ddot{\Theta}_\alpha + \omega_\alpha^2 \Theta_\alpha = 0 \quad (1.27)$$

Esto significa que en coordenadas normales las ecuaciones del movimiento se convierten en s ecuaciones independientes. La aceleración de cada coordenada normal sólo depende del valor de esta misma coordenada y para determinar completamente su dependencia con el tiempo, basta conocer los valores iniciales de la coordenada y de la velocidad correspondiente. En otras palabras, las oscilaciones normales del sistema son totalmente independientes.

De todo esto resulta evidente que la función lagrangiana, expresada en coordenadas normales, es una suma de expresiones, cada una de las cuales corresponde a una oscilación lineal de frecuencia ω_α . Es decir la función lagrangiana toma la forma :

$$L = \sum_{\alpha} \frac{1}{2} m_{\alpha} (\dot{\Theta}_{\alpha} - \omega_{\alpha}^2 \Theta_{\alpha}^2) \quad (1.28)$$

donde las m_{α} son constantes positivas. Matemáticamente esto quiere decir que por la transformación (1.25) las dos formas cuadráticas, energía cinética y energía potencial, se disponen simultáneamente en forma diagonal.

Generalmente las coordenadas normales en la lagrangiana se escogen de manera que los coeficientes de los cuadrados de las velocidades sean iguales a un medio. Para ello basta definir nuevas coordenadas normales, Q_{α} , por las igualdades:

$$Q_{\alpha} = \sqrt{m_{\alpha}} \Theta_{\alpha} \quad (1.29)$$

Entonces:

$$L = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} (\dot{Q}_{\alpha}^2 - \omega_{\alpha}^2 Q_{\alpha}^2) \quad (1.30)$$

La teoría de las pequeñas oscilaciones está basada en un desarrollo en serie de las energía potencial y cinética del sistema, con respecto a las coordenadas y a las velocidades, donde se conservan solamente los términos de segundo orden de la ecuación (1.19) dando como resultados que las ecuaciones de movimiento sean lineales. Esto es lo que en esta aproximación permite hablar de las oscilaciones lineales. Aunque este desarrollo sea completamente legítimo cuando las amplitudes de las oscilaciones son suficientemente pequeñas, al tener en cuenta aproximaciones de mayor orden, es decir *la anarmonicidad o no linealidad* de las oscilaciones, aparecen particularidades del

movimiento que, aunque débiles, son cualitativamente nuevas.

Consideremos todos los términos de la función lagrangiana (1.19) (hasta el tercer orden).

Si se pasa de las coordenadas arbitrarias ξ_i a las coordenadas normales Q_α de la aproximación lineal, como consecuencia del carácter lineal de esta transformación, la segunda y la tercera sumatoria de la ecuación (1.19) se transformarán en sumas análogas con Q_α y \dot{Q}_α en lugar de las coordenadas ξ_i y de las velocidades $\dot{\xi}_i$. Designando los coeficientes de estas nuevas sumas, $\lambda_{\alpha\beta\gamma}$ y $\mu_{\alpha\beta\gamma}$, se tiene para la función lagrangiana :

$$L = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} (\dot{Q}_{\alpha}^2 - \omega_{\alpha}^2 Q_{\alpha}^2) + \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta\gamma} \lambda_{\alpha\beta\gamma} \dot{Q}_{\alpha} \dot{Q}_{\beta} Q_{\gamma} - \frac{1}{6} \sum_{\alpha\beta\gamma} \mu_{\alpha\beta\gamma} Q_{\alpha} Q_{\beta} Q_{\gamma} \quad (1.31)$$

de donde las ecuaciones de movimiento obtenidas de este lagrangiano son de la forma:

$$\ddot{Q}_{\alpha} + \omega_{\alpha}^2 Q_{\alpha} = f_{\alpha}(Q, \dot{Q}, \ddot{Q}) \quad (1.32)$$

las f_{α} son funciones homogéneas, de segundo grado, de las coordenadas Q , \dot{Q} y \ddot{Q} .

Como las funciones f_{α} aparecen al considerar los términos de tercer orden en (1.19), son en sí bastante pequeñas por lo que la ecuación (1.32) puede también escribirse de la forma

$$\ddot{Q}_{\alpha} + \omega_{\alpha}^2 Q_{\alpha} = \varepsilon f_{\alpha}(Q, \dot{Q}, \ddot{Q}) \quad (1.33)$$

donde hemos introducido el parámetro adimensional ε , tal que $\varepsilon \ll 1$. Obsérvese que cuando $\varepsilon = 0$ tendríamos ecuaciones lineales. Esto es, las ecuaciones (1.32) y (1.33) son equivalentes y representan las ecuaciones de movimiento de los *sistemas dinámicos no lineales*.

Frecuentemente es posible llevar la ecuación (1.33) a la forma

$$\ddot{Q}_{\alpha} + \omega_{\alpha}^2 Q_{\alpha} = \varepsilon f_{\alpha}(Q, \dot{Q}) \quad (1.34)$$

teniendo en cuenta que $\varepsilon \ll 1$

Capítulo 2

Método de perturbaciones

2.1. Método Directo

Vamos a aplicar el método directo para analizar la siguiente ecuación no lineal:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = \varepsilon f\left(x, \frac{dx}{dt}\right) \quad (2.1)$$

donde ε es un parámetro adimensional. Para $\varepsilon = 0$ se tiene oscilaciones lineales de la forma:

$$x = a \cos(\psi) \quad \text{donde: } \psi = \omega_0 t + \psi_0 \quad (2.2)$$

cuando:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = \varepsilon x^3 \quad (2.3)$$

se busca la solución de la forma:

$$x = \cos(t) + \varepsilon u_1(t) + \varepsilon^2 u_2(t) \dots \quad (2.4)$$

al reemplazarlo en la ecuación diferencial se obtiene:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \left(\frac{d^2 u_n}{dt^2} + u_n \right) &= \varepsilon \cos^3 t + 3 \cos^2 t \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^{m+1} u_m + 3 \cos t \sum_{n,m=1}^{\infty} \varepsilon^{m+n+1} u_m u_n \\ &+ \sum_{n,m,p=1}^{\infty} \varepsilon^{m+n+p+1} u_m u_n u_p \end{aligned} \quad (2.5)$$

al igualar los términos con la misma potencia en ε se obtienen las siguientes ecuaciones

$$\frac{d^2 u_1}{dt^2} + u_1 = \cos^3 t \quad (2.6)$$

$$\frac{d^2 u_2}{dt^2} + u_2 = 3u_1 \cos^2 t \quad (2.7)$$

Para hallar la solución hasta el primer orden solo es necesario resolver la ecuación para u_1 :

$$x = \cos(t) + \varepsilon \left(\frac{3}{8} t \sin(t) - \frac{1}{32} \cos(3t) \right) \quad (2.8)$$

vemos pues que aunque esta solución es válida hasta el primer orden de aproximación diverje cuando los tiempos se hacen grandes.

Como segundo ejemplo, consideraremos la ecuación de Van der Pol:

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + u = \varepsilon(1 - u^2) \frac{du}{dt} \quad (2.9)$$

Si $\varepsilon = 0$ la ecuación se reduce a:

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + u = 0 \quad (2.10)$$

con la solución general:

$$u = a \cos(t + \phi) \quad (2.11)$$

donde a y ϕ son constantes. Para determinar la solución se busca de la siguiente forma.

Supongamos que la solución es de la forma:

$$u(t, \varepsilon) = u_0(t) + \varepsilon u_1(t) + \varepsilon^2 u_2(t) \dots \quad (2.12)$$

Sustituyendo esta expansión en la ecuación general obtenemos:

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 u_0}{dt^2} + u_0 + \varepsilon \left(\frac{d^2 u_1}{dt^2} + u_1 \right) + \varepsilon^2 \left(\frac{d^2 u_2}{dt^2} + u_2 \right) + \dots = \\ & \varepsilon \left[1 - (u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots)^2 \right] \left[\frac{du_0}{dt} + \varepsilon \frac{du_1}{dt} + \varepsilon^2 \frac{du_2}{dt} \dots \right] \end{aligned} \quad (2.13)$$

y expandiendo para ε pequeños, obtenemos:

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 u_0}{dt^2} + u_0 + \varepsilon \left(\frac{d^2 u_1}{dt^2} + u_1 \right) + \varepsilon^2 \left(\frac{d^2 u_2}{dt^2} + u_2 \right) + \dots = \\ & \varepsilon (1 - u_0^2) \frac{du_0}{dt} + \varepsilon^2 \left[(1 - u_0^2) \frac{du_1}{dt} - 2u_0 u_1 \frac{du_0}{dt} \right] + \dots \end{aligned} \quad (2.14)$$

Como u_n es independiente de ε y la ecuación (2.14) es válida para todo ε pequeño, los coeficientes de potencias iguales de ε en ambos lados de la ecuación deben ser iguales, por lo tanto:

coeficientes de ε^0 :

$$\frac{d^2 u_0}{dt^2} + u_0 = 0 \quad (2.15)$$

coeficientes de ε :

$$\frac{d^2 u_1}{dt^2} + u_1 = (1 - u_0^2) \frac{du_0}{dt} \quad (2.16)$$

coeficientes de ε^2 :

$$\frac{d^2 u_2}{dt^2} + u_2 = (1 - u_0^2) \frac{du_1}{dt} - 2u_0 u_1 \frac{du_0}{dt} \quad (2.17)$$

observamos que la ecuación (2.15) tiene como solución general

$$u_0 = a \cos(t + \phi) \quad (2.18)$$

reemplazando esta solución para u_0 en la ecuación (2.16) obtenemos:

$$\frac{d^2 u_1}{dt^2} + u_1 = - [1 - a^2 \cos^2(t + \phi)] a \sin(t + \phi) \quad (2.19)$$

esta ecuación puede expresarse de la siguiente manera

$$\frac{d^2 u_1}{dt^2} + u_1 = \frac{a^3 - 4a}{4} \sin(t + \phi) + \frac{1}{4} a^3 \sin 3(t + \phi) \quad (2.20)$$

Una solución particular de esta ecuación será:

$$u_1 = \frac{a^3 - 4a}{8} t \cos(t + \phi) - \frac{1}{32} a^3 \sin 3(t + \phi) \quad (2.21)$$

conocidas las soluciones u_0 y u_1 se reemplazan en la ecuación (2.17) y se obtiene la solución para u_2 . Un análisis de la solución u_1 nos muestra que esta diverge para t grande, por lo que es necesario buscar otro método que nos permita obtener soluciones que no diverjan con el tiempo.

2.2. Método del promedio

2.2.1. Técnica del promedio de Krylov–Bogoliubov

Esta técnica se aplica a ecuaciones no lineales de segundo orden de la forma :

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \omega_0^2 u = \varepsilon f\left(u, \frac{du}{dt}\right) \quad (2.22)$$

Cuando $\varepsilon = 0$ la solución de (2.22) puede escribirse como

$$u = a \cos(\omega_0 t + \theta) \quad (2.23)$$

donde a y θ son constantes. Para determinar una solución aproximada de (2.22), para ε pequeño pero distinto de cero, Krylov y Bogoliubov (1947) asumieron que la solución está dada por (2.23) pero con a y θ dependientes del tiempo y sujetos a la condición:

$$\frac{du}{dt} = -a \omega_0 \operatorname{sen} \phi, \quad \phi = \omega_0 t + \theta \quad (2.24)$$

Esta técnica es similar a la técnica de Van der Pol, discutida anteriormente, la única diferencia está en la forma de los primeros términos.

Diferenciando (2.23) con respecto al tiempo:

$$\frac{du}{dt} = -a \omega_0 \operatorname{sen} \phi + \frac{da}{dt} \cos \phi - a \frac{d\theta}{dt} \operatorname{sen} \phi$$

de donde obtenemos que

$$\frac{da}{dt} \cos \phi - a \frac{d\theta}{dt} \operatorname{sen} \phi = 0 \quad (2.25)$$

diferenciando (2.24) con respecto al tiempo obtenemos:

$$\frac{d^2u}{dt^2} = -a \omega_0^2 \cos \phi - \omega_0 \frac{da}{dt} \operatorname{sen} \phi - a \omega_0 \frac{d\theta}{dt} \cos \phi$$

sustituyendo esta expresión en (2.22) y usando (2.23) obtenemos:

$$\omega_0 \frac{da}{dt} \operatorname{sen} \phi + a \omega_0 \frac{d\theta}{dt} \cos \phi = -\varepsilon f[a \cos \phi, -a \omega_0 \operatorname{sen} \phi] \quad (2.26)$$

resolviendo (2.25) y (2.26) para da/dt y $d\theta/dt$ produce:

$$\frac{da}{dt} = -\frac{\varepsilon}{\omega_0} \operatorname{sen} \phi f[a \cos \phi, -a \omega_0 \operatorname{sen} \phi] \quad (2.27)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{\varepsilon}{a\omega_0} \cos \phi f [a \cos \phi, -a\omega_0 \operatorname{sen} \phi] \quad (2.28)$$

Desde luego la ecuación diferencial de segundo orden (2.22) para u a sido cambiada por las dos ecuaciones diferenciales de primer orden (2.27) y (2.28) para la amplitud a y la fase θ .

Para resolver (2.27) y (2.28), notamos que ambas ecuaciones son periódicas con respecto a la variable ϕ , de aquí $da/dt = O(\varepsilon)$ y $d\theta/dt = O(\varepsilon)$. desde luego a y θ son funciones que varían lentamente con el tiempo debido a que ε es pequeño, por lo que ellos cambian muy poco durante el tiempo $T = 2\pi/\omega$ (el periodo de los términos del lado derecho de estas ecuaciones). Promediando (2.27) y (2.28) sobre el intervalo $[t, t + T]$, durante el cual a y θ pueden ser considerados constantes, obtenemos:

$$\frac{da}{dt} = -\frac{\varepsilon}{2\omega_0} f_1(a) \quad (2.29)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{\varepsilon}{2a\omega_0} g_1(a) \quad (2.30)$$

donde:

$$\begin{aligned} f_1(a) &= \frac{2}{T} \int_0^T \operatorname{sen} \phi f [a \cos \phi, -a\omega_0 \operatorname{sen} \phi] dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} \phi f [a \cos \phi, -a\omega_0 \operatorname{sen} \phi] d\phi \end{aligned} \quad (2.31)$$

$$g_1(a) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos \phi f [a \cos \phi, -a\omega_0 \operatorname{sen} \phi] d\phi \quad (2.32)$$

Note que f_1 y g_1 son simplemente dos coeficientes de la expansión de f en serie de Fourier.

Como ejemplo consideremos la ecuación de Duffing.

$$\ddot{u} + \dot{u} + \varepsilon u^3 = 0 \quad ; \quad u(0) = a \quad ; \quad \dot{u}(0) = 0$$

donde

$$f(u, \dot{u}) = -u^3 \quad (2.33)$$

de aquí:

$$f_1(a) = 0, \quad g_1(a) = -\frac{3}{4}a^3 \quad (2.34)$$

en consecuencia de (2.29) se concluye que a es una constante y de (2.30) obtenemos

$$\theta = \frac{3}{8} \varepsilon \frac{a^2}{\omega_0} t + \theta_0 \quad (2.35)$$

por lo tanto para la primera aproximación:

$$u = a \cos \omega_0 \left[1 + \frac{3}{8} \varepsilon \frac{a^2}{\omega_0^2} \right] t + O(\varepsilon) \quad (2.36)$$

Como un segundo ejemplo consideremos el oscilador de Van Der Pol, del cual identificamos :

$$f(u, \dot{u}) = (1 - u^2) \frac{du}{dt} \quad (2.37)$$

en este caso

$$f_1 = -\omega_0 a \left(1 - \frac{1}{4} a^2 \right), \quad g_1 = 0 \quad (2.38)$$

de aquí $\theta = \theta_0$ es constante, mientras que

$$\frac{da}{dt} = \frac{\varepsilon a}{2} \left(1 - \frac{1}{4} a^2 \right) \quad (2.39)$$

integrando (2.39) se obtiene:

$$a^2 = \frac{4}{1 + \left(\frac{4}{a_0^2} - 1 \right) e^{-\varepsilon t}} \quad (2.40)$$

2.2.2. Generalización del método del promedio

En esta técnica se consideran (2.23) y (2.24) como una transformación de u y du/dt en a y θ así que:

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{\varepsilon}{\omega_0} \sin \phi f [a \cos \phi, -a\omega_0 \sin \phi] \\ \frac{d\phi}{dt} &= \omega_0 - \frac{\varepsilon}{a\omega_0} \cos \phi f [a \cos \phi, -a\omega_0 \sin \phi] \end{aligned} \quad (2.41)$$

En vez de integrar estas ecuaciones como se hizo anteriormente, definimos la siguiente transformación[9] :

$$\begin{aligned} a &= \bar{a} + \varepsilon a_1(\bar{a}, \bar{\phi}) + \varepsilon^2 a_2(\bar{a}, \bar{\phi}) + \dots \\ \phi &= \bar{\phi} + \varepsilon \phi_1(\bar{a}, \bar{\phi}) + \varepsilon^2 \phi_2(\bar{a}, \bar{\phi}) + \dots \end{aligned} \quad (2.42)$$

desde (a, ϕ) hasta $(\bar{a}, \bar{\phi})$ que es periódica en $\bar{\phi}$ tal que la transformación del sistema de ecuaciones (2.41) tiene la forma:

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{a}}{dt} &= \varepsilon A_1(\bar{a}) + \varepsilon^2 A_2(\bar{a}) + \dots \\ \frac{d\bar{\phi}}{dt} &= \omega_0 + \varepsilon B_1(\bar{a}) + \varepsilon^2 B_2(\bar{a}) + \dots\end{aligned}\quad (2.43)$$

con A_i y B_i independientes de $\bar{\phi}$.

En este procedimiento a y ϕ no están restringidas a ser funciones escalares. Sustituyendo (2.42) y (2.43) en (2.41), expandiendo e igualando los términos de igual potencia en ε , obtenemos ecuaciones de la forma:

$$\begin{aligned}\omega_0 \frac{\partial a_n}{\partial \bar{\phi}} + A_n &= F_n(\bar{a}, \bar{\phi}) \\ \omega_0 \frac{\partial \phi_n}{\partial \bar{\phi}} + B_n &= G_n(\bar{a}, \bar{\phi})\end{aligned}\quad (2.44)$$

donde F_n y G_n son funciones conocidas de términos de orden inferior de las ecuaciones (2.42) y (2.43). En general F_n y G_n contienen términos de períodos cortos (denotados por el superíndice s) y términos de períodos largos (denotados por el superíndice l).

Escogemos A_n y B_n iguales a términos de períodos largos; esto es

$$A_n = F_n^l, \quad B_n = G_n^l \quad (2.45)$$

luego:

$$\omega_0 \frac{\partial a_n}{\partial \bar{\phi}} = F_n^s, \quad \omega_0 \frac{\partial \phi_n}{\partial \bar{\phi}} = G_n^s \quad (2.46)$$

y pueden ser resueltas sucesivamente para a_n y ϕ_n .

Como ejemplo, consideremos el oscilador de Van Der Pol, en el cual:

$$f(u, \dot{u}) = (1 - u^2)\dot{u}, \quad \omega_0 = 1$$

en esta caso (2.41) se transforma:

$$\frac{da}{dt} = \frac{1}{8}\varepsilon \left[a(4 - a^2) - 4a \cos 2\phi + a^3 \cos 4\phi \right]$$

$$\frac{d\phi}{dt} = 1 + \frac{1}{8}\varepsilon \left[2(2 - a^2)\text{sen } 2\phi - a^2 \text{sen } 4\phi \right] \quad (2.47)$$

Sustituyendo (2.42) y (2.43) en (2.47) e igualando los coeficientes de potencias iguales en ε , tenemos para orden ε :

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_1}{\partial \bar{\phi}} + A_1 &= \frac{1}{8}\bar{a}(4 - \bar{a}^2) - \frac{1}{2}\bar{a} \cos 2\bar{\phi} + \frac{1}{8}\bar{a}^3 \cos 4\bar{\phi} \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial \bar{\phi}} + B_1 &= \frac{1}{4}(2 - \bar{a}^2) \text{sen } 2\bar{\phi} - \frac{1}{8}\bar{a}^2 \text{sen } 4\bar{\phi} \end{aligned} \quad (2.48)$$

Para orden ε^2

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_2}{\partial \bar{\phi}} + A_2 &= -\frac{\partial a_1}{\partial \bar{a}}A_1 - \frac{\partial a_1}{\partial \bar{\phi}}B_1 \\ &+ \frac{1}{8}a_1 \left[4 - 3\bar{a}^2 - 4 \cos 2\bar{\phi} + 3\bar{a}^2 \cos 4\bar{\phi} \right] \\ &+ \frac{1}{2}\bar{a}\phi_1 \left[2 \text{sen } 2\bar{\phi} - \bar{a}^2 \text{sen } 4\bar{\phi} \right] \end{aligned} \quad (2.49)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_2}{\partial \bar{\phi}} + B_2 &= -\frac{\partial \phi_1}{\partial \bar{a}}A_1 - \frac{\partial \phi_1}{\partial \bar{\phi}}B_1 \\ &- \frac{1}{4}\bar{a}a_1(2 \text{sen } 2\bar{\phi} + \text{sen } 4\bar{\phi}) \\ &+ \frac{1}{2}\phi_1 \left[(2 - \bar{a}^2)\cos 2\bar{\phi} - \bar{a}^2 \cos 4\bar{\phi} \right] \end{aligned} \quad (2.50)$$

igualando A_1 y B_1 a los términos de períodos largos del lado derecho de (2.48), se obtiene:

$$A_1 = \frac{1}{8}\bar{a}(4 - \bar{a}^2), \quad B_1 = 0 \quad (2.51)$$

consecuentemente, (2.48) se transforma en

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_1}{\partial \bar{\phi}} &= -\frac{1}{2}\bar{a} \cos 2\bar{\phi} + \frac{1}{8}\bar{a}^3 \cos 4\bar{\phi} \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial \bar{\phi}} &= \frac{1}{4}(2 - \bar{a}^2) \text{sen } 2\bar{\phi} - \frac{1}{8}\bar{a}^2 \text{sen } 4\bar{\phi} \end{aligned} \quad (2.52)$$

cuya solución es

$$\begin{aligned} a_1 &= -\frac{1}{4}\bar{a} \operatorname{sen} 2\bar{\phi} + \frac{1}{32}\bar{a}^3 \operatorname{sen} 4\phi \\ \phi_1 &= -\frac{1}{8}(2 - \bar{a}^2) \cos 2\bar{\phi} + \frac{1}{32}\bar{a}^2 \cos 4\phi \end{aligned} \quad (2.53)$$

con (2.51) y (2.54), (2.49) y (2.50) se convierten:

$$\frac{\partial a_2}{\partial \bar{\phi}} + A_2 = \text{términos de período corto}$$

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial \bar{\phi}} + B_2 = -\frac{1}{8} + \frac{3}{16}\bar{a}^2 - \frac{11}{256}\bar{a}^4 + \text{términos de período corto} \quad (2.54)$$

Igualando A_2 y B_2 a los términos de períodos largos del lado derecho de la ecuación (2.54) obtenemos,

$$A_2 = 0, \quad B_2 = -\frac{1}{8} + \frac{3}{16}\bar{a}^2 - \frac{11}{256}\bar{a}^4 \quad (2.55)$$

De aquí para el segundo orden

$$u = a \cos \phi \quad (2.56)$$

donde

$$\begin{aligned} a &= \bar{a} - \frac{1}{8}\varepsilon\bar{a} \left[\operatorname{sen} 2\phi - \frac{1}{8}\bar{a}^2 \operatorname{sen} 4\phi \right] + O(\varepsilon^2) \\ \phi &= \bar{\phi} - \frac{1}{8}\varepsilon \left[(2 - \bar{a}^2)\cos 2\bar{\phi} - \frac{1}{4}\bar{a}^2 \cos 4\phi \right] + O(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (2.57)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{a}}{dt} &= \frac{1}{8}\varepsilon\bar{a}(4 - \bar{a}^2) + O(\varepsilon^3) \\ \frac{d\bar{\phi}}{dt} &= 1 - \frac{1}{8}\varepsilon^2 \left[1 - \frac{3}{2}\bar{a}^2 + \frac{11}{32}\bar{a}^4 \right] + O(\varepsilon^3) \end{aligned} \quad (2.58)$$

Y esta solución está en perfecta concordancia con la hallada utilizando el algoritmo de Kamel.

2.3. Método de múltiples escalas

Existen tres variantes del método de múltiple escalas, de las cuales dos serán descritas a través de la discusión del oscilador amortiguado:

$$\ddot{x} + x = -2\varepsilon\dot{x} \quad (2.59)$$

Escogemos este ejemplo porque su solución exacta puede ser comparada con las soluciones aproximadas obtenidas y porque nos permite explicar las diferentes variantes de este método más claramente sin involucrarnos con cálculos algebraicos complejos.

Para comenzar, determinaremos una expansión asintótica directa, para ε pequeño, por lo tanto se asume que:

$$x = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \dots \quad (2.60)$$

reemplazamos (2.60) en (2.59) e igualamos a cero los coeficientes de igual potencia de ε , obtenemos:

$$\ddot{x}_0 + x_0 = 0 \quad (2.61)$$

$$\ddot{x}_1 + x_1 = -2\dot{x}_0 \quad (2.62)$$

$$\ddot{x}_2 + x_2 = -2\dot{x}_1 \quad (2.63)$$

la solución general para la ecuación (2.61) es:

$$x_0 = a \cos(t + \phi) \quad (2.64)$$

donde a y ϕ son constantes arbitrarias. Sustituyendo la solución para x_0 en la ecuación (2.62) y resolviendo obtenemos:

$$x_1 = -a t \cos(t + \phi) \quad (2.65)$$

De manera análoga se encuentra la solución para x_2 utilizando la solución para x_1 :

$$x_2 = \frac{1}{2}a t^2 \cos(t + \phi) + \frac{1}{2}a t \sin(t + \phi) \quad (2.66)$$

de donde se obtiene la solución aproximada

$$x = a \cos(t + \phi) - \varepsilon a t \cos(t + \phi) + \frac{1}{2}\varepsilon^2 a [t^2 \cos(t + \phi) + t \sin(t + \phi)] + O(\varepsilon^3) \quad (2.67)$$

Es obvio que (2.67) es una pobre aproximación para x cuando t resulta ser tan grande como ε^{-1} , porque el segundo (εx_1) y tercer ($\varepsilon^2 x_2$) términos no son pequeños comparados con x_0 y εx_1 , respectivamente x_1 y x_2 contienen el término secular tal como asumimos cuando se hizo la expansión anterior. La expansión directa no es válida cuando t incrementa hasta $O(\varepsilon^{-1})$ y la fuente de la dificultad está en el dominio infinito. La falla de la expansión directa puede estudiarse investigando la solución exacta de la ecuación (2.59), la cual está dada por :

$$x = ae^{-\varepsilon t} \cos \left[\sqrt{1 - \varepsilon^2} t + \phi \right] \quad (2.68)$$

La solución (2.67) puede obtenerse de la expansión de (2.68) para ε pequeño manteniendo t fijo. Los factores coseno y exponencial son representados por:

$$\exp(-\varepsilon t) = 1 - \varepsilon t + \frac{1}{2}\varepsilon^2 t^2 + \dots \quad (2.69)$$

$$\cos \left[\sqrt{1 - \varepsilon^2} t + \phi \right] = \cos(t + \phi) + \frac{1}{2}\varepsilon^2 t \operatorname{sen}(t + \phi) + \dots \quad (2.70)$$

Es claro que el término $\exp(-\varepsilon t)$ puede ser aproximado por un número finito de términos solo si la combinación εt es pequeña, lo que se cumple para $t = O(1)$.

Cuando t es tan grande como ε^{-1} , εt no es pequeño y la expansión truncada falla. La serie truncada es satisfactoria hasta cierto valor de t , después para t mayores $\exp(-\varepsilon t)$ y la serie truncada difieren una de otra en una cantidad que excede el límite señalado por la aproximación.

Agregándole más términos a la serie se incrementa el valor límite de t a un nuevo valor t' para el cual la serie truncada es satisfactoria. Sin embargo, para $t > t'$, la diferencia entre $\exp(-\varepsilon t)$ y la nueva serie truncada de nuevo excede el límite de aproximación establecido. Todos los términos de la serie son necesarios para dar una expansión satisfactoria para $\exp(-\varepsilon t)$ válida para todo t . Por lo tanto para determinar una expansión válida para t tan grande como ε^{-1} , la combinación εt debe ser considerada como una simple variable $T_1 = O(1)$. entonces cualquier expansión truncada para $\exp(-\varepsilon t)$ válida para t tan grande como ε^{-1} es de la forma

$$\exp(-\varepsilon t) = \exp(-T_1) \quad (2.71)$$

similarmente la expansión truncada (2.70), no es satisfactoria cuando t es tan grande como $O(\varepsilon^{-2})$.

Para obtener una expansión asintótica truncada para $\cos \left[\sqrt{1 - \varepsilon^2} t + \phi \right]$ válida para $t = O(\varepsilon^{-2})$, $\varepsilon^2 t$ deberá ser considerada como una simple variable $T_2 = O(1)$, con esta condición

$$\begin{aligned} \cos \left(\sqrt{1 - \varepsilon^2} t + \phi \right) &= \cos \left(t - \frac{1}{2} T_2 + \phi - \frac{1}{8} \varepsilon^4 t + \dots \right) \\ \cos \left(\sqrt{1 - \varepsilon^2} t + \phi \right) &= \cos \left(t - \frac{1}{2} T_2 + \phi \right) + \frac{1}{8} \varepsilon^4 t \sin \left(t - \frac{1}{2} T_2 + \phi \right) + \dots \end{aligned} \quad (2.72)$$

La expansión (2.72), es válida cuando $t = O(\varepsilon^{-2})$ debido a que el término corrector (segundo término) es $O(\varepsilon^2)$ o menor para todo t mayor que $O(\varepsilon^{-2})$. Sin embargo, esta expansión falla cuando $t = O(\varepsilon^{-4})$ porque el segundo término deja de ser pequeño comparado con el primero. Para obtener una expansión válida para tiempos tan grandes como $O(\varepsilon^{-4})$ deberá introducirse, otra variable $T_4 = \varepsilon^4 t = O(1)$.

La discusión anterior sugiere que $x(t; \varepsilon)$ depende explícitamente de t y ε , así como también de εt , $\varepsilon^2 t$. Esto también puede verse de la solución exacta.

Por lo tanto, para determinar una expansión truncada válida para todo tiempo t mayor que $O(\varepsilon^M)$, donde M es un entero positivo, debemos determinar la dependencia de x sobre las $M + 1$ escalas de tiempo diferentes $T_0, T_1, T_2, \dots, T_M$, donde :

$$T_m = \varepsilon^m t \quad (2.73)$$

Vemos que la escala de tiempo T_1 es menor que la escala de tiempo T_0 , mientras que la escala de tiempo T_2 es menor que T_1 , en general T_n es menor que T_{n-1} . Por lo tanto asumimos que:

$$\begin{aligned} x(t; \varepsilon) &= \tilde{x}(T_0, T_1, \dots, T_M; \varepsilon) \\ x(t; \varepsilon) &= \sum_{m=0}^{M-1} \varepsilon^m x_m(T_0, T_1, \dots, T_M) + O(\varepsilon T_M) \end{aligned} \quad (2.74)$$

El error en la ecuación (2.74) es $O(\varepsilon T_M)$, y es válido para tiempos hasta $O(\varepsilon^{-M})$. Para valores de t mas grandes deberá considerarse otra escala de tiempo para que la expansión siga siendo válida. Las ecuaciones (2.73) y (2.74) muestran que el problema se ha

transformado de una ecuación diferencial ordinaria a una ecuación diferencial parcial. Si el problema original es una ecuación diferencial parcial, entonces la introducción de diferentes escalas de tiempo incrementa el número de variables independientes. Usando la regla de la cadena la derivada con respecto al tiempo se transforma de acuerdo a la expresión:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial T_2} + \dots \quad (2.75)$$

Las ecuaciones (2.73), (2.74) y (2.75), formulan una nueva versión del método de múltiples escalas llamada *La versión de derivada expandida*.

2.3.1. Versión de derivada expandida

Reemplazando las ecuaciones (2.74), (2.75) en (2.59) e igualando los coeficientes de iguales potencias de ε , obtenemos las siguientes ecuaciones para x_0 , x_1 y x_2 :

$$\frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0^2} + x_0 = 0 \quad (2.76)$$

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial T_0^2} + x_1 = -2 \frac{\partial x_0}{\partial T_0} - 2 \frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0 \partial T_1} \quad (2.77)$$

$$\frac{\partial^2 x_2}{\partial T_0^2} + x_2 = -2 \frac{\partial x_1}{\partial T_0} - 2 \frac{\partial^2 x_1}{\partial T_0 \partial T_1} - \frac{\partial^2 x_0}{\partial T_1^2} - 2 \frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0 \partial T_2} - 2 \frac{\partial x_0}{\partial T_1} \quad (2.78)$$

La solución general de (2.76):

$$x_0 = A_0(T_1, T_2)e^{iT_0} + \bar{A}_0(T_1, T_2)e^{-iT_0} \quad (2.79)$$

donde \bar{A}_0 es el complejo conjugado de A_0 . Esta solución es simplemente (2.64) donde a y ϕ son ahora funciones de las escalas de tiempo T_1 y T_2 y no constantes. Sustituyendo (2.79) en (2.77) obtenemos:

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial T_0^2} + x_1 = -2i \left(A_0 + \frac{\partial A_0}{\partial T_1} e^{iT_0} \right) e^{iT_0} + 2i \left(\bar{A}_0 + \frac{\partial \bar{A}_0}{\partial T_1} \right) e^{-iT_0} \quad (2.80)$$

La solución general de (2.80) es

$$x_1 = A_1(T_1, T_2)e^{iT_0} + \bar{A}_1(T_1, T_2)e^{-iT_0} - \left(\bar{A}_0 + \frac{\partial A_0}{\partial T_1} \right) T_0 e^{iT_0} - \left(\bar{A}_0 + \frac{\partial \bar{A}_0}{\partial T_1} \right) T_0 e^{-iT_0} \quad (2.81)$$

Comparando (2.81) con (2.79) notamos que εx_1 es una pequeña corrección a x sólo cuando $\varepsilon T_0 = \varepsilon t$ es pequeño. Para obtener una expansión válida para tiempos tan grandes como $O(\varepsilon^{-1})$, el término secular, $T_0 \exp(\pm i T_0)$ en (2.81) debe ser cero, esto es:

$$A_0 + \frac{\partial A_0}{\partial T_1} = 0 \quad (2.82)$$

$$A_0 = a_0(T_2) e^{-T_1} \quad (2.83)$$

entonces (2.81) se convierte en

$$x_1 = A_1(T_1, T_2) e^{i T_0} + \bar{A}_1(T_1, T_2) e^{-i T_0} \quad (2.84)$$

Usando x_0 y x_1 en (2.78) obtenemos:

$$\frac{\partial^2 x_2}{\partial T_0^2} + x_2 = -Q(T_1, T_2) e^{i T_0} - \bar{Q}(T_1, T_2) e^{-i T_0} \quad (2.85)$$

donde

$$Q(T_1, T_2) = 2i A_1 + 2i \frac{\partial A_1}{\partial T_1} - a_0 e^{-T_1} + 2i \frac{\partial a_0}{\partial T_2} e^{-T_1} \quad (2.86)$$

Los términos del lado derecho de la ecuación (2.85) producen el término secular debido a que la solución particular es:

$$x_2 = \frac{1}{2} i Q(T_1, T_2) T_0 e^{i T_0} - \frac{1}{2} i \bar{Q}(T_1, T_2) T_0 e^{-i T_0} \quad (2.87)$$

este término secular hace que el término $\varepsilon^2 x_2$ sea del mismo orden que εx_1 cuando t es tan grande como $O(\varepsilon^{-1})$. Para eliminar este término secular, Q deberá anularse, esto es:

$$\frac{\partial A_1}{\partial T_1} + A_1 = \frac{1}{2} i \left(-a_0 + 2i \frac{\partial a_0}{\partial T_2} \right) e^{-T_1} \quad (2.88)$$

En general, no se necesita resolver la ecuación para x_2 para llegar a (2.88), solo necesita inspeccionar (2.85) y eliminar el término que produce el término secular.

La ecuación general de (2.88) es:

$$A_1 = \left[a_1(T_2) + \frac{1}{2} i \left(-a_0 + 2i \frac{\partial a_0}{\partial T_2} \right) T_1 \right] e^{-T_1} \quad (2.89)$$

sustituyendo A_1 en (2.84), obtenemos

$$x_1 = \left[a_1(T_2) + \frac{1}{2} i \left(-a_0 + 2i \frac{\partial a_0}{\partial T_2} \right) T_1 \right] e^{-T_1} e^{iT_0} + CC \quad (2.90)$$

donde CC es el complejo conjugado del primer término de la ecuación anterior, mientras que:

$$x_0 = \left[a_0 e^{iT_0} + \bar{a}_0 e^{-iT_0} \right] e^{-T_1} \quad (2.91)$$

desde luego cuando $T_1 \rightarrow \infty$, aunque x_0 y $x_1 \rightarrow 0$, ε_1 se vuelve $O(x_0)$ mientras t crece hasta $O(\varepsilon^{-2})$, a menos que el coeficiente de T_1 entre corchetes de la ecuación (2.90) se anule, esto es a menos que

$$-a_0 + 2i \frac{\partial a_0}{\partial T_2} = 0 \quad (2.92)$$

ó

$$a_0 = a_{00} e^{-iT_2/2} \quad (2.93)$$

donde a_{00} es una constante. Entonces la ecuación (2.89) se transforma en:

$$A_1 = a_1(T_2) e^{-T_1} \quad (2.94)$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} x = & e^{-T_1} \left[a_{00} e^{i(T_0 - T_2/2)} + \bar{a}_{00} e^{-i(T_0 - T_2/2)} \right] + \\ & \varepsilon e^{-T_1} \left[a_1(T_2) e^{iT_0} + \bar{a}_1(T_2) e^{-iT_0} \right] + O(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (2.95)$$

La función $a_1(T_2)$ puede ser determinada expandiendo la función hasta el tercer orden

$$a_1(T_2) = a_{11} e^{-iT_2/2} \quad (2.96)$$

donde a_{11} es una constante. Si asumimos que las condiciones iniciales son tales que $x(0) = a \cos \phi$ y $\dot{x}(0) = -a \left(\sin \phi \sqrt{1 - \varepsilon^2} + \varepsilon \cos \phi \right)$ y reemplazamos T_n por $\varepsilon^n t$, obtenemos:

$$x = a e^{-\varepsilon t} \cos \left(t - \frac{1}{2} \varepsilon^2 t + \phi \right) + R \quad (2.97)$$

Donde R es el residuo. De las ecuaciones (2.68) y (2.97), encontramos que

$$R = a e^{-\varepsilon t} \left[\cos(t \sqrt{1 - \varepsilon^2} + \phi) - \cos \left(t - \frac{1}{2} \varepsilon^2 t + \phi \right) \right]$$

$$\begin{aligned}
&= -2a e^{\varepsilon t} \sin \left[\frac{1}{2} (\sqrt{1-\varepsilon^2} + 1 - \frac{1}{2} \varepsilon^2) t + \phi \right] \sin \left[\frac{1}{2} \left(\sqrt{1-\varepsilon^2} - 1 + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \right) t \right] \\
&= -2a e^{-\varepsilon t} \sin \left[\frac{1}{2} (\sqrt{1-\varepsilon^2} + 1 - \frac{1}{2} \varepsilon^2) t + \phi \right] \sin \left[\left(-\frac{1}{16} \varepsilon^4 + \dots \right) t \right] \\
&= O(\varepsilon^4 t)
\end{aligned} \tag{2.98}$$

Para ecuaciones lineales, como la (2.59), podemos introducir las diferentes escalas de tiempo sin expandir x , por lo tanto usando las ecuaciones (2.75) y (2.59), obtenemos:

$$\begin{aligned}
&\left[\frac{\partial^2}{\partial T_0^2} + 2\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial T_0 \partial T_1} + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial T_1^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial T_0 \partial T_2} \right) + \dots \right] x + x \\
&= -2\varepsilon \left(\frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial T_2} + \dots \right) x
\end{aligned} \tag{2.99}$$

Igualando a cero los coeficientes de iguales potencia de ε se obtiene:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial T_0^2} + x = 0 \tag{2.100}$$

$$2 \frac{\partial^2 x}{\partial T_0 \partial T_2} = -2 \frac{\partial x}{\partial T_0} \tag{2.101}$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial T_1^2} + 2 \frac{\partial^2 x}{\partial T_0 \partial T_1} = -2 \frac{\partial x}{\partial T_1} \tag{2.102}$$

La solución general de (2.100) es:

$$x = A(T_1, T_2) e^{iT_0} + \bar{A}(T_1, T_2) e^{-iT_0} \tag{2.103}$$

y reemplazando en la ecuación (2.101), obtenemos:

$$\left(\frac{\partial A}{\partial T_1} + A \right) e^{iT_0} + \left(\frac{\partial \bar{A}}{\partial T_1} + \bar{A} \right) e^{-iT_0} = 0 \tag{2.104}$$

Puesto que (2.104) es valido para todo T_0 , los coeficientes del exponencial $\exp(iT_0)$ y $\exp(-iT_0)$ deben ser nulos; esto es:

$$\frac{\partial A}{\partial T_1} + A = 0 \tag{2.105}$$

ó

$$A = a(T_2) e^{-T_1} \tag{2.106}$$

sustituyendo (2.103) en (2.102)

$$\left(\frac{\partial^2 A}{\partial T_1^2} + 2i \frac{\partial A}{\partial T_2} + 2 \frac{\partial A}{\partial T_1} \right) e^{iT_0} + CC = 0 \quad (2.107)$$

de donde:

$$\frac{\partial^2 A}{\partial T_1^2} + 2 \frac{\partial A}{\partial T_1} + 2i \frac{\partial A}{\partial T_2} = 0 \quad (2.108)$$

y sustituyendo (2.106) en (2.108) tenemos que:

$$2i \frac{\partial a}{\partial T_2} - a = 0 \quad (2.109)$$

por lo que:

$$a = a_0 e^{-iT_2/2} \quad (2.110)$$

donde a_0 es una constante y (2.103) toma la forma:

$$x = a_0 e^{-T_1} e^{i(T_0 - T_2/2)} + CC \quad (2.111)$$

Si expresamos (2.111) en términos de t finalmente obtenemos:

$$x = a e^{-\varepsilon t} \cos \left(t - \frac{1}{2} \varepsilon^2 t + \phi \right) \quad (2.112)$$

donde $a_0 = (1/2)a \exp(i\phi)$, resultado que concuerda con (2.97)

2.3.2. Procedimiento de expansión en dos variables

Cambiando las variables independientes t por ε y η como lo definimos anteriormente, podemos transformar la ecuación (2.59) en:

$$\begin{aligned} (1 + \varepsilon^2 \omega_2 + \dots)^2 \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} + 2\varepsilon(1 + \varepsilon^2 \omega_2 + \dots) \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} + x \\ = -2\varepsilon(1 + \varepsilon^2 \omega_2 + \dots) \frac{\partial x}{\partial \eta} - 2\varepsilon^2 \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{aligned} \quad (2.113)$$

Si asumimos que

$$x = x_0(\xi, \eta) + \varepsilon x_1(\xi, \eta) + \varepsilon^2 x_2(\xi, \eta) + \dots \quad (2.114)$$

Sustituyendo (2.114) en (2.113) e igualando los coeficientes de iguales potencias de ε en ambos lados, obtenemos:

$$\frac{\partial^2 x_0}{\partial \eta^2} + x_0 = 0 \quad (2.115)$$

$$\frac{\partial^2 x_0}{\partial \eta^2} + x_1 + 2 \frac{\partial^2 x_0}{\partial \xi \partial \eta} = -2 \frac{\partial x_0}{\partial \eta} \quad (2.116)$$

$$\frac{\partial^2 x_2}{\partial \eta^2} + x_2 + 2\omega_2 \frac{\partial^2 x_0}{\partial \eta^2} + 2 \frac{\partial^2 x_1}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 x_0}{\partial \xi^2} = -2 \frac{\partial x_1}{\partial \eta} - 2 \frac{\partial x_0}{\partial \xi} \quad (2.117)$$

La solución general de (2.115) es:

$$x_0 = A_0(\xi)e^{i\eta} + \bar{A}_0(\xi)e^{-i\eta} \quad (2.118)$$

y con esta solución (2.116) se convierte en:

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial \eta^2} + x_1 = -2i \left(\frac{d A_0}{d \xi} + A_0 \right) e^{i\eta} + CC \quad (2.119)$$

Eliminando el término que produce el término secular en (2.119) da:

$$\frac{d A_0}{d \xi} + A_0 = 0 \quad (2.120)$$

luego:

$$x_1 = A_1(\xi)e^{i\eta} + \bar{A}_1(\xi)e^{-i\eta} \quad (2.121)$$

La solución de (2.120) es

$$A_0 = a_0 e^{-\xi} \quad (2.122)$$

donde a_0 es una constante. Sustituyendo las soluciones (2.118) y (2.121) para x_0 y x_1 en la ecuación (2.117) se tiene:

$$\frac{\partial^2 x_2}{\partial \eta^2} + x_2 = \left[-2i \left(\frac{d A_1}{d \xi} + A_1 \right) + (2\omega_2 + 1)a_0 e^{-\xi} \right] e^{i\eta} + CC \quad (2.123)$$

Eliminando el factor que produce el término secular en (2.123) tenemos:

$$\frac{d A_1}{d \xi} + A_1 = -\frac{1}{2}i(2\omega_2 + 1)a_0 e^{-\xi} \quad (2.124)$$

cuya solución es:

$$A_1 = a_1 e^{-\xi} - \frac{1}{2}i(2\omega_2 + 1)a_0 \xi e^{-\xi} \quad (2.125)$$

reemplazando la expresión para A_1 en (2.121) y comparando el resultado con (2.118) se muestran que x_1/x_0 es convergente cuando $\xi \rightarrow \infty$ a menos que:

$$\omega_2 = -\frac{1}{2} \quad (2.126)$$

por lo tanto (2.114) en términos de t se transforma en

$$x = a e^{-\varepsilon t} \cos \left(t - \frac{1}{2} \varepsilon^2 t + \phi \right) + O(\varepsilon^2) \quad (2.127)$$

Donde $a_0 + \varepsilon a_1 = (1/2)a \exp(i\phi)$. Esta expresión está completamente en concordancia con la obtenida usando la Versión de varias variables (Método de la derivada expandida)

2.3.3. Aplicación del Método de la derivada expandida Ecuación de Duffing

Aplicaremos este método a la ecuación de Duffing:

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \omega_0^2 u + \varepsilon u^3 = 0 \quad (2.128)$$

Donde ω_0 es la frecuencia. Se busca la solución de la forma:

$$u = \sum_{n=0}^2 \varepsilon^n u_n(T_0, T_1, T_2) + O(\varepsilon^3) \quad (2.129)$$

en este método la derivada temporal se expresa de la forma:

$$\frac{d}{dt} = D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \dots \quad (2.130)$$

donde:

$$D_n = \frac{\partial}{\partial T_n}$$

sustituyendo (2.129) y (2.130) en (2.128) e igualando a cero los coeficientes de cada una de las potencias de ε , tenemos:

$$D_0^2 u_0 + \omega_0^2 u_0 = 0 \quad (2.131)$$

$$D_0^2 u_1 + \omega_0^2 u_1 = -2D_0 D_1 u_0 - u_0^3 \quad (2.132)$$

$$D_0^2 u_2 + \omega_0^2 u_2 = -2D_0 D_1 u_1 - 2D_0 D_2 u_0 - D_1^2 u_0 - 3u_0^2 u_1 \quad (2.133)$$

La solución de (2.131) es:

$$u_0 = A(T_1, T_2)e^{i\omega_0 T_0} + \bar{A}(T_1, T_2)e^{-i\omega_0 T_0} \quad (2.134)$$

y la ecuación (2.132) se convierte en

$$D_0^2 u_1 + \omega_0^2 u_1 = -[2i\omega_0 D_1 A + 3A^2 \bar{A}] e^{i\omega_0 T_0} - A^3 e^{3i\omega_0 T_0} + CC \quad (2.135)$$

Para que u_1/u_0 converja para todo T_0 , el término que produce el término secular debe ser eliminado. Desde luego:

$$2i\omega_0 D_1 A + 3A^2 \bar{A} = 0 \quad (2.136)$$

y la solución para u_1 se transforma:

$$u_1 = B(T_1, T_2)e^{i\omega_0 T_0} + \frac{A^3}{8\omega_0^2} e^{3i\omega_0 T_0} + CC \quad (2.137)$$

para resolver (2.136) escogemos $A = (1/2)a \exp(i\phi)$, donde a y ϕ son reales. Al separar la parte real e imaginaria obtenemos:

$$\frac{\partial a}{\partial T_1} = 0, \quad -\omega_0 \frac{\partial \phi}{\partial T_1} + \frac{3}{8}a^2 = 0 \quad (2.138)$$

luego:

$$a = a(T_2), \quad \phi = \frac{3}{8\omega_0} a^2 T_1 + \phi_0(T_2) \quad (2.139)$$

al sustituir u_1 y u_0 en (2.133):

$$D_0^2 u_2 + \omega_0^2 u_2 = -\frac{3}{8\omega_0^2} A^5 e^{5i\omega_0 T_0} + \left[\frac{21}{8\omega_0^2} A^4 \bar{A} - 3B A^2 \right] e^{3i\omega_0 T_0} - Q(T_1, T_2) e^{i\omega_0 T_0} + CC \quad (2.140)$$

donde:

$$Q = 2i\omega_0 D_1 B + 3A^2 \bar{B} + 6A \bar{A} B + 2i\omega_0 D_2 A - \frac{15A^3 \bar{A}^2}{8\omega_0^2} \quad (2.141)$$

el término secular se elimina si

$$B = 0 \quad (2.142)$$

y

$$2i\omega_0 D_2 A = \frac{15A^3 \bar{A}^2}{8\omega_0^2} \quad (2.143)$$

con $Q = 0$, la solución de u_2 , descartando la solución homogénea es:

$$u_2 = \frac{A^5}{64\omega_0^4} e^{5i\omega_0 T_0} - \frac{21A^4 \bar{A}}{64\omega_0^4} e^{3i\omega_0 T_0} + CC \quad (2.144)$$

Escogemos $A = (1/2) a \exp(i\phi)$ en (2.143) y separando las partes real e imaginaria , obtenemos:

$$\frac{\partial a}{\partial T_2} = 0, \quad -\omega_0 \frac{\partial \phi}{\partial T_2} = \frac{15}{256\omega_0^2} a^4 \quad (2.145)$$

de las ecuaciones (2.139) y (2.145) se obtiene que a es constante, luego:

$$\phi_0 = -\frac{15}{256\omega_0^3} a^4 T_2 + \chi \quad (2.146)$$

donde χ es una constante. Por lo tanto:

$$\phi = \frac{3}{8\omega_0} a^2 T_1 - \frac{15}{256\omega_0^3} a^4 T_2 + \chi \quad (2.147)$$

Sustituyendo para u_0 , u_1 y u_2 en (2.129), teniendo en cuenta que $A = (1/2)a \exp(i\phi)$ y expresando el resultado en términos de t , obtenemos que:

$$u = a \cos(\omega t + \chi) + \frac{\varepsilon a^3}{32\omega_0^2} \left(1 - \varepsilon \frac{21 a^2}{32\omega_0^2} \right) \cos 3(\omega t + \chi) + \frac{\varepsilon^2 a^5}{1024\omega_0^4} \cos 5(\omega t + \chi) + O(\varepsilon^3) \quad (2.148)$$

donde

$$\omega = \omega_0 + \frac{3a^2}{8\omega_0} \varepsilon - \frac{15a^4}{256\omega_0^3} \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3) \quad (2.149)$$

en los últimos dos términos de la ecuación (2.148), ω_0 se reemplaza por ω con un error de $O(\varepsilon^3)$

Oscilador de Van Der Pol

Consideremos la ecuación de Van Der Pol[10]

$$\frac{d^2u}{dt^2} + u = \varepsilon(1 - u^2)\frac{du}{dt} \quad (2.150)$$

Sustituyendo (2.129) y (2.130) en (2.150) e igualando los coeficientes de iguales potencias de ε , obtenemos:

$$D_0^2u_0 + u_0 = 0, \quad (2.151)$$

$$D_0^2u_1 + u_1 = -2D_0D_1u_0 + (1 - u_0^2)D_0u_0 \quad (2.152)$$

y

$$\begin{aligned} D_0^2u_2 + u_2 = & -2D_0D_1u_1 - D_1^2u_0 - 2D_0D_2u_0 + (1 - u_0^2)D_0u_1 + \\ & (1 - u_0^2)D_1u_0 - 2u_0u_1D_0u_0 \end{aligned} \quad (2.153)$$

La solución de (2.151) es:

$$u_0 = A(T_1, T_2)e^{iT_0} + \bar{A}(T_1, T_2)e^{-iT_0} \quad (2.154)$$

reemplazando esta ecuación para u_0 en (2.152) da:

$$D_0^2u_1 + u_1 = -i(2D_1A - A + A^2\bar{A})e^{iT_0} - iA^3e^{3iT_0} + CC \quad (2.155)$$

Para eliminar el término secular es necesario que los coeficientes de la exponencial $\exp(\pm iT_0)$ sean nulos, esto es:

$$2D_1A = A - A^2\bar{A} \quad (2.156)$$

entonces la solución de (2.155):

$$u_1 = B(T_1, T_2)e^{iT_0} + \frac{1}{8}iA^3e^{3iT_0} + CC \quad (2.157)$$

Para resolver (2.156), escogemos

$$A = \frac{1}{2}a(T_1, T_2) \exp(i\phi(T_1, T_2)) \quad (2.158)$$

separando las partes real e imaginaria en (2.156), obtenemos:

$$\frac{\partial \phi}{\partial T_1} = 0, \quad \frac{\partial a}{\partial T_1} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{4} a^2\right) a \quad (2.159)$$

y de aqui:

$$\phi = \phi(T_2), \quad a^2 = \frac{4}{1 + c(T_2)e^{-T_1}} \quad (2.160)$$

Como estamos interesados en la aproximación de primer orden para u , consideramos B , ϕ y c como constantes, además si $u(0) = a_0$ y $du(0)/dt = 0$ entonces

$$u = a \cos t + O(\varepsilon) \quad (2.161)$$

donde

$$a^2 = \frac{4}{1 + \left(\frac{4}{a_0^2} - 1\right) e^{-\varepsilon t}} \quad (2.162)$$

Para determinar la segunda aproximación necesitamos determinar las funciones B , ϕ y c . Por lo que necesitamos sustituir las expresiones de u_0 y u_1 en (2.153) de donde obtenemos:

$$D_0^2 u_2 + u_2 = Q(T_1, T_2) e^{iT_0} + \bar{Q}(T_1, T_2) e^{-iT_0} + NST \quad (2.163)$$

donde

$$Q = -2iD_1 B + i(1 - 2A\bar{A})B - iA^2\bar{B} - 2iD_2 A - D_1^2 A + (1 - 2A\bar{A})D_1 A - A^2 D_1 \bar{A} + \frac{1}{8} A^3 \bar{A}^2 \quad (2.164)$$

el término secular se elimina si $Q = 0$. Para resolver (2.164), con $Q = 0$, escogemos $B = (1/2)ib \exp(i\phi)$ con b real y ϕ definido en la ecuación (2.158). Reemplazamos A y B en (2.164) con $Q = 0$, separamos la parte real e imaginaria y obtenemos:

$$\frac{\partial a}{\partial T_2} = 0, \quad a = a(T_1) \quad (2.165)$$

$$2 \frac{\partial b}{\partial T_1} - \left(1 - \frac{1}{4} a^2\right) b = -2a \frac{d\phi}{dT_2} + \frac{d^2 a}{dT_1^2} - \left(1 - \frac{3}{4} a^2\right) \frac{da}{dT_1} - \frac{1}{128} a^5 \quad (2.166)$$

Con ayuda de (2.159) la ecuación (2.166) puede expresarse en la forma:

$$2 \frac{\partial b}{\partial T_1} - \frac{2}{a} \frac{da}{dT_1} b = -2a \left(\frac{d\phi}{dT_2} + \frac{1}{16} \right) + \left(\frac{7}{16} a^2 - \frac{1}{4} \right) \frac{da}{dT_1} \quad (2.167)$$

Por lo tanto:

$$d\left(\frac{b}{a}\right) = -\left(\frac{d\phi}{dT_2} + \frac{1}{16}\right)dT_1 + \left(\frac{7}{32}a - \frac{1}{8a}\right)da \quad (2.168)$$

integrando la ecuación anterior obtenemos:

$$b = -a\left(\frac{d\phi}{dT_2} + \frac{1}{16}\right)T_1 + \frac{7}{64}a^3 - \frac{1}{8}a \ln a + ab_0(T_2) \quad (2.169)$$

Para que u_1/u_0 converja para todo T_1 , el coeficiente de T_1 en la expresión anterior b debe ser nulo. Esta condición da:

$$\phi = -\frac{1}{16}T_2 + \phi_0 \quad (2.170)$$

donde ϕ_0 es una constante. La expansión de μ hasta el segundo orden de aproximación es entonces

$$\begin{aligned} u = & \cos\left[\left(1 - \frac{1}{16}\varepsilon^2\right)t + \phi_0\right] + \\ & -\varepsilon\left\{\left(\frac{7}{64}a^3 - \frac{1}{8}a \ln a + ab_0\right) \sin\left[\left(1 - \frac{1}{16}\varepsilon^2\right)t + \phi_0\right]\right\} + \\ & -\varepsilon\left\{\frac{1}{32}a^3 \sin 3\left[\left(1 - \frac{1}{16}\varepsilon^2\right)t + \phi_0\right]\right\} + O(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (2.171)$$

donde a está definido por la ecuación (2.162) y b_0 se considerada una constante dentro del orden de error indicado. Para un error de $O(\varepsilon^2)$, esta expresión puede ser escrita como

$$u = a \cos(t - \theta) - \frac{1}{32}\varepsilon a^3 \sin 3(t - \theta) + O(\varepsilon^2) \quad (2.172)$$

donde

$$\theta = \frac{1}{16}\varepsilon^2 t + \frac{1}{8}\varepsilon \ln a - \frac{7}{64}\varepsilon a^2 + \theta_0 \quad (2.173)$$

y $\theta = -\phi_0 - \varepsilon b_0 = a$ constante.

2.4. Método de Krylov–Bogoliubov

El propósito del método es analizar las ecuaciones débilmente no lineales [11] de la forma:

$$\ddot{\xi} + \omega_0^2 \xi = \varepsilon Q(\xi, \dot{\xi}) \quad (2.174)$$

donde $\varepsilon \ll 1$. Con esta condición se intenta buscar una solución de la forma:

$$\xi = a \cos\psi + \varepsilon \xi_1(a, \psi) + \varepsilon^2 \xi_2(a, \psi) + \dots$$

$$\xi = a \cos\psi + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \xi_n(a, \psi) \quad (2.175)$$

donde cada uno de los términos debe satisfacer que:

$$\dot{a} = \varepsilon f_1(a) + \varepsilon^2 f_2(a) + \dots$$

$$\dot{\psi} = \omega_0 + \varepsilon \omega_1(a) + \varepsilon^2 \omega_2(a) + \dots$$

O equivalentemente:

$$\dot{a} = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n f_n(a)$$

$$\dot{\psi} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \omega_n(a) \quad (2.176)$$

para este fin se deben tener en cuenta las siguientes consideraciones:

- a) Se exige que a sea la amplitud total del armónico fundamental.
- b) Las funciones $\varepsilon \xi_1, \varepsilon^2 \xi_2, \dots$ no deben contener sumandos proporcionales a $\cos\psi$ y $\sin\psi$ y deben cumplir con [12]:

$$\int_0^{2\pi} \varepsilon^n \xi_n(a, \psi) \cos\psi d\psi = 0 \quad \int_0^{2\pi} \varepsilon^n \xi_n(a, \psi) \sin\psi d\psi = 0 \quad (2.177)$$

- c) Las funciones $\varepsilon \xi_1, \varepsilon^2 \xi_2, \dots, \varepsilon f_1, \varepsilon^2 f_2, \dots, \varepsilon \omega_1, \varepsilon^2 \omega_2, \dots$ se determinan hasta una constante cualquiera que puede no considerarse.

Este método desarrollado por Krylov–Bogolivbov, sugiere que conociendo $\varepsilon Q(\xi, \dot{\xi})$ podemos encontrar $\varepsilon \xi_1, \varepsilon f_1, \varepsilon \omega_1, \dots$ y finalmente obtener la solución analítica de primer, segundo o tercer orden dependiendo del caso que se analice o del orden que se desee en la aproximación.

Nuestro primer objetivo en este trabajo es buscar una solución hasta de segundo orden de aproximación de las oscilaciones debilmente no lineales a través del método de

Krylov– Bogolivbov.

Para lograrlo debemos obtener, a partir de la ecuación (2.175), $\dot{\xi}$ y $\ddot{\xi}$ como funciones de a y ψ con una exactitud de hasta ε^2 .

Calculo De $\ddot{\xi}$:

A) para la obtención de $\ddot{\xi}$ es necesario determinar primero $\dot{\xi}$; además recordemos que ξ_1 es una función que depende de a y ψ , por lo que al derivarla con respecto al tiempo se obtiene

$$\dot{\xi}_1 = \dot{a} \frac{\partial \xi_1}{\partial a} + \dot{\psi} \frac{\partial \xi_1}{\partial \psi} \quad (2.178)$$

derivando nuevamente y ordenando tenemos

$$\ddot{\xi}_1 = \ddot{a} \frac{\partial \xi_1}{\partial a} + \ddot{\psi} \frac{\partial \xi_1}{\partial \psi} + \dot{a}^2 \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial a^2} + \dot{\psi}^2 \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial \psi^2} + 2\dot{a}\dot{\psi} \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial \psi \partial a} \quad (2.179)$$

Para simplificar esta ecuación es necesario hallar \ddot{a} , \dot{a}^2 , $\dot{\psi}^2$, $\ddot{\psi}$ y $\dot{a}\dot{\psi}$. Derivando las ecuaciones en (2.176) y manteniendo solo los términos de segundo orden tenemos:

$$\begin{aligned} \ddot{a} &= \varepsilon^2 \left(f_1 \frac{\partial f_1}{\partial a} \right) \\ \dot{a}^2 &= \varepsilon^2 f_1^2 \\ \dot{\psi}^2 &= \omega_0 + 2\varepsilon\omega_0\omega_1 + 2\varepsilon^2\omega_0\omega_\varepsilon^2\omega_1^2 \\ \ddot{\psi} &= \varepsilon^2 f_1 \frac{\partial \omega_1}{\partial a} \\ \dot{a}\dot{\psi} &= \varepsilon f_1\omega_0 + \varepsilon^2 f_1\omega_1 + \varepsilon^2 f_2\omega_0 \end{aligned} \quad (2.180)$$

Haciendo uso de estas ecuaciones y manteniendo sólo los términos de orden dos podemos expresar $\ddot{\xi}_1$ de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \ddot{\xi}_1 &= \omega_0^2 \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial \psi^2} + \varepsilon \left(2\omega_0\omega_1 \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial \psi^2} + 2f_1\omega_0 \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial a \partial \psi} \right) + \\ &+ \varepsilon^2 \left(f_1 \frac{\partial f_1}{\partial a} \frac{\partial \xi_1}{\partial a} + f_1 \frac{\partial \omega_1}{\partial a} \frac{\partial \xi_1}{\partial \psi} + f_1^2 \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial a^2} + 2\omega_0\omega_2 \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial \psi^2} + \omega_1^2 \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial \psi^2} + 2f_1\omega_1 \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial a \partial \psi} + 2f_2\omega_0 \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial a \partial \psi} \right) \end{aligned} \quad (2.181)$$

análogamente para $\ddot{\xi}_2$

$$\begin{aligned} \ddot{\xi}_2 &= \omega_0^2 \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial \psi^2} + \varepsilon \left(2\omega_0\omega_1 \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial \psi^2} + 2f_1\omega_0 \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial a \partial \psi} \right) + \\ &+ \varepsilon^2 \left(f_1 \frac{\partial f_1}{\partial a} \frac{\partial \xi_2}{\partial a} + f_1 \frac{\partial \omega_1}{\partial a} \frac{\partial \xi_2}{\partial \psi} + f_1^2 \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial a^2} + 2\omega_0\omega_2 \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial \psi^2} + \omega_1^2 \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial \psi^2} + 2f_1\omega_1 \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial a \partial \psi} + 2f_2\omega_0 \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial a \partial \psi} \right) \end{aligned} \quad (2.182)$$

B) Para culminar con el cálculo de $\ddot{\xi}$ necesitamos calcular el término. Partiendo de $\frac{d^2}{dt^2} (a \cos \psi)$

$$\frac{d}{dt} (a \cos \psi) = \dot{a} \cos \psi - a \dot{\psi} \sin \psi$$

derivando nuevamente tenemos

$$\frac{d^2}{dt^2} (a \cos \psi) = \ddot{a} \cos \psi - 2\dot{a} \dot{\psi} \sin \psi - a \ddot{\psi} \sin \psi - a \dot{\psi}^2 \cos \psi \quad (2.183)$$

Utilizando la ecuación (2.176) y manteniendo sólo términos de segundo orden:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} (a \cos \psi) &= -a\omega_0^2 \cos \psi + \varepsilon (-2f_1\omega_0 \sin \psi - 2a\omega_0\omega_1 \cos \psi) + \\ &+ \varepsilon^2 \left(f_1 \frac{\partial f_1}{\partial a} \cos \psi - 2f_1\omega_1 \sin \psi - 2f_2\omega_0 \sin \psi - a f_1 \frac{\partial \omega_1}{\partial a} \sin \psi - 2a\omega_0\omega_2 \cos \psi - a\omega_1^2 \cos \psi \right) \end{aligned} \quad (2.184)$$

y de la ecuación (2.175) obtenemos:

$$\ddot{\xi} = \frac{d^2}{dt^2} (a \cos \psi) + (\varepsilon \ddot{\xi}_1) + (\varepsilon^2 \ddot{\xi}_2) \quad (2.185)$$

Reemplazando en esta última las ecuaciones (2.181), (2.182) y (2.184) y ordenándola en potencias de ε , $\ddot{\xi}$ se expresa como:

$$\begin{aligned} \ddot{\xi} = & -a\omega_0^2 \cos\psi + \varepsilon \left[-2f_1\omega_0 \operatorname{sen}\psi - 2a\omega_0\omega_1 \cos\psi + \omega_0^2 \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial \psi^2} \right] + \\ & + \varepsilon^2 \left(f_1 \frac{\partial f_1}{\partial a} \cos\psi - 2f_1\omega_1 \operatorname{sen}\psi - 2f_2\omega_0 \operatorname{sen}\psi - af_1 \frac{d\omega_1}{da} \operatorname{sen}\psi - 2a\omega_0\omega_2 \cos\psi + \right. \\ & \left. -a\omega_1^2 \cos\psi + 2\omega_0\omega_1 \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial \psi^2} + 2f_1\omega_0 \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial a \partial \psi} + \omega_0^2 \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial \psi^2} \right) \end{aligned} \quad (2.186)$$

Reemplazando estos resultados en la ecuación:

$$\ddot{\xi} + \omega_0^2 \xi = \varepsilon Q(\xi, \dot{\xi}) \quad (2.187)$$

Obtenemos:

$$\begin{aligned} & \varepsilon \left(-2f_1\omega_0 \operatorname{sen}\psi - 2a\omega_0\omega_1 \cos\psi + \omega_0^2 \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial \psi^2} + \xi_1 \omega_0^2 \right) + \\ & + \varepsilon^2 \left(f_1 \frac{\partial f_1}{\partial a} \cos\psi - 2f_1\omega_1 \operatorname{sen}\psi - 2f_2\omega_0 \operatorname{sen}\psi - af_1 \frac{\partial \omega_1}{\partial a} \operatorname{sen}\psi - 2a\omega_0\omega_2 \cos\psi \right) \\ & + \varepsilon^2 \left(-a\omega_1^2 \cos\psi + 2\omega_0\omega_1 \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial \psi^2} + 2f_1\omega_0 \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial a \partial \psi} + \omega_0^2 \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial \psi^2} + \omega_0^2 \xi_2 \right) = \varepsilon Q_0 + \varepsilon^2 Q_1 \end{aligned} \quad (2.188)$$

Igualando los términos de ε y ε^2

$$\omega_0^2 \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial \psi^2} + \omega_0^2 \xi_1 = 2f_1\omega_0 \operatorname{sen}\psi + 2a\omega_0\omega_1 \cos\psi + Q_0 \quad (2.189)$$

$$\begin{aligned} \omega_0^2 \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial \psi^2} + \omega_0^2 \xi_2 = & \left(-f_1 \frac{\partial f_1}{\partial a} + 2a\omega_0\omega_2 + a\omega_1^2 \right) \cos\psi + \left(2f_1\omega_1 + 2f_2\omega_0 + af_1 \frac{\partial \omega_1}{\partial a} \right) \operatorname{sen}\psi \\ & - 2\omega_0\omega_1 \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial \psi^2} - 2f_1\omega_0 \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial a \partial \psi} + Q_1 \end{aligned} \quad (2.190)$$

Para completar el cálculo necesitamos la expansión en Fourier de εQ_0

$$Q_0 = \sum_{n=0}^{\infty} (\beta_n \cos n\psi + \alpha_n \operatorname{sen} n\psi) \quad (2.191)$$

Donde β_n y α_n son constantes conocidas.

Análogamente la expansión en serie de Fourier de ξ_1 está representada por la ecuación:

$$\xi_1 = \sum_{n=0}^{\infty} [U_n(a) \cos n\psi + \gamma_n(a) \operatorname{sen} n\psi] \quad (2.192)$$

donde U_n y γ_n son constantes desconocidas que debemos calcular

Primero se calcula $\frac{\partial \xi_1^2}{\partial \psi^2}$ como:

$$\frac{\partial \xi_1^2}{\partial \psi^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-U_n^2 n^2 \cos n\psi - n^2 \gamma_n \operatorname{sen} n\psi \right) \quad (2.193)$$

reemplazando (2.192) y (2.193) en (2.189) tenemos que:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\omega_0^2 (1 - n^2) U_n \cos n\psi + \omega_0^2 (1 - n^2) \gamma_n \operatorname{sen} n\psi \right) &= 2f_1 \omega_0 \operatorname{sen} \psi + 2a \omega_0 \omega_1 \cos \psi + \dots \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \cos n\psi + \alpha_n \operatorname{sen} n\psi \end{aligned}$$

Por condición, ξ_1 y ξ_2 no contienen términos proporcionales a $\cos \psi$ y $\operatorname{sen} \psi$ esto implica que:

$$U_1 = \gamma_1 = 0$$

para $n = 0$ se obtiene $\omega_0^2 U_0 = \beta_0$ de donde

$$U_0 = \frac{\beta_0}{\omega_0^2}$$

Para $n = 1$ tenemos la ecuaciones $2a \omega_0 \omega_1 + \beta_1 = 0$ y $2f_1 \omega_0 + \alpha_1 = 0$ de donde:

$$\omega_1 = \frac{\beta_1}{2a \omega_0}$$

$$f_1 = \frac{-\alpha_1}{2 \omega_0}$$

para los valores de $n \geq 2$ tenemos que:

$$U_n = \frac{\beta_n}{(1 - n^2)} \omega_0^2$$

$$\gamma_n = \frac{\alpha_n}{(1-n^2)} \omega_0^2$$

Finalmente las expresiones para ξ_1 , ω_1 y f_1 se reducen a:

$$\xi_1 = \frac{\beta_0}{\omega_0^2} + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{\beta_n}{(1-n^2)\omega_0^2} \cos n \psi + \frac{\alpha_n}{(1-n^2)\omega_0^2} \operatorname{sen} n \psi \right) \quad (2.194)$$

$$\omega_1 = -\frac{\beta_1}{2a \omega_0} \quad (2.195)$$

$$f_1 = \frac{-\alpha_1}{2 \omega_0} \quad (2.196)$$

Una vez resuelta las ecuaciones para ξ_1 , ω_1 y f_1 estas se reemplazan en la ecuación (2.190) y hallamos la solución para ξ_2 .

Es importante notar que ξ_1 , ω_1 y f_1 están en función de los términos de la serie de Fourier no nulos que resultan al expandir la función Q_0 conocida

Debido a lo complejas que resultan las ecuaciones al tratar de hallar una ecuación general es preferible resolver para cada problema en particular, pero teniendo en cuenta todo lo realizado.

2.4.1. Aplicación a la ecuación de Duffing

Si tenemos la ecuación

$$\ddot{\xi} + \omega_0^2 \xi = -\varepsilon \xi^3 = \varepsilon (-\xi^3) \quad (2.197)$$

identificamos :

$$Q(\xi, \dot{\xi}) = -\varepsilon \xi^3 \quad (2.198)$$

El método requiere el reemplazo de ξ considerando que

$$\xi = a \cos \psi + \varepsilon \xi_1 + \varepsilon^2 \xi_2$$

La expansión en serie de Fourier de $Q(\xi, \dot{\xi})$ da

$$\xi^3 = a^3 \cos^3 \psi + \varepsilon (3a^2 \xi_1 \cos^2 \psi) + \varepsilon^2 (3a^2 \xi_2 \cos^2 \psi + 3a \xi_1^2 \cos \psi)$$

manteniendo sólo los términos hasta ε^2

$$\varepsilon \xi^3 = \varepsilon a^3 \cos^3 \psi + \varepsilon^2 (3a^2 \xi_1 \cos^2 \psi) + 0 (\varepsilon^3)$$

inmediatamente obtenemos las funciones Q_0 y Q_1

$$Q_0 = -a^3 \cos^3 \psi$$

$$Q_1 = -3a^2 \xi_1 \cos^2 \psi$$

para expandir Q_0 expresamos esta función de la siguiente manera

$$Q_0 = a^3 \cos^3 \psi = a^3 \left(\frac{1}{4} \cos 3\psi + \frac{3}{4} \cos \psi \right)$$

La expansión en serie de Fourier nos lleva inmediatamente a:

$$Q_0 = \frac{-a^3}{4} \cos 3\psi - \frac{3a^3}{4} \cos \psi = \sum_{n=0}^{\infty} (\beta_n \cos n\psi + \alpha_n \sin n\psi)$$

Identificando términos obtenemos:

para $n = 0$,

$$\beta_0 = 0$$

para $n = 1$,

$$\alpha_1 = 0, \beta_1 = \frac{-3a^3}{4}$$

para $n = 3$,

$$\beta_3 = \frac{-a^3}{4}, \alpha_3 = 0$$

Todos los demás términos son nulos

$$\beta_n = 0 \quad \forall n = 2, 4, 5, 6, \dots$$

$$\alpha_n = 0 \quad \forall n = 1, 2, 3, \dots$$

Identificados los términos no nulos de la función Q_0 podemos hallar la expresión para ξ_1 , usando las ecuaciones (2.194), (2.195) y (2.196)

$$\xi_1 = \frac{\beta_0}{\omega_0^2} + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{\beta_n}{(1-n^2)\omega_0^2} \cos n\psi + \frac{\alpha_n}{(1-n^2)\omega_0^2} \operatorname{sen} n\psi \right)$$

de donde inmediatamente se observa que los términos que quedan son:

$$U_0 = \frac{\beta_0}{\omega_0^2} = 0$$

$$U_3 = -\frac{a^3}{4(1-3^2)\omega_0^2} = -\frac{a^3}{32\omega_0^2}$$

$$U_3 = -\frac{a^3}{32\omega_0^2}$$

todos los demás términos son nulos

$$U_n = \frac{\beta_n}{(1-n^2)\omega_0^2} = 0 \quad \forall n = 2, 4, 5, 6, \dots$$

$$\gamma_n = \frac{\alpha_n}{(1-n^2)\omega_0^2} = 0 \quad \forall n = 0, 2, 3, 4, 5, 6, \dots$$

Análogamente para ω_1 y f_1

$$\omega_1 = \frac{-\beta_1}{2a\omega_0} = \frac{3a^3}{8a\omega_0}$$

$$\omega_1 = \frac{3a^2}{8\omega_0}$$

$$f_1 = \frac{\alpha_1}{2\omega_0} = 0$$

$$f_1 = 0$$

Resumiendo obtenemos finalmente:

$$\xi_1 = \frac{-a^3}{32\omega_0^2} \cos 3\psi \tag{2.199}$$

$$f_1 = 0 \tag{2.200}$$

$$\omega_1 = \frac{3a^2}{8\omega_0} \tag{2.201}$$

Sustituimos las ecuaciones de primer orden (2.199), (2.200) y (2.201) en la ecuación para $\varepsilon^2 Q_1$ (2.190)

$$\omega_0^2 \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial \psi^2} + \omega_0^2 \xi_2 = \left(2a \omega_0 \omega_2 + a \left(\frac{3a^2}{8\omega_0} \right)^2 \right) \cos \psi + (2f_2 \omega_0) \operatorname{sen} \psi - 2\omega_0 \left(\frac{3a^2}{8\omega_0} \right) \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial \psi^2} - 3a^2 \xi_1 \cos^2 \psi$$

$$\omega_0^2 \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial \psi^2} + \omega_0^2 \xi_2 = \left(2a \omega_0 \omega_2 + \frac{9a^5}{64\omega_0^2} \right) \cos \psi + 2f_2 \omega_0 \operatorname{sen} \psi + \frac{27}{128} \frac{a^5}{\omega_0^2} \cos 3\psi - 3a^2 \frac{a^3}{32\omega_0^2} \cos 3\psi \cos^2 \psi$$

utilizando la identidad

$$\cos 3\psi \cos^2 \psi = \frac{1}{4} \cos 5\psi + \frac{1}{4} \cos \psi + \frac{1}{2} \cos 3\psi$$

y ordenando convenientemente tenemos que:

$$\omega_0^2 \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial \psi^2} + \omega_0^2 \xi_2 = \left(2a \omega_0 \omega_2 + \frac{9a^5}{64\omega_0^2} - \frac{3a^5}{128\omega_0^2} \right) \cos \psi + \left(\frac{27a^5}{128\omega_0^2} - \frac{3a^5}{64\omega_0^2} \right) \cos 3\psi - \frac{3a^5}{128\omega_0^2} \cos 5\psi + 2f_2 \omega_0 \operatorname{sen} \psi$$

y:

$$\omega_0^2 \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial \psi^2} + \omega_0^2 \xi_2 = \left(2a \omega_0 \omega_2 + \frac{15a^5}{128\omega_0^2} \right) \cos \psi + \frac{21}{128} \frac{a^5}{\omega_0^2} \cos 3\psi - \frac{3a^5}{128\omega_0^2} \cos 5\psi + 2f_2 \omega_0 \operatorname{sen} \psi \quad (2.202)$$

el tratamiento para esta ecuación es similar al aplicado para la obtención de ξ_1 , primero obtendremos su expansión en series de Fourier

$$\xi_2 = \sum (V_n \cos n\psi + Z_n \operatorname{sen} n\psi) \quad (2.203)$$

$$\frac{\partial \xi_2^2}{\partial \psi^2} = \sum (-n^2 V_n \cos n\psi - n^2 Z_n \operatorname{sen} n\psi)$$

reemplazando esta ecuación en (2.202), obtenemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[\omega_0^2 (1 - n^2) V_n \cos n\psi + \omega_0^2 (1 - n^2) Z_n \operatorname{sen} n\psi \right] = \left(2a \omega_0 \omega_2 + \frac{15a^5}{128\omega_0^2} \right) \cos \psi + \frac{21}{128} \frac{a^5}{\omega_0^2} \cos 3\psi - \frac{3a^5}{128\omega_0^2} \cos 5\psi + 2f_2 \omega_0 \operatorname{sen} \psi$$

Identificando términos:

$$V_1 = Z_1 = 0$$

para $n = 0$: $\omega_0^2 V_0 = 0$, de donde

$$V_0 = 0$$

para $n = 1$:

$$2a \omega_0 \omega_2 + \frac{15a^5}{128 \omega_0^2} = 0 \quad 2f_2 \omega_0 = 0$$

de donde se obtienen las expresiones para ω_2 y f_2

$$\omega_2 = -\frac{15a^4}{256 \omega_0^3}$$

$$f_2 = 0$$

Para $n = 2$ tenemos que $V_2 = Z_2 = 0$

Para $n = 3$ tenemos dos ecuaciones:

$$\omega_0^2 (1 - 9) V_3 = \frac{21 a^5}{128 \omega_0^2}$$

de donde la expresión para V_3 será

$$V_3 = -\frac{21a^5}{1024 \omega_0^4}$$

y

$$Z_3 = 0$$

Para $n = 4$ tenemos que $V_4 = Z_4 = 0$

Para $n = 5$ tenemos que $Z_5 = 0$

$$\omega_0^2 (1 - 5^2) V_5 = \frac{-3a^5}{128 \omega_0^2}$$

de donde:

$$V_5 = \frac{a^5}{1024 \omega_0^4}$$

Finalmente la expresión para ξ_2 queda

$$\xi_2 = \frac{-21a^5}{1024\omega_0^4} \cos 3\psi + \frac{a^5}{1024\omega_0^4} \cos 5\psi \quad (2.204)$$

Ordenando

$$\xi_2 = \frac{a^5}{1024\omega_0^4} (\cos 5\psi - 21 \cos 3\psi)$$

La solución analítica hasta el segundo orden a la ecuación de Duffing se obtiene agrupando todos los términos

$$\xi = a \cos \psi + \varepsilon \xi_1 + \varepsilon^2 \xi_2$$

para obtener

$$\xi = a \cos \psi + \varepsilon \frac{a^3}{32\omega_0^2} \cos 3\psi + \varepsilon^2 \frac{a^5}{1024\omega_0^4} (\cos 5\psi - 21 \cos 3\psi)$$

donde la amplitud a queda determinada según

$$\dot{a} = \varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2 = 0$$

es decir que a es una constante independiente del tiempo. Análogamente la expresión para ψ es:

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= \omega_0 + \varepsilon \frac{3a^2}{8\omega_0^2} - \varepsilon^2 \frac{15a^4}{256\omega_0^3} \\ \psi &= \omega_0 \left(1 + \varepsilon \frac{3a^2}{8\omega_0^2} - \varepsilon^2 \frac{15a^4}{256\omega_0^3} \right) t + \psi_0 \end{aligned}$$

Los resultados hallados por el método de Krylov–Bogoliubov concuerdan perfectamente con los encontrados por el método de Struble.

2.4.2. Aplicación a la ecuación de Van Der Pol

Aplicaremos ahora el método de Krylov–Bogoliubov a la ecuación de Van Der Pol para el oscilador

la ecuación a resolver es de la forma:

$$\ddot{\xi} + \xi = \varepsilon (\lambda - \xi^2)\dot{\xi} \quad (2.205)$$

en este caso $\omega_0 = 1$ y la función a expandir $Q(\xi, \dot{\xi})$ tiene la forma:

$$Q(\xi, \dot{\xi}) = \varepsilon (\lambda - \xi^2) \dot{\xi} \quad (2.206)$$

Para obtener la solución hasta el segundo orden de aproximación debemos utilizar:

$$\begin{aligned} \xi &= a \cos \psi + \varepsilon \xi_1(a, \psi) + \varepsilon^2 \xi_2(a, \psi) \\ \dot{a} &= \varepsilon f_1(a) + \varepsilon^2 f_2(a) \\ \dot{\psi} &= 1 + \varepsilon \omega_1(a) + \varepsilon^2 \omega_2(a) \end{aligned} \quad (2.207)$$

y debemos hallar $\xi^2(a, \psi)$ y $\dot{\xi}(a, \psi)$

Calculamos $\xi^2(a, \psi)$:

$$\begin{aligned} \xi^2 &= (a \cos \psi + \varepsilon \xi_1 + \varepsilon^2 \xi_2) (a \cos \psi + \varepsilon \xi_1 + \varepsilon^2 \xi_2) \\ \xi^2 &= a^2 \cos^2 \psi + \varepsilon (2a \xi_1 \cos \psi) + \varepsilon^2 (\xi_1^2 + 2a \xi_2 \cos \psi) + \varepsilon^3 (2\xi_1 \xi_2) + \varepsilon^4 \xi_2^2 \end{aligned}$$

manteniendo sólo los términos de segundo orden:

$$\xi^2 = a^2 \cos^2 \psi + \varepsilon (2a \xi_1 \cos \psi) + \varepsilon^2 (\xi_1^2 + 2a \xi_2 \cos \psi) + O(\varepsilon^3) \quad (2.208)$$

Para calcular $\dot{\xi}$ hallaremos $\frac{d}{dt}(a \cos \psi)$, $\dot{\xi}_1$ y $\dot{\xi}_2$ los cuales han sido calculados anteriormente

$$\frac{d}{dt}(a \cos \psi) = \dot{a} \cos \psi - a \dot{\psi} \sin \psi$$

$$\dot{\xi}_1 = \dot{a} \frac{\partial \xi_1}{\partial a} + \dot{\psi} \frac{\partial \xi_1}{\partial \psi}$$

$$\dot{\xi}_2 = \dot{a} \frac{\partial \xi_2}{\partial a} + \dot{\psi} \frac{\partial \xi_2}{\partial \psi} \quad (2.209)$$

Reemplazamos en estas tres últimas ecuaciones las ecuaciones (2.207) y ordenamos en potencias de ε obteniendo

$$\frac{d}{dt}(a \cos \psi) = -a \sin \psi + \varepsilon (f_1 \cos \psi - a \omega_1 \sin \psi) + \varepsilon^2 (f_2 \cos \psi - a \omega_2 \sin \psi)$$

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_1 &= \frac{\partial \xi_1}{\partial \psi} + \varepsilon \left(f_1 \frac{\partial \xi_1}{\partial a} + \omega_1 \frac{\partial \xi_1}{\partial \psi} \right) + \varepsilon^2 \left(f_2 \frac{\partial \xi_1}{\partial a} + \omega_2 \frac{\partial \xi_1}{\partial \psi} \right) \\ \dot{\xi}_2 &= \frac{\partial \xi_2}{\partial \psi} + \varepsilon \left(f_1 \frac{\partial \xi_2}{\partial a} + \omega_1 \frac{\partial \xi_2}{\partial \psi} \right) + \varepsilon^2 \left(f_2 \frac{\partial \xi_2}{\partial a} + \omega_2 \frac{\partial \xi_2}{\partial \psi} \right)\end{aligned}\quad (2.210)$$

con estas ecuaciones obtenemos finalmente la expresión

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= \frac{d}{dt} (a \cos \psi) + \varepsilon \dot{\xi}_1 (a, \psi) + \varepsilon^2 \dot{\xi}_2 (a, \psi) \\ \dot{\xi} &= -a \operatorname{sen} \psi + \varepsilon \left(f_1 \cos \psi - a \omega_1 \operatorname{sen} \psi + \frac{\partial \xi_1}{\partial \psi} \right) + \\ &\quad \varepsilon^2 \left(f_2 \cos \psi - a \omega_2 \operatorname{sen} \psi + f_1 \frac{\partial \xi_1}{\partial a} + \omega_1 \frac{\partial \xi_1}{\partial \psi} + \frac{\partial \xi_2}{\partial \psi} \right) + O(\varepsilon^3)\end{aligned}\quad (2.211)$$

Reemplazando las ecuaciones (2.208) y (2.211) en (2.206) y ordenando en potencias de ε

$$\begin{aligned}Q(\xi, \dot{\xi}) &= \varepsilon (a^3 \cos^2 \psi \operatorname{sen} \psi - \lambda a \operatorname{sen} \psi) + \\ &\quad \varepsilon^2 (\lambda f_1 \cos \psi - \lambda a \omega_1 \operatorname{sen} \psi - a^2 f_1 \cos^3 \psi + a^3 \omega_1 \cos^2 \psi \operatorname{sen} \psi) + \\ &\quad \varepsilon^2 \left(2a^2 \xi_1 \cos \psi \operatorname{sen} \psi - a^2 \cos^2 \psi \frac{\partial \xi_1}{\partial \psi} + \lambda \frac{\partial \xi_1}{\partial \psi} \right)\end{aligned}\quad (2.212)$$

identificamos los términos εQ_0 y $\varepsilon^2 Q_1$

$$Q_0 = a^3 \cos^2 \psi \operatorname{sen} \psi - \lambda a \operatorname{sen} \psi \quad (2.213)$$

$$\begin{aligned}Q_1 &= \lambda f_1 \cos \psi - \lambda a \omega_1 \operatorname{sen} \psi - a^2 f_1 \cos^3 \psi + a^3 \omega_1 \cos^2 \psi \operatorname{sen} \psi + \\ &\quad 2a^2 \xi_1 \cos \psi \operatorname{sen} \psi - a^2 \cos^2 \psi \frac{\partial \xi_1}{\partial \psi} + \lambda \frac{\partial \xi_1}{\partial \psi}\end{aligned}\quad (2.214)$$

Para reducir Q_0 y Q_1 a la forma deseada utilizaremos las siguientes identidades trigonométricas

$$\begin{aligned}\cos^2 \psi &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\psi \\ \cos^3 \psi &= \frac{1}{4} \cos 3\psi + \frac{3}{4} \cos \psi \\ \cos^2 \psi \operatorname{sen} \psi &= \frac{1}{4} \operatorname{sen} \psi + \frac{1}{4} \operatorname{sen} 3\psi\end{aligned}$$

$$\cos \psi \operatorname{sen} \psi = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\psi$$

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2} \cos(A + B) + \frac{1}{2} \cos(A - B)$$

$$\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B = \frac{1}{2} \cos(A - B) - \frac{1}{2} \cos(A + B)$$

obteniendo:

$$Q_0 = \left(\frac{a^3}{4} - \lambda a \right) \operatorname{sen} \psi + \frac{a^3}{4} \operatorname{sen} 3\psi \quad (2.215)$$

$$\begin{aligned} Q_1 = & \left(\lambda - \frac{a^2}{2} \right) \frac{\partial \xi_1}{\partial \psi} + \left(\lambda f_1 - \frac{3}{4} a^2 f_1 \right) \cos \psi - \frac{a^2}{2} \frac{\partial \xi_1}{\partial \psi} \cos 2\psi - \frac{a^2}{4} f_1 \cos 3\psi + \\ & \left(\frac{1}{4} a^3 \omega_1 - \lambda a \omega_1 \right) \operatorname{sen} \psi + a^2 \xi_1 \operatorname{sen} 2\psi + \frac{1}{4} a^3 \omega_1 \operatorname{sen} 3\psi \end{aligned} \quad (2.216)$$

ahora utilizamos la expresión (2.191) para identificar los términos no nulos de la serie de Fourier

$$Q_0 = \sum_{n=0}^{\infty} (\beta_n \cos n\psi + \alpha_n \operatorname{sen} n\psi) = \left(\frac{a^3}{4} - \lambda a \right) \operatorname{sen} \psi + \frac{a^3}{4} \operatorname{sen} 3\psi \quad (2.217)$$

de aquí

$$B_n = 0 \quad \forall n = 0$$

$$\alpha_1 = \frac{a^3}{4} - \lambda a \quad \alpha_3 = \frac{a^3}{4} \quad (2.218)$$

$$\alpha_n = 0 \quad \forall n = 0, 2, 3, 4, \dots \quad (2.219)$$

Utilizando las ecuaciones (2.194), (2.195) y (2.196) para ξ_1 obtenemos:

$$\omega_1 = 0$$

$$f_1 = -\frac{1}{2} \left(\frac{a^3}{4} - \lambda a \right) \quad (2.220)$$

y la solución de primer orden es:

$$\xi_1 = -\frac{a^3}{32} \operatorname{sen} 3\psi \quad (2.221)$$

Para la obtención de la ecuación de segundo orden reemplazamos en 2.190 lo obtenido, tal que la ecuación para ξ_2 se reduce a:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial \psi^2} + \xi_2 &= \left(-f_1 \frac{\partial f_1}{\partial a} + 2a\omega_2 \right) \cos \psi - 2f_1 \left(\frac{-9a^2}{32} \right) \cos 3\psi + \left(\lambda - \frac{a^2}{2} \right) \left(-\frac{3a^3}{32} \cos 3\psi \right) + \\ & 2f_2 \sin \psi + f_1 \left(\lambda - \frac{3}{4}a^2 \right) \cos \psi - \frac{a^2}{2} \left(-\frac{3a^3}{32} \cos 3\psi \right) \cos 2\psi - \frac{a^2}{4} f_1 \cos 3\psi + \\ & a^2 \left(-\frac{a^3}{32} \sin 3\psi \right) \sin 2\psi \end{aligned}$$

Simplificando y ordenando:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial \psi^2} + \xi_2 &= \left[-f_1 \frac{\partial f_1}{\partial a} + 2a\omega_2 + f_1 \left(\lambda - \frac{3}{4}a^2 \right) \right] \cos \psi + \left[\frac{9a^2}{16} f_1 - \left(\lambda - \frac{a^2}{2} \right) \frac{3a^3}{32} - \frac{a^2}{4} f_1 \right] \cos 3\psi \\ & 2f_2 \sin \psi + \frac{3a^5}{64} \cos 3\psi \cos 2\psi - \frac{a^5}{32} \sin 3\psi \sin 2\psi \end{aligned}$$

podemos simplificar los dos últimos términos de la ecuación anterior utilizando las identidades trigonométricas

$$\frac{3a^5}{64} \cos 3\psi \cos 2\psi - \frac{a^5}{32} \sin 3\psi \sin 2\psi = \frac{a^5}{128} \cos \psi + \frac{5a^5}{128} \cos 5\psi$$

así para ξ_2 tenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial \psi^2} + \xi_2 &= \left[-f_1 \frac{\partial f_1}{\partial a} + 2a\omega_2 + f_1 \left(\lambda - \frac{3}{4}a^2 \right) + \frac{a^5}{128} \right] \cos \psi + \left[\frac{5a^2}{16} f_1 - \left(\lambda - \frac{a^2}{2} \right) \frac{3a^3}{32} \right] \cos 3\psi \\ & + \frac{5a^5}{128} \cos 5\psi + 2f_2 \sin \psi \end{aligned} \quad (2.222)$$

La expansión en serie de Fourier de ξ_2

$$\xi_2 = \sum [V_n(a) \cos n\psi + Z_n(a) \sin n\psi] \quad (2.223)$$

$$\frac{\partial^2 \xi_2}{\partial \psi^2} + \xi_2 = \sum_{n=0}^{\infty} [V_n(1-n^2) \cos n\psi + Z_n(1-n^2) \sin n\psi] \quad (2.224)$$

comparando las ecuaciones (2.222) y (2.224) podemos obtener los términos no nulos de la expansión en serie de Fourier de ξ_2 y solo quedan los términos para $n = 1, 3$ y 5

Por independencia de las funciones $\sin \psi$ o $\cos \psi$ y teniendo en cuenta que ξ_2 no debe tener multiples de $\sin \psi$ o $\cos \psi$, para $n=1$ obtenemos dos ecuaciones

$$-f_1 \frac{\partial f_1}{\partial a} + 2a\omega_2 + f_1 \left(\lambda - \frac{3a^2}{4} \right) + \frac{a^5}{128} = 0 \quad (2.225)$$

de aqui hallamos la expresi3n para ω_2

$$\omega_2 = \frac{f_1}{2a} \left[\frac{\partial f_1}{\partial a} - \lambda + \frac{3a^2}{4} \right] - \frac{a^4}{256} \quad (2.226)$$

y $f_2 = 0$

Para $n = 3$

$$V_3(-8) = \frac{5}{16} a^2 f_1 - \left(\lambda - \frac{a^2}{2} \right) \frac{3a^3}{32}$$

Reemplazamos en esta 3ltima ecuaci3n la expresi3n hallada para f_1

$$-8V_3 = \frac{5}{16} a^2 \left(-\frac{1}{2} \right) \left(\frac{a^3}{4} - \lambda a \right) - \left(\lambda - \frac{a^2}{2} \right) \frac{3a^3}{32} \quad (2.227)$$

el t3rmino no nulo V_3 ser3:

$$V_3 = -\frac{a^3}{1024} (a^2 + 8\lambda) \quad (2.228)$$

Para $n = 5$ obtenemos la expresi3n para el t3rmino V_5

$$V_5 = -\frac{5a^5}{3072} \quad (2.229)$$

y agrupando todos los t3rminos no nulos, obtenemos finalmente la expresi3n para ξ_2

$$\xi_2 = -\frac{a^3}{1024} (a^2 + 8\lambda) \cos 3\psi - \frac{5a^5}{3072} \cos 5\psi \quad (2.230)$$

Estamos ya en condiciones de determinar el valor de la amplitud a , la frecuencia ψ y la soluci3n anal3tica en segundo orden para ξ , para este fin usamos la ecuaci3n (2.207)

$$\dot{a} = \varepsilon f_1(a) + \varepsilon^2 f_2(a) = \varepsilon \frac{a}{2} \left(\lambda - \frac{a^2}{4} \right) \quad (2.231)$$

ordenando

$$\frac{da}{\lambda a} + \frac{da}{4\lambda(\sqrt{\lambda} - a/2)} - \frac{da}{4\lambda(\sqrt{\lambda} + a/2)} = \frac{\varepsilon}{2} dt$$

Integrando esta ecuación obtenemos

$$a = \left(\lambda - \frac{a^2}{4} \right)^{1/2} A_0 e^{\lambda \varepsilon t / 2}$$

y si tomamos la condición que en $t = 0$ $a(0) = a_0$ obtenemos para la amplitud

$$a^2 = \frac{4\lambda}{1 + \left(\frac{4\lambda}{a_0^2} - 1 \right) e^{-\lambda \varepsilon t}} \quad (2.232)$$

y para la frecuencia ψ obtenemos

$$\dot{\psi} = 1 + \varepsilon^2 \omega_2(a) = 1 + \varepsilon^2 \left[\frac{f_1}{2a} \left(\frac{\partial f_1}{\partial a} - \lambda + \frac{3}{4} a^2 \right) - \frac{a^4}{256} \right]$$

o equivalentemente

$$\dot{\psi} = 1 - \varepsilon^2 \left[\frac{f_1}{2a} \frac{\partial f_1}{\partial a} + \frac{a^4}{256} \right] \quad (2.233)$$

Podemos intentar simplificar $\dot{\psi}$ utilizando \dot{a} , f_1 y $\frac{\partial f_1}{\partial a}$

$$\frac{f_1}{2a} = \frac{1}{4} \left(\lambda - \frac{a^2}{4} \right) = \frac{\dot{a}}{4\varepsilon a}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial a} = \frac{1}{2} \left(\lambda - \frac{3a^2}{4} \right)$$

$$\dot{\psi} = 1 - \varepsilon^2 \left[\frac{\dot{a}}{4\varepsilon a} \left(\lambda - \frac{3}{4} a^2 \right) + \frac{a^4}{256} \right]$$

de la ecuación para \dot{a} despejamos a^2 con la intención de hallar una expresión para a^4

$$a^2 = 4\lambda - \frac{8\dot{a}}{\varepsilon a}$$

$$a^4 = 4\lambda a^2 - \frac{8\dot{a}a}{\varepsilon}$$

$$a^4 = 4\lambda \left(4\lambda - \frac{8\dot{a}}{\varepsilon a} \right) - \frac{8\dot{a}a}{\varepsilon} = 16\lambda^2 - 32 \frac{\lambda \dot{a}}{\varepsilon a} - \frac{8\dot{a}a}{\varepsilon}$$

al reemplazarla en la ecuación para $\dot{\psi}$ se obtiene

$$\dot{\psi} = 1 - \frac{\varepsilon \dot{a}}{4a} \left(\lambda - \frac{3}{4} a^2 \right) - \frac{\varepsilon^2}{256} \left[16\lambda^2 - 32 \frac{\lambda \dot{a}}{\varepsilon a} - \frac{8\dot{a}a}{\varepsilon} \right]$$

$$\dot{\psi} = 1 - \frac{\varepsilon \dot{a} \lambda}{8a} + \frac{7}{32} \varepsilon \dot{a} a - \varepsilon^2 \frac{\lambda^2}{16}$$

y obtenemos $\dot{\psi}$

$$\dot{\psi} = 1 - \frac{\varepsilon}{8a} \left(\lambda - \frac{7}{4} a^2 \right) \dot{a} - \varepsilon^2 \frac{\lambda^2}{16}$$

de esta última al integrar obtenemos finalmente la expresión para la frecuencia ψ

$$\psi = t - \varepsilon \frac{\lambda}{8} \ln a + \varepsilon \frac{7}{64} a^2 - \varepsilon^2 \frac{\lambda^2}{16} t + \psi_0 \quad (2.234)$$

siendo ψ_0 una constante.

La solución general es entonces :

$$\xi = a \cos \psi - \varepsilon \left(\frac{a^3}{32} \operatorname{sen} 3\psi \right) - \varepsilon^2 \left[\frac{a^3}{1024} (a^2 + 8\lambda) \cos 3\psi + \frac{5a^5}{3072} \cos 5\psi \right] \quad (2.235)$$

Vemos pues que este resultado está en plena concordancia con el obtenido por el método de múltiples escalas.

2.4.3. Características generales del método

Dependencia de la frecuencia con la amplitud de oscilación

Hemos visto que en el desarrollo del método de Krylov–Bogoliubov se ha asumido la dependencia de la frecuencia con la amplitud máxima de oscilación, es decir:

$$\dot{\psi}(a) = \omega_0 + \varepsilon \omega_1(a) + \varepsilon^2 \omega_2(a) + \varepsilon^3 \omega_3(a) + \dots$$

$$\dot{\psi}(a) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \omega_n(a)$$

La elección de esta dependencia se debe a que muchos de los métodos de aproximación aplicados a sistemas no lineales muestran esta tendencia, por ejemplo:

En el caso del péndulo simple se obtiene la ecuación diferencial:

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \operatorname{sen}(\theta) = 0$$

y la determinación del período lleva a una integral elíptica de primera especie [13]

$$T = 4\sqrt{\frac{L}{g}} \int_0^1 [(1-z^2)(1-k^2)]^{-1/2} dz \quad (2.236)$$

donde:

$$k = \text{sen}(\theta_0/2)$$

y

$$z = \frac{\text{sen}\theta/2}{\text{sen}\theta_0/2}$$

siendo θ_0 la amplitud de oscilación. Para $\text{sen}(\theta_0/2) = k \ll 1$ se obtiene la aproximación

$$\tau = 4\sqrt{\frac{L}{g}} \int_0^1 \frac{dz}{(1-z^2)^{1/2}} \left[1 + \frac{k^2 z^2}{2} + \frac{3k^4 z^4}{8} + \dots \right] \quad (2.237)$$

integrando

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \left[1 + \frac{k^2}{4} + \frac{9k^4}{64} + \dots \right] \quad (2.238)$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \left[1 + \frac{1}{4}\theta_0^2 + \frac{11}{3072}\theta_0^4 + \dots \right] \quad (2.239)$$

y como $\omega = 2\pi/T$

$$\omega = \omega_0 \left[1 - \frac{1}{16}\theta_0^2 + \frac{1}{3072}\theta_0^4 + \dots \right] = \frac{d\psi}{dt} \quad (2.240)$$

Esta última ecuación muestra que la frecuencia depende de la amplitud de oscilación del sistema.

Otro ejemplo es la resolución de la ecuación de Duffing por el método de múltiples variables explicadas

$$\ddot{\xi} + \omega_0^2 \xi = -\varepsilon \xi^3 \quad (2.241)$$

que obtiene para la frecuencia

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega = \omega_0 \left[1 + \varepsilon \frac{3a^2}{8\omega_0^2} - \varepsilon^2 \frac{15a^4}{256\omega_0^4} + \dots \right] \quad (2.242)$$

y nuevamente la frecuencia es función de la máxima amplitud de oscilación

Dependencia de la amplitud con el tiempo

La dependencia de la frecuencia con la amplitud es solo una de las características que tienen los sistemas no lineales, otra característica también importante de estos sistemas es la variación de la amplitud con el tiempo y este detalle también es considerado en el método Krylov–Bogoliubov a través de la condición:

$$\dot{a} = \varepsilon f_1(a) + \varepsilon^2 f_2(a) + \varepsilon^3 f_3(a) + \dots \quad (2.243)$$

ó

$$\dot{a} = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n f_n(a) \quad (2.244)$$

por ejemplo para el caso del oscilador no lineal, la ecuación conocida como la ecuación de Van Der Pol

$$\ddot{\xi} + \xi = \varepsilon (1 - \xi^2)\dot{\xi} \quad (2.245)$$

Utilizando el método de múltiples variables se demostró que la amplitud de oscilación es de la forma:

$$a^2 = \frac{4}{1 + [\frac{4}{a_0^2} - 1]e^{-\varepsilon t}} \quad (2.246)$$

vemos pues como la amplitud depende del tiempo

$$\xi = a \cos \psi - \varepsilon \left(\frac{a^3}{32} \operatorname{sen} 3\psi \right) - O(\varepsilon^2) \quad (2.247)$$

Estas condiciones se deberán tener en cuenta cuando se extienda el método al caso de sistemas dinámicos no lineales con dos grados de libertad.

Capítulo 3

Desarrollo del método de Krylov–Bogoliubov a sistemas dinámicos no lineales con dos grados de libertad

Se ha estudiado y aplicado el método de Krylov–Bogoliubov a sistemas dinámicos con un grado de libertad [14] y se ha llegado a resultados que concuerdan perfectamente con los obtenidos por otros métodos. Nuestro propósito ahora es desarrollar el método Krylov–Bogoliubov para sistemas dinámicos no lineales con dos grados de libertad hasta el segundo orden de aproximación, aplicarlo al problema péndulo-resorte y encontrar la solución analítica hasta el primer orden de aproximación comparando el resultado con el obtenido numéricamente por el método de Runge Kutta.

3.1. Desarrollo del método Krylov–Bogoliubov a sistemas dinámicos no lineales con dos grados de libertad

las ecuaciones que se pretende resolver son de la forma:

$$\ddot{\xi}_1 + \omega_{10}^2 \xi_1 = \varepsilon Q_1(\xi_1, \xi_2, \dot{\xi}_1, \dot{\xi}_2) \quad (3.1)$$

$$\ddot{\xi}_2 + \omega_{20}^2 \xi_2 = \varepsilon Q_2(\xi_1, \xi_2, \dot{\xi}_1, \dot{\xi}_2) \quad (3.2)$$

donde ξ_1 y ξ_2 se buscan de la siguiente forma:

$$\ddot{\xi}_i + \omega_{i0}^2 \xi_i = \varepsilon Q_i(\xi_1, \xi_2, \dot{\xi}_1, \dot{\xi}_2) \quad (3.3)$$

$$\xi_i = a_i \cos\psi_i + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \xi_{in}(a_1, a_2, \psi_1, \psi_2) \quad (3.4)$$

$$\dot{\psi}_i = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \omega_{in} \quad (3.5)$$

$$\dot{a}_i = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n f_{in}(a_1, a_2) \quad (3.6)$$

para $i = 1, 2$.

Ahora hay que tener en cuenta que a_1 y a_2 son las amplitudes de los armónicos fundamentales y que ω_{10} y ω_{20} son las frecuencias fundamentales (para $\varepsilon = 0$).

Resolveremos la ecuación genérica para ξ_i , lo cual implica determinar primero $\ddot{\xi}_i$.

Derivamos dos veces los términos de la ecuación (3.4)

$$\ddot{\xi}_i = \frac{d^2}{dt^2}(a_i \cos\psi_i) + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \ddot{\xi}_{in}(a_1, a_2, \psi_1, \psi_2) \quad (3.7)$$

teniendo en cuenta que:

$$\dot{\xi}_{ij} = \sum_{n=1}^2 \left(\frac{\partial \xi_{ij}}{\partial a_n} \dot{a}_n + \frac{\partial \xi_{ij}}{\partial \psi_n} \dot{\psi}_n \right) \quad (3.8)$$

de donde se obtiene :

$$\begin{aligned} \ddot{\xi}_{ij} &= \sum_{n=1}^2 \left[\sum_{m=1}^2 \left(\frac{\partial^2 \xi_{ij}}{\partial a_m \partial a_n} \dot{a}_m \dot{a}_n + \frac{\partial^2 \xi_{ij}}{\partial \psi_m \partial a_n} \dot{a}_n \dot{\psi}_m \right) + \sum_{m=1}^2 \left(\frac{\partial^2 \xi_{ij}}{\partial a_m \partial \psi_n} \dot{a}_m \dot{\psi}_n + \frac{\partial^2 \xi_{ij}}{\partial \psi_m \partial \psi_n} \dot{\psi}_m \dot{\psi}_n \right) \right] \\ &+ \sum_{n=1}^2 \left(\frac{\partial \xi_{ij}}{\partial a_n} \ddot{a}_n + \frac{\partial \xi_{ij}}{\partial \psi_n} \ddot{\psi}_n \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{\xi}_{ij} &= \sum_{n=1}^2 \sum_{m=1}^2 \left[\frac{\partial^2 \xi_{ij}}{\partial a_m \partial a_n} \dot{a}_m \dot{a}_n + \frac{\partial^2 \xi_{ij}}{\partial \psi_m \partial a_n} \dot{a}_n \dot{\psi}_m + \frac{\partial^2 \xi_{ij}}{\partial a_m \partial \psi_n} \dot{a}_m \dot{\psi}_n + \frac{\partial^2 \xi_{ij}}{\partial \psi_m \partial \psi_n} \dot{\psi}_m \dot{\psi}_n \right] + \\ &\sum_{n=1}^2 \left(\frac{\partial \xi_{ij}}{\partial a_n} \ddot{a}_n + \frac{\partial \xi_{ij}}{\partial \psi_n} \ddot{\psi}_n \right) \end{aligned}$$

En esta última expresión el segundo y tercer término de la sumatoria doble se pueden sumar

$$\begin{aligned} \ddot{\xi}_{ij} = & \sum_{n=1}^2 \sum_{m=1}^2 \left[\frac{\partial^2 \xi_{ij}}{\partial a_m \partial a_n} \dot{a}_m \dot{a}_n + 2 \frac{\partial^2 \xi_{ij}}{\partial \psi_m \partial a_n} \dot{a}_n \dot{\psi}_m + \frac{\partial^2 \xi_{ij}}{\partial \psi_m \partial \psi_n} \dot{\psi}_m \dot{\psi}_n \right] + \\ & \sum_{n=1}^2 \left(\frac{\partial \xi_{ij}}{\partial a_n} \ddot{a}_n + \frac{\partial \xi_{ij}}{\partial \psi_n} \ddot{\psi}_n \right) \end{aligned} \quad (3.9)$$

y para seguir simplificando esta última ecuación calcularemos: \ddot{a}_n , $\ddot{\psi}_n$, $\dot{a}_n \dot{a}_m$, $\dot{\psi}_n \dot{\psi}_m$, $\dot{a}_n \dot{\psi}_m$

Cálculo de \ddot{a}_n :

Utilizando las ecuaciones (3.6)

$$\ddot{a}_n = \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^2 \varepsilon^{p+k} \frac{\partial f_{np}}{\partial a_l} f_{lk}$$

y considerando los términos hasta ε^2 obtenemos

$$\ddot{a}_n = \sum_{m=1}^2 \varepsilon^2 \frac{\partial f_{n1}}{\partial a_m} f_{m1}$$

o también:

$$\ddot{a}_n = \varepsilon^2 \left(\frac{\partial f_{n1}}{\partial a_1} f_{11} + \frac{\partial f_{n1}}{\partial a_2} f_{21} \right) \quad (3.10)$$

Un análisis similar nos permite obtener el término $\dot{a}_n \dot{a}_m$:

$$\dot{a}_n \dot{a}_m = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \varepsilon^{p+k} f_{np} f_{mk}$$

$$\dot{a}_n \dot{a}_m = \varepsilon^2 f_{n1} f_{m1} \quad (3.11)$$

Análogamente usando (3.5) y (3.6) obtenemos los términos $\dot{a}_n \dot{\psi}_m$, $\dot{\psi}_n \dot{\psi}_m$ y $\ddot{\psi}_n$.

así:

$$\dot{a}_n \dot{\psi}_m = \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{p+k} f_{np} \omega_{mk}$$

$$\dot{a}_n \dot{\psi}_m = \varepsilon (f_{n1} \omega_{m0}) + \varepsilon^2 (f_{n1} \omega_{m1} + f_{n2} \omega_{m0}) \quad (3.12)$$

$$\dot{\psi}_n \dot{\psi}_m = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{p+k} \omega_{np} \omega_{mk}$$

$$\dot{\psi}_n \dot{\psi}_m = \omega_{n0} \omega_{m0} + \varepsilon (\omega_{n0} \omega_{m1} + \omega_{n1} \omega_{m0}) + \varepsilon^2 (\omega_{n0} \omega_{m2} + \omega_{n1} \omega_{m1} + \omega_{n2} \omega_{m0}) \quad (3.13)$$

y

$$\begin{aligned} \ddot{\psi}_n &= \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{k=1}^2 \varepsilon^p \frac{\partial \omega_{np}}{\partial a_k} \dot{a}_k \\ \ddot{\psi}_n &= \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^2 \varepsilon^{p+j} \frac{\partial \omega_{np}}{\partial a_k} f_{kj} \end{aligned}$$

manteniendo los términos hasta ε^2 y teniendo en cuenta que $\omega_{n0} = 0$ obtenemos:

$$\begin{aligned} \ddot{\psi}_n &= \sum_{k=1}^2 \left[\varepsilon \left(\frac{\partial \omega_{n0}}{\partial a_k} f_{k1} \right) + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial \omega_{n0}}{\partial a_k} f_{k2} + \frac{\partial \omega_{n1}}{\partial a_k} f_{k1} \right) \right] \\ \ddot{\psi}_n &= \sum_{k=1}^2 \varepsilon^2 f_{k1} \frac{\partial \omega_{n1}}{\partial a_k} = \sum_{m=1}^2 \varepsilon^2 f_{m1} \frac{\partial \omega_{n1}}{\partial a_m} \\ \ddot{\psi}_n &= \varepsilon^2 \left(f_{11} \frac{\partial \omega_{n1}}{\partial a_1} + f_{21} \frac{\partial \omega_{n1}}{\partial a_2} \right) \end{aligned} \quad (3.14)$$

Reemplazando las ecuaciones (3.10), (3.11), (3.12), (3.13) y (3.14) en la ecuación (3.9)

para $\ddot{\xi}_{ij}$

$$\begin{aligned} \ddot{\xi}_{ij} &= \sum_{m=1}^2 \sum_{n=1}^2 \varepsilon^2 \left(f_{m1} \frac{\partial f_{n1}}{\partial a_m} \frac{\partial \xi_{ij}}{\partial a_n} + f_{m1} \frac{\partial \omega_{n1}}{\partial a_m} \frac{\partial \xi_{ij}}{\partial \psi_n} \right) + \sum_{n=1}^2 \sum_{m=1}^2 \varepsilon^2 f_{n1} f_{m1} \frac{\partial^2 \xi_{ij}}{\partial a_m \partial a_n} + \\ &2 \sum_{n=1}^2 \sum_{m=1}^2 \left[\varepsilon f_{n1} \omega_{n0} + \varepsilon^2 (f_{n1} \omega_{m1} + f_{n2} \omega_{m0}) \right] \frac{\partial^2 \xi_{ij}}{\partial a_n \partial \psi_m} + \\ &\sum_{n=1}^2 \sum_{m=1}^2 \left[\omega_{n0} \omega_{m0} + \varepsilon (\omega_{n0} \omega_{m1} + \omega_{n1} \omega_{m0}) + \varepsilon^2 (\omega_{n0} \omega_{m2} + \omega_{n1} \omega_{m1} + \omega_{n2} \omega_{m0}) \right] \frac{\partial^2 \xi_{ij}}{\partial \psi_n \partial \psi_m} \end{aligned}$$

Agrupando en potencias de ε obtenemos la expresión final para $\ddot{\xi}_{ij}$

$$\begin{aligned} \ddot{\xi}_{ij} &= \sum_{m=1}^2 \sum_{n=1}^2 \omega_{n0} \omega_{m0} \frac{\partial^2 \xi_{ij}}{\partial \psi_n \partial \psi_m} + \varepsilon \sum_{n=1}^2 \sum_{m=1}^2 \left[2 f_{n1} \omega_{m0} \frac{\partial^2 \xi_{ij}}{\partial a_n \partial \psi_m} + (\omega_{n0} \omega_{m1} + \omega_{n1} \omega_{m0}) \frac{\partial^2 \xi_{ij}}{\partial a_n \partial \psi_m} \right] + \\ &\varepsilon^2 \sum_{m=1}^2 \sum_{n=1}^2 \left[f_{m1} \frac{\partial f_{n1}}{\partial a_m} \frac{\partial \xi_{ij}}{\partial a_n} + f_{m1} \frac{\partial \omega_{n1}}{\partial a_m} + f_{n1} f_{m1} \frac{\partial^2 \xi_{ij}}{\partial a_m \partial a_n} + 2 (f_{n1} \omega_{m1} + f_{n2} \omega_{m0}) \frac{\partial^2 \xi_{ij}}{\partial a_n \partial \psi_m} \right] + \\ &\varepsilon^2 \sum_{m=1}^2 \sum_{n=1}^2 (\omega_{n0} \omega_{m2} + \omega_{n1} \omega_{m1} + \omega_{n2} \omega_{m0}) \frac{\partial^2 \xi_{ij}}{\partial \psi_n \partial \psi_m} \end{aligned} \quad (3.15)$$

para completar la ecuación (3.7), solo nos falta determinar el término $\frac{\partial^2}{dt^2}(a_i \cos \psi_i)$

Entonces:

$$\frac{d}{dt}(a_i \cos \psi_i) = \dot{a}_i \cos \psi_i - a_i \dot{\psi}_i \sin \psi_i$$

derivando nuevamente

$$\frac{d^2}{dt^2}(a_i \cos \psi_i) = \ddot{a}_i \cos \psi_i - 2\dot{a}_i \dot{\psi}_i \sin \psi_i - a_i \ddot{\psi}_i \sin \psi_i - a_i \dot{\psi}_i^2 \cos \psi_i$$

y usando las ecuaciones (3.10), (3.12), (3.13) y (3.14) tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}(a_i \cos \psi_i) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j=1}^2 \varepsilon^{n+m} f_{jm} \frac{\partial f_{in}}{\partial a_j} \cos \psi_i - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^{n+m} f_{in} \omega_{im} \sin \psi_i - \\ &\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j=1}^2 \varepsilon^{n+m} f_{jm} \frac{\partial \omega_{in}}{\partial a_j} a_i \sin \psi_i - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^{n+m} a_i \omega_{in} \omega_{im} \cos \psi_i \end{aligned}$$

Operando teniendo en cuenta que ω_{i0} es constante y manteniendo los términos hasta ε^2 , obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}(a_i \cos \psi_i) &= -a_i \omega_{i0}^2 \cos \psi_i + \varepsilon (-2f_{i1} \omega_{i0} \sin \psi_i - 2a_i \omega_{i0} \omega_{i1} \cos \psi_i) + \\ &\varepsilon^2 \left[\left(f_{11} \frac{\partial f_{i1}}{\partial a_1} + f_{21} \frac{\partial f_{i1}}{\partial a_2} \right) \cos \psi_i - 2(f_{i1} \omega_{i1} + f_{i2} \omega_{i0}) \sin \psi_i \right] + \\ &\varepsilon^2 \left[- \left(f_{11} \frac{\partial \omega_{i1}}{\partial a_1} + f_{21} \frac{\partial \omega_{i1}}{\partial a_2} \right) a_i \sin \psi_i - a_i (2\omega_{i0} \omega_{i2} + \omega_{i1}^2) \cos \psi_i \right] \end{aligned} \quad (3.16)$$

reemplazando la ecuaciones (3.15) y (3.16) en la ecuación (3.7) y manteniendo solo términos hasta ε^2 tenemos:

$$\ddot{\xi}_i = \frac{d^2}{dt^2}(a_i \cos \psi_i) + \varepsilon \ddot{\xi}_{i1} + \varepsilon^2 \ddot{\xi}_{i2}$$

$$\begin{aligned}
\ddot{\xi}_i &= -a_i \omega_{i0}^2 \cos \psi_i + \varepsilon (-2f_{i1} \omega_{i0} \operatorname{sen} \psi_i - 2a_i \omega_{i0} \omega_{i1} \cos \psi_i) + \\
&\varepsilon^2 \left[\left(f_{11} \frac{\partial f_{i1}}{\partial a_1} + f_{21} \frac{\partial f_{i1}}{\partial a_2} \right) \cos \psi_i - 2(f_{i1} \omega_{i1} + f_{i2} \omega_{i0}) \operatorname{sen} \psi_i \right] + \\
&\varepsilon^2 \left[- \left(f_{11} \frac{\partial \omega_{i1}}{\partial a_1} + f_{21} \frac{\partial \omega_{i1}}{\partial a_2} \right) a_i \operatorname{sen} \psi_i - a_i (2\omega_{i0} \omega_{i2} + \omega_{i1}^2) \cos \psi_i \right] + \\
&\varepsilon \sum_{m=1}^2 \sum_{n=1}^2 \omega_{n0} \omega_{m0} \frac{\partial^2 \xi_{i1}}{\partial \psi_n \partial \psi_m} + \\
&\varepsilon^2 \sum_{n=1}^2 \sum_{m=1}^2 \left[2f_{n1} \omega_{m0} \frac{\partial^2 \xi_{i1}}{\partial a_n \partial \psi_m} + (\omega_{n0} \omega_{m1} + \omega_{n1} \omega_{m0}) \frac{\partial^2 \xi_{i1}}{\partial a_n \partial \psi_m} \right] + \\
&\varepsilon^2 \sum_{m=1}^2 \sum_{n=1}^2 \omega_{n0} \omega_{m0} \frac{\partial^2 \xi_{i2}}{\partial \psi_n \partial \psi_m} \tag{3.17}
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que:

$$\omega_{i0}^2 \xi_i = \omega_{i0}^2 a_i \cos \psi_i + \varepsilon \omega_{i0}^2 \xi_{i1} + \varepsilon^2 \omega_{i0}^2 \xi_{i2} \tag{3.18}$$

y

$$Q_i(\xi_1, \xi_2, \dot{\xi}_1, \dot{\xi}_2) = Q_{i0} + \varepsilon Q_{i1} \tag{3.19}$$

al reemplazar las ecuaciones (3.17), (3.18) y (3.19) obtendremos finalmente (3.3)

$$\ddot{\xi}_i + \omega_{i0}^2 \xi_i = \varepsilon Q_i(\xi_1, \xi_2, \dot{\xi}_1, \dot{\xi}_2)$$

Ordenando convenientemente en potencias de ε e igualando términos en ambos lados obtenemos las ecuaciones para ξ_{i1} y ξ_{i2} :

La ecuación para ξ_{i1} es:

$$\sum_{n=1}^2 \sum_{m=1}^2 \omega_{n0} \omega_{m0} \frac{\partial^2 \xi_{i1}}{\partial \psi_n \partial \psi_m} + \omega_{i0}^2 \xi_{i1} = 2f_{i1} \omega_{i0} \operatorname{sen} \psi_i + 2a_i \omega_{i0} \omega_{i1} \cos \psi_i + Q_{i0}$$

expandiendo la sumatoria se tiene:

$$\omega_{10}^2 \frac{\partial^2 \xi_{i1}}{\partial^2 \psi_1^2} + \omega_{20}^2 \frac{\partial^2 \xi_{i1}}{\partial^2 \psi_2^2} + 2\omega_{10} \omega_{20} \frac{\partial^2 \xi_{i1}}{\partial \psi_1 \partial \psi_2} + \omega_{i0}^2 \xi_{i1} = 2f_{i1} \omega_{i0} \operatorname{sen} \psi_i + 2a_i \omega_{i0} \omega_{i1} \cos \psi_i + Q_{i0} \tag{3.20}$$

La ecuación para ξ_{i2} es:

$$\begin{aligned} & \left(f_{11} \frac{\partial f_{i1}}{\partial a_1} + f_{21} \frac{\partial f_{i1}}{\partial a_2} \right) \cos \psi_i - 2 (f_{i1} \omega_{i1} + f_{i2} \omega_{i0}) \sin \psi_i - \left(f_{11} \frac{\partial \omega_{i1}}{\partial a_1} + f_{21} \frac{\partial \omega_{i1}}{\partial a_2} \right) a_i \sin \psi_i + \\ & - a_i \left(2\omega_{i0} \omega_{i2} + \omega_{i1}^2 \right) \cos \psi_i + \sum_{n=1}^2 \sum_{m=1}^2 \left[2f_{n1} \omega_{m0} \frac{\partial^2 \xi_{i1}}{\partial a_n \partial \psi_m} + (\omega_{n0} \omega_{m1} + \omega_{n1} \omega_{m0}) \frac{\partial^2 \xi_{i1}}{\partial \psi_n \partial \psi_m} \right] + \\ & \sum_{n=1}^2 \sum_{m=1}^2 \omega_{n0} \omega_{m0} \frac{\partial^2 \xi_{i2}}{\partial \psi_n \partial \psi_m} + \omega_{i0}^2 \xi_{i2} = Q_{i1} \end{aligned}$$

reordenando obtenemos:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^2 \sum_{m=1}^2 \omega_{n0} \omega_{m0} \frac{\partial^2 \xi_{i2}}{\partial \psi_n \partial \psi_m} + \omega_{i0}^2 \xi_{i2} = +a_i \left(2\omega_{i0} \omega_{i2} + \omega_{i1}^2 \right) \cos \psi_i \\ & - \sum_{n=1}^2 \sum_{m=1}^2 \left[2f_{n1} \omega_{m0} \frac{\partial^2 \xi_{i1}}{\partial a_n \partial \psi_m} + (\omega_{n0} \omega_{m1} + \omega_{n1} \omega_{m0}) \frac{\partial^2 \xi_{i1}}{\partial \psi_n \partial \psi_m} \right] - \left(f_{11} \frac{\partial f_{i1}}{\partial a_1} + f_{21} \frac{\partial f_{i1}}{\partial a_2} \right) \cos \psi_i + \\ & 2(f_{i1} \omega_{i1} + f_{i2} \omega_{i0}) \sin \psi_i + \left(f_{11} \frac{\partial \omega_{i1}}{\partial a_1} + f_{21} \frac{\partial \omega_{i1}}{\partial a_2} \right) a_i \sin \psi_i + Q_{i1} \end{aligned} \quad (3.21)$$

Con la ayuda de las ecuaciones (3.20) y (3.21) se encuentran las funciones ξ_{11} y ξ_{12} para la solución final ξ_1 y las funciones ξ_{21} y ξ_{22} para la solución final de ξ_2 .

3.1.1. Determinación de la función ξ_{11}

Para hacer uso de las ecuaciones (3.20) el método requiere que se realice la expansión en serie de Fourier [15] de la función ξ_{11} :

$$\begin{aligned} \xi_{11} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} [& A_{nm}^{(1)} \cos n\psi_1 \cos m\psi_2 + B_{nm}^{(1)} \sin n\psi_1 \sin m\psi_2 + \\ & C_{nm}^{(1)} \sin n\psi_1 \cos m\psi_2 + D_{nm}^{(1)} \sin m\psi_2 \cos n\psi_1] \end{aligned} \quad (3.22)$$

y la expansión en serie de Fourier de la función conocida Q_{10} :

$$\begin{aligned} Q_{10} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} [& H_{nm}^{(1)} \cos n\psi_1 \cos m\psi_2 + J_{nm}^{(1)} \sin n\psi_1 \sin m\psi_2 + \\ & K_{nm}^{(1)} \sin n\psi_1 \cos m\psi_2 + G_{nm}^{(1)} \sin m\psi_2 \cos n\psi_1] \end{aligned} \quad (3.23)$$

El propósito de esta expansión es encontrar los valores de $A_{nm}^{(1)}$, $B_{nm}^{(1)}$, $C_{nm}^{(1)}$ y $D_{nm}^{(1)}$ en función de las constantes conocidas $H_{nm}^{(1)}$, $J_{nm}^{(1)}$, $K_{nm}^{(1)}$ y $G_{nm}^{(1)}$

Para este fin reemplazamos las ecuaciones (3.22) y (3.23) en la ecuación (3.20), obteniéndose la siguiente ecuación

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} [(\Lambda_{nm} A_{nm}^{(1)} + \beta_{nm} B_{nm}^{(1)}) \cos n\psi_1 \cos m\psi_2 + \\
& (\Lambda_{nm} B_{nm}^{(1)} + \beta_{nm} A_{nm}^{(1)}) \sin n\psi_1 \sin m\psi_2 + (\Lambda_{nm} C_{nm}^{(1)} - \beta_{nm} D_{nm}^{(1)}) \sin n\psi_1 \cos m\psi_2 + \\
& (\Lambda_{nm} D_{nm}^{(1)} - \beta_{nm} C_{nm}^{(1)}) \sin m\psi_2 \cos n\psi_1] = 2f_{11}\omega_{10} \sin \psi_1 + 2a_1\omega_{10}\omega_{11} \cos \psi_1 + \\
& \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} [H_{nm}^{(1)} \cos n\psi_1 \cos m\psi_2 + J_{nm}^{(1)} \sin n\psi_1 \sin m\psi_2 + K_{nm}^{(1)} \sin n\psi_1 \cos m\psi_2 \\
& + G_{nm}^{(1)} \sin m\psi_2 \cos n\psi_1] \tag{3.24}
\end{aligned}$$

donde:

$$\Lambda_{nm}^{(1)} = \omega_{10}^2 (1 - n^2) - \omega_{20}^2 m^2 \tag{3.25}$$

$$\beta_{nm}^{(1)} = 2nm\omega_{10}\omega_{20} \tag{3.26}$$

Tengamos en cuenta que ξ_{11} no debe tener términos lineales en $\sin \psi_1$, $\cos \psi_1$, lo cual implica inmediatamente que:

$$A_{10}^{(1)} = B_{10}^{(1)} = C_{10}^{(1)} = D_{10}^{(1)} = 0 \tag{3.27}$$

Para $n = 0$ y $m = 0$ obtenemos:

$$\begin{aligned}
\omega_{10}^2 A_{00}^{(1)} &= H_{00}^{(1)} \\
A_{00}^{(1)} &= \frac{H_{00}^{(1)}}{\omega_{10}^2} \tag{3.28}
\end{aligned}$$

Para $n = 1$, $m = 0$ y $n = 0$, $m = 1$ obtenemos:

$$\begin{aligned}
& (\omega_{10}^2 A_{01}^{(1)} - \omega_{20}^2 A_{01}^{(1)}) \cos \psi_2 + (\omega_{10}^2 D_{01}^{(1)} - \omega_{20}^2 D_{01}^{(1)}) \sin \psi_2 = \\
& 2f_{11}\omega_{10} \sin \psi_1 + 2a_1\omega_{10}\omega_{11} \cos \psi_1 + H_{01}^{(1)} \cos \psi_2 + \\
& G_{01}^{(1)} \sin \psi_2 + H_{10}^{(1)} \cos \psi_1 + K_{10}^{(1)} \sin \psi_1
\end{aligned}$$

de estas ecuaciones obtenemos:

$$A_{01}^{(1)} = \frac{H_{01}^{(1)}}{\omega_{10}^2 - \omega_{20}^2} \quad (3.29)$$

$$D_{01}^{(1)} = \frac{G_{01}^{(1)}}{\omega_{10}^2 - \omega_{20}^2} \quad (3.30)$$

$$f_{11} = -\frac{K_{10}^{(1)}}{2\omega_{10}} \quad (3.31)$$

$$\omega_{11} = -\frac{H_{10}^{(1)}}{2a_1\omega_{10}} \quad (3.32)$$

Las demás ecuaciones se reducen a :

$$\Lambda_{nm}^{(1)}A_{nm}^{(1)} + \beta_{nm}^{(1)}B_{nm}^{(1)} = H_{nm}^{(1)}$$

$$\Lambda_{nm}^{(1)}B_{nm}^{(1)} + \beta_{nm}^{(1)}A_{nm}^{(1)} = J_{nm}^{(1)}$$

$$\Lambda_{nm}^{(1)}C_{nm}^{(1)} - \beta_{nm}^{(1)}D_{nm}^{(1)} = K_{nm}^{(1)}$$

$$\Lambda_{nm}^{(1)}D_{nm}^{(1)} - \beta_{nm}^{(1)}C_{nm}^{(1)} = G_{nm}^{(1)}$$

resolviendo este sistema de ecuaciones obtenemos:

$$\begin{aligned} A_{nm}^{(1)} &= \frac{\Lambda_{nm}^{(1)}H_{nm}^{(1)} - \beta_{nm}^{(1)}J_{nm}^{(1)}}{(\Lambda_{nm}^{(1)})^2 - (\beta_{nm}^{(1)})^2} \\ B_{nm}^{(1)} &= \frac{\Lambda_{nm}^{(1)}J_{nm}^{(1)} - \beta_{nm}^{(1)}H_{nm}^{(1)}}{(\Lambda_{nm}^{(1)})^2 - (\beta_{nm}^{(1)})^2} \\ C_{nm}^{(1)} &= \frac{\Lambda_{nm}^{(1)}K_{nm}^{(1)} + \beta_{nm}^{(1)}G_{nm}^{(1)}}{(\Lambda_{nm}^{(1)})^2 - (\beta_{nm}^{(1)})^2} \\ D_{nm}^{(1)} &= \frac{\Lambda_{nm}^{(1)}G_{nm}^{(1)} + \beta_{nm}^{(1)}K_{nm}^{(1)}}{(\Lambda_{nm}^{(1)})^2 - (\beta_{nm}^{(1)})^2} \end{aligned} \quad (3.33)$$

$$\forall n, m \geq 1$$

Tengase en cuenta que en estas ecuaciones no se incluyen los términos $(n, m)=(0, 1)$ y $(n, m)=(1, 0)$

3.1.2. Determinación de la función ξ_{21}

Usando nuevamente las ecuaciones (3.20) y (3.21) y las expansiones en serie de Fourier de ξ_{21} y Q_{20} :

$$\xi_{21} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} [A_{nm}^{(2)} \cos n\psi_1 \cos m\psi_2 + B_{nm}^{(2)} \sen n\psi_1 \sen m\psi_2 + C_{nm}^{(2)} \sen n\psi_1 \cos m\psi_2 + D_{nm}^{(2)} \sen m\psi_2 \cos n\psi_1] \quad (3.34)$$

$$Q_{20} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} [H_{nm}^{(2)} \cos n\psi_1 \cos m\psi_2 + J_{nm}^{(2)} \sen n\psi_1 \sen m\psi_2 + K_{nm}^{(2)} \sen n\psi_1 \cos m\psi_2 + G_{nm}^{(2)} \sen m\psi_2 \cos n\psi_1] \quad (3.35)$$

Siguiendo un procedimiento idéntico para la obtención de ξ_{11} llegamos finalmente a:

$$A_{01}^{(2)} = B_{01}^{(2)} = C_{01}^{(2)} = D_{01}^{(2)} = 0 \quad (3.36)$$

$$A_{00}^{(2)} = \frac{H_{00}^{(2)}}{\omega_{20}^2} \quad (3.37)$$

$$A_{10}^{(2)} = \frac{H_{10}^{(2)}}{\omega_{20}^2 - \omega_{10}^2} \quad (3.38)$$

$$C_{10}^{(2)} = \frac{K_{01}^{(2)}}{\omega_{20}^2 - \omega_{10}^2} \quad (3.39)$$

$$f_{21} = -\frac{G_{01}^{(2)}}{2\omega_{20}} \quad (3.40)$$

$$\omega_{21} = -\frac{H_{01}^{(2)}}{2a_2\omega_{20}} \quad (3.41)$$

Las demás ecuaciones para $n, m \geq 2$ se reducen a :

$$A_{nm}^{(2)} = \frac{\Lambda_{nm}^{(2)} H_{nm}^{(2)} - \beta_{nm}^{(2)} J_{nm}^{(2)}}{(\Lambda_{nm}^{(2)})^2 - (\beta_{nm}^{(2)})^2}$$

$$B_{nm}^{(2)} = \frac{\Lambda_{nm}^{(2)} J_{nm}^{(2)} - \beta_{nm}^{(2)} H_{nm}^{(2)}}{(\Lambda_{nm}^{(2)})^2 - (\beta_{nm}^{(2)})^2}$$

$$\begin{aligned}
C_{nm}^{(2)} &= \frac{\Lambda_{nm}^{(2)} K_{nm}^{(2)} + \beta_{nm}^{(2)} G_{nm}^{(2)}}{(\Lambda_{nm}^{(2)})^2 - (\beta_{nm}^{(2)})^2} \\
D_{nm}^{(2)} &= \frac{\Lambda_{nm}^{(2)} G_{nm}^{(2)} + \beta_{nm}^{(2)} K_{nm}^{(2)}}{(\Lambda_{nm}^{(2)})^2 - (\beta_{nm}^{(2)})^2}
\end{aligned} \tag{3.42}$$

donde:

$$\begin{aligned}
\Lambda_{nm}^{(2)} &= \omega_{20}^2 (1 - m^2) - \omega_{10}^2 n^2 \\
\beta_{nm}^{(2)} &= 2nm\omega_{10}\omega_{20}
\end{aligned} \tag{3.43}$$

Para todo $n, m \geq 1$

En estas ecuaciones al igual que las encontradas para ξ_{11} no se incluyen los términos $(n, m)=(0, 1)$ y $(n, m)=(1, 0)$.

Una vez resuelta las ecuaciones para ξ_{11} , ω_{11} , f_{11} , ξ_{21} , ω_{21} y f_{21} se reemplazan en la ecuación (3.21) y hallamos la solución para ξ_{12} y ξ_{22} .

Es importante observar que ξ_{11} , ω_{11} y f_{11} , ξ_{21} , ω_{21} y f_{21} están en función de los términos de la serie de Fourier no nulos que resultan al expandir la función conocida Q_{10} , y Q_{20} .

3.2. Aplicación del método de Krylov–Bogoliubov al sistema dinámico péndulo-resorte (SDPR)

3.2.1. Lagrangiano y ecuaciones de movimiento del sistema dinámico péndulo-resorte (SDPR)

El sistema está formado por un resorte de longitud natural l_0 y de constante elástica κ unido a una masa m , tal como se muestra en la figura:

r y θ son las coordenadas de posición de la masa m en un instante t .

Para este sistema las coordenadas de la posición de la masa m en equilibrio son $(r_e, \theta_e) =$

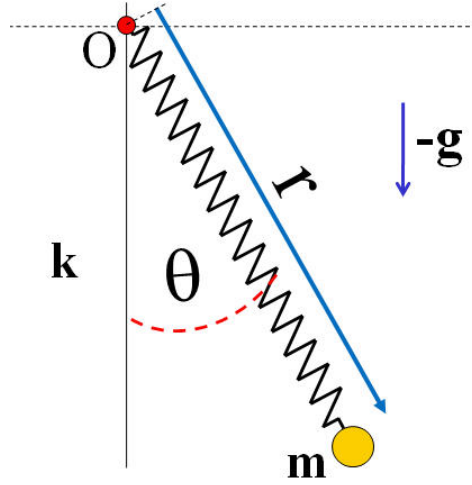


Figura 3.1: Péndulo resorte.

$$\left(\frac{mg}{\kappa} + l_0, 0\right)$$

Determinaremos la energía cinética y potencial del sistema:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) \quad (3.44)$$

$$U = \frac{1}{2}\kappa(r - l_0)^2 - mgr \cos \theta \quad (3.45)$$

Para obtener las ecuaciones de movimiento de m , alrededor de la posición de equilibrio, hacemos el siguiente cambio de variable:

$$\xi = r - \left(\frac{mg}{\kappa} + l_0\right) = r - L_0 \quad (3.46)$$

Como deseamos estudiar oscilaciones no lineales, es necesario encontrar la función lagrangiana adecuada.

Para la energía cinética tenemos

$$T = \frac{1}{2}m\dot{\xi}^2 + \frac{1}{2}m\left(\frac{mg}{\kappa} + l_0 + \xi\right)^2\dot{\theta}^2$$

utilizando el cambio de variable (3.46) y considerando que el término $\xi^2\dot{\theta}^2 \approx 0$, podemos expresar la energía cinética como:

$$T = \frac{1}{2}m\dot{\xi}^2 + \frac{1}{2}m\left[\left(\frac{mg}{\kappa} + l_0\right)^2 + 2\left(\frac{mg}{\kappa} + l_0\right)\xi\right]\dot{\theta}^2$$

y finalmente operando obtenemos

$$T = \frac{1}{2}m\dot{\xi}^2 + \frac{1}{2}m(L_0^2 + 2L_0\xi)\dot{\theta}^2 \quad (3.47)$$

Siguiendo un procedimiento similar para la energía potencial y considerando además que $\cos\theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$, obtenemos:

$$U = \frac{1}{2}\kappa\left(\frac{mg}{\kappa} + \xi\right)^2 - mg\left(\frac{mg}{\kappa} + l_0 + \xi\right)\left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right)$$

desarrollando y agrupando:

$$U = \frac{1}{2}k\left(\frac{m^2g^2}{\kappa^2} + 2\frac{mg}{\kappa}\xi + \xi^2\right) - mg\left[\left(\frac{mg}{\kappa} + l_0\right) - \left(\frac{mg}{\kappa} + l_0\right)\frac{\theta^2}{2} + \xi - \xi\frac{\theta^2}{2}\right]$$

$$U = -\frac{1}{2}\frac{m^2g^2}{\kappa} - mgl_0 + \frac{1}{2}\kappa\xi^2 + mg\left(\frac{mg}{\kappa} + l_0\right)\frac{\theta^2}{2} + mg\xi\frac{\theta^2}{2}$$

ordenando convenientemente

$$U = cte + \frac{1}{2}k\xi^2 + mgL_0\frac{\theta^2}{2} + mg\xi\frac{\theta^2}{2}$$

$$U = \frac{1}{2}k\xi^2 + mgL_0\frac{\theta^2}{2} + mg\xi\frac{\theta^2}{2} \quad (3.48)$$

Las expresiones finales para T y U son:

$$T = \frac{1}{2}m\dot{\xi}^2 + \frac{1}{2}m(L_0^2 + 2L_0\xi)\dot{\theta}^2$$

$$U = \frac{1}{2}\kappa\xi^2 + mgL_0\frac{\theta^2}{2} + mg\xi\frac{\theta^2}{2} \quad (3.49)$$

Ahora estamos en condiciones de determinar el lagrangiano del sistema péndulo-resorte

$$L = T - U = \frac{1}{2}m\dot{\xi}^2 + \frac{1}{2}m(L_0^2 + 2L_0\xi)\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}\kappa\xi^2 - mgL_0\frac{\theta^2}{2} - mg\xi\frac{\theta^2}{2} \quad (3.50)$$

Con el lagrangiano podemos hallar las ecuaciones de movimiento para (ξ, θ) alrededor de la posición de equilibrio.

La ecuación de movimiento para ξ se obtiene de:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{\xi}}\right) - \frac{dL}{d\xi} = 0 \quad (3.51)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dL}{d\dot{\xi}} \right) = m \ddot{\xi} \quad (3.52)$$

$$\frac{dL}{d\xi} = mL_0 \dot{\theta}^2 - \kappa \xi - \frac{1}{2} mg \theta^2 \quad (3.53)$$

reemplazando la ecuaciones (3.52) y (3.53) en (3.51) obtenemos la ecuación

$$\ddot{\xi} + \omega_{10}^2 \xi = \dot{\theta}^2 L_0 - \frac{g}{2} \theta^2$$

donde:

$$\omega_{10}^2 = \frac{\kappa}{m}$$

Ordenando y haciendo

$$\omega_{20}^2 = \frac{g}{L_0}$$

tenemos

$$\frac{\ddot{\xi}}{L_0} + \omega_{10}^2 \frac{\xi}{L_0} = \dot{\theta}^2 - \frac{\omega_{20}^2}{2} \theta^2$$

Por conveniencia haremos el siguiente cambio:

$$\xi_1 = \frac{\xi}{L_0} \quad (3.54)$$

por lo que finalmente la ecuación de movimiento para ξ_1 se reduce a :

$$\ddot{\xi}_1 + \omega_{10}^2 \xi_1 = \dot{\theta}^2 - \frac{\omega_{20}^2}{2} \theta^2 \quad (3.55)$$

Ahora, para la ecuación de movimiento de θ desarrollamos:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dL}{d\dot{\theta}} \right) - \frac{dL}{d\theta} = 0 \quad (3.56)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dL}{d\dot{\theta}} \right) = m\ddot{\theta} (L_0^2 + 2L_0 \xi) + 2mL_0 \dot{\xi} \dot{\theta} \quad (3.57)$$

$$\frac{dL}{d\theta} = -mg L_0 \theta - mg \xi \theta \quad (3.58)$$

reemplazando la ecuaciones (3.57) y (3.58) en (3.56) obtenemos la ecuación para θ

$$\ddot{\theta} \left(1 + 2 \frac{\xi}{L} \right) + 2\dot{\theta} \left(\frac{\dot{\xi}}{L} \right) + \frac{g}{L_0} \theta + \frac{g}{L_0} \frac{\xi}{L_0} \theta = 0$$

$$\ddot{\theta} (1 + 2\xi_1) + 2\dot{\theta}\dot{\xi}_1 + \omega_{20}^2 \theta + \omega_{20}^2 \xi_1 \theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{2\dot{\theta}\dot{\xi}_1}{1 + 2\xi_1} + \omega_{20}^2 \theta \frac{1 + \xi_1}{1 + 2\xi_1} = 0$$

como:

$$\xi_1 = \frac{\xi}{L_0} \ll 1$$

hacemos:

$$(1 + 2\xi_1)^{-1} \approx 1 - 2\xi_1$$

$$\ddot{\theta} + 2\dot{\theta}\dot{\xi}_1 (1 - 2\xi_1) + \omega_{20}^2 \theta (1 + \xi_1) (1 - 2\xi_1) = 0$$

$$\ddot{\theta} + 2\dot{\theta}\dot{\xi}_1 - 4\dot{\theta}\dot{\xi}_1 \xi_1 + \omega_{20}^2 \theta (1 - \xi_1 - 2\xi_1^2) = 0$$

$$\ddot{\theta} + \omega_{20}^2 \theta = 4\dot{\theta}\dot{\xi}_1 \xi_1 - 2\dot{\theta}\dot{\xi}_1 + \omega_{20}^2 \theta \xi_1 + 2\omega_{20}^2 \theta \xi_1^2$$

despreciando los términos $\dot{\theta}\dot{\xi}_1 \xi_1$ y $\theta \xi_1^2$ obtenemos

$$\ddot{\theta} + \omega_{20}^2 \theta = \omega_{20}^2 \theta \xi_1 - 2\dot{\theta}\dot{\xi}_1$$

Para darle la forma deseada hacemos $\xi_2 = \theta$ y la ecuación toma finalmente la forma:

$$\ddot{\xi}_2 + \omega_{20}^2 \xi_2 = \omega_{20}^2 \xi_2 \xi_1 - 2\dot{\xi}_2 \dot{\xi}_1$$

El sistema de ecuaciones acopladas a resolver es

$$\ddot{\xi}_1 + \omega_{10}^2 \xi_1 = \xi_2^2 - \frac{1}{2} \omega_{20}^2 \xi_2^2 \quad (3.59)$$

$$\ddot{\xi}_2 + \omega_{20}^2 \xi_2 = \omega_{20}^2 \xi_1 \xi_2 - 2\dot{\xi}_1 \dot{\xi}_2 \quad (3.60)$$

Recordemos que se realizaron los siguientes cambios:

$$\xi_1 = \frac{\xi}{L_0} \quad \xi_2 = \theta \quad (3.61)$$

$$\omega_{10}^2 = \frac{\kappa}{m}, \quad \omega_{20}^2 = \frac{g}{L_0} \quad (3.62)$$

$$L_0 = \frac{mg}{\kappa} + l_0 \quad (3.63)$$

3.2.2. Solución de las ecuaciones acopladas del SDPR por el método de Krylov Bogolivbov

Para hallar la soluciones analíticas del sistema de ecuaciones acopladas hasta el primer orden de aproximación por el método de Krylov Bogolivbov se tiene:

$$\xi_i = a_i \cos \psi_i + \varepsilon \xi_{i1} \quad (3.64)$$

$$\dot{\psi}_i = \omega_{i0} + \varepsilon \omega_{i1} \quad (3.65)$$

$$\dot{a}_i = \varepsilon f_{i1} (a_1 a_2) \quad (3.66)$$

usando las ecuaciones (3.59) y (3.60), identificamos:

$$Q_1 = \dot{\xi}_2^2 - \frac{1}{2} \omega_{20}^2 \xi_2^2 \quad (3.67)$$

$$Q_2 = \omega_{20}^2 \xi_1 \xi_2 - 2 \dot{\xi}_1 \dot{\xi}_2 \quad (3.68)$$

para la determinación de los términos Q_{10} , Q_{11} , Q_{20} y Q_{21} según establece la ecuación (3.19), es necesario calcular $\xi_i \xi_j$ y $\dot{\xi}_i \dot{\xi}_j$.

Para el cálculo de $\xi_i \xi_j$ hacemos uso de las ecuaciones (3.64), (3.65) y (3.66) y obtenemos:

$$\xi_i \xi_j = (a_i \cos \psi_i + \varepsilon \xi_{i1}) (a_j \cos \psi_j + \varepsilon \xi_{j1})$$

Ordenando en potencias de ε finalmente obtenemos

$$\xi_i \xi_j = a_i a_j \cos \psi_i \cos \psi_j + \varepsilon (a_i \cos \psi_i \xi_{j1} + a_j \cos \psi_j \xi_{i1}) + O(\varepsilon^2) \quad (3.69)$$

Para el Cálculo de $\dot{\xi}_i \dot{\xi}_j$ derivamos primero la ecuación (3.64)

$$\dot{\xi}_i = \dot{a}_i \cos \psi_i - a_i \dot{\psi}_i \sin \psi_i + \varepsilon \dot{\xi}_{i1}$$

utilizando (3.65) y (3.66):

$$\dot{\xi}_i = \varepsilon f_{i1} \cos \psi_i - a_i (\omega_{i0} + \varepsilon \omega_{i1}) \sin \psi_i + \varepsilon \dot{\xi}_{i1}$$

ordenando podemos expresar $\dot{\xi}_i$ de la siguiente manera:

$$\dot{\xi}_i = -a_i \omega_{i0} \sin \psi_i + \varepsilon (f_{i1} \cos \psi_i - a_i \omega_{i1} \sin \psi_i + \dot{\xi}_{i1})$$

$$\dot{\xi}_i = -a_i \omega_{i0} \operatorname{sen} \psi_i + \varepsilon \lambda_i$$

donde por conveniencia hemos hecho:

$$\lambda_i = f_{i1} \cos \psi_i - a_i \omega_{i1} \operatorname{sen} \psi_i + \dot{\xi}_{i1}$$

Finalmente

$$\dot{\xi}_i \dot{\xi}_j = (-a_i \omega_{i0} \operatorname{sen} \psi_i + \varepsilon \lambda_i) (-a_j \omega_{j0} \operatorname{sen} \psi_j + \varepsilon \lambda_j)$$

$$\dot{\xi}_i \dot{\xi}_j = a_i a_j \omega_{i0} \omega_{j0} \operatorname{sen} \psi_i \operatorname{sen} \psi_j + \varepsilon (-a_i \omega_{i0} \operatorname{sen} \psi_i \lambda_j - a_j \omega_{j0} \operatorname{sen} \psi_j \lambda_i) + O(\varepsilon^2) \quad (3.70)$$

Si reemplazamos (3.69) y (3.70) en (3.67) obtenemos para Q_1

$$Q_1 = a_2^2 \omega_{20}^2 \operatorname{sen}^2 \psi_2 - \frac{1}{2} a_2^2 \omega_{20}^2 \cos^2 \psi_2 + \varepsilon (\omega_{20}^2 a_2 \cos \psi_2 \xi_{21} - 2 \lambda_2 a_2 \omega_{20} \operatorname{sen} \psi_2) \quad (3.71)$$

donde identificamos:

$$Q_{10} = a_2^2 \omega_{20}^2 \operatorname{sen}^2 \psi_2 - \frac{1}{2} a_2^2 \omega_{20}^2 \cos^2 \psi_2$$

$$Q_{10} = a_2^2 \omega_{20}^2 \left(1 - \frac{3}{2} \cos^2 \psi_2\right)$$

$$Q_{10} = \frac{a_2^2 \omega_{20}^2}{4} - \frac{3 a_2^2 \omega_{20}^2}{4} \cos 2\psi_2 \quad (3.72)$$

$$Q_{11} = \omega_{20}^2 a_2 \cos \psi_2 \xi_{21} - 2 \lambda_2 a_2 \omega_{20} \operatorname{sen} \psi_2 \quad (3.73)$$

Determinación de ξ_1

Para hallar la solución analítica de ξ_1 hasta el primer orden solo utilizamos Q_{10} . La expansión en serie de Fourier de Q_{10} , que es la ecuación (3.23), da inmediatamente las siguientes expresiones para los términos no nulos:

$$H_{00}^{(1)} = \frac{1}{4} a_2^2 \omega_{20}^2$$

$$H_{02}^{(1)} = -\frac{3}{4} a_2^2 \omega_{20}^2$$

De la ecuación general para ξ_1 y de las ecuaciones: (3.27), (3.28), (3.29), (3.30), (3.31) y (3.32) obtenemos:

$$\begin{aligned}
A_{10}^{(1)} &= B_{10}^{(1)} = C_{10}^{(1)} = D_{10}^{(1)} = 0 \\
A_{00}^{(1)} &= \frac{H_{00}^{(1)}}{\omega_{10}^2} = \frac{1}{4} a_2^2 \frac{\omega_{20}^2}{\omega_{10}^2} \\
A_{01}^{(1)} &= \frac{H_{01}^{(1)}}{\omega_{10}^2 - \omega_{20}^2} = 0 \\
D_{01}^{(1)} &= \frac{G_{01}^{(1)}}{\omega_{10}^2 - \omega_{20}^2} = 0 \\
f_{11} &= -\frac{K_{10}^{(1)}}{2\omega_{10}} = 0 \\
\omega_{11} &= -\frac{H_{10}^{(1)}}{2a_1\omega_{10}} = 0
\end{aligned}$$

De la ecuación general (3.33) identificamos el término no nulo $A_{02}^{(1)}$

$$A_{02}^{(1)} = \frac{H_{02}^{(1)}}{\Lambda_{02}} = -\frac{3a_2^2\omega_{20}^2}{4(\omega_{10}^2 - 4\omega_{20}^2)} \quad (3.74)$$

De aquí finalmente obtenemos para ξ_{11}

$$\xi_{11} = \frac{1}{4} a_2^2 \frac{\omega_{20}^2}{\omega_{10}^2} - \frac{3a_2^2\omega_{20}^2}{4(\omega_{10}^2 - 4\omega_{20}^2)} \cos 2\psi_2 \quad (3.75)$$

Como

$$\dot{a}_1 = \varepsilon f_{11} = 0 \quad y \quad \dot{\psi}_1 = \omega_{10} + \varepsilon\omega_{11} = \omega_{10}$$

tenemos:

$$a_1 = cte = a_{10} \quad y \quad \psi_1 = \omega_{10}t + \phi_{10}$$

La solución analítica de primer orden para ξ_1 es:

$$\xi_1 = a_{10} \cos(\omega_{10}t + \phi_{10}) + \frac{1}{4} a_2^2 \frac{\omega_{20}^2}{\omega_{10}^2} - \frac{3a_2^2\omega_{20}^2}{4(\omega_{10}^2 - 4\omega_{20}^2)} \cos 2\psi_2 \quad (3.76)$$

Determinación de ξ_2

Para hallar Q_2 reemplazamos las ecuaciones (3.69) y (3.70) en (3.68)

$$\begin{aligned} Q_2 &= \omega_{20}^2 a_1 a_2 \cos \psi_1 \cos \psi_2 - 2a_1 a_2 \omega_{10} \omega_{20} \sin \psi_1 \sin \psi_2 + \\ &\quad \varepsilon \left[\omega_{20}^2 a_1 \cos \psi_1 \xi_{21} + \omega_{20}^2 a_2 \cos \psi_2 \xi_{11} + 2a_1 \omega_{10} \sin \psi_1 \lambda_2 + 2a_2 \omega_{20} \sin \psi_2 \lambda_1 \right] \\ &\quad + O(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (3.77)$$

donde podemos identificar los términos:

$$Q_{20} = \omega_{20}^2 a_1 a_2 \cos \psi_1 \cos \psi_2 - 2a_1 a_2 \omega_{10} \omega_{20} \sin \psi_1 \sin \psi_2 \quad (3.78)$$

y

$$Q_{21} = \omega_{20}^2 a_1 \cos \psi_1 \xi_{21} + \omega_{20}^2 a_2 \cos \psi_2 \xi_{11} + 2a_1 \omega_{10} \sin \psi_1 \lambda_2 + 2a_2 \omega_{20} \sin \psi_2 \lambda_1 \quad (3.79)$$

Para determinar la solución analítica de primer orden solo utilizamos Q_{20} .

La expansión en serie de Fourier de Q_{20} , que es la ecuación (3.35), da inmediatamente para los términos no nulos

$$H_{11}^{(2)} = \omega_{20}^2 a_1 a_2$$

$$J_{11}^2 = -2a_1 a_2 \omega_{10} \omega_{20}$$

siendo todos los términos restantes iguales a cero.

Ahora utilizando las ecuaciones generales (3.36), (3.37), (3.38), (3.39), (3.40) y (3.41) obtenemos los términos de la expansión de ξ_{21} en serie de Fourier

$$A_{01}^{(2)} = B_{01}^{(2)} = C_{01}^{(2)} = D_{01}^{(2)} = 0$$

$$A_{00}^{(2)} = \frac{H_{00}^{(2)}}{\omega_{20}^2} = 0 \quad (3.80)$$

$$A_{10}^{(2)} = \frac{H_{10}^{(2)}}{\omega_{20}^2 - \omega_{10}^2} = 0 \quad (3.81)$$

$$C_{10}^{(2)} = \frac{K_{01}^{(2)}}{\omega_{20}^2 - \omega_{10}^2} = 0 \quad (3.82)$$

$$f_{21} = -\frac{G_{01}^{(2)}}{2\omega_{20}} = 0 \quad (3.83)$$

$$\omega_{21} = -\frac{H_{01}^{(2)}}{2a_2\omega_{20}} = 0 \quad (3.84)$$

De las ecuaciones (3.42) y (3.43) los únicos no nulos son: $A_{11}^{(2)}$ y $B_{11}^{(2)}$

$$\Lambda_{11}^{(2)} = -\omega_{10}^2 \quad \beta_{11}^{(2)} = 2\omega_{10}\omega_{20}$$

$$A_{11}^{(2)} = \frac{-\omega_{10}^2 (\omega_{20}^2 a_1 a_2) - 2\omega_{10}\omega_{20} (-2a_1 a_2 \omega_{10}\omega_{20})}{\omega_{10}^4 - 4\omega_{10}^2\omega_{20}^2}$$

$$A_{11}^{(2)} = \frac{3\omega_{20}^2 a_1 a_2}{\omega_{10}^2 - 4\omega_{20}^2}$$

$$B_{11}^{(2)} = \frac{(-\omega_{10}^2) (-2a_1 a_2 \omega_{10}\omega_{20}) - (2\omega_{10}\omega_{20}) (\omega_{20}^2 a_1 a_2)}{\omega_{10}^4 - 4\omega_{10}^2\omega_{20}^2}$$

$$B_{11}^{(2)} = \frac{2 a_1 a_2 \omega_{20} (\omega_{10}^2 - \omega_{20}^2)}{\omega_{10} (\omega_{10}^2 - 4 \omega_{20}^2)}$$

$$C_{11}^{(2)} = D_{11}^{(2)} = 0$$

Finalmente para ξ_{21} obtenemos

$$\xi_{21} = \frac{3 a_1 a_2 \omega_{20}^2}{\omega_{10}^2 - 4 \omega_{20}^2} \cos \psi_1 \cos \psi_2 + \frac{2 a_1 a_2 \omega_{20} (\omega_{10}^2 - \omega_{20}^2)}{\omega_{10} (\omega_{10}^2 - 4 \omega_{20}^2)} \sen \psi_1 \sen \psi_2$$

Como

$$\dot{a}_2 = \varepsilon f_{21} = 0 \quad \dot{\psi}_2 = \omega_{20} + \varepsilon \omega_{20} = \omega_{20}$$

tenemos:

$$a_2 = cte = a_{20} \quad , \quad \psi_2 = \omega_{20}t + \phi_{20}$$

y la solución analítica de primer orden para ξ_2 es:

$$\begin{aligned} \xi_2 = & a_{20} \cos (\omega_{20}t + \phi_{20}) + \frac{3 a_1 a_2 \omega_{20}^2}{\omega_{10}^2 - 4 \omega_{20}^2} \cos (\omega_{10}t + \phi_{10}) \cos (\omega_{20}t + \phi_{20}) + \\ & \frac{2 a_1 a_2 \omega_{20} (\omega_{10}^2 - \omega_{20}^2)}{\omega_{10} (\omega_{10}^2 - 4 \omega_{20}^2)} \sen (\omega_{10}t + \phi_{10}) \sen (\omega_{20}t + \phi_{20}) \end{aligned} \quad (3.85)$$

En resumen las soluciones analíticas hasta el primer orden de aproximación para el sistema dinámico péndulo-resorte son:

$$\xi_1 = a_{10} \cos(\omega_{10} t + \phi_{10}) + \frac{1}{4} a_{20}^2 \frac{\omega_{20}^2}{\omega_{10}^2} - \frac{3 a_{20}^2 \omega_{20}^2}{4(\omega_{10}^2 - 4 \omega_{20}^2)} \cos 2(\omega_{20} t + \phi_{20}) \quad (3.86)$$

$$\begin{aligned} \xi_2 = & a_{20} \cos(\omega_{20} t + \phi_{20}) + \frac{3 a_{10} a_{20} \omega_{20}^2}{\omega_{10}^2 - 4 \omega_{20}^2} \cos(\omega_{10} t + \phi_{10}) \cos(\omega_{20} t + \phi_{20}) \\ & + \frac{2 a_{10} a_{20} \omega_{20} (\omega_{10}^2 - \omega_{20}^2)}{\omega_{10} (\omega_{10}^2 - 4 \omega_{20}^2)} \sin(\omega_{10} t + \phi_{10}) \sin(\omega_{20} t + \phi_{20}) \end{aligned} \quad (3.87)$$

Recordemos que

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{\xi}{L_0} \quad , \quad \theta = \xi_2 \\ L_0 &= \frac{mg}{\kappa} + l_0 \quad , \quad \omega_{10}^2 = \frac{\kappa}{m} \quad , \quad \omega_{20}^2 = \frac{g}{L_0} \end{aligned}$$

donde ξ y θ se miden alrededor de la posición de equilibrio

3.2.3. Comparación de los resultados hallados utilizando el método de Krylov Bogolivbov con el método de Runge Kutta

En esta parte utilizamos el método de Runge Kutta de 4to orden [16],[17] con los siguientes parámetros: intervalo de tiempo en segundos $t_i = 0$ hasta $t_f = 40$, número de datos 2000, paso $h = 0,02$; para resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\ddot{\xi}_1 + \omega_{10}^2 \xi_1 = \xi_2^2 - \frac{1}{2} \omega_{20}^2 \xi_2^2 \quad (3.88)$$

$$\ddot{\xi}_2 + \omega_{20}^2 \xi_2 = \omega_{20}^2 \xi_1 \xi_2 - 2 \dot{\xi}_1 \dot{\xi}_2 \quad (3.89)$$

Recordemos que se realizaron los siguientes cambios:

$$\xi_1 = \frac{\xi}{L_0} \quad \xi_2 = \theta \quad (3.90)$$

$$\omega_{10}^2 = \frac{\kappa}{m} \quad , \quad \omega_{20}^2 = \frac{g}{L_0} \quad (3.91)$$

$$L_0 = \frac{mg}{\kappa} + l_0 \quad (3.92)$$

Una vez obtenidas las soluciones analíticas del sistema péndulo-resorte es necesario compararlas, para este fin graficaremos las soluciones obtenidas por ambos métodos.

Figura 1 para $\omega_1/\omega_2 = 1,1$ y $Q_2 = -13,99$

Figura 1a: $r(t)$ versus t y $\theta(t)$ versus t , usando el método KB.

Figura 1b: $r(t)$ versus t y $\theta(t)$ versus t , usando el método RK.

Figura 1c: $r(t)$ versus t y $\theta(t)$ versus t , comparación de ambos métodos KB y RK.

Figura 2 para $\omega_1/\omega_2 = 1,433$ y $Q_2 = -28,77$.

Figura 2a: $r(t)$ versus t y $\theta(t)$ versus t , usando el método KB.

Figura 2b: $r(t)$ versus t y $\theta(t)$ versus t , usando el método RK.

Figura 2c: $r(t)$ versus t y $\theta(t)$ versus t , comparación de ambos métodos KB y RK.

Figura 3 para $\omega_1/\omega_2 = 1,485$ y $Q_2 = -28,26$

Figura 3a: $r(t)$ versus t y $\theta(t)$ versus t , usando el método KB.

Figura 3b: $r(t)$ versus t y $\theta(t)$ versus t , usando el método RK.

Figura 3c: $r(t)$ versus t y $\theta(t)$ versus t , comparación de ambos métodos KB y RK.

Figura 4 para $\omega_1/\omega_2 = 1,551$ y $Q_2 = -26,8$

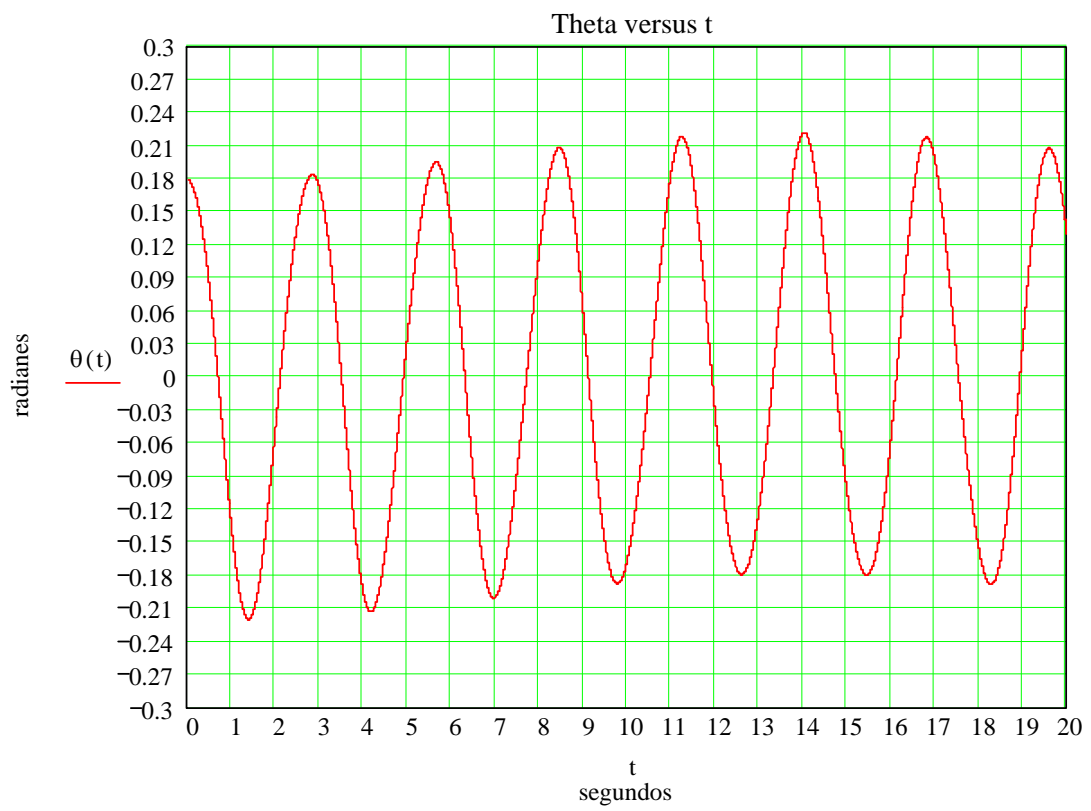
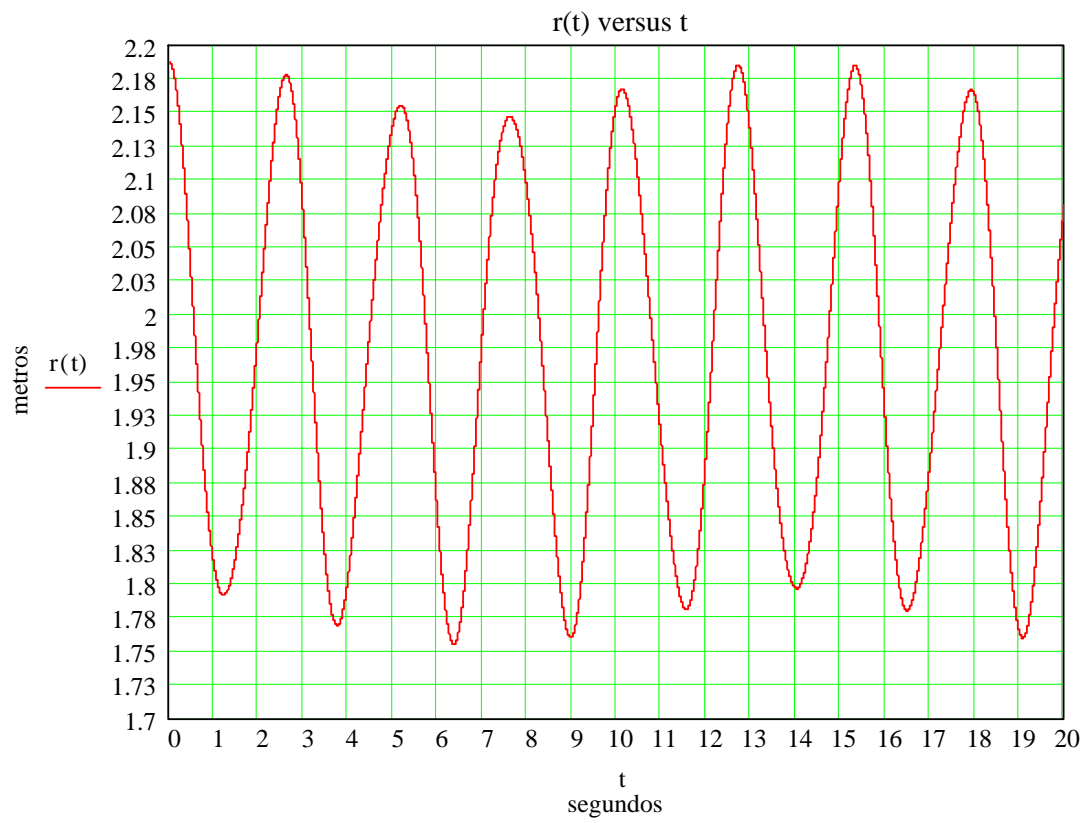
Figura 4a: $r(t)$ versus t y $\theta(t)$ versus t , usando el método KB.

Figura 4b: $r(t)$ versus t y $\theta(t)$ versus t , usando el método RK.

Figura 4c: $r(t)$ versus t y $\theta(t)$ versus t , comparación de ambos métodos KB y RK.

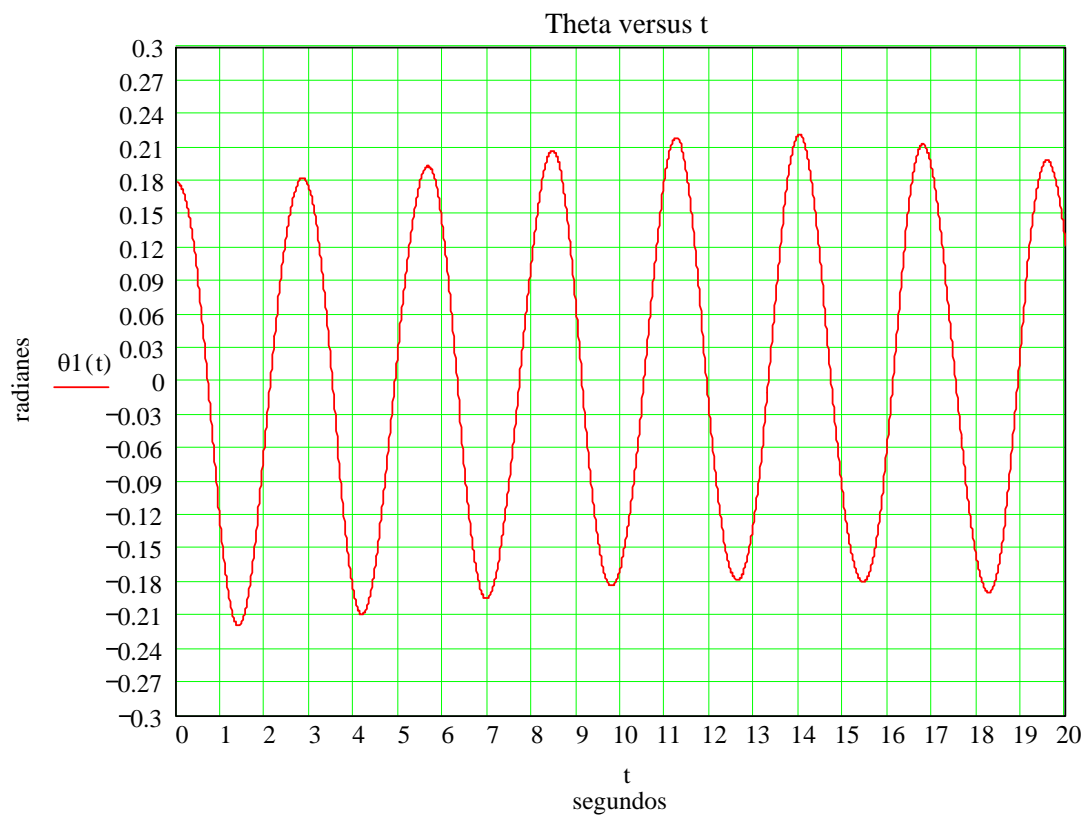
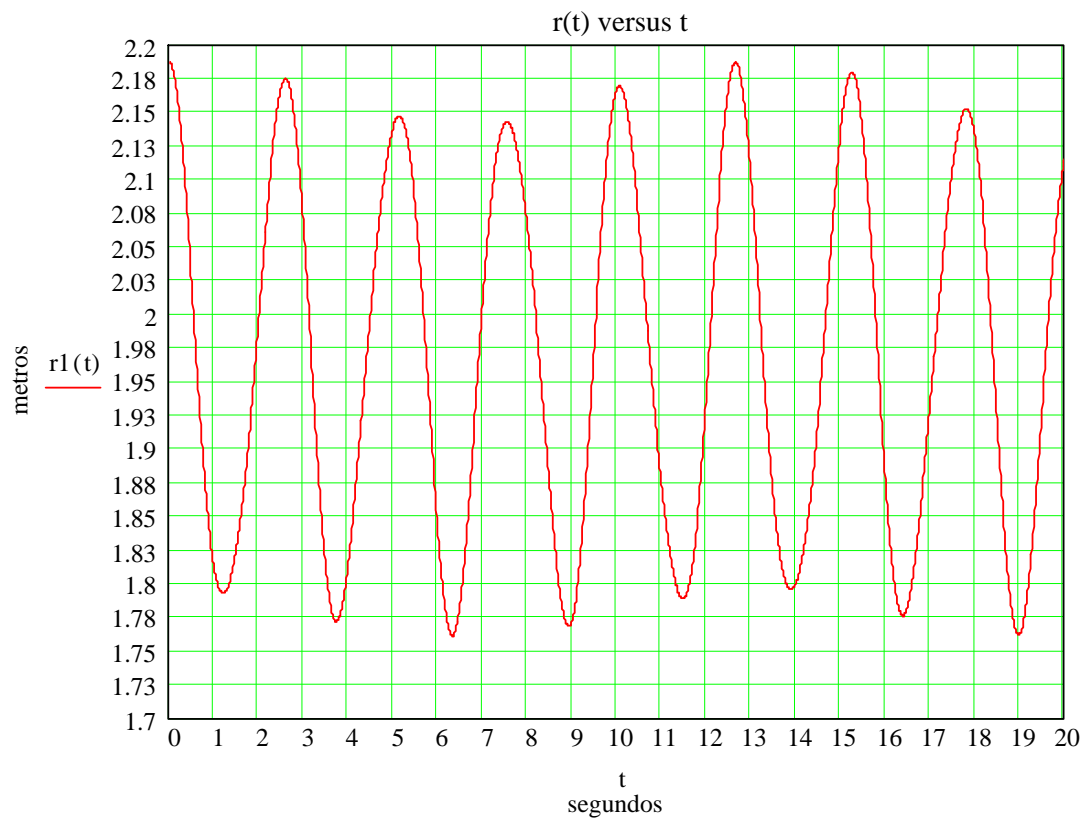
Grafica 1a: $\omega_1/\omega_2=1,1$

Método KB



Grafica 1b: $\omega_1/\omega_2=1,1$

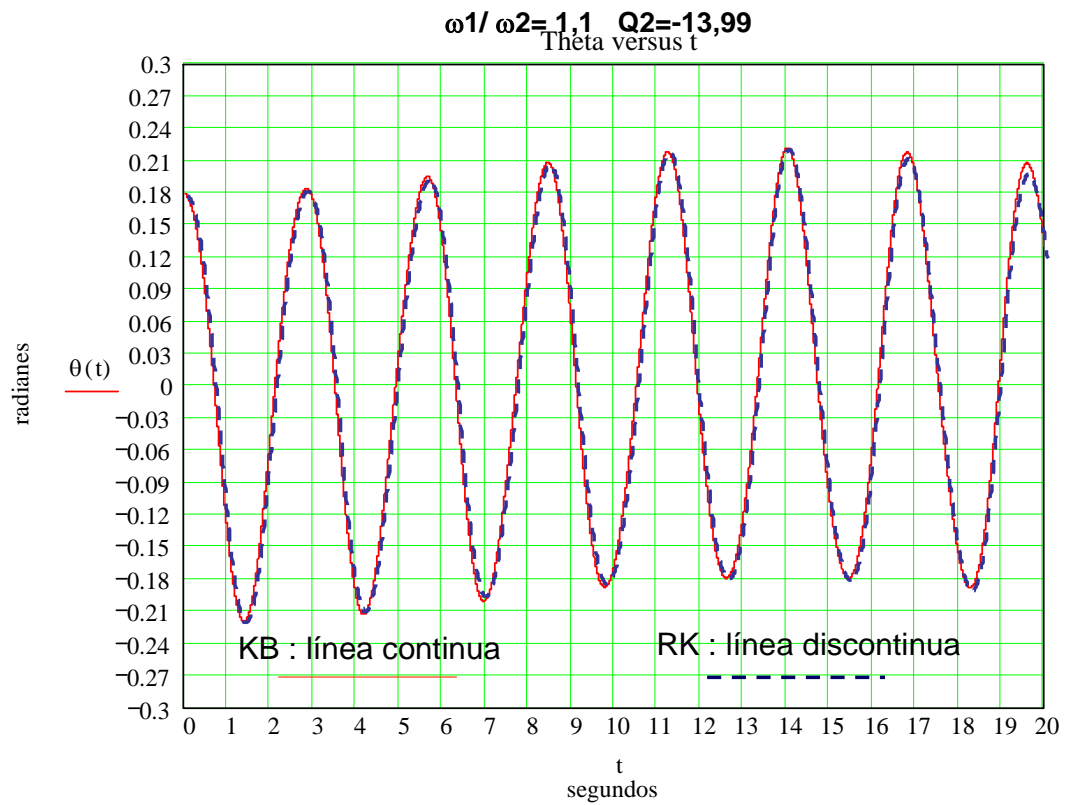
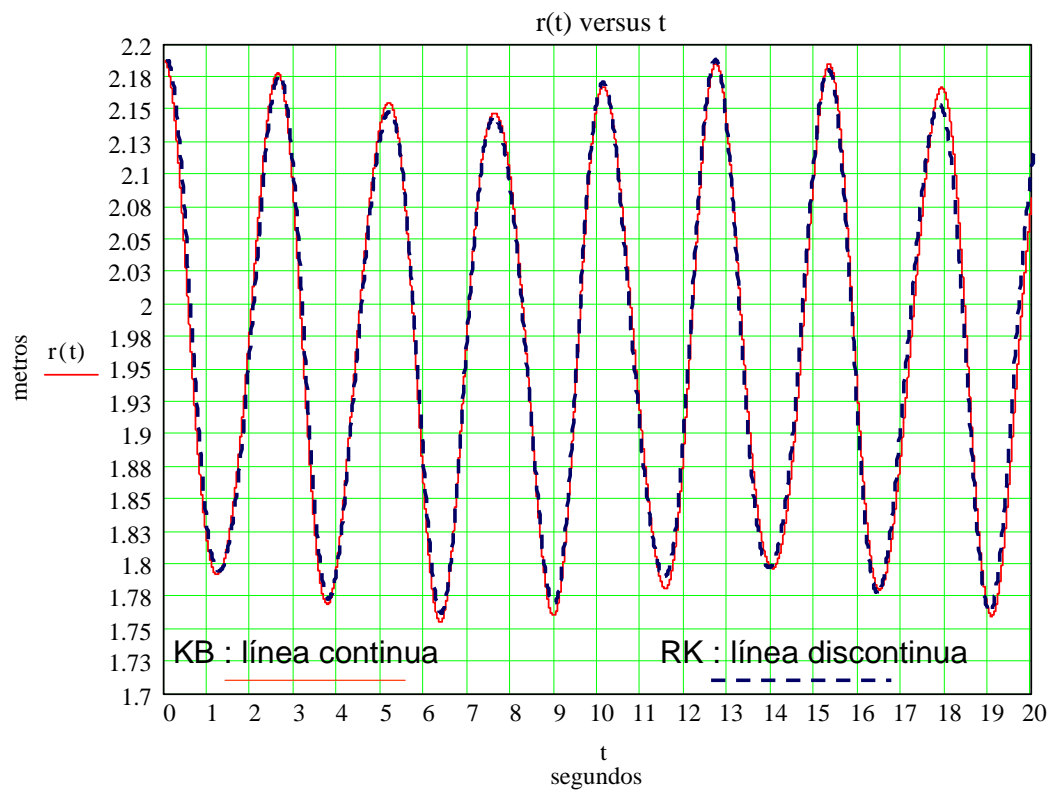
Método RK



Grafica 1c: $\omega_1/\omega_2= 1,1$

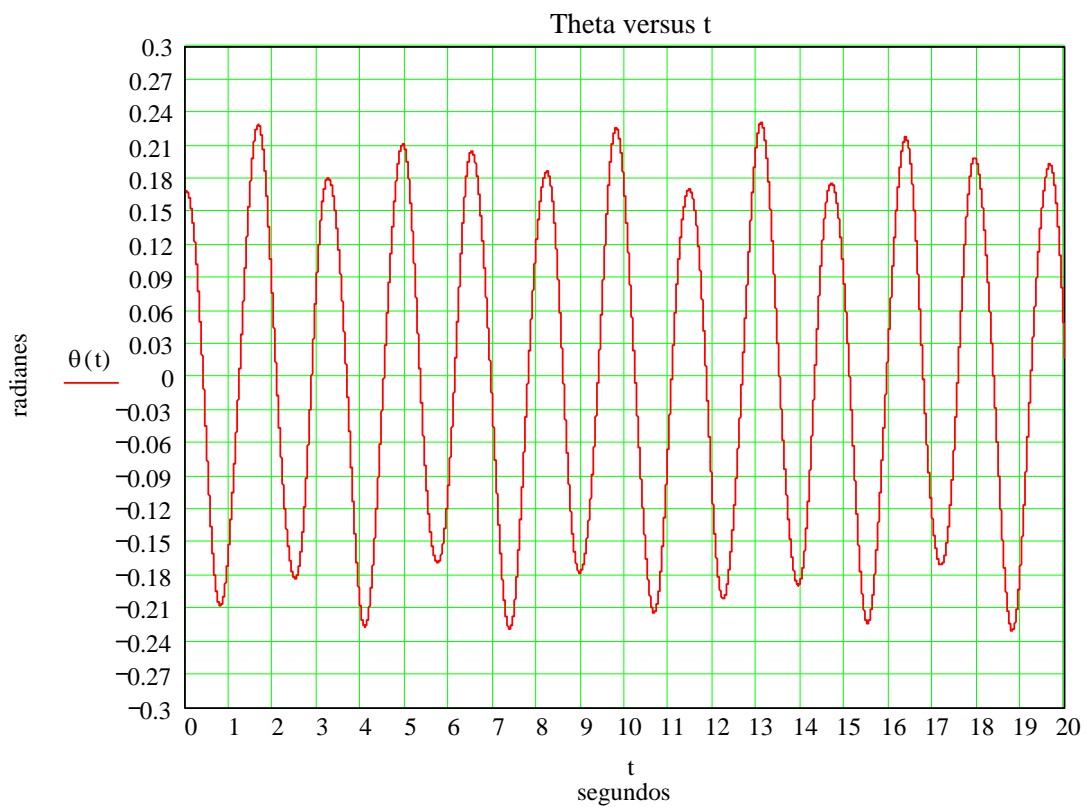
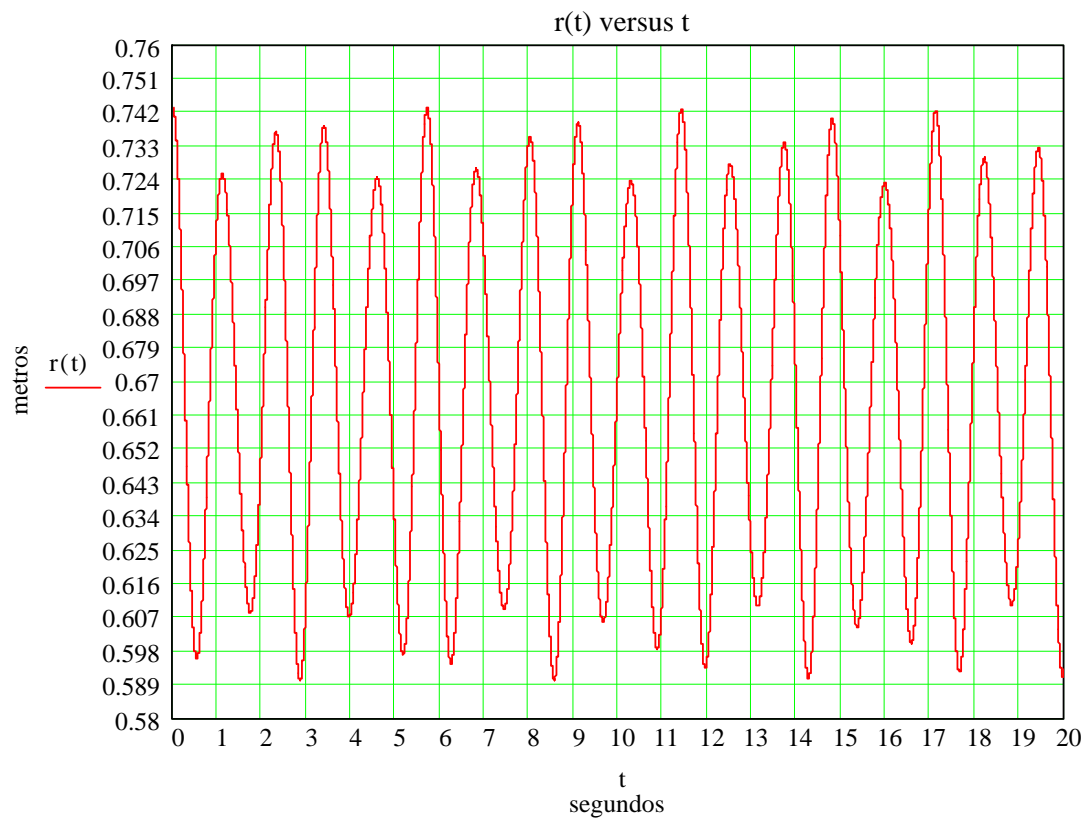
Método KB y RK

$\omega_1/\omega_2= 1,1$ $Q_2=-13,99$



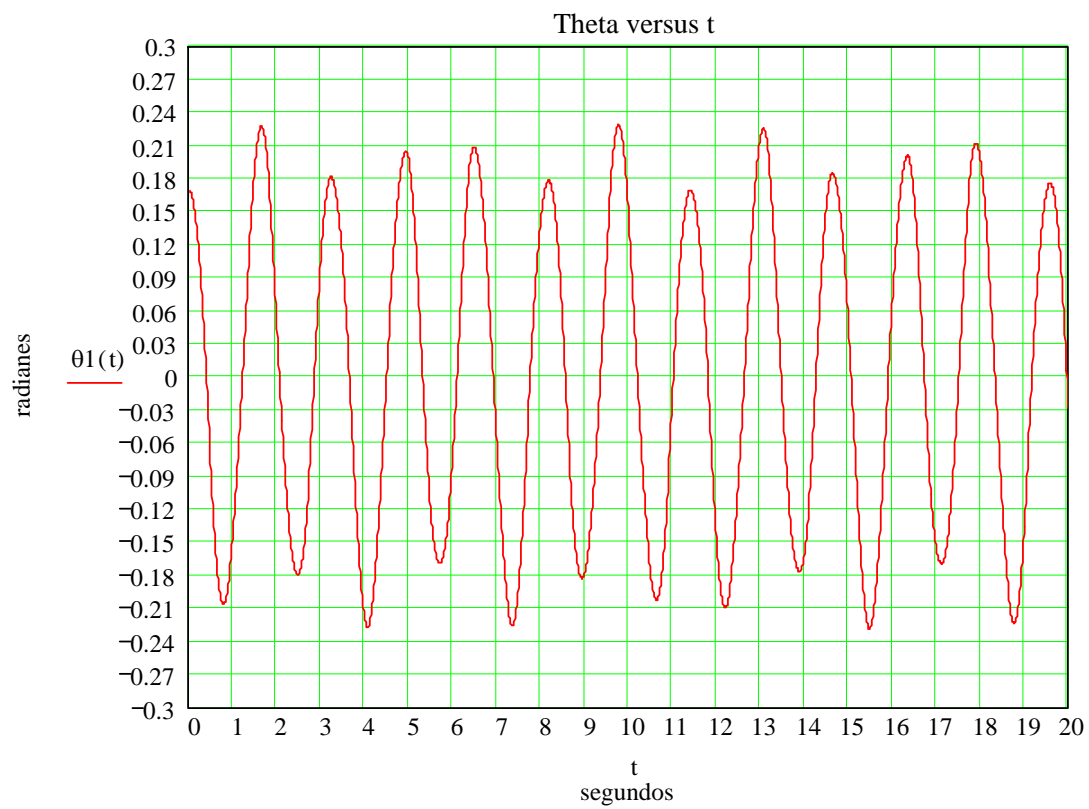
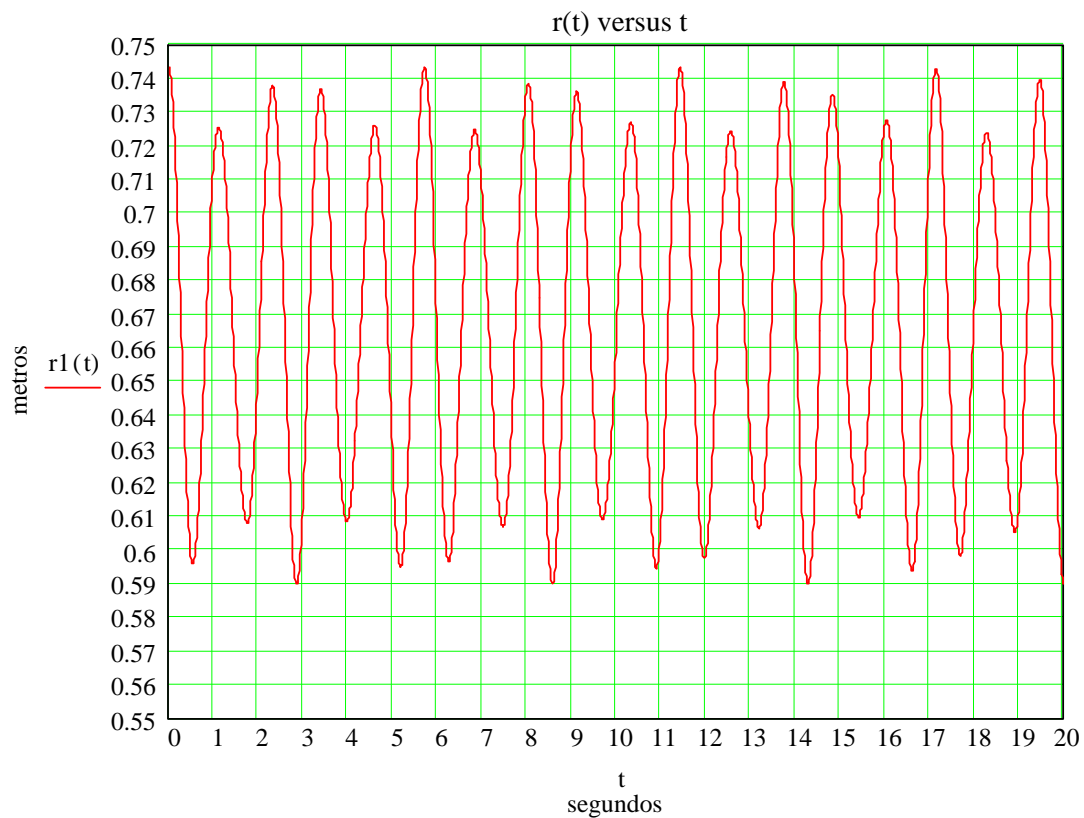
Grafica 2a: $\omega_1/\omega_2=1,433$

Método KB



Grafica 2b: $\omega_1/\omega_2=1,433$

Método RK

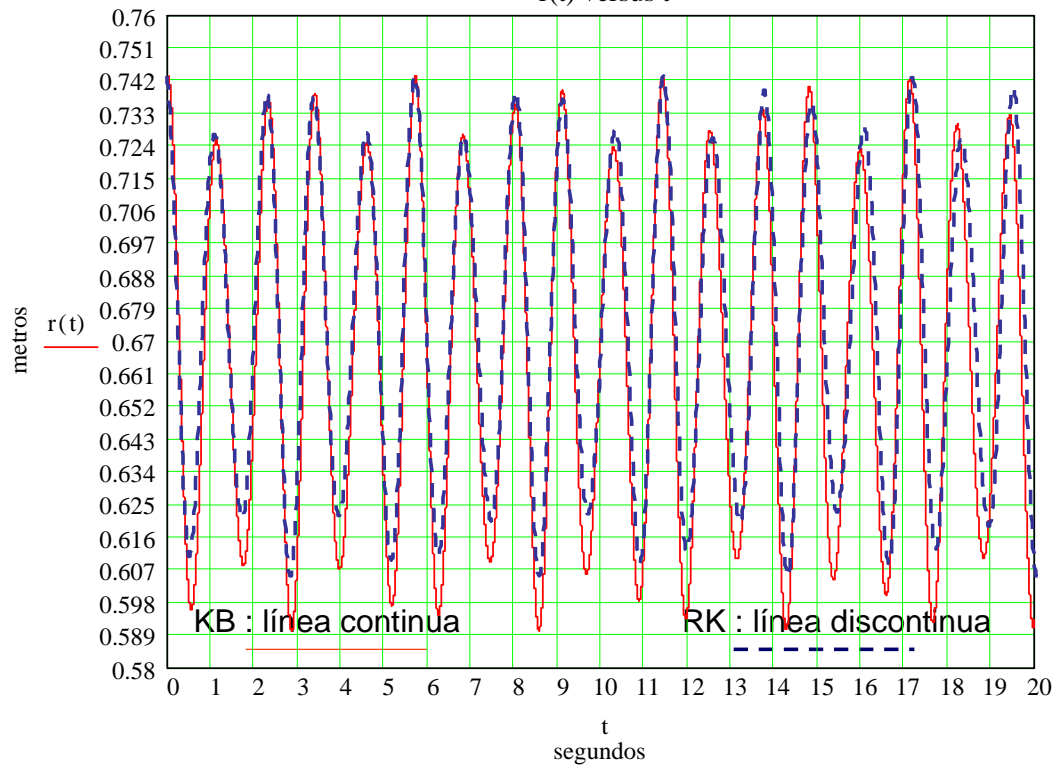


Grafica 2c: $\omega_1/\omega_2=1,433$

Método KB y RK

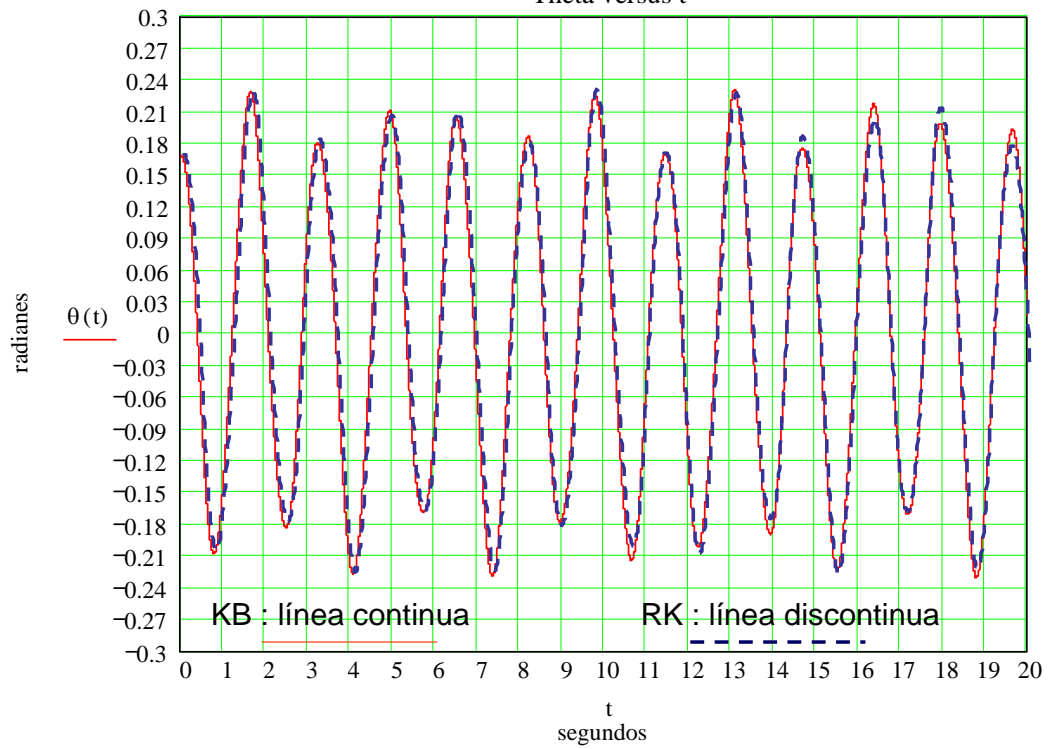
$\omega_1/\omega_2=1,433$ $Q_2=-28,77$

$r(t)$ versus t



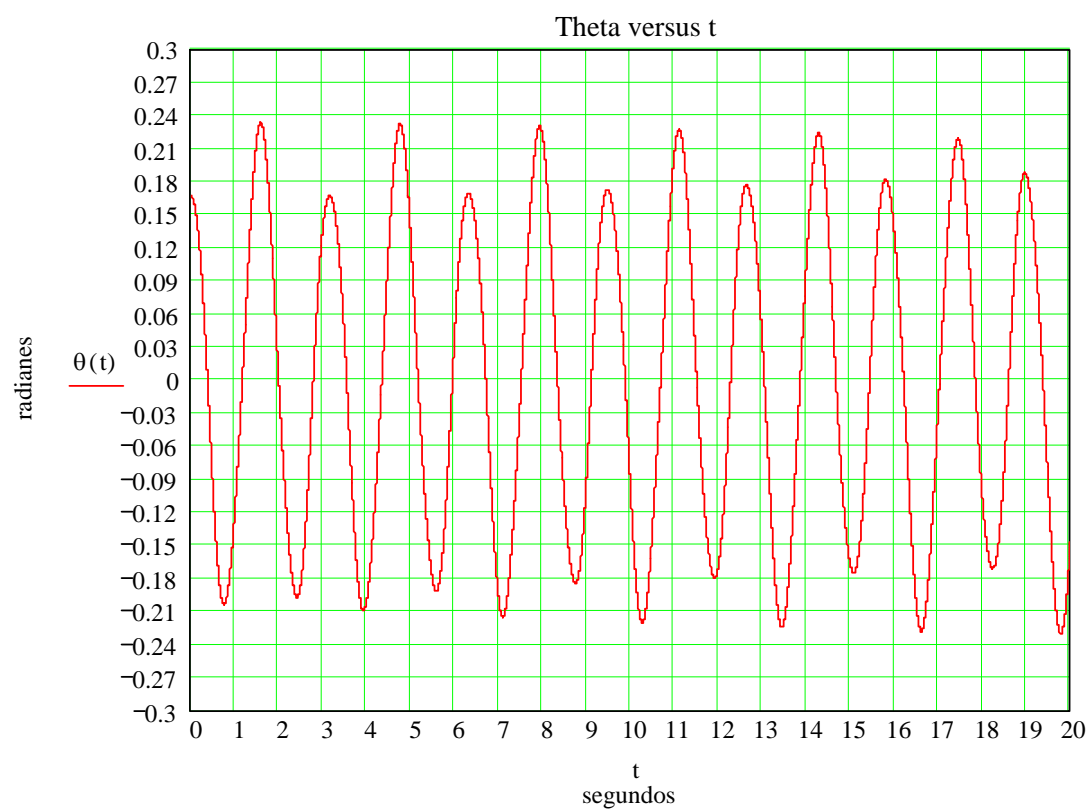
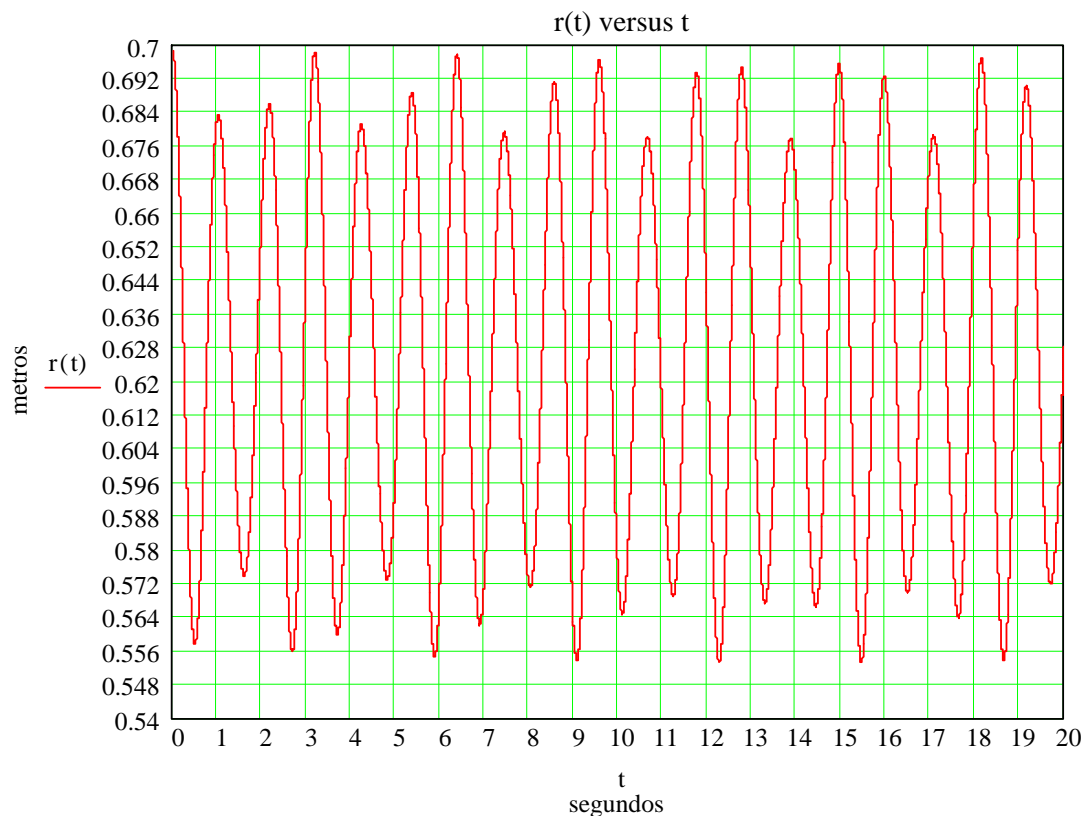
$\omega_1/\omega_2=1,433$ $Q_2=-28,77$

Theta versus t



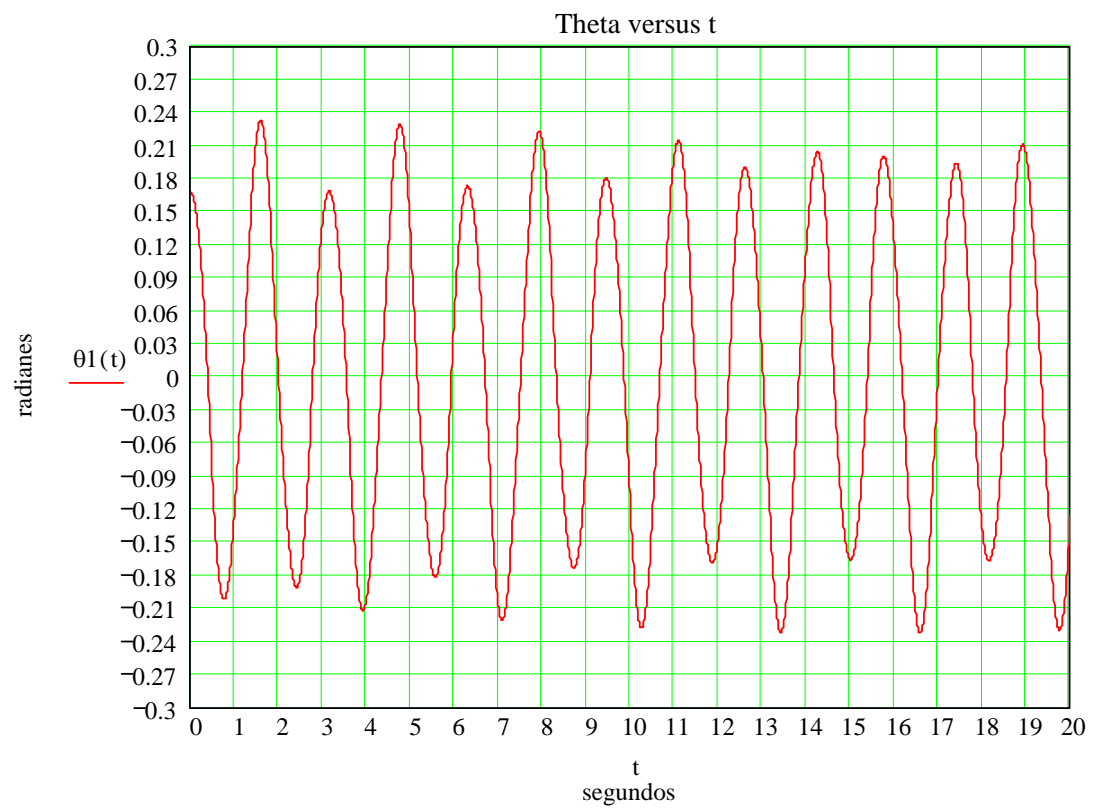
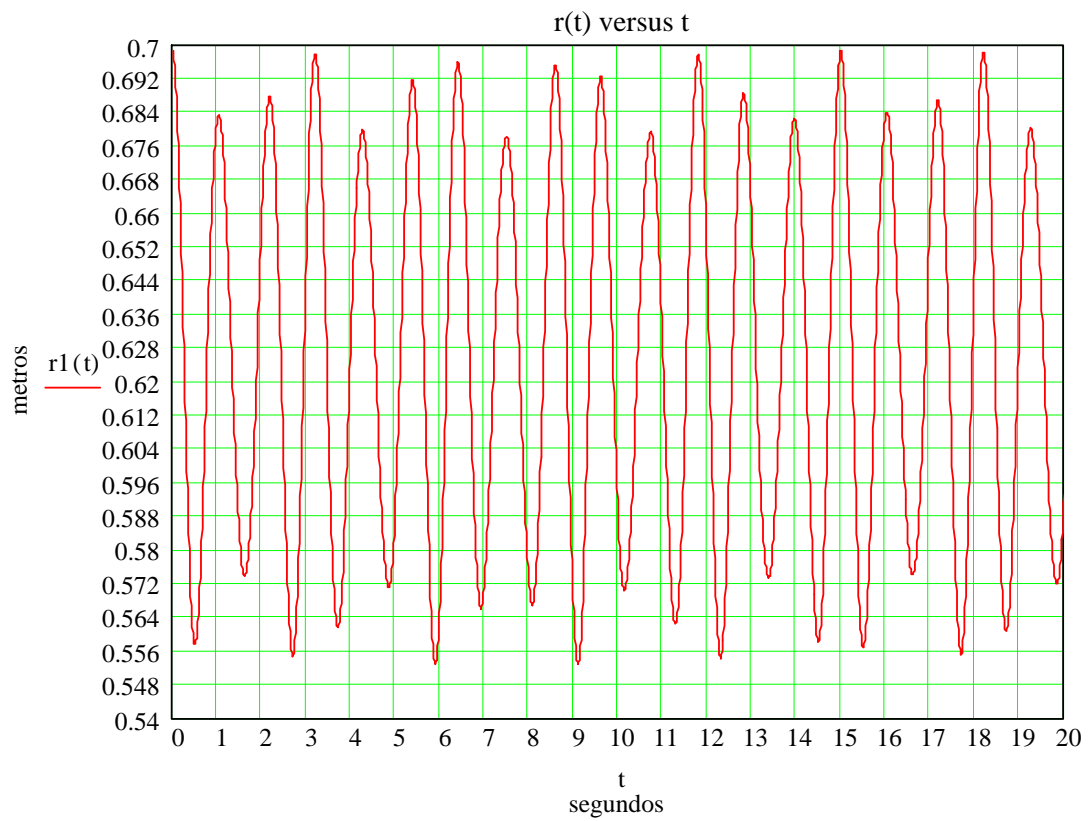
Grafica 3a: $\omega_1/\omega_2=1,485$

Método KB



Grafica 3b: $\omega_1/\omega_2=1,485$

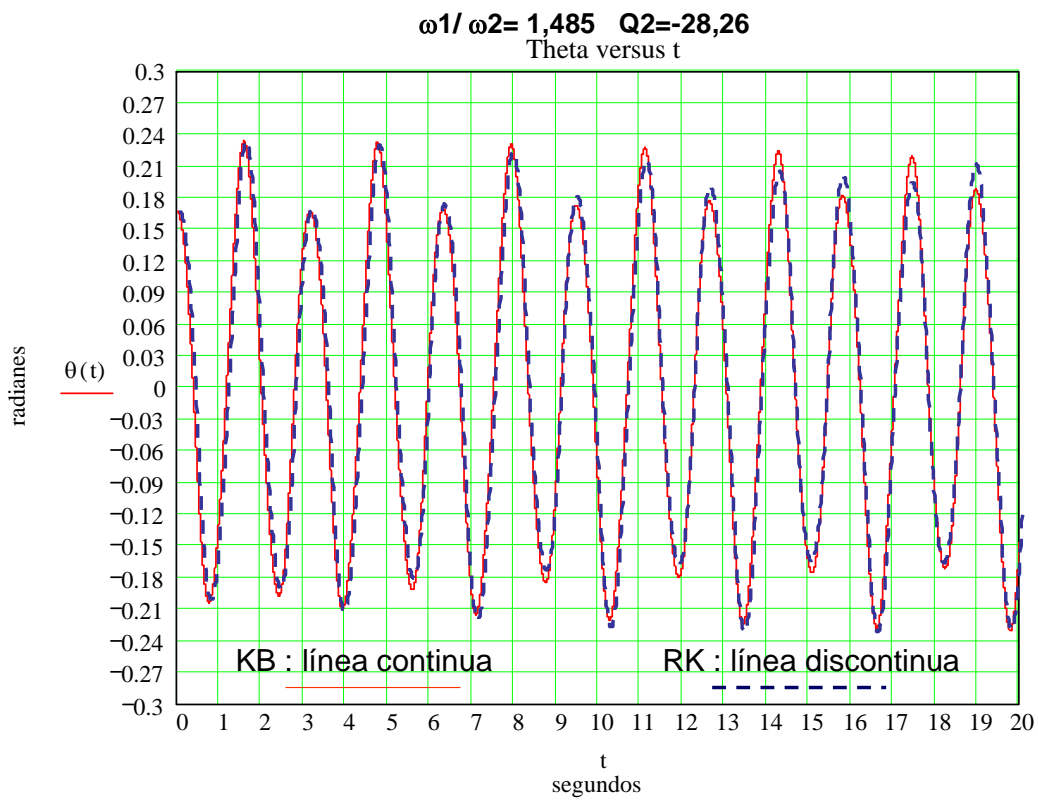
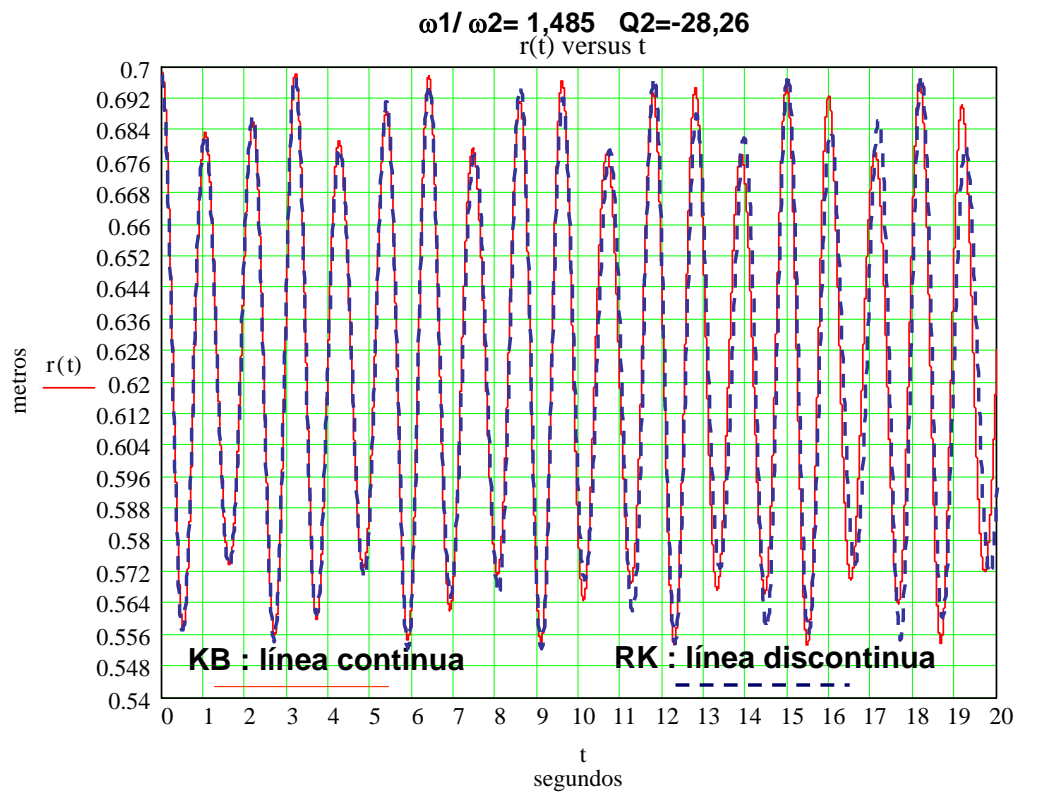
Método RK



Grafica 3c:

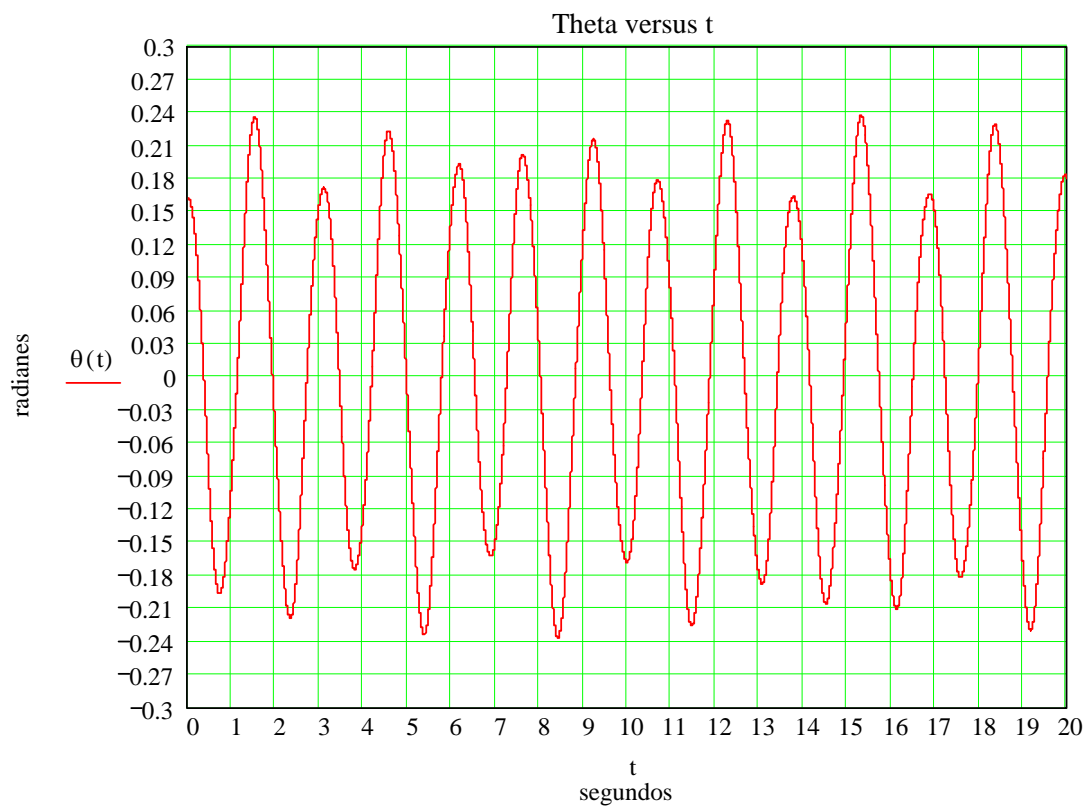
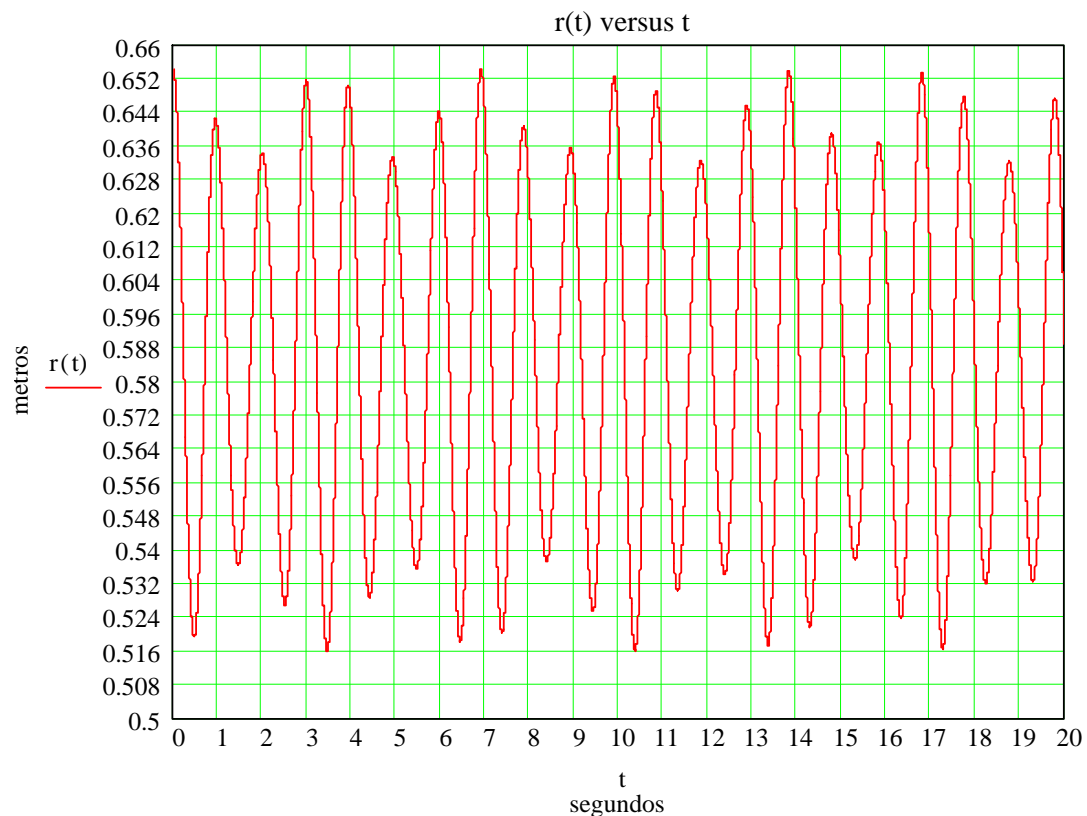
$$\omega_1 / \omega_2 = 1,485$$

Método KB y RK



Grafica 4a: $\omega_1/\omega_2=1,551$

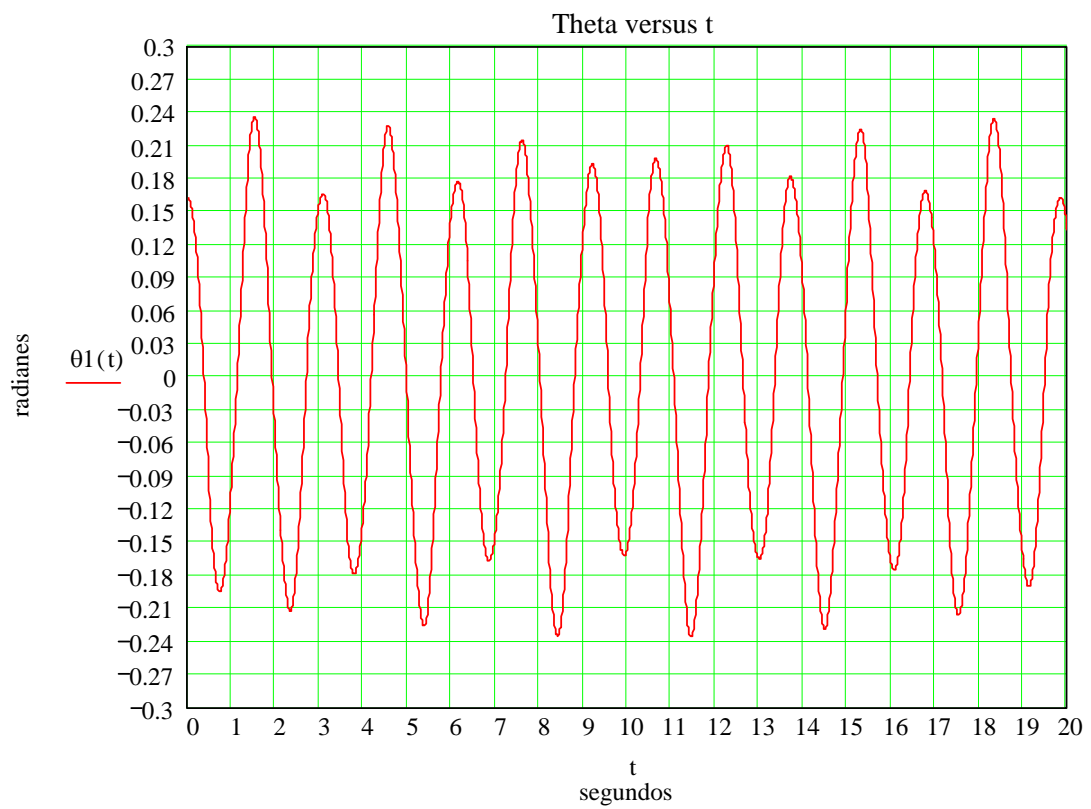
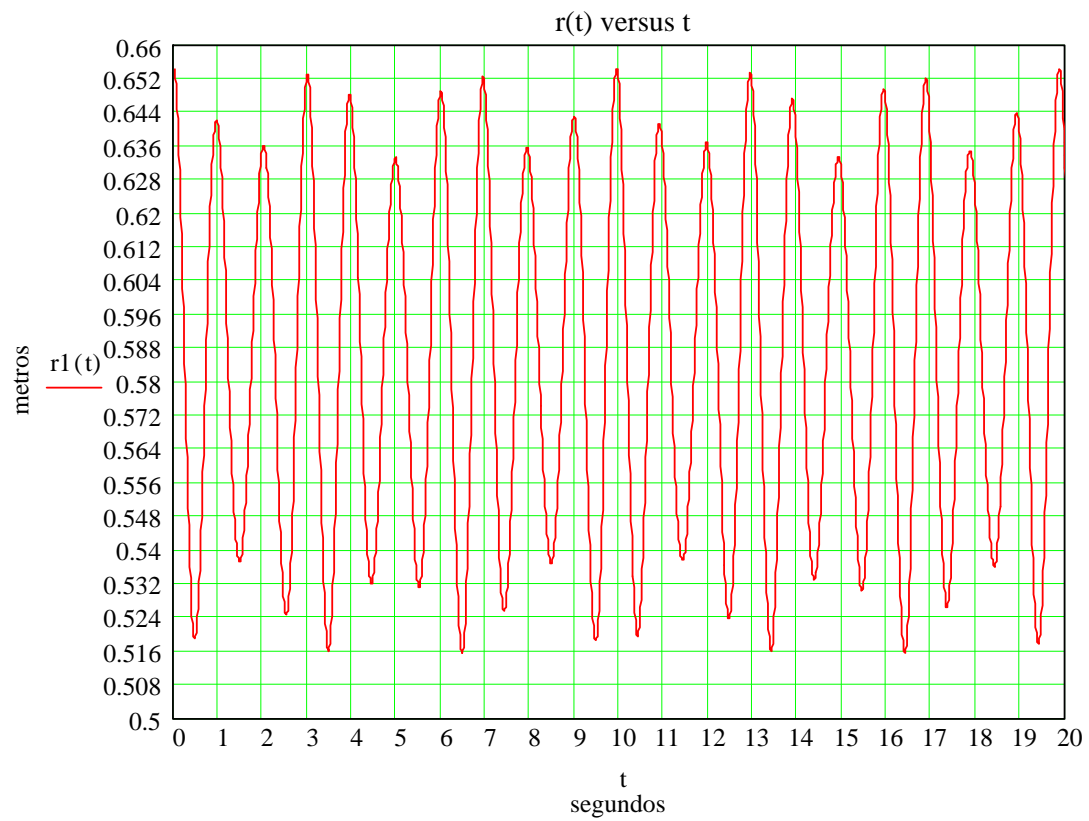
Método KB



Grafica 4b:

$$\omega_1 / \omega_2 = 1,551$$

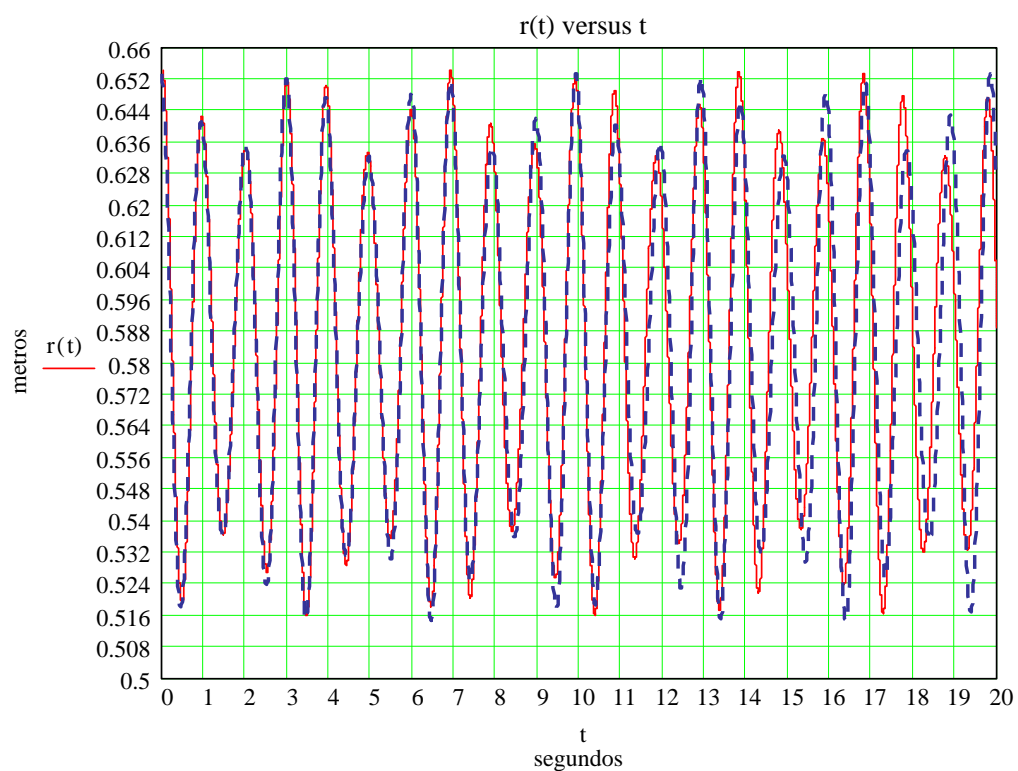
Método RK



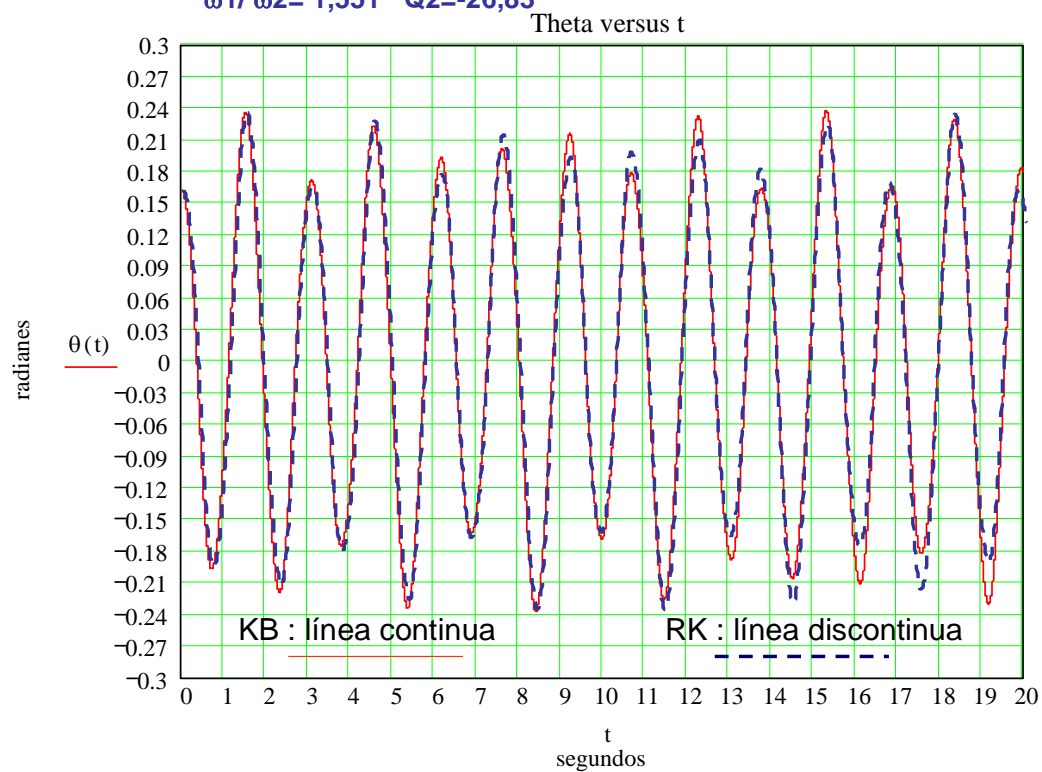
Grafica 4c: $\omega_1/\omega_2= 1,551$

Método KB y RK

$\omega_1/\omega_2= 1,551$ $Q_2=-26,83$



$\omega_1/\omega_2= 1,551$ $Q_2=-26,83$



La comparación de los resultados permite mostrar que el método desarrollado concuerda perfectamente con el método numérico Runge Kutta, sin embargo cuando nos acercamos al valor $\omega_1/\omega_2 = 2$, tal como mostramos a continuación los métodos difieren significativamente:

Figura 5 para $\omega_1/\omega_2 = 1,639$ y $Q2=-23,7$

Figura 5a: $r(t)$ versus t y $\theta(t)$ versus t , usando el método KB.

Figura 5b: $r(t)$ versus t y $\theta(t)$ versus t , usando el método RK.

Figura 5c: $r(t)$ versus t y $\theta(t)$ versus t , comparación de ambos métodos KB y RK.

Figura 6 para $\omega_1/\omega_2 = 1,763$ y $Q2=-17,40$

Figura 6a: $r(t)$ versus t y $\theta(t)$ versus t , usando el método KB.

Figura 6b: $r(t)$ versus t y $\theta(t)$ versus t , usando el método RK.

Figura 6c: $r(t)$ versus t y $\theta(t)$ versus t , comparación de ambos métodos KB y RK.

Figura 7 para $\omega_1/\omega_2 = 1,795$ y $Q2=-15,48$

Figura 7a: $r(t)$ versus t y $\theta(t)$ versus t , usando el método KB.

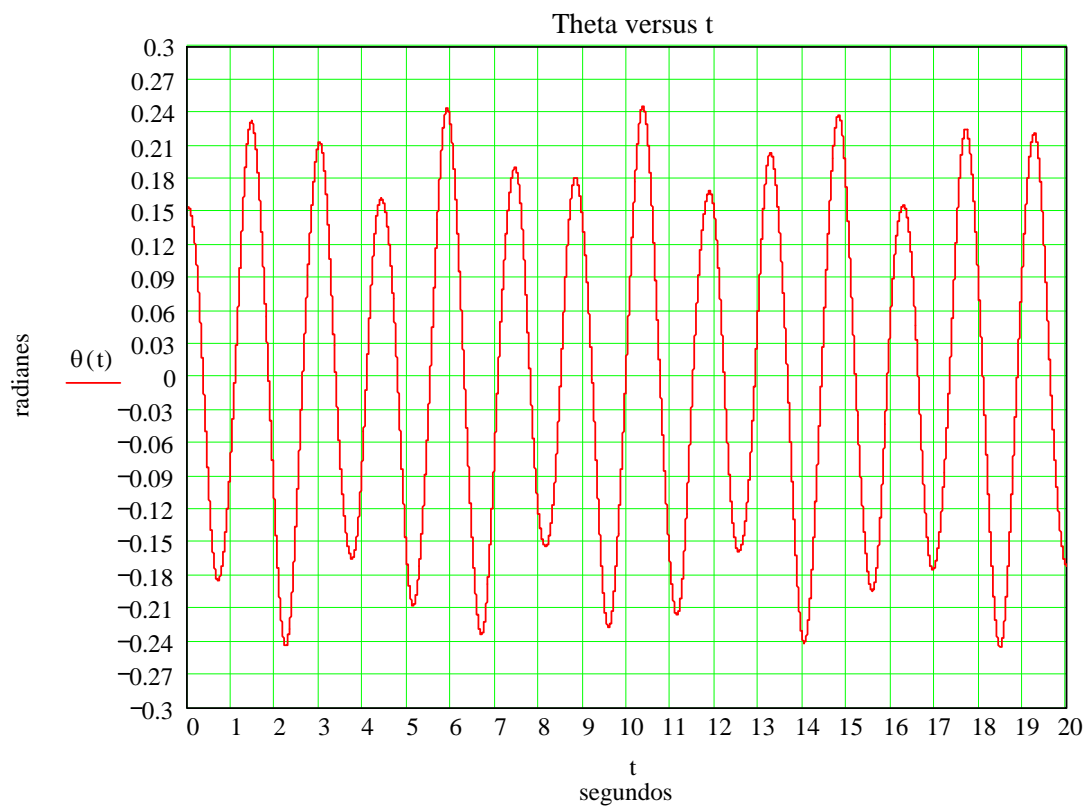
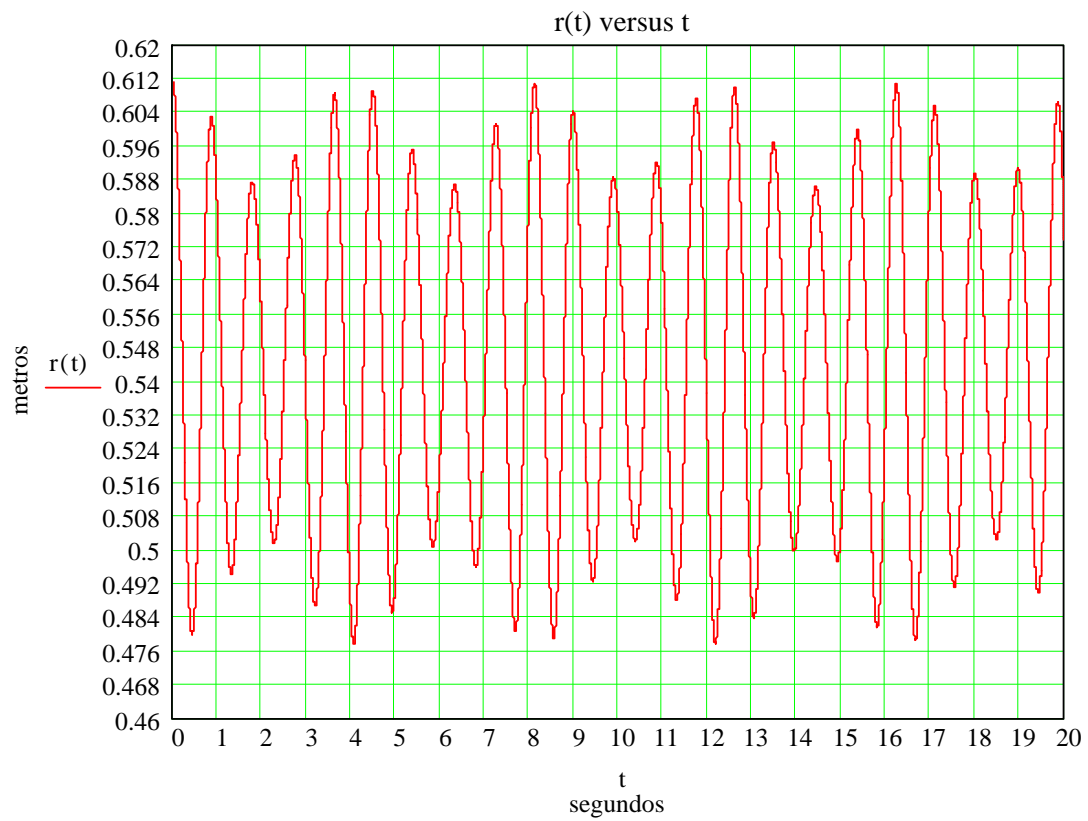
Figura 7b: $r(t)$ versus t y $\theta(t)$ versus t , usando el método RK.

Figura 7c: $r(t)$ versus t y $\theta(t)$ versus t , comparación de ambos métodos KB y RK.

Grafica 5a:

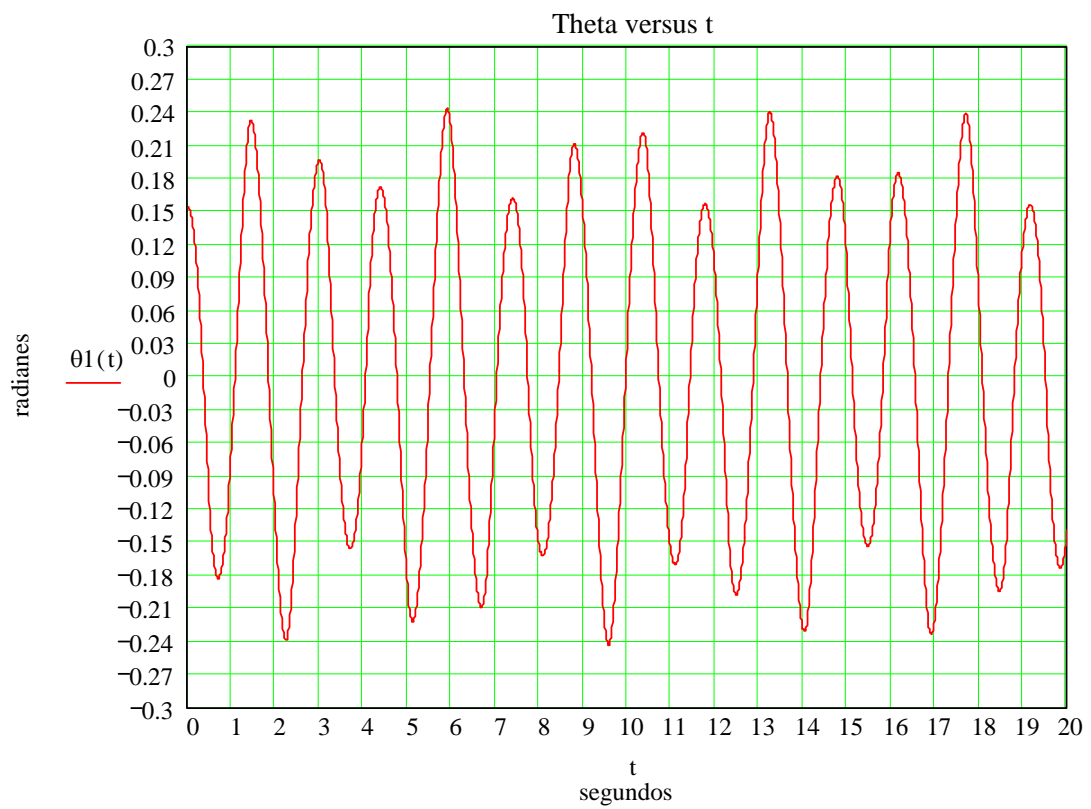
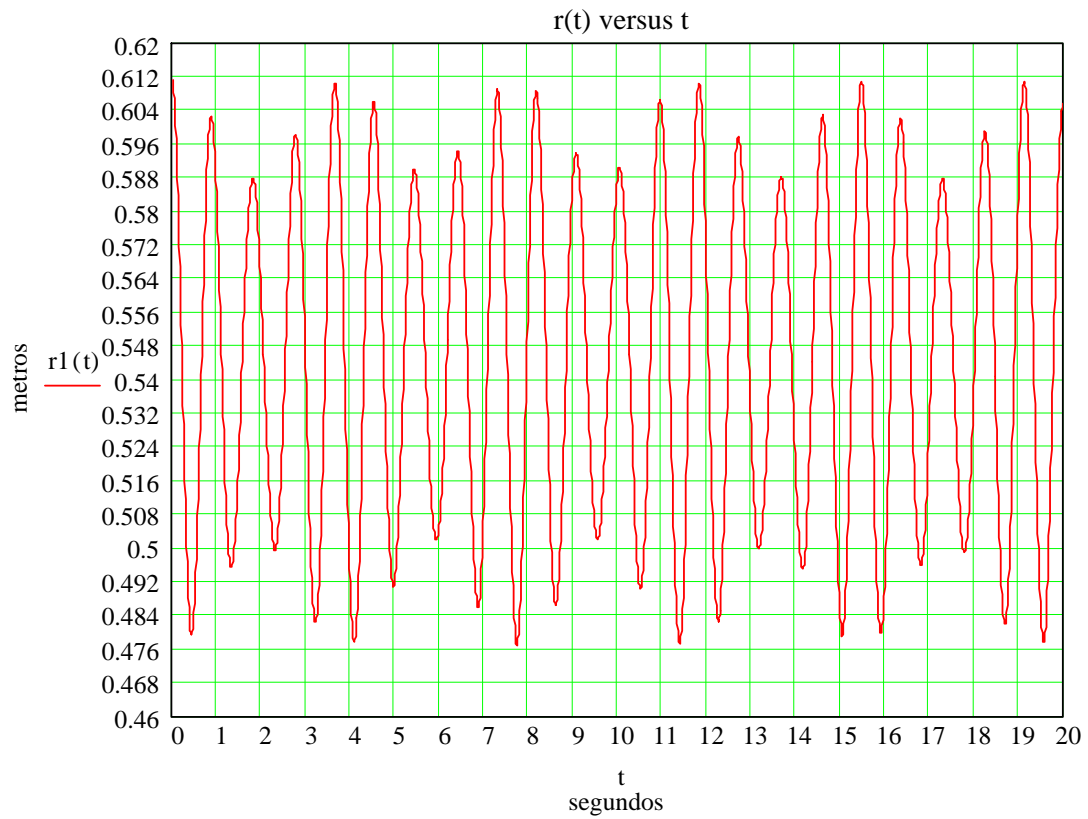
$$\omega_1 / \omega_2 = 1,639$$

Método KB



Grafica 5b: $\omega_1/\omega_2=1,639$

Método RK

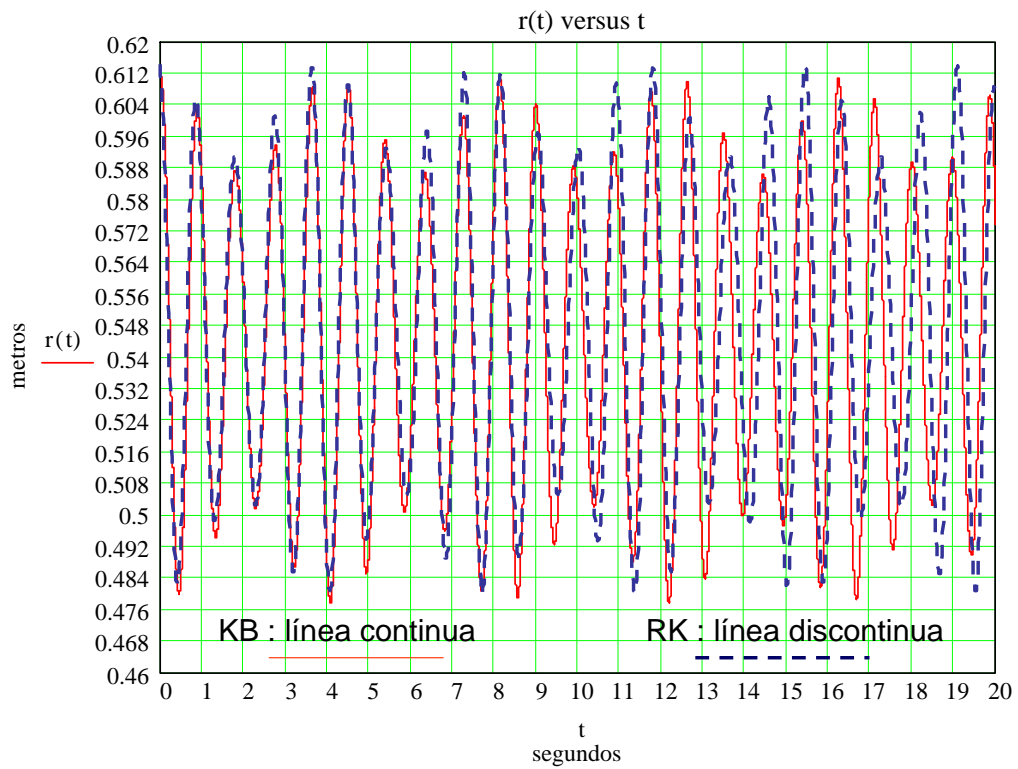


Grafica 5c:

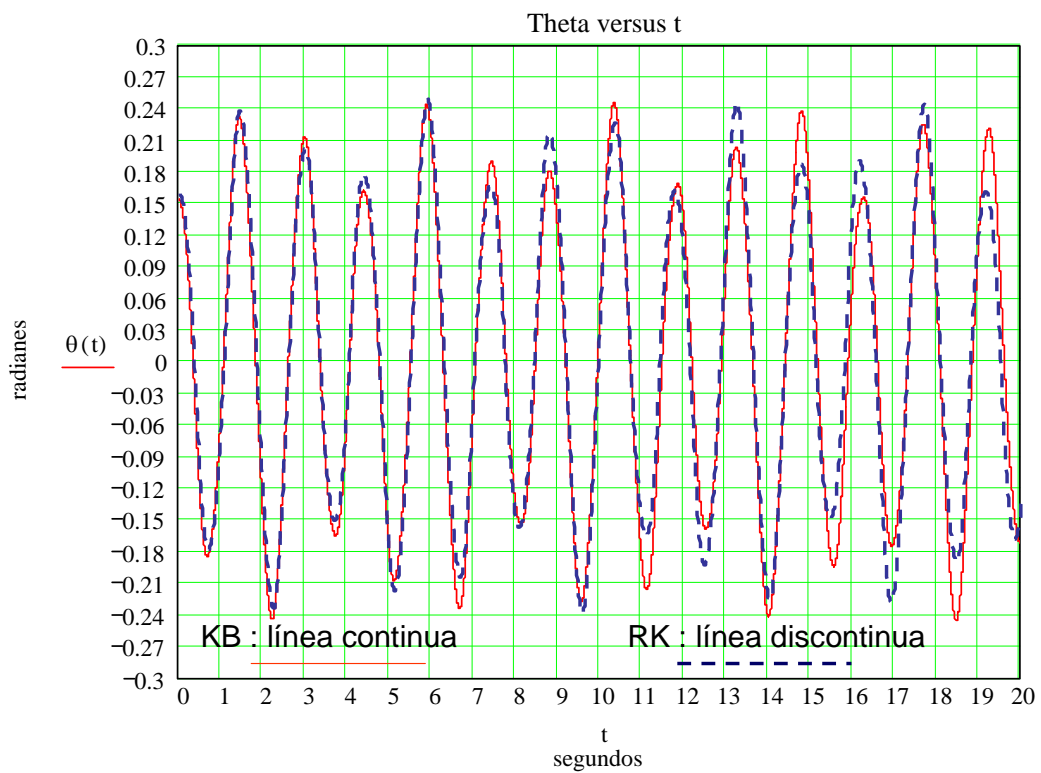
$$\omega_1 / \omega_2 = 1,639$$

Método KB y RK

$$\omega_1 / \omega_2 = 1,639 \quad Q_2 = -23,74$$



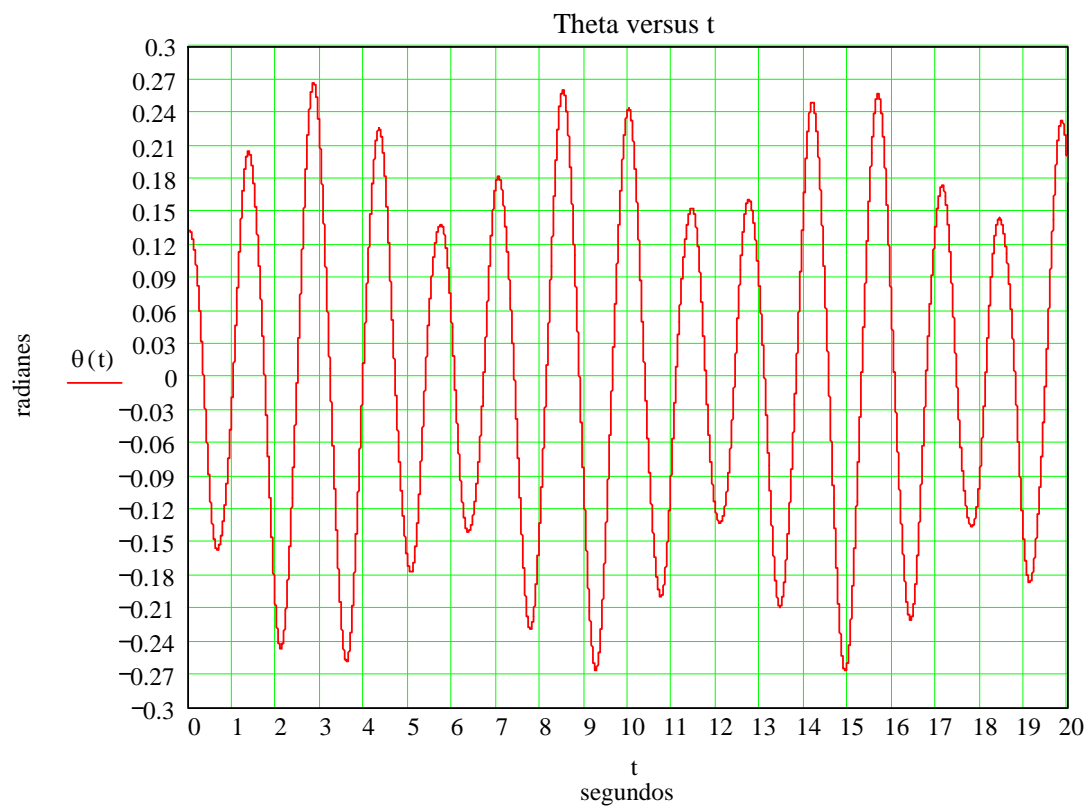
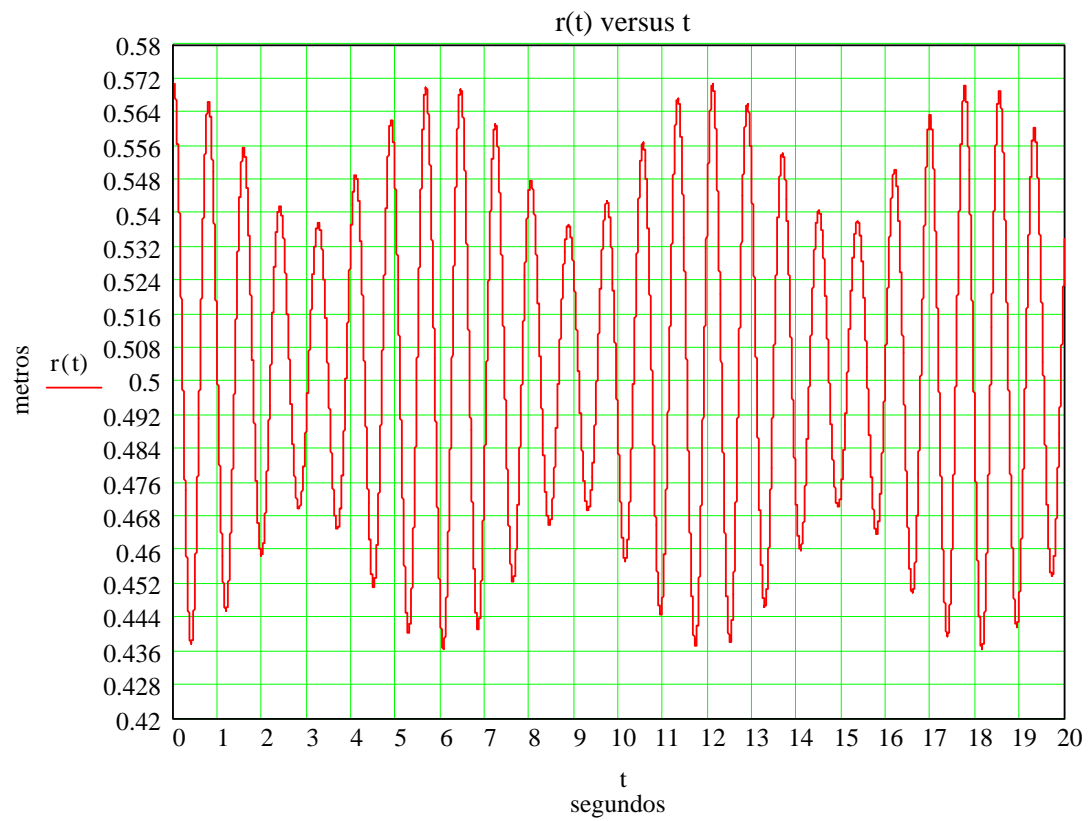
$$\omega_1 / \omega_2 = 1,639 \quad Q_2 = -23,74$$



Grafica 6a:

$$\omega_1 / \omega_2 = 1,763$$

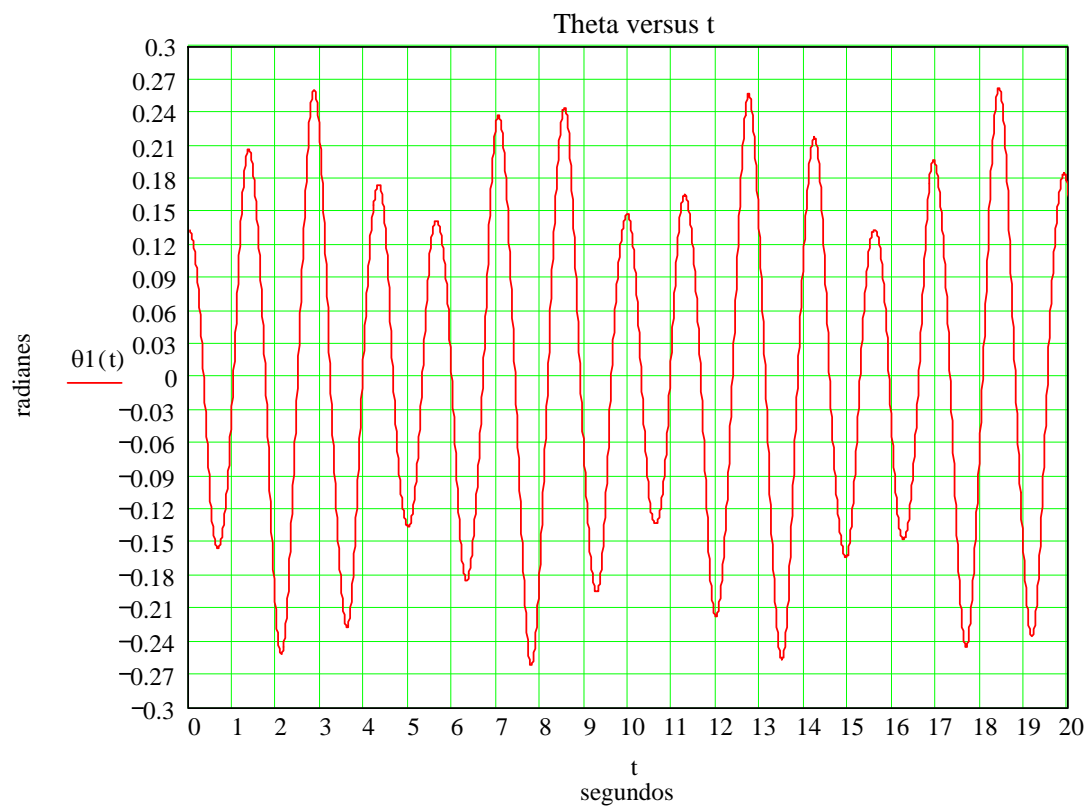
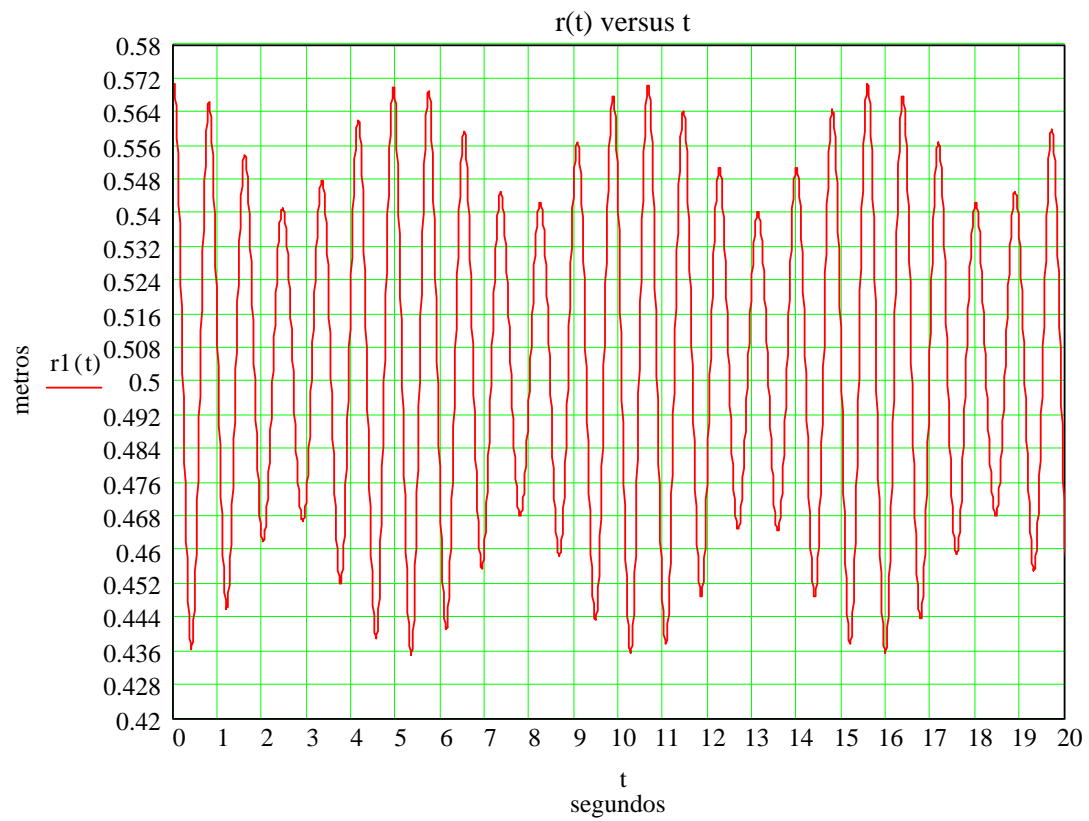
Método KB



Grafica 6b:

$$\omega_1 / \omega_2 = 1,763$$

Método RK

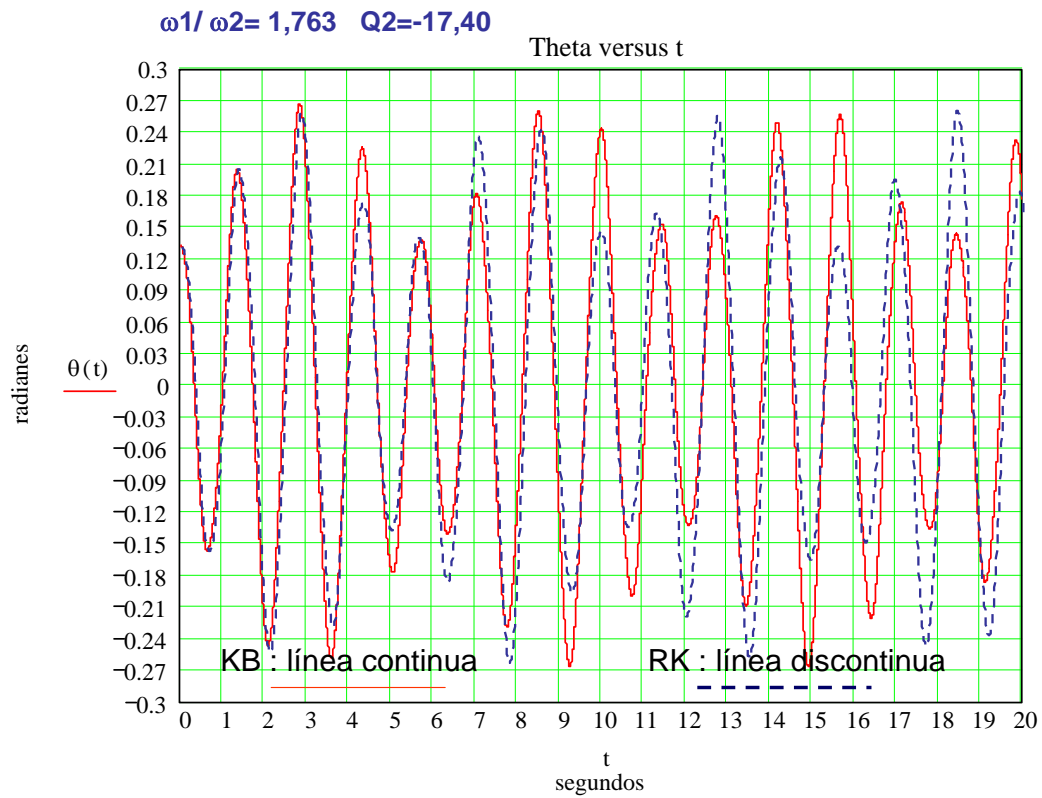
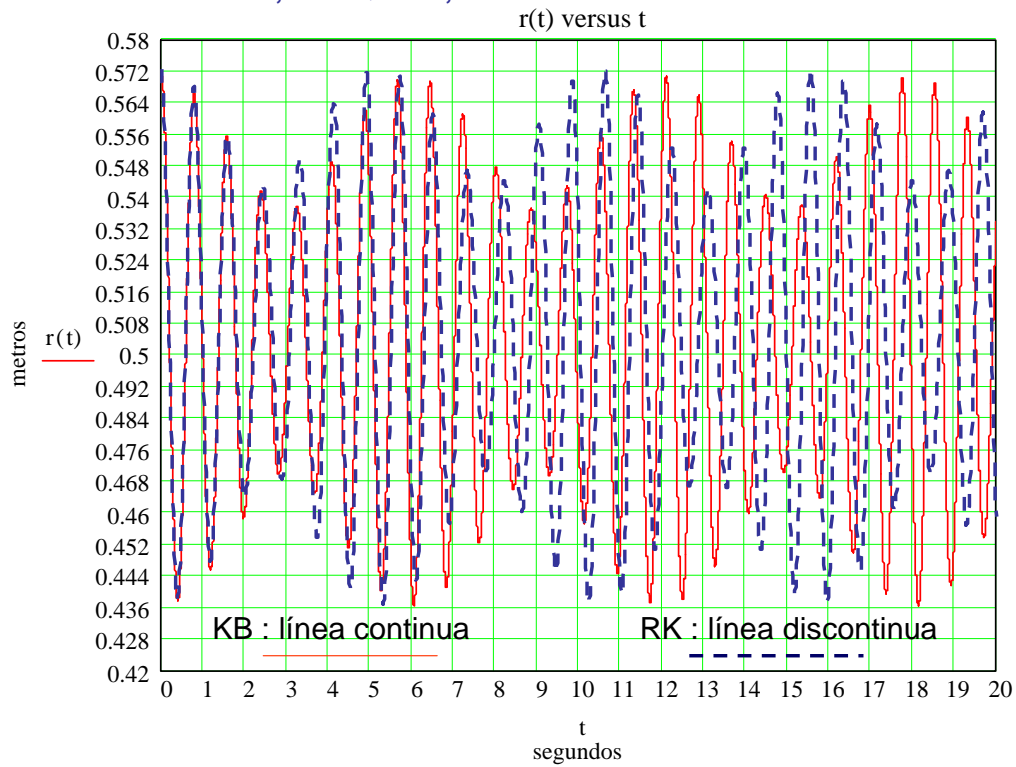


Grafica 6c:

$$\omega_1 / \omega_2 = 1,763$$

Método KB y RK

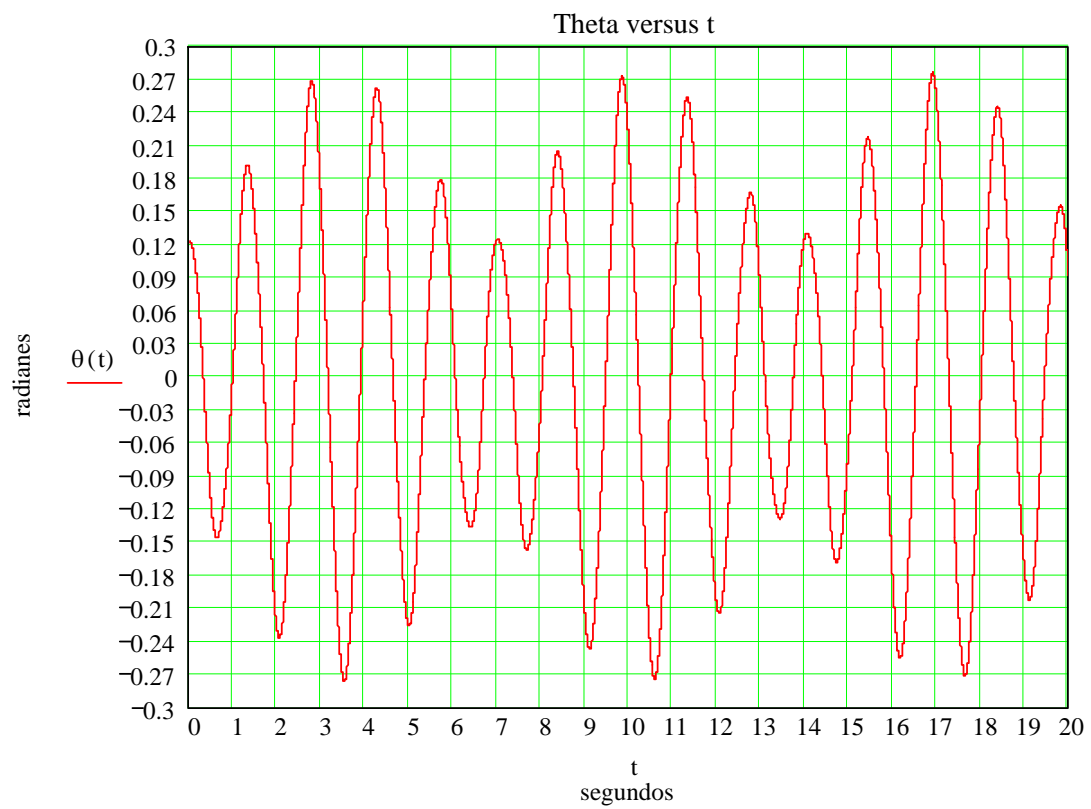
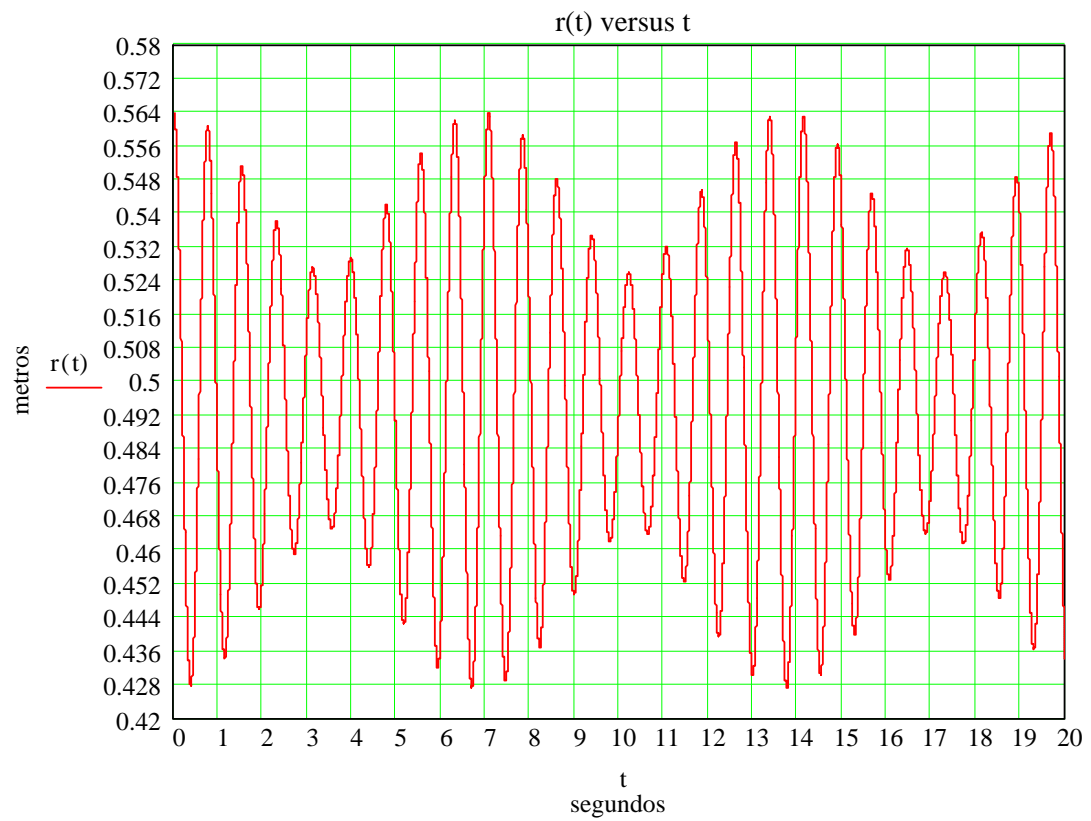
$$\omega_1 / \omega_2 = 1,763 \quad Q_2 = -17,40$$



Grafica 7a:

$$\omega_1 / \omega_2 = 1,795$$

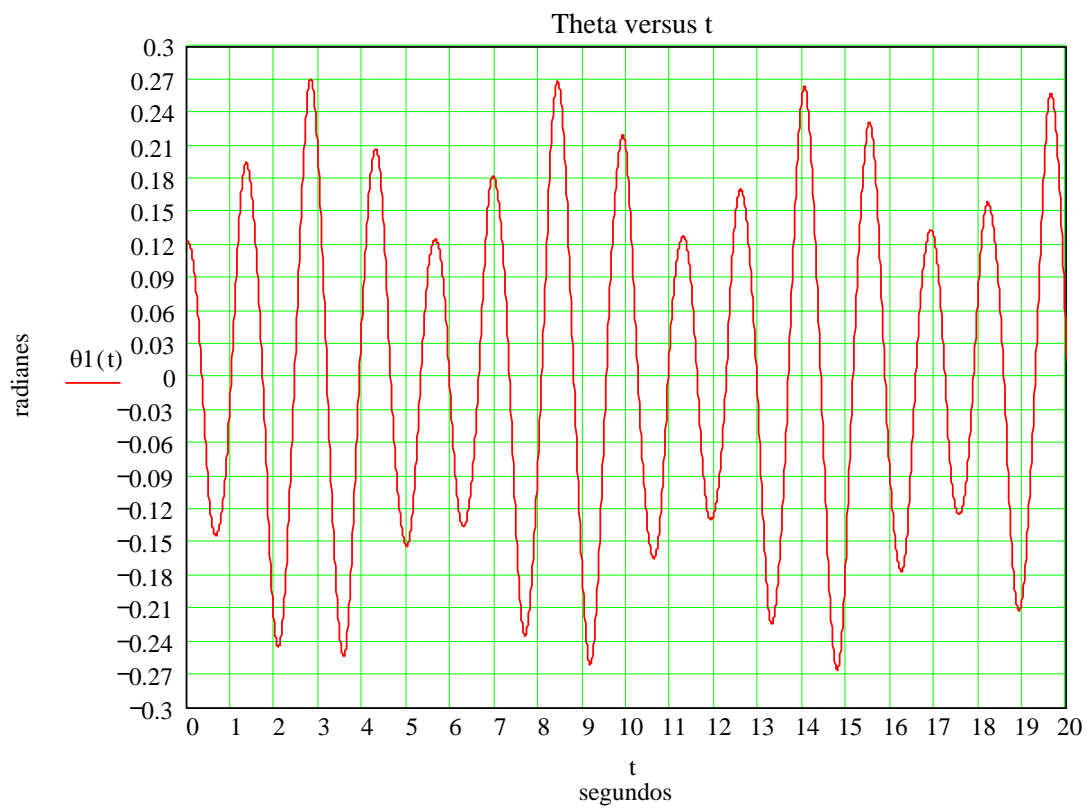
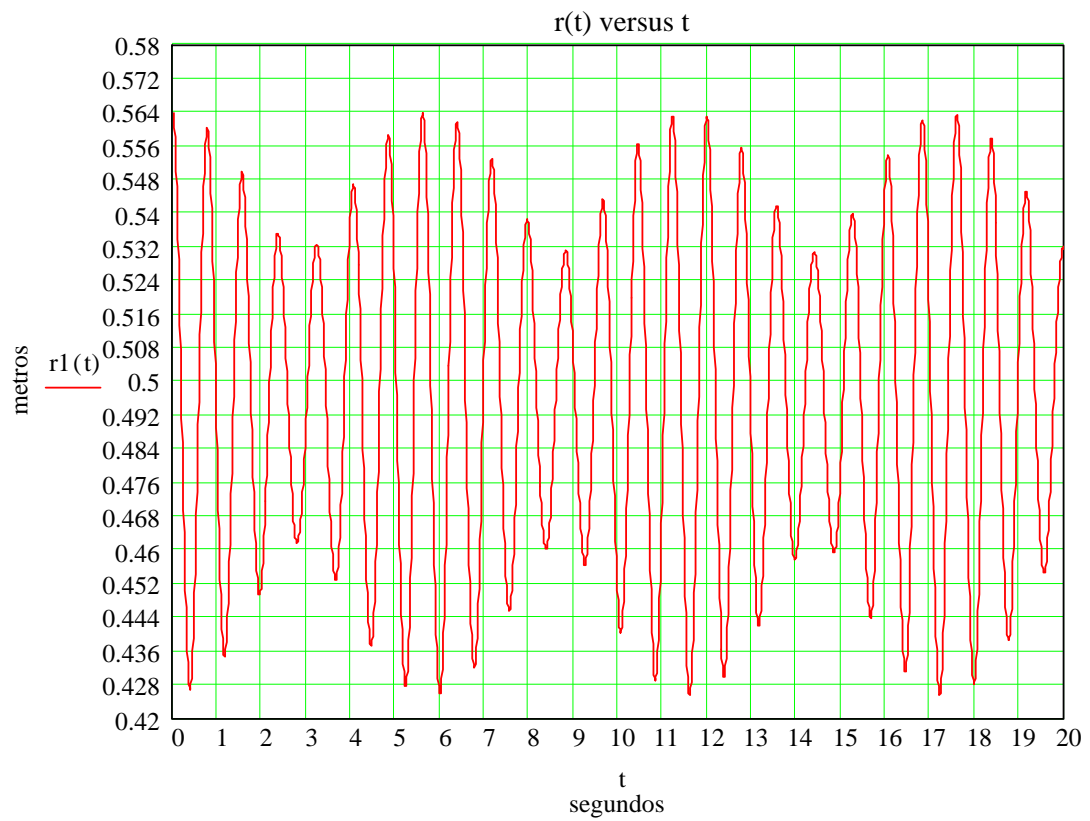
Método KB



Grafica 7b:

$$\omega_1 / \omega_2 = 1,795$$

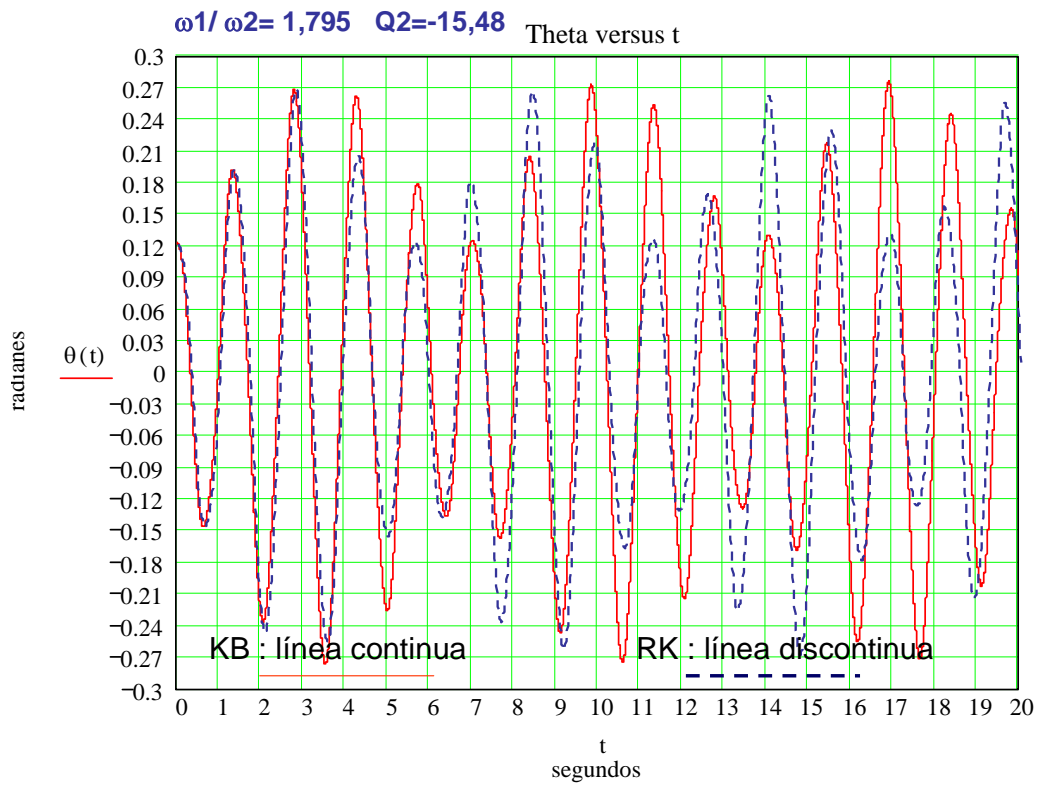
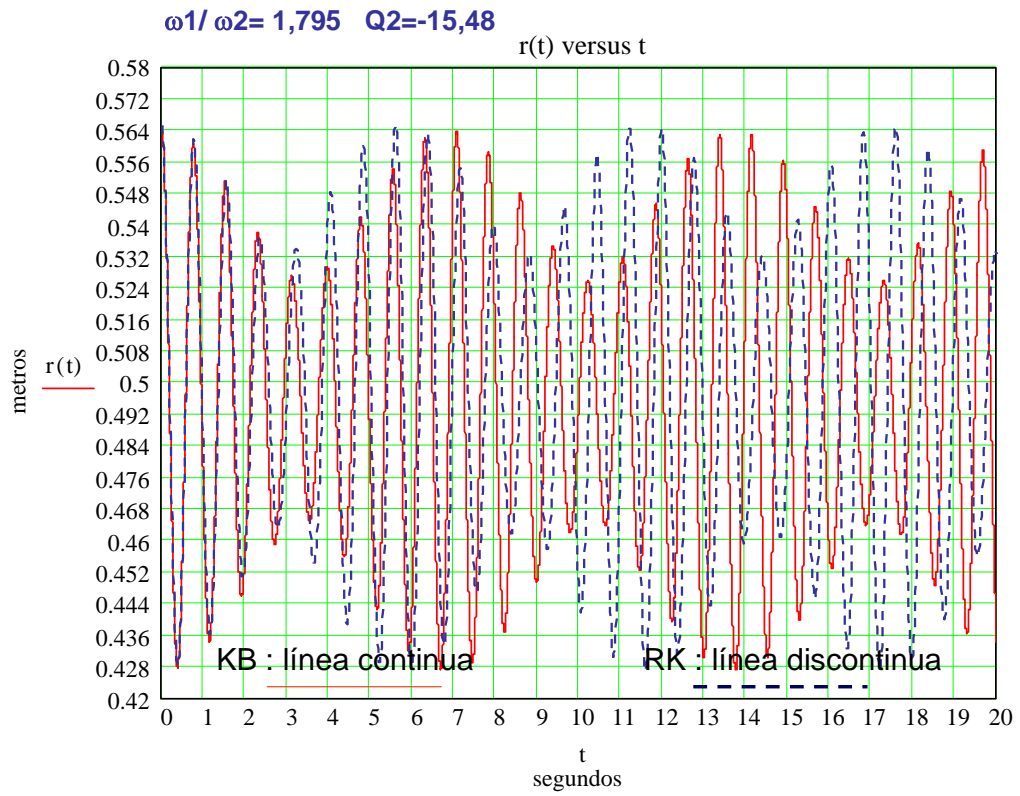
Método RK



Grafica 7c:

$$\omega_1 / \omega_2 = 1,795$$

Método KB y RK



3.2.4. Comparación de los resultados hallados por los métodos KB, RK y el experimento

Para la construcción del sistema péndulo-resorte se utilizó un resorte de longitud natural 30,0 cm, y constante elástica media proporcionada por el fabricante de $k = 12,00 \text{ N/m}$ el comportamiento del resorte no es lineal tal como se muestra en la grafica



Figura 3.2: Comportamiento del resorte

Determinación de la frecuencia natural del resorte ω_{10}

Para la determinación de la frecuencia natural del resorte utilizamos una masa $m = (100,2 \pm 0,1)\text{g}$. Se suspendió el resorte de un extremo y se coloca la masa en el extremo libre, bajo estas condiciones la distancia del punto de suspensión al centro de gravedad de la masa fue $L = (39,55 \pm 0,05)\text{cm}$.

Se sacó la masa de su posición de equilibrio y se midió el tiempo de 10 oscilaciones completas, esto se repitió 10 veces obteniéndose los siguientes datos:

orden	tiempo 10 osc (s)	periodo T(s)
1	5,99	0,599
2	5,99	0,599
3	6,03	0,603
4	5,94	0,594
5	5,95	0,595
6	5,96	0,596
7	5,96	0,596
8	6,02	0,602
9	5,99	0,599
10	6,04	0,604
T promedio		0,5987

finalmente $T \text{ promedio} = (0,599 \pm 0,040)s$

podemos entonces obtener la frecuencia natural del resorte ω_{10}

$$\omega_{10} = (10,5 \pm 0,7)rad/s.$$

Determinación de la frecuencia natural del péndulo ω_{20}

Para la determinación de la frecuencia natural del péndulo utilizamos el sistema anteriormente mencionado. Como queremos medir el período de oscilación del péndulo. Unimos con una cuerda ligera los extremos del resorte, desde el punto de oscilación hasta el extremo donde se ubica la masa, esto evitará que varíe la longitud del resorte mientras oscila como péndulo ($L = (39,55 \pm 0,05)$).

Se saca la masa ligeramente de su posición de equilibrio y se mide el tiempo de 10 oscilaciones completas, esto se repite 10 veces obteniéndose los siguientes datos:

orden	tiempo 10 osc (s)	periodo T(s)
1	12,42	1,242
2	12,47	1,247
3	12,31	1,231
4	12,37	1,237
5	12,48	1,248
6	12,27	1,227
7	12,27	1,227
8	12,27	1,227
9	12,40	1,240
10	12,20	1,220
T promedio		1,235

finalmente $T \text{ promedio} = (1,24 \pm 0,04)\text{s}$

podemos entonces obtener la frecuencia natural del péndulo ω_{20}

$$\omega_{20} = (5,09 \pm 0,16)\text{rad/s}$$

Estas son la frecuencias que utilizamos en la aplicación de los métodos KB y RK y compara los resultados del experimento con el modelo teórico.

Con esta frecuencias obtenemos una relación $\omega_1/\omega_2 = 2,062$, y los resultados que se obtienen son:

Figura 8 para $\omega_1/\omega_2 = 2,062$

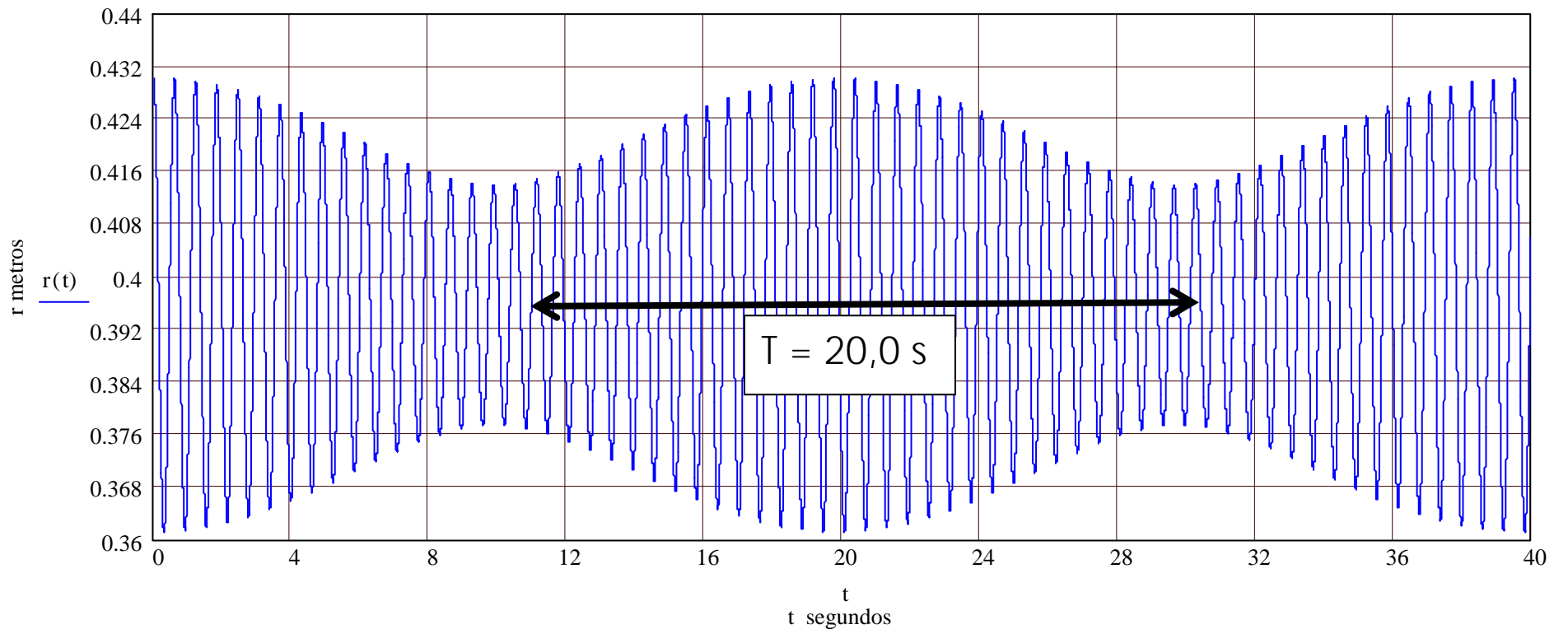
Figura 8a: $r(t)$ versus t usando el método KB.

Figura 8b: $r(t)$ versus t usando el método RK.

Figura 8c: $r(t)$ versus t obtenido experimentalmente[18],[19].

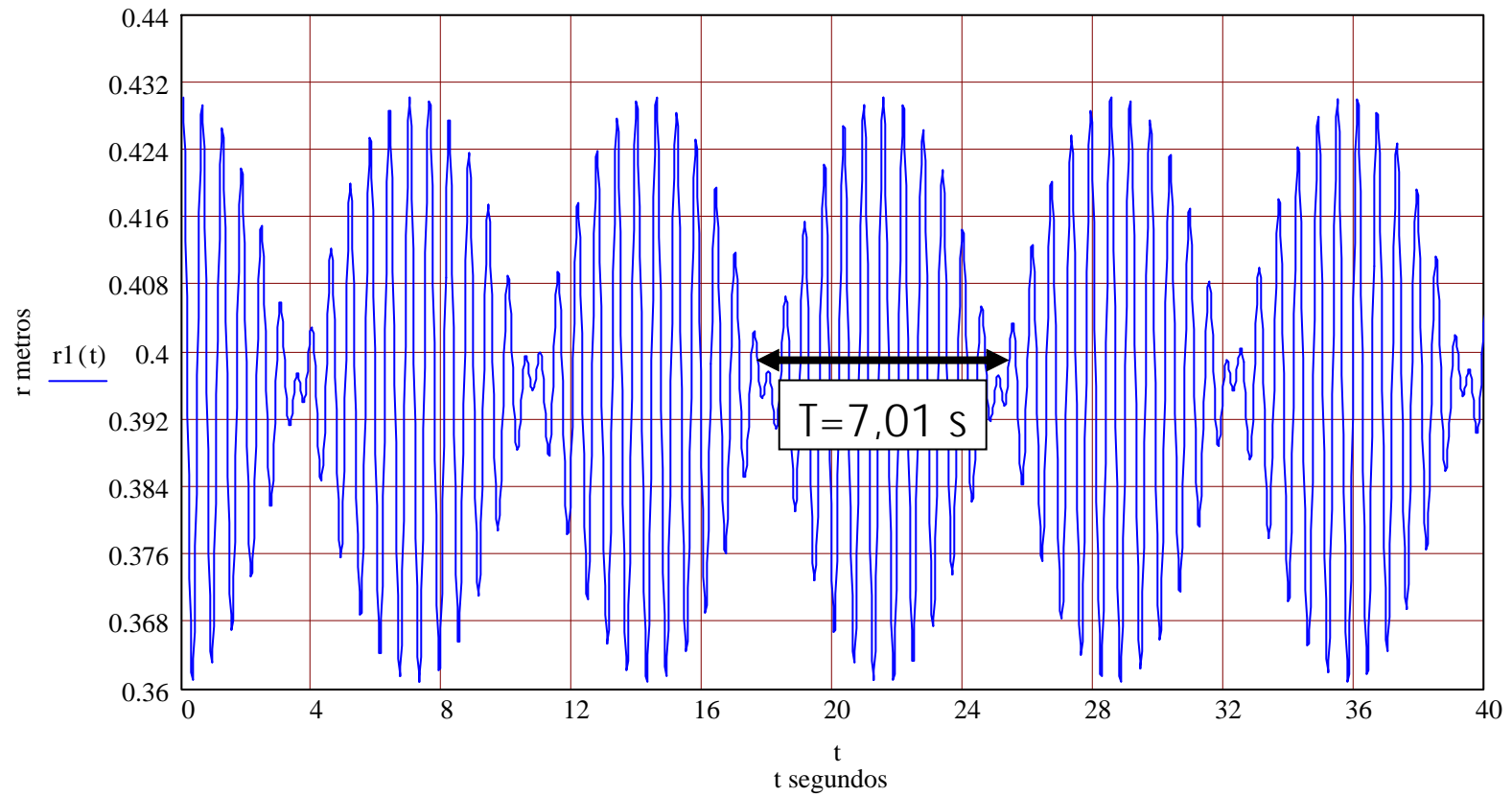
Grafica 8a:

$\omega_1 / \omega_2 = 2,062$
Método KB



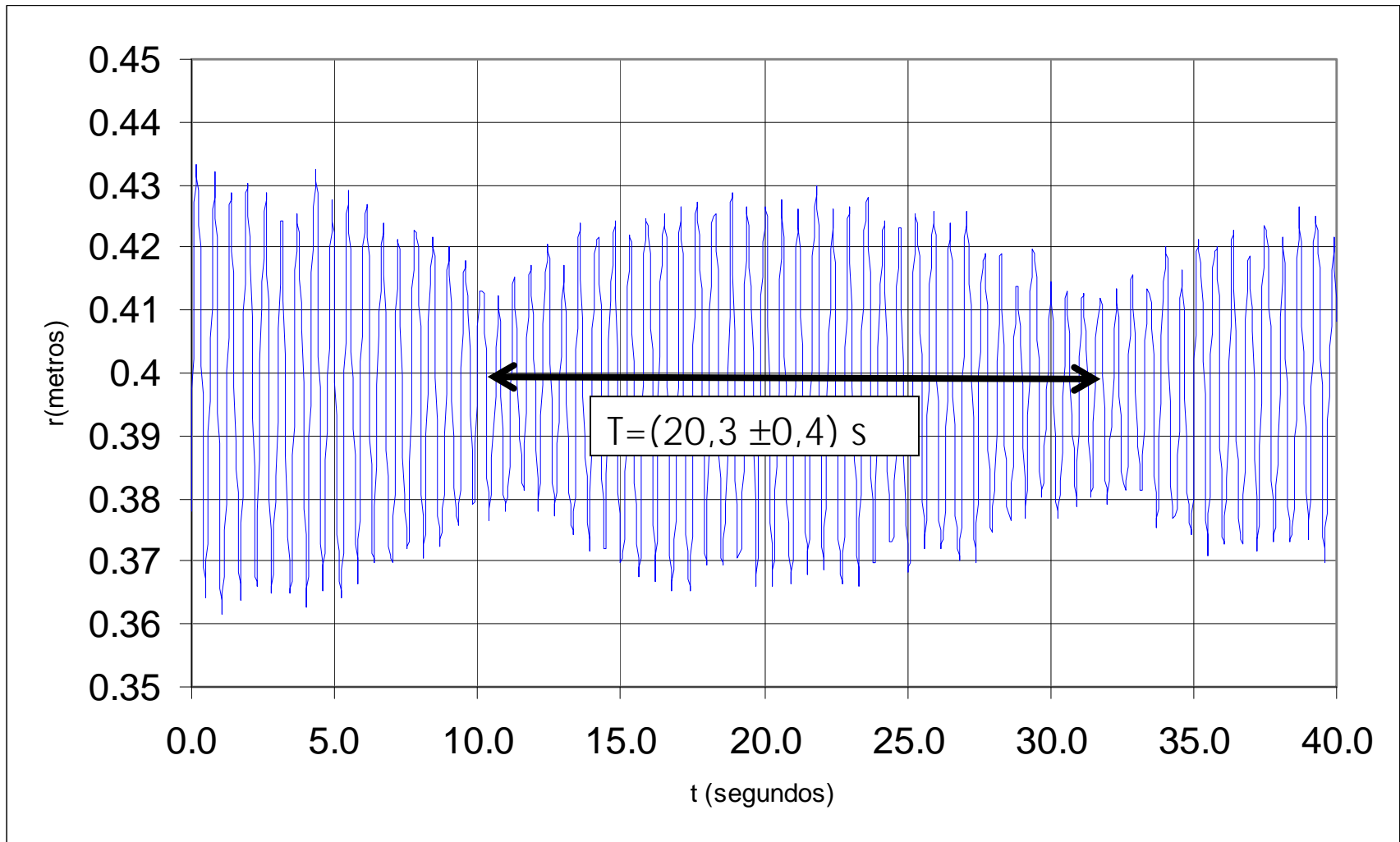
Grafica 8b:

$\omega_1/\omega_2=2,062$
Método RK



Grafica 8c Experimental:

$$\omega_1 / \omega_2 = 2,062$$



Capítulo 4

Conclusiones

- desarrollamos la expansión del método de Krylov–Bogoliubov a sistemas dinámicos no lineales con dos grados de libertad y obtuvimos un sistema de ecuaciones que nos permite hallar soluciones analíticas aproximadas. Aunque en este trabajo describe cómo hallar las soluciones hasta el segundo orden de aproximación, se puede aplicar el procedimiento para obtener soluciones con un orden de aproximación mayor.
- Las soluciones analíticas hasta el segundo orden de aproximación, halladas por la extensión del método Krylov–Bogoliubov desarrollado, poseen términos proporcionales al factor:

$$\frac{1}{\left(\Lambda_{nm}^{(1)}\right)^2 - \left(\beta_{nm}^{(1)}\right)^2}$$

donde los términos del denominador están definidos por las ecuaciones

$$\Lambda_{nm}^{(1)} = \omega_{10}^2 (1 - n^2) - \omega_{20}^2 m^2$$

$$\beta_{nm}^{(1)} = 2nm\omega_{10}\omega_{20}$$

Este factor dependiente de las frecuencias normales de oscilación permite la existencia de condiciones de resonancia.

- Estudiamos los métodos de aproximación del promedio y de múltiples escalas que muestran que el método de Krylov–Bogoliubov es una generalización en la que se incluyen los efectos no lineales, como son la dependencia temporal de la amplitud máxima y la frecuencia, además hemos comprobado la convergencia de los tres métodos hasta el segundo orden.
- Al analizar el sistema péndulo resorte con el método expandido de Krylov–Bogoliubov, hasta el primer orden de aproximación, se encuentran términos de la forma:

$$\frac{1}{(\omega_{10}^2 - 4\omega_{20}^2)}$$

observándose que cuando ω_{10} tiene un valor cercano a $2\omega_{20}$ se presenta el fenómeno de resonancia, para el cual se observa el intercambio de energía entre los modos de oscilación, péndulo resorte y viceversa. Esto se aprecia en las gráficas de la posición r versus t y el ángulo θ versus t los cuales están de acuerdo con el comportamiento real observado. Esta condición de resonancia es similar al caso de la resonancia paramétrica que ocurre cuando un sistema es perturbado por una acción externa cuya frecuencia coincide con la frecuencia normal de oscilación del sistema. En este caso, cada modo de oscilación resulta ser la acción externa del otro, lo cual se puede apreciar en las soluciones obtenidas para este sistema y este resultado está en concordancia con las frecuencias de resonancia del sistema péndulo-resorte estudiado por otros autores [20], [21].

- Los resultados del comportamiento del sistema mecánico pendulo-resorte utilizando la expansión del método de Krylov–Bogoliubov desarrollado, comparados con los encontrados por el método numérico de Runge Kutta son concordantes para los valores de las frecuencias naturales de oscilación lejos de la condición de resonancia, tal como se aprecia en las gráficas de la posición r versus t y del ángulo θ versus t (gráficas 1, 2, 3 y 4) lo cual muestra que el método desarrollado es

correcto.

- Para valores de las frecuencias cercanos a la condición de resonancia, se observa que algunos términos, anteriormente pequeños, sean ahora significativos frente a los demás razón por la cual el método expandido de Krylov–Bogoliubov desarrollado y el método numérico de Runge Kutta discrepan significativamente, tal como se muestra en las gráficas de la posición r versus t y el ángulo θ versus t (graficas 5, 6 y 7) siendo el método expandido de Krylov–Bogoliubov aquí desarrollado, el que más concuerda con los resultados experimentales.

Bibliografía

- [1] Robert Bruce Lindsay, Physical Mechanics, university Physics Series

- [2] Greiner, Classical Mechanics systems of Particles and Hamiltonian Dynamics,

- [3] A.P. French Profesor de fisica del Massachusetts institute of technology, editorial Reverte

- [4] H. Goldstein, Columbia University Editorial Reverte SA

- [5] Landau y Lifshitz, Fisica Teorica Mecanica vol 1, editorial Reverte

- [6] Elon Lages Lima Curso de Analise vol 1, editorial Edgard Blucher S Paulo 1970

- [7] Luis Rodriguez Valencia, Mecánica Clásica, Universidad de Santiago de Chile

- [8] Elon Lages Lima, Analisis en el espacio R^n editorial Edgard Blucher

- [9] Ali Hasan Nayfeh, Perturbation Methods. Copyrights John Wiley and sons, Inc.
- [10] Juan E napoles Valdez, Reprints lecturas matematicas vol 25, Universidad de la cuenca de la Plata Argentina
- [11] N.N. Krylov and N.N. Bogoliubov, Introduccion to nonlinear Mehanics, Princen-ton University Press New Jersey 1947
- [12] Valeria Iorio Instituto de matematicas de ciencias afines, EDP, IMCA
- [13] Jerry B. Marion, Dinámica Clásica de las particulas y sistemas, Editorial Reverte 1975
- [14] N.N. Bogoliubov and Yu A. Mitropolskii, Asymptotic Methods in the theory of non linear oscillation, New york 1961
- [15] Georgi P. Tolstov Profesor de Mathenmatics, Fourier Series, Moscow state University
- [16] Victor Alfaro, Metodos numericos para la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias Universidad de ingenieria electrica, Costa Rica
- [17] Aldo arroyo y Armando Bernui, Analisis del método numérico de Runge Kutta, Revista de la facultad de ciencias, Universidad nacional de ingenieria

- [18] Image Tool for windows version 3.0, University of Texas Health Science Center in San Antonio

- [19] Software spanish dub conversor de pelicula avi a imagenes JPG, Alpha corporation

- [20] Diego Sanjins C.II Jornadas Andinas de Dinmica No-Lineal UMSA, 2006

- [21] V.I. Arnold. Mathematical methods of classical mechanics, second edition editorial Springer Verlag