

**UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA  
FACULTAD DE INGENIERÍA CIVIL**



**ANÁLISIS NO LINEAL DE ESTRUCTURAS CABLE - ARMADURA**

**TESIS**

**Para Optar el Título Profesional de:**

**INGENIERO CIVIL**

**EVER DENNYS COARITA TINTAYA**

**Lima - Perú**

**2013**

**Digitalizado por:**

**Consortio Digital del  
Conocimiento MebLatam,  
Hemisferio y Dalse**

***Dedicatoria:***

*Dedico este trabajo a mis padres por haberme apoyado en todo momento, por sus consejos, sus valores y su amor. A mis hermanos, por estar conmigo y apoyarme siempre, los quiero mucho. A todos mis amigos, por compartir los buenos y malos momentos.*

***Agradecimientos:***

*Agradezco a mi asesor de tesis el M.Sc. Ing. Leonardo Flores González, por la orientación y ayuda que me brindó para la realización de esta tesis.*

# ÍNDICE

<b>ÍNDICE</b> . . . . .	IV
<b>RESUMEN</b> . . . . .	VI
<b>LISTA DE FIGURAS</b> . . . . .	VII
<b>LISTA DE TABLAS</b> . . . . .	IX
<b>LISTA DE SIGLAS Y SÍMBOLOS</b> . . . . .	X
<b>CAPÍTULO I GENERALIDADES</b> . . . . .	1
1.1 INTRODUCCIÓN . . . . .	1
1.2 ESTADO DEL ARTE . . . . .	2
1.3 METODOLOGÍA . . . . .	4
1.4 OBJETIVOS . . . . .	4
1.4.1 Objetivos específicos . . . . .	5
1.5 HIPÓTESIS . . . . .	5
1.6 ORGANIZACIÓN DE LA TESIS . . . . .	5
<b>CAPÍTULO II FUNDAMENTO TEÓRICO</b> . . . . .	6
2.1 ELEMENTO TIPO ARMADURA . . . . .	6
2.1.1 Formulación variacional del elemento tipo armadura . . . . .	6
2.2 ELEMENTO TIPO CABLE . . . . .	19
2.2.1 Hipótesis del elemento tipo cable . . . . .	20
2.2.2 Formulación Lagrangiana del elemento tipo cable . . . . .	20
2.3 ANÁLISIS NO LINEAL ESTÁTICO . . . . .	27
2.4 ANÁLISIS NO LINEAL DINÁMICO . . . . .	27
2.4.1 Matriz de masa . . . . .	29
2.4.2 Matriz de amortiguamiento . . . . .	29
2.5 MÉTODOS DE SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN NO LINEAL . . . . .	29
2.5.1 Método de Newton . . . . .	30
2.5.2 Método de la secante . . . . .	30

2.5.3 Método de control de desplazamiento generalizado . . . . .	31
<b>CAPÍTULO III ALGORITMO DE SOLUCIÓN . . . . .</b>	<b>33</b>
3.1 MATRIZ DEL ELEMENTO TIPO ARMADURA . . . . .	33
3.2 MATRIZ DEL ELEMENTO TIPO CABLE . . . . .	34
3.2.1 Algoritmo del elemento tipo cable . . . . .	34
3.2.2 Descripción del algoritmo . . . . .	39
3.3 ESTRATEGIA DE SOLUCIÓN . . . . .	41
3.3.1 Formato de entrada del modelo . . . . .	41
3.3.2 Algoritmo para el análisis estático no lineal . . . . .	42
3.3.3 Algoritmo para el análisis dinámico no lineal . . . . .	49
<b>CAPÍTULO IV APLICACIONES . . . . .</b>	<b>52</b>
4.1 ANÁLISIS ESTÁTICO . . . . .	52
4.1.1 Cable suspendido a diferente nivel . . . . .	52
4.1.2 Cable suspendido con carga puntual . . . . .	55
4.1.3 Armadura bidimensional . . . . .	57
4.1.4 Armadura tridimensional . . . . .	60
4.1.5 Armadura tridimensional con cables atirantados . . . . .	65
4.1.6 Armadura tridimensional con cables pre-esforzados . . . . .	68
4.1.7 Emparrillado tridimensional de cables . . . . .	71
4.2 ANÁLISIS DINÁMICO . . . . .	73
4.2.1 Armadura tridimensional . . . . .	73
4.2.2 Emparrillado de cables . . . . .	75
<b>CAPÍTULO V CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES . . . . .</b>	<b>77</b>
5.1 CONCLUSIONES . . . . .	77
5.2 RECOMENDACIONES . . . . .	78
<b>BIBLIOGRAFÍA . . . . .</b>	<b>80</b>

## RESUMEN

En esta tesis se desarrollan las matrices de rigidez no lineales de los elementos tipo cable y armadura mediante una formulación en coordenadas Lagrangianas. Luego, se desarrollan algoritmos que emplean los elementos propuestos para resolver el sistema de ecuaciones no lineales de una estructura en un sistema global de referencia, bajo la acción de fuerzas externas estáticas y dinámicas. Finalmente, se presentan algunas aplicaciones relativas a la Ingeniería Civil.

## SUMMARY

In this thesis, the nonlinear stiffness matrices of cable and truss elements using a Lagrangian formulation are developed. Then, algorithms are developed using the proposed elements to solve nonlinear equations of a structure in a global reference system, under action of external static and dynamic forces. Finally, some Civil Engineering applications are presented.

# LISTA DE FIGURAS

<b>Figura 2.1</b>	Movimiento de un elemento armadura en el espacio. (Fuente: Yang, 1994). . . . .	7
<b>Figura 2.2</b>	Grados de libertad para un elemento armadura espacial. . . . .	8
<b>Figura 2.3</b>	Coordenadas para la catenaria elástica. . . . .	20
<b>Figura 2.4</b>	Fuerzas en un segmento del perfil deformado de cable. . . . .	21
<b>Figura 2.5</b>	Línea de material definida entre dos partículas de un cuerpo en un espacio. (Fuente: Linero y Garzón, 2010). . . . .	22
<b>Figura 2.6</b>	Método de Newton modificado con incrementos de carga. . . . .	30
<b>Figura 2.7</b>	Método de la secante con incrementos de carga. . . . .	31
<b>Figura 2.8</b>	Característica general de sistemas no lineales. (Fuente: Yang, 1994). . . . .	32
<b>Figura 3.1</b>	Diagrama de flujo del elemento cable para $L_0$ . . . . .	36
<b>Figura 3.2</b>	Diagrama de flujo del elemento cable para $T_0$ . . . . .	38
<b>Figura 3.3</b>	Configuración en un paso de la iteración. . . . .	39
<b>Figura 3.4</b>	Elemento cable luego de la convergencia. . . . .	39
<b>Figura 3.5</b>	Cable con nodos internos. . . . .	40
<b>Figura 3.6</b>	Fuerzas de cada elemento. . . . .	40
<b>Figura 3.7</b>	Diagrama de flujo, método de la secante. . . . .	47
<b>Figura 3.8</b>	Diagrama de flujo, método de Newton. . . . .	48
<b>Figura 3.9</b>	Diagrama de flujo de análisis dinámico no lineal. . . . .	51
<b>Figura 4.1</b>	Comparación numérica de aplicación con apoyos situados a distinto nivel. . . . .	53
<b>Figura 4.2</b>	Coordenada y tensión mínima en el punto más bajo. . . . .	54
<b>Figura 4.3</b>	Configuración inicial de su geometría bajo peso propio. . . . .	55
<b>Figura 4.4</b>	Désplazamiento vertical del nodo 2 versus número de incrementos de carga. . . . .	56

<b>Figura 4.5</b>	Tiempo de convergencia versus número de incrementos de carga. . . . .	56
<b>Figura 4.6</b>	Geometría de armadura bidimensional. . . . .	57
<b>Figura 4.7</b>	Diagrama carga P versus desplazamiento lateral para cada $\alpha$ . . . . .	59
<b>Figura 4.8</b>	Relación de desplazamiento no lineal y lineal para cada valor de $\alpha$ . . . . .	60
<b>Figura 4.9</b>	Geometría de torre tridimensional. . . . .	60
<b>Figura 4.10</b>	Geometría con los nodos de la estructura tridimensional. . . . .	61
<b>Figura 4.11</b>	Deformación del análisis no lineal (no a escala). . . . .	64
<b>Figura 4.12</b>	Desplazamientos con número de incrementos para el nodo 26 de la armadura, al considerar análisis no lineal. . . . .	64
<b>Figura 4.13</b>	Número de incrementos de carga versus tiempo de solución. . . . .	65
<b>Figura 4.14</b>	Geometría de torre tridimensional arriostrada. . . . .	66
<b>Figura 4.15</b>	Geometría deformada por peso propio de torre tridimensional arriostrada (no a escala). . . . .	66
<b>Figura 4.16</b>	Desplazamientos en las tres componentes del nodo 26 con diferentes cantidades de elementos cable. . . . .	68
<b>Figura 4.17</b>	Modelo tridimensional analizado. . . . .	68
<b>Figura 4.18</b>	Diagrama de carga versus desplazamiento lateral del nodo 2. . . . .	69
<b>Figura 4.19</b>	Envolvente de cada curva de tensión. . . . .	69
<b>Figura 4.20</b>	Relación de las fuerzas $(\frac{P_i^+}{P_i^-})$ y desplazamientos $(\frac{x_i^+}{x_i^-})$ versus tensión de los cables. . . . .	70
<b>Figura 4.21</b>	Relación de rigideces asintóticas. . . . .	70
<b>Figura 4.22</b>	Relación de rigidez inicial y asintótica negativa. . . . .	71
<b>Figura 4.23</b>	Geometría del emparrillado de cables. . . . .	71
<b>Figura 4.24</b>	Configuración inicial y deformada del emparrillado de cables. . . . .	72
<b>Figura 4.25</b>	Registro de aceleraciones, El Centro 1940. . . . .	73
<b>Figura 4.26</b>	Geometría de la armadura tridimensional con masas concentradas. . . . .	74
<b>Figura 4.27</b>	Registro de desplazamiento del nodo 19 en dirección x. . . . .	74
<b>Figura 4.28</b>	Emparrillado de cables con masas concentradas. . . . .	75
<b>Figura 4.29</b>	Registro de desplazamiento del nodo 4 en dirección vertical. . . . .	76



# LISTA DE TABLAS

<b>Tabla 3.1</b>	Formato de entrada de geometría y masa concentrada. . . . .	41
<b>Tabla 3.2</b>	Formato de entrada de propiedades. . . . .	42
<b>Tabla 3.3</b>	Formato de entrada de restricciones y fuerzas nodales. . . . .	42
<b>Tabla 4.1</b>	Información para el problema. . . . .	52
<b>Tabla 4.2</b>	Comparación de resultados. . . . .	53
<b>Tabla 4.3</b>	Coordenada, tensión en el punto más bajo y fuerzas en el apoyo I. . . .	54
<b>Tabla 4.4</b>	Información para el cable suspendido. . . . .	55
<b>Tabla 4.5</b>	Comparación de desplazamientos del nodo 2 (m). . . . .	57
<b>Tabla 4.6</b>	Propiedades de la armadura bidimensional. . . . .	58
<b>Tabla 4.7</b>	Desplazamiento del nodo 1 en cm, con $\alpha = 0,5$ . . . . .	58
<b>Tabla 4.8</b>	Desplazamiento del nodo 1 en cm, con $\alpha = 0,7$ . . . . .	58
<b>Tabla 4.9</b>	Desplazamiento del nodo 1 en cm, con $\alpha = 0,9$ . . . . .	59
<b>Tabla 4.10</b>	Propiedades de la armadura tridimensional. . . . .	61
<b>Tabla 4.11</b>	Desplazamientos del análisis lineal (cm). . . . .	62
<b>Tabla 4.12</b>	Desplazamientos del análisis no lineal (cm). . . . .	63
<b>Tabla 4.13</b>	Propiedades del elemento cable. . . . .	65
<b>Tabla 4.14</b>	Desplazamientos del análisis no lineal por peso propio (cm). . . . .	67
<b>Tabla 4.15</b>	Propiedades de los elementos. . . . .	69
<b>Tabla 4.16</b>	Puntos de inflexión en cada curva de tensión. . . . .	70
<b>Tabla 4.17</b>	Información para los cables. . . . .	72
<b>Tabla 4.18</b>	Comparación de desplazamientos en nodo 8 (mm). . . . .	72
<b>Tabla 4.19</b>	Información de la armadura tridimensional. . . . .	73
<b>Tabla 4.20</b>	Comparación de resultados de desplazamientos máximos. . . . .	75
<b>Tabla 4.21</b>	Comparación de resultados de desplazamientos máximos. . . . .	76

## LISTA DE SIGLAS Y SÍMBOLOS

$A$	Área de sección transversal
$C$	Matriz de amortiguamiento
$C_G$	Matriz de amortiguamiento viscoso global
$C_0$	Configuración inicial no deformada
$C_1$	Última configuración calculada
$C_2$	Configuración actual deformada
$C_c$	Matriz de corrección en el caso de $T_o$ conocido
$E$	Módulo de elasticidad de Young
$F$	Matriz de flexibilidad del elemento cable
$F_1, F_2$	Componentes horizontales en las direcciones $x$ e $y$ de la tensión en el nodo $i$
$F_3$	Componente vertical en la dirección $z$ de la tensión en el nodo $i$
$F_4, F_5$	Componentes horizontales en las direcciones $x$ e $y$ de la tensión en el nodo $j$
$F_6$	Componente vertical en la dirección $z$ de la tensión en el nodo $j$
$F_{int}$	Fuerzas internas del elemento cable
$F_{inti}$	Fuerzas internas del elemento cable en el incremento de carga $i$
${}^1F$	Fuerza axial del elemento armadura en $C_1$
${}^1F_x, {}^1F_y, {}^1F_z$	Fuerzas en el elemento en las direcciones $x, y$ y $z$ en $C_1$
$f$	Vector de fuerzas
$f_c$	Vector de carga incremental
$f_d$	Vector de dirección del sismo $x, y$ ó $z$
$f_e$	Vector de fuerzas externas
$f_i$	Vector de fuerzas internas
$f_{int}$	Vector de fuerzas internas del elemento cable
$f_{ij}$	Elemento de la matriz de flexibilidad
$f_m$	Vector de masa en la dirección del sismo

$f_s$	Vector de fuerza residual de la estructura
$f_{sj}$	Vector de fuerza residual de la estructura en la iteración $j$
$h$	Sub matriz de $s_3$
$I_n$	Momento de inercia
$I, J$	Nodos del elemento cable
$Jm$	Masa concentrada en el nodo
$K$	Matriz de rigidez
$K_G$	Matriz de rigidez global
$K_T$	Matriz de rigidez tangente
$\hat{K}$	Matriz de rigidez tangente dinámica
$K_j^i$	Matriz de rigidez global en el incremento de carga $i$ y la iteración $j$
$K_c$	Matriz de rigidez del cable
$K_{ct}$	Matriz de rigidez tangente del cable
$K_e$	Matriz global de rigidez elástica
$k_e$	Matriz de rigidez elástica de un elemento
$k_g$	Matriz de rigidez geométrica de un elemento
$k_i$	Rigidez inicial de la envolvente
$k^+$	Rigidez asintótica de la envolvente en la parte positiva
$k^-$	Rigidez asintótica de la envolvente en la parte negativa
$L$	Longitud del elemento
$L_o$	Longitud inicial del elemento
$L_{oi}$	Longitud inicial del elemento en el incremento de carga $i$
$L_f$	Longitud final del elemento cable
$l_{xo}, l_{yo}$	Proyecciones horizontales de la longitud inicial del cable
$l_x, l_y$	Proyecciones horizontales de la longitud del cable
$l_{zo}$	Proyección vertical de la longitud inicial del cable
$l_z$	Proyección vertical de la longitud del cable
$M$	Matriz de masas concentradas
$M_G$	Matriz de masa global
$m$	Peso por unidad de longitud
$m_i$	Peso por unidad de longitud en el incremento de carga $i$
$N^i$	Fuerza axial en el incremento de carga $i$
$N_s$	Número de segmentos del cable

$N_{acel}$	Número de datos del registro sísmico
$N_{inc}$	Número de incrementos de carga
$P - \Delta$	Efecto P-Delta
$P_i^+$	Fuerza en la inflexión de la envolvente positiva
$P_i^-$	Fuerza en la inflexión de la envolvente negativa
$\mathbf{R}$	Vector de carga actuante
$\mathbf{R}_j$	Vector de carga actuante en la iteración $j$
${}^1R, {}^2R$	Trabajo virtual realizado por una carga externa en $C_1$ y $C_2$
$S$	Incremento del esfuerzo axial del elemento armadura
$s_1, s_2, s_3$	Términos de orden superior en las matrices de rigidez
$T$	Tensión del cable
$T_0$	Tensión inicial del cable
$T_i, T_j$	Tensión del cable en los nodos $i$ y $j$ respectivamente
$tol$	Tolerancia
$telem$	Tipo de elemento
$u, v, w$	Desplazamientos en las direcciones de los ejes $x, y$ y $z$
$u_x, u_y, u_z$	Desplazamientos en las direcciones $x, y$ y $z$
$\mathbf{u}^i$	Vector de desplazamientos en el incremento de carga $i$
$\mathbf{u}$	Vector de desplazamientos
$\mathbf{u}_i$	Vector de desplazamientos en el tiempo
$\dot{\mathbf{u}}_i$	Vector de velocidades en el tiempo
$\ddot{\mathbf{u}}_i$	Vector de aceleraciones en el tiempo
$\ddot{u}_g$	Aceleración sísmica en los puntos de apoyo
$w$	Peso por unidad de longitud del cable
$w_f$	Peso por unidad de longitud luego de la elongación del cable
$w_i$	Frecuencia circular del modo $i$
$x_i^+$	Desplazamiento en la inflexión de la envolvente positiva
$x_i^-$	Desplazamiento en la inflexión de la envolvente negativa
$x, y, z$	Coordenadas cartesianas globales
$x_i, y_i, z_i$	Coordenadas cartesianas globales en el incremento de carga $i$
$X_j, Y_j, Z_j$	Coordenadas cartesianas globales temporales en la iteración $j$
$\Delta F_{intj}$	Variación de las fuerzas internas del elemento cable en la iteración $j$
$\Delta \mathbf{f}_{sj}$	Vector incremento de fuerza residual de la estructura en la iteración $j$

$\Delta L$	Incremento de longitud del elemento cable
$\Delta N^j$	Variación de la fuerza axial en la iteración $j$
$\Delta P_i$	Vector de carga externa incremental en el tiempo
$\Delta \hat{P}_i$	Vector de carga externa incremental dinámica en el tiempo
$\Delta T$	Incremento de la tensión en el cable
$\Delta t$	Intervalo de tiempo del registro
$\Delta u, \Delta v, \Delta w$	Variación de desplazamientos de los nodos
$\Delta u_i$	Vector de variación de desplazamientos en el tiempo
$\Delta \dot{u}_i$	Vector de variación de velocidades en el tiempo
$\Delta \ddot{u}_i$	Vector de variación de aceleraciones en el tiempo
$\Delta u_j^i$	Vector incremento de desplazamientos en incremento de carga $i$ e iteración $j$
$\Delta \ddot{u}_{gi}$	Variación de la aceleración sísmica del registro en el tiempo $t$
$\alpha$	Fracción de la carga vertical
$\alpha_M$	Factor de amortiguamiento proporcional a la masa
$\alpha_K$	Factor de amortiguamiento proporcional a la rigidez
$\delta \varepsilon, \delta e, \delta \eta$	Función de perturbación
$e$	Deformación lineal
$\varepsilon$	Deformación axial
$\gamma, \beta$	Parámetros del método de Newmark
$\emptyset$	Diámetro del elemento
$\eta$	Deformación no lineal
$\xi_i$	Fracción del amortiguamiento crítico del modo $i$
$\lambda$	Factor de aproximación inicial del cable
$\tau$	Esfuerzo axial inicial
$\  \cdot \ _{\infty}$	Norma infinita
$\infty$	Infinito

# CAPÍTULO I

## GENERALIDADES

### 1.1. INTRODUCCIÓN

Muchas estructuras en su estado inicial tienen un comportamiento lineal, sin embargo existen excepciones donde la relación entre la fuerza y el desplazamiento no puede ser descrita correctamente con un modelo de comportamiento lineal de la estructura. Las fuentes de no linealidad se deben al comportamiento no lineal del material, a la no linealidad geométrica o a un efecto combinado de las anteriores [22]. Dentro de las excepciones, los cables siempre presentan un comportamiento no lineal, con una no linealidad debida a que sólo tienen un comportamiento tensional y no linealidad geométrica [6]. En general, las estructuras de cable manifiestan una flexibilidad que no se puede atribuir a la baja rigidez axial de sus elementos, sino a la geometría de la estructura [17].

Los métodos usuales de análisis de estructuras de cable están basados en la discretización del cable en elementos más pequeños, para formular las ecuaciones de equilibrio. Luego se emplean métodos numéricos para la solución de las ecuaciones resultantes o se emplean elementos con valores del módulo de Young adecuados. En el presente trabajo de investigación se estudian las estructuras de cable dividiéndolas en elementos cable con matrices de rigidez deducidas a partir de la ecuación de la catenaria [11].

En los últimos años, el elemento cable viene siendo empleado en estructuras tales como puentes atirantados, torres ventadas, techos de estructuras que cubren amplias áreas y otros. Cabe mencionar que el comportamiento de este elemento siempre es no lineal tanto en el rango elástico como el inelástico. Así mismo, en muchos casos son estructuras que presentan grandes desplazamientos, por ende se hace necesaria la profundización de su estudio en el rango no lineal.

## 1.2. ESTADO DEL ARTE

El estudio del elemento cable ha sido de mucho interés durante años. Es así que Galileo en 1638 dice que la forma de un cable colgante es parabólica, esto por una analogía al vuelo de un proyectil. En 1691 los hermanos Bernoulli, Leibnitz y Huygens llegaron a la conclusión que tiene la forma de la catenaria [14] y encontraron las ecuaciones de equilibrio para un cable inextensible. Leibnitz uso la teoría de cálculo infinitesimal para derivar la ecuación de esta curva [25].

Los hermanos Bernoulli también formularon la ecuación diferencial general de equilibrio de un elemento cadena bajo varias cargas y que considera los efectos de estiramiento por incorporación de la ley de Hooke. Routh en 1891 resolvió dicha ecuación para una catenaria elástica suspendida simétricamente y compuesta de un material elástico lineal [1], mientras que Feld extendió el trabajo anterior para el caso no simétrico, pero desafortunadamente las coordenadas usadas en ambas soluciones hicieron difícil su aplicación [14].

En 1981 Irvine, para evitar dicha dificultad, adopta un aproximación Lagrangiana en la solución de la catenaria elástica [14] obteniendo una expresión para la matriz de rigidez tangente de un cable elástico no simétrico.

Dentro de las diversas metodologías que han sido propuestas para modelar estructuras de cable, éstas son representadas empleando dos métodos diferentes.

El primer método está basado en funciones de interpolación polinomial para describir la forma y desplazamiento. Este es un método común en el desarrollo de elementos finitos. En este contexto, el elemento recto de dos nodos es el elemento más usado en el modelamiento de cables [25]. Dicho elemento sólo posee rigidez axial y generalmente es aplicable para cables pretensados. Cuando se tienen cables aflojados con una curvatura grande, la representación de su geometría se realiza por un gran número de elementos barra, análisis que se convierte en ineficiente mientras más grados de libertad existan. Cuando se desea modelar al cable aflojado, el módulo de elasticidad se reemplaza por un módulo equivalente, el cual toma en cuenta la flexión del cable; esta rigidez equivalente fue propuesta por Ernst [25]. Cuando la tensión aumenta la flexión disminuye y la rigidez axial aparente aumenta. Generalmente en un cable que tiene relativamente altos esfuerzos y pequeña longitud, el módulo equivalente aproximado es recomendable para obtener buenos resultados [23]. Otro modelo es el elemento isoparamétrico de múltiples nodos, el que se consigue al adicionar

más nodos al elemento finito; lo común son los elementos de tres a cuatro nodos, los cuales usan funciones de interpolación parabólica o cúbica respectivamente. Éstos dan buenos resultados en cables con pequeñas deflexiones; sin embargo, para grandes deflexiones se deben usar más elementos y la continuidad de las derivadas entre elementos no se cumple [11]. La continuidad de la derivada se puede cumplir agregando grados de libertad rotacional a los nodos. Dicho modelo se conoce como elementos curvos con grados de rotación libre; este elemento fue desarrollado por Gambhir y Batchelor [25] quienes usan polinomios cúbicos que describen el desplazamiento y la forma del cable. Por ello los elementos basados en interpolación polinomial son generalmente apropiados para modelar cables con pequeñas deflexiones verticales; por lo mencionado anteriormente, para elementos cable con grandes deflexiones verticales, se emplean muchos elementos para conseguir la geometría curva del cable, lo que demanda un gran número de operaciones aritméticas. Esto influye en el tiempo de solución del problema [11].

El segundo método usa formulaciones analíticas que toman en cuenta los efectos de carga aplicada a lo largo del cable y describe el comportamiento real del cable. En este contexto, el elemento elástico parabólico es generalmente más usado en el análisis de estructuras de cable debido a su forma simple en comparación a la catenaria [25]. Otro modelo es la catenaria elástica asociada, la cual es una extensión del modelo de Irvine, desarrollada por Ahmadi-Kashani y Bell [6]. En este modelo, una carga constante por unidad de longitud se considera aplicada a pesar de la elongación del cable. La elongación positiva es producida por un incremento de la carga total sostenida, siendo este modelo utilizable para cables sujetos a presiones externas como viento, nieve u otro tipo de fuerzas externas [1]. En el presente trabajo se considera un elemento elástico catenario, el cual es exacto debido a que la configuración de equilibrio de un cable colgante es de naturaleza catenaria [23] y este modelo es apropiado para un cable perfectamente flexible sujeto a cargas de peso propio [25]. La formulación del elemento elástico catenario está basada en la solución analítica exacta para la catenaria elástica desarrollada por O'Brien [23]. En este método, sólo un elemento catenario de dos nodos sin uniones internas es necesario para modelar un cable; este elemento puede ser usado para modelar pequeñas y grandes deflexiones verticales y horizontales. De esta manera el cable puede ser representado por un sólo elemento, lo que tiene ciertas ventajas, tales como un reducido número de grados de libertad y el considerar el efecto no lineal elástico del cable en todos los casos [11]. Gracias a las expresiones analíticas se preserva la continuidad a través de los límites del elemento.



Otro modelo usado es el elemento catenario inextensible, el cual es un elemento infinitamente rígido axialmente ( $AE \rightarrow \infty$ ) lo cual evita incrementar su longitud, perfectamente flexible ( $EI_n = 0$ ), libre de rigidez torsional y capaz de soportar sólo fuerzas tensionales [25]. Las aplicaciones basadas en este tipo de elementos encuentran algunas dificultades debido a que la curva que relaciona fuerza y desplazamiento es asintótica, por lo que tienden a experimentar gran inestabilidad numérica, acusando gran dificultad o incluso imposible convergencia [1].

Dentro de los programas más usados en nuestro medio se conocen el programa SAP2000 (CSI), que modela al cable como un elemento cable catenario [5] y el programa MStower V6 (Engineering Systems), que también usa un cable catenario [7].

### 1.3. METODOLOGÍA

La metodología para el desarrollo de la presente tesis es la siguiente:

- Recopilación de información existente sobre no linealidad de cables, no linealidad de elementos armadura, métodos para resolver ecuaciones no lineales y análisis de respuesta no lineal en tesis, informes de suficiencia, libros, revistas, artículos de investigación.
- Luego de obtener la información pertinente se resume toda la información, se elabora el fundamento teórico y seguidamente se realizan algoritmos de solución para los elementos tipo armadura y cable.
- El programa desarrollado se comprueba con modelos y ejemplos ya estudiados en la bibliografía revisada o con programas de reconocido prestigio y uso en nuestro medio.
- Con el programa desarrollado se analizan aplicaciones de estructuras tipo cable y armadura, considerando un comportamiento no lineal elástico y efectos de orden superior.

### 1.4. OBJETIVOS

El objetivo general de la presente tesis es analizar estructuras tipo armadura y cable considerando su no linealidad geométrica, a partir del desarrollo de un elemento cable y un algoritmo de convergencia global propuesto en el presente trabajo.

### 1.4.1. Objetivos específicos

- Determinar la matriz de rigidez no lineal de un elemento cable.
- Determinar la matriz de rigidez no lineal de un elemento armadura.
- Elaborar un algoritmo para resolver el problema global no lineal geométrico.
- Presentar ejemplos aplicados a la Ingeniería Civil resueltos con el algoritmo desarrollado en el ítem anterior, el cual será implementado en MatLab.

## 1.5. HIPÓTESIS

Mediante el enfoque de las expresiones analíticas exactas de la catenaria elástica, podemos desarrollar un elemento cable espacial de dos nodos para realizar el análisis no lineal elástico de estructuras de cables y combinar con matrices de rigidez no lineales de otros elementos como armadura. La ecuación no lineal  $f = Ku$  del conjunto cable - armadura se puede resolver mediante un método numérico incremental e iterativo.

## 1.6. ORGANIZACIÓN DE LA TESIS

El capítulo I trata de las generalidades, estado del arte y presenta los objetivos e hipótesis como parte central de la tesis.

El capítulo II documenta el marco referencial de manera teórica, con el que se deducen las matrices que representan a la armadura y al cable.

En el capítulo III se presentan los algoritmos globales y la estrategia de solución en el rango no lineal de cables y armaduras, así también se propone un algoritmo de inicio para generar la matriz de rigidez del elemento cable.

En el capítulo IV se desarrollan aplicaciones relativas a la Ingeniería Civil con la teoría e implementación numérica desarrolladas en los capítulos II y III respectivamente.

En el capítulo V se indican las principales conclusiones y recomendaciones del presente trabajo.

## CAPÍTULO II

### FUNDAMENTO TEÓRICO

#### 2.1. ELEMENTO TIPO ARMADURA

Las armaduras son estructuras utilizadas en torres, naves industriales, coberturas en grandes luces y otros. Los elementos que componen a una armadura trabajan exclusivamente a fuerza axial, ya sea tensión o compresión.

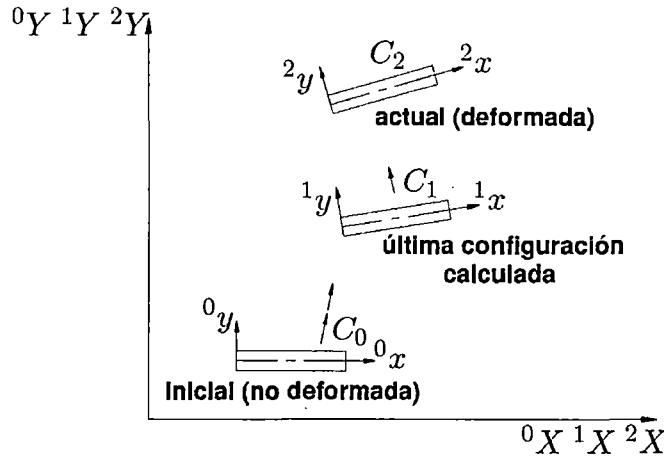
Estos elementos pueden ser de aceros estructurales galvanizados o aleaciones de aluminio; materiales que se utilizan en una variedad de formas y tamaños y son seleccionados por su resistencia, capacidad de soldadura, resistencia a la corrosión, facilidad de trabajo, factores económicos, entre otros factores.

##### 2.1.1. Formulación variacional del elemento tipo armadura

El movimiento de un cuerpo puede ser descrito por tres configuraciones típicas, tal como se muestra en la figura (2.1), en un análisis incremental no lineal: la configuración inicial no deformada  $C_0$ , la configuración última previamente calculada  $C_1$ , y la configuración actual deformada  $C_2$  (deformación final). En la formulación Lagrangiana actualizada, la última configuración conocida  $C_1$  es usada como configuración de referencia para establecer la ecuación del equilibrio del cuerpo en la configuración actual  $C_2$ .

Las ecuaciones de equilibrio de acuerdo al principio de trabajos virtuales pueden ser escritas para el cuerpo en forma incremental no lineal como [27]:

$$\int_V \delta \varepsilon^T E \varepsilon dV + \int_V \delta \eta^T \tau dV + {}^1R = {}^2R \quad (2.1)$$



**Figura 2.1:** Movimiento de un elemento armadura en el espacio. (Fuente: Yang, 1994).

La expresión anterior es la versión linealizada de la ecuación incremental de equilibrio para describir el movimiento del cuerpo de  $C_1$  a  $C_2$  con referencia a los ejes de la configuración inicial no deformada  $C_0$ , y con todos los parámetros físicos referidos a la última configuración calculada  $C_1$ .

Para un elemento armadura, debemos considerar sólo la componente axial de los tensores de esfuerzo y deformación. Denotando el esfuerzo axial inicial por  $\tau$ , el incremento de deformación axial por  $\varepsilon$  y el incremento de esfuerzo axial por  $S$ , el cual se puede expresar como [27]:

$$S = E\varepsilon \quad (2.2)$$

Descomponiendo el incremento de deformación  $\varepsilon$  en su parte lineal ( $e$ ) y parte no lineal ( $\eta$ ), la ecuación puede ser expresada como:

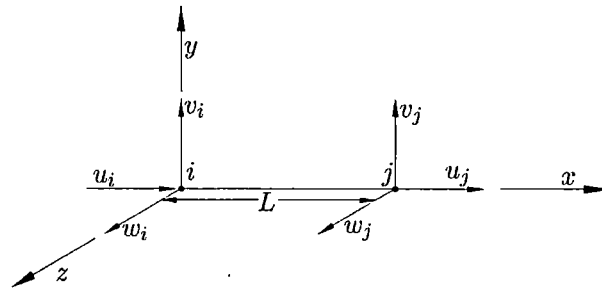
$$\int_V \delta e^T E e dV + \int_V \delta e^T E \eta dV + \int_V \delta \eta^T E e dV + \int_V \delta \eta^T E \eta dV + \int_V \delta \eta^T \tau dV + {}^1R = {}^2R \quad (2.3)$$

Para el elemento armadura espacial como en la figura (2.2), los desplazamientos ( $u, v, w$ ) internos del elemento pueden ser relacionados al desplazamiento ( $u_i, v_i, w_i$ ) y ( $u_j, v_j, w_j$ ) de los dos extremos del elemento usando funciones de interpolación lineal tales como [27]:

$$u = u_i \left(1 - \frac{x}{L}\right) + u_j \left(\frac{x}{L}\right) \quad (2.4a)$$

$$v = v_i \left(1 - \frac{x}{L}\right) + v_j \left(\frac{x}{L}\right) \quad (2.4b)$$

$$w = w_i \left(1 - \frac{x}{L}\right) + w_j \left(\frac{x}{L}\right) \quad (2.4c)$$



**Figura 2.2:** Grados de libertad para un elemento armadura espacial.

Estudios hechos por Jagannathan y otros (1975), en el análisis no lineal de armaduras estructurales espaciales, muestran que se requiere una representación Green-Lagrange de la deformación axial ( $\varepsilon$ ) [19]:

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{du}{dx} \right)^2 + \left( \frac{dv}{dx} \right)^2 + \left( \frac{dw}{dx} \right)^2 \right] = e + \eta \quad (2.5)$$

Cuyos componentes lineal y no lineal para el incremento de deformación  $\varepsilon$  pueden ser escritos como:

$$e = \frac{du}{dx} = \frac{\Delta u}{L} \quad (2.6a)$$

$$\eta = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{du}{dx} \right)^2 + \left( \frac{dv}{dx} \right)^2 + \left( \frac{dw}{dx} \right)^2 \right] = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\Delta u}{L} \right)^2 + \left( \frac{\Delta v}{L} \right)^2 + \left( \frac{\Delta w}{L} \right)^2 \right] \quad (2.6b)$$

Donde:

$$\Delta u = u_j - u_i \quad (2.7a)$$

$$\Delta v = v_j - v_i \quad (2.7b)$$

$$\Delta w = w_j - w_i \quad (2.7c)$$

El vector de desplazamiento nodal para el elemento armadura es:

$$\mathbf{u}^T = [ u_i \quad v_i \quad w_i \quad u_j \quad v_j \quad w_j ] \quad (2.8)$$

Los vectores de fuerza del elemento en  $C_1$  y  $C_2$  son respectivamente:

$${}^1\mathbf{f}^T = [ {}^1F_{xi} \quad {}^1F_{yi} \quad {}^1F_{zi} \quad {}^1F_{xj} \quad {}^1F_{yj} \quad {}^1F_{zj} ] \quad (2.9)$$

$${}^2\mathbf{f}^T = [ {}^2F_{xi} \quad {}^2F_{yi} \quad {}^2F_{zi} \quad {}^2F_{xj} \quad {}^2F_{yj} \quad {}^2F_{zj} ] \quad (2.10)$$

Para un elemento armadura en equilibrio en  $C_1$ , todas las fuerzas de corte transversal desaparecen, es decir:

$${}^1F_{yi} = {}^1F_{zi} = {}^1F_{yj} = {}^1F_{zj} = 0 \quad (2.11)$$

Y las fuerzas axiales en los dos extremos de la barra son iguales en magnitud, pero opuestas en signo:

$${}^1F_{xj} = -{}^1F_{xi} = {}^1F \quad (2.12)$$

Se supone que sólo actúan cargas concentradas en los extremos del elemento armadura, mientras que las cargas distribuidas sólo se consideran si son reemplazadas por fuerzas nodales equivalentes.

Cada uno de los términos de la ecuación (2.3), puede ser expresado como:

$$\int_V \delta \mathbf{e}^T E \mathbf{e} dV = \int_V E \frac{\Delta u}{L} \delta \left( \frac{\Delta u}{L} \right) dV \quad (2.13)$$

$$\int_V \delta \mathbf{e}^T E \boldsymbol{\eta} dV = \int_V \frac{1}{2} E \left( \frac{\Delta u^2}{L^2} + \frac{\Delta v^2}{L^2} + \frac{\Delta w^2}{L^2} \right) \delta \left( \frac{\Delta u}{L} \right) dV \quad (2.14)$$

$$\int_V \delta \boldsymbol{\eta}^T E \mathbf{e} dV = \int_V E \frac{\Delta u}{L} E \left[ \frac{\Delta u}{L} \delta \left( \frac{\Delta u}{L} \right) + \frac{\Delta v}{L} \delta \left( \frac{\Delta v}{L} \right) + \frac{\Delta w}{L} \delta \left( \frac{\Delta w}{L} \right) \right] dV \quad (2.15)$$

$$\int_V \delta \boldsymbol{\eta}^T E \boldsymbol{\eta} dV = \int_V \frac{1}{2} E \left( \frac{\Delta u^2}{L^2} + \frac{\Delta v^2}{L^2} + \frac{\Delta w^2}{L^2} \right) \left[ \frac{\Delta u}{L} \delta \left( \frac{\Delta u}{L} \right) + \frac{\Delta v}{L} \delta \left( \frac{\Delta v}{L} \right) + \frac{\Delta w}{L} \delta \left( \frac{\Delta w}{L} \right) \right] dV \quad (2.16)$$

$$\int_V \delta \boldsymbol{\eta}^T \boldsymbol{\tau} dV = \int_L {}^1F \left[ \frac{\Delta u}{L} \delta \left( \frac{\Delta u}{L} \right) + \frac{\Delta v}{L} \delta \left( \frac{\Delta v}{L} \right) + \frac{\Delta w}{L} \delta \left( \frac{\Delta w}{L} \right) \right] dx \quad (2.17)$$

$${}^1R = \int_s \delta \mathbf{u}_q^T {}^1\boldsymbol{\tau}_q dS \quad (2.18)$$

$${}^2R = \int_s \delta \mathbf{u}_q^T {}^2\boldsymbol{\tau}_q dS \quad (2.19)$$

Donde  $q$  se refiere a las componentes en los nodos  $i$  y  $j$ .

**Teorema 2.1.1.** La ecuación variacional (2.13) se expresa en forma matricial como:

$$\int_V \delta \mathbf{e}^T E \mathbf{e} dV = \delta \mathbf{u}^T \mathbf{k}_e \mathbf{u} \quad (2.20)$$

*Demostración.* Al desarrollar la primera ecuación (2.13):

$$\int_V \delta \mathbf{e}^T E \mathbf{e} dV = \int_V E \frac{\Delta u}{L} \delta \left( \frac{\Delta u}{L} \right) dV$$

Es posible expresar lo anterior en función del diferencial de longitud, debido a que  $dV = A dx$  y al sustituir (2.7a)

$$= \int_L \frac{EA}{L} \frac{\Delta u}{L} \delta(\Delta u) dx = \frac{EA}{L} \frac{\Delta u}{L} \delta(u_j - u_i) \int_L dx$$

Al integrar:

$$= \frac{EA}{L} \Delta u (\delta u_j - \delta u_i) = \frac{EA}{L} (-\Delta u \delta u_i + \Delta u \delta u_j)$$

Al expresar como producto escalar:

$$= \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \delta u_i & \delta v_i & \delta w_i & \delta u_j & \delta v_j & \delta w_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\Delta u \\ 0 \\ 0 \\ \Delta u \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{EA}{L} \delta \mathbf{u}^T \begin{bmatrix} u_i - u_j \\ 0 \\ 0 \\ -u_i + u_j \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Lo anterior se puede expresar como un producto entre una matriz y el vector de desplazamientos  $\mathbf{u}$ :

$$= \delta \mathbf{u}^T \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ u_j \\ v_j \\ w_j \end{bmatrix}$$

Entonces:

$$\int_V \delta \mathbf{e}^T E \mathbf{e} dV = \delta \mathbf{u}^T \mathbf{k}_e \mathbf{u}$$

donde:

$k_e$  es la matriz de rigidez elástica, expresada como:

$$k_e = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

□

**Teorema 2.1.2.** La ecuación variacional (2.17) se expresa en forma matricial como:

$$\int_V \delta \boldsymbol{\eta}^T \boldsymbol{\tau} dV = \delta \mathbf{u}^T k_g \mathbf{u} \quad (2.22)$$

*Demostración.* De la ecuación (2.17):

$$\begin{aligned} \int_V \delta \boldsymbol{\eta}^T \boldsymbol{\tau} dV &= \int_L {}^1F \left[ \frac{\Delta u}{L} \delta \left( \frac{\Delta u}{L} \right) + \frac{\Delta v}{L} \delta \left( \frac{\Delta v}{L} \right) + \frac{\Delta w}{L} \delta \left( \frac{\Delta w}{L} \right) \right] dx \\ &= \frac{{}^1F}{L^2} [\Delta u \delta(\Delta u) + \Delta v \delta(\Delta v) + \Delta w \delta(\Delta w)] \int_L dx \end{aligned}$$

Al integrar y sustituir (2.7a), (2.7b) y (2.7c):

$$\begin{aligned} &= \frac{{}^1F}{L} [\Delta u \delta(u_j - u_i) + \Delta v \delta(v_j - v_i) + \Delta w \delta(w_j - w_i)] \\ &= \frac{{}^1F}{L} [-\Delta u \delta u_i - \Delta v \delta v_i - \Delta w \delta w_i + \Delta u \delta u_j + \Delta v \delta v_j + \Delta w \delta w_j] \end{aligned}$$

Al expresar como producto escalar:

$$= \frac{{}^1F}{L} \begin{bmatrix} \delta u_i & \delta v_i & \delta w_i & \delta u_j & \delta v_j & \delta w_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\Delta u \\ -\Delta v \\ -\Delta w \\ \Delta u \\ \Delta v \\ \Delta w \end{bmatrix} = \delta \mathbf{u}^T \frac{{}^1F}{L} \begin{bmatrix} u_i - u_j \\ v_i - v_j \\ w_i - w_j \\ -u_i + u_j \\ -v_i + v_j \\ -w_i + w_j \end{bmatrix}$$



Se puede expresar como un producto de una matriz y el vector de desplazamientos  $u$ :

$$= \delta u^T \frac{{}^1F}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ u_j \\ v_j \\ w_j \end{bmatrix}$$

Entonces:

$$\int_V \delta \eta^T \tau dV = \delta u^T k_g u$$

donde:

$k_g$  es la matriz de rigidez geométrica:

$$k_g = \frac{{}^1F}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

□

A continuación se resuelve las expresiones de las matrices de rigidez no lineal de orden superior:

**Teorema 2.1.3.** La ecuación variacional (2.14) se expresa en forma matricial como:

$$\int_V \delta e^T E \eta dV = \delta u^T s_1 u \quad (2.24)$$

*Demostración.* De la ecuación (2.14)

$$\int_V \delta e^T E \eta dV = \int_V \frac{1}{2} E \left( \frac{\Delta u^2}{L^2} + \frac{\Delta v^2}{L^2} + \frac{\Delta w^2}{L^2} \right) \delta \left( \frac{\Delta u}{L} \right) dV$$

Al sustituir  $dV$  en relación a  $Adx$ :

$$= \frac{1}{2} EA \left( \frac{\Delta u^2}{L^2} + \frac{\Delta v^2}{L^2} + \frac{\Delta w^2}{L^2} \right) \delta \left( \frac{\Delta u}{L} \right) \int_L dx$$

Al integrar en el dominio de la longitud y al reemplazar (2.7a):

$$= \frac{EA}{2L^2} (\Delta u^2 + \Delta v^2 + \Delta w^2) \delta(u_j - u_i)$$

Al acomodar convenientemente:

$$= \frac{EA}{2L^2} \{ -(\Delta u^2 + \Delta v^2 + \Delta w^2) \delta u_i + (\Delta u^2 + \Delta v^2 + \Delta w^2) \delta u_j \}$$

Si se expresa en forma de producto escalar:

$$= \frac{EA}{2L^2} \begin{bmatrix} \delta u_i & \delta v_i & \delta w_i & \delta u_j & \delta v_j & \delta w_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -(\Delta u^2 + \Delta v^2 + \Delta w^2) \\ 0 \\ 0 \\ (\Delta u^2 + \Delta v^2 + \Delta w^2) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Al sustituir (2.7a), (2.7b) y (2.7c) en una parte del producto y al multiplicar cada uno de los términos:

$$= \delta \mathbf{u}^T \frac{EA}{2L^2} \begin{bmatrix} u_i \Delta u + v_i \Delta v + w_i \Delta w - u_j \Delta u - v_j \Delta v - w_j \Delta w \\ 0 \\ 0 \\ -u_i \Delta u - v_i \Delta v - w_i \Delta w + u_j \Delta u + v_j \Delta v + w_j \Delta w \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Lo anterior se expresa como producto de una matriz y el vector de desplazamientos  $\mathbf{u}$ :

$$= \delta \mathbf{u}^T \frac{EA}{2L^2} \begin{bmatrix} \Delta u & \Delta v & \Delta w & -\Delta u & -\Delta v & -\Delta w \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\Delta u & -\Delta v & -\Delta w & \Delta u & \Delta v & \Delta w \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ u_j \\ v_j \\ w_j \end{bmatrix}$$

Entonces:

$$\int_V \delta \mathbf{e}^T E \boldsymbol{\eta} dV = \delta \mathbf{u}^T \mathbf{s}_1 \mathbf{u}$$

donde:

$$s_1 = \frac{EA}{2L^2} \begin{bmatrix} \Delta u & \Delta v & \Delta w & -\Delta u & -\Delta v & -\Delta w \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\Delta u & -\Delta v & -\Delta w & \Delta u & \Delta v & \Delta w \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

□

**Teorema 2.1.4.** La ecuación variacional (2.15) se expresa en forma matricial como:

$$\int_V \delta \eta^T E e dV = \delta u^T s_2 u \quad (2.26)$$

*Demostración.* De la ecuación (2.15)

$$\int_V \delta \eta^T E e dV = \int_V E \frac{\Delta u}{L} E \left[ \frac{\Delta u}{L} \delta \left( \frac{\Delta u}{L} \right) + \frac{\Delta v}{L} \delta \left( \frac{\Delta v}{L} \right) + \frac{\Delta w}{L} \delta \left( \frac{\Delta w}{L} \right) \right] dV$$

Al cambiar de  $dV$  a  $dx$ , mediante la relación  $dV = A dx$ :

$$= \frac{EA \Delta u}{L^2} \frac{\Delta u}{L} [\Delta u \delta (\Delta u) + \Delta v \delta (\Delta v) + \Delta w \delta (\Delta w)] \int_L dx$$

Al integrar y reemplazar (2.7a), (2.7b) y (2.7c):

$$= \frac{EA}{L^2} \Delta u [\Delta u \delta (u_j - u_i) + \Delta v \delta (v_j - v_i) + \Delta w \delta (w_j - w_i)]$$

Al multiplicar todos los términos:

$$= \frac{EA}{L^2} [-\Delta u^2 \delta u_i - \Delta u \Delta v \delta v_i - \Delta u \Delta w \delta w_i + \Delta u^2 \delta u_j + \Delta u \Delta v \delta v_j + \Delta u \Delta w \delta w_j]$$

Se puede expresar en forma de producto escalar como:

$$= \frac{EA}{L^2} \begin{bmatrix} \delta u_i & \delta v_i & \delta w_i & \delta u_j & \delta v_j & \delta w_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\Delta u^2 \\ -\Delta u \Delta v \\ -\Delta u \Delta w \\ \Delta u^2 \\ \Delta u \Delta v \\ \Delta u \Delta w \end{bmatrix}$$

Al multiplicar y dividir en 2:

$$= \delta \mathbf{u}^T \frac{EA}{2L^2} \begin{bmatrix} -2\Delta u^2 \\ -2\Delta u \Delta v \\ -2\Delta u \Delta w \\ 2\Delta u^2 \\ 2\Delta u \Delta v \\ 2\Delta u \Delta w \end{bmatrix}$$

Al sustituir convenientemente (2.7a), (2.7b) y (2.7c):

$$= \delta \mathbf{u}^T \frac{EA}{2L^2} \begin{bmatrix} 2u_i \Delta u - 2u_j \Delta u \\ u_i \Delta v + v_i \Delta u - u_j \Delta v - v_j \Delta u \\ u_i \Delta w + w_i \Delta u - u_j \Delta w - w_j \Delta u \\ -2u_i \Delta u + 2u_j \Delta u \\ -u_i \Delta v - v_i \Delta u + u_j \Delta v + v_j \Delta u \\ -u_i \Delta w - w_i \Delta u + u_j \Delta w + w_j \Delta u \end{bmatrix}$$

Es posible expresar como producto de una matriz y un vector de desplazamiento  $\mathbf{u}$ :

$$= \delta \mathbf{u}^T \frac{EA}{2L^2} \begin{bmatrix} 2\Delta u & 0 & 0 & -2\Delta u & 0 & 0 \\ \Delta v & \Delta u & 0 & -\Delta v & -\Delta u & 0 \\ \Delta w & 0 & \Delta u & -\Delta w & 0 & -\Delta u \\ -2\Delta u & 0 & 0 & 2\Delta u & 0 & 0 \\ -\Delta v & -\Delta u & 0 & \Delta v & \Delta u & 0 \\ -\Delta w & 0 & -\Delta u & \Delta w & 0 & \Delta u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ u_j \\ v_j \\ w_j \end{bmatrix}$$

Entonces:

$$\int_V \delta \boldsymbol{\eta}^T E \mathbf{e} dV = \delta \mathbf{u}^T \mathbf{s}_2 \mathbf{u}$$

donde:

$$\mathbf{s}_2 = \frac{EA}{2L^2} \begin{bmatrix} 2\Delta u & 0 & 0 & -2\Delta u & 0 & 0 \\ \Delta v & \Delta u & 0 & -\Delta v & -\Delta u & 0 \\ \Delta w & 0 & \Delta u & -\Delta w & 0 & -\Delta u \\ -2\Delta u & 0 & 0 & 2\Delta u & 0 & 0 \\ -\Delta v & -\Delta u & 0 & \Delta v & \Delta u & 0 \\ -\Delta w & 0 & -\Delta u & \Delta w & 0 & \Delta u \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

□

**Teorema 2.1.5.** La ecuación variacional (2.16) se expresa en forma matricial como:

$$\int_V \delta \boldsymbol{\eta}^T E \boldsymbol{\eta} dV = \delta \mathbf{u}^T \mathbf{s}_3 \mathbf{u} \quad (2.28)$$

*Demostración.* De la ecuación (2.16)

$$\int_V \delta \boldsymbol{\eta}^T E \boldsymbol{\eta} dV = \int_V \frac{1}{2} E \left( \frac{\Delta u^2}{L^2} + \frac{\Delta v^2}{L^2} + \frac{\Delta w^2}{L^2} \right) \left[ \frac{\Delta u}{L} \delta \left( \frac{\Delta u}{L} \right) + \frac{\Delta v}{L} \delta \left( \frac{\Delta v}{L} \right) + \frac{\Delta w}{L} \delta \left( \frac{\Delta w}{L} \right) \right] dV$$

Al expresar el diferencial de volumen  $dV$  en relación al diferencial de longitud  $dL$  como  $dV = A dx$ , se tiene:

$$= \frac{EA}{2L^4} (\Delta u^2 + \Delta v^2 + \Delta w^2) [\Delta u \delta (\Delta u) + \Delta v \delta (\Delta v) + \Delta w \delta (\Delta w)] \int_L dx$$

Al sustituir (2.7a), (2.7b) y (2.7c):

$$= \frac{EA}{2L^3} (\Delta u^2 + \Delta v^2 + \Delta w^2) [\Delta u \delta (u_j - u_i) + \Delta v \delta (v_j - v_i) + \Delta w \delta (w_j - w_i)]$$

Al multiplicar término a término:

$$= \frac{EA}{2L^3} (\Delta u^2 + \Delta v^2 + \Delta w^2) [-\delta u_i \Delta u - \delta v_i \Delta v - \delta w_i \Delta w + \delta u_j \Delta u + \delta v_j \Delta v + \delta w_j \Delta w]$$

Se expresa como producto escalar:

$$= \frac{EA}{2L^3} (\Delta u^2 + \Delta v^2 + \Delta w^2) \begin{bmatrix} \delta u_i & \delta v_i & \delta w_i & \delta u_j & \delta v_j & \delta w_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\Delta u \\ -\Delta v \\ -\Delta w \\ \Delta u \\ \Delta v \\ \Delta w \end{bmatrix}$$

Al introducir  $\Delta u^2 + \Delta v^2 + \Delta w^2$  al vector:

$$= \delta \mathbf{u}^T \frac{EA}{2L^3} \begin{bmatrix} -\Delta u (\Delta u^2 + \Delta v^2 + \Delta w^2) \\ -\Delta v (\Delta u^2 + \Delta v^2 + \Delta w^2) \\ -\Delta w (\Delta u^2 + \Delta v^2 + \Delta w^2) \\ \Delta u (\Delta u^2 + \Delta v^2 + \Delta w^2) \\ \Delta v (\Delta u^2 + \Delta v^2 + \Delta w^2) \\ \Delta w (\Delta u^2 + \Delta v^2 + \Delta w^2) \end{bmatrix}$$

Al acomodar convenientemente:

$$= \delta \mathbf{u}^T \frac{EA}{6L^3} \begin{bmatrix} -\Delta u (3\Delta u^2 + \Delta v^2 + \Delta w^2) - 2\Delta u \Delta v^2 - 2\Delta u \Delta w^2 \\ -\Delta v (\Delta u^2 + 3\Delta v^2 + \Delta w^2) - 2\Delta v \Delta u^2 - 2\Delta v \Delta w^2 \\ -\Delta w (\Delta u^2 + \Delta v^2 + 3\Delta w^2) - 2\Delta w \Delta u^2 - 2\Delta w \Delta v^2 \\ \Delta u (3\Delta u^2 + \Delta v^2 + \Delta w^2) + 2\Delta u \Delta v^2 + 2\Delta u \Delta w^2 \\ \Delta v (\Delta u^2 + 3\Delta v^2 + \Delta w^2) + 2\Delta v \Delta u^2 + 2\Delta v \Delta w^2 \\ \Delta w (\Delta u^2 + \Delta v^2 + 3\Delta w^2) + 2\Delta w \Delta u^2 + 2\Delta w \Delta v^2 \end{bmatrix}$$

Al reemplazar (2.7a), (2.7b) y (2.7c) en algunos casos:

$$= \delta \mathbf{u}^T \frac{EA}{6L^3} \begin{bmatrix} -(u_j - u_i) (3\Delta u^2 + \Delta v^2 + \Delta w^2) - 2(v_j - v_i) \Delta u \Delta v - 2(w_j - w_i) \Delta u \Delta w \\ -(v_j - v_i) (\Delta u^2 + 3\Delta v^2 + \Delta w^2) - 2(u_j - u_i) \Delta u \Delta v - 2(w_j - w_i) \Delta v \Delta w \\ -(w_j - w_i) (\Delta u^2 + \Delta v^2 + 3\Delta w^2) - 2(u_j - u_i) \Delta u \Delta w - 2(v_j - v_i) \Delta v \Delta w \\ (u_j - u_i) (3\Delta u^2 + \Delta v^2 + \Delta w^2) + 2(v_j - v_i) \Delta u \Delta v + 2(w_j - w_i) \Delta u \Delta w \\ (v_j - v_i) (\Delta u^2 + 3\Delta v^2 + \Delta w^2) + 2(u_j - u_i) \Delta u \Delta v + 2(w_j - w_i) \Delta v \Delta w \\ (w_j - w_i) (\Delta u^2 + \Delta v^2 + 3\Delta w^2) + 2(u_j - u_i) \Delta u \Delta w + 2(v_j - v_i) \Delta v \Delta w \end{bmatrix}$$

Al multiplicar y agrupar según los desplazamientos:

$$= \delta \mathbf{u}^T \frac{EA}{6L^3} \begin{bmatrix} u_i (3\Delta u^2 + \Delta v^2 + \Delta w^2) + v_i (2\Delta u \Delta v) + w_i (2\Delta u \Delta w) - u_j (3\Delta u^2 + \Delta v^2 + \Delta w^2) - v_j (2\Delta u \Delta v) - w_j (2\Delta u \Delta w) \\ u_i (2\Delta u \Delta v) + v_i (\Delta u^2 + 3\Delta v^2 + \Delta w^2) + w_i (2\Delta v \Delta w) - u_j (2\Delta u \Delta v) - v_j (\Delta u^2 + 3\Delta v^2 + \Delta w^2) - w_j (2\Delta v \Delta w) \\ u_i (2\Delta u \Delta w) + v_i (2\Delta v \Delta w) + w_i (\Delta u^2 + \Delta v^2 + 3\Delta w^2) - u_j (2\Delta u \Delta w) - v_j (2\Delta v \Delta w) - w_j (\Delta u^2 + \Delta v^2 + 3\Delta w^2) \\ -u_i (3\Delta u^2 + \Delta v^2 + \Delta w^2) - v_i (2\Delta u \Delta v) - w_i (2\Delta u \Delta w) + u_j (3\Delta u^2 + \Delta v^2 + \Delta w^2) + v_j (2\Delta u \Delta v) + w_j (2\Delta u \Delta w) \\ -u_i (2\Delta u \Delta v) - v_i (\Delta u^2 + 3\Delta v^2 + \Delta w^2) - w_i (2\Delta v \Delta w) + u_j (2\Delta u \Delta v) + v_j (\Delta u^2 + 3\Delta v^2 + \Delta w^2) + w_j (2\Delta v \Delta w) \\ -u_i (2\Delta u \Delta w) - v_i (2\Delta v \Delta w) - w_i (\Delta u^2 + \Delta v^2 + 3\Delta w^2) + u_j (2\Delta u \Delta w) + v_j (2\Delta v \Delta w) + w_j (\Delta u^2 + \Delta v^2 + 3\Delta w^2) \end{bmatrix}$$

Es posible expresar en forma de una multiplicación de una matriz con el vector de desplazamiento  $\mathbf{u}$ .

$$= \delta \mathbf{u}^T \frac{EA}{6L^3} \begin{bmatrix} 3\Delta u^2 + \Delta v^2 + \Delta w^2 & 2\Delta u \Delta v & 2\Delta u \Delta w & -(3\Delta u^2 + \Delta v^2 + \Delta w^2) & -(2\Delta u \Delta v) & -(2\Delta u \Delta w) \\ 2\Delta u \Delta v & \Delta u^2 + 3\Delta v^2 + \Delta w^2 & 2\Delta v \Delta w & -(2\Delta u \Delta v) & -(\Delta u^2 + 3\Delta v^2 + \Delta w^2) & -(2\Delta v \Delta w) \\ 2\Delta u \Delta w & 2\Delta v \Delta w & \Delta u^2 + \Delta v^2 + 3\Delta w^2 & -(2\Delta u \Delta w) & -(2\Delta v \Delta w) & -(\Delta u^2 + \Delta v^2 + 3\Delta w^2) \\ -(3\Delta u^2 + \Delta v^2 + \Delta w^2) & -(2\Delta u \Delta v) & -(2\Delta u \Delta w) & 3\Delta u^2 + \Delta v^2 + \Delta w^2 & 2\Delta u \Delta v & 2\Delta u \Delta w \\ -(2\Delta u \Delta v) & -(\Delta u^2 + 3\Delta v^2 + \Delta w^2) & -(2\Delta v \Delta w) & 2\Delta u \Delta v & \Delta u^2 + 3\Delta v^2 + \Delta w^2 & 2\Delta v \Delta w \\ -(2\Delta u \Delta w) & -(2\Delta v \Delta w) & -(\Delta u^2 + \Delta v^2 + 3\Delta w^2) & 2\Delta u \Delta w & 2\Delta v \Delta w & \Delta u^2 + \Delta v^2 + 3\Delta w^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ u_j \\ v_j \\ w_j \end{bmatrix}$$

Entonces:

$$\int_V \delta \boldsymbol{\eta}^T \mathbf{E} \boldsymbol{\eta} dV = \delta \mathbf{u}^T \mathbf{s}_3 \mathbf{u}$$

donde:

$$\mathbf{s}_3 = \frac{EA}{6L^3} \begin{bmatrix} h & -h \\ -h & h \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

En la cual:

$$h = \begin{bmatrix} 3\Delta u^2 + \Delta v^2 + \Delta w^2 & 2\Delta u\Delta v & 2\Delta u\Delta w \\ 2\Delta u\Delta v & \Delta u^2 + 3\Delta v^2 + \Delta w^2 & 2\Delta v\Delta w \\ 2\Delta u\Delta w & 2\Delta v\Delta w & \Delta u^2 + \Delta v^2 + 3\Delta w^2 \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

□

**Teorema 2.1.6.** Las ecuaciones variacionales (2.18) y (2.19) se expresan en forma matricial como:

$${}^1R = \delta \mathbf{u}^T {}^1\mathbf{f} \quad (2.31)$$

$${}^2R = \delta \mathbf{u}^T {}^2\mathbf{f} \quad (2.32)$$

*Demostración.* Respecto a la ecuaciones (2.18) y (2.19):

$${}^1R = \int_s \delta \mathbf{u}_q^T {}^1\boldsymbol{\tau}_q dS$$

Debido a que  $q$  se refiere a las componentes de los nodos  $i$  y  $j$ , entonces se puede expresar como:

$$= (\delta u_i {}^1\tau_{xi} + \delta v_i {}^1\tau_{yi} + \delta w_i {}^1\tau_{zi} + \delta u_j {}^1\tau_{xj} + \delta v_j {}^1\tau_{yj} + \delta w_j {}^1\tau_{zj}) \int_s dS$$

Al integrar en la superficie se obtiene el área transversal:  $\int_s dS = A$ ; además como  ${}^1\boldsymbol{\tau}_q A$  representa a la fuerza superficial  ${}^1\mathbf{F}_q$ , entonces se tiene:

$$= \delta u_i {}^1F_{xi} + \delta v_i {}^1F_{yi} + \delta w_i {}^1F_{zi} + \delta u_j {}^1F_{xj} + \delta v_j {}^1F_{yj} + \delta w_j {}^1F_{zj}$$

Se puede expresar lo anterior como producto escalar:

$$= \begin{bmatrix} \delta u_i & \delta v_i & \delta w_i & \delta u_j & \delta v_j & \delta w_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^1F_{xi} \\ {}^1F_{yi} \\ {}^1F_{zi} \\ {}^1F_{xj} \\ {}^1F_{yj} \\ {}^1F_{zj} \end{bmatrix}$$

Entonces:

$${}^1R = \delta \mathbf{u}^T {}^1\mathbf{f}$$

De manera análoga para  ${}^2R$ , tenemos:

$${}^2R = \delta u^T {}^2f$$

□

Luego de desarrollar cada término de la expresión (2.3), se reemplazan las ecuaciones (2.20), (2.22), (2.24), (2.26), (2.28), (2.31) y (2.32) en dicha expresión:

$$\delta u^T k_e u + \delta u^T k_g u + u^T s_1 u + \delta u^T s_2 u + \delta u^T s_3 u + \delta u^T {}^1f = \delta u^T {}^2f$$

Al agrupar convenientemente:

$$\delta u^T ((k_e + k_g + s_1 + s_2 + s_3)u + {}^1f - {}^2f) = 0$$

Debido a que la expresión es válida para todo  $\delta u^T$ , entonces la ecuación de equilibrio que relaciona el estado último y actual de la armadura, se puede expresar como:

$$(k_e + k_g + s_1 + s_2 + s_3)u + {}^1f = {}^2f \quad (2.33)$$

## 2.2. ELEMENTO TIPO CABLE

Los cables son elementos estructurales muy flexibles y tienen un comportamiento no lineal bajo cargas estáticas [10]. Mientras más largos sean los cables, estos presentan una inherente flexibilidad que involucra grandes desplazamientos y son dominados por una geometría no lineal [19].

Este comportamiento no lineal es a causa de la variación de su rigidez por efectos del cambio en su tensión. Los cables sólo pueden realizar trabajo en estado de tensión, con toda la sección en este estado, no ofrecen resistencia a la flexión y fuerzas de compresión.

En ciertas estructuras como torres ventadas, los cables son la primera fuente de no linealidad. Éstos sirven para proporcionar un soporte lateral a la torre y constituyen un elemento que aporta rigidez al sistema estructural. Debido a la flexibilidad de los cables de soporte, las torres ventadas son muy flexibles, con desplazamientos laterales relativamente grandes, lo que hace a la torre ventada susceptible a excitaciones dinámicas del viento y efectos significativos de segundo orden, conocidos como efectos  $P - \Delta$  [24].



Para un adecuado proceso constructivo, los cables son seleccionados de acuerdo a sus esfuerzos de fluencia. Los cables son normalmente pretensados con el fin de eliminar el aflojamiento.

### 2.2.1. Hipótesis del elemento tipo cable

Las consideraciones básicas a tomar en cuenta son:

- La sección transversal es constante antes y después de la deformación del elemento.
- El elemento es supuesto como perfectamente flexible, con sólo fuerzas de tensión.
- La masa del elemento cable se conserva después de la deformación, variando el peso por unidad de longitud después de cada elongación del cable.

### 2.2.2. Formulación Lagrangiana del elemento tipo cable

Con base en la formulación Lagrangiana, se toma en cuenta el efecto geométrico no lineal causado por un gran desplazamiento.

Se considera al cable de una longitud inicial  $L_o$ , suspendido entre dos apoyos fijos  $I$  y  $J$ , los cuales tienen coordenadas cartesianas  $(0, 0, 0)$  y  $(l_x, l_y, l_z)$  respectivamente. Así, las proyecciones horizontales de su longitud son  $l_x$  y  $l_y$ , mientras que la proyección vertical relativa entre ambos extremos es  $l_z$ . Sea el punto  $P$  un punto interno del elemento cable. Cuando el cable se deforma por acción de su peso propio ( $wL_o$ ), este punto  $P$  pasa a ocupar una nueva posición descrita por las coordenadas cartesianas  $(x, y, z)$  y la coordenada Lagrangiana  $p$ , lo que se define como la longitud del segmento deformado comprendido entre el origen de coordenadas y el punto sobre la geometría deformada que corresponde al punto  $P$  en la geometría original [20] tal como se muestra en la figura (2.3).

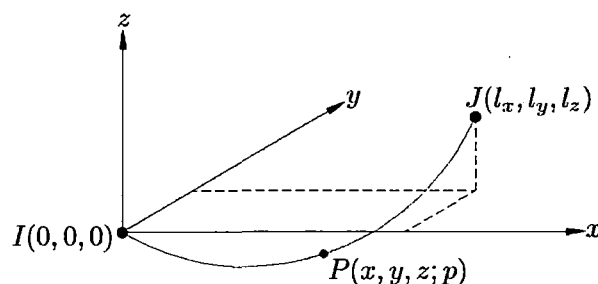


Figura 2.3: Coordenadas para la catenaria elástica.

La restricción geométrica que debe cumplirse por equilibrio de fuerzas (2.35a), (2.35b) y (2.35c) es:

$$\left(\frac{dx}{dp}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dp}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dp}\right)^2 = 1 \quad (2.34)$$

En la configuración inicial de equilibrio, el cable está sujeto a seis fuerzas nodales  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$ ,  $F_4$ ,  $F_5$  y  $F_6$ ; donde las primeras tres se localizan en el nodo  $I$  tal como se aprecia en la figura (2.4)

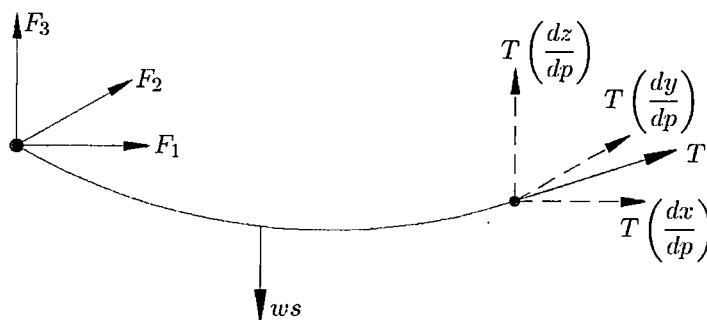


Figura 2.4: Fuerzas en un segmento del perfil deformado de cable.

De la figura (2.4), el equilibrio de las fuerzas para  $T$  es:

$$T \left(\frac{dx}{dp}\right) = -F_1 \quad (2.35a)$$

$$T \left(\frac{dy}{dp}\right) = -F_2 \quad (2.35b)$$

$$T \left(\frac{dz}{dp}\right) = -F_3 + ws \quad (2.35c)$$

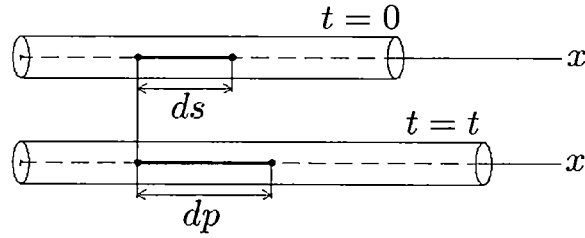
La tensión ( $T$ ) del cable en la coordenada Lagrangiana  $s$ , está expresada como:

$$T(s) = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + (ws - F_3)^2} \quad (2.36)$$

Para medir la deformación, se usa el concepto de deformación de Cauchy o deformación ingenieril:

$$\varepsilon = \left(\frac{dp}{ds} - 1\right) \quad (2.37)$$

Suponiendo que la longitud de una línea material en un entorno diferencial es igual a  $ds$  en la configuración de referencia y a  $dp$  en la configuración actual, tal como lo indica la figura (2.5) [18].



**Figura 2.5:** Línea de material definida entre dos partículas de un cuerpo en un espacio.  
(Fuente: Linero y Garzón, 2010).

La tensión del cable  $T$ , está relacionada con la deformación  $\epsilon$  y a la ley de Hooke:

$$T = EA\epsilon = EA \left( \frac{dp - ds}{ds} \right) = EA \left( \frac{dp}{ds} - 1 \right) \quad (2.38)$$

Donde  $E$  es módulo de elasticidad,  $A$  es el área transversal constante en el perfil no deformado.

Las condiciones en los extremos de los nodos son:

$$x = 0, y = 0, z = 0, p = 0 \text{ en } s = 0 \quad (2.39a)$$

$$x = l_x, y = l_y, z = l_z, p = L \text{ en } s = L_o \quad (2.39b)$$

Donde  $L$  es la longitud del cable en el perfil deformado.

Las coordenadas Lagrangianas  $s$  y las coordenadas cartesianas se relacionan como se indica en las ecuaciones (2.40a), (2.40b) y(2.40c):

$$x(s) = \int_s \frac{dx}{ds} ds = \int_s \frac{dx}{dp} \frac{dp}{ds} ds \quad (2.40a)$$

$$y(s) = \int_s \frac{dy}{ds} ds = \int_s \frac{dy}{dp} \frac{dp}{ds} ds \quad (2.40b)$$

$$z(s) = \int_s \frac{dz}{ds} ds = \int_s \frac{dz}{dp} \frac{dp}{ds} ds \quad (2.40c)$$

**Teorema 2.2.1.** Las coordenadas cartesianas  $x$  e  $y$  en función de la longitud del segmento deformado son:

$$x(s) = \frac{-F_1 s}{EA} - \frac{F_1}{w} \left\{ \ln \left( \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + (ws - F_3)^2} + ws - F_3 \right) - \ln \left( \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + F_3^2} - F_3 \right) \right\} \quad (2.41)$$

$$y(s) = \frac{-F_2 s}{EA} - \frac{F_2}{w} \left\{ \ln \left( \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + (ws - F_3)^2} + ws - F_3 \right) - \ln \left( \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + F_3^2} - F_3 \right) \right\} \quad (2.42)$$

*Demostración.* Para desarrollar las expresiones de  $x$  e  $y$ , primero se expresa  $\frac{dx}{dp}$  y  $\frac{dp}{ds}$  en función de las otras variables de las ecuaciones (2.35a) y (2.38) respectivamente, para luego reemplazar ambas ecuaciones en (2.40a):

$$x(s) = \int_s \frac{-F_1}{T} \left(1 + \frac{T}{EA}\right) ds = \int_s \left(\frac{-F_1}{T} + \frac{-F_1}{EA}\right) ds$$

$$x(s) = \int_s \frac{-F_1}{EA} ds - \int_s \frac{F_1}{T} ds$$

Al reemplazar la ecuación (2.36) en la expresión anterior e integrar la primera parte:

$$x(s) = \frac{-F_1 s}{EA} - \int_s \frac{F_1}{\sqrt{F_1^2 + F_2^2 + (ws - F_3)^2}} ds$$

Si:  $ws - F_3 = u\sqrt{F_1^2 + F_2^2}$ , entonces:  $w ds = du\sqrt{F_1^2 + F_2^2}$  con lo que se obtiene

$$x(s) = \frac{-F_1 s}{EA} - \int_{\text{Dom}(u)} \frac{F_1 \sqrt{F_1^2 + F_2^2}}{w \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + (u\sqrt{F_1^2 + F_2^2})^2}} du$$

$$x(s) = \frac{-F_1 s}{EA} - \int_{\text{Dom}(u)} \frac{F_1 \sqrt{F_1^2 + F_2^2}}{w \sqrt{F_1^2 + F_2^2} \sqrt{1 + u^2}} du$$

$$x(s) = \frac{-F_1 s}{EA} - \frac{F_1}{w} \int_{\text{Dom}(u)} \frac{1}{\sqrt{1 + u^2}} du$$

Si:  $u = \sinh\theta$ , entonces:  $du = \cosh\theta d\theta$

$$x(s) = \frac{-F_1 s}{EA} - \frac{F_1}{w} \int_{\text{Dom}(\theta)} \frac{1}{\sqrt{1 + \sinh^2\theta}} \cosh\theta d\theta$$

De la relación hiperbólica:  $\sinh^2\theta + 1 = \cosh^2\theta$ , se obtiene:

$$x(s) = \frac{-F_1 s}{EA} - \frac{F_1}{w} \int_{\text{Dom}(\theta)} d\theta = \frac{-F_1 s}{EA} - \frac{F_1}{w} \theta$$

Al sustituir  $\theta$  en función de  $u$ :

$$x(s) = \frac{-F_1 s}{EA} - \frac{F_1}{w} \sinh^{-1} u$$

Como:  $\sinh^{-1} u = \ln(u + (1 + u^2)^{1/2})$

$$x(s) = \frac{-F_1 s}{EA} - \frac{F_1}{w} \ln(u + (1 + u^2)^{1/2})$$

Al reemplazar  $u$  en función de  $s$ :

$$x(s) = \frac{-F_1 s}{EA} - \frac{F_1}{w} \ln \left( \frac{ws - F_3}{\sqrt{F_1^2 + F_2^2}} + \sqrt{1 + \left( \frac{ws - F_3}{\sqrt{F_1^2 + F_2^2}} \right)^2} \right)$$

$$x(s) = \frac{-F_1 s}{EA} - \frac{F_1}{w} \ln \left( \frac{ws - F_3 + \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + (ws - F_3)^2}}{\sqrt{F_1^2 + F_2^2}} \right)$$

Al integrar la expresión anterior de 0 a  $s$ :

$$x(s) = \frac{-F_1 s}{EA} - \frac{F_1}{w} \left\{ \ln \left( \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + (ws - F_3)^2} + ws - F_3 \right) - \ln \left( \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + F_3^2} - F_3 \right) \right\}$$

De manera análoga para  $y$ :

$$y(s) = \frac{-F_2 s}{EA} - \frac{F_2}{w} \left\{ \ln \left( \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + (ws - F_3)^2} + ws - F_3 \right) - \ln \left( \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + F_3^2} - F_3 \right) \right\}$$

□

**Teorema 2.2.2.** La coordenada cartesiana  $z$  en función de la longitud del segmento deformado es:

$$z(s) = \frac{-F_3 s}{EA} + \frac{ws^2}{2EA} + \frac{1}{w} \left\{ \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + (ws - F_3)^2} - \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + F_3^2} \right\} \quad (2.43)$$

*Demostración.* Para desarrollar la expresión de  $z$ , se debe expresar  $\frac{dz}{dp}$  y  $\frac{dp}{ds}$  en función de las variables de las ecuaciones (2.35c) y (2.38) respectivamente, luego reemplazar en (2.40c):

$$\begin{aligned} z(s) &= \int_s \frac{ws - F_3}{T} \left( 1 + \frac{T}{EA} \right) ds = \int_s \left( \frac{ws - F_3}{T} + \frac{ws - F_3}{EA} \right) ds \\ &= \int_s \frac{ws - F_3}{EA} ds + \int_s \frac{ws - F_3}{T} ds \end{aligned}$$

Al sustituir la ecuación (2.36) en la expresión anterior e integrar la primera parte:

$$z(s) = \frac{-F_3 s}{EA} + \frac{ws^2}{2EA} + \int_s \frac{ws - F_3}{\sqrt{F_1^2 + F_2^2 + (ws - F_3)^2}} ds$$

Si:  $ws - F_3 = u\sqrt{F_1^2 + F_2^2}$ , entonces:  $w ds = du\sqrt{F_1^2 + F_2^2}$ , con lo que se obtiene:

$$z(s) = \frac{-F_3 s}{EA} + \frac{ws^2}{2EA} + \int_{Dom(u)} \frac{u \left( \sqrt{F_1^2 + F_2^2} \right)^2}{w \sqrt{F_1^2 + F_2^2} \sqrt{1 + u^2}} du$$

$$z(s) = \frac{-F_3 s}{EA} + \frac{ws^2}{2EA} + \frac{\sqrt{F_1^2 + F_2^2}}{w} \int_{Dom(u)} \frac{u}{\sqrt{1 + u^2}} du$$

$$z(s) = \frac{-F_3 s}{EA} + \frac{ws^2}{2EA} + \frac{\sqrt{F_1^2 + F_2^2}}{w} \frac{1}{2} \int_{Dom(u)} \frac{d(1 + u^2)}{\sqrt{1 + u^2}}$$

$$z(s) = \frac{-F_3 s}{EA} + \frac{ws^2}{2EA} + \frac{\sqrt{F_1^2 + F_2^2}}{w} \sqrt{1 + u^2}$$

Al reemplazar  $u$  en función de  $s$ :

$$z(s) = \frac{-F_3 s}{EA} + \frac{ws^2}{2EA} + \frac{\sqrt{F_1^2 + F_2^2}}{w} \sqrt{1 + \left( \frac{ws - F_3}{\sqrt{F_1^2 + F_2^2}} \right)^2}$$

$$z(s) = \frac{-F_3 s}{EA} + \frac{ws^2}{2EA} + \frac{1}{w} \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + (ws - F_3)^2}$$

Si se integra de 0 a  $s$  resulta:

$$z(s) = \frac{-F_3 s}{EA} + \frac{ws^2}{2EA} + \frac{1}{w} \left\{ \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + (ws - F_3)^2} - \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + F_3^2} \right\}$$

□

Al incluir las condiciones de contorno (2.39) en (2.41), (2.42) y (2.43) se tiene:

$$l_x = -\frac{F_1 L_o}{EA} - \frac{F_1}{w} \left\{ \ln \left( \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + (wL_o - F_3)^2} + wL_o - F_3 \right) - \ln \left( \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + F_3^2} - F_3 \right) \right\} \quad (2.44a)$$

$$l_y = -\frac{F_2 L_o}{EA} - \frac{F_2}{w} \left\{ \ln \left( \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + (wL_o - F_3)^2} + wL_o - F_3 \right) - \ln \left( \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + F_3^2} - F_3 \right) \right\} \quad (2.44b)$$

$$l_z = -\frac{F_3 L_o}{EA} + \frac{wL_o^2}{2EA} + \frac{1}{w} \left\{ \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + (wL_o - F_3)^2} - \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + F_3^2} \right\} \quad (2.44c)$$

Como las variables  $l_x$ ,  $l_y$  y  $l_z$  son escritas en términos de las fuerzas del extremo  $I$  ( $F_1, F_2, F_3$ ), éstas pueden expresarse en pequeñas variaciones de las mismas mediante una derivación de primer orden para obtener una mejor aproximación [15]:

$$dl_x = \frac{\partial l_x}{\partial F_1} dF_1 + \frac{\partial l_x}{\partial F_2} dF_2 + \frac{\partial l_x}{\partial F_3} dF_3 \quad (2.45a)$$

$$dl_y = \frac{\partial l_y}{\partial F_1} dF_1 + \frac{\partial l_y}{\partial F_2} dF_2 + \frac{\partial l_y}{\partial F_3} dF_3 \quad (2.45b)$$

$$dl_z = \frac{\partial l_z}{\partial F_1} dF_1 + \frac{\partial l_z}{\partial F_2} dF_2 + \frac{\partial l_z}{\partial F_3} dF_3 \quad (2.45c)$$

O expresadas en forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} dl_x \\ dl_y \\ dl_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dF_1 \\ dF_2 \\ dF_3 \end{Bmatrix} = F \begin{Bmatrix} dF_1 \\ dF_2 \\ dF_3 \end{Bmatrix} \quad (2.46)$$

Donde  $F$  es la matriz de flexibilidad incremental, cuyos elementos  $f_{ij}$  se indican a continuación:

$$f_{11} = -\left( \frac{L_o}{EA} + \frac{1}{w} \ln \frac{T_j + F_6}{T_i - F_3} \right) + \frac{F_1^2}{w} \left[ \frac{1}{T_i(T_i - F_3)} + \frac{1}{T_j(T_j - F_6)} \right] \quad (2.47a)$$

$$f_{12} = f_{21} = \frac{F_1 F_2}{w} \left[ \frac{1}{T_i(T_i - F_3)} + \frac{1}{T_j(T_j - F_6)} \right] \quad (2.47b)$$

$$f_{13} = f_{31} = \frac{F_1}{w} \left[ \frac{1}{T_j} - \frac{1}{T_i} \right] \quad (2.47c)$$

$$f_{22} = - \left( \frac{L_o}{EA} + \frac{1}{w} \ln \frac{T_j + F_6}{T_i - F_3} \right) + \frac{F_2^2}{w} \left[ \frac{1}{T_i(T_i - F_3)} + \frac{1}{T_j(T_j - F_6)} \right] \quad (2.47d)$$

$$f_{23} = f_{32} = \frac{F_2}{w} \left[ \frac{1}{T_j} - \frac{1}{T_i} \right] \quad (2.47e)$$

$$f_{33} = - \frac{L_o}{EA} - \frac{1}{w} \left[ \frac{F_6}{T_j} + \frac{F_3}{T_i} \right] \quad (2.47f)$$

Donde  $T_i$  y  $T_j$  son las tensiones del cable en los nodos  $I$  y  $J$  respectivamente. Las variables  $F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6, T_i$  y  $T_j$  están relacionadas como:

$$F_4 = -F_1 \quad (2.48a)$$

$$F_5 = -F_2 \quad (2.48b)$$

$$F_6 = -F_3 + wL_o \quad (2.48c)$$

$$T_i = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + F_3^2} \quad (2.49a)$$

$$T_j = \sqrt{F_4^2 + F_5^2 + F_6^2} \quad (2.49b)$$

La matriz de rigidez del cable se obtiene al invertir la matriz de flexibilidad  $F$ :

$$K_c = F^{-1} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{bmatrix}^{-1} \quad (2.50)$$

La matriz de rigidez tangente y el correspondiente vector de fuerzas internas del elemento cable, se expresan en términos de seis grados de libertad [11]:

$$K_{ct} = \begin{bmatrix} -K_c & K_c \\ K_c & -K_c \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

$$\mathbf{f}_{int} = \left\{ F_1 \quad F_2 \quad F_3 \quad F_4 \quad F_5 \quad F_6 \right\}^T \quad (2.52)$$

La matriz de rigidez tangente  $K_{ct}$  relaciona el vector de fuerzas internas incrementales al vector de desplazamientos incrementales nodales a través de la ley de Hooke:

$$\begin{Bmatrix} \Delta F_1 \\ \Delta F_2 \\ \Delta F_3 \\ \Delta F_4 \\ \Delta F_5 \\ \Delta F_6 \end{Bmatrix} = K_{ct} \begin{Bmatrix} \Delta u_i \\ \Delta v_i \\ \Delta w_i \\ \Delta u_j \\ \Delta v_j \\ \Delta w_j \end{Bmatrix} \quad (2.53)$$

Luego de encontrar las fuerzas nodales  $F_1$ ,  $F_2$  y  $F_3$  que satisfacen la tolerancia buscada de las coordenadas del nodo  $J$ , es posible determinar la geometría total del cable al calcular las coordenadas de puntos a lo largo del cable. Esto es posible debido a que las fuerzas  $F_1$ ,  $F_2$  y  $F_3$  son conocidas y al reemplazar alguna fracción de  $L_o$  en las ecuaciones (2.44) se puede determinar la coordenada comprendida entre los nodos  $I$  y  $J$ .

Cuando se ejerce alguna fuerza externa, el cable se deforma y la elongación final del cable es  $L_f = L_o + \Delta L$ , donde  $\Delta L$  se calcula considerando la ley de Hooke:

$$\Delta L = \frac{\Delta T}{EA} \quad (2.54)$$

Debido a la hipótesis de conservación de la masa del cable, el peso unitario por unidad de longitud ( $w_f$ ) en la configuración deformada se actualiza respecto al peso inicial ( $w$ ) [1].

$$w_f = \frac{wL_o}{L_f} \quad (2.55)$$

## 2.3. ANÁLISIS NO LINEAL ESTÁTICO

El análisis comienza con la evaluación del estado de esfuerzo inicial de los elementos bajo cargas de peso propio y vivas existentes en la estructura antes de aplicar cargas cíclicas o cargas sísmicas. Estas cargas estáticas son especificadas como cargas puntuales en elementos armadura y distribuidas en elementos cable.

La carga estática debe ser aplicada incrementalmente para obtener la redistribución de esfuerzos debido al comportamiento no lineal. Para esto la carga estática se subdivide en un razonable número de incrementos para encontrar la respuesta no lineal adecuada [26].

## 2.4. ANÁLISIS NO LINEAL DINÁMICO

Se resuelve con el método de Newmark de forma incremental e iterativa. La parte iterativa es resuelta con el método de la rigidez secante (método de la secante) ó rigidez tangente (método de Newton).

El algoritmo de Newmark es frecuentemente utilizado en el análisis dinámico no lineal de estructuras.



Las ecuaciones de velocidad y desplazamiento en el tiempo  $t + \Delta t$ , se expresan tal como se indica a continuación:

$$\dot{\mathbf{u}}_{i+1} = \dot{\mathbf{u}}_i + [(1 - \gamma)\Delta t] \ddot{\mathbf{u}}_i + (\gamma\Delta t)\ddot{\mathbf{u}}_{i+1} \quad (2.56a)$$

$$\mathbf{u}_{i+1} = \mathbf{u}_i + \Delta t\dot{\mathbf{u}}_i + [(0,5 - \beta)\Delta t^2] \ddot{\mathbf{u}}_i + [\beta\Delta t^2] \ddot{\mathbf{u}}_{i+1} \quad (2.56b)$$

Donde  $\gamma$  y  $\beta$ , son parámetros que se designan según la función de aceleración sea constante o tenga una variación lineal durante el incremento de tiempo. Para la aceleración constante  $\gamma = \frac{1}{2}$  y  $\beta = \frac{1}{4}$ ; para la aceleración lineal  $\gamma = \frac{1}{2}$  y  $\beta = \frac{1}{6}$  [8].

Al emplear cantidades incrementales y al usar el método de aceleración constante el cual es incondicionalmente estable [21], se obtiene la ecuación incremental del movimiento:

$$M\Delta\ddot{\mathbf{u}}_i + C\Delta\dot{\mathbf{u}}_i + K\Delta\mathbf{u}_i = \Delta\mathbf{P}_i \quad (2.57)$$

La expresión anterior (2.57) puede ser expresada como:

$$\Delta\hat{\mathbf{P}}_i = \hat{K}\Delta\mathbf{u}_i \quad (2.58)$$

Donde:

$$\Delta\hat{\mathbf{P}}_i = \Delta\mathbf{P}_i + \left(\frac{4}{\Delta t}M + 2C\right)\dot{\mathbf{u}}_i + 2M\ddot{\mathbf{u}}_i \quad (2.59)$$

$$\hat{K} = K + \frac{2}{\Delta t}C + \frac{4}{\Delta t^2}M \quad (2.60)$$

Donde  $M$ ,  $C$  y  $K$  son las matrices de masa, amortiguamiento y rigidez tangente respectivamente;  $\Delta\mathbf{P}_i$  es el vector de carga externa incremental [3].

Al resolver la ecuación (2.58) mediante el método de la secante ó el método de Newton, se actualizan el desplazamiento, velocidad y aceleración en el tiempo  $t + \Delta t$  como:

$$\mathbf{u}_{i+1} = \mathbf{u}_i + \Delta\mathbf{u}_i \quad (2.61a)$$

$$\dot{\mathbf{u}}_{i+1} = -\dot{\mathbf{u}}_i + \frac{2}{\Delta t}\Delta\mathbf{u}_i \quad (2.61b)$$

$$\ddot{\mathbf{u}}_{i+1} = -\ddot{\mathbf{u}}_i - \frac{4}{\Delta t}\dot{\mathbf{u}}_i + \frac{4}{\Delta t^2}\Delta\mathbf{u}_i \quad (2.61c)$$

### 2.4.1. Matriz de masa

Para el modelamiento dinámico se opta por una matriz de masas concentradas. Esta matriz considera simplificada las propiedades de masa de cualquier elemento. Se supone que la masa está concentrada en los nodos de los elementos cable o armadura [4]. La matriz de masas concentradas es una matriz diagonal.

$$M = \frac{mL}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.62)$$

### 2.4.2. Matriz de amortiguamiento

Según el modelo de amortiguamiento de Rayleigh, la matriz de amortiguamiento se define como:

$$C = \alpha_M M + \alpha_K K \quad (2.63)$$

Donde  $\alpha_M$  y  $\alpha_K$  son factores de amortiguamiento proporcionales a la masa y a la rigidez de la estructura respectivamente. Dependiendo del tipo de amortiguamiento que se suponga predominante (proporcional a la masa, rigidez ó ambos) estos factores se calculan con (2.64), (2.65) ó (2.66) [26]:

$$\alpha_M = 2\xi_i w_i; \alpha_K = 0 \quad (2.64)$$

$$\alpha_M = 0; \alpha_K = (2\xi_i)/w_i \quad (2.65)$$

$$\alpha_M = \frac{2\xi_i w_i w_j^2 - 2\xi_j w_j w_i^2}{w_j^2 - w_i^2}; \alpha_K = \frac{2\xi_j w_j - 2\xi_i w_i}{w_j^2 - w_i^2} \quad (2.66)$$

Donde  $\xi_i$  y  $w_i$  son la fracción de amortiguamiento crítico y la frecuencia circular del modo "i" respectivamente.

## 2.5. MÉTODOS DE SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN NO LINEAL

Para resolver el sistema de ecuaciones no lineales  $f = Ku$ , cuando las cargas  $f$  son conocidas, podemos usar los siguientes métodos:

### 2.5.1. Método de Newton

Este método es utilizado frecuentemente para encontrar los desplazamientos a partir de las ecuaciones de equilibrio. La solución es obtenida como una suma sucesiva de los incrementos de desplazamientos  $\Delta u$ , los que se calculan durante cada ciclo de iteración.

El esquema iterativo en cada incremento de carga es ilustrado en la figura (2.6).

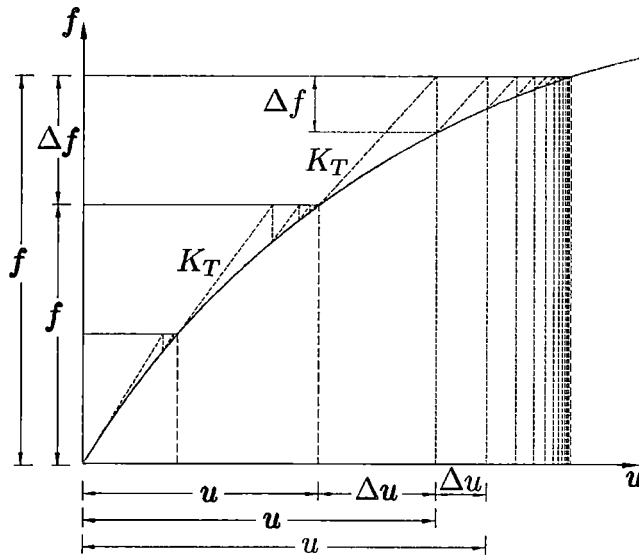


Figura 2.6: Método de Newton modificado con incrementos de carga.

En el método de Newton modificado, la matriz tangente  $K_T$  se mantiene constante en cada ciclo de iteración hasta completar el incremento de carga ( $\Delta f$ ); a éste se le denomina como el método de Newton en el presente trabajo.

### 2.5.2. Método de la secante

Este método es un proceso numérico cuya efectividad se pone de manifiesto en los capítulos III y IV de la presente tesis. En esta metodología, para cualquier iteración la carga incremental es aplicada directamente, para obtener la deformación total  $u$  por iteración [2]. El esquema de solución de la ecuación, se muestra en la figura (2.7).

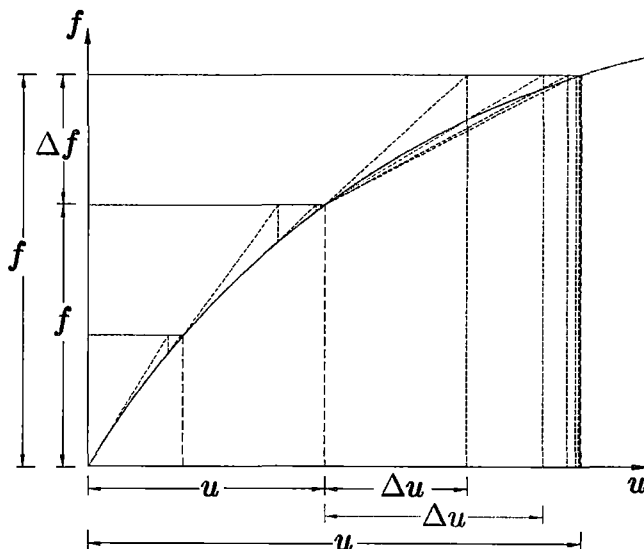


Figura 2.7: Método de la secante con incrementos de carga.

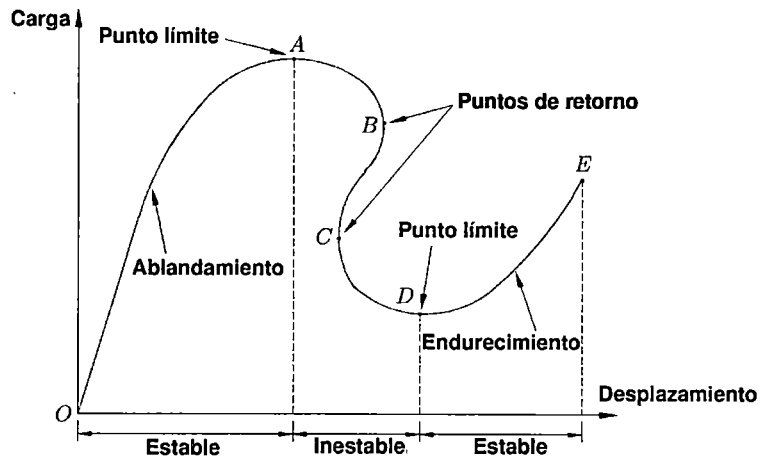
Las fuerzas internas y desplazamientos por cada elemento y nodo respectivamente, son actualizadas basadas en el último desplazamiento calculado; luego se forma la matriz de rigidez secante actualizada, en la siguiente iteración. La matriz secante actualizada y la carga total de la iteración son usadas para estimar el siguiente desplazamiento; cuando la diferencia del último desplazamiento y el desplazamiento calculado previamente es menor a la tolerancia requerida, se dice que el proceso alcanzó la convergencia. Este método tiene la ventaja de ser sencillo, ya que sólo emplea la matriz secante y no requiere de una formulación compleja [13].

### 2.5.3. Método de control de desplazamiento generalizado

Dependiendo de la historia de carga, la rigidez de la estructura puede estar en ablandamiento (softening) o endurecimiento (stiffening), la trayectoria de equilibrio puede ser estable o inestable, y la estructura puede estar en una etapa de carga o descarga. Todos estos fenómenos son identificados por la ocurrencia de puntos críticos, como los puntos límites y puntos de retorno (snap-back points) en la trayectoria carga - deformación [27], tal como se muestra en la figura (2.8).

Para trazar esta trayectoria de equilibrio existen diversas técnicas, las que se basan en el control de carga (método de la secante, método de Newton) ó desplazamientos, cada uno con ventajas y desventajas.

Los principales inconvenientes de los métodos de secante o Newton se presentan al resolver problemas que involucren puntos límites (punto A de la figura 2.8). Por esta razón, no son recomendados para trazar la respuesta de la estructura más allá del punto límite; mientras que en técnicas de control de desplazamientos, la divergencia puede ocurrir en particular cuando un punto de control seleccionado muestra un comportamiento de punto de retorno (punto B de la figura 2.8) [13].



**Figura 2.8:** Característica general de sistemas no lineales. (Fuente: Yang, 1994).

Uno de los métodos numéricos más robustos para un análisis no lineal, es el método de control de desplazamiento generalizado propuesto por Yang y Shieh [27], el cual tiene las siguientes ventajas:

- La estabilidad numérica puede ser siempre asegurada en regiones cercanas a puntos límites.
- La variación de rigidez de la estructura debido al comportamiento no lineal, puede ser tomada en cuenta a través de un parámetro, el que indica el cambio de dirección de carga en la curva carga - desplazamiento.

Para los fines de esta tesis, los métodos de la secante y de Newton cumplen con los requisitos de convergencia con relación al comportamiento no lineal (elástico, geométrico), por lo que se consideran suficientes para resolver las aplicaciones que se presentan en el capítulo IV.

## CAPÍTULO III

### ALGORITMO DE SOLUCIÓN

#### 3.1. MATRIZ DEL ELEMENTO TIPO ARMADURA

La ecuación de equilibrio de la armadura esta expresada como (2.33):

$$(k_e + k_g + s_1 + s_2 + s_3) \mathbf{u} + {}^1\mathbf{f} = {}^2\mathbf{f}$$

Donde:

$k_e$  es la matriz de rigidez elástica (2.21):

$$k_e = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$k_g$  es la matriz de rigidez geométrica (2.23):

$$k_g = \frac{F}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y las matrices  $s_1$  (2.25),  $s_2$  (2.27) y  $s_3$  (2.29) son de orden superior:

$$s_1 = \frac{EA}{2L^2} \begin{bmatrix} \Delta u & \Delta v & \Delta w & -\Delta u & -\Delta v & -\Delta w \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\Delta u & -\Delta v & -\Delta w & \Delta u & \Delta v & \Delta w \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$s_2 = \frac{EA}{2L^2} \begin{bmatrix} 2\Delta u & 0 & 0 & -2\Delta u & 0 & 0 \\ \Delta v & \Delta u & 0 & -\Delta v & -\Delta u & 0 \\ \Delta w & 0 & \Delta u & -\Delta w & 0 & -\Delta u \\ -2\Delta u & 0 & 0 & 2\Delta u & 0 & 0 \\ -\Delta v & -\Delta u & 0 & \Delta v & \Delta u & 0 \\ -\Delta w & 0 & -\Delta u & \Delta w & 0 & \Delta u \end{bmatrix}$$

$$s_3 = \frac{EA}{6L^3} \begin{bmatrix} h & -h \\ -h & h \end{bmatrix}$$

Donde:

$$h = \begin{bmatrix} 3\Delta u^2 + \Delta v^2 + \Delta w^2 & 2\Delta u\Delta v & 2\Delta u\Delta w \\ 2\Delta u\Delta v & \Delta u^2 + 3\Delta v^2 + \Delta w^2 & 2\Delta v\Delta w \\ 2\Delta u\Delta w & 2\Delta v\Delta w & \Delta u^2 + \Delta v^2 + 3\Delta w^2 \end{bmatrix}$$

## 3.2. MATRIZ DEL ELEMENTO TIPO CABLE

### 3.2.1. Algoritmo del elemento tipo cable

Para determinar la matriz de rigidez tangente  $K_{ct}$ , se debe determinar primero las fuerzas  $F_1$ ,  $F_2$  y  $F_3$  del nodo  $I$  [16]. Para ello, se comienza con una estimación inicial de estas fuerzas nodales mediante [11]:

$$F_1 = -\frac{wl_x}{2\lambda} \quad (3.1a)$$

$$F_2 = -\frac{wl_y}{2\lambda} \quad (3.1b)$$

$$F_3 = \frac{w}{2} \left( -l_z \frac{\cosh \lambda}{\sinh \lambda} + L_o \right) \quad (3.1c)$$

Donde:

$$\lambda = \begin{cases} 10^6 & \text{si } (l_x^2 + l_y^2) = 0 \\ 0,2 & \text{si } L_o^2 \leq l_x^2 + l_y^2 + l_z^2 \\ \sqrt{3 \left( \frac{L_o^2 - l_z^2}{l_x^2 + l_y^2} - 1 \right)} & \text{si } L_o^2 > l_x^2 + l_y^2 + l_z^2 \end{cases} \quad (3.2)$$

Al reemplazar las fuerzas estimadas en (2.44) se determina las coordenadas  $(l_{x0}, l_{y0}, l_{z0})$  del cable, y respecto a la coordenada indicada del nodo  $J (l_x, l_y, l_z)$ , se determina el vector de diferencia  $\Delta L = \left\{ (l_{x0} - l_x) \quad (l_{y0} - l_y) \quad (l_{z0} - l_z) \right\}^T$  el cual debe ser menor a la tolerancia buscada.

Si la tolerancia no se cumple, las fuerzas de aproximación del nodo  $I$  se corrigen usando el vector de diferencia como:

$$\begin{Bmatrix} \Delta F_1 \\ \Delta F_2 \\ \Delta F_3 \end{Bmatrix} = K_c \begin{Bmatrix} \Delta l_x \\ \Delta l_y \\ \Delta l_z \end{Bmatrix} \quad (3.3)$$

Luego se actualizan las fuerzas:

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \Delta F_1 \\ \Delta F_2 \\ \Delta F_3 \end{Bmatrix} \quad (3.4)$$

donde  $K_c$  es la matriz de rigidez de la ecuación (2.50).

A continuación se presenta el algoritmo empleado para encontrar la matriz de rigidez de un elemento cable.

**Algoritmo 3.2.1. Cable con  $L_o$  conocido**

**Paso 1:** Los datos iniciales son las coordenadas de los nodos  $I(x_i, y_i, z_i)$  y  $J(x_j, y_j, z_j)$ , las propiedades físicas  $(E, A, m, L_o)$  y la tolerancia  $(tol)$ .

**Paso 2:** Calcular las coordenadas relativas entre los nodos  $I$  y  $J$ :  $l_{x0} = x_j - x_i$ ,  $l_{y0} = y_j - y_i$  y  $l_{z0} = z_j - z_i$ .

**Paso 3:** Dar una primera aproximación de las fuerzas  $F_1$ ,  $F_2$  y  $F_3$  del nudo  $I$ , al utilizar la ecuación (3.1).

**Paso 4:** Actualizar la coordenada relativa del nodo  $J (l_x, l_y, l_z)$ , al reemplazar  $F_1$ ,  $F_2$  y  $F_3$  en la ecuación (2.44).



**Paso 5:** Calcular el vector diferencia:

$$\Delta L = \begin{Bmatrix} l_{x0} - l_x \\ l_{y0} - l_y \\ l_{z0} - l_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta l_x \\ \Delta l_y \\ \Delta l_z \end{Bmatrix}.$$

**Paso 6:** Si  $\|\Delta L\|_\infty < tol$ , calcular  $K_{ct}$  y  $F_{int}$  con (2.51) y (2.52) respectivamente. Caso contrario continuar los siguientes pasos.

**Paso 7:** Calcular el vector de corrección de las fuerzas del nodo I:  $\Delta F = K_c \Delta L$  (3.3).

**Paso 8:** Actualizar las fuerzas de la siguiente iteración empleando (3.4) y retornar al Paso 4.

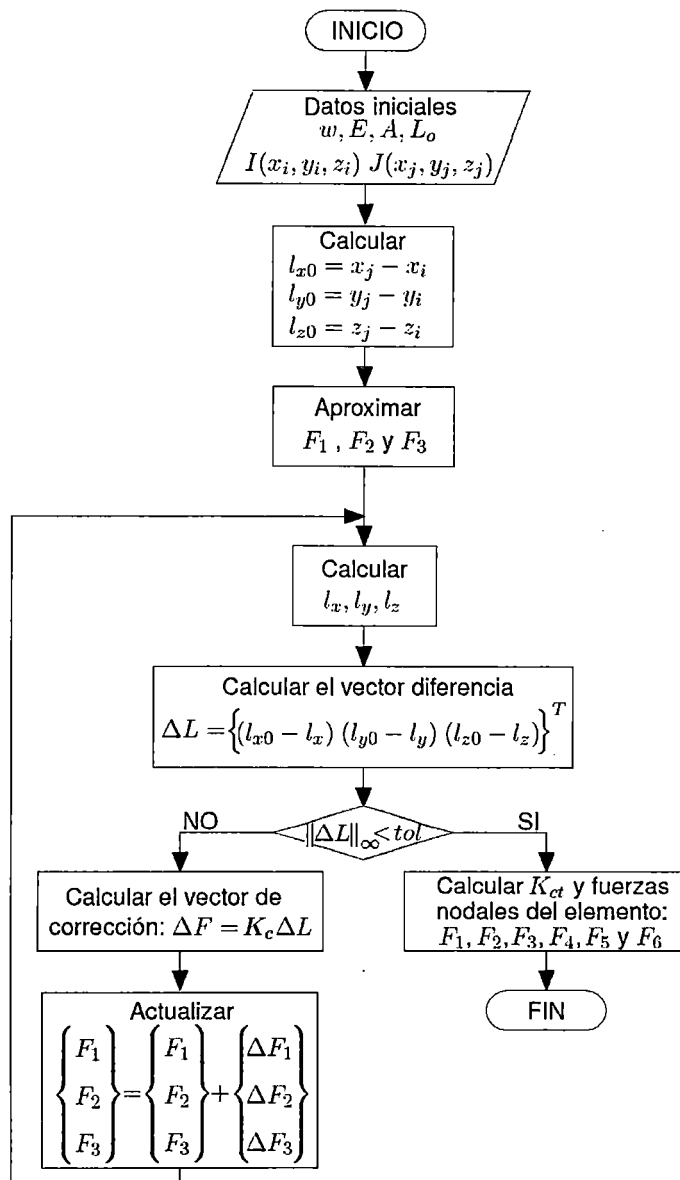


Figura 3.1: Diagrama de flujo del elemento cable para Lo.

Cuando la tensión inicial del cable  $T_o$  en el nodo  $I$  es conocida, se emplea el siguiente proceso de iteración para determinar la longitud del cable no esforzado.

**Algoritmo 3.2.2. Cable con  $T_o$  conocido**

**Paso 1:** Como datos iniciales se necesitan las propiedades físicas  $w, E, A$ , la tensión en el nodo  $I$  ( $T_o$ ) y la coordenada de los nodos  $I(x_i, y_i, z_i)$  y  $J(x_j, y_j, z_j)$ .

**Paso 2:** Calcular las coordenadas relativas entre los nodos  $I$  y  $J$ :  $l_{x0} = x_j - x_i, l_{y0} = y_j - y_i$  y  $l_{z0} = z_j - z_i$ .

**Paso 3:** Inicializar la longitud no esforzada  $L_o$  y las fuerzas del nodo  $I$  ( $F_1, F_2, F_3$ ) como sigue:

$$L_o = \sqrt{l_{x0}^2 + l_{y0}^2 + l_{z0}^2} \quad (3.5a)$$

$$F_1 = -\frac{l_{x0}}{L_o} T_o \quad (3.5b)$$

$$F_2 = -\frac{l_{y0}}{L_o} T_o \quad (3.5c)$$

$$F_3 = -\frac{l_{z0}}{L_o} T_o \quad (3.5d)$$

**Paso 4:** Actualizar la coordenada relativa del nodo  $J$  ( $l_x, l_y, l_z$ ), al reemplazar  $F_1, F_2, F_3$  y  $L_o$  en la ecuación (2.44).

**Paso 5:** Calcular el vector diferencia:  $\Delta L = \left\{ (l_{x0} - l_x) \quad (l_{y0} - l_y) \quad (l_{z0} - l_z) \right\}^T$ , la diferencia entre la tensión conocida  $T_o$  y la estimada  $T_i$  (2.49a):  $\Delta T = T_o - T_i$ .

**Paso 6:** Si  $\|\Delta L\|_\infty < tol$  y  $\|\Delta T\|_\infty < tol$ , calcular  $K_{ct}$  y  $F_{int}$  con (2.51) y (2.52) respectivamente. Caso contrario continuar con los siguientes pasos.

**Paso 7:** Calcular  $C_c$  por diferenciación de las expresiones (2.44) y (2.49a) con respecto a  $F_1, F_2, F_3$  y  $L_o$  como:

$$C_c = \begin{bmatrix} \frac{\partial l_x}{\partial F_1} & \frac{\partial l_x}{\partial F_2} & \frac{\partial l_x}{\partial F_3} & \frac{\partial l_x}{\partial L_o} \\ \frac{\partial l_y}{\partial F_1} & \frac{\partial l_y}{\partial F_2} & \frac{\partial l_y}{\partial F_3} & \frac{\partial l_y}{\partial L_o} \\ \frac{\partial l_z}{\partial F_1} & \frac{\partial l_z}{\partial F_2} & \frac{\partial l_z}{\partial F_3} & \frac{\partial l_z}{\partial L_o} \\ \frac{\partial T_i}{\partial F_1} & \frac{\partial T_i}{\partial F_2} & \frac{\partial T_i}{\partial F_3} & \frac{\partial T_i}{\partial L_o} \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

**Paso 8:** Calcular el vector de corrección:

$$\begin{Bmatrix} \Delta F_1 \\ \Delta F_2 \\ \Delta F_3 \\ \Delta L_o \end{Bmatrix} = C_c \begin{Bmatrix} \Delta l_x \\ \Delta l_y \\ \Delta l_z \\ \Delta T_i \end{Bmatrix} \quad (3.7)$$

**Paso 9:** Actualizar las fuerzas:  $F_1 = F_1 + \Delta F_1$ ,  $F_2 = F_2 + \Delta F_2$ ,  $F_3 = F_3 + \Delta F_3$ , la longitud:  $L_o = L_o + \Delta L_o$  y retornar al Paso 4.

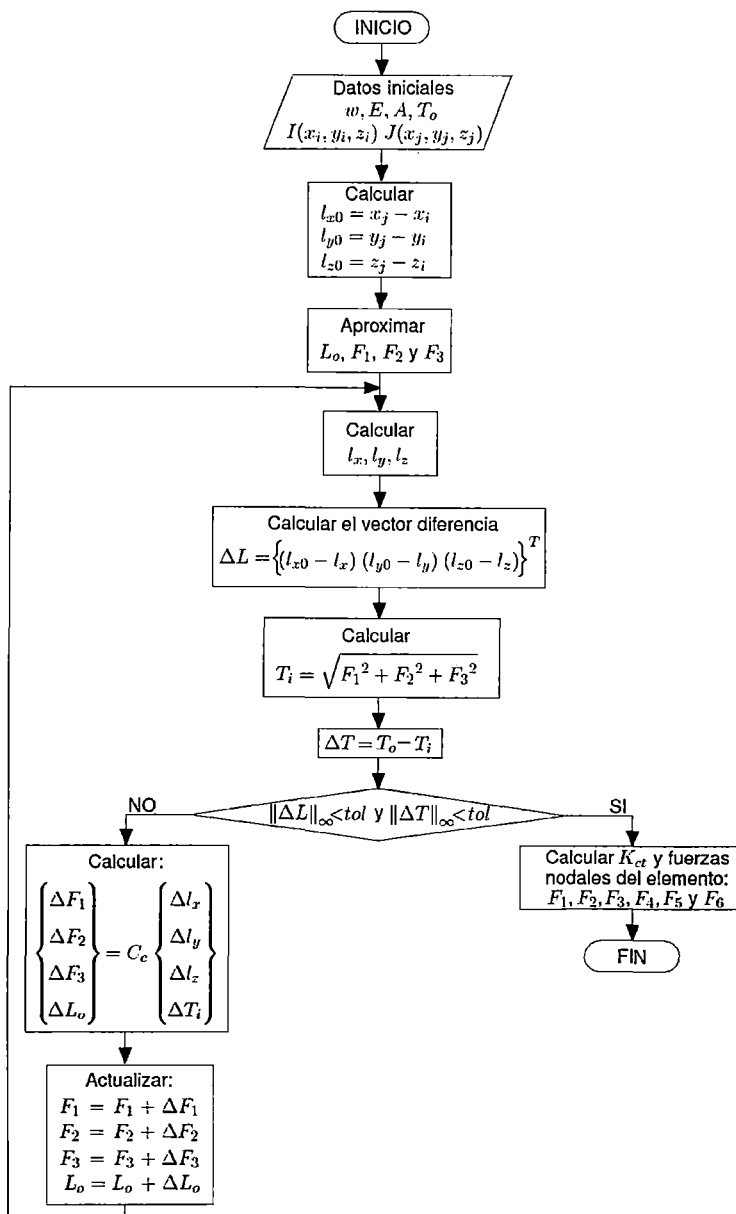


Figura 3.2: Diagrama de flujo del elemento cable para  $T_o$ .

### 3.2.2. Descripción del algoritmo

Con los algoritmos descritos en el acápite 3.2.1, es posible determinar la configuración del cable apoyado en los nodos  $I$  y  $J$ , y cuya distancia relativa es  $(l_{x0}, l_{y0}, l_{z0})$ , para ello se deben de realizar iteraciones de convergencia al nodo  $J$  tal como se ilustra en la figura (3.3).

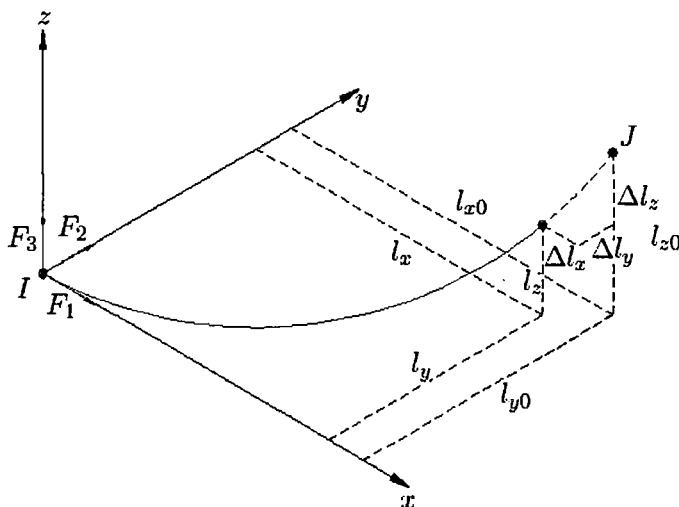


Figura 3.3: Configuración en un paso de la iteración.

Luego de satisfecha la convergencia al nodo  $J$ , se pueden calcular las fuerzas  $(F_4, F_5, F_6)$  en dicho nodo usando las expresiones de equilibrio (2.48):

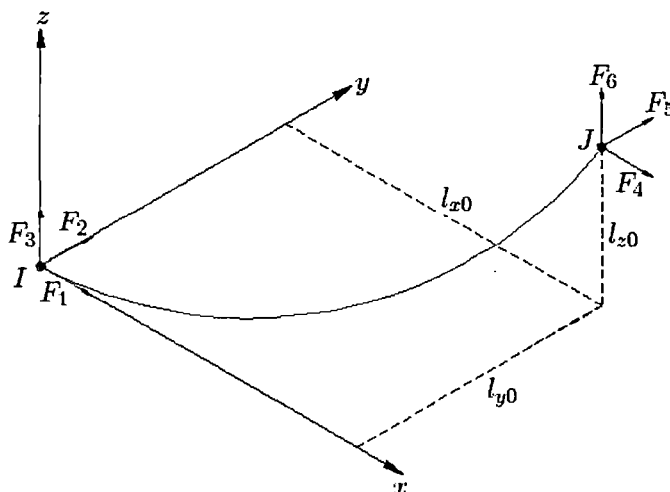


Figura 3.4: Elemento cable luego de la convergencia.

Las figuras (3.3) y (3.4) sólo muestran un elemento cable de extremos  $I$  y  $J$ , el cual no se

puede utilizar cuando una carga externa se aplica en una parte del cable, tal como se apreciará en la aplicación 2 del capítulo 4 de la presente tesis. Para ello, se divide internamente al cable según un cierto número de segmentos ( $N_s$ ) ó respecto a una longitud conocida, empleando las expresiones (2.41), (2.42) y (2.43).

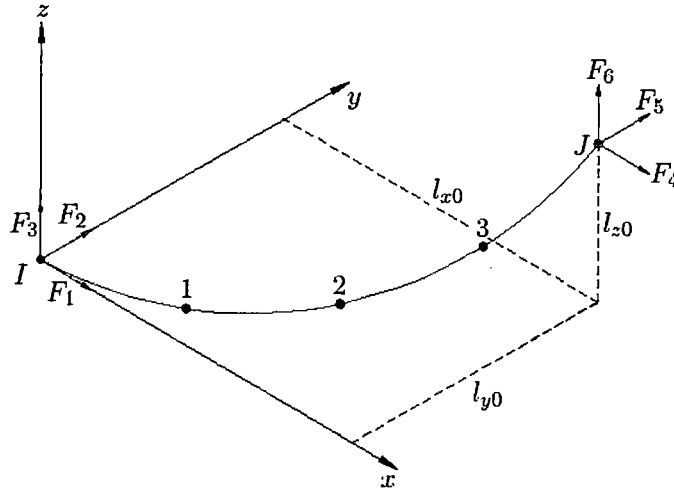


Figura 3.5: Cable con nodos internos.

En cada segmento es posible determinar las fuerzas en los nodos adicionales, mediante condiciones de equilibrio. Estas fuerzas nodales y la longitud de cada segmento son empleadas para determinar la matriz de rigidez de cada segmento cable.

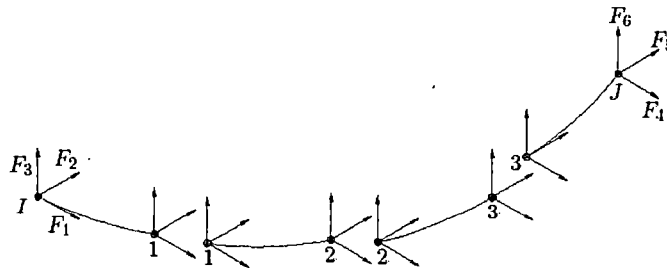


Figura 3.6: Fuerzas de cada elemento.

La matriz de cada segmento cable se agrupa en una matriz global del cable, la cual es usada en el análisis no lineal.

### 3.3. ESTRATEGIA DE SOLUCIÓN

Como estrategia de solución primero se construye la matriz de rigidez de los cables; a través de la formulación numérica descrita en el acápite 2.2.2., y con la formulación variacional expuesta en el acápite 2.1.1. se construye la matriz de rigidez de los elementos armadura. Se combinan ambos tipos de elementos, el cable tensado por su peso propio o con una tensión inicial en estado no lineal y la armadura en estado lineal. La matriz de rigidez global se ensambla a partir de las matrices indicadas en los acápites 3.1 y 3.2. El sistema de ecuaciones ensambladas es resuelto con ambos elementos de acuerdo al método de la secante o al método de Newton en un proceso incremental de cargas.

#### 3.3.1. Formato de entrada del modelo

Las siguientes figuras muestran el formato de entrada para los programas del método de la secante y del método de Newton, los cuales se explican en el acápite 3.3.2.

La tabla (3.1) muestra el formato de entrada de la geometría, donde la columna 1 (Nodo) enumera los nodos de la estructura, las columnas 2-5 ( $x, y, z$ ) son las coordenadas de los nodos y finalmente la columna 6 ( $Jm$ ) es la masa concentrada del nodo. Cabe indicar que la masa concentrada sólo es necesaria para el análisis dinámico.

**Tabla 3.1:** Formato de entrada de geometría y masa concentrada.

Nodo	$x$	$y$	$z$	$Jm$
n1	x1	y1	z1	Jm1
n2	x2	y2	z2	Jm2
n3	x3	y3	z3	Jm3
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
nn	xn	yn	zn	Jmn

La tabla (3.2) muestra el formato de propiedades de los elementos, en donde la columna 1 (Elemento) enumera los elementos que componen la estructura, las columnas 2 y 3 (Nodo) asignan el nodo de comienzo ( $n_i$ ) y el nodo final ( $n_j$ ) que identifica al elemento, la columna 4 ( $E$ ) es el módulo de Elasticidad, la columna 5 ( $A$ ) es el área transversal, la columna 6 ( $m$ ) es el peso por unidad de longitud, la columna 7 ( $telem$ ) identifica a que tipo de elemento

corresponde (1: Armadura ó 2: Cable), la columna 8 ( $Ns$ ) en el caso del elemento cable divide a éste y finalmente la columna 9 ( $To$  ó  $Lo$ ) es la tensión inicial  $T_o$  del nodo  $i$  ó la longitud no deformada  $L_o$  del elemento cable.

**Tabla 3.2:** Formato de entrada de propiedades.

Elemento	Nodo		$E$	$A$	$m$	$telem$	$Ns$	$T_o$ ó $L_o$
e1	n1	n2	E1	A1	m1	t	Ns1	Ton1 ó Lon1
e2	n2	n3	E2	A2	m2	t	Ns2	Ton2 ó Lon2
e3	n3	n4	E3	A3	m3	t	Ns3	Ton3 ó Lon3
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
en	ni	nj	En	An	mn	t	Nsn	Tonn ó Lonn

La tabla (3.3) muestra las restricciones y fuerzas externas aplicadas en el nodo, donde la columna 1 (Nodo) enumera los nodos de la estructura, las columnas 2-4 (Restricciones) son las restricciones al movimiento del nodo en la direcciones  $x$ ,  $y$  y/o  $z$  tan sólo colocando (1: Restricción ó 0: Libertad) y por último las columnas 5-7 (Fuerzas) son las fuerzas externas aplicadas al nodo en las direcciones  $x$ ,  $y$  y/o  $z$ .

**Tabla 3.3:** Formato de entrada de restricciones y fuerzas nodales.

Nodo	Restricciones			Fuerzas		
n1	R1x	R1y	R1z	F1x	F1y	F1z
n2	R2x	R2y	R2z	F2x	F2y	F2z
n3	R3x	R3y	R3z	F3x	F3y	F3z
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
nn	Rnx	Rny	Rnz	Fnx	Fny	Fnz

### 3.3.2. Algoritmo para el análisis estático no lineal

#### Algoritmo 3.3.1. Método de la secante

**Paso 1:** Como datos iniciales se necesita la geometría del modelo ( $x, y, z$ ), propiedades físicas ( $E, A, m$ ), tipo de elemento ( $telem$ ). Si es elemento cable ( $telem = 2$ ) se indica el número de segmentos ( $Ns$ ), tensión ó longitud inicial del cable ( $To$  ó  $Lo$ ). Además las

restricciones, vector de fuerzas externas ( $f_e$ ), número de incrementos de carga ( $N_{inc}$ ) y la tolerancia ( $tol$ ).

**Paso 2:** Para el elemento cable se determina su configuración de equilibrio de acuerdo a su longitud  $L_0$  ó tensión inicial  $T_0$ , y se calculan las fuerzas internas nodales de cada segmento ( $F_{int_1}$ ) (2.52) según como se ha subdividido el cable (esto se puede resolver como se indica en el acápite 3.2.1.). Luego se actualizan los datos iniciales de geometría, propiedades, restricciones y fuerza aplicada en los nodos debido a la segmentación del cable.

**Paso 3:** Condiciones iniciales: desplazamientos acumulados  $u^1 = \{0\}$ , incrementos de desplazamientos  $\Delta u^1 = \{0\}$ , fuerzas axiales  $N^1 = \{0\}$ , incrementos de fuerzas axiales  $\Delta N^1 = \{0\}$ , vector de fuerzas internas  $f_i = \{0\}$  y vector de carga incrementada  $f_c = \{0\}$ .

**Paso 4:** El incremento de carga es  $i = 1, 2, 3 \dots N_{inc}$ .

**Paso 5:** Para la primera iteración ( $j = 1$ ) en el incremento de carga  $i$ :

**5.1:** La carga aplicada incremental es:  $f_c = f_c + \frac{f_e}{N_{inc}}$ .

**5.2:** El vector de carga actuante:  $R = f_c - f_i$ .

**5.3:** Formar la matriz de rigidez global  $K_j^i$  de la estructura:

**5.3.1:** Para el elemento armadura emplear las matrices de elasticidad  $k_e$  (2.21), geométrica  $k_g$  (2.23) y las de orden superior  $s_1$  (2.25),  $s_2$  (2.27) y  $s_3$  (2.29). Para su ensamble usar las posiciones  $(x_i, y_i, z_i)$ , propiedades físicas, esfuerzos normales  $N^i$  y las deformaciones  $u^i$ .

**5.3.2:** Para el elemento cable emplear la matriz  $K_{ct}$  (2.51) y usar para su ensamble las propiedades físicas, longitud inicial de cada elemento  $L_{0i}$  y fuerzas internas  $F_{int_i}$ .

**Paso 6:** Realizar el siguiente proceso iterativo:

**6.1:** Resolver el incremento de desplazamientos  $\Delta u_j^i$  de la ecuación  $K_j^i \Delta u_j^i = R$ .

**6.2:** Actualizar temporalmente las posiciones de los nodos, deformaciones, fuerzas normales y fuerzas internas en los elementos:

**6.2.1:** Actualizar los desplazamientos:  $u^{i+1} = u^i + \Delta u_j^i$ .



**6.2.2:** Actualizar posición de los nodos de  $(x_i, y_i, z_i)$  a  $(X_j, Y_j, Z_j)$ .

**6.2.3:** Calcular  $\Delta N^j$  con respecto a la deformación  $\Delta u_j^i$ .

**6.2.4:** Actualizar las fuerzas axiales:  $N^{i+1} = N^i + \Delta N^j$ .

**6.2.5:** Para los elementos cable, calcular la variación de fuerzas internas de cada elemento al multiplicar cada rigidez con su respectiva deformación y almacenar en  $\Delta F_{intj}$ , actualizar la longitud del cable  $Lo_{i+1}$  debido a su elongación y además por conservación de la masa actualizar la densidad lineal del elemento a  $m_{i+1}$ .

**6.2.6:** Actualizar las fuerzas internas de los elementos cable:  $F_{int_{i+1}} = F_{int_i} + \Delta F_{intj}$ .

**6.3:** Ensamblar la matriz de rigidez global  $K_j^i$ :

**6.3.1:** Para el elemento armadura, respecto a las posiciones usar  $(x_i, y_i, z_i)$  en el ensamble de la matriz geométrica  $k_e$  y  $(X_j, Y_j, Z_j)$  en las demás matrices; además las propiedades físicas, esfuerzos normales  $N^{i+1}$  y las deformaciones  $u^{i+1}$ .

**6.3.2:** Para el elemento cable emplear la matriz  $K_{ct}$  y usar para su ensamble las propiedades físicas incluido  $m_{i+1}$ , longitud  $Lo_{i+1}$  y fuerzas internas  $F_{int_{i+1}}$ .

**6.4:** Calcular la fuerza residual de la estructura:  $f_s = K_j^i \Delta u_j^i$ .

**Paso 7:** Verificar la convergencia: Si  $\|R - f_s\|_\infty < tol$  ir al paso 8, en caso contrario  $j = j + 1$  y repetir paso 6.

**Paso 8:** Almacenar la posición alcanzada:  $(x_{i+1}, y_{i+1}, z_{i+1}) = (X_j, Y_j, Z_j)$ , la fuerza interna alcanzada hasta este incremento de carga:  $f_i = f_i + f_s$ .

**Paso 9:** Si  $i \leq N_{inc}$ , entonces ir al paso 4 con el siguiente incremento  $i = i + 1$ , pero si  $i = N_{inc}$  detener el proceso.

### Algoritmo 3.3.2. Método de Newton

Los pasos 1, 2, 3 y 4 del método de la secante se repiten. A continuación se describen los pasos que siguen:

**Paso 5:** Para la primera iteración ( $j = 1$ ) en el incremento de carga  $i$ :

**5.1:** La carga aplicada incremental es:  $f_c = f_c + \frac{f_e}{N_{inc}}$ .

**5.2:** Formar la matriz de rigidez global  $K_j^i$  de la estructura:

**5.2.1:** Para el elemento armadura emplear las matrices de rigidez elástica  $k_e$  (2.21), geométrica  $k_g$  (2.23) y las de orden superior  $s_1$  (2.25),  $s_2$  (2.27) y  $s_3$  (2.29). Para su ensamble usar las posiciones  $(x_i, y_i, z_i)$ , propiedades físicas, esfuerzos normales  $N^i$  y las deformaciones  $u^i$ .

**5.2.2:** Para el elemento cable emplear la matriz  $K_{ct}$  (2.51) y usar para su ensamble las propiedades físicas, longitud inicial de cada elemento  $L_{o_i}$  y fuerzas internas  $F_{int_i}$ .

**Paso 6:** Inicializar las condiciones de Newton:  $\Delta f_{s_j} = \{0\}$ ,  $f_{s_j} = f_i$ , vector de fuerza residual  $R_j = f_c - f_i$ , vector de desplazamiento total por incremento  $u^{i+1} = u^i$ , el vector de fuerzas axiales  $N^{i+1} = N^i$  y las fuerzas internas  $F_{int_{i+1}} = F_{int_i}$ . Además hacer constante la matriz tangente:  $K_T = K_j^i$ .

**Paso 7:** Realizar el siguiente proceso iterativo:

**7.1:** Resolver el incremento de desplazamientos  $\Delta u_j^i$  de la ecuación  $K_T \Delta u_j^i = R_j$ .

**7.2:** Actualizar y acumular posición de los nodos:

**7.2.1:** Acumular deformación:  $u^{i+1} = u^i + \Delta u_j^i$ .

**7.2.2:** Actualizar posición de los nodos: si  $j = 1$  actualizar de  $(x_i, y_i, z_i)$  a  $(X_j, Y_j, Z_j)$ , cuando  $j \geq 2$  actualizar de  $(X_{j-1}, Y_{j-1}, Z_{j-1})$  a  $(X_j, Y_j, Z_j)$ .

**7.2.3:** Calcular  $\Delta N^j$  con respecto a la deformación  $\Delta u_j^i$ .

**7.2.4:** Acumular los esfuerzos normales:  $N^{i+1} = N^i + \Delta N^j$ .

**7.2.5:** Para los elementos cable, calcular la variación de fuerzas internas de cada elemento al multiplicar cada rigidez con su respectiva deformación y almacenar en  $\Delta F_{int_j}$ , actualizar la longitud del cable  $L_{o_{i+1}}$  debido a su elongación y además por conservación de la masa actualizar la densidad lineal del elemento a  $m_{i+1}$ .

**7.2.6:** Actualizar las fuerzas internas de los elementos cable:  $F_{int_{i+1}} = F_{int_{i+1}} + \Delta F_{int_j}$ .

**7.3:** Ensamblar la matriz de rigidez global  $K_j^i$ :

**7.3.1:** Para el elemento armadura, respecto a las posiciones usar  $(x_i, y_i, z_i)$  en el ensamble de la matriz geométrica  $k_g$  y  $(X_j, Y_j, Z_j)$  en las demás matrices;

además las propiedades físicas, esfuerzos normales  $N^{i+1}$  y las deformaciones  $u^{i+1}$ .

**7.3.2:** Para el elemento cable emplear la matriz  $K_{ct}$  y usar para su ensamble las propiedades físicas incluido  $m_{i+1}$ , longitud  $L_{o_{i+1}}$  y fuerzas internas  $F^{int}_{i+1}$ .

**7.4:** Calcular la fuerza ejercida por la respuesta de la estructura:  $\Delta f_{sj} = K_j^i \Delta u_j^i$ .

**7.5:** Actualizar el vector fuerza residual  $f_s$ :  $f_{sj+1} = \Delta f_{sj} + f_{sj}$ .

**7.6:** Actualizar la fuerza actuante:  $R_{j+1} = R_j - \Delta f_{sj}$ .

**Paso 8:** Verificar la convergencia: Si  $\|R_{j+1}\|_{\infty} < tol$  ir al paso 9, en caso contrario  $j = j + 1$  y repetir paso 7.

**Paso 9:** Almacenar la posición alcanzada  $(x_{i+1}, y_{i+1}, z_{i+1}) = (X_j, Y_j, Z_j)$  y la fuerza interna alcanzada  $f_i = f_{sj+1}$ .

**Paso 10:** Si  $i \leq N_{inc}$ , entonces ir al paso 4 con  $i = i + 1$ , pero si  $i = N_{inc}$  detener el proceso.

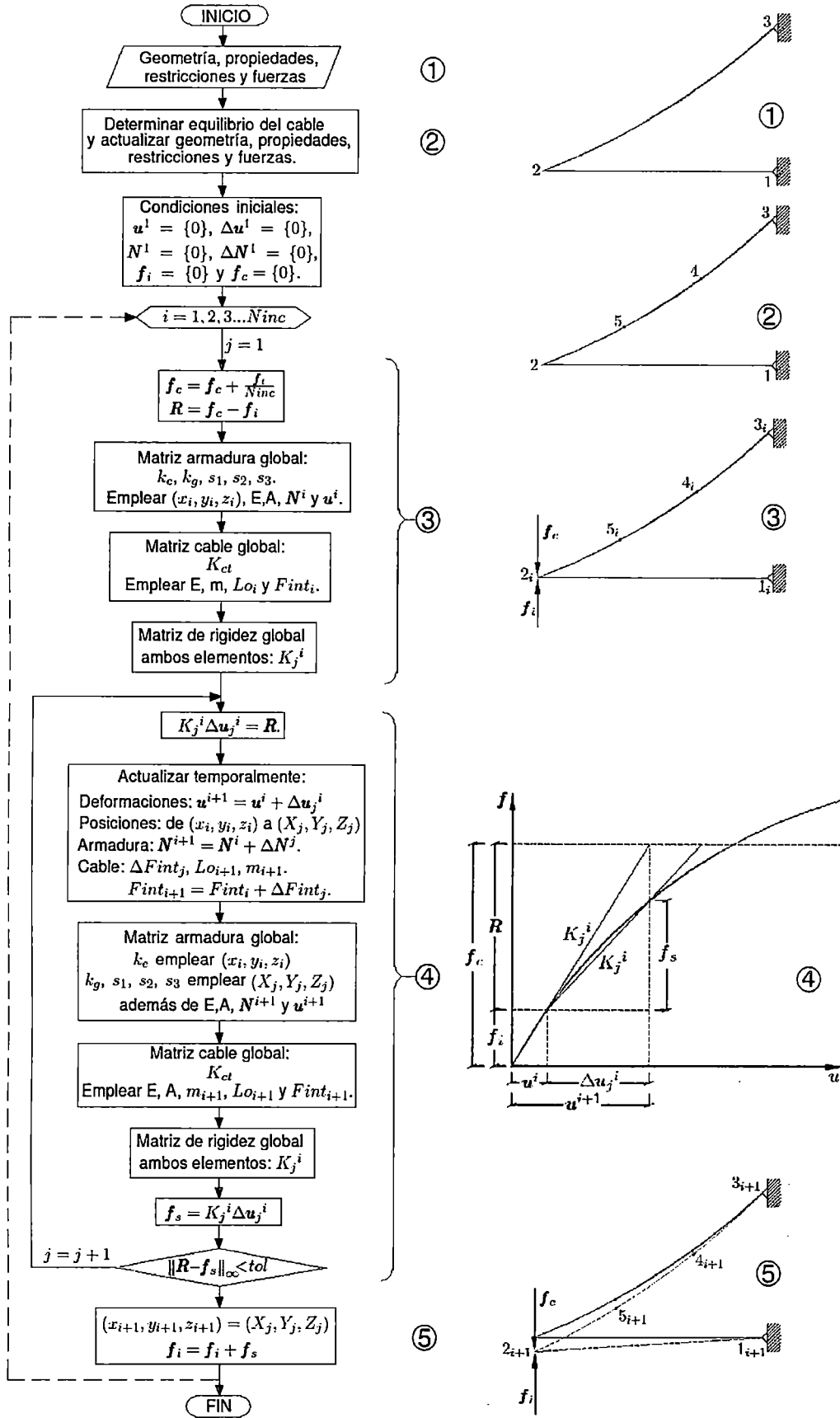


Figura 3.7: Diagrama de flujo, método de la secante.

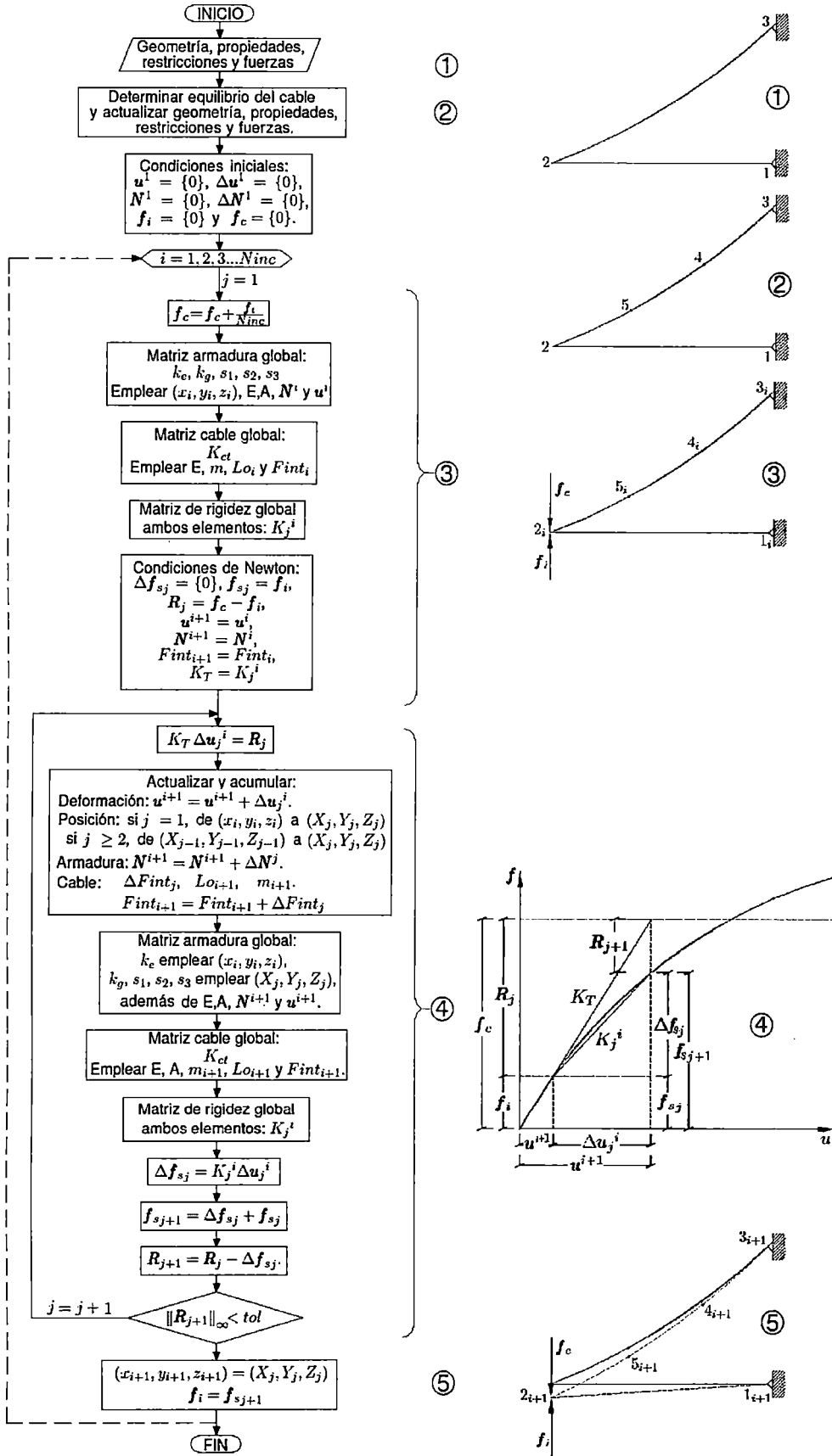


Figura 3.8: Diagrama de flujo, método de Newton.

### 3.3.3. Algoritmo para el análisis dinámico no lineal

El siguiente algoritmo es la continuación del análisis estático, del cual se obtiene la matriz de rigidez global (a la que se denominará  $K_G$ ), geometría deformada  $(x_{i+1}, y_{i+1}, z_{i+1})$ , propiedades físicas  $(E, A, m_{i+1}, L_{o_{i+1}})$ , fuerzas externas  $(f_e)$  y fuerzas internas  $(f_i)$  después de un incremento de cargas  $i = N_{inc}$ . Esta geometría, propiedades y esfuerzos finales son considerados datos de entrada del proceso dinámico. Además se debe ensamblar la matriz de masa global  $M_G$  (2.62) que incluya las masas concentradas  $J_m$ .

El siguiente algoritmo de análisis dinámico se basa en el fundamento teórico desarrollado en el acápite 2.4.

#### Algoritmo 3.3.3. Análisis dinámico no lineal

**Paso 1:** Los datos que se adicionan son: Registro sísmico (aceleración  $\ddot{u}_g$ ), cantidad de datos del registro ( $N_{acel}$ ), dirección del sismo ( $f_d$ ), intervalo de tiempo del registro ( $\Delta t$ ) y desplazamiento inicial ( $u_o$ ).

**Paso 2:** Calcular el vector de masa  $f_m$  que depende de la dirección de análisis del sismo.

**Paso 3:** Determinar los factores de amortiguamiento proporcionales ( $\alpha_K$  y  $\alpha_M$ ) según el amortiguamiento considerado, y ensamblar la matriz de amortiguamiento viscoso global  $C_G$  (2.63).

**Paso 4:** Condiciones iniciales: desplazamientos  $u^1 = u_o$ , velocidad  $\dot{u}^1 = \{0\}$  y aceleración  $\ddot{u}^1 = M_G^{-1}(f_m \Delta \ddot{u}_{g1} - C_G \dot{u} - f_i + f_e)$ .

**Paso 5:** Calcular:  $a = \frac{4}{\Delta t} M_G + 2C_G$  y  $b = 2M_G$ .

**Paso 6:** El proceso se realiza hasta completar la cantidad de datos de aceleración sísmica de cada  $\Delta t$  para  $i = 1, 2, 3, \dots, N_{acel} - 1$ .

**Paso 7:** Para  $j = 1$  de la aceleración  $i$ :

**7.1:** Calcular  $\Delta \hat{P}_i = f_m(\Delta \ddot{u}_{g_i}) + a\dot{u}^i + b\ddot{u}^i$ .

**7.2:** Ensamblar la matriz de rigidez global  $K_j^i$  de la estructura:

**7.2.1:** Para elemento armadura emplear las matrices de rigidez elástica  $k_e$  (2.21) y geométrica  $k_g$  (2.23). Para su ensamble usar las posiciones  $(x_i, y_i, z_i)$ , propiedades físicas y esfuerzos normales  $N^i$ .

**7.2.2:** Para elemento cable emplear la matriz  $K_{ct}$  (2.51) y usar para su ensamble las propiedades físicas, longitud inicial de cada elemento  $L_{0i}$  y fuerzas internas  $F_{int_i}$ .

**7.3:** Formar la matriz de rigidez:  $\hat{K} = K_j^i + \frac{2}{\Delta t} C_G + \frac{4}{\Delta t^2} M_G$ .

**7.4:** Resolver  $\Delta u_j^i$  de  $\Delta \hat{P}_i = \hat{K} \Delta u_j^i$  mediante cualquier método como el de la secante ó el de Newton.

**7.5:** Actualizar:

**7.5.1:** Desplazamiento:  $u^{i+1} = u^i + \Delta u_j^i$ .

**7.5.2:** Velocidad:  $\dot{u}^{i+1} = -\dot{u}^i + \frac{2}{\Delta t} \Delta u_j^i$ .

**7.5.3:** Aceleración:  $\ddot{u}^{i+1} = -\ddot{u}^i - \frac{4}{\Delta t} \dot{u}^i + \frac{4}{\Delta t^2} \Delta u_j^i$ .

**Paso 8:** Si  $i \leq N_{acel} - 1$ , entonces ir al paso 6 con  $i = i + 1$ , pero si  $i = N_{inc} - 1$  detener el proceso.

Estos algoritmos se implementan en MatLab.

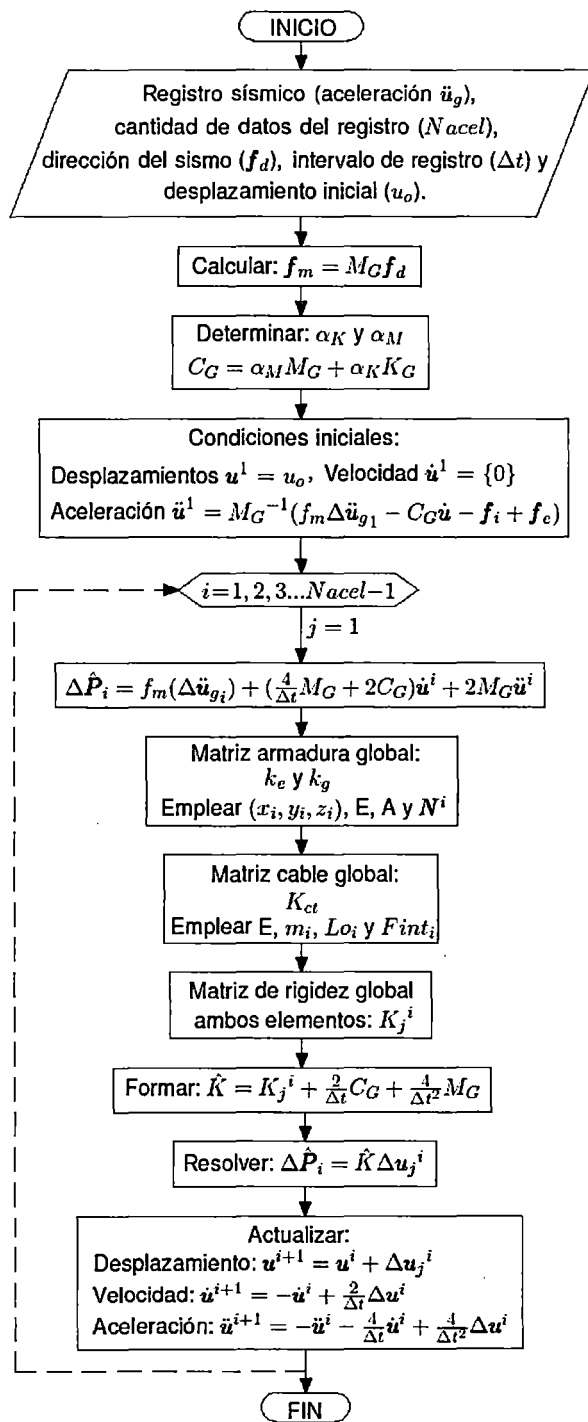


Figura 3.9: Diagrama de flujo de análisis dinámico no lineal.



## CAPÍTULO IV

### APLICACIONES

#### 4.1. ANÁLISIS ESTÁTICO

##### 4.1.1. Cable suspendido a diferente nivel

La aplicación consiste en determinar la tensión del cable y representarla gráficamente junto con la geometría no deformada, como es planteada por M. Pallares y W. Rodriguez [20]. Los datos del problema se encuentran en la tabla (4.1).

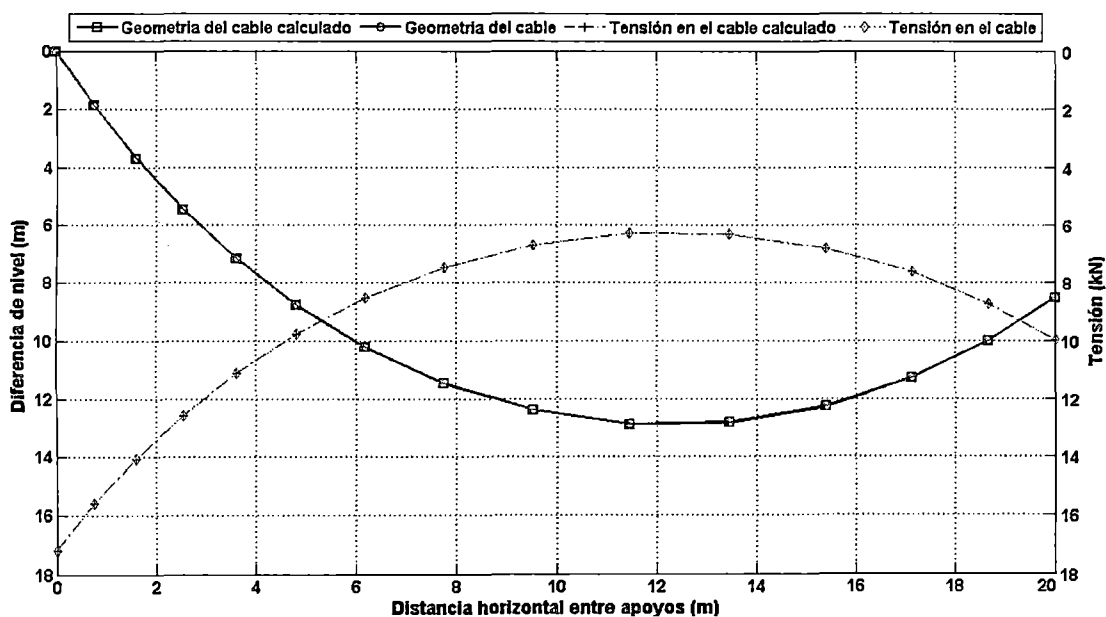
**Tabla 4.1:** Información para el problema.

	Item	Dato	
w:	Peso propio del cable	0,85	<i>kN/m</i>
A:	Área de la sección transversal	$2x10^{-4}$	<i>cm<sup>2</sup></i>
E:	Módulo de elasticidad	$1,5x10^7$	<i>kN/m<sup>2</sup></i>
$L_0$ :	Longitud del cable	28	<i>m</i>
$l_x$ :	Distancia horizontal entre apoyos	20	<i>m</i>
$l_z$ :	Desnivel entre apoyos	8,5	<i>m</i>

El cálculo se realiza mediante un elemento cable el cual converge al punto J con una tolerancia de  $10^{-10}$ . Luego se segmenta internamente en 14 partes en las cuales se determina la tensión de los nodos y sus coordenadas, los resultados se muestran en la tabla (4.2) y la figura (4.1).

**Tabla 4.2:** Comparación de resultados.

Pallares y Rodriguez				Presente trabajo			
s	x(s)	z(s)	Tensión	s	x(s)	z(s)	Tensión
(m)	(m)	(m)	(kN/m)	(m)	(m)	(m)	(kN/m)
0	0,000	0,000	17,172	0	0,000	0,000	17,172
2	0,765	-1,860	15,600	2	0,765	-1,860	15,600
4	1,610	-3,683	14,058	4	1,610	-3,683	14,058
6	2,552	-5,457	12,557	6	2,552	-5,457	12,557
8	3,610	-7,163	11,112	8	3,610	-7,163	11,112
10	4,811	-8,770	9,751	10	4,811	-8,770	9,751
12	6,184	-10,231	8,513	12	6,184	-10,231	8,513
14	7,754	-11,475	7,459	14	7,754	-11,475	7,459
16	9,529	-12,397	6,676	16	9,529	-12,397	6,676
18	11,469	-12,878	6,268	18	11,469	-12,878	6,268
20	13,467	-12,831	6,308	20	13,467	-12,831	6,308
22	15,384	-12,266	6,788	22	15,384	-12,266	6,788
24	17,125	-11,279	7,625	24	17,125	-11,279	7,625
26	18,660	-9,991	8,716	26	18,660	-9,991	8,716
28	20,000	-8,500	9,980	28	20,000	-8,500	9,980



**Figura 4.1:** Comparación numérica de aplicación con apoyos situados a distinto nivel.

De la figura (4.1) y la tabla (4.2), los valores de las coordenadas  $x$  y  $z$  así como la tensión en los nodos del cable dividido en 14 elementos, se ajustan a lo calculado por M. Pallares y W. Rodriguez [20].

Para estimar la ubicación y la tensión en el punto más bajo, se divide al cable en 1000 elementos cable, y se busca la menor coordenada  $z$  correspondiente a la tensión mínima, la cual es igual en magnitud a la componente horizontal  $F_1$  del apoyo I. Estos resultados se aprecian en la figura (4.2) y se listan en la tabla (4.3).

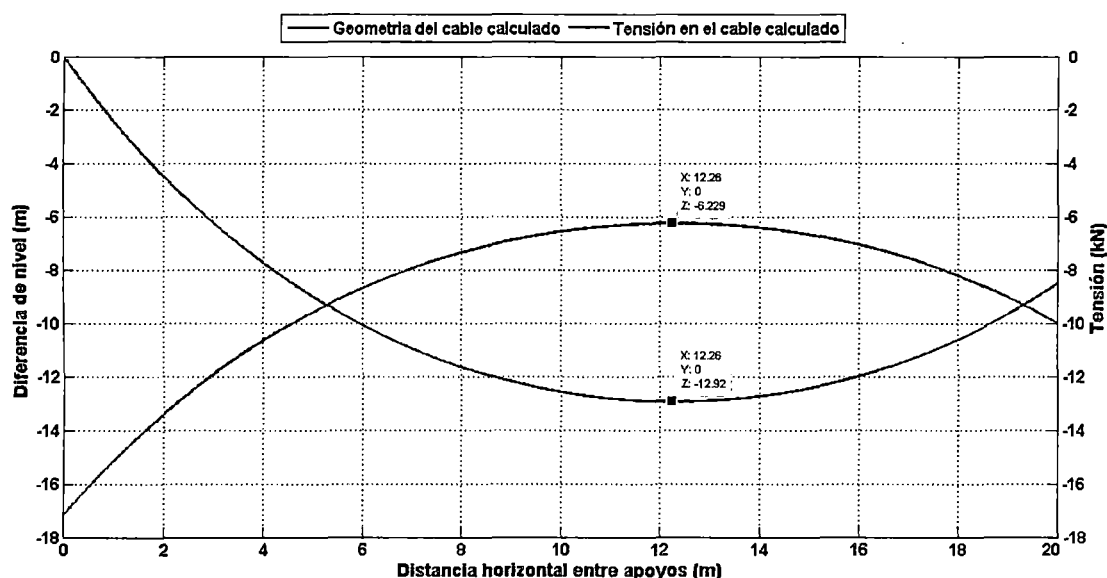


Figura 4.2: Coordenada y tensión mínima en el punto más bajo.

Tabla 4.3: Coordenada, tensión en el punto más bajo y fuerzas en el apoyo I.

Investigador	x (m)	z (m)	Tensión (kN)	$F_1$ (kN)	$F_3$ (kN)
M. Pallares y W. Rodriguez [20]	12,269	-12,925	6,229	-6,299	16,003
Presente trabajo	12,285	-12,925	6,229	-6,229	16,003

### 4.1.2. Cable suspendido con carga puntual

La siguiente aplicación es tomada como referencia para validar diferentes métodos para simular cables. Propuesta inicialmente por Michalos y Birnstiel, luego analizada por O'Brien y Francis (como lo indica Huu [11]), Jayaraman y Knudson [15], Tibert [25], Andreu [1], Huu y Seung [11].

El problema consiste en determinar el desplazamiento del nodo 2, cuando al cable suspendido en condiciones de propio peso, se le aplica una carga concentrada. La configuración inicial y su información están en la figura (4.3) y la tabla (4.4).

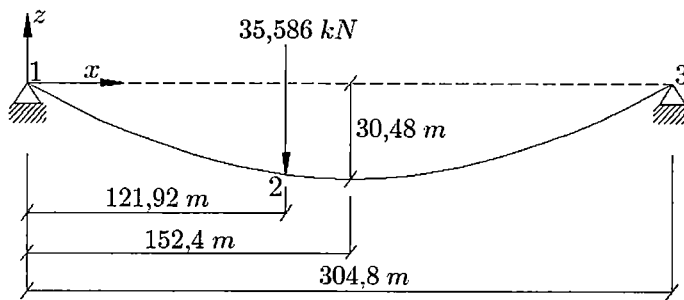


Figura 4.3: Configuración inicial de su geometría bajo peso propio.

Tabla 4.4: Información para el cable suspendido.

Item	Dato
w: Peso propio del cable	46,1167 $N/m$
A: Área de la sección transversal	5,4839 $cm^2$
E: Módulo de elasticidad	13100039 $N/cm^2$
$L_{01-2}$ : Longitud inicial del cable 1-2	125,8470 $m$
$L_{02-3}$ : Longitud inicial del cable 2-3	186,8552 $m$
Flecha bajo peso propio en la posición de carga puntual	29,2759 $m$

El modelo usado está compuesto por dos elementos cable, los cuales han sido derivados de la configuración inicial bajo peso propio. La carga concentrada se aplica incrementalmente hasta completar dicha carga, siendo la diezmilésima parte de la carga total ( $35,586 N / 10000$ ) un incremento de carga aceptable, tal como se aprecia en la figura (4.4).

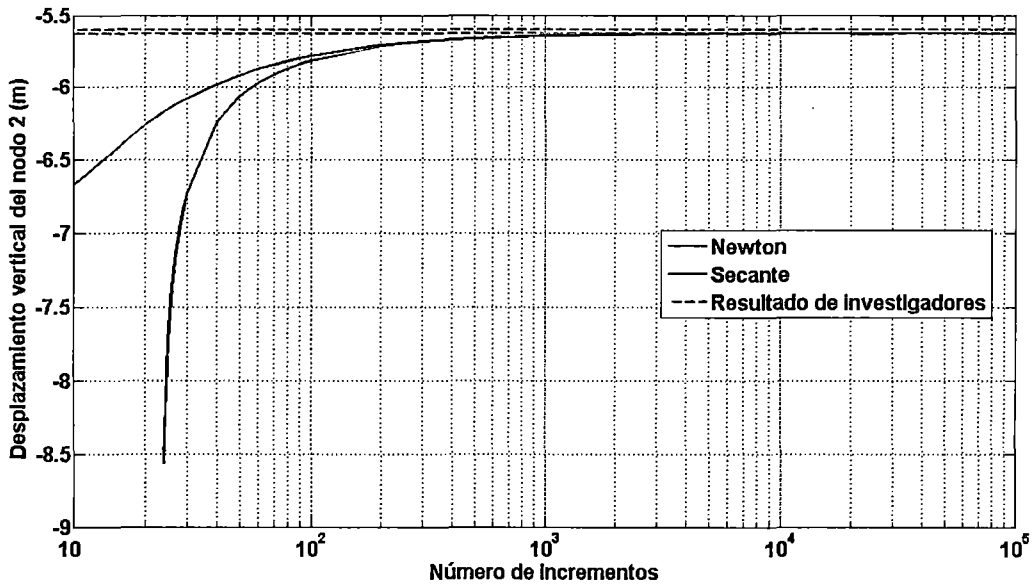


Figura 4.4: Desplazamiento vertical del nodo 2 versus número de incrementos de carga.

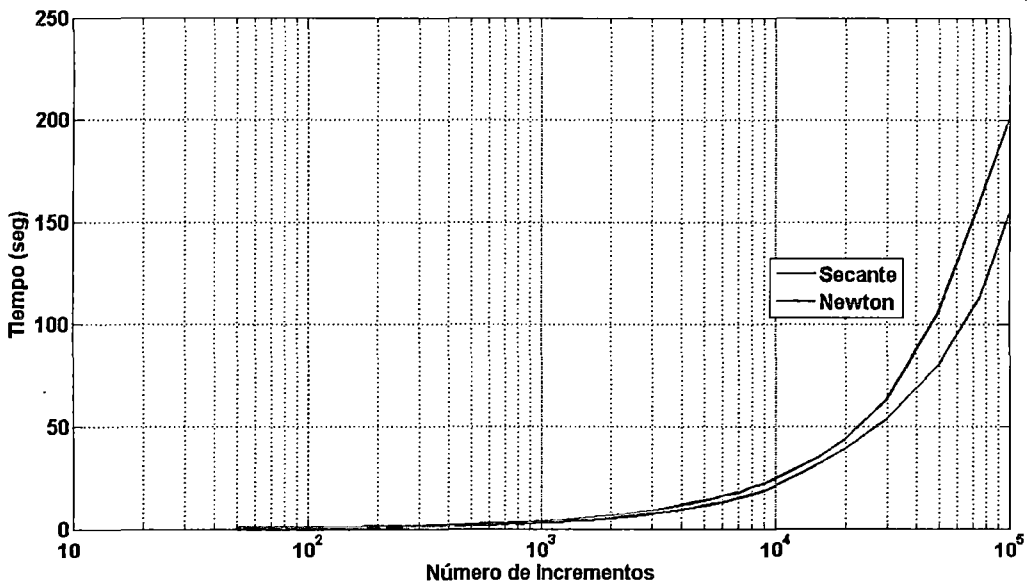


Figura 4.5: Tiempo de convergencia versus número de incrementos de carga.

De las figuras (4.4) y (4.5), el método de la secante se aproxima rápidamente a la solución con una menor cantidad de incrementos y en un menor tiempo de convergencia comparado al método de Newton.

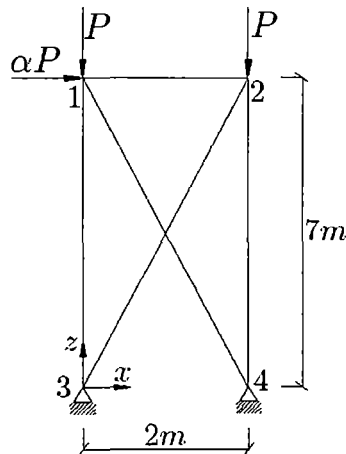
Los desplazamientos calculados, son aceptables al compararlos con los resultados de diversos investigadores, tal como se aprecia en la tabla (4.5).

**Tabla 4.5:** Comparación de desplazamientos del nodo 2 (m).

Investigador	Tipo de elemento	Desplazamiento vertical	Desplazamiento horizontal
Michalos y Birnstiel [11]	Recta elástica	-5,472	-0,845
O'Brien [11]	Catenaria elástica	-5,627	-0,860
Jayaraman y Knudson [15]	Catenaria elástica	-5,626	-0,859
Tibert [25]	Parábola elástica	-5,601	-0,866
Tibert [25]	Catenaria asociada	-5,656	-0,860
Tibert [25]	Catenaria elástica	-5,626	-0,859
Andreu [1]	Catenaria elástica	-5,626	-0,860
Huu y Seung [11]	Catenaria elástica	-5,626	-0,859
<b>Presente trabajo</b>	<b>Catenaria elástica</b>	<b>-5,627</b>	<b>-0,860</b>

### 4.1.3. Armadura bidimensional

Los efectos lineales y no lineales de segundo orden ( $P-\Delta$ ) en un elemento armadura, se determinan usando el algoritmo desarrollado y se comparan con el programa SAP2000. Esta aplicación es planteada por Fook Heng [9], cuyos datos se encuentran en la tabla (4.6). La aplicación consiste en colocar una carga vertical  $P$  en los nodos 1 y 2, y una fracción  $\alpha$  de dicha carga como fuerza horizontal en el nodo 1, tal como es mostrado en la figura (4.6).



**Figura 4.6:** Geometría de armadura bidimensional.

**Tabla 4.6:** Propiedades de la armadura bidimensional.

Item	Dato	
A: Área de sección transversal	157	cm <sup>2</sup>
E: Módulo de elasticidad	205	N/cm <sup>2</sup>

A continuación se muestran las tablas de resultados obtenidos:

**Tabla 4.7:** Desplazamiento del nodo 1 en cm, con  $\alpha = 0,5$ .

P (N)	SAP2000		Presente trabajo		Diferencia (%)	
	Lineal	No lineal	Lineal	No lineal	Lineal	No lineal
0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	-	-
50	7,0945	7,3605	7,0946	7,3901	0,00	-0,40
100	14,1891	15,3824	14,1891	15,4252	0,00	-0,28
150	21,2836	24,1321	21,2837	24,1987	0,00	-0,28
200	28,3781	33,7733	28,3783	33,8249	0,00	-0,15
250	35,4726	44,3400	35,4729	44,4457	0,00	-0,24
300	42,5671	56,0027	42,5674	56,2413	0,00	-0,43
350	49,6617	69,0266	49,662	69,4458	0,00	-0,61
400	56,7562	84,0064	56,7566	84,3743	0,00	-0,44
450	63,8507	100,7695	63,8512	101,4683	0,00	-0,69

**Tabla 4.8:** Desplazamiento del nodo 1 en cm, con  $\alpha = 0,7$ .

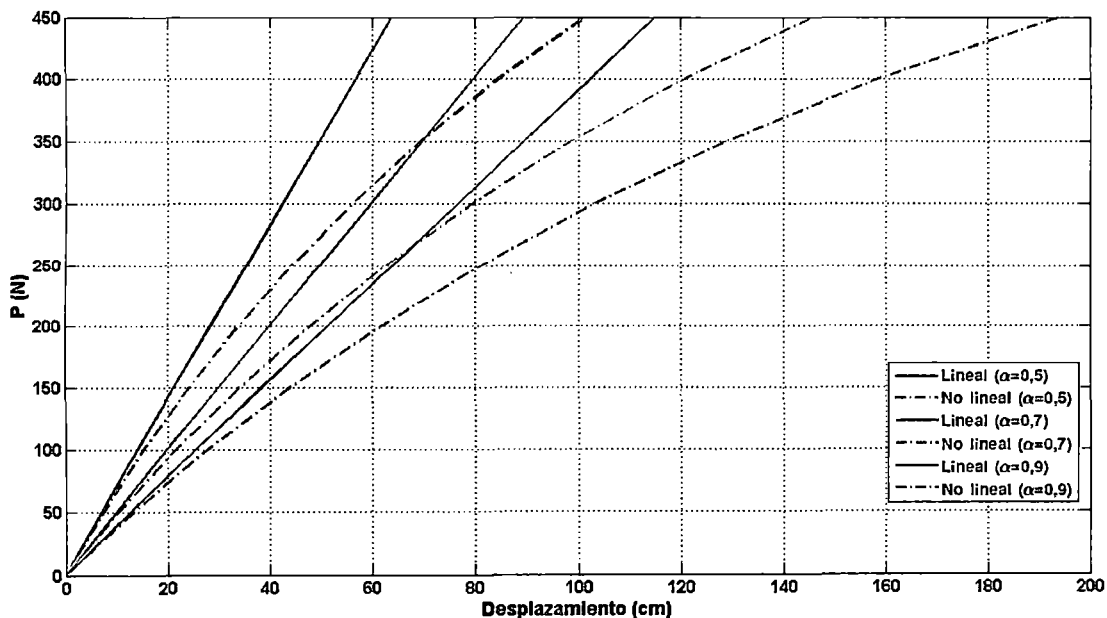
P (N)	SAP2000		Presente trabajo		Diferencia (%)	
	Lineal	No lineal	Lineal	No lineal	Lineal	No lineal
0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	-	-
50	9,9406	10,2972	9,9407	10,3629	0,00	0,63
100	19,8813	21,6187	19,8814	21,6505	0,00	0,15
150	29,8219	33,9628	29,8221	34,0036	0,00	0,12
200	39,7626	47,3779	39,7629	47,5984	0,00	0,46
250	49,7032	62,5121	49,7036	62,6606	0,00	0,24
300	59,6439	79,2348	59,6443	79,4882	0,00	0,32
350	69,5845	97,9714	69,585	98,4909	0,00	0,53
400	79,5252	119,2117	79,5257	120,2623	0,00	0,87
450	89,4658	143,5468	89,4664	145,7285	0,00	1,50

**Tabla 4.9:** Desplazamiento del nodo 1 en cm, con  $\alpha = 0,9$ .

P (N)	SAP2000		Presente trabajo		Diferencia (%)	
	Lineal	No lineal	Lineal	No lineal	Lineal	No lineal
0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	-	-
50	12,7869	13,3407	12,7868	13,3274	0,00	0,1
100	25,5737	27,8993	25,5735	27,8138	0,00	0,31
150	38,3606	43,8720	38,3603	43,7362	0,00	0,31
200	51,1474	61,5116	51,1471	61,3909	0,00	0,2
250	63,9343	81,1536	63,9338	80,9073	0,00	0,3
300	76,7211	103,2638	76,7206	102,7169	0,00	0,53
350	89,508	128,5274	89,5073	127,355	0,00	0,91
400	102,2948	158,039	102,2941	155,4844	0,00	1,62
450	115,0817	193,7816	115,0809	189,0041	0,00	2,47

De las tablas (4.7), (4.8) y (4.9), en el análisis lineal no existe diferencia con el programa SAP2000, pero en el análisis no lineal la diferencia es menor a 2,47 % cuando se aplica un 90 % de la carga vertical, lo cual es aceptable.

La figura (4.7), muestra la diferencia de considerar un comportamiento lineal y no lineal en la determinación de desplazamientos.



**Figura 4.7:** Diagrama carga P versus desplazamiento lateral para cada  $\alpha$ .



En la figura (4.8) se muestra la razón de desplazamientos entre el comportamiento no lineal y el comportamiento lineal, en la cual se aprecia que ésta diferencia se incrementa con el aumento de la carga  $P$  y por ende la carga lateral  $\alpha P$ .

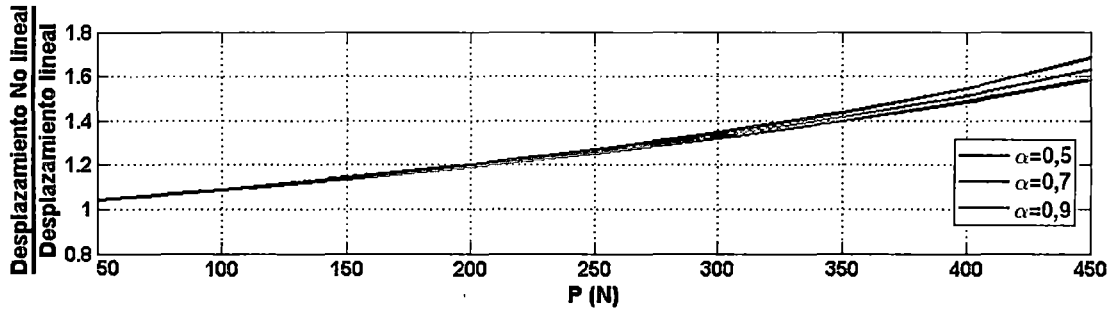


Figura 4.8: Relación de desplazamiento no lineal y lineal para cada valor de  $\alpha$ .

#### 4.1.4. Armadura tridimensional

Para verificar el algoritmo desarrollado en armaduras tridimensionales, se analiza una sección de torre de 3,00 m de altura, sujeta a una carga lateral de 1000 kg.

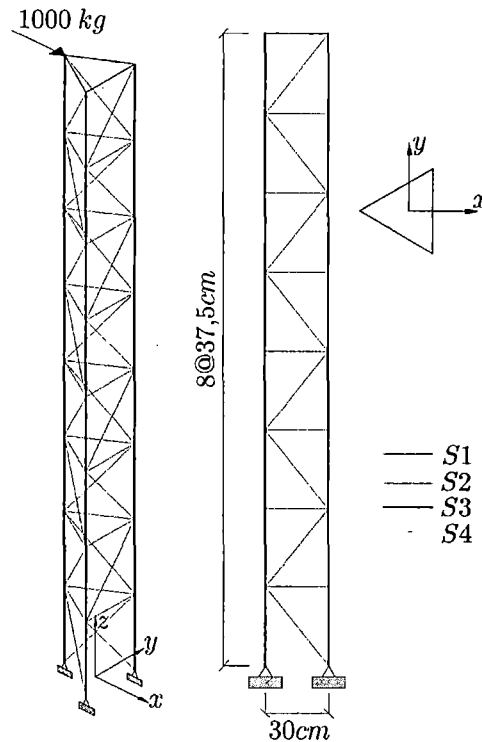


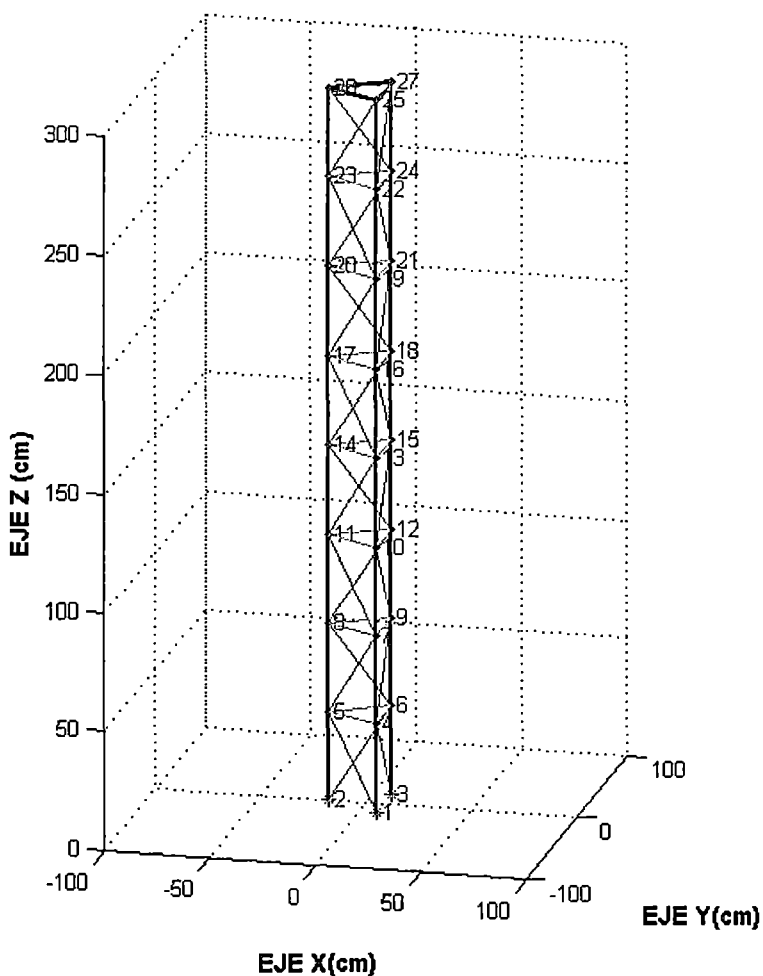
Figura 4.9: Geometría de torre tridimensional.

El presente modelo también es analizado en SAP2000, para verificar la diferencia entre ambos programas. La configuración geométrica y sus propiedades físicas son presentadas en la figura (4.9) y en la tabla (4.10) respectivamente.

**Tabla 4.10:** Propiedades de la armadura tridimensional.

Sección	Tipo	Área (cm <sup>2</sup> )	E (kg/cm <sup>2</sup> )	Densidad (kg/cm <sup>3</sup> )
S1:	L2"x2"x3/16"	4,6119	2038901,9	0,007849
S2:	L1,5"x1,5"x3/16"	3,4022	2038901,9	0,007849
S3:	PX1,5"	6,8912	2038901,9	0,007849
S4:	Ø5/8"	1,9793	2038901,9	0,007849

La denominación de los nodos y la geometría tridimensional, se muestran en la figura (4.10).



**Figura 4.10:** Geometría con los nodos de la estructura tridimensional.

El primer análisis es el lineal, para ello se resuelve la matriz global de rigidez elástica  $K_e$  en un único incremento de carga, y se obtienen los resultados listados en la tabla (4.11).

**Tabla 4.11:** Desplazamientos del análisis lineal (cm).

nodo	SAP2000			Presente trabajo			Diferencia (%)		
	$u_x$	$u_y$	$u_z$	$u_x$	$u_y$	$u_z$	$u_x$	$u_y$	$u_z$
4	0,05227	-0,01684	-0,01347	0,0523	-0,01685	-0,01348	-0,06	-0,09	-0,09
5	0,05227	-0,01684	0,02887	0,0523	-0,01685	0,02889	-0,06	-0,09	-0,09
6	0,05227	-0,01684	-0,0154	0,0523	-0,01685	-0,01541	-0,06	-0,09	-0,09
7	0,16287	-1,3E-14	-0,02694	0,16298	-7,1E-15	-0,02697	-0,07	43,25	-0,09
8	0,16287	3,6E-15	0,05388	0,16298	-2,3E-15	0,05393	-0,07	164,81	-0,09
9	0,16287	-1,3E-14	-0,02694	0,16298	-7,1E-15	-0,02697	-0,07	43,20	-0,09
10	0,32347	-0,01203	-0,03656	0,32371	-0,01204	-0,0366	-0,08	-0,09	-0,09
11	0,32347	-0,01203	0,07505	0,32371	-0,01204	0,07512	-0,08	-0,09	-0,09
12	0,32347	-0,01203	-0,03849	0,32371	-0,01204	-0,03852	-0,08	-0,09	-0,09
13	0,52573	-3,2E-14	-0,04619	0,52614	-2,3E-14	-0,04623	-0,08	27,86	-0,09
14	0,52573	-7,8E-16	0,09237	0,52614	-1,2E-14	0,09245	-0,08	-1428,63	-0,09
15	0,52573	-3,2E-14	-0,04619	0,52614	-2,3E-14	-0,04623	-0,08	27,86	-0,09
16	0,76132	-0,00722	-0,05196	0,76193	-0,00722	-0,05201	-0,08	-0,10	-0,09
17	0,76132	-0,00722	0,10584	0,76193	-0,00722	0,10594	-0,08	-0,10	-0,09
18	0,76132	-0,00722	-0,05388	0,76193	-0,00722	-0,05393	-0,08	-0,10	-0,09
19	1,02191	-5,4E-14	-0,05773	1,02274	-4,3E-14	-0,05778	-0,08	21,60	-0,09
20	1,02191	-7,6E-15	0,11546	1,02274	-2,7E-14	0,11557	-0,08	-261,15	-0,09
21	1,02191	-5,4E-14	-0,05773	1,02274	-4,3E-14	-0,05778	-0,08	21,39	-0,09
22	1,29916	-0,00241	-0,05966	1,30023	-0,00241	-0,05971	-0,08	-0,11	-0,09
23	1,29916	-0,00241	0,12124	1,30023	-0,00241	0,12135	-0,08	-0,11	-0,09
24	1,29916	-0,00241	-0,06158	1,30023	-0,00241	-0,06164	-0,08	-0,11	-0,09
25	1,58475	-7,2E-14	-0,06158	1,58606	-6,8E-14	-0,06164	-0,08	6,49	-0,09
26	1,58581	-0,00184	0,12316	1,58713	-0,00184	0,12327	-0,08	0,00	-0,09
27	1,58475	-7,2E-14	-0,06158	1,58606	-6,8E-14	-0,06164	-0,08	6,46	-0,09

En la tabla (4.11), se puede ver aparentemente grandes diferencias en las componentes  $u_y$ ; sin embargo, los desplazamientos son no apreciables debido a que el desplazamiento de esos nodos en la componente  $u_y$  está en el orden de magnitud de  $10^{-14}$ .

El análisis no lineal se realiza con incrementos de la diezmilésima parte de la carga total

externa (1000 kg/10000), y se obtienen los desplazamientos mostrados en la tabla (4.12), cuya deformada se muestra en la figura (4.11).

**Tabla 4.12:** Desplazamientos del análisis no lineal (cm).

nodo	SAP2000			Presente trabajo			Diferencia (%)		
	$u_x$	$u_y$	$u_z$	$u_x$	$u_y$	$u_z$	$u_x$	$u_y$	$u_z$
4	0,05191	-0,01702	-0,01353	0,05194	-0,01704	-0,01354	-0,06	-0,10	-0,09
5	0,05235	-0,01639	0,02882	0,05238	-0,01641	0,02885	-0,06	-0,10	-0,09
6	0,05259	-0,01702	-0,01546	0,05262	-0,01704	-0,01547	-0,06	-0,09	-0,09
7	0,16281	-0,00004	-0,02719	0,16292	-0,00004	-0,02721	-0,07	-1,20	-0,09
8	0,16304	0,00004	0,05367	0,16316	0,00003	0,05372	-0,07	1,11	-0,09
9	0,16293	-0,00004	-0,02719	0,16304	-0,00004	-0,02721	-0,07	0,59	-0,09
10	0,32325	-0,01216	-0,03717	0,32349	-0,01218	-0,0372	-0,08	-0,09	-0,09
11	0,32378	-0,01171	0,0745	0,32402	-0,01172	0,07457	-0,08	-0,09	-0,09
12	0,32375	-0,01216	-0,03909	0,32399	-0,01218	-0,03913	-0,08	-0,10	-0,09
13	0,5257	-0,00007	-0,04735	0,52611	-0,00007	-0,04739	-0,08	0,38	-0,09
14	0,52621	0,00013	0,09128	0,52662	0,00013	0,09137	-0,08	-0,12	-0,09
15	0,52594	-0,00007	-0,04735	0,52635	-0,00007	-0,04739	-0,08	0,25	-0,10
16	0,7613	-0,00732	-0,05386	0,76192	-0,00733	-0,05391	-0,08	-0,10	-0,10
17	0,76199	-0,00698	0,10403	0,76261	-0,00699	0,10412	-0,08	-0,10	-0,09
18	0,76168	-0,00732	-0,05579	0,76229	-0,00733	-0,05584	-0,08	-0,10	-0,09
19	1,02204	-0,00008	-0,06055	1,02288	-0,00008	-0,0606	-0,08	-0,22	-0,10
20	1,02278	0,00018	0,11276	1,02362	0,00018	0,11286	-0,08	0,15	-0,09
21	1,02235	-0,00008	-0,06055	1,02319	-0,00008	-0,06061	-0,08	-0,24	-0,10
22	1,29946	-0,00249	-0,0635	1,30053	-0,00249	-0,06356	-0,08	-0,09	-0,10
23	1,30025	-0,00222	0,11752	1,30133	-0,00222	0,11763	-0,08	-0,08	-0,09
24	1,29976	-0,00249	-0,06542	1,30084	-0,00249	-0,06549	-0,08	-0,08	-0,10
25	1,58522	-0,00008	-0,06651	1,58655	-0,00008	-0,06658	-0,08	0,47	-0,10
26	1,58711	-0,00164	0,11837	1,58844	-0,00164	0,11847	-0,08	0,01	-0,09
27	1,58555	-0,00008	-0,06651	1,58688	-0,00008	-0,06658	-0,08	0,38	-0,10

En la tabla (4.12), la diferencia de los desplazamientos tiene un máximo de 1,2 %, lo que demuestra una buena aproximación del algoritmo propuesto con el programa SAP2000, a pesar de usar matrices de orden superior.

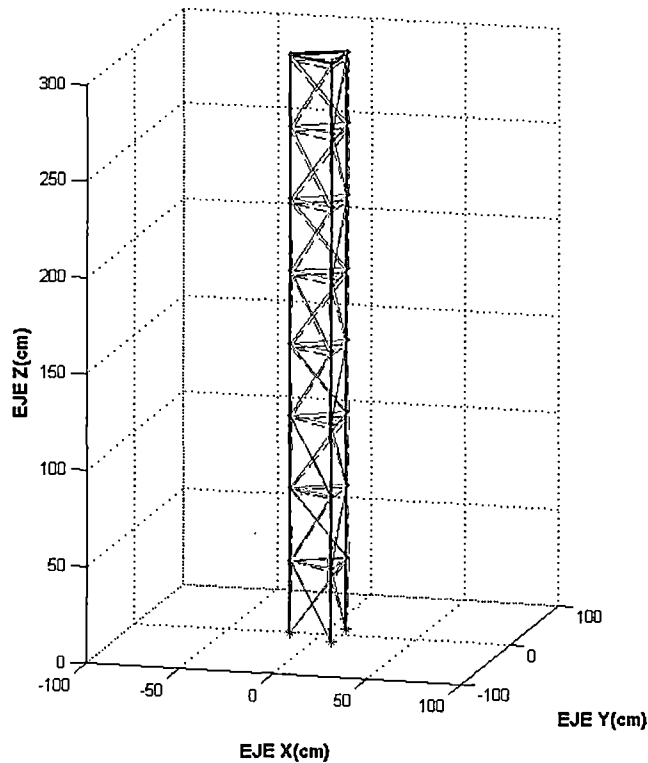


Figura 4.11: Deformación del análisis no lineal (no a escala).

Si se analiza la aproximación tomando como parámetro el número necesario de incrementos de carga, el método de la secante se aproxima más rápido a la solución, como se observa en la figura (4.12).

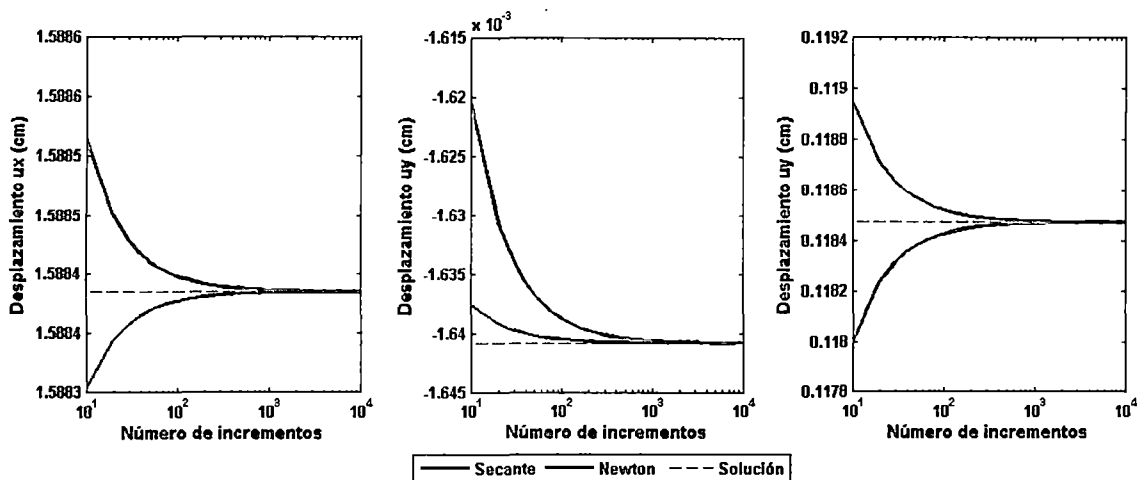


Figura 4.12: Desplazamientos con número de incrementos para el nodo 26 de la armadura, al considerar análisis no lineal.

Al considerar como parámetro el tiempo de solución, ambos métodos tienen similar tiempo de convergencia, salvo en el rango de 800 a 4500 incrementos de carga, donde el método de la secante es más rápido, como se muestra en la figura (4.13).

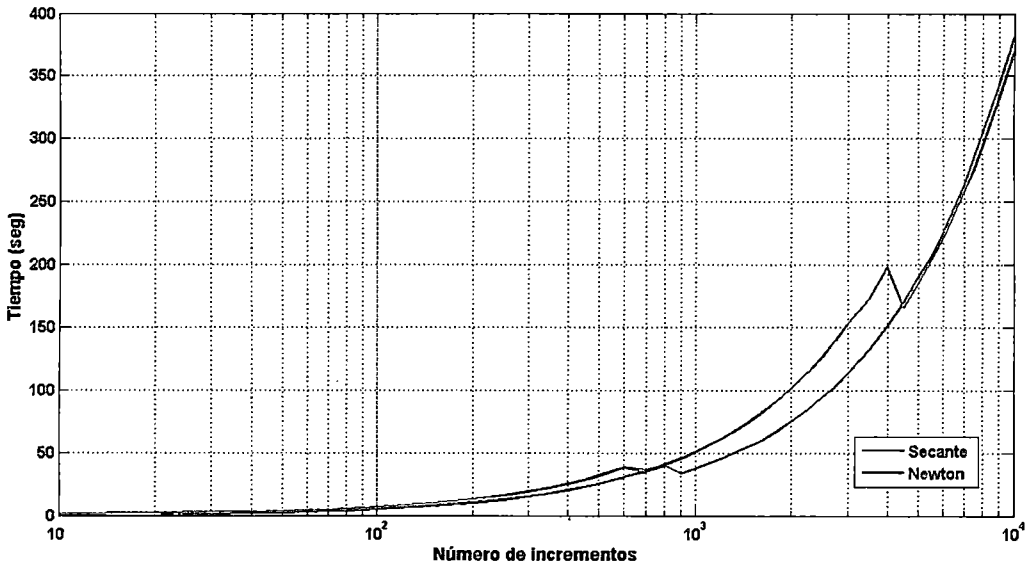


Figura 4.13: Número de incrementos de carga versus tiempo de solución.

En la figura (4.13), se observan particulares saltos, los que indican mejor estabilidad del método de la secante para número de incrementos de carga menores a 4000.

#### 4.1.5. Armadura tridimensional con cables atirantados

La siguiente aplicación tiene por objetivo acoplar una armadura tridimensional con cables atirantados en una sola estructura, a la cual luego de determinar sus desplazamientos en condiciones de peso propio y cuando al cable es tensado en la parte inferior con 30 kg, se le aplica una carga lateral de 1000 kg. Esta estructura también es analizada con el programa SAP2000 para verificar los desplazamientos nodales.

Otro objetivo es verificar la cantidad de elementos cable necesarios para obtener resultados más precisos en la solución.

Tabla 4.13: Propiedades del elemento cable.

Sección	Tipo	Área (cm <sup>2</sup> )	E (kg/cm <sup>2</sup> )	Densidad (kg/cm <sup>3</sup> )
S5:	Ø1/4"	0,3167	2038901,9	0,007849

Las propiedades físicas del elemento armadura son similares a las de la aplicación 4.1.4, mientras que las propiedades del elemento cable se encuentran en la tabla (4.13). El modelo usado se muestra en la figura (4.14).

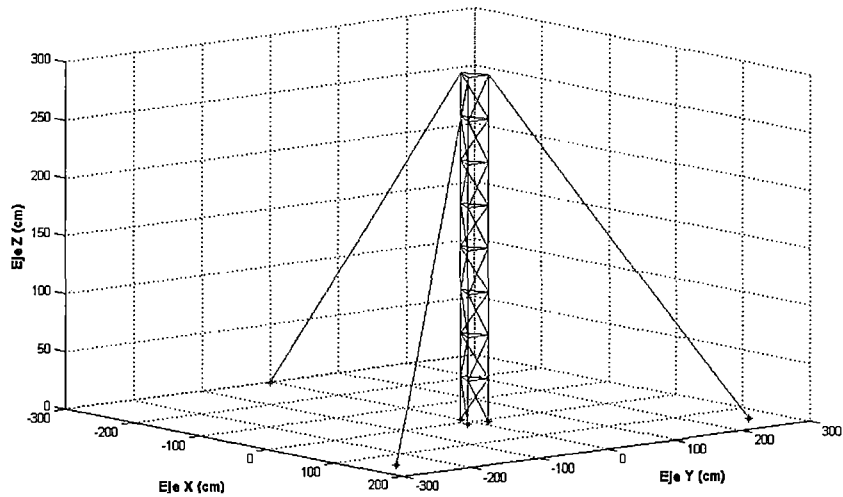


Figura 4.14: Geometría de torre tridimensional arriostrada.

El análisis no lineal por peso propio y el cable tensado, se realiza con incrementos de la centésima parte de la carga (peso propio/100), obteniéndose la deformación mostrada en la figura (4.15) y desplazamientos listados en la tabla (4.14). Cabe indicar que dichos desplazamientos son similares cuando al cable que arriostra se subdivide en varios elementos antes de aplicar la carga lateral.

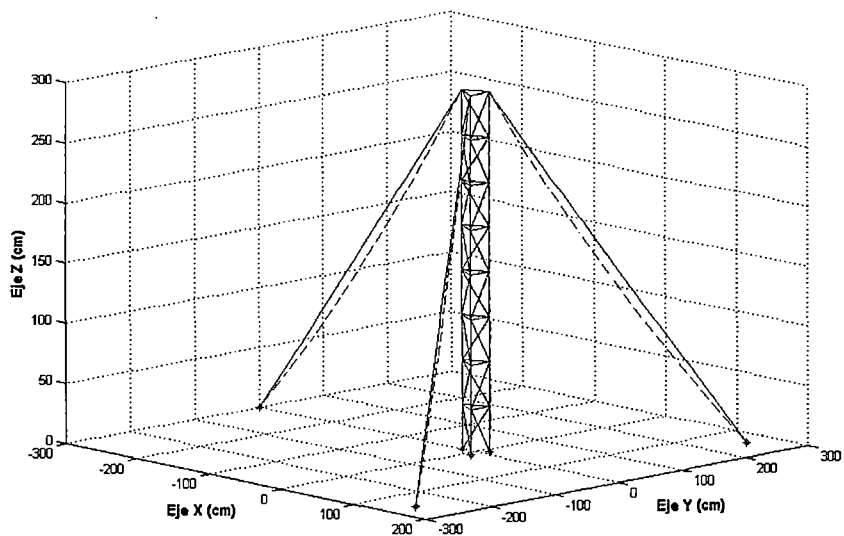


Figura 4.15: Geometría deformada por peso propio de torre tridimensional arriostrada (no a escala).

**Tabla 4.14:** Desplazamientos del análisis no lineal por peso propio (cm).

nodo	SAP2000			Presente trabajo			Diferencias (%)		
	$u_x$	$u_y$	$u_z$	$u_x$	$u_y$	$u_z$	$u_x$	$u_y$	$u_z$
4	-0,00029	-0,00017	-0,00013	-0,00029	-0,00017	-0,00013	-0,23	-0,05	0,11
5	2,03E-9	0,00033	-0,00013	5,20E-9	0,00033	-0,00013	-156,04	-0,05	0,11
6	0,00029	-0,00017	-0,00013	0,00029	-0,00017	-0,00013	-0,23	-0,05	0,11
7	-0,00002	-0,00001	-0,00026	-0,00002	-0,00001	-0,00026	1,78	0,78	-0,06
8	1,745-9	0,00002	-0,00026	1,77E-9	0,00002	-0,00026	-1,55	0,76	-0,06
9	0,00002	-0,00001	-0,00026	0,00002	-0,00001	-0,00026	1,78	0,75	-0,06
10	-0,00027	-0,00015	-0,00037	-0,00027	-0,00015	-0,00037	0,02	-0,08	0,02
11	1,48E-9	0,00031	-0,00037	4,20E-9	0,00031	-0,00037	-183,63	-0,08	0,02
12	0,00027	-0,00015	-0,00037	0,00027	-0,00015	-0,00037	0,02	-0,08	0,02
13	-0,00004	-0,00002	-0,00047	-0,00004	-0,00002	-0,00047	-0,62	0,76	-0,03
14	1,24E-9	0,00005	-0,00047	1,30E-9	0,00005	-0,00047	-4,80	0,76	-0,03
15	0,00004	-0,00002	-0,00047	0,00004	-0,00002	-0,00047	-0,62	0,75	-0,03
16	-0,00025	-0,00014	-0,00057	-0,00025	-0,00014	-0,00057	-0,10	-0,12	-0,15
17	1,03E-9	0,00028	-0,00057	3,32E-9	0,00028	-0,00057	-223,77	-0,12	-0,15
18	0,00025	-0,00014	-0,00057	0,00025	-0,00014	-0,00057	-0,10	-0,12	-0,15
19	-0,00006	-0,00004	-0,00065	-0,00006	-0,00004	-0,00065	0,19	0,76	-0,15
20	8,36E-10	0,00007	-0,00065	9,55E-10	0,00007	-0,00065	-14,25	-0,64	-0,15
21	0,00006	-0,00004	-0,00065	0,00006	-0,00004	-0,00065	0,19	0,76	-0,15
22	-0,00023	-0,00013	-0,00073	-0,00023	-0,00013	-0,00073	-0,24	-0,16	-0,08
23	6,27-10	0,00026	-0,00073	2,53E-9	0,00026	-0,00073	-303,11	-0,17	-0,08
24	0,00023	-0,00013	-0,00073	0,00023	-0,00013	-0,00073	-0,24	-0,17	-0,08
25	-0,00010	-0,00009	-0,00080	-0,00010	-0,00009	-0,00080	-0,30	-0,47	-0,08
26	-0,00002	0,00013	-0,00080	-0,00002	0,00013	-0,00080	0,89	-0,03	-0,08
27	0,00013	-0,00005	-0,00080	0,00013	-0,00005	-0,00080	-0,09	0,75	-0,08

En la tabla (4.14), se muestran aparentemente grandes diferencias en la componente  $u_x$ , pero los desplazamientos son no apreciables debido a que el desplazamiento de esos nodos en la componente  $u_x$  está en el orden de magnitud de  $10^{-9}$ .

Cuando se le aplica la carga lateral de 1000 kg, se registra el desplazamiento del nodo 26 para diversas subdivisiones del elemento cable, tal como se muestra en la figura (4.16), con la finalidad de determinar la cantidad necesaria de elementos cable. De esta figura se observa una tendencia a emplear más de 10 divisiones por cable. Cabe indicar que mientras más



elementos cable se adicionen, este difiere más con los resultados del programa SAP2000.

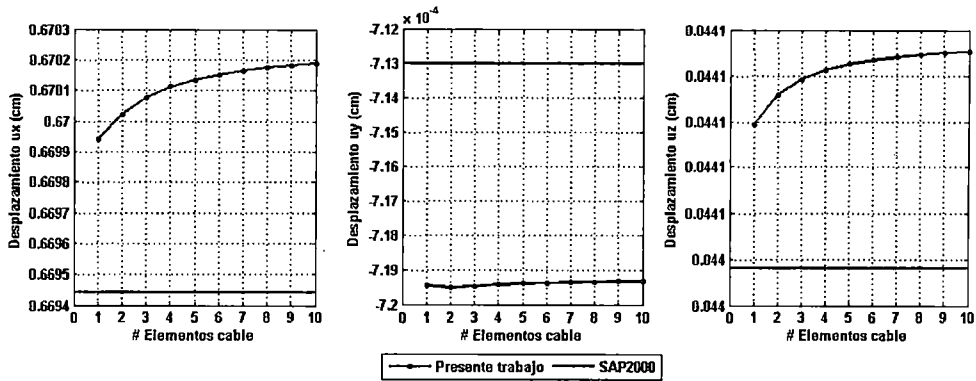


Figura 4.16: Desplazamientos en las tres componentes del nodo 26 con diferentes cantidades de elementos cable.

#### 4.1.6. Armadura tridimensional con cables pre-esforzados

Se analiza el aporte en rigidez y el comportamiento de los cables atirantados con diferentes cargas de pre-esforzado ( $T_0$ ). Para ello se considera un elemento armadura vertical que tiene una sección adecuada de rigidez axial y una deformación insignificante debida a la tensión ejercida en los cables, al cual se le aplican diversas cargas laterales en el nodo 2 en la dirección  $x$ , con sentido positivo y negativo.

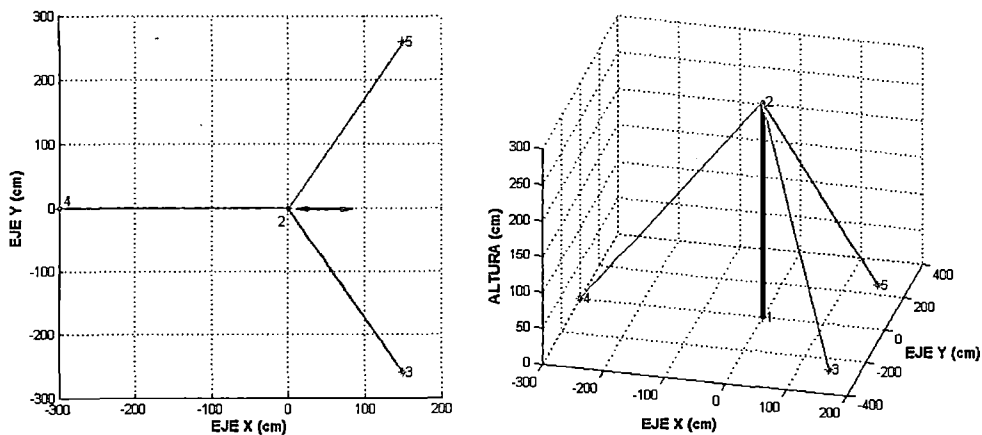
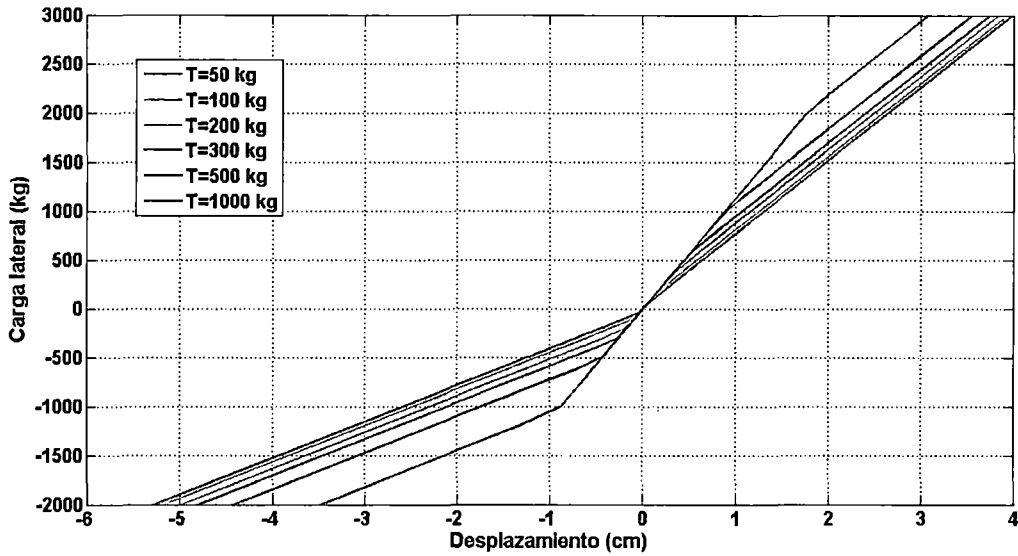


Figura 4.17: Modelo tridimensional analizado.

Los resultados obtenidos para diversas tensiones y fuerzas laterales en la dirección del eje  $x$  se muestran en la figura (4.18).

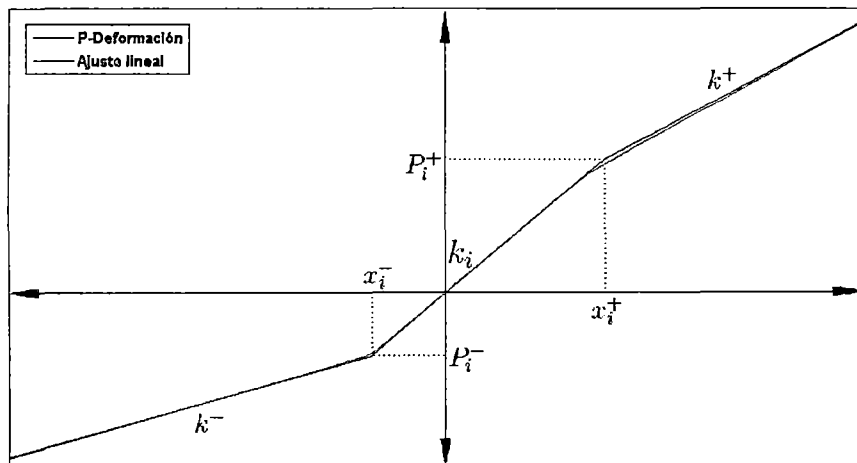
**Tabla 4.15:** Propiedades de los elementos.

Sección	Tipo	Área (cm <sup>2</sup> )	E (kg/cm <sup>2</sup> )	Densidad (kg/cm <sup>3</sup> )
Armadura:	Ø5cm	19,63	2038901,9	0,007849
Cable:	Ø1/4"	0,3167	2038901,9	0,007849



**Figura 4.18:** Diagrama de carga versus desplazamiento lateral del nodo 2.

Si se realiza un ajuste lineal de datos en cada curva de tensión, tal como se indica en la figura (4.19), se pueden determinar los puntos de inflexión  $(x_i^+, P_i^+)$  y  $(x_i^-, P_i^-)$  de cada curva, tal como se lista en la tabla (4.16).

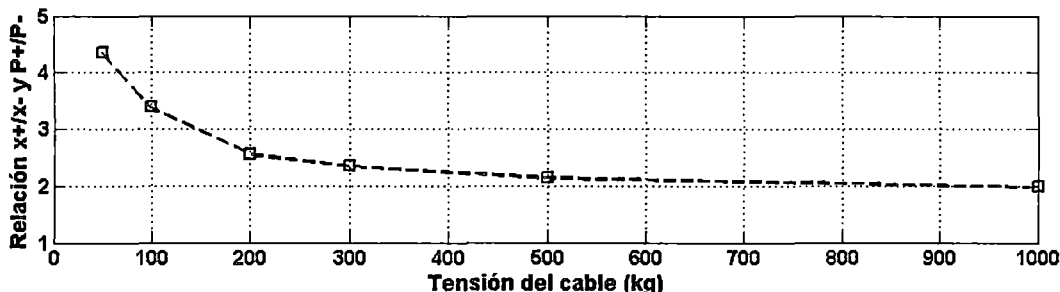


**Figura 4.19:** Envoltura de cada curva de tensión.

**Tabla 4.16:** Puntos de inflexión en cada curva de tensión.

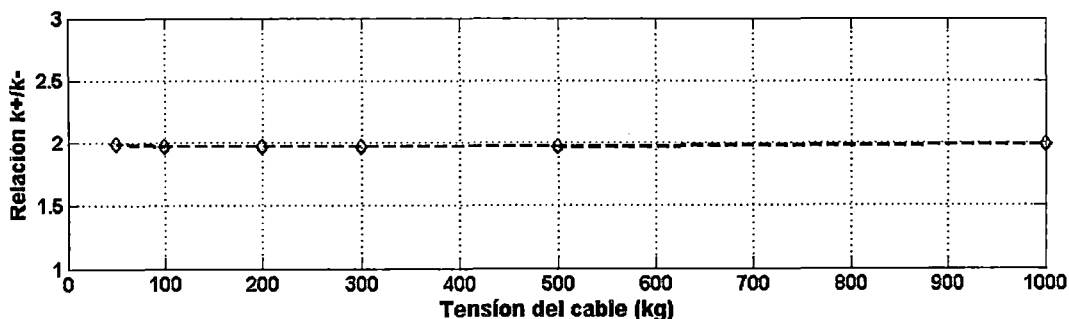
Tensión (kg)	$P_i^+$ (kg)	$P_i^-$ (kg)	$\frac{P_i^+}{P_i^-}$	$x_i^+$ (cm)	$x_i^-$ (cm)	$\frac{x_i^+}{x_i^-}$
50	331,4	-75,9	-4,37	0,363	-0,083	-4,37
100	404,1	-119,1	-3,39	0,361	-0,107	-3,37
200	571,7	-232,6	-2,46	0,501	-0,204	-2,46
300	761,3	-322,9	-2,36	0,667	-0,283	-2,36
500	1124,4	-523,5	-2,15	0,985	-0,459	-2,15
1000	2066,6	-1042,1	-1,98	1,811	-0,913	-1,98

La figura (4.20), relaciona el punto de inflexión del lado positivo determinado por la coordenada  $(x_i^+, P_i^+)$ , con la inflexión del lado negativo descrito por la coordenada  $(x_i^-, P_i^-)$ , donde para tensiones mayores a  $T=1000 \text{ kg}$  se hace asintótica, es decir:  $\frac{x_i^+}{x_i^-} \approx 2$  y  $\frac{P_i^+}{P_i^-} \approx 2$ .



**Figura 4.20:** Relación de las fuerzas  $(\frac{P_i^+}{P_i^-})$  y desplazamientos  $(\frac{x_i^+}{x_i^-})$  versus tensión de los cables.

Comparando las rigideces asintóticas del lado positivo  $k^+$  y negativo  $k^-$ , como se muestra en la figura (4.21), el aporte de rigidez de los tres cables en la dirección  $x^+$  es aproximadamente el doble de la rigidez en la dirección  $x^-$ , es decir:  $\frac{k^+}{k^-} \approx 2$ .



**Figura 4.21:** Relación de rigideces asintóticas.

Al relacionar la rigidez inicial  $k_i$  con la rigidez asintótica del lado negativo  $k^-$ , tal como se muestra en la figura (4.22), la relación de rigideces para una tensión  $T_o \geq 100$  kg es  $\frac{k_i}{k^-} \approx 3,07$ , y para las condiciones descritas en ésta aplicación, se tiene  $k^- \approx 370$  kg/cm.

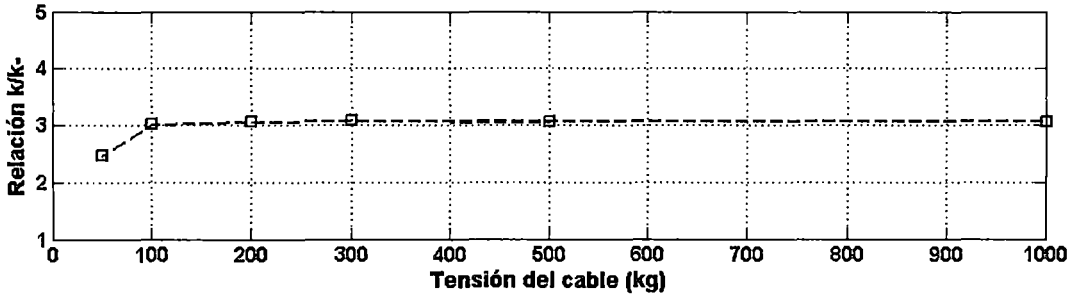


Figura 4.22: Relación de rigidez inicial y asintótica negativa.

Con las relaciones de rigidez y el ajuste lineal de cada curva, es posible estimar el aporte de rigidez de un cable tridimensional y realizar un equivalente para diversos modelos que involucren a este elemento.

#### 4.1.7. Emparrillado tridimensional de cables

En esta aplicación se presenta una estructura de sólo elementos cable. Ésta consiste en un emparrillado de cables tensados con una configuración geométrica mostrada en la figura (4.23) y cuyas propiedades físicas son listadas en la tabla (4.17).

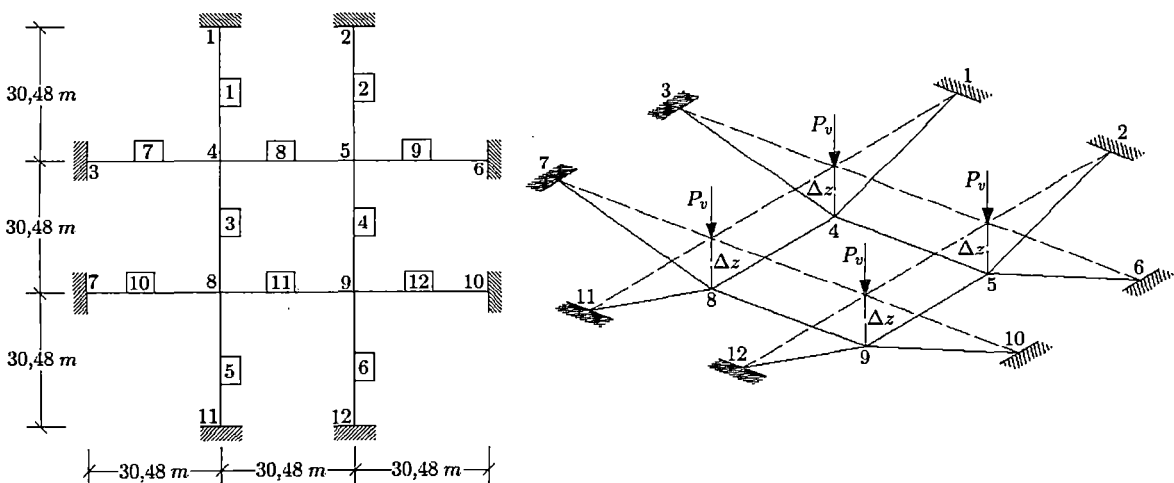


Figura 4.23: Geometría del emparrillado de cables.

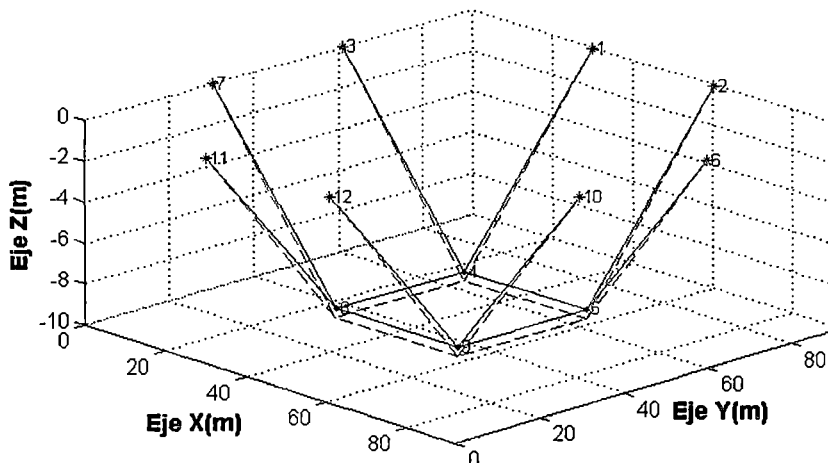
**Tabla 4.17:** Información para los cables.

	Item	Dato	
w:	Peso propio del cable	1,459	$N/m$
A:	Área de sección transversal	146,4513	$mm^2$
E:	Módulo de elasticidad	82,737	$MPa$
$T_{oH}$ :	Tensión de cables horizontales	24,2828	$kN$
$T_{oI}$ :	Tensión de cables inclinados	23,6868	$kN$
$P_v$ :	Carga vertical para nodos internos	35,5858	$kN$
$\Delta z$ :	Desnivel entre nodos	9,144	$m$

En la configuración tensada de la figura (4.23), se aplican las cargas verticales  $P_v$  en los nodos 4, 5, 8 y 9. El análisis se realiza para incrementos de carga de la milésima parte de  $P_v$  ( $P_v/1000$ ). Los resultados de los desplazamientos en el nodo 8 son listados en la tabla (4.18); la configuración inicial y su deformada, se presentan en la figura (4.24).

**Tabla 4.18:** Comparación de desplazamientos en nodo 8 (mm).

Investigador	Tipo de elemento	$u_x$	$u_y$	$u_z$
Jayaraman y Knudson[15]	Catenaria elástica	-39,62	-40,20	-446,32
Tibert[25]	Parábola elástica	-40,78	-40,78	-453,33
Tibert[25]	Catenaria asociada	-40,78	-40,78	-453,36
Tibert[25]	Catenaria elástica	-40,48	-40,39	-450,04
Huu y Seung[11]	Catenaria elástica	-40,13	-40,13	-446,50
SAP2000	Catenaria elástica	-40,47	-40,47	-449,46
<b>Presente trabajo</b>	<b>Catenaria elástica</b>	<b>-40,53</b>	<b>-40,53</b>	<b>-450,12</b>



**Figura 4.24:** Configuración inicial y deformada del emparrillado de cables.

## 4.2. ANÁLISIS DINÁMICO

El análisis dinámico se realiza con el registro sísmico de El Centro (1940) el cual se muestra en la figura (4.25).

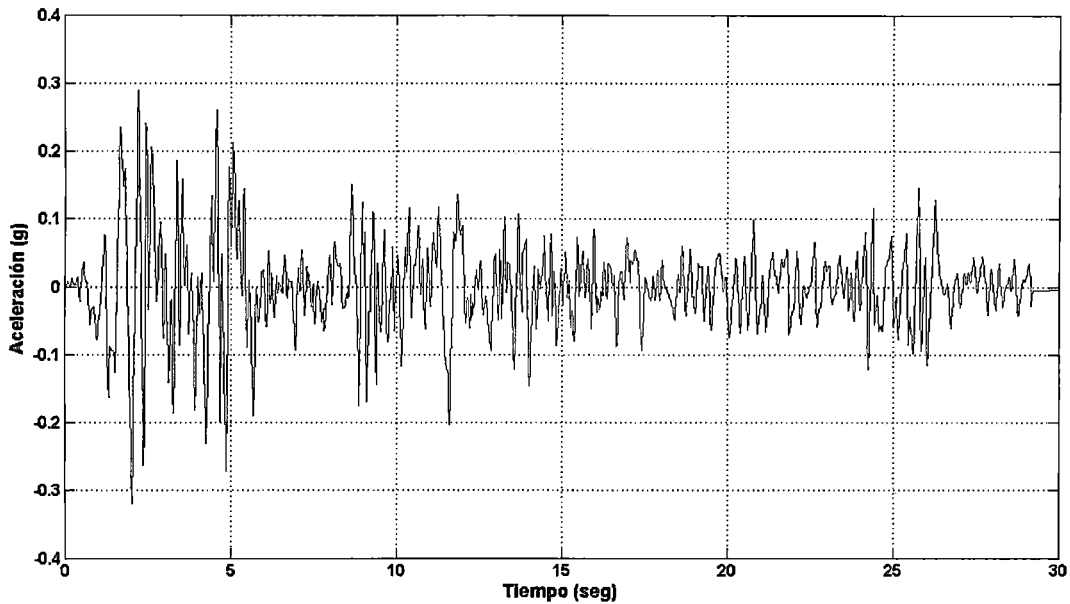


Figura 4.25: Registro de aceleraciones, El Centro 1940.

### 4.2.1. Armadura tridimensional

Una armadura de 72 elementos es mostrada en la figura (4.26) con el objetivo de verificar la efectividad de predecir los efectos no lineales cuando es sometida a una aceleración sísmica. Esta aplicación es mostrada por Huu [12] y los valores de las propiedades físicas son presentados en la tabla (4.19).

Tabla 4.19: Información de la armadura tridimensional.

Item	Dato
A:	Área de sección transversal 38,485 $cm^2$
E:	Módulo de elasticidad 200 $GPa$
M:	Masa concentrada en cada nodo 100 $kNs^2/m$
$\xi_i$ y $\xi_j$ :	Fracción de amortiguamiento crítico 0,05

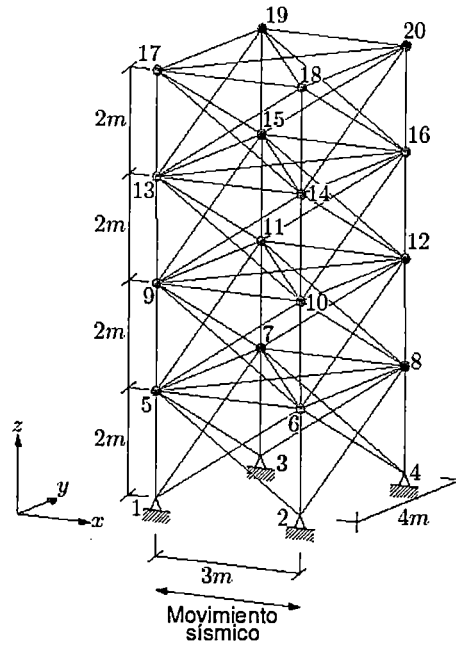


Figura 4.26: Geometría de la armadura tridimensional con masas concentradas.

La figura (4.27) muestra el registro de desplazamientos del nodo 19 en la dirección  $x$  comparado al obtenido por HUU. En la tabla (4.20) se muestran que las diferencias de los desplazamientos máximos son menores al 0,46%, lo que evidencia una baja discrepancia estimada entre HUU y el presente trabajo.

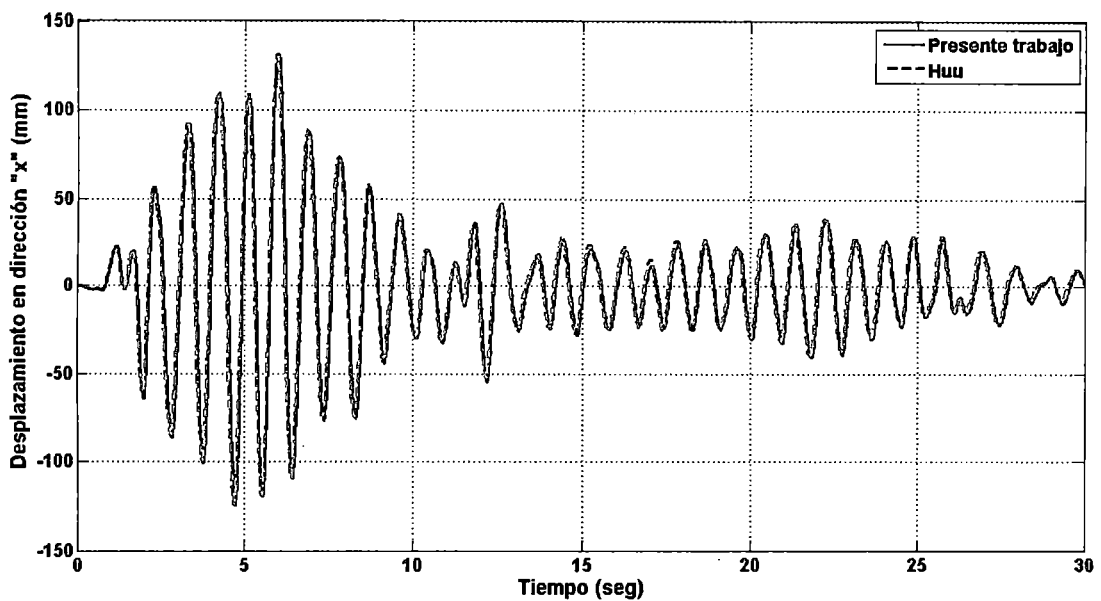


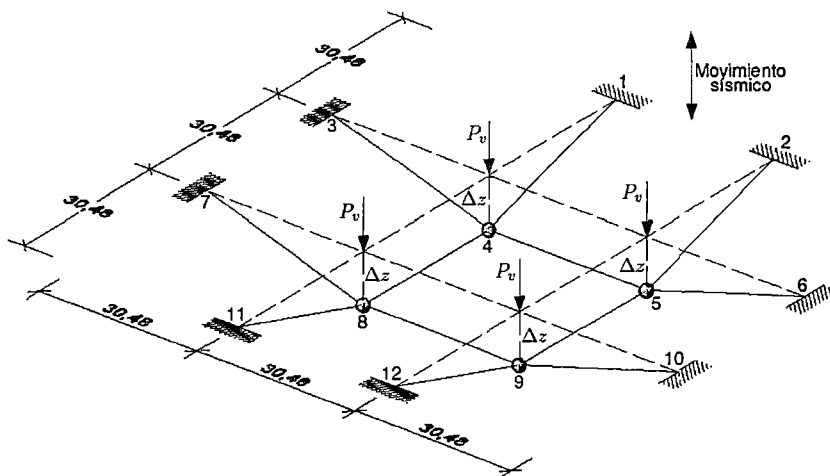
Figura 4.27: Registro de desplazamiento del nodo 19 en dirección  $x$ .

**Tabla 4.20:** Comparación de resultados de desplazamientos máximos.

	Huu	Presente trabajo	Diferencia (%)
Max	132,21	131,60	0,46
Min	-124,46	-124,85	0,31

### 4.2.2. Emparrillado de cables

Para la misma estructura de emparrillado de cables analizada con fuerzas estáticas (4.1.7.), se realiza el análisis dinámico cuando la aceleración sísmica actúa en dirección vertical. Para éste modelo se asignan masas concentradas de  $8,76 \text{ kNs}^2/m$  en los nodos 4, 5, 8 y 9 tal como se muestra en la figura (4.28), y se emplea un factor de amortiguamiento crítico de 0,05.

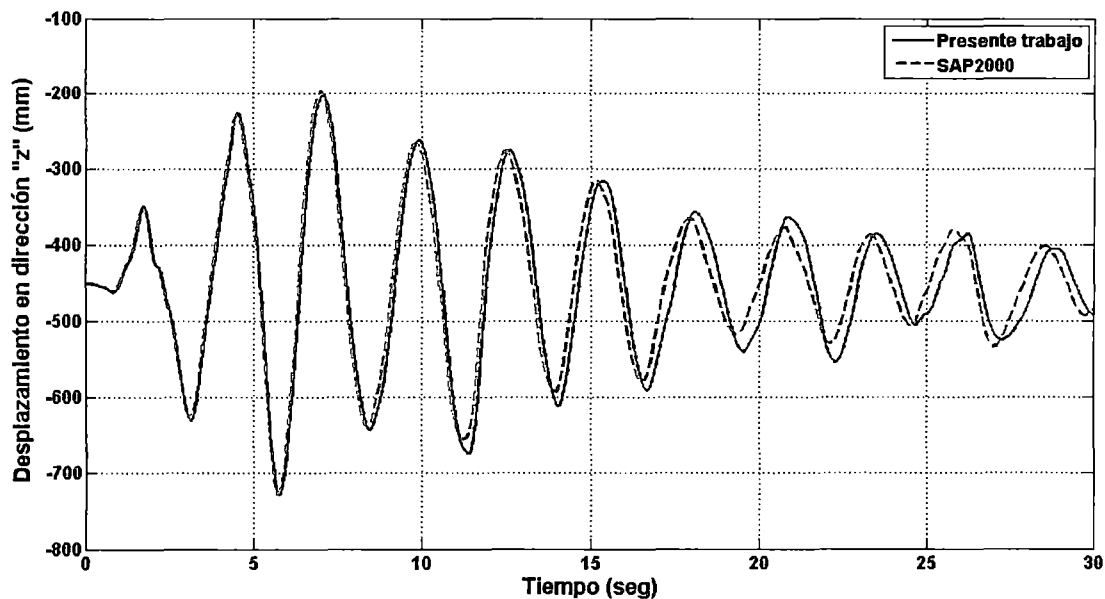


**Figura 4.28:** Emparrillado de cables con masas concentradas.

El análisis dinámico comienza cuando el emparrillado se encuentra en la condición de equilibrio indicada en la aplicación 4.1.7.

El registro de desplazamiento vertical del nodo 4 se muestra en la figura (4.29), el cual es comparado con el obtenido del programa SAP2000.





**Figura 4.29:** Registro de desplazamiento del nodo 4 en dirección vertical.

En la figura (4.29) y la tabla (4.21), se observa que los registros obtenidos por el programa SAP2000 y el presente trabajo se ajustan perfectamente en los primeros 10 seg, luego se aprecia un desfase que se incrementa con el tiempo entre ambos registros, pero los desplazamientos máximos tienen una diferencia menor al 3,04 %.

**Tabla 4.21:** Comparación de resultados de desplazamientos máximos.

	SAP2000	Presente trabajo	Diferencia (%)
Max	-196,79	-202,77	-3,04
Min	-728,84	-728,47	0,05

## CAPÍTULO V

### CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

#### 5.1. CONCLUSIONES

- Es posible acoplar elementos armadura y cable en una estructura, y considerar la no linealidad de dichos elementos.
- Las ecuaciones variacionales del elemento armadura, se pueden expresar en forma matricial con reacomodos algebraicos como los indicados en el Capítulo 2.
- La formulación Lagrangiana proporciona un método eficaz para analizar el comportamiento de un elemento armadura o cable. En este trabajo para el elemento armadura se emplea la formulación variacional no lineal propuesta por Yang [27], la que permite deducir matrices que incluyan los efectos elásticos, geométricos y de orden superior; mientras que para el elemento cable, a partir de ecuaciones analíticas debidamente comprobadas, permite deducir matrices no lineales.
- El análisis de una estructura cable - armadura compuesta por elementos rígidos y flexibles, se puede resolver considerando las siguientes etapas:
  - Comenzar con el ensamble de los elementos desarrollados a partir de la formulación que emplea coordenadas Lagrangianas; si se trata de un elemento cable, obtener la posición de uno de los nodos a partir del nodo identificado y caracterizado, con fines de tener la configuración inicial de equilibrio por peso propio.
  - Para lograr una mejor discretización de un cable, segmentar el elemento en elementos más pequeños, y las coordenadas de los nodos intermedios se obtienen a partir de la metodología propuesta en el acápite 3.2.2.

- Finalmente, emplear un método incremental iterativo para resolver el sistema de ecuaciones no lineales en coordenadas globales.
- En el análisis de estructuras compuestas por elementos cable, el método de la secante es 1,2 veces más rápido que el método de Newton (figura 4.5), además se aproxima mejor a la solución cuando se tiene menores incrementos de carga (figura 4.4); mientras que en estructuras conformadas por elementos armadura, el tiempo es similar en ambos métodos (figura 4.13). Sin embargo, el método de la secante se aproxima más a la solución cuando los incrementos de carga son cada vez más pequeños.
- La relación entre los desplazamientos no lineales y desplazamientos lineales, se incrementan con el aumento de la carga lateral. En el caso de la armadura bidimensional (aplicación 4.1.3.) esta razón es mayor o igual a 1 para cargas de  $P=50 N$ .
- Es posible determinar una curva de rigidez simplificada de la relación Carga - Desplazamiento de una estructura atirantada. En la armadura tridimensional con cables pre esforzados (aplicación 4.1.6.) esto ocurre para tensiones ( $T_o$ ) del cable mayores o iguales a 50 kg.
- El registro tiempo historia de estructuras compuestas por elementos armadura y estructuras compuestas por elementos cable, tiene desplazamientos máximos y mínimos del mismo orden de magnitud que los obtenidos por el investigador Huu [12] y el programa [5] respectivamente.
- Los resultados obtenidos a partir de los elementos y la metodología propuesta, muestran concordancia con los resultados obtenidos con programas de uso profesional y con aquellos resultados reportados por otros investigadores, tal como se observa en el Capítulo 4.

## 5.2. RECOMENDACIONES

- Se recomienda emplear la formulación Lagrangiana para el análisis inicial de un elemento cable, para considerar el efecto de su peso propio.
- Se recomienda hacer un estudio no lineal elástico del elemento cable, considerando la variación del área transversal del cable producto de la elongación de éste.

- Usar el método de control de desplazamiento generalizado propuesto por Yang y Shieh [27], para trazar la trayectoria no lineal de la estructura.
- Se recomienda usar el método de Newton ó el método de la secante para el estudio no lineal elástico que considere las hipótesis de la presente tesis.
- Se debe analizar el elemento cable considerando por lo menos un comportamiento no lineal elástico.

## BIBLIOGRAFÍA

- [1] Andreu A., Gil L. y Roca P., "A new deformable catenary element for the analysis of cable net structures", *Computer and Structures*, 84, p. 1882-1890, 2006.
- [2] Baron F. y Venkatesan M., "Nonlinear analysis of cable and truss structures", *American Society of Civil Engineers*, 624.071, p. 679-710, 1971.
- [3] Chopra A., "Dynamics of structures", Segunda edición, Prentice Hall, N. Y., 1995.
- [4] Clough R. y Penzien J., "Dynamics of structures", Tercera edición, McGraw-Hill, N. Y., 1995.
- [5] Computer and Structures, "CSI Analysis Reference Manual", Berkeley, 2010.
- [6] Cuomo M. y Greco L., "A finite element cable for the analysis of cable nets", Faculty of Engineering, University of Catania, Ancona, 2009.
- [7] Engineering Systems, "MStower V6 User's manual", Londres, 2008.
- [8] Flores L., "Métodos numéricos aplicados a la Ingeniería Civil", Universidad Nacional de Ingeniería, Lima, 2010.
- [9] Fook N., "Geometric nonlinear analysis of truss structure", Bachelor Thesis, University of Technology, Malasia, 2010.
- [10] Haijian S., "Nonlinear finite element modeling and characterization of guyed towers under severe loading", PhD. Thesis, Faculty of the Graduate School, Missouri University, Columbia, 2007.
- [11] Huu T. y Seung K., "Nonlinear static and dynamic of cable structures", *Finite Elements in Analysis and Design*, 47, p. 237-246, 2011.
- [12] Huu T. y Seung K., "Practical advanced analysis software for nonlinear dynamic analysis of steel structures", *Journal of Constructional Steel Research*, 67, p. 453-461, 2011.

- [13] Huu T., "Practical nonlinear inelastic static and dynamic analysis of space steel structures", PhD. Thesis, Department of Civil and Environmental Engineering, Hanyang University, Seoul, 2009.
- [14] Irvine M., "Cable structure", MIT Press, Cambridge, 1982.
- [15] Jayaraman H. y Knudson W., "A curved element for the analysis of cable structure", *Computer and Structures*, 14, 3-4, p. 325-333, 1981.
- [16] Karoumi R., "Some modeling aspects in the nonlinear finite element analysis of cable supported bridges", *Computer and Structures*, 71, p. 397-412, 1999.
- [17] Kwan A. "A new approach to geometric nonlinearity of cable structures", *Computer and Structures*, 67, p. 243-352, 1998.
- [18] Linero S. y Garzón A., "Elementos de la mecánica del medio continuo para cuerpos sólidos", Departamento de Ingeniería Civil y Agrícola, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, 2010.
- [19] Madugula M., "Dynamic response of lattice towers and guyed masts", Report of American Society of Civil Engineers, Virginia, 2002.
- [20] Pallares M. y Rodriguez C., "Validación de la formulación numérica de la catenaria elástica con Ansys", Escuela Regional de Matemáticas, Universidad del Valle, Cali, XVI, 1, p. 63-85, 2008.
- [21] Paz M. "Dinámica estructural", Reverte, Tercera edición, Estados Unidos, 1989.
- [22] Pinteá A., "Comparison between the linear and nonlinear responses of cable structures I - Static loading", *Civil Engineering and Architecture*, 55, 2, p. 182-188, 2012.
- [23] Ren W., Huang M. y Hu W. "A parabolic cable element for static analysis of cable structures", *International Journal for Computer - Aided Engineering and Software*, 25, 4, p. 366-384, 2008.
- [24] Rohit B., "Dynamic analysis of guyed towers subjected to wind loads incorporating nonlinearity of the guys", Master Thesis, Texas Tech College, Lubbock, 1999.
- [25] Tibert G., "Numerical analyses of cable roofs structures", Licentiate Thesis, Department of Structural Engineering, Royal Institute of Technology, Estocolmo, 1998.

- [26] Valles R., Reinhorn A. y Kunnath S., "IDARC 2D Version 4.0: A Program for the Inelastic Damage Analysis of Buildings - Technical Report NCEER-96-0010", University at Buffalo, N. Y., 1996.
- [27] Yang B., "Theory and analysis of nonlinear framed structures", Prentice Hall, Singapore, 1994.