

# **UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA**

**FACULTAD DE INGENIERIA GEOLOGICA MINERA Y METALURGICA  
ESCUELA DE INGENIERIA DE MINAS**



## **PROCESAMIENTO DE SEÑALES PARA LA PROSPECCION SISMICA**

**TESIS :**

**PARA OPTAR EL TITULO PROFESIONAL DE :  
INGENIERO DE MINAS**

**PRESENTADOR POR :**

**VICTOR CORONEL AQUINO**

**LIMA, MARZO DE 1996**

## AGRADECIMIENTO

Quiero manifestar mi agradecimiento a los Ingenieros: Ernesto Deza y Pablo Taype Ramos profesores de la Facultad de Ingeniería Geológica Minera y Metalúrgica, por la orientación y apoyo que me brindaron en el desarrollo del presente trabajo.

A mis padres Zuiberto y Agustina  
por su invaluable apoyo que siempre  
recibi y recibo de ellos.

## RESUMEN

Los métodos de deconvolución desarrollados en este trabajo, usan el trazo sísmico (registrado por el geofono) para deconvoluir la fuente sísmica de éste trazo. El filtro predictivo que permite la deconvolución, es obtenido considerando que la fuente sísmica sea de mínimo retardo y la respuesta al impulso del sistema estratificado constituya una serie no correlacionada. Consecuentemente, la autocorrelación de la fuente sísmica y del trazo sísmico son los mismos, excepto por un factor constante. En el caso de la deconvolución dinámica, considera este trazo como la reflexión respuesta del sistema sedimentario, y es usado para calcular los coeficientes de los polinomios feedback y feed-forward. Los coeficientes del polinomio feed-forward representan aproximadamente los coeficientes de reflexión del sistema sedimentario.

## ABSTRACT

The developed deconvolution methods treated in this work use seismic trace (recorded by geophones) in order to deconvolute the seismic source of this trace. The predictive filter that permit us the deconvolution, is obtained considering that the seismic source has minimum delay and the impulse response of the layered system constitutes a non-correlated series. As a consequence, the autocorrelation of the seismic source and the seismic trace are the same except for a constant factor.

In case of the dynamic deconvolution, this trace is considered as the reflexion response of the sedimentary system and is used to calculate the coefficients of the feedback and feed-forward polynomials. The coefficients of the feed-forward polynomials represent approximately the reflection coefficients of the sedimentary system.

## INDICE

<b>RESUMEN</b> . . . . .	<b>iii</b>
<b>ABSTRACT</b> . . . . .	<b>iv</b>
<b>LISTA DE FIGURAS</b> . . . . .	<b>1</b>
<b>1 SISTEMAS Y SEÑALES DISCRETOS</b> . . . . .	<b>4</b>
1.1 Sistemas Discretos . . . . .	4
1.2 Respuesta al Impulso de un Sistema . . . . .	4
1.3 Función Sistema, Transformada-Z y Señales Mínimas . . . . .	5
1.3.1 Señales de Fase Mínima, Máxima y Mixta . . . . .	7
1.4 Correlación Cruzada y Autocorrelación de Señales Discretas . . . . .	8
1.5 Factorización . . . . .	9
<b>2 FILTROS</b> . . . . .	<b>11</b>
2.1 Casos Especiales del Filtro de Forma . . . . .	14
2.1.1 Filtro Inverso . . . . .	14
2.1.2 Filtro de Predicción . . . . .	20
<b>3 MÉTODOS DE DECONVOLUCIÓN</b> . . . . .	<b>24</b>
3.1 Modelo de Deconvolución . . . . .	24
3.1.1 Método de Deconvolución . . . . .	24
3.1.2 Método de Deconvolución Predictiva . . . . .	29
3.2 Modelo de Estratos Planos . . . . .	34
3.2.1 Método de Deconvolución Dinámica . . . . .	35
3.2.2 Proceso Computacional . . . . .	52

<b>3.3</b>	<b>Esquemas Recursivos para Ecuaciones Normales que Involu-</b> <b>cran la Matriz Toeplitz . . . . .</b>	<b>56</b>
<b>3.4</b>	<b>Aplicaciones, Ventajas y Limitaciones . . . . .</b>	<b>63</b>
3.4.1	Aplicaciones . . . . .	63
3.4.2	Ventajas y Limitaciones . . . . .	63
<b>4</b>	<b>CONCLUSIONES . . . . .</b>	<b>65</b>
<b>APENDICE A-1</b>	<b>PROGRAMAS EN MATLAB . . . . .</b>	<b>67</b>
<b>APENDICE A-2</b>	<b>SISTEMAS LINEALES DISCRETOS INVARI-</b> <b>ANTES EN EL TIEMPO CAUSALES Y ESTA-</b> <b>BLES . . . . .</b>	<b>69</b>
<b>A-2.1</b>	<b>Convolución Discreta . . . . .</b>	<b>70</b>
<b>APENDICE A-3</b>	<b>SOLUCION MINIMA CUADRATICA PARA <math>C =</math></b> <b><math>FB</math> . . . . .</b>	<b>72</b>
<b>APENDICE A-4</b>	<b>CASOS IMPORTANTES DE FILTROS INVER-</b> <b>SOS . . . . .</b>	<b>74</b>
<b>A-4.1</b>	<b>Representación de Filtros de Forma mediante Filtros Inversos</b>	<b>77</b>
<b>BIBLIOGRAFIA</b>	<b>. . . . .</b>	<b>83</b>

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1	Sistema Discreto . . . . .	4
Figura 1.2	Señal de Fase Mínima . . . . .	7
Figura 1.3	Señal de Fase Máxima . . . . .	8
Figura 1.4	Señal de Fase Mixta . . . . .	8
Figura 2.1	Operación de Convolución . . . . .	11
Figura 2.2	Salida Deseada, Impulso Unitario . . . . .	14
Figura 3.1	Descripción Física de Registro de Ondas Sísmicas . . . . .	25
Figura 3.2	Descripción de la Tierra Estratificada Como un Sistema LTI . . . . .	25
Figura 3.3	Sistema Sedimentario de $N$ Estratos . . . . .	34
Figura 3.4	Coefficiente de Reflexion y Transmisión . . . . .	36
Figura 3.5	Reflexión Respuesta y Transmisión Respuesta . . . . .	39
Figura 3.6	Sistemas de $n$ y de $n - 1$ Estratos . . . . .	39
Figura 3.7	Serie Reflexión Respuesta $R_n$ . . . . .	40
Figura 3.8	Serie Transmisión Respuesta $T_n$ . . . . .	42
Figura 3.9	Reflexión y transmisión respuesta del sistema de $N$ estratos . . . . .	48



## INTRODUCCIÓN

En la exploración geofísica para la búsqueda de petróleo, gas natural, y depósitos mineros, fuentes sísmicas o vibradores (localizados cerca de la superficie terrestre) excitan la tierra y producen ondas sísmicas. Estas ondas son registradas con instrumentos especiales llamados geofonos o hidrofones, que luego son procesados para su análisis y interpretación posterior.

Los Sistemas Lineales Invariantes en el Tiempo describen este proceso físico considerando como entrada un impulso del vibrador sísmico y la salida son las ondas sísmicas registradas, que se expresan como la convolución de la entrada con la respuesta al impulso del sistema sedimentario (tierra).

El objetivo de éste trabajo es mostrar como a partir de las ondas sísmicas registradas se puede obtener la respuesta al impulso del sistema sedimentario, las cuales representan aproximadamente los coeficientes de reflexión de cada estrato del sistema sedimentario, lo que verdaderamente interesa para los fines anteriormente mencionados. Para tal efecto se presenta dos métodos de cálculo de los coeficientes de reflexión del sistema sedimentario.

El primer método, de la **deconvolución predictiva** para el cálculo de los coeficientes, usa la hipótesis que la entrada es una señal de mínimo retardo y los coeficientes de reflexión forman una serie no correlacionada, la cual permite relacionar la autocorrelación de la señal de entrada y salida.

El segundo método, de la **deconvolución dinámica**, relaciona tanto los coeficientes de reflexión como los coeficientes de transmisión del sistema sedimentario, con la hipótesis adicional que el sistema sedimentario representa un sistema sin pérdidas de energía.

Siempre que se usa uno de los métodos mencionados anteriormente, se tiene que resolver un sistema de ecuaciones que involucra la matriz toeplitz, llamadas **ecuaciones normales**. En este trabajo se presentan algoritmos para resolver este tipo de sistema de ecuaciones.

# 1 SISTEMAS Y SEÑALES DISCRETOS

## 1.1 Sistemas Discretos

Una **Señal de tiempo discreto**, o simplemente señal discreta es una sucesión ordenada de números reales o complejos  $\{x[n]\}$  donde el índice  $n$  varia en el conjunto de los números enteros. Un **Sistema Discreto**  $T$  transforma una señal discreta  $x[n]$  llamada **entrada** en otra señal  $y[n]$  llamada **salida** del sistema como está mostrado graficamente en la figura(1.1).

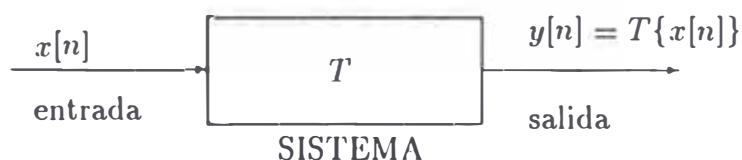


Figura 1.1: Sistema Discreto

El sistema de ecuaciones que describe la transformación  $T$  se llama **modelo matemático** o simplemente modelo del sistema  $T$ . El modelo se dice **recursivo** cuando la salida en el tiempo depende en diferencias de valores de la entrada y salida en otros tiempos. El modelo es **no recursivo**, cuando la salida depende solamente de los valores de la entrada, ([Cha 95]).

En este trabajo, serán de interés los modelos lineales discretos invariantes en el tiempo causales y estables, LDTICE (ver APENDICE A-2).

## 1.2 Respuesta al Impulso de un Sistema

Dado un sistema  $T$ , se define la **respuesta al impulso**  $h[n]$  del sistema  $T$  como la salida del sistema que posee entrada impulsiva

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

esto es

$$T\{\delta[n]\} = h[n] = \text{respuesta al impulso}$$

Para sistemas lineales causales e invariantes en el tiempo (LCTI), la respuesta al impulso  $h[n]$  es cero para  $n < 0$ . Pues la entrada impulsiva  $\delta[n]$  es igual a cero para  $n \neq 0$ . También la salida  $y[n]$  se expresa como la convolución discreta  $x[n] * h[n]$  de la entrada  $x[n]$  con la respuesta al impulso  $h[n]$ , es decir (ver APENDICE A-2, también [Cha 95])

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n]h[n-k]. \quad (1.1)$$

### 1.3 Función Sistema, Transformada-Z y Señales Mínimas

Sea  $T$  el sistema LTI y  $h[n]$  la respuesta al impulso. Consideremos la entrada

$$x[n] = z^n,$$

donde  $z$  es un número real o complejo. Esta entrada es transformada en

$$\begin{aligned} T\{z^n\} &= z^n * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} z^{n-k}h[k] \\ &= z^n \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} z^{-k}h[k] \right). \end{aligned}$$

Definiendo

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]z^{-k} \quad (1.2)$$

se obtiene que

$$T\{z^n\} = z^n H(z).$$

La ecuación (1.2) se llama **transformada-Z bilateral de  $h[k]$**  ([Cha 95]). La transformada-Z bilateral de la respuesta al impulso  $h[n]$  del sistema  $T$  se conoce con el nombre de **Función Sistema de  $T$** . Por ejemplo la función sistema del sistema

$$y[n] = (1 - \alpha)y[n - 1] + \alpha x[n];$$

es

$$H(z) = \frac{\alpha}{1 - (1 - \alpha)z^{-1}} = \frac{\alpha z}{z - (1 - \alpha)}.$$

Por otro lado, cuando el sistema es causal, o sea  $h[n] = 0$  para  $n < 0$ , entonces:

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} h[k]z^{-k}$$

se llama **transformada-Z unilateral de  $h[n]$**  ([Cha 95]).

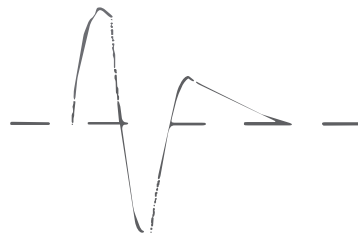
Una propiedad importante, es que la convolución de dos señales  $x[n]$  y  $y[n]$  también puede ser representada através de la transformada-Z. O sea si  $X(z)$  es la

transformada- $Z$  de  $x[n]$  y  $Y(z)$  es la transformada- $Z$  de  $y[n]$ , entonces la transformada- $Z$  de  $x[n] * y[n]$  es  $X(z)Y(z)$ . Por lo tanto, la convolución en el dominio del tiempo corresponde a una multiplicación en el dominio de la transformada- $Z$ , ([Cha 95]).

### 1.3.1 Señales de Fase Mínima, Máxima y Mixta

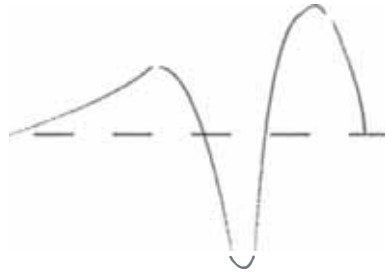
La fase de las señales causales, puede ser clasificada en tres tipos: **mínima**, **máxima** y **mixta**. Esta clasificación depende básicamente de la distribución de la **energía de la señal**  $\sum_{n=0}^{\infty} x^2[n] = x^2[0] + x^2[1] + \dots$ , en el dominio del tiempo, ([Pap 88]).

Una señal de fase mínima, también llamado de **mínimo retardo**, presenta mayor concentración de energía junto al tiempo  $n = 0$ . Esto quiere decir que las mayores amplitudes se concentrarán cerca de  $n = 0$ . Como se puede ver en la fig(1.2).



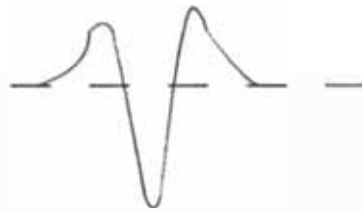
**Figura 1.2:** Señal de Fase Mínima

En términos de la transformada- $Z$ , una señal de fase mínima o mínimo retardo puede ser representado por un polinomio en  $z^{-1}$  formado solamente de binomios de la forma  $a + bz^{-1}$  donde  $a > b$  lo que quiere decir que las raíces de la transformada- $Z$  de la señal quedan dentro del círculo unitario del plano complejo. Por ejemplo la señal  $x[n] = (x_0, x_1, x_2) = (6, 5, 1)$  es de mínimo retardo, pues, su transformada- $Z$   $A(z) = 6 + 5z^{-1} + z^{-2}$  tiene raíces  $z_1 = -1/2$ ,  $z_2 = -1/3$  y  $|z_1| < 1$ ,  $|z_2| < 1$ . En una señal de **fase máxima**, la energía se concentra en los tiempos posteriores a  $n = 0$ , predominando las menores amplitudes cerca del tiempo  $n = 0$ . Como se puede ver en la fig(1.3).



**Figura 1.3:** Señal de Fase Máxima

La transformada- $Z$  de este tipo de señal esta formado solamente por binomios de la forma  $b+az^{-1}$ , donde  $a > b$  lo que quiere decir que las raíces de la transformada- $Z$  de la señal se encuentran dentro del círculo unitario del plano complejo. Una señal de **fase mixta** es una combinación de los dos tipos de señales o sea su transformada- $Z$  está formado tanto de binomios que caracterisan señales de mínimo y máximo retardo. Una señal de este tipo se muestra en la fig(1.4).



**Figura 1.4:** Señal de Fase Mixta

## 1.4 Correlación Cruzada y Autocorrelación de Señales Discretas

La operación que permite medir la similaridad entre las señales  $x[n]$  y  $y[n]$ , se llama **Correlación Cruzada** de  $x[n]$  con  $y[n]$ , denotado por  $\phi_{xy}[k]$  y definida mediante:

$$\phi_{xy}[k] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y[n+k] \quad (1.3)$$

donde el índice  $k$  indica traslación relativo al tiempo. Cuando  $x[n] = y[n]$  para todo  $n$ , entonces la ecuación (1.3) se transforma en

$$\phi_{xx}[k] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]x[n+k]$$

y recibe el nombre de **autocorrelación de  $x[n]$** .

La autocorrelación y la correlación satisfacen las siguientes propiedades ([Hau 87]):

1.  $\phi_{xx}[k] = \phi_{xx}[-k]$
2.  $\phi_{xy}[k] = x[k] * y[-k]$
3. Si  $x[n] = r[n] * s[n]$ , entonces  $\phi_{xr}[n] = s[n] * \phi_{rr}[n]$
4. La transformada- $Z$  de  $\phi_{xy}[k]$  es  $\Phi_{xy}(z) = X(z)Y(1/z)$ , donde  $X(z)$  y  $Y(z)$  es la transformada- $Z$  de  $x[n]$  y  $y[n]$  respectivamente.
5. La transformada- $Z$  de la autocorrelación de  $x[n] = r[n] * s[n]$  está dada por

$$\Phi_{xx}(z) = [R(z)S(z)][R(1/z)S(1/z)],$$

donde  $R(z)$  es la transformada- $Z$  de  $r[t]$  y  $S(z)$  es la transformada- $Z$  de  $s[t]$ .

## 1.5 Factorización

Una propiedad importante de las señales discretas causales de energía finita es que su transformada- $Z$  es analítica en  $|z| > 1$  y además si fuera de mínimo retardo la inversa de su transformada- $Z$  también es analítica en  $|z| > 1$ , (ver [Pap 88]).



A continuación se formula en tres formas equivalentes el problema conocido como problema de factorización discreta:

1. Dada una función real no negativa  $a(\theta)$ , encontrar una sucesión  $y[n]$  tal que el módulo de su transformada- $Z$  en el círculo unitario sea igual a  $a(\theta)$ :

$$|Y(e^{i\theta})| = \left| \sum_{n=0}^{\infty} y[n]e^{-in\theta} \right| = a(\theta).$$

2. Dada una función real no negativa  $a(\theta)$ , encontrar una función analítica  $Y(z)$  en  $|z| > 1$  y tal que  $|Y(e^{i\theta})| = a(\theta)$ .
3. Dada una sucesión  $w[n]$  cuya transformada- $Z$   $W(z)$  es no negativa en el círculo unitario,

$$W(e^{i\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} w[n]e^{in\theta} = a(\theta) \geq 0$$

encontrar una sucesión causal  $y[n]$  con transformada- $Z$   $Y(z)$  tal que

$$W(e^{i\theta}) = |Y(e^{i\theta})|^2 \quad W(z) = Y(z)Y_-(z)$$

donde  $Y_-(z)$  significa la transformada- $Z$  de  $w^*[-n]$  conjugada de  $w[-n]$ . Es fácil ver que  $Y_-(z) = Y^*(1/z^*)$  y, si  $y[n]$  es real, entonces  $Y_-(z) = Y(1/z)$ .

El problema formulado anteriormente tiene solución si  $a(\theta)$  satisface la condición de Paley-Weiner (ver [Pap 88]),

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\ln a(\theta)| d\theta < \infty$$

adicionalmente, si  $y[n]$  es de mínimo retardo la solución será única.

## 2 FILTROS

Las señales pueden ser modificadas de acuerdo con operadores apropiados, llamados filtros. Una de las características básicas de estos filtros en el procesamiento de señales es su linealidad, o sea, presentan propiedades de los sistemas lineales. Concretamente hablando un **filtro lineal** es un sistema cuya respuesta al impulso altera las características de una señal de entrada, mediante

$$c[n] = b[n] * f[n]$$

donde  $f[n]$  es la respuesta del filtro que transforma la señal de entrada  $b[n]$  en la señal de salida  $c[n]$ . Gráficamente fig(2.1).



**Figura 2.1:** Operación de Convolución

Los filtros pueden ser divididos, entre otros, en filtros numéricos, sonoros, eléctricos y ópticos. Los filtros numéricos presentan la propiedad de ser aplicados a datos muestreados digitalmente. En especial son aplicados en el procesamiento de datos sísmicos.

Uno de los filtros numéricos usados en procesamiento de datos sísmicos es el **filtro de forma** (shaping filter) que es el filtro lineal que altera la forma de una señal a una forma pre-determinada (salida descada)([Han 87]).

Estableceremos algunas notaciones para un estudio más detallado del filtro de forma. Denotaremos por:

1.  $b = (b[0], b[1], b[2], \dots, b[n])$  la señal de entrada de longitud  $n + 1$

2.  $f = (f[0], f[1], f[2], \dots, f[m])$  operador o filtro de longitud  $m + 1$
3.  $d = (d[0], d[1], d[2], \dots, d[m+n])$  la señal salida deseada o pre-determinada de longitud  $n + m + 1$
4.  $c = (c[0], c[1], c[2], \dots, c[m + n])$  la señal salida actual de longitud  $n + m + 1$

El interes ahora es encontrar un filtro  $f$  de longitud  $m + 1$  de modo que la salida actual  $c$  sea la aproximación mínima cuadrática de la salida deseada  $d$ . Esto es el error  $\epsilon = d - c$  sea de mínima desviación cuadrática.

Se sabe que,  $c = b * f$ , ésta convolución tambien puede ser expresada en forma matricial de la siguiente manera,

$$c = fB, \quad (2.1)$$

donde  $B$  es la matriz de orden  $(m + 1)(m + n + 1)$  y tiene la siguiente estructura:

$$B = \begin{bmatrix} b[0] & b[1] & \dots & b[n] & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b[0] & \dots & b[n-1] & b[n] & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & b[n] & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & b[n-1] & b[n] \end{bmatrix}$$

La solución mínima cuadrática para  $c = fB$  esta dada por (ver APENDICE A-3)

$$f = (dB^t)(BB^t)^{-1}$$

donde  $f$  es el filtro buscado.

Expresemos el filtro en una forma mas compacta. Teniendo en cuenta que la autocorrelación  $\phi_{bb}[k]$  de la señal de entrada es dada por

$$r[k] = \phi_{bb}[k] = \sum_{i=0}^n b[i+k]b[i]$$

y la correlación cruzada  $\phi_{db}[k]$  de la señal salida deseada con la señal entrada es dada por

$$g[k] = \phi_{db}[k] = \sum_{i=0}^n d[i+k]b[i].$$

Asi, la matriz  $BB^t$  de orden  $(m+1)$  tiene la siguiente estructura:

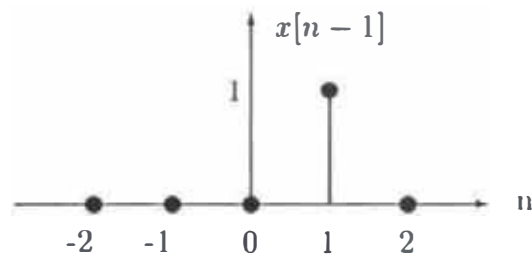
$$BB^t = \begin{bmatrix} r[0] & r[1] & \dots & \dots & \dots & r[m] \\ r[-1] & r[0] & r[1] & \dots & \dots & r[m-1] \\ \dots & r[-1] & r[0] & \dots & \dots & r[m-2] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & r[1] \\ r[-m] & r[-m+1] & r[-m+2] & \dots & r[-1] & r[0] \end{bmatrix}$$

Esta matriz es llamada **matriz de autocorrelación**, que es del tipo **matriz toeplitz** por que a lo largo de todas las diagonales tiene el mismo elemento. Denotando

$$R = BB^t,$$

podemos ver que el vector fila  $dB^t$  con  $(m+1)$  componentes se puede expresar como

$$dB^t = g = (g[0], g[1], \dots, g[m])$$



**Figura 2.2:** Salida Deseada, Impulso Unitario

asi, las ecuaciones normales pueden ser escritas en la forma

$$fR = g.$$

## 2.1 Casos Especiales del Filtro de Forma

### 2.1.1 Filtro Inverso

El **filtro inverso** (spiking filter), es un filtro de forma tal que la salida deseada es un impulso unitario ([Woo 75]). Por ejemplo el impulso,

$$(0, 1, 0, \dots, 0, 0)$$

mostrado en la figura(2.2).

En general, cualquier de los  $(m + n + 1)$  elementos de la salida deseada

$$d = (d[0], d[1], d[2], \dots, d[m + n])$$

puede representar el impulso, mientras que los demas elementos toman el valor cero. Por tanto existen  $(m+n+1)$  filtros inversos diferentes para cada una de las  $(m+n+1)$  posiciones del impulso.

Sean

$$a_0 = (a_0[0], a_0[1], \dots, a_0[m])$$

el filtro inverso para el cual la salida deseada es un impulso de retardo cero, esto es,

$$d_0 = \underbrace{(1, 0, 0, \dots, 0)}_{m+n+1},$$

$$a_1 = (a_1[0], a_1[1], \dots, a_1[m])$$

el filtro inverso para el cual la salida deseada es un impulso de retardo uno, esto es,

$$d_1 = \underbrace{(0, 1, 0, \dots, 0)}_{m+n+1},$$

y así sucesivamente, hasta que

$$a_{m+n} = (a_{m+n}[0], a_{m+n}[1], \dots, a_{m+n}[m])$$

es el filtro inverso para el cual la salida deseada es un impulso de retardo  $(m+n)$ , esto es,

$$d_{m+n} = \underbrace{(0, 0, 0, \dots, 1)}_{m+n+1}.$$

Sean también

$$c_0 = (c_0[0], c_0[1], \dots, c_0[m+n]),$$

la salida actual correspondiente al filtro inverso  $a_0$ .

$$c_1 = (c_1[0], c_1[1], \dots, c_1[m+n]),$$

la salida actual correspondiente al filtro inverso  $a_1$ , y así sucesivamente, hasta que

$$c_{m+n} = (c_{m+n}[0], c_{m+n}[1], \dots, c_{m+n}[m+n]),$$

es la salida actual correspondiente al filtro inverso  $a_{m+n}$ .

Definamos las siguientes matrices cuyas filas especificamos a continuación:

1.

$$D = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \vdots \\ d_{n+m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix} = I_{m+n+1}$$

2. La matriz  $A$ , cuyas filas son los filtros inversos de  $a_0$  hasta  $a_{m+n}$ , esto es,

$$A = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n+m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0[0] & a_0[1] & \dots & a_0[m] \\ a_1[0] & a_1[1] & \dots & a_1[m] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n+m}[0] & a_{n+m}[1] & \dots & a_{n+m}[m] \end{bmatrix}$$

3. La matriz  $C$ , cuyas filas son las salidas actuales de  $c_0$  hasta  $c_{m+n}$ , esto es,

$$C = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n+m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_0[0] & c_0[1] & \dots & c_0[m+n] \\ c_1[0] & c_1[1] & \dots & c_1[m+n] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{n+m}[0] & c_{n+m}[1] & \dots & c_{n+m}[m] \end{bmatrix}$$

Luego las ecuaciones normales

$$a_i R = d_i B^t, \quad i = 0, 1, \dots, m+n$$

se pueden escribir como

$$AR = DB^t = I_{m+n+1} B^t = B^t$$

Lo que es lo mismo

$$ABB^t = B^t \tag{2.2}$$

multiplicando (2.2) por la derecha por la matriz  $A^t$ , se obtiene:

$$ABB^t A^t = B^t A^t$$

de aquí

$$AB(AB)^t = (AB)^t \tag{2.3}$$

por otro lado, de (2.1) se sigue que,

$$AB = C \tag{2.4}$$

luego (2.3) se puede escribir como

$$CC^t = C^t$$

La matriz  $C$  presenta las siguientes propiedades:

1. es simétrica, pues



$$C = (C^t)^t = (CC^t)^t = CC^t = C^t$$

2. es idempotente, pues, por ser  $C$  simétrica se tiene que

$$C = CC^t = CC = C^2.$$

Ahora, la suma de los errores cuadráticos  $v_i$  entre la salida deseada  $d_i$  y la salida actual  $c_i$  esta dado por:

$$v_i = (d_i - c_i)(d_i - c_i)^t, \quad i = 0, 1, \dots, m+n$$

o sea

$$v_0 = (1 - c_0[0])^2 + c_0^2[1] + c_0^2[2] \dots + c_0^2[m+n]$$

$$v_1 = c_1^2[0] + (1 - c_1[1])^2 + c_1^2[2] + \dots + c_1^2[m+n]$$

$$v_{m+n} = c_{m+n}^2[0] + c_{m+n}^2[1] + c_{m+n}^2[2] + \dots + (1 - c_{m+n}[m+n])^2$$

haciendo

$$V = v_0 + v_1 + \dots + v_{m+n} = \sum_{i=0}^{m+n} v_i$$

se concluye que

$$\begin{aligned} V &= \text{traza}(D - C)(D - C)^t = \text{traza}(I_{m+n+1} - C)(I_{m+n+1} - C)^t \\ &= \text{traza}(I - C^t - C + CC^t) \\ V &= \text{traza}(I_{m+n+1} - C) = \text{traza}(I_{m+n+1}) - \text{traza}(C) \end{aligned}$$

De (2.2) y (2.4) se obtiene

$$\begin{aligned} V &= \text{traza}(I_{m+n+1}) - \text{traza}(AB) \\ V &= \text{traza}(I_{m+n+1}) - \text{traza}(B^t(BB^t)^{-1}B). \end{aligned}$$

Siendo la traza del producto el producto de las trazas [Ner 77], se sigue que

$$V = \text{traza}(I_{m+n+1}) - \text{traza}(BB^t)^{-1}BB^t$$

y por consiguiente

$$V = \text{traza}(I_{m+n+1}) - \text{traza}(I_{m+1}) = (m+n+1) - (m+1) = n$$

esto quiere decir que la suma de la suma de los errores cuadráticos  $v_i$ , es igual a  $n$ , donde  $n+1$  es la longitud de la señal entrada  $(b[0], b[1], \dots, b[n])$ .

Tambien se puede verificar que la suma de la suma de los errores cuadráticos  $V$  es independiente de la longitud del filtro  $(m+1)$ .

Ahora como los  $v_i \geq 0$ ,  $i = 0, 1, \dots, m+n$ , y

$$V = v_0 + v_1 + \dots + v_n + \dots + v_{n+m} = n < n + m + 1$$

se sigue que

$$0 \leq v_i \leq 1, \quad i = 0, 1, \dots, n+m.$$

cuando los  $v_i$  son iguales, se tiene que:

$$v_i = \frac{n}{m+1}, \quad i = 0, 1, \dots, n+m$$

Es importante averiguar el retardo  $i$  para el cual la suma de los errores cuadráticos  $v_i$  sea mínimo. El valor de  $i$  que produce el mínimo  $v_i$  es llamado retardo óptimo y el correspondiente filtro inverso  $a_i$  es llamado filtro inverso óptimo para la señal entrada  $b$ . En el APENDICE A-4 se estudian algunos casos importantes de filtros inversos.

### 2.1.2 Filtro de Predicción

El **filtro de predicción** es aquel filtro que actuando en un trecho de la señal, permite la predicción de valores futuros de ésta misma señal. En términos mas concretos, la salida deseada es igual a la señal de entrada, despues de  $\alpha$  unidades de tiempo, llamada distancia de predicción ([Pea 69]).

La señal avanzada  $\alpha$  unidades de tiempo está constituído de dos partes

1. La parte **irreducible**:

$$b[0], b[1], \dots, b[\alpha - 1]$$

que ocurre antes del instante de tiempo cero, y queda fuera del rango del filtro y

2. La parte **reducible**:

$$b[\alpha], b[\alpha + 1], \dots, b[n]$$

que está dentro del rango del filtro.

La parte reducible representa la salida deseada del filtro de predicción. Luego, la salida deseada  $d_\alpha$  es el vector fila de  $n + m + 1$  componentes, esto es

$$d_\alpha = (b[\alpha], b[\alpha + 1], \dots, b[n], 0, 0, \dots, 0).$$

Así el filtro de predicción  $f_\alpha$  para la distancia de predicción  $\alpha$  es

$$f_\alpha = d_\alpha A = b[\alpha]a_0 + b[\alpha + 1]a_1 + \dots + b[n]a_{n-\alpha}$$

luego la suma de los errores cuadráticos  $v_\alpha$  correspondiente al filtro  $f_\alpha$  es

$$\begin{aligned} v_\alpha &= d_\alpha(I - C)d_\alpha^t \\ &= d_\alpha d_\alpha^t - d_\alpha C d_\alpha^t \\ v_\alpha &= \sum_{i=\alpha}^n b^2[i] - \sum_{i=\alpha}^n \sum_{j=\alpha}^n b[i]c_i[j]b[j]. \end{aligned}$$

Así el error de predicción es la suma de la parte irreducible, el cual es todo el error, y el error entre la parte reducible y la salida actual del filtro. Si se denota por  $w_\alpha$  la suma del error de predicción cuadrática, se tiene

$$w_\alpha = \sum_{i=0}^{\alpha-1} b^2[i] + v_\alpha.$$

donde el primer término del lado derecho es la contribución de la parte irreducible y el segundo término la parte reducible.

También las ecuaciones normales para el operador  $f_\alpha$  son

$$f_\alpha R = d_\alpha B^t$$

o en su forma desarrollada

$$\begin{bmatrix} r[0] & r[1] & r[2] & \dots & r[m] \\ r[1] & r[0] & r[1] & \dots & r[m-1] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r[m] & r[m-1] & r[m-2] & \dots & r[0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f[0] \\ f[1] \\ \vdots \\ f[m] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r[\alpha] \\ r[\alpha+1] \\ \vdots \\ r[\alpha+m] \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

luego el operador de predicción es la solución de (2.5), así la salida actual se escribe como

$$c[i+\alpha] = \sum_{s=0}^m f[s]b[i-s], \quad (2.6)$$

donde  $\alpha = 1, 2, 3, \dots$  es la distancia de predicción.

Consideremos el error de predicción  $\epsilon$  cuyas componentes se definen por

$$\epsilon[i+\alpha] = b[i+\alpha] - c[i+\alpha].$$

Considerando (2.6) podemos escribir

$$\epsilon[i+\alpha] = b[i+\alpha] - \sum_{s=0}^m f[s]b[i-s],$$

que también se puede escribir

$$\begin{aligned} \epsilon[i] &= b[i] - \sum_{s=0}^m f[s]b[i-s-\alpha] \\ &= b[i] - f[0]b[i-\alpha] - f[1]b[i-\alpha-1] - \dots - f[m]b[i-\alpha-m] \end{aligned}$$

haciendo  $M = m + \alpha$  e  $a[0] = 1, a[1] = 0, \dots, a[\alpha - 1] = 0, a[\alpha] = -f[0], a[\alpha + 1] = -f[1], \dots, a[\alpha + m] = a[M] = -f[M]$

Luego definimos el operador error de predicción  $F$  con distancia de predicción  $\alpha$  como:

$$F = (a[0], a[1], a[2], \dots, a[\alpha - 1], a[\alpha], a[\alpha + 1], \dots, a[\alpha + m])$$

o sea

$$F = (1, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{(\alpha-1) \text{ ZEROS}}, -f[0], -f[1], \dots, -f[m])$$

Así el error de predicción se puede escribir como la convolución (discreta) de los coeficientes del operador error de predicción con la entrada  $b$ , esto es

$$\epsilon[t] = \sum_{s=0}^M a[s]b[t-s], a[0] = 1$$

cuando  $\alpha = 1$  el operador error de predicción  $F$  queda

$$F = (a[0], a[1], \dots, a[M]) = (1, -f[0], -f[0], \dots, -f[M])$$

y el error de predicción queda

$$\epsilon[i] = \sum_{s=0}^M a[s]b[i-s] = \sum_{s=0}^{m+1} a[s]b[i-s]$$

## 3 MÉTODOS DE DECONVOLUCIÓN

### 3.1 Modelo de Deconvolución

Cuando la tierra estratificada es excitada por fuentes sísmicas (localizadas cerca de la superficie terrestre), estas producen ondas sísmicas que son registradas por geofonos, como se muestra en la figura(3.1). Nuestro interes es obtener la respuesta al impulso de la tierra estratificada a partir de los registros de las ondas sísmicas producidas. Si suponemos que la tierra estratificada se comporta como un sistema Lineal Invariante en el Tiempo (LTI), como se ilustra en la figura(3.2), la respuesta impulsiva de la tierra estratificada podrá ser hallada usando los métodos de deconvolución asumiendo además que la fuente sísmica representa una señal de mínimo retardo.

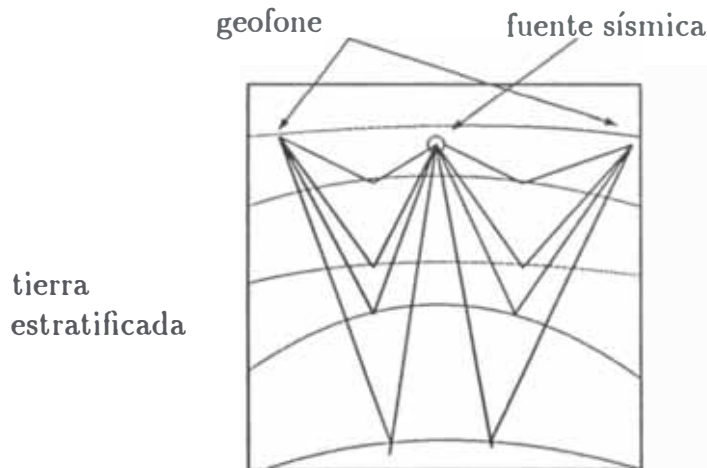
#### 3.1.1 Método de Deconvolución

El método de deconvolución es formulado de la siguiente manera: Dada la entrada  $b[n] = [b_0, b_1, \dots, b_n]$  y la salida  $x[n]$ , se desea calcular la respuesta al impulso  $h[n]$  de un sistema LTI. Dado que el sistema es del tipo LTI la salida se expresa como la convolución discreta de  $h[n]$  con  $b[n]$ , esto es

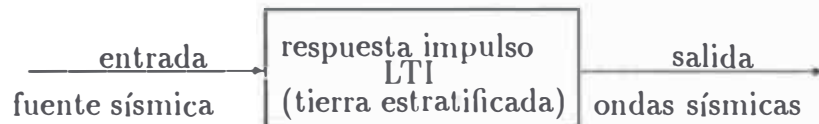
$$x[n] = b[n] * h[n].$$

Para encontrar  $h[n]$  deconvoluimos  $b[n]$  de  $x[n]$ , esto es,

$$x[n] * f[n] = (b[n] * h[n]) * f[n] = h[n] * (b[n] * f[n])$$



**Figura 3.1:** Descripción Física de Registro de Ondas Sísmicas



**Figura 3.2:** Descripción de la Tierra Estratificada Como un Sistema LTI

será igual a  $h[n]$  si

$$b[n] * f[n] = \delta[n] \quad (3.1)$$

donde el filtro  $f[n]$  tiene que ser un filtro causal y es calculado de (3.1). En otras palabras, el filtro  $f[n]$  debe ser tal que transforme la señal entrada  $b[n]$  en un pulso unitario de retardo cero. La determinación de  $f[n]$  es relativamente simple. Tomando la transformada- $Z$  en la ecuación (3.1) se obtiene

$$B(z)F(z) = 1$$

de esto se sigue que

$$F(z) = \frac{1}{B(z)}$$



luego  $f[n]$  será la inversa de  $F(z)$ . Pero surge la pregunta ¿ como debe ser  $b[n]$  y consecuentemente  $B(z)$ , de modo que  $F(z)$  tenga inversa causal ?. La respuesta es:  $b[n]$  tendrá que ser de mínimo retardo. En efecto, escribamos la ecuación para  $F(z)$  en la forma

$$F(z) = \frac{1}{B(z)} = \frac{1}{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_n z^{-n}}$$

haciendo  $w = 1/z$  la ecuación anterior queda

$$F(w) = \frac{1}{b_0 + b_1 w + b_2 w^2 + \dots + b_n w^n}$$

supongamos que el denominador del lado derecho de la ecuación anterior tiene  $n$  ceros  $w_1, w_2, \dots, w_n$  diferentes, entonces  $F(w)$  se puede escribir como

$$F(w) = \frac{1}{b_n (w - w_1)(w - w_2) \dots (w - w_n)}$$

expandiendo  $F(w)$  en fracciones parciales, se tiene

$$F(w) = \frac{u_1}{w - w_1} + \frac{u_2}{w - w_2} + \dots + \frac{u_n}{w - w_n}$$

donde la constante  $u_i$  se define como

$$u_i = (w - w_i)F(z)|_{w=w_i} \quad \text{para} \quad i = 1, \dots, n$$

Sin pérdida de generalidad asumamos que  $F(w)$  tiene  $j$  ceros cuyos módulos son mayores que 1 y  $n - j$  zeros cuyos módulos son menores que 1, esto es:

$$|w_i| > 1, \quad i = 1, \dots, j$$

$$|w_i| < 1, \quad i = j + 1, \dots, n$$

la expansión de cada término  $u_i/(w - w_i)$  de  $F(w)$  es

$$\frac{u_i}{w - w_i} = -u_i(w_i^{-1} + w_i^{-2}w + w_i^{-3}w^2 + \dots) \quad \text{para } i = 1, \dots, j$$

y

$$\frac{u_i}{w - w_i} = u_i(w^{-1} + w_i w^{-2} + w_i^2 w^{-3} + \dots) \quad \text{para } i = j + 1, \dots, n$$

asi los coeficientes de  $F(w)$  son

$$f_s = \begin{cases} -\sum_{i=1}^j u_i w_i^{-s-1}, & s \geq 0 \\ \sum_{i=j+1}^n u_i w_i^{-s-1}, & s < 0 \end{cases}$$

y  $F(w)$  se escribe como

$$F(w) = \sum_{s=-\infty}^{-1} \left( \sum_{i=j+1}^n u_i w_i^{-s-1} \right) w^s + \sum_{s=0}^{\infty} \left( \sum_{i=1}^j -u_i w_i^{-s-1} \right) w^s$$

escribiendo la ecuación anterior en términos de  $z = 1/w$  tenemos

$$F(z) = \sum_{s=-\infty}^{-1} \left( \sum_{i=k+1}^n u_i z_i^{s+1} \right) z^{-s} + \sum_{s=0}^{\infty} \left( \sum_{i=1}^j -u_i z_i^{s+1} \right) z^{-s}$$

luego, para que  $F(z)$  tenga inversa causal los coeficientes  $\sum_{i=k+1}^n u_i z_i^{s+1}$  de  $z^{-s}$  para  $s < 0$  tendran que ser cero, esto implica que todas las raíces de  $B(z)$  tendran que ser menores que 1, y esto significa que,  $b[n]$  tendrá que ser de mínimo retardo, así  $F(z)$  queda

$$F(z) = \sum_{s=0}^{\infty} \left( \sum_{i=1}^k -u_i z_i^{s+1} \right) z^{-s}$$

de esta manera los coeficientes de  $F(z)$  será la inversa  $f[n]$  de  $F(z)$  que es el filtro deseado.

Enfoquemos la ecuación (3.1) del punto de vista mínimo cuadrático (llamado también filtro de Weiner) ([Lev 47]) considerando la función  $\delta[n] = [1, 0, \dots, 0]$  de longitud  $n + m + 1$  siendo  $m + 1$  la longitud del filtro  $f[m]$ . Así la correlación cruzada de  $\delta$  con  $b$  es dado por

$$\begin{aligned} g_{\delta b}[k] &= \sum_{i=0}^n d[i+k]b[i] \\ g_{\delta b}[k] &= (b[0], 0, \dots, 0) \end{aligned}$$

escalando esta ecuación en la forma

$$g_{\delta b}[k] = (1, 0, \dots, 0),$$

el sistema de ecuaciones normales queda

$$\begin{bmatrix} r[0] & r[1] & r[2] & \dots & r[m] \\ r[1] & r[0] & r[1] & \dots & r[m-1] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r[m] & r[m-1] & r[m-2] & \dots & r[0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f[0] \\ f[1] \\ \vdots \\ f[m] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

resolviendo (3.2) se obtiene el filtro deseado y esto constituye el método normal de deconvolución. También en este método la matriz de autocorrelación no podría ser encontrada, puesto que, no se conoce  $b[n]$ , pero, con la hipótesis adicional (como veremos en la siguiente sección) que la respuesta impulso  $h[n]$  es una serie no correlacionada, podremos hallar la matriz de autocorrelación a partir de la salida  $x[n]$ , que es registrada en los geofonos, por tanto, está a nuestra disposición.

### 3.1.2 Método de Deconvolución Predictiva

El método de deconvolución predictiva se formula de acuerdo a las siguientes hipótesis.

1. **hipótesis estadística.**- las tensiones y tiempos de llegada de los eventos de información conducción en el trazo sísmico pueden ser representadas como una serie de picos aleatorios.
2. **hipótesis determinística.**- la forma de la onda básica (fuente sísmica) asociada a cada uno de los eventos es de mínimo retardo.

En otras palabras la hipótesis estadística establece que la respuesta al impulso de la tierra estratificada representa una serie no correlacionada ([Woo 75]).

El método de deconvolución predictiva considera el trazo sísmico recibido  $x[n]$  como el resultado de la convolución de una onda básica  $b[n]$  de mínimo retardo con una serie no correlacionada  $h[n]$ , donde se asume que  $h[n]$  se puede identificar con la serie de coeficientes de reflexión del medio estratificado, esto es.

$$x[n] = b[n] * h[n],$$

luego

$$\Phi_{xx}(z) = [B(z)H(z)][B(1/z)][H(1/z)];$$

donde  $\Phi_{xx}(z)$  es la transformada-Z de la autocorrelación de  $x[n]$ ,  $B(z)$  es la transformada-Z de  $b[n]$  y  $H(z)$  la transformada-Z de  $h[n]$ .

La ecuación anterior se puede expresar en la forma

$$\Phi_{xx}(z) = [B(z)B(1/z)][H(z)][H(1/z)],$$

la cual es la transformada-Z de

$$\phi_{xx}(k) = \phi_{bb}(k) * \phi_{hh}(k). \quad (3.3)$$

la expresión (3.3) dice que la autocorrelación de  $x[n]$  es igual a la convolución de  $b[n]$  con la autocorrelación de  $h[n]$ . Como  $h[n]$  es una serie no correlacionada, se tiene que,

$$\phi_{hh}[k] = \begin{cases} E_h, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$$

asi (3.3) se reduce a

$$\phi_{xx}[k] = \sum_t \phi_{hh}[t]\phi_{bb}[k - i] = E_h\phi_{bb}[k]$$

Por lo tanto la autocorrelación del trazo sísmico recibido  $x[n]$  es la misma que la autocorrelación de la onda básica  $b[n]$  excepto por un factor escalar constante  $E_h$ .

Esto quiere decir que se puede calcular la autocorrelación de la onda básica a partir del trazo sísmico recibido.

A partir de la autocorrelación de  $x[n]$ , se puede calcular el operador de predicción asociado a la forma de onda básica  $b[n]$ . Asumiendo que los coeficientes del operador de predicción a ser determinado son

$$(f[0], f[1], f[2], \dots, \dots, f[m])$$

las ecuaciones normales para este operador son

$$\begin{bmatrix} \phi_{xx}[0] & \phi_{xx}[1] & \dots & \phi_{xx}[m] \\ \phi_{xx}[1] & \phi_{xx}[0] & \dots & \phi_{xx}[m-1] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{xx}[m] & \phi_{xx}[m-1] & \dots & \phi_{xx}[0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f[0] \\ f[1] \\ \vdots \\ f[m] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{xx}[\alpha] \\ \phi_{xx}[\alpha] \\ \vdots \\ \phi_{xx}[\alpha+m] \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Luego, el operador de predicción  $(f[0], f[1], f[2], \dots, \dots, f[m])$  es la solución de (3.4). Así el correspondiente operador error de predicción con distancia de predicción  $\alpha$  es

$$(1, \underbrace{0, \dots, 0}_{(\alpha-1) \text{ zeros}}, -f[0], -f[1], \dots, \dots, -f[m])$$

este operador es el operador inverso, necesario para deconvoluir el trazo sísmico  $x[n]$ .  
Luego

$$\begin{aligned} x[n] * f[n] &= (b[n] * f[n]) * h[n] \\ &= x[n] - f[0]x[n-\alpha] - f[1]x[n-\alpha-1] - \dots - f[m]x[n-\alpha-m] \end{aligned}$$

es la serie error de predicción, que representa el trazo sísmico deconvuelto. Cuando  $b[n] * f[n] = \delta[n]$  se tiene que

$$x[n] * f[n] = h[n]$$

esto es, la serie error representa la serie no correlacionada  $h[n]$ .

Se verá ahora como el filtro predictivo cuya distancia de predicción  $\alpha$  puede servir como un operador de deconvolución. La ecuación matricial del filtro predictivo de longitud  $m + 1$  con distancia de predicción  $\alpha$  está dada por la ecuación (3.4). El sistema (3.4) puede ser aumentado hasta que se convierta en su correspondiente operador error de predicción. El nuevo sistema es

$$\begin{bmatrix} \phi_{xx}[0] & \dots & \phi_{xx}[\alpha] & \dots & \phi_{xx}[\alpha + m] \\ \phi_{xx}[1] & \dots & \phi_{xx}[\alpha - 1] & \dots & \phi_{xx}[\alpha + m - 1] \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \phi_{xx}[\alpha - 1] & \dots & \phi_{xx}[0] & \dots & \phi_{xx}[m + 1] \\ \phi_{xx}[\alpha] & \dots & \phi_{xx}[1] & \dots & \phi_{xx}[m] \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \phi_{xx}[\alpha + m] & \dots & \phi_{xx}[m + 1] & \dots & \phi_{xx}[0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -f[0] \\ \vdots \\ -f[m] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_0 \\ \rho_1 \\ \vdots \\ \rho_\alpha \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

donde

$$\rho_0 = \phi_{xx}(0) - (\phi_{\alpha}f[0] + \phi_{xx}(\alpha + 1)f[1] + \dots + \phi_{xx}(\alpha + m)f[m])$$

$$\rho_1 = \phi_{xx}(1) - (\phi_{\alpha-1}f[0] + \phi_{xx}(\alpha)f[1] + \dots + \phi_{xx}(\alpha + m - 1)f[m - 1])$$

$$\rho_{\alpha-1} = \phi_{xx}(\alpha - 1) - (\phi_{1x}f[0] + \phi_{2x}f[1] + \dots + \phi_{\alpha+m}f[m])$$

La solución del sistema anterior produce el operador error de predicción cuya distancia de predicción es  $\alpha$ . Interpretemos la ecuación anterior en términos del modelo de filtro de Wiener: La matriz de la izquierda es la matriz de autocorrelación de la entrada cuyos elementos  $\phi_{xx}(0), \phi_{xx}(1), \dots, \phi_{xx}(\alpha + m)$  puede identificarse con la autocorrelación de una fuente sísmica de longitud  $\alpha + m + 1$ . Los elementos del vector columna de la derecha constituyen los valores de retardo positivo de la correlación cruzada entre la salida deseada y la entrada. Hagamos una interpretación de la correlación cruzada

$$\underbrace{(\rho_0, \rho_1, \dots, \rho_{\alpha-1})}_{\alpha \text{ términos}}, \underbrace{(0, \dots, 0)}_{m+1 \text{ CEROS}}).$$

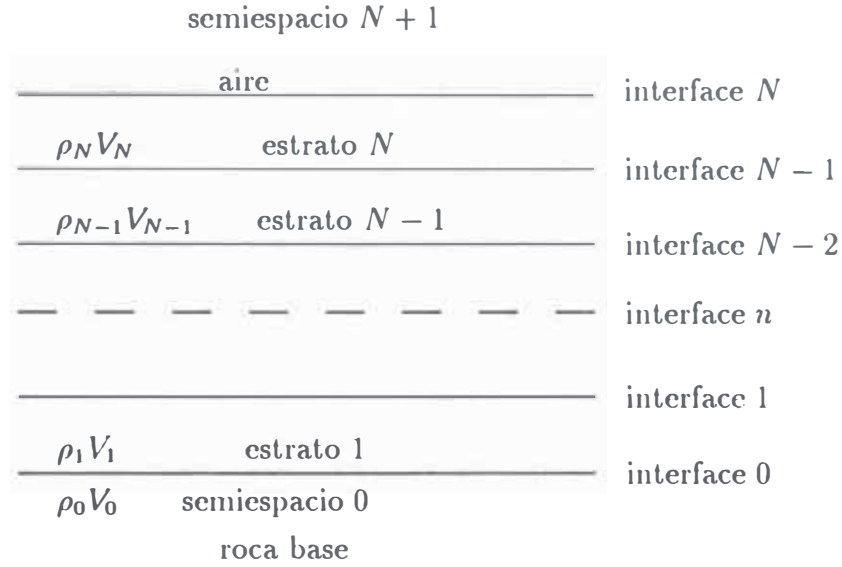
se observa que esta correlación cruzada se anula para retardos mayores que  $\alpha - 1$ , lo que significa que la longitud de la salida deseada no puede ser mayor que  $\alpha$ . En otras palabras, la onda de entrada posee longitud  $\alpha + m + 1$ , mientras que la salida deseada posee  $\alpha$  términos diferentes de cero.

Resumiendo, el filtro inverso dado por (3.2) convierte la onda básica o fuente sísmica desconocida en un impulso de retardo cero, mientras que el operador error de predicción convierte la onda básica de longitud  $\alpha + m + 1$  en otra de longitud  $\alpha$ . En consecuencia, el operador error de predicción puede servir como un operador de deconvolución. Esto significa que la técnica de filtros predictivos constituye un enfoque más generalizado que la deconvolución.

**Comentário.-** Muchas veces es útil ponderar la autocorrelación mediante un conjunto de factores de peso  $w_j$  para obtener la autocorrelación ponderada

$$r_j = w_j \phi_{xx}(j)$$





**Figura 3.3:** Sistema Sedimentario de  $N$  Estratos

por  $w_j$  se puede considerar el conjunto de coeficientes de peso triangular

$$w_j = \begin{cases} 1 - \frac{|j|}{N}, & |j| = 0, 1, 2, \dots, N \\ 0, & |j| = N + 1, N + 2, \dots \end{cases}$$

## 3.2 Modelo de Estratos Planos

Discutamos el modelo conocido en Geofísica como el modelo de **estratos planos**. Una línea horizontal representa la superficie de la tierra y debajo de esta superficie existen medios (estratos o sedimentos) cuyas interfaces son paralelas a la superficie. Los medios tienen sus respectivos espesores e impedancias acústicas, que se expresan como el producto de la velocidad  $V$  de la onda en el medio por la densidad  $\rho$  del medio, como se indica en la figura (3.3). El estrato más profundo o basamento cristalino (roca base) es un semi-espacio denotado con el índice cero "0", sobre el basamento cristalino están los  $N$  estratos de espesor finito, denotados con los índices que van desde 1 en la parte inferior hasta  $N$  en la parte superior. En otras

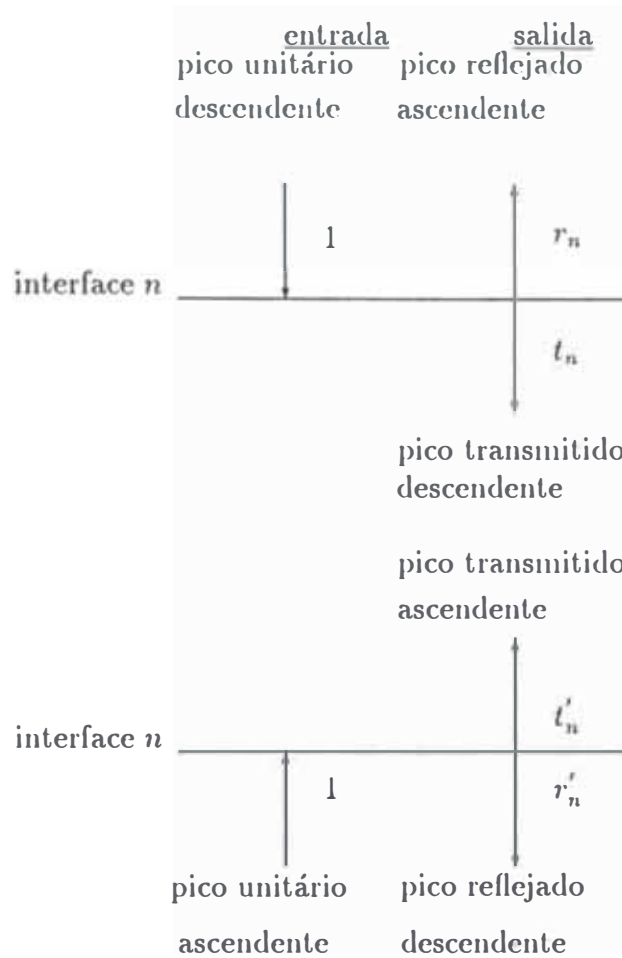
palabras, el estrato 1 es el primer estrato en tiempo geológico, mientras que el estrato  $N$  es el último estrato en tiempo geológico y representa el estrato superficial (en exploración marina el estrato superficial es el agua). El estrato superior (o aire) es un semi-espacio denotado con el índice  $N + 1$ . Así, el sistema estratificado consiste de  $N$  estratos de espesor finito contenido entre la roca base y el aire. Llamaremos **Sistema estratificado** o **sistema de rocas sedimentarias** a los  $N$  estratos de espesor finito sin incluir el aire ni la roca base. Diremos que la interface  $n$  es la parte superior del estrato  $n$ , donde  $n = 0, 1, \dots, N$ .

Aunque en la práctica la energía que se transmite a través del sistema sedimentario se pierde al pasar de un estrato a otro y los coeficientes de reflexión varían en función del ángulo de incidencia de la onda, asumiremos, que el sistema estratificado representa un sistema sin pérdidas de energía, esto es, la energía solo se pierde por transmisión para abajo, o por reflexión para arriba; no existe pérdida de energía por absorción dentro de los estratos. Esto quiere decir que el sistema puede perder energía solo cuando una onda descendente viaja en la roca base para nunca retornar, y/o una onda ascendente viaja en el aire para nunca retornar. Así la energía proveniente de un pico unitario descendente hacia la superficie, como entrada, se divide entre la onda transmitida por el sistema estratificado dentro de la roca base y la onda reflejada por el sistema en el aire. Esta onda reflejada es el trazo sísmico observado, resultante de la entrada pico unitario.

### *3.2.1 Método de Deconvolución Dinámica*

Un enfoque al problema de deconvolución, estableciendo relaciones cuantitativas entre los coeficientes de reflexión y transmisión que describe un medio estratificado será llamado **deconvolución dinámica**.

Para el estudio de la deconvolución dinámica nos restringiremos al movimiento de compresión plana con incidencia normal a las interfaces horizontales.



**Figura 3.4:** Coeficiente de Reflexion y Transmisión

Si un pico unitario descendente es incidente en la parte superior de la interface  $n$ , entonces el coeficiente de reflexión  $r_n$  es igual al pico ascendente resultante de la reflexión de la parte superior de la interface  $n$ , y el coeficiente de transmisión  $t_n$  es igual al pico descendente transmitido por la interface  $n$ . Si un pico unitario ascendente es incidente en la parte inferior de la interface  $n$ , entonces el coeficiente de reflexión  $r'_n$  es igual al pico descendente reflejado desde la parte inferior de la interface  $n$ , y el coeficiente de transmisión  $t'_n$  es igual al pico ascendente resultante transmitido hacia la interface  $n$ , ver figura(3.4) los tres últimos coeficientes se expresan en función del

primero como sigue [Ken 81]

$$\begin{aligned} t_n &= 1 + r_n \\ r'_n &= -r_n \\ t'_n &= 1 - r'_n \end{aligned} \quad (3.6)$$

y además

$$\begin{aligned} r_n &= \frac{\text{amplitud de la onda reflejada}}{\text{amplitud de la onda incidente}} \\ &= \frac{\rho_n V_n - \rho_{n-1} V_{n-1}}{\rho_n V_n + \rho_{n-1} V_{n-1}} \end{aligned}$$

Los coeficientes de reflexión  $r_n$ ,  $r'_n$  varían en el intervalo abierto  $\langle -1, 1 \rangle$ , y los coeficientes de transmisión  $t_n$ ,  $t'_n$  varían en el intervalo abierto  $\langle 0, 2 \rangle$ , el factor de transmisión de dos sentidos de la interface  $n$  está dado por  $t_n t'_n$  y es igual a  $1 - r_n^2$ , o sea.

$$t_n t'_n = 1 - r_n^2$$

Donde fuera necesario, adicionaremos interfaces hipotéticas, cuyo coeficiente de transmisión es 1 y los coeficientes de reflexión cero para cada una de las interfaces adicionadas, así como también hacer el tiempo de viaje de ida y vuelta en cada estrato igual a la misma cantidad, lo cual será llamado **tiempo unitario**.

Dado cualquier tren de ondas de picos

$$a[0], a[1], a[2], \dots, a[s] \dots,$$

donde  $a[s]$  denota la amplitud del pico,  $s$  el tiempo discreto, asociamos a este tren de ondas la función generatriz dada por:

$$A(z) = a[0] + a[1]z + a[2]z^2 + \dots + a[s]z^s + \dots$$

y la transformada-Z del tren de ondas sera denotado por  $\bar{A}(z)$ , esto es:

$$\bar{A}(z) = a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_s z^{-s} + \dots$$

por comodidad se denotara la función generatriz  $A(z)$  y la transformada-Z  $\bar{A}(z)$  simplemente por  $A$  y  $\bar{A}$  respectivamente.

Teniendo en cuenta que la entrada sera siempre un pico descendente unitario incidente en el instante de tiempo cero sobre el estrato superior del sistema estratificado, el tren de ondas reflejadas de dentro hacia arriba en el semi-espacio superior recibirá el nombre de **reflexión respuesta** y sera denotado por  $R_n$ , y el tren de ondas transmitido de dentro hacia abajo en la roca base recibirá el nombre de **transmisión respuesta** y será denotado por  $T_n$ , como se muestra en la figura(3.5)

Consideremos un sistema sedimentario de  $n - 1$  estratos con coeficientes de reflexión  $r_0, r_1, r_2, \dots, r_{n-1}$ . Consideremos tambien otro sistema sedimentario de  $n$  estratos con los coeficientes de reflexión  $r_0, r_1, \dots, r_{n-1}, r_n$ . Como estos coeficientes de reflexión son los mismos, el sistema de  $n$  estratos deberían ser del mismo material que el sistema de  $n - 1$  estratos, los  $n - 1$  estratos deberían tener las mismas impedancias acústicas en los dos sistemas; ver figura(3.6). Ahora, nuestro objetivo será expresar la reflexión respuesta  $R_n$  del sistema de  $n$  estratos en función de la reflexión respuesta

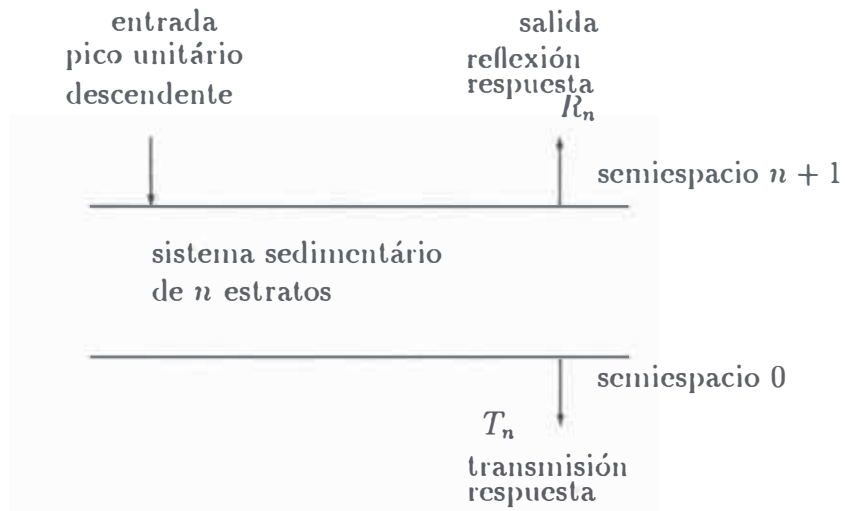


Figura 3.5: Reflexión Respuesta y Transmisión Respuesta

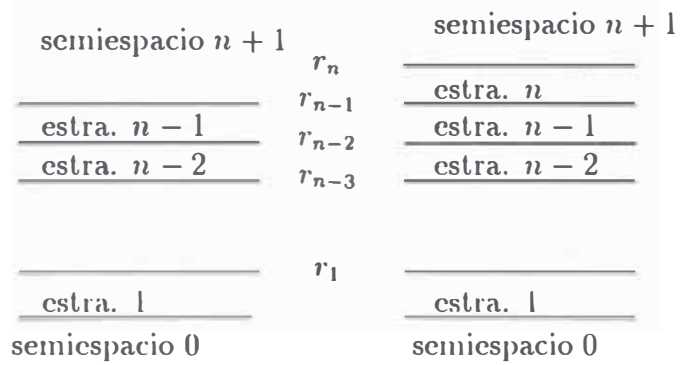
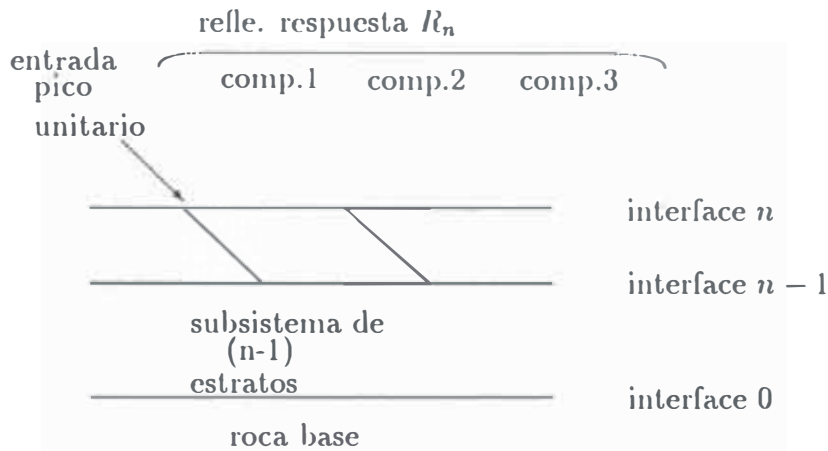


Figura 3.6: Sistemas de  $n$  y de  $n - 1$  Estratos



**Figura 3.7:** Série Reflexión Respuesta  $R_n$

$R_{n-1}$  de  $n - 1$  estratos, y el coeficiente de reflexión  $r_n$ . De acuerdo con la figura(3.7), vemos que la reflexión respuesta  $R_n$  es una serie infinita formada de la siguiente manera:

1. El pico  $r_n$  resulta de la reflexión ascendente de la fuente del pico en la  $n$ -ésima interface.
2. El tren de picos  $t_n R_{n-1} t'_n$  resulta de la transmisión descendente de la fuente de picos de la  $n$ -ésima interface, reflexión ascendente del sistema de  $n - 1$  estratos, y la transmisión ascendente a través de la  $n$ -ésima interface.
3. El tren de picos  $t_n R_{n-1} r'_n R_{n-1} t'_n$  resulta de la transmisión descendente de la fuente de picos a través de la  $n$ -ésima interface, reflexión ascendente del sistema de  $n - 1$  estratos, reflexión descendente de la  $n$ -ésima interface, reflexión ascendente del sistema de  $n - 1$  estratos, y la transmisión ascendente a través de la  $n$ -ésima interface, y así sucesivamente.

El pico 1 ocurre en el instante de tiempo cero, el tren de picos 2 ocurre en un retardo de tiempo unitario, el tren de picos 3 ocurre con un retardo de dos unidades de tiempo y así sucesivamente. Sumando todas estas contribuciones, tenemos:

$$R_n = r_n + t_n R_{n-1} t'_n z + t_n R_{n-1} r'_n R_n t'_n z^2 + \dots$$

factorizando  $t_n R_{n-1} t'_n z$  queda

$$R_n = r_n + t_n R_{n-1} t'_n z [1 + r'_n R_{n-1} z + (r'_n R_{n-1} z)^2 + \dots]$$

de aqui se obtiene

$$R_n = r_n + \frac{t_n R_{n-1} t'_n z}{1 - r'_n R_{n-1} z}$$

de esto y (3.6) se obtiene que

$$R_n = r_n + \frac{(1 - r_n)^2 R_{n-1} z}{1 + r_n R_{n-1} z}$$

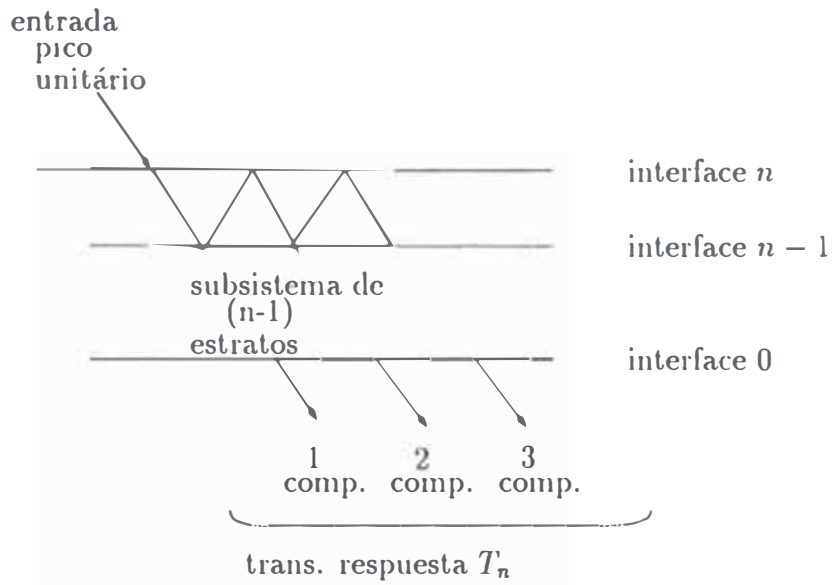
de aqui

$$R_n = \frac{r_n + R_{n-1} z}{1 + r_n R_{n-1} z}. \quad (3.7)$$

De manera similar, la transmisión respuesta  $T_n$  puede ser obtenida en función del coeficiente de reflexión  $r_n$  y el coeficiente de transmisión  $t_n$  de la  $n$ -ésima interface; la reflexión respuesta  $R_{n-1}$  y la transmisión respuesta  $T_{n-1}$  del sistema de  $n-1$  estratos. Ahora considerando la figura(3.8), se puede observar que la transmisión respuesta  $T_n$  del sistema de  $n$  estratos está formado por una serie infinita de componentes, de la siguiente manera:

1. El tren de picos  $t_n T_{n-1}$





**Figura 3.8:** Serie Transmisión Respuesta  $T_n$

2. El tren de picos  $t_n R_{n-1} r'_n T_{n-1}$
3. El tren de picos  $t_n R_{n-1} r'_n R_{n-1} r'_n T_n$

y así sucesivamente. Luego

$$\begin{aligned}
 T_n &= t_n T_{n-1} + t_n R_{n-1} r'_n T_{n-1} z + t_n R_{n-1} r'_n R_{n-1} r'_n z^2 + \dots \\
 &= t_n T_{n-1} [1 + R_{n-1} r'_n z + (R_{n-1} r'_n z)^2 + \dots]
 \end{aligned}$$

sumando la serie geométrica se obtiene

$$T_n = \frac{t_n T_{n-1}}{1 + r_n R_{n-1} z} \quad (3.8)$$

se puede observar que el denominador de (3.7) y (3.8) es el mismo

Cuando el espesor de los estratos “infinito” (roca base) la reflexión y transmisión respuesta son:

$$R_0 = r_0, \quad T_0 = t_0$$

se observa que  $R_0$  y  $T_0$  se puede expresar en términos de los polinomios  $C_0$  y  $D_0$  de grado cero de la siguiente manera:

$$R_0 = \frac{C_0}{D_0}, \quad T_0 = \frac{t_0}{D_0}$$

donde,

$C_0 = r_0$  y  $D_0 = 1$ . Supongamos que en el caso de  $n - 1$  estratos de espesor finito la reflexión y transmisión respuesta pueden ser expresados en términos de los polinomios  $C_{n-1}$  y  $D_{n-1}$  de grado  $n - 1$ , así

$$R_{n-1} = \frac{C_{n-1}}{D_{n-1}} \quad (3.9)$$

$$T_{n-1} = \frac{t_{n-1} \dots t_0}{D_{n-1}} \quad (3.10)$$

donde:  $C_{n-1}(0) = r_{n-1}$  y  $D_{n-1}(0) = 1$

de (3.7) y (3.9) se obtiene:

$$R_n = \frac{r_n + (C_{n-1}/D_{n-1})z}{1 + r_n(C_{n-1}/D_{n-1})z}$$

de aquí se sigue que

$$R_n = \frac{r_n D_{n-1} + C_{n-1} z}{D_{n-1} + r_n C_{n-1} z}$$

luego definiendo

$$C_n = r_n D_{n-1} + C_{n-1} z \quad (3.11)$$

y

$$D_n = D_{n-1} + r_n C_{n-1} z \quad (3.12)$$

se puede ver que

$$\begin{aligned} C_n(0) &= r_n D_n(0) + C_{n-1}(0)0 = r_n 1 + 0 = r_n \\ D_n(0) &= D_{n-1}(0) + r_n C_{n-1}(0)0 = 1 + 0 = 1 \end{aligned}$$

o sea

$$C_n(0) = r_n \quad , \quad D_n(0) = 1$$

asi la reflexión respuesta es dado por:

$$R_n = \frac{C_n}{D_n} \quad (3.13)$$

similarmente de (3.8) y (3.10) se obtiene que

$$\begin{aligned}
T_n &= \frac{t_n T_{n-1}}{1 + r_n R_{n-1} z} = \frac{t_n (t_{n-1} \dots t_0) / D_{n-1}}{1 + r_n (C_{n-1} / D_{n-1}) z} \\
&= \frac{t_n t_{n-1} \dots t_0}{D_{n-1} + r_n C_{n-1} z} = \frac{t_n t_{n-1} \dots t_0}{D_n}
\end{aligned}$$

o sea

$$T_n = \frac{t_n t_{n-1} \dots t_0}{D_n} \quad (3.14)$$

Definamos ahora la función espectral del polinomio  $D_n$  por  $D_n \bar{D}_n$  y la función espectral del polinomio  $C_n$ , por  $C_n \bar{C}_n$ . Encontremos una expresión para  $D_n \bar{D}_n - C_n \bar{C}_n$ .

$$\begin{aligned}
D_n \bar{D}_n &= (D_{n-1} + r_n C_{n-1} z)(\bar{D}_{n-1} + r_n \bar{C}_{n-1} z^{-1}) \\
&= D_{n-1} \bar{D}_{n-1} + r_n D_{n-1} \bar{C}_{n-1} z^{-1} + r_n C_{n-1} \bar{D}_{n-1} z + r_n^2 C_{n-1} \bar{C}_{n-1} \\
C_n \bar{C}_n &= (r_n D_{n-1} + C_{n-1} z)(r_n \bar{D}_{n-1} + \bar{C}_{n-1} z^{-1}) \\
&= r_n^2 D_{n-1} \bar{D}_{n-1} + r_n D_{n-1} \bar{C}_{n-1} z^{-1} + r_n C_{n-1} \bar{D}_{n-1} z + C_n \bar{C}_{n-1}
\end{aligned}$$

de aquí se obtiene que

$$\begin{aligned}
D_n \bar{D}_n - C_n \bar{C}_n &= (1 - r_n^2) D_{n-1} \bar{D}_{n-1} + r_n^2 C_{n-1} \bar{C}_{n-1} - C_n \bar{C}_{n-1} \\
&= (1 - r_n^2) D_{n-1} \bar{D}_{n-1} - (1 - r_n^2) C_{n-1} \bar{C}_{n-1}
\end{aligned}$$

$$= (1 - r_n^2)(D_{n-1}\bar{D}_{n-1} - C_{n-1}\bar{C}_{n-1})$$

Usando este resultado recursivamente obtenemos que

$$D_n\bar{D}_n - C_n\bar{C}_n = (1 - r_n^2)(1 - r_{n-1}^2) \dots (1 - r_0^2)$$

haciendo

$$\sigma_n^2 = (1 - r_n^2)(1 - r_{n-1}^2) \dots (1 - r_0^2)$$

se observa que  $\sigma_n^2$  es el producto de factores de transmisión de ida y vuelta de los  $n$  estratos de espesor finito, así:

$$D_n\bar{D}_n - C_n\bar{C}_n = \sigma_n^2$$

cuando  $n = N$  en la ecuación anterior se obtiene

$$1 - \frac{C_N\bar{C}_N}{D_N\bar{D}_N} = \frac{\sigma_n^2}{D_N\bar{D}_N}$$

de esto y usando (3.13) y (3.14) se sigue que

$$1 - R_N\bar{R}_N = \frac{\sigma_N^2 T_N \bar{T}_N}{(t_N \dots t_0)^2}$$

como

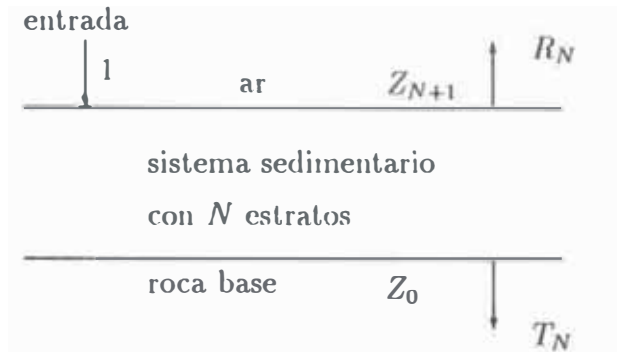
$$\begin{aligned}
\sigma_N^2 &= (1 - r_N^2)(1 - r_{N-1}^2) \dots (1 - r_0^2) \\
&= (1 - r_N)(1 + r_N)(1 - r_{N-1})(1 + r_{N-1}) \dots (1 - r_0)(1 + r_0) \\
&= t'_N t_N \dots t'_0 t_0 \\
&= (t_N \dots t_0)(t'_N \dots t'_0)
\end{aligned}$$

se sigue que

$$1 - R_N \bar{R}_N = \left( \frac{t'_N \dots t'_0}{t_N \dots t_0} \right) T_n \bar{T}_N. \quad (3.15)$$

Se puede observar que la ecuación (3.15) expresa la ley de la conservación de la energía, esto es: La energía que entra menos la energía que sale es igual a la energía transmitida ([Ken 81]).

Veamos que la ecuación (3.15) es verdaderamente la ley de la conservación de la energía. Se sabe que el flujo de la energía viajando en un estrato es proporcional al producto de la impedancia del estrato por el cuadrado de la amplitud de la onda [Ken 81], denotemos con  $Z_0$  la impedancia de la roca base, y  $Z_{n+1}$  la impedancia del aire. Supongamos que el sistema sedimentario, inicialmente esta en reposo, y la entrada es un pico unitario descendente incidente sobre la superficie. La salida del sistema es la reflexión respuesta  $R_N$  reflejado hacia fuera dentro del aire y la transmisión respuesta  $T_N$  transmitida hacia abajo en la roca base, como se muestra en la figura(3.9) como el sistema es sin pérdida de energía, entonces parte de la energía de la entrada se refleja y parte se transmite. La energía del pico de entrada es proporcional a  $Z_{n+1}$ , la energía de la onda de salida reflejada es proporcional a  $Z_{N+1} R_N \bar{R}_N$ , y la energía de la onda de salida transmitida es proporcional a  $Z_0 T_N \bar{T}_N$ . La ley de la conservación de la energía establece que la energía de entrada



**Figura 3.9:** Reflexión y transmisión respuesta del sistema de  $N$  estratos

en el sistema sedimentario debería ser igual a la energía de la salida del sistema sedimentario; esto es:

$$Z_{N+1} = Z_{N+1} R_N \bar{R}_N + Z_0 T_N \bar{T}_N$$

de aquí se sigue que

$$1 - R_N \bar{R}_N = \left( \frac{Z_0}{Z_{n+1}} \right) T_N \bar{T}_N \quad (3.16)$$

se sabe también que los coeficientes de transmisión  $t_n$  y  $t'_n$  de los estratos  $n+1$  y  $n$  están dados en función de las impedancias  $Z_{n+1}$  y  $Z_n$ , mediante:

$$t_n = \frac{2Z_{n+1}}{Z_{n+1} + Z_n} \quad t'_n = \frac{2Z_n}{Z_{n+1}} + Z_n$$

de aquí se sigue que

$$\frac{t'_n}{t_n} = \frac{Z_n}{Z_{n+1}}$$

por lo tanto se tiene que

$$\frac{t'_N \dots t'_1 t'_0}{t_N \dots t_1 t_0} = \frac{Z_N \dots Z_1 Z_0}{Z_{N+1} \dots Z_2 Z_1} = \frac{Z_0}{Z_{N+1}} \quad (3.17)$$

(3.17) dice que  $\frac{Z_0}{Z_{N+1}}$  es dado por el cociente del factor de transmisión  $t'_0 t'_1 \dots t'_N$  ascendente através del sistema sedimentario y por el factor de transmisión  $t_0 t_1 \dots t_{N-1} t_N$  descendente através del sistema sedimentario. Substituyendo (3.17) en (3.16) o (3.17) en (3.15) se sigue que (3.15) y (3.16) son iguales, lo cual prueba que (3.15) expresa la ley de la conservación de la energía.

Como la reflexión respuesta  $R_N$  es observada en el trazo sísmico y por tanto está a nuestra disposición, definimos la función espectral  $\Phi$  como sigue

$$\Phi = 1 - R_N \bar{R}_N. \quad (3.18)$$

ahora de (3.16) se tiene que

$$\Phi = \left( \frac{Z_0}{Z_{N+1}} \right) T_N \bar{T}_N;$$

y como  $T_N = \frac{t_N \dots t_1 t_0}{D_N}$  se sigue que

$$\Phi = \frac{(t'_N \dots t'_1 t'_0)(t_N \dots t_1 t_0)}{D_N \bar{D}_N},$$

esto da

$$\Phi = \frac{\sigma_N^2}{D_N \bar{D}_N}; \quad (3.19)$$



asi el polinomio  $D_N$  y la constante  $\sigma_N^2$  se pueden encontrar de la función espectral conocida  $\Phi$ , usando uno de los métodos de factorización espectral de mínimo retardo, tratado en la sección 1.5 de este trabajo, tambien se puede ver en [Pap 88].

Como

$$D_N T_N = t_n \dots t_1 t_0 = cte$$

entonces el polinomio  $D_N$  es la función generatriz del operador error de predicción que reduce la onda transmitida de mínimo retardo a un pico.

Los estratos sedimentarios actúan como un sistema de dos componentes una feed-forward y la otra feedback produciendo la onda reflejada de salida  $R_N$  (esto es el trazo sísmico observado). Además, la componente feedback es idéntico a un sistema feedback puro que produce la onda transmitida de salida. Asi la función generatriz del trazo sísmico es dado por:

$$R_N = \frac{C_N}{D_N}$$

donde el polinomio  $C_N$  de grado  $N$  representa la componente feed-forward, y el polinomio  $D_N$  de grado  $N$  que representa la componente feedback, es el mismo que aparece en (3.19). Se Puede ahora deconvoluir el trazo sísmico observado con el operador error de predicción calculado de (3.19). En términos de las funciones generatrices, esta deconvolución es dado por:

$$R_N D_N = C_N$$

aquí la componente feed-forward  $C_N$  representa la estructura dinámica deseada del sistema sedimentario (esto es, los coeficientes de reflexión), mientras que la componente feedback representa los efectos reverberantes del sistema sedimentario.

Explícitamente veamos que la componente feed-forward representa la estructura dinámica: Escribimos explícitamente  $C_N$  para  $N = 3$  usando las fórmulas recursivas derivadas anteriormente.

$$\begin{aligned}
 C_3(z) &= r_3 D_2(z) + C_2(z)z \\
 &= r_3 [D_1(z) + r_2 C_1(z)z] + [r_2 D_1(z) + C_1(z)z]z \\
 &= r_3 [D_0(z) + r_1 C_0(z)z] + r_2 r_3 [r_1 D_0(z) + C_0(z)]z \\
 &\quad + r_2 [D_0(z) + r_1 C_0(z)z]z + [r_1 D_0(z) + C_0(z)z]z^2 \\
 &= r_3 [1 + r_1 r_0 z] + r_2 r_3 [r_1 + r_0 z]z + r_2 [1 + r_1 r_0 z]z^2 \\
 &\quad + (r_1 + r_0 z)z^2 \\
 C_3(z) &= r_3 + (r_2 + r_0 r_1 r_3 + r_1 r_2 r_3)z + (r_1 + r_0 r_1 r_2 + r_0 r_2 r_3)z^2 + r_0 z^3
 \end{aligned}$$

Como  $|r_n| < 1$ , luego el producto de tres o más coeficientes de reflexión serán de un orden de magnitud menor que cualquier coeficiente de reflexión simple, por lo tanto.

$$C_3 \approx r_3 + r_2 z + r_1 z^2 + r_0 z^3;$$

em general para  $N$  estratos tenemos

$$C_N \approx r_N + r_{N-1}z + \dots + r_1 z^{N-1} + r_0 z^N.$$

Puesto que el proceso de deconvolución produce los coeficientes de  $C_N$ , el proceso determina aproximadamente los coeficientes de reflexión, lo cual representa la estructura dinámica deseada del sistema sedimentario.

En retrospectiva, el trazo sísmico se puede escribir como:

$$R_N = C_N \frac{1}{D_N}$$

lo cual en el dominio del tiempo es:

$$\text{trazo sísmico} = (\text{série de reflexión dinámica}) * (\text{reverberaciones de mínimo retardo})$$

el proceso de deconvolución es

$$(\text{trazo sísmico}) * (\text{operador error-predicción}) = \text{série de reflexión dinámica}$$

Esto es el proceso de deconvolución produce la estructura dinámica deseada y destruye el efecto reverberante no deseado, por tanto también se llama a este proceso el método de **Deconvolución Predictiva Dinámica**.

### 3.2.2 Proceso Computacional

El proceso computacional para la deconvolución dinámica predictiva en términos del modelo geofísico es como sigue: El trazo sísmico observado (esto es, la reflexión respuesta del sistema sedimentario para un pico unitario) es la série de tiempo

$$r_0, r_1, r_2, r_3, \dots$$

(la función generatriz de esta série de tiempo es  $R_N$ )

- **primer paso:** Computar la autocorrelación  $\psi_s$  del trazo sísmico observado mediante la fórmula

$$\psi_s = \sum_{i=0}^w x_{i+s}x_i$$

teniendo en cuenta (3.18) calculamos la función de autocorrelación  $\phi$  dado por:

$$\begin{aligned}\phi_0 &= 1 - \psi_0 \\ \phi_s &= -\psi_s, \quad s \neq 0\end{aligned}$$

**Nota.-** La función generatriz de la autocorrelación  $\phi_s$  es la función espectral  $\Phi$

- **segundo paso:** Computar el operador error-predicción (esto es, el operador de deconvolución)  $d_0 = 1, d_1, d_2, \dots, d_N$  solución del sistema de ecuaciones normales.

$$\begin{bmatrix} \phi_0 & \phi_1 & \dots & \phi_N \\ \phi_1 & \phi_0 & \dots & \phi_{N-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \phi_N & \phi_{N-1} & \dots & \phi_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ d_1 \\ \vdots \\ d_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_N^2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

donde  $d_0 = 1, d_1, d_2, \dots, d_N$  son los coeficientes del polinomio feedback  $D_N$

- **tercer paso:** Deconvoluir el trazo sísmico  $c_i$  mediante la fórmula

$$c_i = \sum_{s=0}^N d_s x_{i-s}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N.$$

El trazo deconvuelto es el conjunto de coeficientes del polinomio feed-forward  $C_N$ , y representa aproximadamente el conjunto de coeficientes de reflexión, esto es

$$(c_0, c_1, \dots, c_N) \approx (r_N, r_{N-1}, \dots, r_0)$$

donde  $c_0 = r_N$  e  $c_N = r_0$ .

### Observaciones

1. Podemos descomponer los coeficientes polinomiales de los polinomios feedback y feedforward para producir los coeficientes de reflexión exacta, usando las fórmulas recursivas dadas anteriormente y resolviendo para  $C_{n-1}$  y  $D_{n-1}$  en términos de  $C_n$  y  $D_n$ , esto es

$$\begin{aligned} C_{n-1} &= (1 - r_n^2)^{-1}(C_n - r_n D_n)z^{-1} \\ D_{n-1} &= (1 - r_n^2)^{-1}(D_n - r_n C_n)z^{-1} \end{aligned}$$

donde  $D_n(0) = 1$ ,  $C_n(0) = r_n$ . Puesto que después del tercer paso computacional, se conocen los coeficientes  $(c_0, c_1, \dots, c_N)$  e  $(d_0, d_1, \dots, d_N)$  de los polinomios  $C_N(z)$  y  $D_N(z)$ ,  $r_N = C_N = C_0$  se puede obtener los polinomios  $C_{N-1}(z)$ ,  $D_{N-1}(z)$  e  $r_{N-1} = C_{N-1}(0)$ .

2. Hemos visto también que el trazo sísmico de reflexión se puede escribir como

$$R_N = \frac{C_N}{D_N};$$

donde  $C_N$  y  $D_N$  son polinomios cuyos coeficientes son funciones de los coeficientes de reflexión  $r_0, r_1, r_2, \dots, r_N$ ; por ejemplo si  $N = 3$ , entonces

$$\begin{aligned} C_3(z) &= r_3 + (r_2 + r_0 r_1 r_3 + r_1 r_2 r_3)z + (r_1 + r_0 r_1 r_2 + r_0 r_2 r_3)z^2 + r_0 z^3; \\ D_3(z) &= 1 + (r_1 r_0 + r_2 r_1 + r_3 r_2)z + (r_2 r_0 + r_3 r_1 + r_3 r_2 r_1 r_0)z^2 + r_3 r_0 z^3. \end{aligned}$$

generalmente los coeficientes individuales de reflexión son pequeños en magnitud. Por tanto si se desprecia el producto de tres o más coeficientes de reflexión, entonces  $C_3$  y  $D_3$  se pueden escribir como

$$\begin{aligned} C_3(z) &\approx r_3 + r_2 z + r_1 z^2 + r_0 z^3 \\ D_3(z) &\approx 1 + (r_1 r_0 + r_2 r_1 + r_3 r_2)z + (r_2 r_0 + r_3 r_1)z^2 + r_3 r_0 z^3 \\ &\approx 1 + \gamma_1 z + \gamma_2 z^2 + \gamma_3 z^3 \end{aligned}$$

donde  $\gamma_1 = \sum_{i=0}^2 r_{i+1} r_i$ ,  $\gamma_2 = \sum_{i=0}^1 r_{i+2} r_i$ ,  $\gamma_3 = \sum_{i=0}^0 r_{i+3} r_i$ , en general para esta aproximación se tiene

$$\begin{aligned} C_N(z) &\approx r_N + r_{N-1}z + \dots + r_1 z^{N-1} + r_0 z^N \\ D_3(z) &\approx 1 + \gamma_1 z + \gamma_2 z^2 + \dots + \gamma_N z^N \end{aligned}$$

donde  $\gamma_j = \sum_{i=0}^{N-j} r_{i+j} r_i$ ,  $j = 1, 2, \dots, N$ . Así el trazo del sismograma puede ser escrito como

$$R_N \approx \frac{r_N + r_{N-1}z + \dots + r_0 z^N}{1 + \gamma_1 z + \gamma_2 z^2 + \dots + \gamma_N z^N}.$$

### 3.3 Esquemas Recursivos para Ecuaciones Normales que Involucran la Matriz Toeplitz

La solución del problema de filtrado óptimo por mínimos cuadrados significa resolver un conjunto de ecuaciones simultaneas llamadas ecuaciones normales. La técnica recursiva, inicialmente halla un filtro de longitud uno, luego usando este filtro se construye el filtro de longitud dos y así sucesivamente hasta alcanzar el filtro de longitud deseado.

El enfoque hace uso de la forma especial de la matriz de autocorrelación  $R$ , llamada forma toeplitz. Esta forma se puede escribir como

$$R = \begin{bmatrix} r_0 & r_1 & \dots & r_m \\ r_{-1} & r_0 & \dots & r_{m-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{-m} & r_{-m+1} & \dots & r_0 \end{bmatrix}.$$

Así, dadas las entradas en la columna izquierda y la fila superior la matriz queda completamente definida. Las matrices toeplitz pertenecen a la clase de matrices **persimétricas**, esto es, son simétricas con respecto a la diagonal nor-este, sur-este. Esto equivale a lo siguiente:

$$R = ER^tE$$

donde

$$E = [e_n, \dots, e_1]$$

es la matriz de permutación de  $n$ -ésima orden. Una propiedad importante es que la inversa de una matriz toeplitz no singular es persimétrica [Gol 84]. Teniendo en cuenta que trabajaremos con procesos estacionarios, resolveremos las matrices toeplitz para el caso simétrico, es decir:  $r(-m) = r(m)$  y definida positiva.

Supongamos que tenemos los escalares  $r_1, \dots, r_{n-1}$  y que las matrices

$$R_k = \begin{bmatrix} 1 & r_1 & \dots & r_{k-1} \\ r_1 & 1 & \dots & r_{k-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{k-1} & r_{k-2} & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad k = 1, \dots, n$$

son todas definidas positivas. Describiremos dos algoritmos para resolver ecuaciones que involucran matrices toeplitz:

1. El algoritmo de Durbin, para resolver el problema de Yule-Walker

$$R_n y = -(r_1 \dots r_n)^t$$

2. El algoritmo de Levinson para resolver el problema

$$R_n x = b$$

En la deducción del método, denotaremos la matriz de permutación de orden  $k$  por  $E_k = [e_k^{(k)}, \dots, e_1^{(k)}]$

### El Algoritmo De Durbin

Consideremos los números reales  $r_0 = 1, r_1, r_2, \dots, r_n$  y supongamos que tenemos resuelto el sistema de Yule-Walker de  $k$ -ésima orden



$$R_k y = -(r_1 \dots r_k)$$

Calculamos la solución del sistema de  $(k + 1)$ -ésimo orden

$$\begin{bmatrix} R_k & E_k r \\ r^t E_k & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r \\ -r_{k+1} \end{bmatrix}$$

del anterior sistema se puede observar que

$$z = R_k^{-1}(-r - \alpha E_k r) = y - \alpha R_k^{-1} E_k r$$

y

$$\alpha = -r_{k+1} - r^t E_k z.$$

de la persimetria de  $R_k^{-1}$  se sigue que

$$R_k^{-1} E_k = E_k R_k^{-1}$$

y así

$$z = y + \alpha E_k y$$

substituyendo  $z$  en la anterior expresión para  $\alpha$ , se obtiene

$$\begin{aligned}\alpha &= -r_{k+1} - r^t E_k(y + \alpha E_k y) \\ &= -\frac{r_{k+1} + r^t E_k y}{1 + r^t y}\end{aligned}$$

Basandonos en este resultado presentamos el algoritmo que resuelve el sistema de Yule-Walker

$$R_k y^{(k)} = -(r^k) = -(r_1 \dots r_k)^t$$

for  $k = 1, \dots, n$ :

$$\begin{aligned}y^1 &= -r_1 \\ \text{for } k &= 1, \dots, n-1 \\ \beta_k &= 1 + r^{(k)t} y^{(k)} \\ \alpha_k &= (r_{k+1} + r^{(k)t} E_k y^{(k)}) / \beta_k \\ z^{(k)} &= y^{(k)} + \alpha_k E_k y^{(k)} \\ y^{(k+1)} &= \begin{bmatrix} z^{(k)} \\ \alpha_k \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Este algoritmo requiere  $\frac{3}{2}n^2$  lazos para generar la solución. Sin embargo podemos disminuir la cantidad de trabajo modificando el algoritmo y teniendo en cuenta que

$$\beta_k = 1 + r^{(k)t} y^k$$

$$\begin{aligned}
&= 1 + \begin{bmatrix} r^{(k-1)t} & r_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y^{(k-1)} + \alpha_{k-1} E_k y^{(k-1)} \\ \alpha_{k-1} \end{bmatrix} \\
&= 1 + r^{(k-1)t} y^{(k-1)} + \alpha_{k-1} (r^{(k-1)t} E_{k-1} y^{(k-1)} + r_k) \\
&= \beta_{k-1} + \alpha_{k-1} (-\beta_{k-1} \alpha_{k-1}) \\
&= (1 - \alpha_{k-1}^2) \beta_{k-1}
\end{aligned}$$

Así el algoritmo modificado queda

$y_1 := -r_1$

$\beta := 1$

$\alpha := -r_1$

for  $k = 1, \dots, n - 1$

$\beta := (1 - \alpha^2) \beta$

$\alpha := -(r_{k+1} + \sum_{i=1}^k r_{k+1-i} y_i) / \beta$

for  $i = 1, \dots, k$

$z_i := y_i + \alpha y_{k+1-i}$

$y_i := z_i \quad (i = 1, \dots, k)$

$y_{k+1} := \alpha$

Este algoritmo requiere  $n^2$  lazos para encontrar la solución.

### El Algoritmo De Levinson

Consideremos los vectores formados por números reales  $(r_0 = 1 \ r_1 \ r_2 \dots r_n)^t, b = (b_1 b_2 \dots b_n)^t$  y supongamos que tenemos resuelto el sistema de  $k$ -ésima orden  $1 \leq k < n$

$$R_k x = b = (b_1 \dots b_k)^t$$

Calculemos la solución del sistema de  $(k + 1)$ -ésimo orden

$$\begin{bmatrix} T_k & E_k r \\ r^t E_k & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ b_{k+1} \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

De (3.20) podemos observar que

$$R_k v + E_k r u = b;$$

y

$$r^t E_k v + u = b_{k+1}.$$

Suponiendo que tenemos calculado la solución del sistema de Yule-Walker de orden  $k$ .  $R_k y = -r$ , se sigue que

$$v = R_k^{-1}(b - u E_k r) = x + u E_k y$$

y

$$\begin{aligned} u &= b_{k+1} - r^t E_k x - u r^t y \\ &= -\frac{b_{k+1} - r^t E_k x}{1 + r^t y} \end{aligned}$$

Estos resultados sugieren que podemos resolver el sistema  $R_n x = b$  resolviendo los sistemas

$$R_k x^{(k)} = b^{(k)} = (b_1 \dots b_k)^t$$

$$R_k y^{(k)} = -(r^k) = -(r_1 \dots r_k)^t$$

paralelamente for  $k = 1, \dots, n$  :

Presentamos a continuación el algoritmo que resuelve  $R_n x = b$  basado en los resultados anteriores y en el APENDICE A-1 programas hechos en el software matemático MATLAB para calcular la solución de  $R_n x = b$ .

$$y_1 := -r_1$$

$$x_1 := b_1$$

$$\beta := 1$$

$$\alpha := -r_1$$

for  $k = 1, \dots, n - 1$

$$\beta := (1 - \alpha^2)\beta$$

$$u := (b_{k+1} - \sum_{i=1}^k r_i x_{k+1-i})/\beta$$

$$v_i := x_i + u y_{k+1-i} \quad (i = 1, \dots, k)$$

$$x_i := v_i \quad (i = 1, \dots, k)$$

$$x_{k+1} := u$$

si  $k < n - 1$ , entonces

$$\alpha := -(r_{k+1} - \sum_{i=1}^k r_i x_{k+1-i})/\beta$$

$$z_i := y_i + \alpha y_{k+1-i} \quad (i = 1, \dots, k)$$

$$y_i := z_i \quad (i = 1, \dots, k)$$

$$y_{k+1} := \alpha$$

Este algoritmo requiere  $2n^2$  lazos para generar la solución del sistema  $Tx = b$ .

**Comentario.-** El sistema de ecuaciones de Yule-Walker proviene de la suposición de que la Transformada-Z de la respuesta impulsiva de un Sistema Discreto Invariante en el Tiempo y la entrada una secuencia aleatoria estacionaria de media cero es dado por

$$H(z) = \frac{1}{\sum_{n=0}^N a(n)z^{-n}}$$

### 3.4 Aplicaciones, Ventajas y Limitaciones

En esta sección se mencionará las ventajas y limitaciones de los métodos descritos en las secciones anteriores.

#### 3.4.1 Aplicaciones

Dentro del campo de aplicación la prospección sísmica tiene una amplia aplicación en la exploración petrolífera, gas natural, agua subterránea, minería, etc.

#### 3.4.2 Ventajas y Limitaciones

En el método de deconvolución se debe conocer explícitamente la fuente sísmica  $b[n]$  para poder calcular del filtro  $f[n]$ . El método de deconvolución predictiva es más práctico que el de deconvolución, puesto que con el solo conocimiento del trazo sísmico  $x[n]$  se puede determinar el operador de predicción que a su vez éste sirve para calcular los coeficientes de reflexión de la tierra estratificada. También cabe señalar que la técnica de filtros predictivos constituye un enfoque más generalizado que la técnica de deconvolución. El modelo de estratos planos ofrece una base a partir del cual se puede construir modelos más complejos dado que la roca estra-

tificada no es plana sino que tiene ciertas curvaturas, pero dentro de los márgenes de aplicación se pueden considerar como planos de separación. Una de las limitaciones, por el momento, es que, la implementación numérica del método aún está en desarrollo y está enmarcado en el plan de investigación del autor. El modelo de estratos planos debe también considerar parámetros estadísticos para corresponder a la situación de campo.

## 4 CONCLUSIONES

La energía usada para mover carros, aviones, etc. es el petróleo, que se encuentra en depósitos profundos. Uno de los maneras de encontrarlo es mediante el método sísmico de reflexión, en áreas geológicas donde los coeficientes de reflexión son pequeños en magnitud, y además de eso, alcatórios. El sismograma de reflexión enfatiza las reflexiones primarias, y como resultado, tales registros pueden ser interpretados visualmente. Tal fue el caso en la exploración de petróleo entre 1,930 y 1,960, sin embargo la creciente demanda de petróleo obligó que se explorasen áreas que no producían registros sísmicos favorables. En muchos casos, la interpretación de registros de tales áreas no fue posible por que las reflexiones múltiples ocultaban la reflexión primaria. Esto sucedía particularmente en áreas costeras donde el mar producía coeficientes de reflexión grandes y por tanto reverberaciones. Este fenómeno ocultaba completamente las reflexiones primarias. Para resolver este problema, se desarrollaron métodos digitales que transforman los trazos sísmicos en datos procesados que pueden ser interpretados.

Los métodos tratados aquí son herramientas útiles para la deconvolución del trazo sísmico. En el caso de los filtros predictivos, permite controlar la salida, o sea, determinar el grado de resolución deseado para la distancia de predicción especificada. Consecuentemente, la habilidad para especificar la distancia de predicción implica la habilidad para controlar la resolución deseada.

En el caso del modelo de la tierra estratificada horizontalmente además de ser usado para determinar métodos de procesamiento de datos sísmicos, ofrece también una base a partir del cual se pueden construir modelos más complejos.

Finalmente podemos decir que, debido a la gran cantidad de datos que se deben procesar, los modelos sísmicos deben tener una base estadística y, para corresponder



a la situación de campo, los modelos de estudio deben permitir ruido y datos inciertos lo que significa que los métodos deben incorporar parámetros estadísticos.

## BIBLIOGRAFIA

- [Lev 47] N. Levinson, "The Wiener RMS (Root Mean Square) Error Criterion in Filter Design and Prediction", *J. Math. Phys.*, Vol.25, 1947, pp.261-278.
- [Fag 65] F.A.Graybill, *Introduction to Matrices Within Statistics*, Wadsworth, Belmont, California, 1965.
- [Rob 67] E.A. Robinson, "Predictive Decomposition of Time Series with Applications to Seismic Exploration", Ph.D.Thesis, Department of Geology and Geophysics, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Mass., 1954, also see *Geophysics*, Vol.32, 1967, pp.418-484.
- [Pea 69] K.L Peacock and Trietel, "Predictive Deconvolution-Theory and Practice" *Geophysics* April 69 vol.34, Number 2, pp.115-484.
- [Woo 75] L.C. Wood and S.Treitel, "Seismic Signal Processing", *Proc. IEEE*, vol.63, 1975, pp.649-661.
- [Ner 77] Evar D. Nering, *Algebra Lineal y Teoría De Matrices*, Editorial Limusa-1977.
- [Cyb 80] The Numerical Stability of the Levinson-Durbin Algorithm for Toeplitz Systems of Equations, *Siam J. Sci. Statist.Comp.*, 1 (1980), pp.303-319.
- [Ken 81] Kenneth, H. Waters *Reflections Seismology, a Tool for Energy Resource Exploration*, 1981.
- [Gol 84] Golub, G., Van Loan, Ch., *Matrix Computations*, John Hopkins Press, 1984.

- [Han 87] Handbook of Digital Signal Processing. Engineering Applications, Edit by Douglas F. Elliot, 1987.
- [Will 88] William W. Hager, Applied Numerical Linear Algebra, Pennsylvania State University, Prentice Hall Internacional, Inc, 1988.
- [Pap 88] Athanasios Papoulis, Signal Analysis, Mc Graw-Hill International Editions, 4<sup>th</sup> edition.
- [She 89] Robert E. Sherif, Geophysical Methods, University of Houston, 1989.
- [Har 93] Hari Krishna and Yunbiao Wang "The split Levinson Algorithm is Weakly Stable", Siam Journal On Numerical Analysis, October 93, volume 30, number 5.
- [Cha 95] Charles L. Phillips and John M. Parr, "Signal, Systems and Transforms, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1995