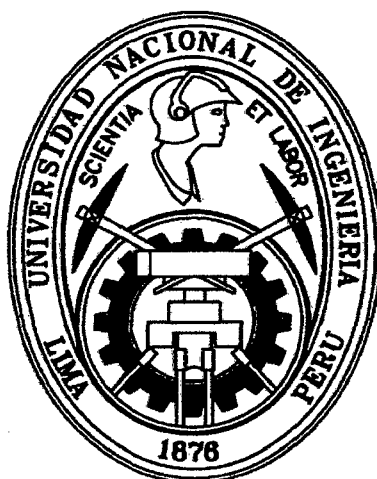


UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS

SECCIÓN POSGRADO Y SEGUNDA
ESPECIALIZACIÓN PROFESIONAL



TESIS PARA OPTAR EL GRADO ACADÉMICO DE MAESTRO EN
CIENCIAS CON MENCIÓN EN FÍSICA

TÍTULO

“EL MOVIMIENTO LUNAR”

POR

PERCY VÍCTOR CAÑOTE FAJARDO

ASESOR

MG. EDGARD VIDALÓN VIDALÓN

LIMA – PERÚ

2012

Digitalizado por:

Consortio Digital del
Conocimiento MebLatam,
Hemisferio y Dalse

Dedico este trabajo a mi familia, a mi amada esposa Jenny y a mis entrañables hijos Uriel y Víctor, quienes me han acompañado incondicionalmente en esta labor intelectual de mañana, tarde, noche, madrugada, con sus muy particulares formas de ser e incomparable asistencia en todo el sentido de la frase. Gracias pirañita, alfa y beta.

Agradecimientos:

Deseo, en primer lugar, agradecer muy fraternalmente a Edgar Vidalón Vidalón, asesor de la Tesis, por su incondicional apoyo y paciencia, a lo largo de toda esta actividad intelectual. Gracias Profesor Edgar.

También quisiera agradecer a la facultad de Ciencias, encarnada en cada uno de sus miembros, por todas las experiencias vividas y por permitirnos seguir avanzando. Muy especialmente a mis profesores, a quienes siempre recuerdo.

A mis padres, hermanos, sobrinos, familiares todos, que están en mi corazón.

Finalmente, agradecer a toda aquella persona, que, de alguna u otra forma, me apoyo en este objetivo alcanzado.

Gracias a todos.

Abstract

We analyze the complicated lunar motion using the dynamics of Newton and of Lagrange, assuming a particular case of the problem of three bodies for the Sun-Earth-Moon system, SEM system. We obtained, in both cases, the differential equations of motion that were solved numerically using Runge-Kutta's variable-step method. For Lagrange case we obtained, using a multipolar expansion, the Lagrangean function. We consider the Earth as an ellipsoidal of revolution and represent the gravitational interaction with the Moon by means of Mac-Cullagh's potential. Finally, using the theory of dynamical systems, we estimate the Lyapunov exponents of the SEM system in order to analyze the stability of its solutions.

In particular, we study the precession period of the Line of Nodes, obtaining in all the cases a value that differs at most 3,7 % from the observed value, which is 18,6 years.

Indice

Resumen.....	1
Introducción.....	2
Capítulo I. Obtención y solución numérica de las ecuaciones diferenciales ordinarias de movimiento del sistema Sol-Tierra-Luna usando coordenadas cartesianas.....	4
1.1) Introducción.....	5
1.2) Obtención de las ecuaciones diferenciales ordinarias de movimiento del sistema aislado Sol-Tierra-Luna.....	5
1.3) Análisis de la línea de nodos.....	13
1.4) Energía mecánica del sistema.....	17
1.5) Solución numérica de las ecuaciones de movimiento del sistema aislado Sol-Tierra-Luna.....	19
1.6) Observaciones y discusión de resultados.....	24
1.7) Conclusiones.....	41
Referencias.....	42
Capítulo II. Lagrangiano del sistema Sol-Tierra-Luna usando como coordenadas generalizadas las coordenadas del vector centro de masas y las del vector posición relativa Tierra-Luna.....	43
2.1) Introducción.....	44
2.2) Lagrangiano del sistema en función de las coordenadas del vector centro de masas y del vector posición relativa Tierra-Luna (caso general).....	44
2.3) Casos especiales.....	53
Capítulo III. Ecuaciones diferenciales ordinarias de movimiento en coordenadas esféricas del sistema Sol-Tierra-Luna y solución numérica.....	56
3.1) Introducción.....	57
3.2) Obtención de las ecuaciones diferenciales ordinarias de movimiento en coordenadas esféricas del sistema Sol-Tierra-Luna moviéndose en el espacio.....	57
3.3) Análisis de la línea de nodos.....	60
3.4) Energía mecánica del sistema.....	60
3.5) Solución numérica de las ecuaciones diferenciales ordinarias de movimiento.....	63

3.6) Observaciones y discusión de resultados.....	80
3.7) Conclusiones.....	82
Referencias.....	83
<u>Capítulo IV.</u> Movimiento del sistema Tierra-Luna usando coordenadas esféricas y potencial de Mac-Cullagh.....	84
4.1) Introducción.....	85
4.2) Introducción al potencial de Mac-Cullagh.....	86
4.3) Lagrangiano del sistema Sol-Tierra-Luna.....	89
4.4) Energía mecánica del sistema y línea de nodos.....	91
4.5) Obtención y solución numérica de las ecuaciones diferenciales de movimiento.....	94
4.6) Resultados numéricos, observaciones y discusión.....	99
4.7) Conclusiones.....	119
Referencias.....	120
<u>Capítulo V.</u> Estabilidad del movimiento del lunar.....	121
5.1) Introducción.....	122
5.2) Estabilidad de las soluciones del sistema de ecuaciones diferenciales no-lineales del sistema Sol-Tierra-Luna. Exponentes de Lyapunov.....	122
5.3) Obtención de los exponentes de Lyapunov.....	126
5.4) Análisis de la estabilidad del sistema Sol-Tierra-Luna.....	136
5.5) Análisis de la estabilidad del movimiento lunar.....	136
5.6) Conclusiones.....	137
Referencias.....	138
Conclusiones generales.....	140
Apéndices.....	141
A Del capítulo I.....	141
B Del capítulo II.....	147
C Del capítulo III.....	151
D Programas.....	155

Resumen

El objetivo del presente trabajo es estudiar en detalle el movimiento de la Luna. Para analizar el movimiento lunar debemos considerar un caso particular del problema de tres cuerpos. Usaremos las dinámicas de Newton y de Lagrange para estudiar un caso general y luego lo aplicaremos al sistema Sol-Tierra-Luna, STL. Las ecuaciones diferenciales ordinarias del movimiento serán resueltas numéricamente obteniendo resultados que coinciden con las observaciones. El presente trabajo se divide en la siguiente forma:

En el capítulo I asumimos al sistema STL como un sistema aislado de masas puntuales, influenciadas solo por la interacción gravitacional mutua. Asumimos también al Sol en el centro de un sistema de referencia inercial, y en la Tierra el origen de otro sistema de referencia, cuyos ejes siempre se mueven paralelos a los ejes anteriores. Se aplica la Segunda Ley de Newton para obtener las ecuaciones diferenciales que han de ser transformadas en ecuaciones diferenciales apropiadas, para ser resueltas por el método numérico de Runge-Kutta de paso variable.

En el capítulo II obtenemos el Lagrangiano del sistema STL haciendo la expansión multipolar del potencial Kepleriano Tierra-Luna para poder utilizar su distancia relativa. Luego obtendremos el Lagrangiano para casos especiales.

En el capítulo III usamos las ecuaciones de Lagrange para obtener las ecuaciones diferenciales del movimiento del sistema STL, en función de las coordenadas esféricas del centro de masas del sistema Tierra-Luna y del vector relativo de la Luna respecto de la Tierra, usando el Lagrangiano del capítulo II. Estas ecuaciones son también resueltas numéricamente.

En el capítulo IV la Tierra es considerada un elipsoide de revolución, con lo cual el potencial gravitacional de la Luna se modifica con el potencial de Mac-Cullagh. La constancia de la función E_m , expresada tanto en su valor referencial como en su dispersión, relacionada a la energía mecánica del sistema conservativo refleja la consistencia de los algoritmos numéricos empleados.

En el capítulo V se analiza la estabilidad del movimiento lunar usando la teoría de sistemas dinámicos y los exponentes de Lyapunov. Estos exponentes nos indican cómo varía una órbita en el espacio de fases, al variar las condiciones iniciales. Los exponentes son calculados usando MATDS (programa en MATLAB para investigación de Sistemas Dinámicos) dando resultados que indican que el sistema podría ser caótico, donde el movimiento lunar es inestable para ciertas condiciones iniciales.

Introducción

El objetivo del presente trabajo es estudiar el movimiento complicado de la Luna mediante un análisis diferente al usual, que consiste en usar parámetros de una trayectoria elíptica Kepleriana perturbada [1].

En el presente trabajo de Tesis usaremos dos procedimientos nuevos:

1) Usando coordenadas cartesianas y mediante la segunda ley de Newton obtendremos las ecuaciones diferenciales de movimiento, que por sus características serán resueltas numéricamente usando métodos de Runge-Kutta de paso variable, simulando las propiedades del movimiento lunar.

2) Usando coordenadas esféricas y la dinámica de Lagrange empleamos como coordenadas generalizadas las coordenadas del vector centro de masas del sistema Tierra-Luna y del vector posición relativo. Mencionamos que para obtener este Lagrangiano usamos la teoría de expansión multipolar de las energías potenciales gravitacionales de la Tierra y la Luna con respecto al Sol. Luego, resolvemos numéricamente las ecuaciones de movimiento simulando las propiedades del movimiento lunar, entre ellas, la rotación del plano orbital lunar (que es de 18,6 años).

Para estudiar un problema más real consideramos después que la Tierra es un cuerpo achatado (luego su potencial ya no es Kepleriano) modificando las ecuaciones de movimiento que se resuelven numéricamente, comparando los resultados con el caso donde los cuerpos son partículas.

Finalmente aplicaciones la teoría de la estabilidad de los sistemas dinámicos mediante los exponentes de Lyapunov.

Los procedimientos mencionados son la contribución en el estudio del movimiento de un satélite alrededor de un planeta perturbado por la fuerza gravitatoria de un cuerpo mayor.

En particular el movimiento de nuestro satélite natural siempre nos ha cautivado. Registros de su movimiento llegan a nosotros desde hace muchos siglos. Basta recordar las observaciones hechas por Hiparco de Nicea (190-120 a. C.), que le permitió definir cuatro tipos de meses lunares hace 21 siglos, o el monumento astronómico de Stonehenge, construido hace 40 siglos al sur de Inglaterra, dejando un legado del movimiento lunar a través del horizonte.

Nuestras pretensiones de hacer una descripción adecuada del movimiento lunar, podrían iniciarse precisamente con Hiparco, considerado el primer astrónomo científico quien inclusive tuvo influencia sobre Ptolomeo, conocido por describir el movimiento lunar usando elipses y epiciclos. Sin embargo, este modelo era inconsistente con los cambios aparentes del diámetro lunar así como con la variación de velocidad observada.

El conocimiento del movimiento lunar era (y sigue siendo) particularmente importante por la capacidad de predecir eclipses así como para la navegación y todo lo vinculado con ella, por ejemplo el comercio (y posteriormente los viajes espaciales).

En el siglo XVI Tycho Brahe, luego de un largo periodo de observaciones y predicciones, destaca dos detalles importantes del movimiento lunar, el primero se refiere al movimiento del plano orbital lunar usado por Ptolomeo (plano que será materia de estudio aquí), y el segundo, a la variación de la velocidad lunar cerca de los extremos de la línea de nodos (que es la recta de intersección del plano orbital lunar y la eclíptica).

A finales del siglo XVI, Johannes Kepler había arribado a la misma conclusión a partir de resultados puramente teóricos, evidenciando en ellos una clara influencia solar.

En el último tercio del siglo XVII, Isaac Newton con su Teoría de la Gravitación Universal, propone un marco teórico capaz de resistir el análisis de astrónomos y teóricos del movimiento planetario; y a la luz de su propio análisis, concluir que el movimiento lunar es tan complicado que no podría describirse simplemente usando una solución Kepleriana perturbada. Sin embargo, es este el camino que nos ha conducido a la forma más exitosa de describir el movimiento lunar.

Las tendencias actuales en la descripción del movimiento lunar combinan ideas tan interesantes como, uso de la relatividad general así como modelar a la Luna como un cuerpo solido-fluido multicapa.

La importancia del estudio del movimiento lunar, además de lo ya mencionado, actualmente se revitaliza por la incursión de nuestro país en la era espacial, en cuanto a la puesta en marcha del proyecto "Chasqui", teniendo implicancias notables en el desarrollo de Ciencia y Tecnología propias, así como impulsar diversos campos de aplicación. Tampoco dejemos de lado el incremento de viajes espaciales tripulados, experimentos lunares, etc.

CAPITULO I

OBTENCION DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE MOVIMIENTO DEL SISTEMA AISLADO SOL- TIERRA-LUNA EN COORDENADAS CARTESIANAS Y SOLUCION NUMERICA

1.1) Introducción.

1.2) Obtención de las ecuaciones diferenciales ordinarias de movimiento del sistema aislado Sol-Tierra-Luna en coordenadas cartesianas.

1.3) Análisis de la línea de nodos.

1.4) Energía mecánica del sistema.

1.5) Solución numérica de las ecuaciones de movimiento del sistema aislado Sol-Tierra-Luna.

1.6) Observaciones y discusión de resultados.

1.7) Conclusiones.

1.1) Introducción

En este capítulo obtendremos las ecuaciones diferenciales ordinarias de movimiento del sistema Sol-Tierra-Luna, STL, utilizando coordenadas cartesianas y un sistema de referencia inercial, con su origen fijo en el Sol (ver Ap A, Pág 141) [2,3]. Consideramos al Sol, Tierra y Luna como masas puntuales, actuando entre ellas sólo la interacción gravitacional. Se obtienen las ecuaciones de movimiento utilizando la segunda ley de Newton, consiguiendo 6 ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden, transformándolas en 12 ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden. La resolución numérica adecuada de las ecuaciones diferenciales ordinarias demandará asumir condiciones iniciales correctas, de tal forma que estos resultados numéricos se podrán comparar con las mediciones ya realizadas, como por ejemplo, la medición del mes dragontino (mes lunar que corresponde al tiempo que emplea la Luna en moverse de un nodo ascendente o descendente al siguiente; los nodos son los puntos en el horizonte por donde asciende o desciende la Luna) o el período de precesión de la línea de nodos de la órbita lunar. Finalmente, se analizará como influye en el movimiento lunar el cambio de la velocidad lunar inicial o el cambio de las masas del sistema o el cambio del plano orbital lunar (plano orbital lunar instantáneo).

1.2) Obtención de las ecuaciones diferenciales ordinarias de movimiento del sistema aislado Sol-Tierra-Luna.

Consideramos al Sol como origen de un sistema de referencia inercial XYZ fijo en el espacio con respecto a las estrellas lejanas y al sistema de referencia no inercial xyz, centrado en la Tierra, con ejes siempre paralelos al sistema XYZ, estos sistemas de referencia se denominan "sistemas coordenados eclípticos del Sol y la Tierra", respectivamente [4]. Representamos por M , m_T y m_L las masas del Sol, la Tierra y la Luna. Asumimos en este modelo al Sol, Tierra y Luna como partículas, actuando entre ellas solamente la interacción gravitacional. Las masas m_T y m_L se encuentran localizadas con los vectores posición \vec{r}_T y \vec{r}_L , respectivamente (ver Fig 1.1).

Las fuerzas resultantes actuando sobre la Tierra y la Luna son, respectivamente,

$$\vec{F}_{RT} \equiv \vec{F}_{T,S} + \vec{F}_{T,L} \quad (1.1)$$

$$\vec{F}_{RL} \equiv \vec{F}_{L,S} + \vec{F}_{L,T} \quad (1.2)$$

donde,

$\vec{F}_{T,S}$: fuerza gravitacional sobre la Tierra debido al Sol.

$\vec{F}_{T,L}$: fuerza gravitacional sobre la Tierra debido a la Luna.

$\vec{F}_{L,S}$: fuerza gravitacional sobre la Luna debido al Sol.

$\vec{F}_{L,T}$: fuerza gravitacional sobre la Luna debido a la Tierra.

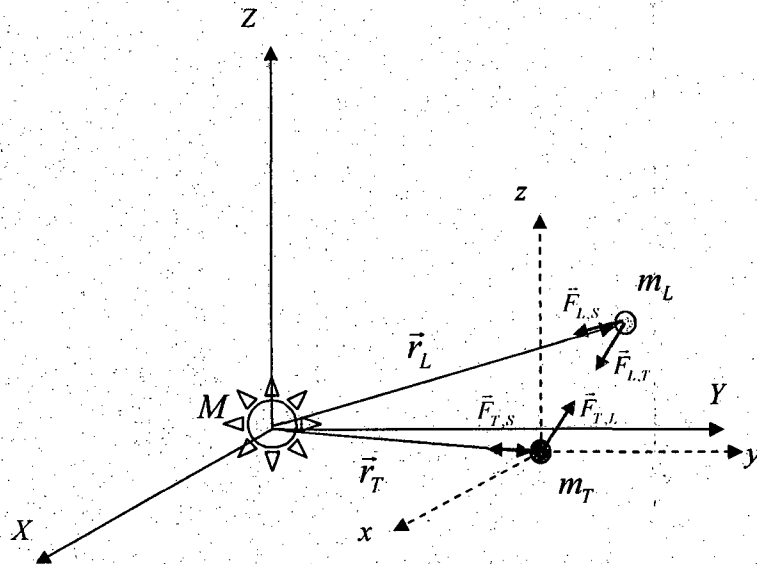


Fig 1.1 Sistema STL.

Usando la segunda ley de Newton y la ley de la gravitación universal en las Ec (1.1), (1.2), obtenemos,

$$m_T \ddot{\bar{r}}_T \equiv -G \frac{m_T M \bar{r}_T}{|\bar{r}_T|^3} - G \frac{m_T m_L (\bar{r}_T - \bar{r}_L)}{|\bar{r}_T - \bar{r}_L|^3} \quad (1.3)$$

$$m_L \ddot{\bar{r}}_L \equiv -G \frac{m_L M \bar{r}_L}{|\bar{r}_L|^3} - G \frac{m_L m_T (\bar{r}_L - \bar{r}_T)}{|\bar{r}_L - \bar{r}_T|^3} \quad (1.4)$$

Estas ecuaciones vectoriales conducen a 6 ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden, como mostramos a continuación,

$$\ddot{x}_T \equiv -GM \frac{x_T}{\{x_T^2 + y_T^2 + z_T^2\}^{\frac{3}{2}}} - Gm_L \frac{(x_T - x_L)}{\{(x_T - x_L)^2 + (y_T - y_L)^2 + (z_T - z_L)^2\}^{\frac{3}{2}}} \quad (1.5)$$

$$\ddot{y}_T \equiv -GM \frac{y_T}{\{x_T^2 + y_T^2 + z_T^2\}^{\frac{3}{2}}} - Gm_L \frac{(y_T - y_L)}{\{(x_T - x_L)^2 + (y_T - y_L)^2 + (z_T - z_L)^2\}^{\frac{3}{2}}} \quad (1.6)$$

$$\ddot{z}_T \equiv -GM \frac{z_T}{\{x_T^2 + y_T^2 + z_T^2\}^{\frac{3}{2}}} - Gm_L \frac{(z_T - z_L)}{\{(x_T - x_L)^2 + (y_T - y_L)^2 + (z_T - z_L)^2\}^{\frac{3}{2}}} \quad (1.7)$$

$$\ddot{x}_L \equiv -GM \frac{x_L}{\{x_L^2 + y_L^2 + z_L^2\}^{\frac{3}{2}}} - Gm_T \frac{(x_L - x_T)}{\{(x_T - x_L)^2 + (y_T - y_L)^2 + (z_T - z_L)^2\}^{\frac{3}{2}}} \quad (1.8)$$

$$\ddot{y}_L \equiv -GM \frac{y_L}{\{x_L^2 + y_L^2 + z_L^2\}^{\frac{3}{2}}} - Gm_T \frac{(y_L - y_T)}{\{(x_T - x_L)^2 + (y_T - y_L)^2 + (z_T - z_L)^2\}^{\frac{3}{2}}} \quad (1.9)$$

$$\ddot{z}_L \equiv -GM \frac{z_L}{\{x_L^2 + y_L^2 + z_L^2\}^{\frac{3}{2}}} - Gm_T \frac{(z_L - z_T)}{\{(x_T - x_L)^2 + (y_T - y_L)^2 + (z_T - z_L)^2\}^{\frac{3}{2}}} \quad (1.10)$$

Las ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden obtenidas, deberán ser transformadas en ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, para ser resueltas mediante el método numérico de Runge-Kutta mejorado, eligiendo adecuadas condiciones iniciales, como veremos en la Pág 19.

Como se observa estamos estudiando el caso general en que la Tierra y la Luna se pueden mover en el espacio (esto es posible para ciertas condiciones iniciales).

Para determinar la trayectoria lunar, han de resolverse (para ciertas condiciones iniciales) las ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden Ec (1.5)-(1.10); para tal efecto y para simplificar los cálculos [5,6], primero empezamos por convertir dichas ecuaciones en ecuaciones adimensionales según los siguientes cambios de variables,

$$\dot{x}_T \equiv \frac{x_T}{R} \quad (1.11)$$

$$\dot{y}_T \equiv \frac{y_T}{R} \quad (1.12)$$

$$\dot{z}_T \equiv \frac{z_T}{R} \quad (1.13)$$

$$\dot{x}_L \equiv \frac{x_L}{R} \quad (1.14)$$

$$\dot{y}_L \equiv \frac{y_L}{R} \quad (1.15)$$

$$\dot{z}_L \equiv \frac{z_L}{R} \quad (1.16)$$

$$\dot{t} \equiv \frac{t}{T} \quad (1.17)$$

donde R es el radio orbital medio Tierra-Sol, considerado 1 UA (unidad astronómica) y, T, el período orbital terrestre (1 año). Las ecuaciones adimensionales son,

$$\ddot{x}_T^* \equiv -k \left(\frac{\dot{x}_T^*}{\{x_T^{*2} + y_T^{*2} + z_T^{*2}\}^{\frac{3}{2}}} + k_1 \frac{(\dot{x}_T^* - \dot{x}_L^*)}{\left\{(\dot{x}_T^* - \dot{x}_L^*)^2 + (\dot{y}_T^* - \dot{y}_L^*)^2 + (\dot{z}_T^* - \dot{z}_L^*)^2\right\}^{\frac{3}{2}}} \right) \quad (1.18)$$

$$\ddot{y}_T^* \equiv -k \left(\frac{\dot{y}_T^*}{\{x_T^{*2} + y_T^{*2} + z_T^{*2}\}^{\frac{3}{2}}} + k_1 \frac{(\dot{y}_T^* - \dot{y}_L^*)}{\left\{(\dot{x}_T^* - \dot{x}_L^*)^2 + (\dot{y}_T^* - \dot{y}_L^*)^2 + (\dot{z}_T^* - \dot{z}_L^*)^2\right\}^{\frac{3}{2}}} \right) \quad (1.19)$$

$$\ddot{z}_T^* \equiv -k \left(\frac{\dot{z}_T^*}{\{x_T^{*2} + y_T^{*2} + z_T^{*2}\}^{\frac{3}{2}}} + k_1 \frac{(\dot{z}_T^* - \dot{z}_L^*)}{\left\{(\dot{x}_T^* - \dot{x}_L^*)^2 + (\dot{y}_T^* - \dot{y}_L^*)^2 + (\dot{z}_T^* - \dot{z}_L^*)^2\right\}^{\frac{3}{2}}} \right) \quad (1.20)$$

$$\ddot{x}_L^* \equiv -k \left(\frac{\dot{x}_L^*}{\{x_L^{*2} + y_L^{*2} + z_L^{*2}\}^{\frac{3}{2}}} + k_2 \frac{(\dot{x}_L^* - \dot{x}_T^*)}{\left\{(\dot{x}_T^* - \dot{x}_L^*)^2 + (\dot{y}_T^* - \dot{y}_L^*)^2 + (\dot{z}_T^* - \dot{z}_L^*)^2\right\}^{\frac{3}{2}}} \right) \quad (1.21)$$

$$\ddot{y}_L^* \equiv -k \left(\frac{\dot{y}_L^*}{\{x_L^{*2} + y_L^{*2} + z_L^{*2}\}^{\frac{3}{2}}} + k_2 \frac{(\dot{y}_L^* - \dot{y}_T^*)}{\left\{(\dot{x}_T^* - \dot{x}_L^*)^2 + (\dot{y}_T^* - \dot{y}_L^*)^2 + (\dot{z}_T^* - \dot{z}_L^*)^2\right\}^{\frac{3}{2}}} \right) \quad (1.22)$$

$$\ddot{z}_L^* \equiv -k \left(\frac{\dot{z}_L^*}{\{x_L^{*2} + y_L^{*2} + z_L^{*2}\}^{\frac{3}{2}}} + k_2 \frac{(\dot{z}_L^* - \dot{z}_T^*)}{\left\{(\dot{x}_T^* - \dot{x}_L^*)^2 + (\dot{y}_T^* - \dot{y}_L^*)^2 + (\dot{z}_T^* - \dot{z}_L^*)^2\right\}^{\frac{3}{2}}} \right) \quad (1.23)$$

En estas ecuaciones las constantes k , k_1 y k_2 se definen como,

$$k \equiv \frac{GMT^2}{R^3} \quad (1.24)$$

$$k_1 \equiv \frac{m_L}{M} \quad (1.25)$$

$$k_2 \equiv \frac{m_T}{M} \quad (1.26)$$

que, para los siguientes valores [1,4],

$$G \equiv 6,67 \times 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \quad (1.27)$$

$$M \equiv 1,9891 \times 10^{30} \text{kg} \quad (1.28)$$

$$T \equiv 3,1536 \times 10^7 \text{s} \quad (1.29)$$

$$R \equiv 1,5 \times 10^{11} \text{m} \quad (1.30)$$

$$m_L \equiv 7,34767309245735 \times 10^{22} \text{kg} \quad (1.31)$$

$$m_T \equiv 597,219 \times 10^{22} \text{kg} \quad (1.32)$$

son iguales a,

$$k \equiv 4\pi^2 \quad (1.33)$$

$$k_1 \equiv 3,694 \times 10^{-8} \quad (1.34)$$

$$k_2 \equiv 300,246 \times 10^{-8} \quad (1.35)$$

Ahora, estas ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden, adimensionales, han de convertirse en ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, para lo cual aplicamos los siguientes cambios de variables,

$$x_1 \equiv \dot{x}_T \quad (1.36)$$

$$x_2 \equiv \dot{y}_T \quad (1.37)$$

$$x_3 \equiv \dot{z}_T \quad (1.38)$$

$$x_4 \equiv \dot{x}_L \quad (1.39)$$

$$x_5 \equiv \dot{y}_L \quad (1.40)$$

$$x_6 \equiv \dot{z}_L \quad (1.41)$$

$$x_7 \equiv \dot{x}_T \quad (1.42)$$

$$x_8 \equiv \dot{y}_T \quad (1.43)$$

$$x_9 \equiv \dot{z}_T \quad (1.44)$$

$$x_{10} \equiv \dot{x}_L \quad (1.45)$$

$$x_{11} \equiv \dot{y}_L \quad (1.46)$$

$$x_{12} \equiv \dot{z}_L \quad (1.47)$$

con lo que obtenemos las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden,

$$\dot{x}_1 \equiv x_7 \quad (1.48)$$

$$\dot{x}_2 \equiv x_8 \quad (1.49)$$

$$\dot{x}_3 \equiv x_9 \quad (1.50)$$

$$\dot{x}_4 \equiv x_{10} \quad (1.51)$$

$$\dot{x}_5 \equiv x_{11} \quad (1.52)$$

$$\dot{x}_6 \equiv x_{12} \quad (1.53)$$

$$\dot{x}_7 \equiv -k \left(\frac{x_1}{\{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\}^{\frac{3}{2}}} + k_1 \frac{(x_1 - x_4)}{\{(x_1 - x_4)^2 + (x_2 - x_5)^2 + (x_3 - x_6)^2\}^{\frac{3}{2}}} \right) \quad (1.54)$$

$$\dot{x}_8 \equiv -k \left(\frac{x_2}{\{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\}^{\frac{3}{2}}} + k_1 \frac{(x_2 - x_5)}{\{(x_1 - x_4)^2 + (x_2 - x_5)^2 + (x_3 - x_6)^2\}^{\frac{3}{2}}} \right) \quad (1.55)$$

$$\dot{x}_9 \equiv -k \left(\frac{x_3}{\{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\}^{\frac{3}{2}}} + k_1 \frac{(x_3 - x_6)}{\{(x_1 - x_4)^2 + (x_2 - x_5)^2 + (x_3 - x_6)^2\}^{\frac{3}{2}}} \right) \quad (1.56)$$

$$\dot{x}_{10} \equiv -k \left(\frac{x_4}{\{x_4^2 + x_5^2 + x_6^2\}^{\frac{3}{2}}} + k_2 \frac{(x_4 - x_1)}{\{(x_1 - x_4)^2 + (x_2 - x_5)^2 + (x_3 - x_6)^2\}^{\frac{3}{2}}} \right) \quad (1.57)$$

$$\dot{x}_{11} \equiv -k \left(\frac{x_5}{\{x_4^2 + x_5^2 + x_6^2\}^{\frac{3}{2}}} + k_2 \frac{(x_5 - x_2)}{\{(x_1 - x_4)^2 + (x_2 - x_5)^2 + (x_3 - x_6)^2\}^{\frac{3}{2}}} \right) \quad (1.58)$$

$$\dot{x}_{12} \equiv -k \left(\frac{x_6}{\{x_4^2 + x_5^2 + x_6^2\}^{\frac{3}{2}}} + k_2 \frac{(x_6 - x_3)}{\{(x_1 - x_4)^2 + (x_2 - x_5)^2 + (x_3 - x_6)^2\}^{\frac{3}{2}}} \right) \quad (1.59)$$

las cuales serán resueltas numéricamente, usando adecuadas condiciones iniciales, hallando las coordenadas de la Luna y la Tierra, lo cual nos permitirá obtener las coordenadas relativas de la Luna respecto a la Tierra, $x_L - x_T$, $y_L - y_T$ y $z_L - z_T$, tal como se mostrará en la sección 1.5.

1.3) Análisis de la línea de nodos.

Como conocemos, si la Luna se moviera solo bajo la influencia terrestre, su órbita estaría contenida en un plano, tal como lo establece la descripción del movimiento de una partícula sometida a la acción de una fuerza central. De tal forma que su trayectoria sería, en general, elíptica, con todos sus parámetros bien definidos. Sin embargo, en nuestro caso, en el sistema de partículas aislado Sol-Tierra-Luna, la influencia del Sol debe alterar dichos parámetros orbitales, como por ejemplo, variar la longitud de los semiejes de la trayectoria elíptica. De igual modo la presencia solar afecta la trayectoria relativa Luna-Tierra, la distancia de la Tierra a la Luna, la velocidad lunar, y en particular, lo que nos interesa en esta sección, influye en el plano orbital Tierra-Luna. El plano orbital Tierra-Luna instantáneo, no coincide con el plano orbital Sol-Tierra (plano de la eclíptica) sino que se encuentra inclinado alrededor de 5° [7,4]. Estos planos orbitales se interceptan en una recta determinando la denominada Línea de Nodos, L_n , ver Fig 1.2. La influencia solar se muestra claramente haciendo rotar la línea de nodos, en sentido contrario al movimiento orbital terrestre, con un período observado de 18,6 años [7,4].

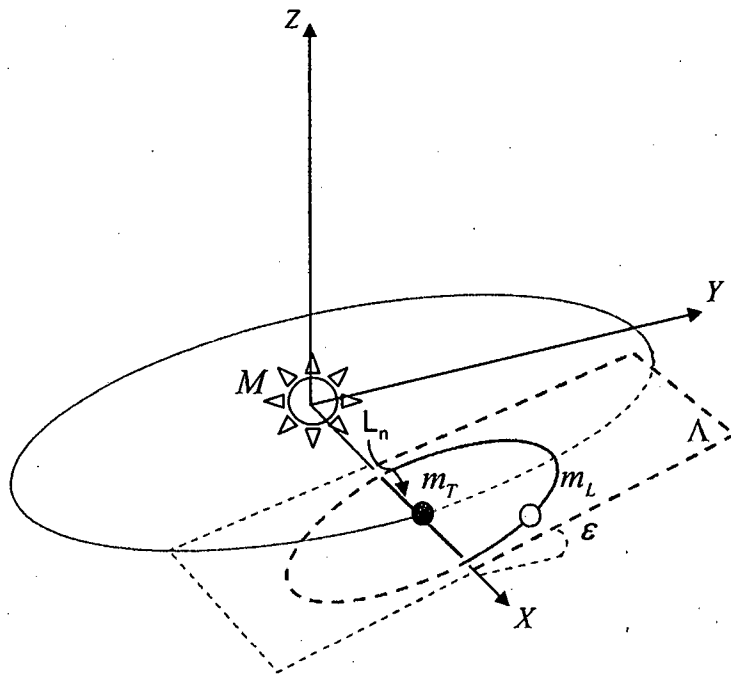


Fig 1.2 Línea de nodos, L_n .

Como la influencia del Sol es pequeña (orden 10^{-2} comparada con la Tierra) [8,9], mencionamos que el plano orbital instantáneo de la Luna, Λ , permanece aproximadamente estacionario durante la órbita lunar. Esto es consistente con el hecho de que dicho plano gira solo $1,4^\circ$ durante un mes lunar. Lo cual permite referirse a un plano orbital lunar en un mes lunar. Sin embargo, esto no sucede para cualquier condición inicial. En el caso general, la trayectoria de un satélite no estaría aproximadamente en un plano. Para definir en este caso la Línea de Nodos, L_n , se define como plano instantáneo orbital del satélite, a un plano que es perpendicular al vector momento angular \vec{L} del satélite respecto al planeta. Este plano se interseca con un plano xy orbital (que se mueve con el planeta) en la recta denominada Línea de Nodos, la cual forma un ángulo ϕ con el eje x . Si el sistema Planeta-Satélite fuese aislado ϕ sería constante.

Para un cierto instante t , sea \hat{u}_n vector unitario que coincide con L_n , tal como muestra la Fig 1.3,

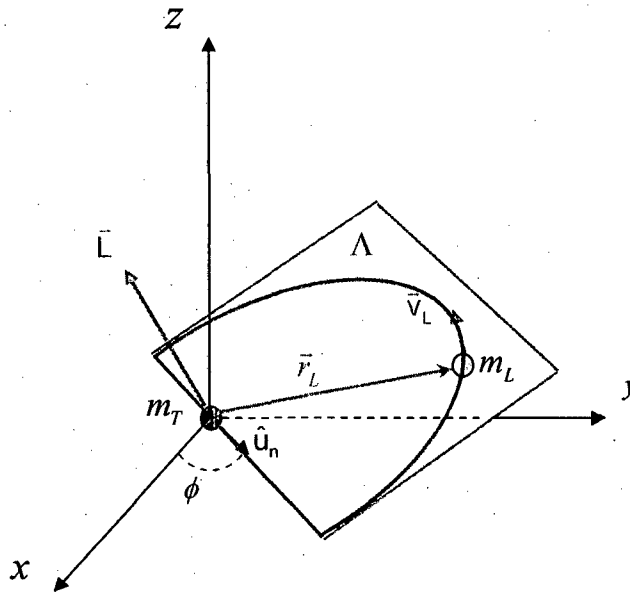


Fig 1.3 Plano lunar y momento angular instantáneo.

en estas condiciones el vector unitario en la dirección de L_n , \hat{u}_n , resulta ser perpendicular al vector \vec{L} , momento angular relativo de la Luna respecto a la Tierra, lo cual permite establecer la siguiente relación,

$$\vec{L} \cdot \hat{u}_n \equiv 0 \quad (1.60)$$

Se puede demostrar (a partir de la definición de momento angular) que el momento angular y las coordenadas relativas de la Luna cumplen,

$$\begin{aligned} \vec{L} \equiv & m_L (\{y_L - y_T\} \{\dot{z}_L - \dot{z}_T\} - \{\dot{y}_L - \dot{y}_T\} \{z_L - z_T\}) \hat{i} \\ & - m_L (\{x_L - x_T\} \{\dot{z}_L - \dot{z}_T\} - \{\dot{x}_L - \dot{x}_T\} \{z_L - z_T\}) \hat{j} \\ & + m_L (\{x_L - x_T\} \{\dot{y}_L - \dot{y}_T\} - \{\dot{x}_L - \dot{x}_T\} \{y_L - y_T\}) \hat{k} \end{aligned} \quad (1.61)$$

y de la Fig (1.3),

$$\hat{u}_n \equiv \cos \phi \hat{i} + \sin \phi \hat{j} \quad (1.62)$$

Reemplazando estas ecuaciones en la Ec (1.60) obtendríamos la siguiente relación,

$$\operatorname{tg} \phi \equiv \frac{\{y_L - y_T\} \{\dot{z}_L - \dot{z}_T\} - \{\dot{y}_L - \dot{y}_T\} \{z_L - z_T\}}{\{x_L - x_T\} \{\dot{z}_L - \dot{z}_T\} - \{\dot{x}_L - \dot{x}_T\} \{z_L - z_T\}} \quad (1.63)$$

Como las coordenadas y velocidades de la Tierra y la Luna dependen del tiempo, entonces ϕ dependerá del tiempo también. Al resolver las ecuaciones diferenciales ordinarias, el gráfico del ángulo ϕ en función del tiempo sería de la forma mostrada en la Fig 1.4, este gráfico sería consistente con el movimiento de la Línea de Nodos, es decir, nos permitirá determinar el tiempo de precesión de dicha línea L_n , o su equivalente el plano orbital lunar instantáneo.

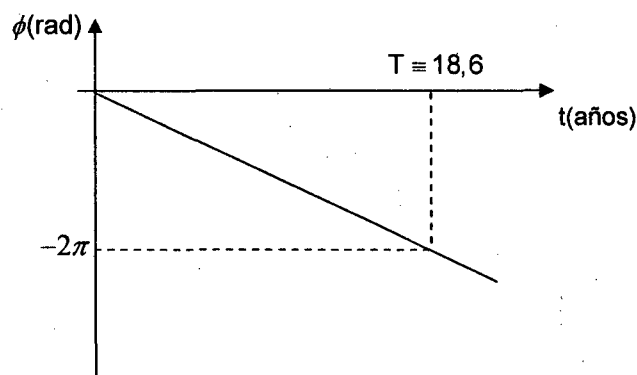


Fig 1.4 Gráfica ϕ vs t que demuestra que el plano de la órbita lunar precesa alrededor del eje z . T período de rotación.

Usando en la Ec (1.63) coordenadas adimensionales y los cambios de variables de las Ec (1.36)-(1.47), tenemos la función,

$$\operatorname{tg} \phi \equiv \frac{\{x_5 - x_2\} \{x_{12} - x_9\} - \{x_{11} - x_8\} \{x_6 - x_3\}}{\{x_4 - x_1\} \{x_{12} - x_9\} - \{x_{10} - x_7\} \{x_6 - x_3\}} \quad (1.64)$$

que, se transforma en la función,

$$\phi \equiv \arctan \left\{ \frac{\{x_5 - x_2\} \{x_{12} - x_9\} - \{x_{11} - x_8\} \{x_6 - x_3\}}{\{x_4 - x_1\} \{x_{12} - x_9\} - \{x_{10} - x_7\} \{x_6 - x_3\}} \right\} \quad (1.65)$$

Esta sería finalmente la función que graficaremos con respecto al tiempo (cuya interpretación sería como la mostrada en la Fig 1.5 [4]). Recordemos que, con las posiciones y velocidades que actualmente tiene la Luna, la línea de nodos L_n , tiene un periodo rotacional de aproximadamente 18,6 años, como resultado de la influencia solar en su movimiento. Luego, las primeras condiciones iniciales que consideraremos, serán aquellas tales que al resolver las ecuaciones diferenciales ordinarias de movimiento, se obtenga el periodo observado.

Por otro lado, mostraremos y analizaremos las gráficas de $\phi(t)$ (Pág 27, 31, 35) obtenidas después de la resolución de las ecuaciones diferenciales ordinarias de movimiento, para intervalos de tiempo de 20 y 100 años.

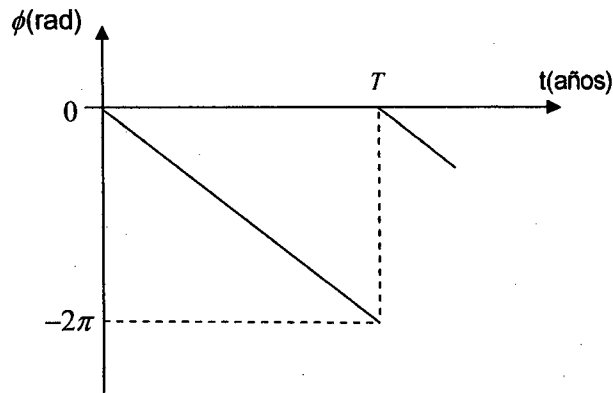


Fig 1.5. Gráfica ϕ vs t que demostraría la periodicidad de la función ϕ . T periodo de rotación.

1.4) Energía mecánica del sistema.

Para controlar los resultados numéricos calcularemos una magnitud proporcional a la energía mecánica. La energía mecánica para el sistema Sol-Tierra-Luna viene dada por la siguiente ecuación,

$$E_m \equiv E_{KT} + E_{KL} + E_{pg,ST} + E_{pg,SL} + E_{pg,TL} \quad (1.66)$$

donde,

E_{KT} :Energía cinética de la Tierra.

E_{KL} :Energía cinética de la Luna.

$E_{pg,ST}$:Energía potencial gravitacional de la Tierra debido al Sol.

$E_{pg,SL}$:Energía potencial gravitacional de la Luna debido al Sol.

$E_{pg,TL}$:Energía potencial gravitacional de la Luna debido a la Tierra.

De la Fig 1.1 resulta,

$$E_m \equiv \frac{1}{2} m_T |\dot{\vec{r}}_T|^2 + \frac{1}{2} m_L |\dot{\vec{r}}_L|^2 - \frac{GMm_T}{|\vec{r}_T|} - \frac{GMm_L}{|\vec{r}_L|} - \frac{Gm_Tm_L}{|\vec{r}_L - \vec{r}_T|} \quad (1.67)$$

Escribiendo esta ecuación en coordenadas cartesianas y haciéndola adimensional con las ecuaciones (1.11) a (1.17) y la ecuación para las masas,

$$m^* \equiv \frac{m}{m_L} \quad (1.68)$$

tenemos una nueva magnitud física proporcional a la energía mecánica,

$$\begin{aligned}
E_m^* \equiv & \frac{1}{2} \left\{ \frac{m_T^*}{m_L^*} \right\} (\dot{x}_T^{*2} + \dot{y}_T^{*2} + \dot{z}_T^{*2}) + \frac{1}{2} (\dot{x}_L^{*2} + \dot{y}_L^{*2} + \dot{z}_L^{*2}) \\
& - \left\{ \frac{m_T^*}{m_L^*} \right\} \frac{4\pi^2}{(x_T^{*2} + y_T^{*2} + z_T^{*2})^{\frac{1}{2}}} - \frac{4\pi^2}{(x_L^{*2} + y_L^{*2} + z_L^{*2})^{\frac{1}{2}}} \\
& - \left\{ \frac{m_T^*}{M} \right\} \frac{4\pi^2}{\left\{ (x_L^* - x_T^*)^2 + (y_L^* - y_T^*)^2 + (z_L^* - z_T^*)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}}
\end{aligned} \tag{1.69}$$

donde se ha usado la Ec (1.33).

Ahora, aplicando los cambios de variables de las Ec (1.36)-(1.47) y las ecuaciones para las masas Ec (1.28), (1.31), (1.32), obtenemos la ecuación para la energía mecánica adimensional. Recordemos que como el sistema está aislado la energía mecánica se conserva. Luego, si evaluamos la energía mecánica mediante la Ec (1.70) (usando las coordenadas x_k halladas numéricamente) tendremos un criterio para comparar si los cálculos son adecuados (y para estimar el valor de los errores numéricos que aparecen en las simulaciones) [2,3].

De la Ec (1.69) se prueba fácilmente que,

$$\begin{aligned}
E_m \equiv & 40,6399(x_7^2 + x_8^2 + x_9^2) + 0,5(x_{10}^2 + x_{11}^2 + x_{12}^2) \\
& - 3208,8097 \frac{1}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{\frac{1}{2}}} - 39,4786 \frac{1}{(x_4^2 + x_5^2 + x_6^2)^{\frac{1}{2}}} \\
& - 11853,2861 \times 10^{-8} \frac{1}{\left\{ (x_4 - x_1)^2 + (x_5 - x_2)^2 + (x_6 - x_3)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}}
\end{aligned} \tag{1.70}$$

Las gráficas de $E_m(t)$ ($E_m(t)=E_m^*(t)$, por simplicidad), obtenidas después de resolver numéricamente las ecuaciones diferenciales ordinarias de movimiento, para intervalos de 20 hasta 100 años, se muestran en las Pág 28, 32, 36.

1.5) Solución de las ecuaciones de movimiento del sistema aislado Sol-Tierra-Luna.

La posición inicial del sistema Sol-Tierra-Luna que consideramos en el presente trabajo es la que se muestra en la Fig 1.6,

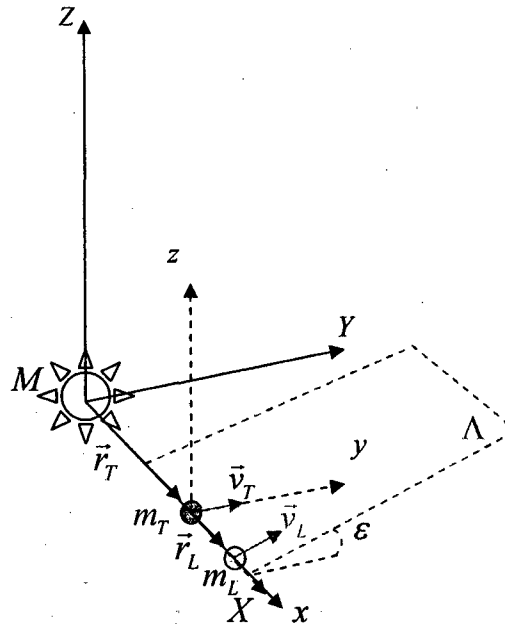


Fig 1.6 Condiciones iniciales del sistema STL.

donde \vec{v}_T y \vec{v}_L son las velocidades de la Tierra y la Luna respecto al sistema de referencia inercial XYZ (cuyo origen coincide con el Sol). Consideramos que inicialmente la Tierra se mueve en el plano XY y la Luna tiene su velocidad formando un ángulo de 5° con dicho plano (plano de la eclíptica). La velocidad inicial relativa de la Luna fue calculada en relación al mes dragontino de 27,21222 días y con el radio medio orbital de 0,00256 UA, lo cual produce una rapidez inicial relativa a la Tierra $|\vec{v}| \cong 0,2189$ UA/año. De tal forma, las condiciones iniciales de posiciones y velocidades son,

$$x_T(0) \equiv x_1(0) \equiv 1\text{UA} \quad (1.71)$$

$$y_T(0) \equiv x_2(0) \equiv 0 \quad (1.72)$$

$$z_T(0) \equiv x_3(0) \equiv 0 \quad (1.73)$$

$$x_L(0) \equiv x_4(0) \equiv 1,00256\text{UA} \quad (1.74)$$

$$y_L(0) \equiv x_5(0) \equiv 0 \quad (1.75)$$

$$z_L(0) \equiv x_6(0) \equiv 0 \quad (1.76)$$

$$v_{Tx}(0) \equiv x_7(0) \equiv 0 \quad (1.77)$$

$$v_{Ty}(0) \equiv x_8(0) \equiv 2\pi\text{UA/año} \quad (1.78)$$

$$v_{Tz}(0) \equiv x_9(0) \equiv 0 \quad (1.79)$$

$$v_{Lx}(0) \equiv x_{10}(0) \equiv 0 \quad (1.80)$$

$$v_{Ly}(0) \equiv x_{11}(0) \equiv 6,5013\text{UA/año} \quad (1.81)$$

$$v_{Lz}(0) \equiv x_{12}(0) \equiv 0,0191\text{UA/año} \quad (1.82)$$

Luego de resolver las ecuaciones diferenciales ordinarias de movimiento, se mostraran los resultados numéricos, mediante las gráficas de la proyección de la órbita lunar tanto en su plano orbital instantáneo (inclinado $\sim 5^\circ$ respecto de la eclíptica), así como en el plano xy ; de la distancia relativa Luna-Tierra y de las funciones $\phi(t)$ y $E_m(t)$, para intervalos de tiempo de un mes lunar, 1, 10, 20 y 100 años (de la Pág 24-28). También examinaremos la influencia sobre la trayectoria y otros parámetros de la órbita, cuando modificamos los valores de la velocidad inicial relativa lunar $|\vec{v}'| \equiv v'$ y del ángulo ϵ del plano orbital lunar (de la Pág 29-32 y de la Pág 33-36).

Variación de los parámetros

a) Variación de la velocidad inicial relativa de la luna, v'

La velocidad relativa de la Luna respecto de la Tierra, v' , afecta las condiciones iniciales de velocidad de la Luna respecto del Sol. Considerando la Fig 1.6, se puede demostrar que la relación entre la velocidad relativa y la velocidad según el sistema de referencia inercial es (ver Ap A, Pág 141):

$$x_{10}(0) \equiv 0 \quad (1.83)$$

$$x_{11}(0) \equiv 2\pi \text{UA/año} + v' \cos \varepsilon \quad (1.84)$$

$$x_{12}(0) \equiv v' \text{sen} \varepsilon \quad (1.85)$$

donde ε es el ángulo que forma la velocidad inicial de la Luna con respecto al plano XY.

Cuando se resuelvan las ecuaciones diferenciales ordinarias de movimiento (manteniendo la velocidad inicial de la Tierra respecto del Sol igual a 2π UA/año, el valor inicial de $\varepsilon=5^\circ$ y $v'= 0,2189$ UA/año) se consideraran diversas velocidades iniciales relativas de la Luna, correspondientes a los siguientes casos,

a) $v'= 0,2189$ UA/año (caso real)

a1) 99% v'

a2) 101% v'

a3) 90% v'

a4) 110% v'

a5) 200% v'

Las nuevas condiciones iniciales de velocidad de la Luna para cada caso se muestran en la Tabla 1.1. Las gráficas de las funciones $\phi(t)$ se encuentran en la Pág 31 y las gráficas de las proyecciones en el plano xy de la órbita lunar (movimiento relativo) se encuentran en las Pág 25,29.

Mostraremos y analizaremos los gráficos de las funciones $\phi(t)$, que permiten obtener el tiempo en que precesa el plano orbital lunar, tal como explicamos en la sección (1.3), y los gráficos de las proyecciones de la órbita lunar en el plano xy , donde se puede determinar la órbita lunar relativa.

Tabla 1.1 Condiciones iniciales de velocidad lunar para diversas v' .

$t=0$	Caso a	Caso a1	Caso a2	Caso a3	Caso a4	Caso a5
$v_{Lx} \equiv x_{10}$	0	0	0	0	0	0
$v_{Ly} \equiv x_{11}$	6,501267	6,499086	6,503448	6,479460	6,523074	6,719334
$v_{Lz} \equiv x_{12}$	0,019078	0,018888	0,019269	0,017171	0,020986	0,038157

b) Variación de ε

Al igual que la velocidad relativa de la Luna, el cambio en el valor de ε influye en las componentes $v_{Ly}(0)$, $v_{Lz}(0)$. Calcularemos las nuevas velocidades iniciales usando las Ec (1.84), (1.85), donde mantendremos $v' = 0,2189$ UA/año. Las nuevas condiciones iniciales, para los siguientes casos, se muestran en la Tabla 1.2. Las gráficas de $\phi(t)$ se encuentran en la Pág 35 y las gráficas de la proyección en el plano xy de la trayectoria relativa de la luna se encuentran en las Pág 25, 33.

b) $\varepsilon = 5^\circ$ (caso real)

b1) $\varepsilon = 10^\circ$

b2) $\varepsilon = 15^\circ$

b3) $\varepsilon = 20^\circ$

b4) $\varepsilon = 25^\circ$

b5) $\varepsilon = 30^\circ$

Mostraremos y analizaremos los gráficos de la función $\phi(t)$ así como los gráficos de la proyección del movimiento relativo de la Luna.

Tabla 1.2 Condiciones iniciales de velocidad lunar para diversos ϵ .

$t=0$	Caso b	Caso b1	Caso b2	Caso b3	Caso b4	Caso b5
$v_{Lx} \equiv x_{10}$	0	0	0	0	0	0
$v_{Ly} \equiv x_{11}$	6,501267	6,498774	6,494641	6,488899	6,481591	6,472773
$v_{Lz} \equiv x_{12}$	0,019078	0,038012	0,056655	0,074868	0,092511	0,109450

1.6) Observaciones y discusión de resultados.

En esta sección mostramos los resultados numéricos, los cuales serán analizados con el objeto de contrastarlos y compararlos con las características del movimiento orbital lunar.

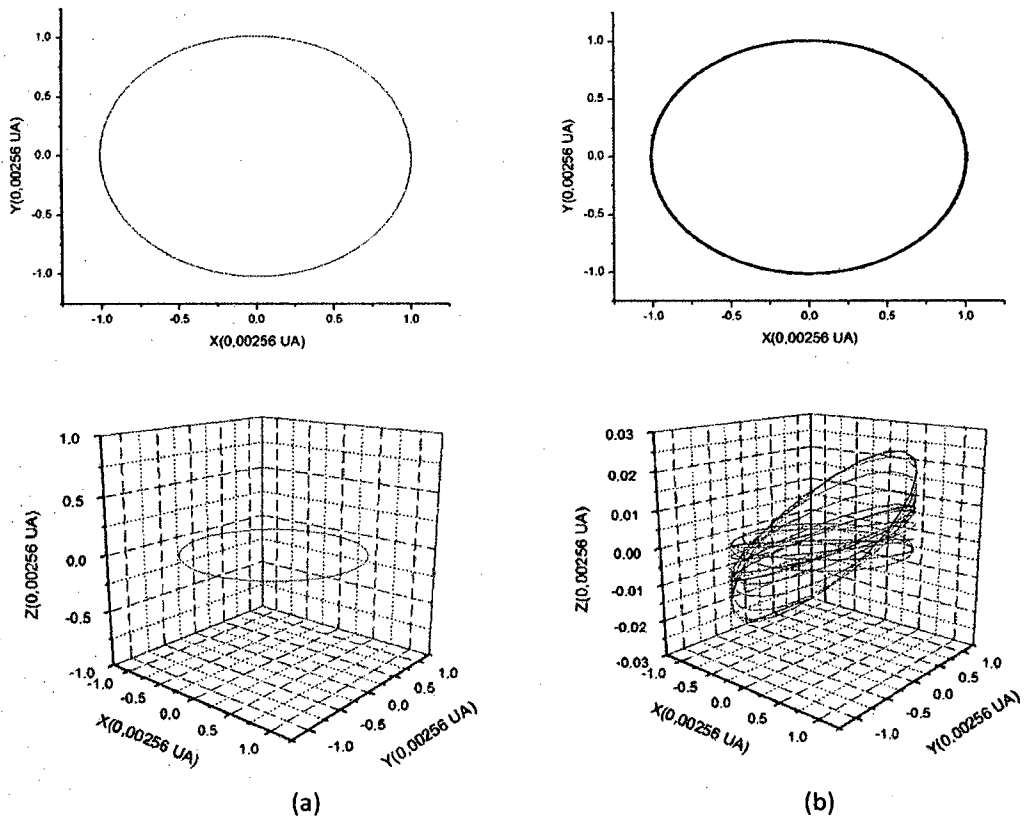


Fig 1.7 Movimiento espacial lunar y su proyección en un plano xy inclinado 5° respecto de la eclíptica para (a) 1 mes y (b) 1 año. Ci: $v' = 0,2189 \text{ UA/año}$, $\epsilon = 5^\circ$.

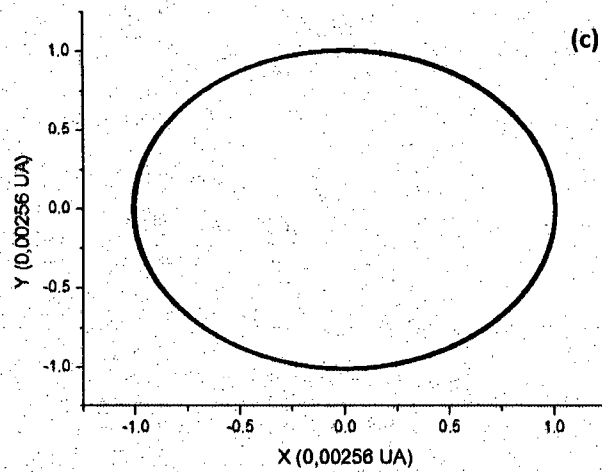
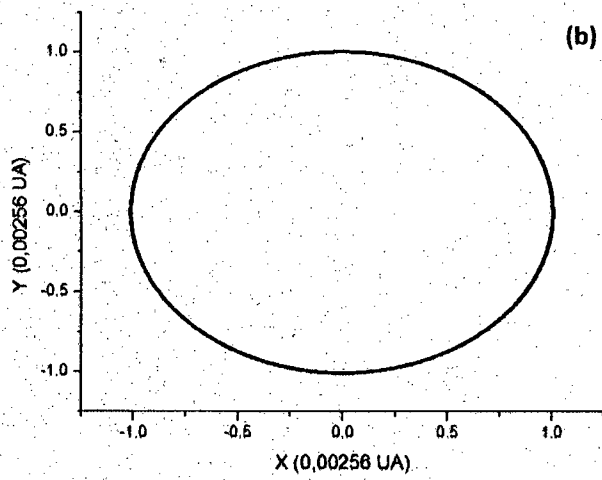
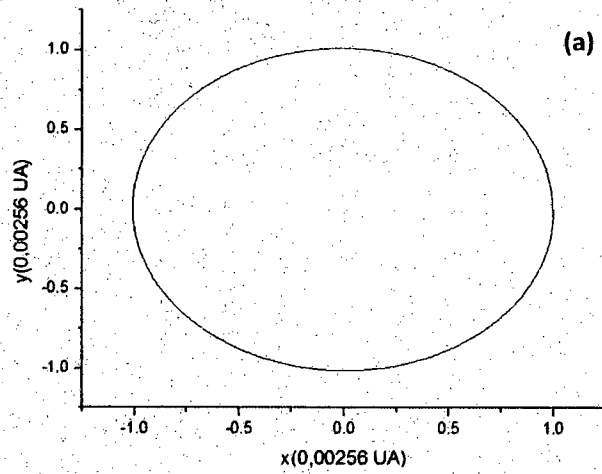


Fig 1.8 Proyección de la órbita lunar en el plano xy para (a) 1 mes, (b) 1 año y (c) 10 años. Ci: $v' = 0,2189$ UA/año, $\epsilon = 5^\circ$.

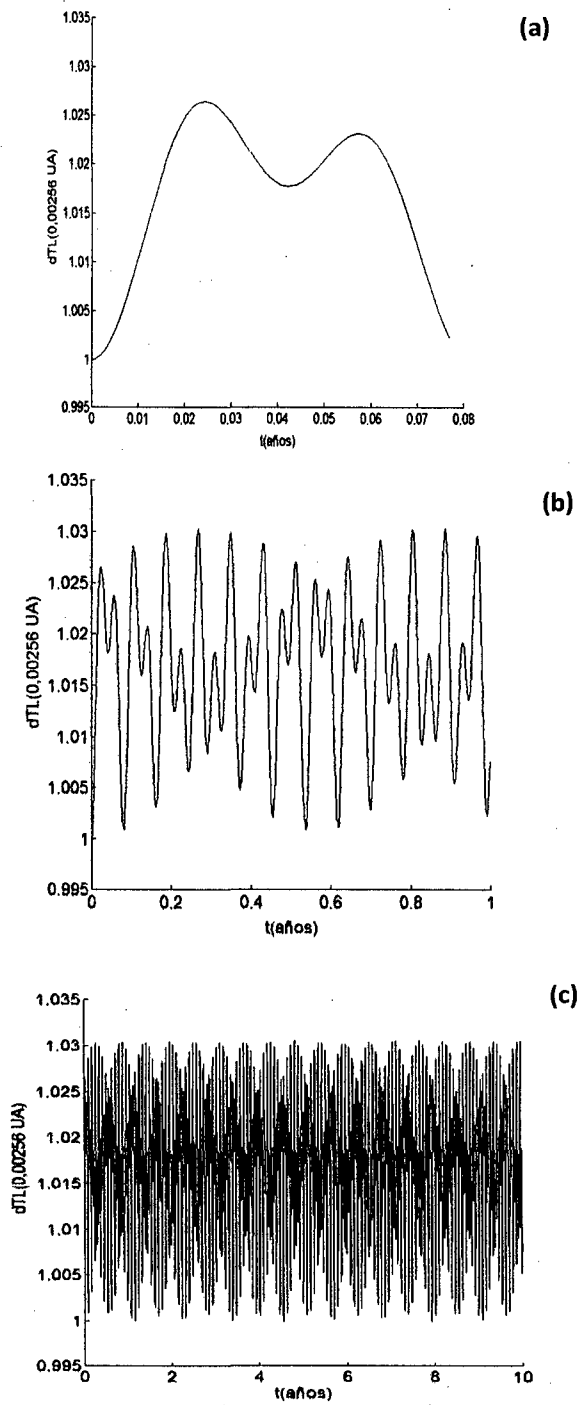


Fig 1.9 Distancia relativa Tierra- Luna, d_{TL} , para (a) 1 mes, (b) 1 año y (c) 10 años. Ci: $v' = 0,2189$ UA/año, $\varepsilon = 5^\circ$.

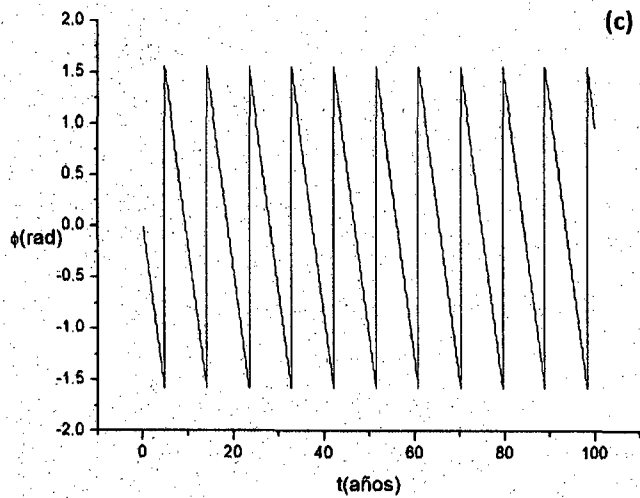
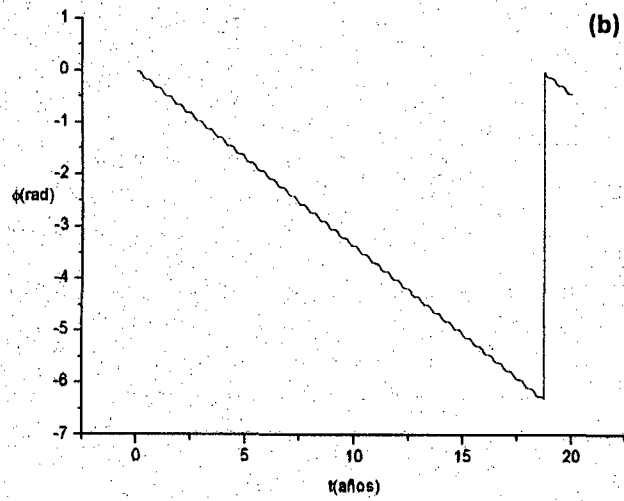
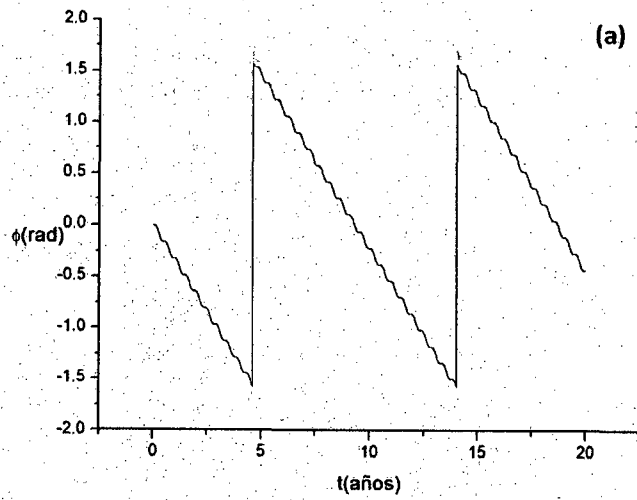


Fig 1.10 Precesión del plano orbital lunar instantáneo: $T=18,4$ años, para (a)-(b) 20 años y (c) 100 años. Ci: $v'=0,2189$ UA/año, $\epsilon=5^\circ$.

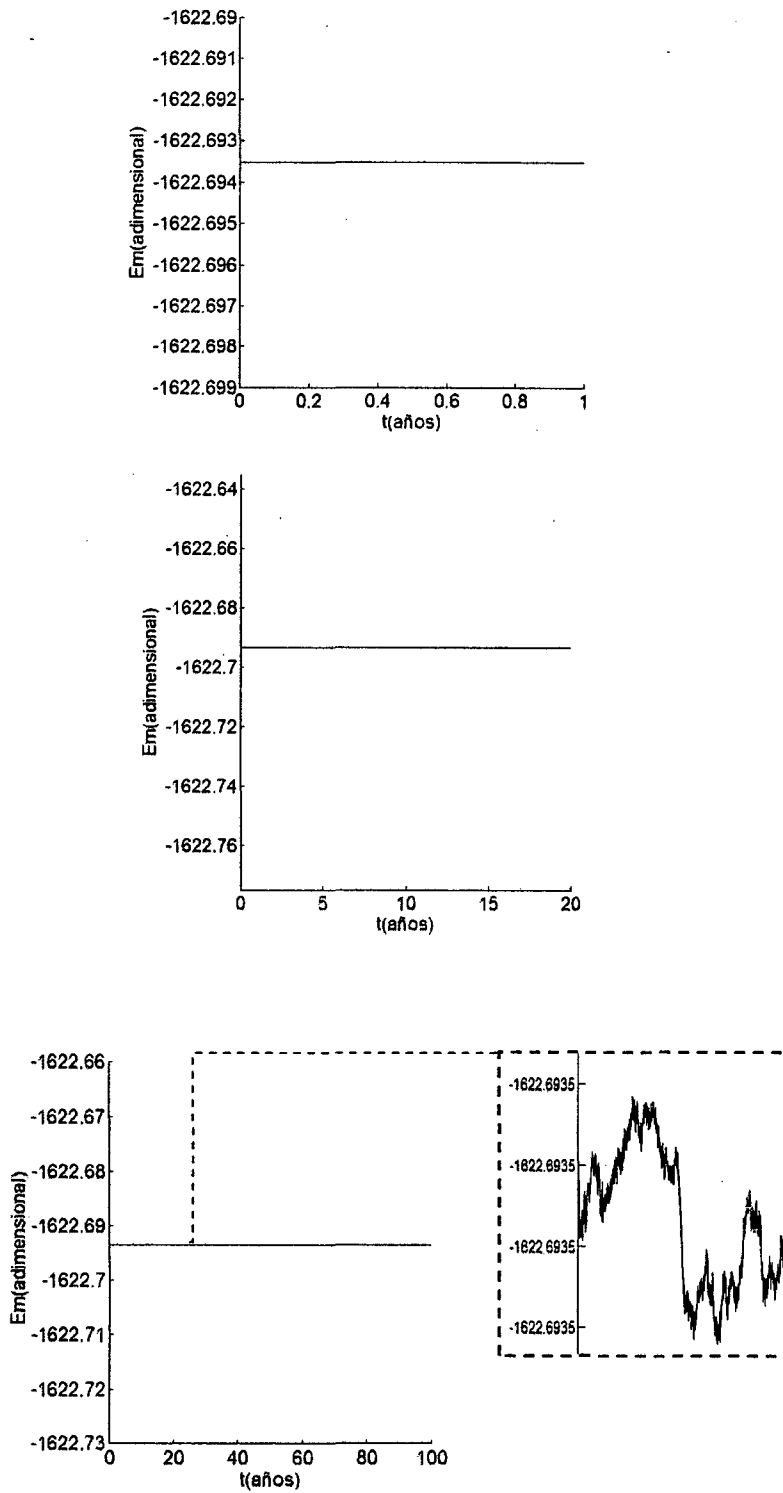


Fig 1.11 Energía mecánica adimensional, E_m , en función del tiempo, para $v'=0,2189$ UA/año y $\epsilon=5^\circ$. Se observa valor medio de -1622,6935. El recuadro muestra la dispersión de la energía.

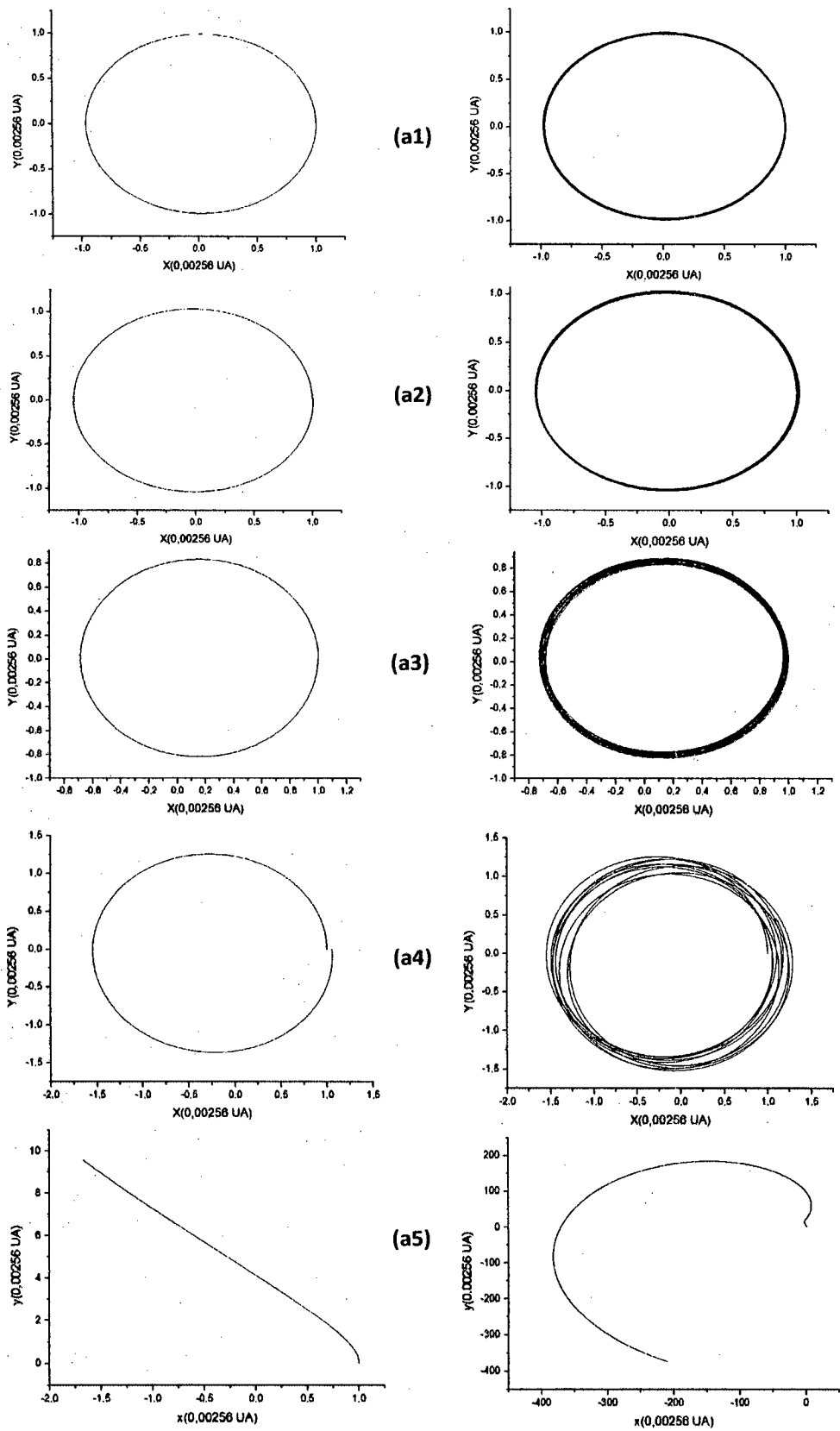


Fig 1.12 Proyección de la órbita lunar en el plano xy para las velocidades v' dadas en la Tabla 1.1. La columna izquierda corresponde a 1 mes y la derecha a 1 año.

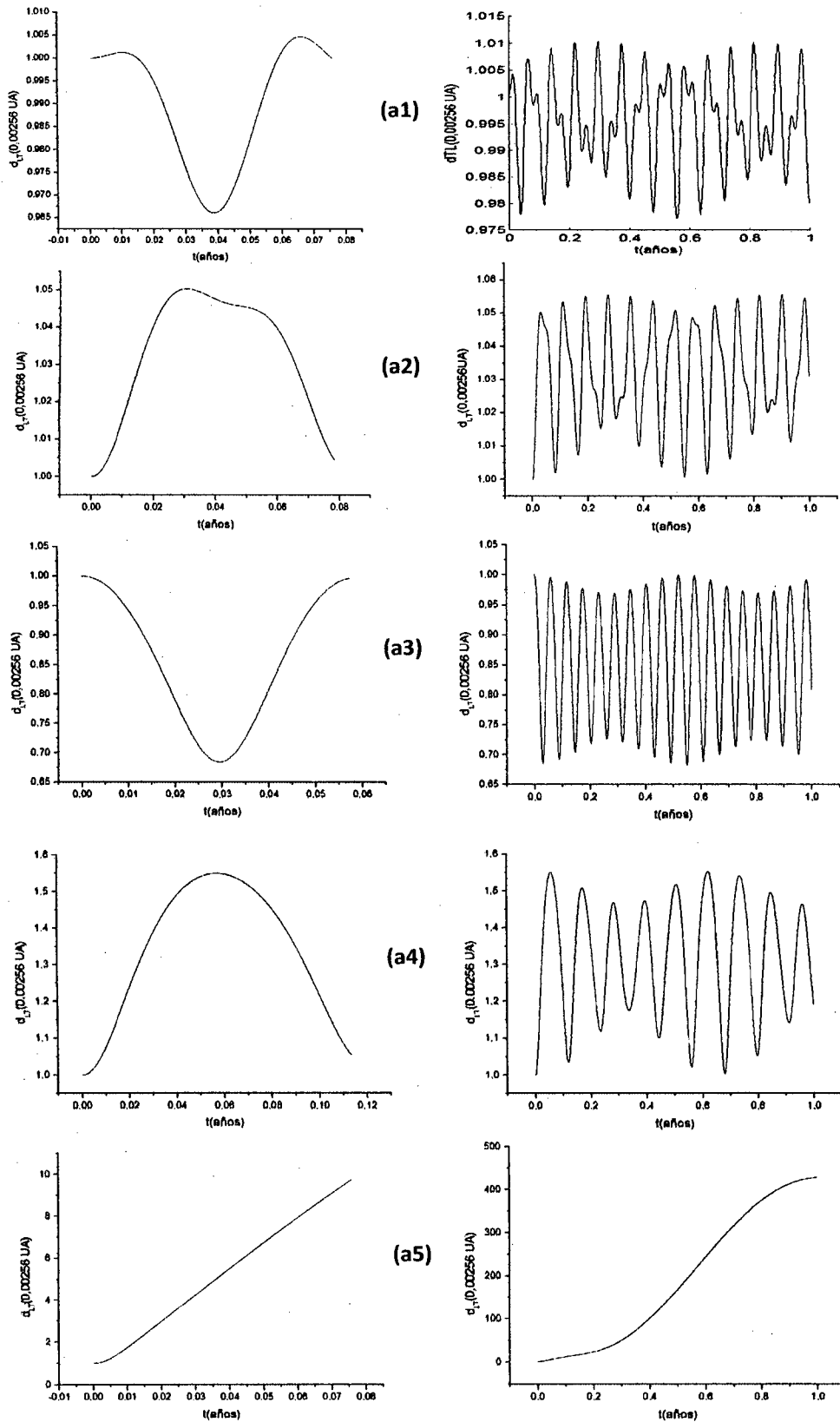


Fig 1.13 Distancia relativa Tierra-Luna, d_{TL} , para las velocidades v' dadas en la Tabla 1.1.

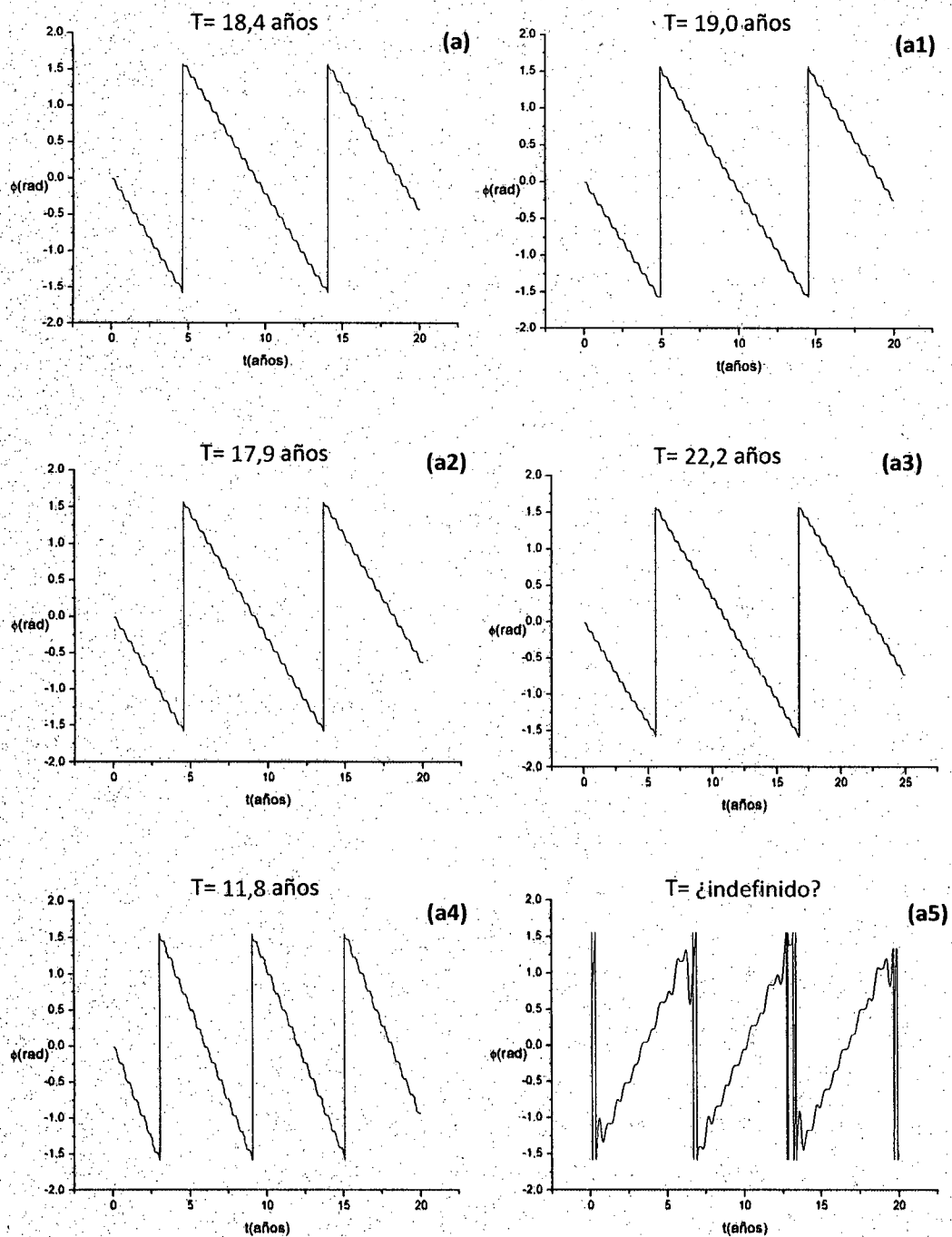
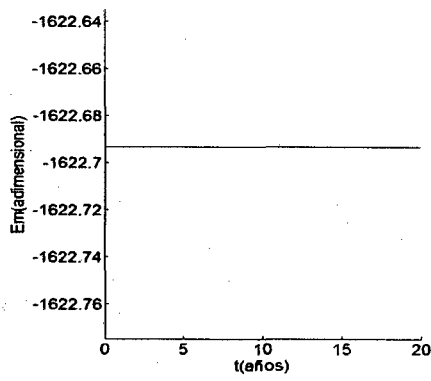
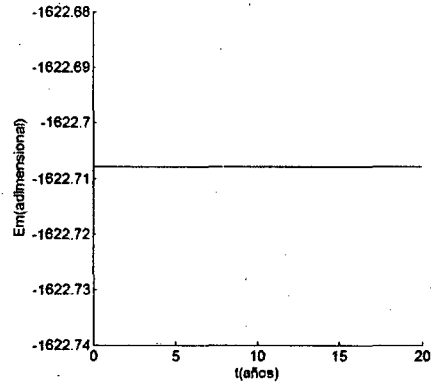


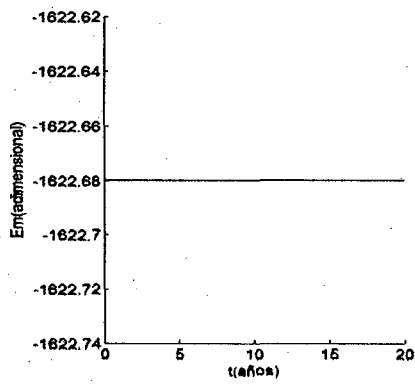
Fig 1.14 Precesión del plano orbital lunar instantáneo para las velocidades v' de la Tabla 1.1.



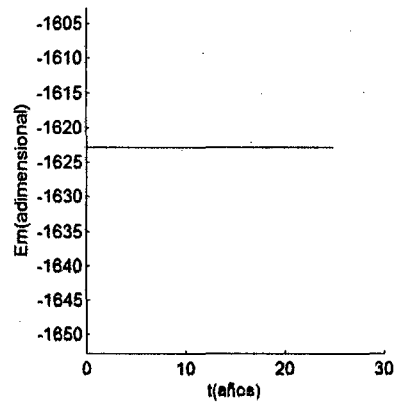
(a)



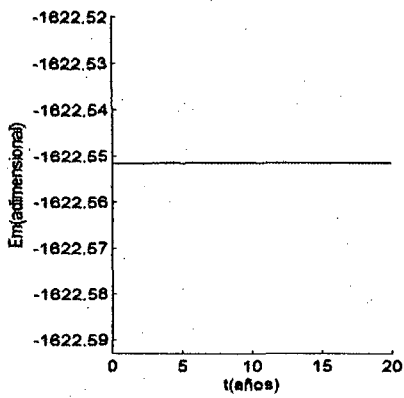
(a1)



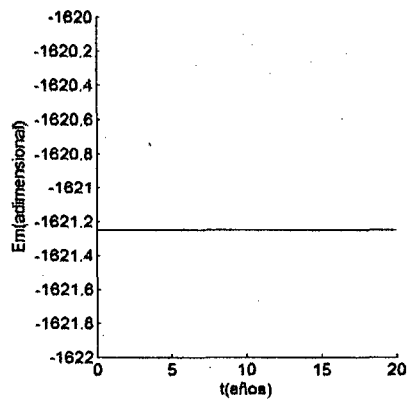
(a2)



(a3)



(a4)



(a5)

Fig 1.15. Energía mecánica adimensional, E_m , para las velocidades v' de la Tabla 1.1. La dispersión respecto de los valores medios es aproximadamente $7,2 \times 10^{-6} \%$.

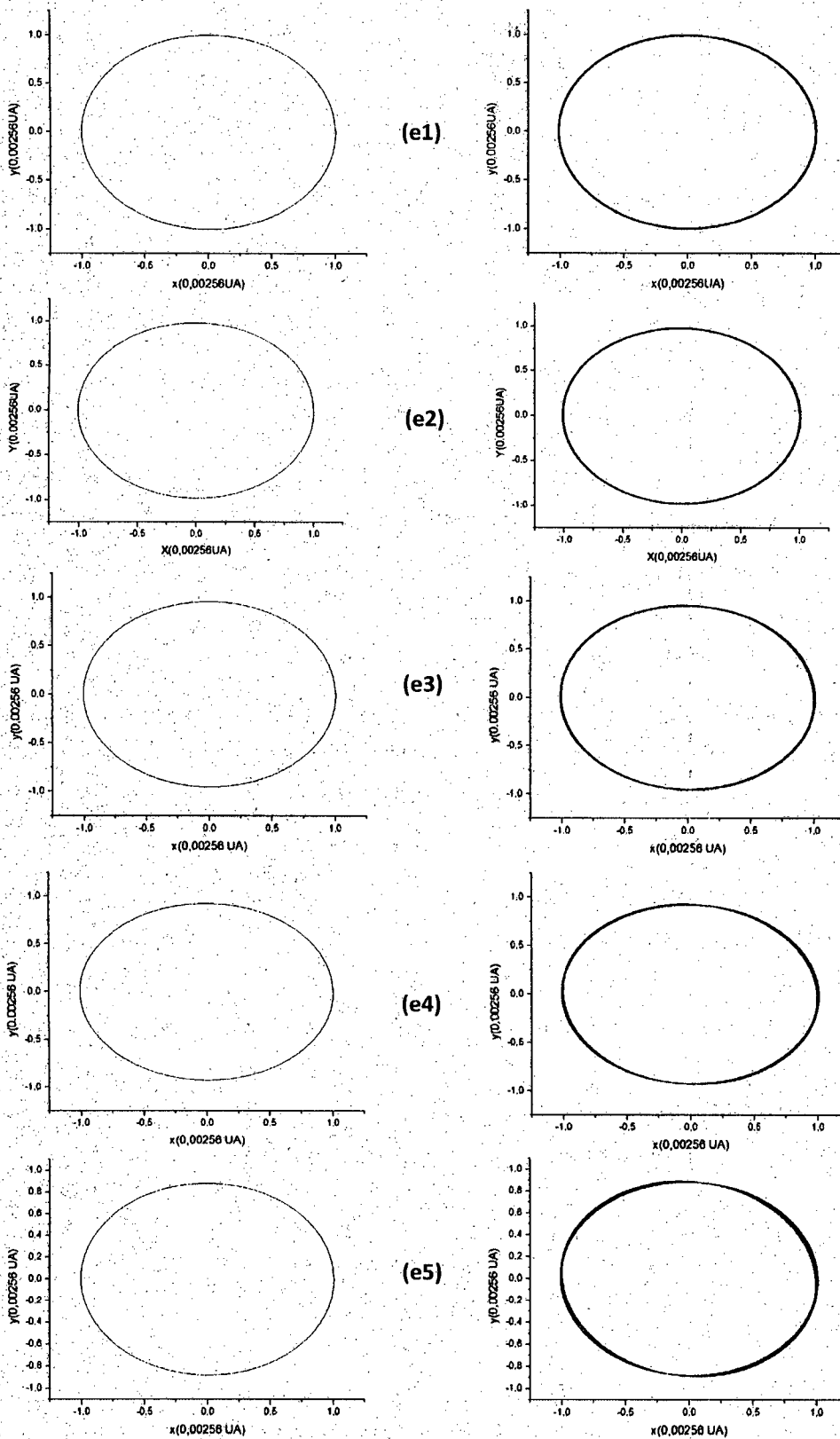


Fig 1.16 Proyección de la órbita lunar en el plano xy para los ángulos ϵ dados en la Tabla 1.2. La columna izquierda corresponde a 1 mes y la derecha a 1 año.

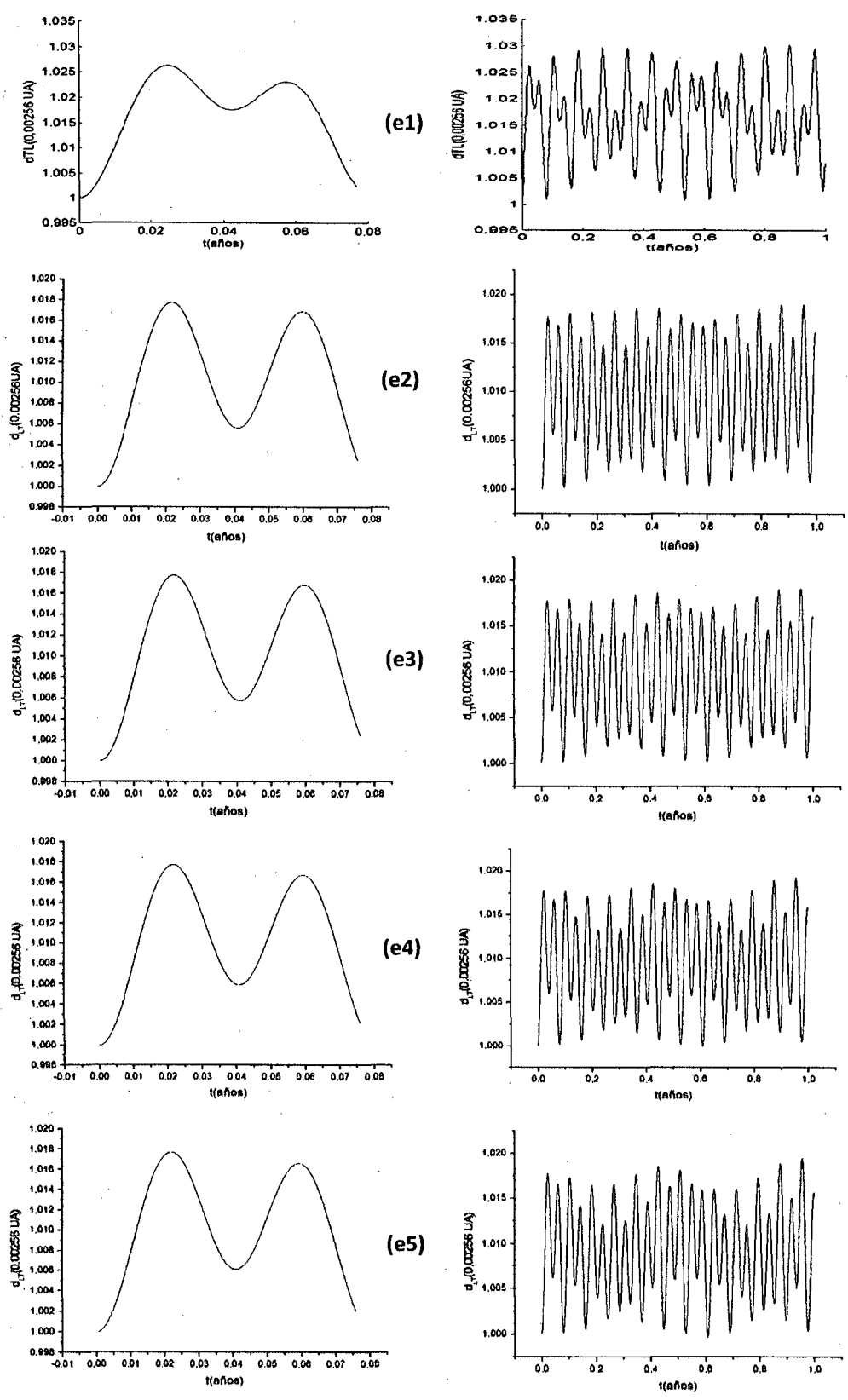


Fig 1.17 Distancia relativa Tierra-Luna, d_{TL} , para los ángulos ϵ dados en la Tabla 1.2.

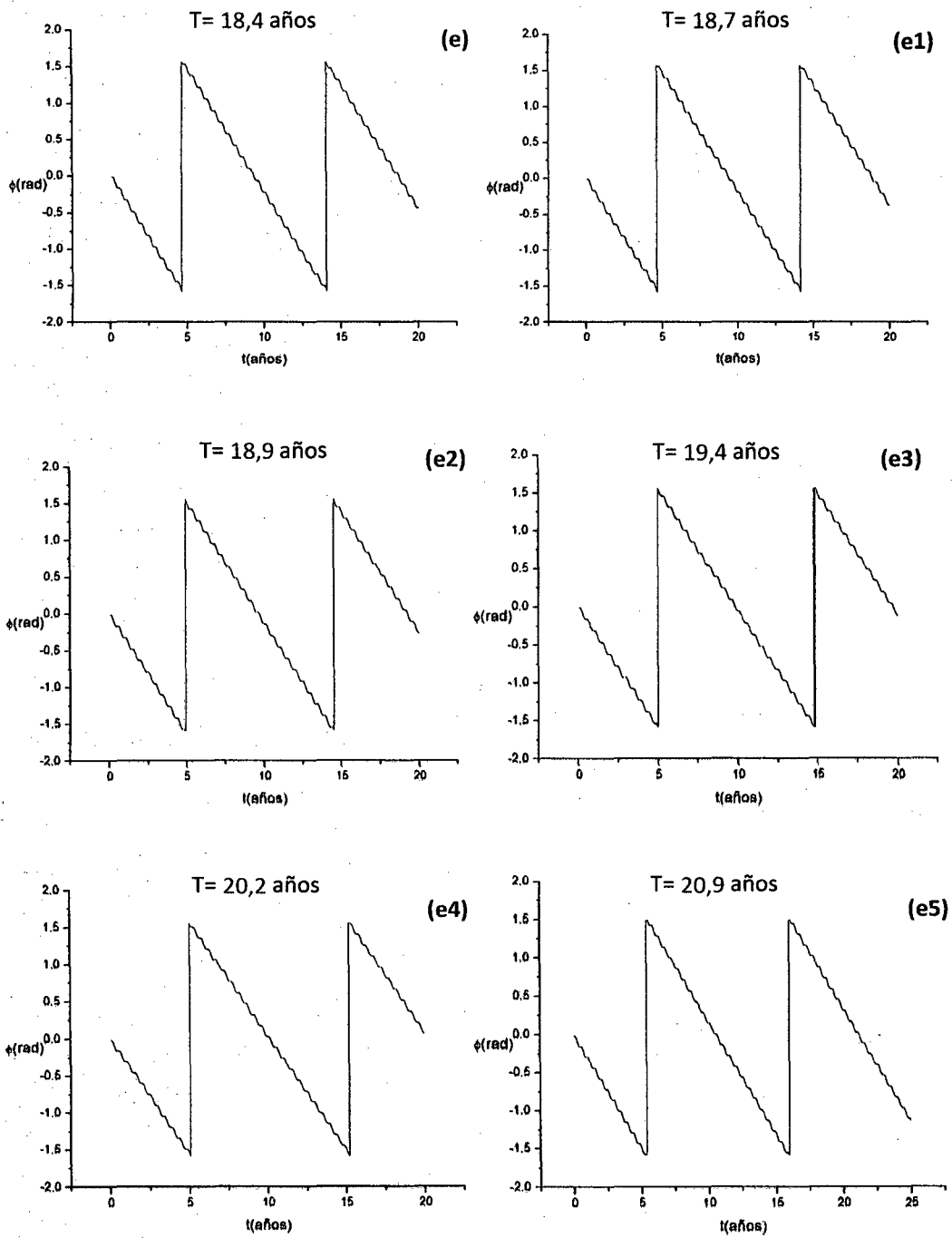
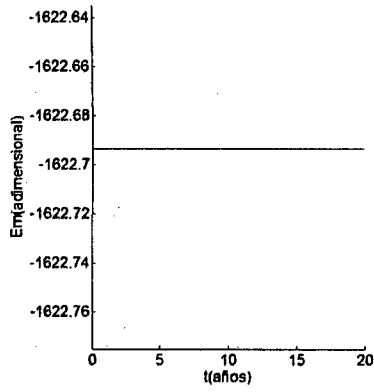
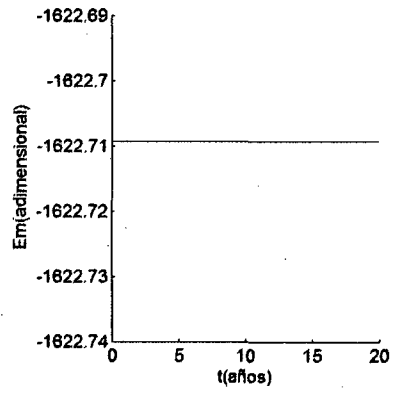


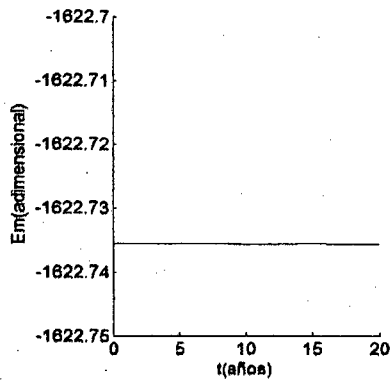
Fig 1.18 Precesión del plano orbital lunar instantáneo para los ángulos ε de la Tabla 1.2.



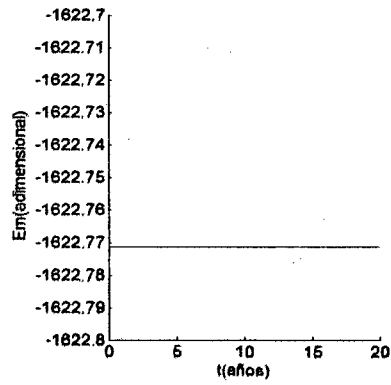
(e)



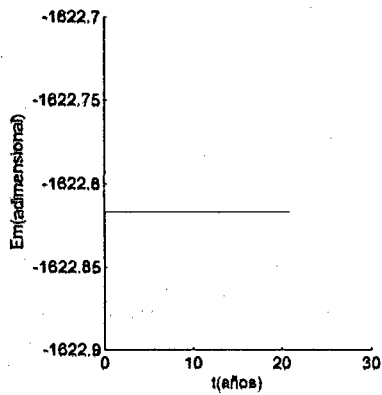
(e1)



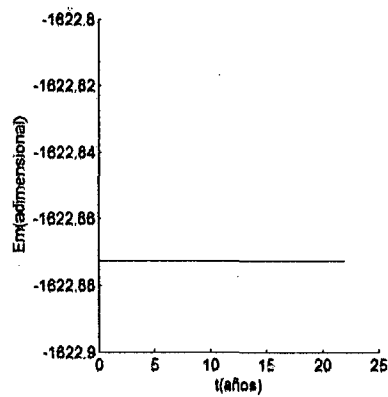
(e2)



(e3)



(e4)



(e5)

Fig 1.19 Energía mecánica adimensional, E_m , para los ángulos ε de la Tabla 1.2. La dispersión respecto de los valores medios es aproximadamente $7,2 \times 10^{-6} \%$.

1) De las curvas de la proyección orbital lunar, Pág 25, la trayectoria elíptica va ensanchándose hasta uniformizarse en un lapso de 10 años. El trazo de la gráfica para 10 años es demasiado ancho.

Si comparamos con las gráficas para una trayectoria lunar sin Sol (ver apéndice A, Pág 146), esto sugeriría que la trayectoria orbital lunar se encontraría en diferentes planos. Esto queda ratificado al observar las gráficas de la proyección del movimiento lunar en un plano inclinado 5° con respecto a la elíptica, en la Pág 24, donde se aprecia que para 1 mes la trayectoria está contenida en dicho plano (gráfica espacial), puesto que dicho plano instantáneo rotaría solamente $1,4^\circ$ en dicho lapso; esta precesión se hace evidente en la gráfica espacial de la órbita lunar para 1 año. La uniformidad del ancho de la curva para 10 años estaría asociada tanto a las variaciones del radio orbital lunar como al período de precesión del plano orbital, lo cual se muestra en el punto 2 siguiente donde las variaciones de la distancia relativa Tierra-Luna son de aproximadamente 2%.

2) De las curvas de distancia relativa Tierra-Luna, Pág 26, las distancias mínima y máxima corresponden a $1 \times 0,00256$ UA y $1,030 \times 0,00256$ UA, respectivamente (en adelante nos referiremos a unidades de distancias de 0,00256 UA). Estas distancias varían entre sí menos de 1%, lo cual está en buen acuerdo con la bibliografía [7,4]. En la gráfica (c) puede constatar, según la periodicidad observada, que después de aproximadamente 9 años se reproducen las condiciones iniciales de distancias. También en esta curva se aprecia periodicidad para las distancias de alrededor de 13 meses.

Esta periodicidad de 9 años estaría vinculada a la precesión de la línea de ápsides de 8,85 años [7,4]. La periodicidad a 13 meses lunares pone en evidencia la influencia solar. Recordemos que si consideramos al sistema Tierra-Luna, al calcular el período orbital lunar con una distancia lunar media de 0,00256 UA, usando la tercera ley de Kepler, obtendríamos un período de 27,4690 días, con lo cual obtendríamos 13,2877 meses, lo cual también puede apreciarse de las gráficas del sistema Tierra-Luna en el apéndice A.

3) La curva de la función $\phi(t)$, Pág 27, muestra un período de aproximadamente 18,4 años. Este período se mantiene hasta por lo menos 100 años, como lo muestra la gráfica correspondiente de $\phi(t)$ en la misma página.

Como mencionamos la función $\phi(t)$ nos daría información acerca del comportamiento periódico del plano orbital lunar instantáneo o de su equivalente, la línea de nodos o línea nodal; por lo tanto, este período sería de precesión del plano orbital lunar. Este resultado podría mejorarse si se considera el error producido en el proceso de cálculo, tanto por el error del método numérico, como por el error de aproximación de la computadora usada. Para el error que introduce el método en el cálculo de la función f podemos

considerar el error de truncamiento global [5,6] de la rutina ode45 (que combina Runge-Kutta de orden 4-5),

$$\varepsilon_{met} \approx c(f, f')h^4$$

donde h es el paso de cálculo del método, $c(f, f')$ es un parámetro que depende de f y f' la derivada de la función a calcular. Para nuestro caso $h=10^{-4}-10^{-5}$ y $f=\phi$. Como determinamos el periodo con la condición $\phi(t=T) = 0$, asumiremos que el error de cálculo del T será el error de cálculo de t, es decir $h=10^{-4}$ años. Usando la gráfica correspondiente, Pág 27, obtenemos,

$$T \equiv (18,4371 \pm 0,0001) \text{ años}$$

donde no consideramos el error de la máquina por ser inferior al paso del método.

4) En la Pág 28, las gráficas para la expresión de la energía mecánica adimensional dan un valor medio de -1622,6935, para 20 y 100 años, con una dispersión del $7,2 \times 10^{-6} \%$, ver recuadro.

Este resultado muestra la consistencia del proceso de cálculo numérico, puesto que se espera un valor de energía mecánica adimensional constante por tratarse de un sistema conservativo aislado. En tal sentido, la dispersión del $7,2 \times 10^{-6} \%$ del valor referencial de -1622,6935, ratifica ello. El valor referencial de la gráfica está asociado con parámetros astronómicos del sistema Sol-Tierra: M, masa del Sol, R, radio medio orbital Sol-Tierra y T, periodo orbital terrestre. El error asociado puede estimarse de dicha dispersión.

5) De las gráficas de la proyección de la órbita lunar en función de v' , Pág 29, se observan orbitas elípticas con radios medios que van desde 0,67 unidades, para $v'= 0,1970$ UA/año, hasta 800, para $v'= 0,4378$ UA/año. Los meses lunares van de 26,352 días hasta 41,427 días, considerando orbitas elípticas adecuadas. De tal forma que para $v'= 0,2167$ UA/año y para $v'= 0,2211$ UA/año se tienen aproximadamente 13 meses anuales, para $v'= 0,1970$ UA/año 18 meses y para $v'= 0,2408$ UA/año solo 9 meses anuales.

La trayectoria orbital lunar depende directamente de v' , a medida que aumenta v' aumenta el radio orbital medio, por consiguiente a mayor radio orbital un mayor período orbital, dando menos meses anuales. Es importante observar como a medida que variamos v' las orbitas elípticas cambian, y el cambio puede ser radical. Para una variación del 1% en v' , cambian alrededor del 5%, ver las graficas (a1) y (a2); y para un 10%, cambian entre 30 y 55%, ver las gráficas (a3) y (a4), donde puede apreciarse además que las órbitas elípticas están acotadas en una especie de corona elíptica. El caso correspondiente a

$v' = 0,4378$ UA/año (e inclusive desde $v' = 0,2592$ UA/año, esto es 18,4 % más que el valor referencial) conduce a una órbita irregular contenida en una elipse de radio medio 800 unidades (ver Ap A, Pág 144). Esto muestra lo sensible que podría ser el movimiento lunar que ya para variaciones desde el 1% de la velocidad referencial $v' = 0,2189$ UA/año, produce cambios significativos en su órbita, tanto en los límites como en la forma.

6) Para las velocidades empleadas 99%, 101%, 90%, 110% y 200% de $v' = 0,2189$ UA/año, las gráficas de la distancia relativa lunar, Pág 30, indican que la Luna se acercaría a la Tierra hasta 0,6550 o se alejaría hasta 800 unidades.

Estos resultados están en concordancia con lo descrito anteriormente, en el último caso la trayectoria sería tal que el radio orbital medio llegaría a 2 UA. Una variación del 10% de la velocidad referencial podría ocasionar un acercamiento del 33 % o un alejamiento del 55 %, según lo muestran las gráficas (c) y (d) de la Pág 30, donde se sigue manteniendo un comportamiento periódico. Para una variación mayor de la velocidad referencial la órbita se extiende paulatinamente dentro de una elipse de radio medio 800 unidades, como lo muestran las gráficas del Ap A, Pág 144. Por lo tanto tendríamos una órbita lunar inestable pero localizada para dichas variaciones de la velocidad referencial, comparada con la relativa estabilidad de la órbita para $v' = 0,2189$ UA/año, donde la distancia relativa Tierra-Luna varía menos del 2%, ver gráficas Pag 25. Por otro lado, el acoplamiento de las distancias relativas mínimas y máximas está en función de las condiciones iniciales, y podrían ser indicadores de la inestabilidad de la órbita [10].

7) De las gráficas de las funciones ϕ respecto a v' , Pág 31, se aprecia que el período es inversamente proporcional a v' . Los periodos van de 22,2 años, para 0,1970 UA/año, a 11,8 años, para 0,2408 UA/año.

Para describir este comportamiento usaremos la Ec (1.64) y la gráfica (b) de la Pág 27. Según la gráfica mencionada la $tg(\phi)$ es constante; por lo tanto, solo analizamos un cuarto de la precesión. Como ϕ es negativo su tangente también debe serlo, por lo tanto, el numerador de (1.64) también debe serlo (recordar que $x_{10}(0)=0$). Con lo cual, mientras más intenso sea x_{11} ($x_{11}(0)=v'\cos(\epsilon)$) ϕ será más negativo, es decir, hará a ϕ más rápidamente negativa, con lo cual su periodo es más corto.

8) Las gráficas de energía mecánica en función de v' tienen, en todos los casos, un valor referencial constante que va desde -1622,8348 hasta -1621,2495, Pág 32. Lo concerniente al caso (a5), debido a la naturaleza de la trayectoria, tal como lo mostramos en el numeral 6, requiere un trato especial.

Como era de esperarse en todos los casos se obtiene como resultado un valor de E_m adimensional constante, con una dispersión referencial de solo $7,2 \times 10^{-6}$ %. Este resultado puede servirnos de control de los cálculos numéricos, teniendo en cuenta que la contribución menos significativa a esta cantidad (E_m) corresponde al $28,7 \times 10^{-4}$ % (energía potencial gravitacional Tierra-Luna). Por otro lado, es notable como la inestabilidad de la órbita lunar, en el sentido dado en el apartado 6, se manifiesta en estas curvas.

9) Todas las gráficas de la proyección de la órbita lunar en el plano xy en función de ε , Pág 33, muestran un mes aproximadamente dragontino de 27,21222 días. A medida que ε aumenta se observa, con el paso de los meses (gráficos a 1 año), una mayor distorsión en la órbita lunar, sobre todo para $\varepsilon=30^\circ$ (gráfica e5).

Este resultado muestra que el plano orbital lunar instantáneo va cambiando haciéndose más notorio el efecto del Sol a medida que ε aumenta.

10) Se observa que las distancias lunares relativas varían de 1 a 1,030 unidades, en las gráficas que se muestran en la Pág 34. También se aprecia en estas gráficas que la influencia periódica solar está desfasada en las distancias relativas máximas. Este desfase aumenta con ε .

Al igual que en el caso de las velocidades v' , existe relación directa entre ε y la estabilidad de la órbita lunar. Para $\varepsilon=30^\circ$ los radios orbitales se reducen a 0,88 unidades y para $\varepsilon=40^\circ$ a 0,77 (ver Ap A, Pág 145). Los casos correspondientes a $\varepsilon=80^\circ$ y $\varepsilon=90^\circ$ son notables ya que corresponden a alejamiento definitivo de la Luna para el primero, y confinamiento de la órbita lunar en una elipse de radio medio 850 unidades. Esta dependencia es aun mucho más sensible puesto que si solo se varía en un grado a ε , bajo ciertas condiciones, por ejemplo de 90° a 89° , los cambios en la trayectoria serían notables como se aprecia en el apéndice mencionado gráficas (e) y (f), y podría tratarse de un caso de caos determinista [11].

11) Las gráficas de las funciones ϕ en función de ε , Pág 35, muestran aumento del período con aumento de ε . Para los ángulos ensayados el periodo aumenta de 18,7 años a 20,2 años.

Al aumentar el valor de ε manteniendo constante a v' , se logra aumentar el valor de v'_z y disminuir el de v'_y , con lo cual ϕ se hace menos rápidamente negativa y así el periodo aumenta.

12) Los resultados de las gráficas de la energía mecánica adimensional en función de ε , Pág 36, muestran valores medios referenciales que van desde -1622,7092 hasta -1622,8725 con una dispersión referencial de $7,2 \times 10^{-6}$ %.

También, como se esperaba, el valor de la energía mecánica referencial en todos los casos ha de mantenerse constante, dentro de la aproximación dada por el error del método.

1.7) Conclusiones

- 1) La fuerza del Sol sobre el satélite es una perturbación que deforma la trayectoria Kepleriana de la Luna y hace que la Línea de Nodos gire con periodo T . Esto se deduce de las gráficas de las Pág 25-27 comparadas con aquellas sin influencia solar del Ap A, Pág 146.
 - a) Para las condiciones actuales la distancia relativa lunar cambia alrededor de 1%.
 - b) En todos los casos aquí considerados el plano orbital lunar varía.
- 2) El valor obtenido aquí de $T= 18,4$ años para la precesión de la línea de nodos (usando este modelo simple) está en excelente acuerdo con el valor de T observado (18,6 años).
- 3) El movimiento orbital lunar puede ser sensible a las condiciones iniciales de v' y ε . Para los valores considerados de $v'=0,2189$ UA/año y $\varepsilon=5^\circ$ se observa estabilidad, sin embargo para valores mayores a $v'=0,2592$ UA/año y $\varepsilon=30^\circ$ los cambios son significativos, pudiendo inclusive conducirnos a un estado de caos determinista.
- 4) El valor referencial constante (en la aproximación considerada) de la energía mecánica adimensional E_m , refleja la consistencia del procedimiento numérico empleado.

Referencias

- [1] Danby, J.M.A. *Fundamentals of Celestial Mechanics*, segunda edición, Willmann-Bell, Inc; Virginia-USA, 1991; capítulo 12.
- [2] El problema de Euler de los tres cuerpos.
<http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/celeste/euler.htm>. 14/01/11.
- [3] Wild W.J. Euler's three-body problem. *Am. J. Phys.* 48(4) April 1980, pp.297-301.
- [4] Lunar Constants and Models Documents. Jet Propulsion Laboratory, JPL D-32296. Lsa0801112300.
- [5] Chapra, S., Canale R. *Métodos Numéricos para ingenieros*, sexta edición, Ed. Mc Graw Hill, México, 2011, capítulo 25.
- [6] Correa Zabala, FJ, *Métodos Numéricos*, primera edición, Fondo Editorial Universidad, Medellín-Colombia, 2010.
- [7] Peterson, Ivars. *El reloj d Newton, Caos en el sistema solar*, edición castellana, Alianza Editorial, S.A., Madrid-España, 1995; capítulos 6 y 7.
- [8] Nesvorny, D. Thomas, F. A Perturbative of The Co-orbital Motion, *Celestial Mechanics and Dynamics Astronomy*, abril-2002, vol 82, N°41.
- [9] Milan Bursa. The Heart-Moon Potential Energy, *Studia Geophysica et Geodaetica*, diciembre-1973, vol 17, N°4.
- [10] Solé RV, Manrubia SC. *Orden y caos en sistemas complejos- Fundamentos*, primera edición, Ediciones UPC, Barcelona-España, 2001.
- [11] Madrid Casado, CM, "Historia de la Teoría del Caos contada para escépticos. Cuestiones de génesis y estructura", Dpto de Matemáticas, Instituto Lázaro Cárdenas. Dpto de Lógica y Filosofía de la Ciencia, Universidad Complutense de Madrid, 2010.

CAPITULO II

LAGRANGIANO DEL SISTEMA SOL-TIERRA-LUNA USANDO COMO COORDENADAS GENERALIZADAS LAS COORDENADAS DEL VECTOR CENTRO DE MASAS Y LAS DEL VECTOR POSICION RELATIVA TIERRA-LUNA

2.1) Introducción.

2.2) Lagrangiano del sistema en función de las coordenadas del vector centro de masas y del vector posición relativa Tierra-Luna (caso general).

2.3) Casos especiales.

2.1) Introducción

En este capítulo se obtendrá el Lagrangiano del sistema Sol-Tierra-Luna, expresado en las coordenadas esféricas del vector centro de masas, CM, y en las coordenadas esféricas del vector posición relativa de la Luna respecto de la Tierra, transformando un Lagrangiano que utiliza como coordenadas generalizadas las coordenadas de cada partícula (la Tierra y la Luna). Con lo que tendremos 6 coordenadas generalizadas. El motivo por el que estamos usando las coordenadas esféricas r_{CM} , θ_{CM} , ϕ_{CM} , r , θ y ϕ , es que estas coordenadas son útiles para considerar casos más reales, como por ejemplo, cuando la Tierra es considerada un cuerpo elipsoidal achatado. En la determinación del Lagrangiano se aplicara expansión multipolar, considerando que la distancia Tierra-Luna es mucho menor que la distancia Sol-Tierra. Mencionamos que estamos considerando el movimiento general de un planeta y satélite influenciados gravitacionalmente por una estrella.

2.2) Lagrangiano del sistema Sol-Tierra-Luna aislado en función del vector centro de masas y vector posición relativo a la Luna y Tierra (caso general)

Consideramos al sistema Sol-Tierra-Luna con el sol (M) en el centro del sistema de referencia inercial XYZ, la Tierra (m_{pl}) y la Luna (m_{sa}), consideradas como masas puntuales, localizadas con los vectores posición \vec{r}_{pl} y \vec{r}_{sa} , respectivamente, Fig 2.1.

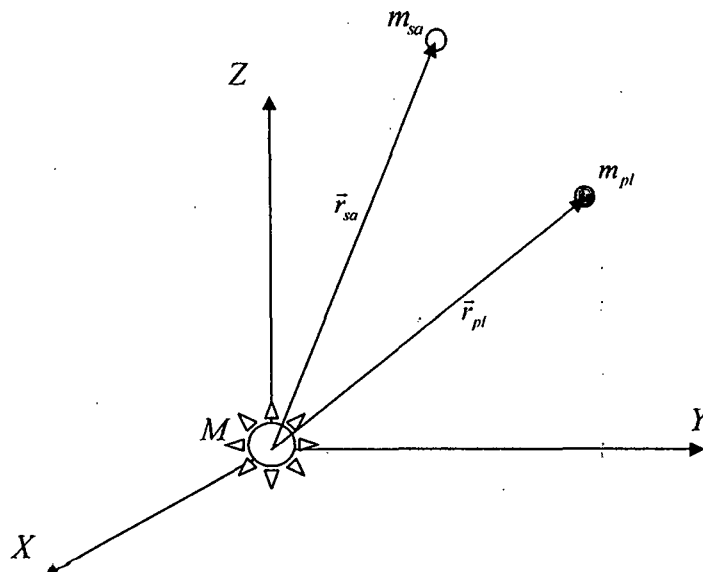


Fig 2.1 Sistema de partículas STL.

El Lagrangiano, L, del sistema Tierra-Luna (sometido a la fuerza gravitacional del Sol), sería entonces,

$$L \equiv \frac{1}{2} m_{pl} \left| \dot{\vec{r}}_{pl} \right|^2 + \frac{1}{2} m_{sa} \left| \dot{\vec{r}}_{sa} \right|^2 + G \frac{M m_{pl}}{r_{pl}} + G \frac{M m_{sa}}{r_{sa}} + G \frac{m_{pl} m_{sa}}{\left| \vec{r}_{sa} - \vec{r}_{pl} \right|} \quad (2.1)$$

En la Ec (2.1) M representa la masa del Sol, m_{pl} y m_{sa} las masas de la Tierra y la Luna, respectivamente.

Como observamos en esta ecuación L depende de las coordenadas de cada partícula respecto al Sol. Mediante varias definiciones y cálculos transformaremos este lagrangiano.

De la definición de vector relativo de m_{sa} respecto de m_{pl} , Ec (2.2), y la definición del vector posición del CM, Ec (2.3), ver Fig 2.2,

$$\vec{r} \equiv \vec{r}_{sa} - \vec{r}_{pl} \quad (2.2)$$

$$\vec{r}_{CM} \equiv \frac{m_{pl} \vec{r}_{pl} + m_{sa} \vec{r}_{sa}}{m_{pl} + m_{sa}} \quad (2.3)$$

se obtienen las Ec (2.4),

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{r}_{pl} \equiv \vec{r}_{CM} - \frac{m_{sa}}{m_{pl} + m_{sa}} \vec{r} \\ \vec{r}_{sa} \equiv \vec{r}_{CM} + \frac{m_{pl}}{m_{pl} + m_{sa}} \vec{r} \end{array} \right. \quad (2.4)$$

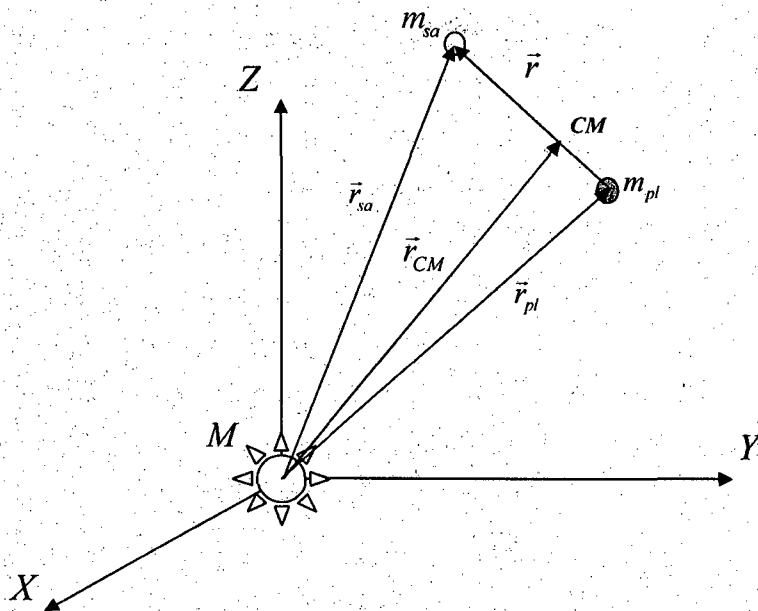


Fig 2.2 Sistema de coordenadas generalizadas \vec{r}_{CM} y \vec{r} .

Reemplazando (2.4) en (2.1) la función de Lagrange puede escribirse de la siguiente forma,

$$\begin{aligned}
 L \equiv & \frac{m_{pl}}{2} \left[\left| \dot{\vec{r}}_{CM} \right|^2 - 2 \frac{m_{sa}}{m_{pl} + m_{sa}} \dot{\vec{r}}_{CM} \cdot \dot{\vec{r}} + \frac{(m_{sa})^2}{(m_{pl} + m_{sa})^2} \left| \dot{\vec{r}} \right|^2 \right] + \\
 & \frac{m_{sa}}{2} \left[\left| \dot{\vec{r}}_{CM} \right|^2 + 2 \frac{m_{pl}}{m_{pl} + m_{sa}} \dot{\vec{r}}_{CM} \cdot \dot{\vec{r}} + \frac{(m_{pl})^2}{(m_{pl} + m_{sa})^2} \left| \dot{\vec{r}} \right|^2 \right] + \\
 & G \frac{M m_{pl}}{r_{pl}} + G \frac{M m_{sa}}{r_{sa}} + G \frac{m_{pl} m_{sa}}{\left| \vec{r}_{sa} - \vec{r}_{pl} \right|} \quad (2.5)
 \end{aligned}$$

que se transforma en el nuevo Lagrangiano,

$$\begin{aligned}
 L \equiv & \frac{(m_{pl} + m_{sa})}{2} \left| \dot{\vec{r}}_{CM} \right|^2 - \frac{m_{pl} m_{sa}}{m_{pl} + m_{sa}} \dot{\vec{r}}_{CM} \cdot \dot{\vec{r}} + \frac{m_{pl} m_{sa}}{m_{pl} + m_{sa}} \dot{\vec{r}}_{CM} \cdot \dot{\vec{r}} + \\
 & \frac{m_{pl} (m_{sa})^2}{2(m_{pl} + m_{sa})^2} \left| \dot{\vec{r}} \right|^2 + \frac{m_{sa} (m_{pl})^2}{2(m_{pl} + m_{sa})^2} \left| \dot{\vec{r}} \right|^2 + \\
 & G \frac{M m_{pl}}{r_{pl}} + G \frac{M m_{sa}}{r_{sa}} + G \frac{m_{pl} m_{sa}}{|\vec{r}_{sa} - \vec{r}_{pl}|}
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

luego de simplificar tenemos,

$$\begin{aligned}
 L \equiv & \frac{(m_{pl} + m_{sa})}{2} \left| \dot{\vec{r}}_{CM} \right|^2 + \frac{m_{pl} m_{sa}}{2(m_{pl} + m_{sa})} \left| \dot{\vec{r}} \right|^2 + \\
 & G \frac{M m_{pl}}{r_{pl}} + G \frac{M m_{sa}}{r_{sa}} + G \frac{m_{pl} m_{sa}}{|\vec{r}_{sa} - \vec{r}_{pl}|}
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

Usando la definición de masa reducida, Ec (2.8),

$$\mu \equiv \frac{m_{pl} m_{sa}}{(m_{pl} + m_{sa})} \tag{2.8}$$

se consigue la ecuación,

$$L \equiv \frac{(m_{pl} + m_{sa})}{2} |\dot{\vec{r}}_{CM}|^2 + \frac{\mu}{2} |\dot{\vec{r}}|^2 + G \frac{M m_{pl}}{r_{pl}} + G \frac{M m_{sa}}{r_{sa}} + G \frac{m_{pl} m_{sa}}{|\vec{r}_{sa} - \vec{r}_{pl}|} \quad (2.9)$$

Con el propósito de expresar el Lagrangiano en función de \vec{r} , r_{CM} , escribimos el modulo de r_{sa} , según la ecuación (2.10), apoyados en la Fig 2.3,

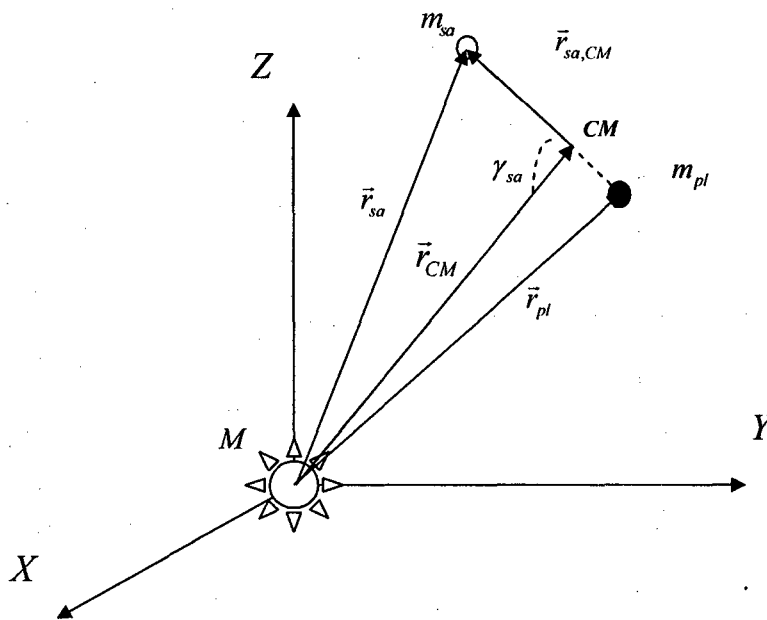


Fig 2.3 Sistema de masas puntuales STL.

$$|\vec{r}_{sa}| \equiv \sqrt{r_{CM}^2 + r_{sa,CM}^2 - 2 r_{CM} r_{sa,CM} \cos \gamma_{sa}} \quad (2.10)$$

que se puede expresar,

$$|\vec{r}_{sa}| \equiv |r_{CM}| \sqrt{1 + \left(\frac{r_{sa,CM}}{r_{CM}}\right)^2 - 2 \left(\frac{r_{sa,CM}}{r_{CM}}\right) \cos \gamma_{sa}} \quad (2.11)$$

De la ecuación anterior se obtiene,

$$\frac{1}{|\vec{r}_{sa}|} \equiv \frac{1}{|r_{CM}| \sqrt{1 + \left(\frac{r_{sa,CM}}{r_{CM}}\right)^2 - 2 \left(\frac{r_{sa,CM}}{r_{CM}}\right) \cos \gamma_{sa}}} \quad (2.12)$$

si definimos $t \equiv \frac{r_{sa,CM}}{r_{CM}}$ y $x \equiv \cos \gamma_{sa}$, obtenemos,

$$\frac{1}{|\vec{r}_{sa}|} \equiv \frac{1}{|r_{CM}| \sqrt{1 + t^2 - 2tx}} \quad (2.13)$$

Ahora consideramos $r_{sa,CM} \ll r_{CM}$, luego $t \ll 1$ y, por lo tanto, podemos usar una propiedad de los polinomios de Legendre,

$$\frac{1}{\sqrt{1 + t^2 - 2tx}} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n \quad (2.14)$$

con lo que,

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{r_{sa,CM}}{r_{CM}}\right)^2 - 2 \left(\frac{r_{sa,CM}}{r_{CM}}\right) \cos \gamma_{sa}}} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \gamma_{sa}) \left(\frac{r_{sa,CM}}{r_{CM}}\right)^n \dots (2.15)$$

donde, $\cos \gamma_{sa} \equiv -\frac{\vec{r}_{sa,CM} \cdot \vec{r}_{CM}}{|\vec{r}_{sa,CM}| |\vec{r}_{CM}|}$

Desarrollando la serie,

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \gamma_{sa}) \left(\frac{r_{sa,CM}}{r_{CM}} \right)^n \equiv P_0(\cos \gamma_{sa}) \left(\frac{r_{sa,CM}}{r_{CM}} \right)^0 + P_1(\cos \gamma_{sa}) \left(\frac{r_{sa,CM}}{r_{CM}} \right)^1 + P_2(\cos \gamma_{sa}) \left(\frac{r_{sa,CM}}{r_{CM}} \right)^2 + \dots \quad (2.16)$$

que se puede expresar como,

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \gamma_{sa}) \left(\frac{r_{sa,CM}}{r_{CM}} \right)^n \equiv 1 + \left[-\frac{\vec{r}_{sa,CM} \cdot \vec{r}_{CM}}{|\vec{r}_{sa,CM}| |\vec{r}_{CM}|} \right] \left(\frac{r_{sa,CM}}{r_{CM}} \right) + \left[\frac{1}{2} \left\{ 3 \left(\frac{\vec{r}_{sa,CM} \cdot \vec{r}_{CM}}{|\vec{r}_{sa,CM}| |\vec{r}_{CM}|} \right)^2 - 1 \right\} \right] \left(\frac{r_{sa,CM}}{r_{CM}} \right)^2 + \dots \quad (2.17)$$

En forma análoga, podemos demostrar que,

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \gamma_{pl}) \left(\frac{r_{pl,CM}}{r_{CM}} \right)^n \equiv 1 + \left[-\frac{\vec{r}_{pl,CM} \cdot \vec{r}_{CM}}{|\vec{r}_{pl,CM}| |\vec{r}_{CM}|} \right] \left(\frac{r_{pl,CM}}{r_{CM}} \right) + \left[\frac{1}{2} \left\{ 3 \left(\frac{\vec{r}_{pl,CM} \cdot \vec{r}_{CM}}{|\vec{r}_{pl,CM}| |\vec{r}_{CM}|} \right)^2 - 1 \right\} \right] \left(\frac{r_{pl,CM}}{r_{CM}} \right)^2 + \dots \quad (2.18)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{r_{pl,CM}}{r_{CM}}\right)^2 - 2 \left(\frac{r_{pl,CM}}{r_{CM}}\right) \cos \gamma_{pl}}} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \gamma_{pl}) \left(\frac{r_{pl,CM}}{r_{CM}}\right)^n \quad (2.19)$$

Reemplazando (2.17) y (2.18) en los sumandos 3 y 4 del Lagrangiano (2.9), se obtienen, respectivamente, las Ec (2.20),(2.21),

$$\begin{aligned} G \frac{Mm_{pl}}{r_{pl}} &\equiv GMm_{pl} \frac{1}{|\vec{r}_{pl}|} \\ &\equiv GMm_{pl} \left\{ \frac{1}{|\vec{r}_{CM}|} \left[1 + \left[-\frac{\vec{r}_{pl,CM} \cdot \vec{r}_{CM}}{|\vec{r}_{pl,CM}| |\vec{r}_{CM}|} \right] \left(\frac{r_{pl,CM}}{r_{CM}}\right) + \left[\frac{1}{2} \left\{ 3 \left(\frac{\vec{r}_{pl,CM} \cdot \vec{r}_{CM}}{|\vec{r}_{pl,CM}| |\vec{r}_{CM}|} \right)^2 - 1 \right\} \left(\frac{r_{pl,CM}}{r_{CM}}\right)^2 + \dots \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G \frac{Mm_{pl}}{r_{pl}} &\equiv GMm_{pl} \frac{1}{|\vec{r}_{pl}|} \\ &\equiv \frac{GM}{|\vec{r}_{CM}|} \left\{ m_{pl} + \left[-\frac{m_{pl} \vec{r}_{pl,CM} \cdot \vec{r}_{CM}}{|\vec{r}_{CM}|^2} \right] + \frac{1}{2} \left\{ 3 \frac{m_{pl} (\vec{r}_{pl,CM} \cdot \vec{r}_{CM})^2}{|\vec{r}_{CM}|^4} - m_{pl} \left(\frac{r_{pl,CM}}{r_{CM}}\right)^2 \right\} + \dots \right\} \quad (2.20) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G \frac{Mm_{sa}}{r_{sa}} &\equiv GMm_{sa} \frac{1}{|\vec{r}_{sa}|} \\ &\equiv GMm_{sa} \left\{ \frac{1}{|\vec{r}_{CM}|} \left[1 + \left[-\frac{\vec{r}_{sa,CM} \cdot \vec{r}_{CM}}{|\vec{r}_{sa,CM}| |\vec{r}_{CM}|} \right] \left(\frac{r_{sa,CM}}{r_{CM}}\right) + \left[\frac{1}{2} \left\{ 3 \left(\frac{\vec{r}_{sa,CM} \cdot \vec{r}_{CM}}{|\vec{r}_{sa,CM}| |\vec{r}_{CM}|} \right)^2 - 1 \right\} \left(\frac{r_{sa,CM}}{r_{CM}}\right)^2 + \dots \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G \frac{Mm_{sa}}{r_{sa}} &\equiv GMm_{sa} \frac{1}{|\vec{r}_{sa}|} \\ &\equiv \frac{GM}{|\vec{r}_{CM}|} \left\{ m_{sa} + \left[-\frac{m_{sa} \vec{r}_{sa,CM} \cdot \vec{r}_{CM}}{|\vec{r}_{CM}|^2} \right] + \frac{1}{2} \left\{ 3 \frac{m_{sa} (\vec{r}_{sa,CM} \cdot \vec{r}_{CM})^2}{|\vec{r}_{CM}|^4} - m_{sa} \left(\frac{r_{sa,CM}}{r_{CM}}\right)^2 \right\} + \dots \right\} \quad (2.21) \end{aligned}$$

Para el caso donde $r_{CM} \gg r_{pl,CM}$ y $r_{sa,CM}$ (que es el caso del sistema Tierra-Luna, por ejemplo), manteniendo sólo hasta los términos cuadráticos (ver Ap B Pág 148), obtenemos,

$$G \frac{Mm_{pl}}{r_{pl}} + G \frac{Mm_{sa}}{r_{sa}} \equiv \frac{GM}{|\vec{r}_{CM}|} (m_{pl} + m_{sa}) + \frac{GM}{|\vec{r}_{CM}|^3} \left\{ - (m_{pl} \vec{r}_{pl,CM} + m_{sa} \vec{r}_{sa,CM}) \cdot \vec{r}_{CM} \right\} +$$

$$\frac{GM}{2|\vec{r}_{CM}|} \left\{ \left[3 \frac{m_{pl} (\vec{r}_{pl,CM} \cdot \vec{r}_{CM})^2}{|\vec{r}_{CM}|^4} - m_{pl} \left(\frac{r_{pl,CM}}{r_{CM}} \right)^2 \right] + \right.$$

$$\left. \left[3 \frac{m_{sa} (\vec{r}_{sa,CM} \cdot \vec{r}_{CM})^2}{|\vec{r}_{CM}|^4} - m_{sa} \left(\frac{r_{sa,CM}}{r_{CM}} \right)^2 \right] \right\} \quad (2.22)$$

Usando en el segundo sumando la propiedad $m_{pl} \vec{r}_{pl,CM} + m_{sa} \vec{r}_{sa,CM} \equiv \vec{0}$ y en los dos últimos $\vec{r}_{pl,CM} \equiv -\frac{m_{sa}}{m_{pl} + m_{sa}} \vec{r}$ y $\vec{r}_{sa,CM} \equiv \frac{m_{pl}}{m_{pl} + m_{sa}} \vec{r}$, respectivamente, conseguimos,

$$G \frac{Mm_{pl}}{r_{pl}} + G \frac{Mm_{sa}}{r_{sa}} \equiv \frac{GM}{|\vec{r}_{CM}|} (m_{pl} + m_{sa}) + \frac{GM\mu}{2r_{CM}^3} \left\{ 3 \frac{(\vec{r} \cdot \vec{r}_{CM})^2}{r_{CM}^2} - r^2 \right\} \quad (2.23)$$

Definiendo al símbolo δ ,

$$\delta \equiv \frac{GM\mu}{2r_{CM}^3} \left\{ 3 \frac{(\vec{r} \cdot \vec{r}_{CM})^2}{r_{CM}^2} - r^2 \right\}$$

El nuevo Lagrangiano resultante es,

$$L \equiv \frac{(m_{pl} + m_{sa})}{2} |\dot{\vec{r}}_{CM}|^2 + \frac{GM}{|\vec{r}_{CM}|} (m_{pl} + m_{sa}) + \frac{\mu}{2} |\dot{\vec{r}}|^2 + G \frac{m_{pl} m_{sa}}{|\vec{r}|} + \delta \quad (2.24)$$

Es decir, ahora en el Lagrangiano las nuevas coordenadas generalizadas son las coordenadas vectoriales \vec{r}_{CM} y \vec{r} .

2.3) Casos especiales

i) Cuando $M=0$

El Lagrangiano en ausencia del Sol resultaría,

$$L \equiv \frac{(m_{pl} + m_{sa})}{2} \left| \dot{\vec{r}}_{CM} \right|^2 + \frac{\mu}{2} \left| \dot{\vec{r}} \right|^2 + G \frac{m_{pl} m_{sa}}{|\vec{r}|} \quad (2.25)$$

Este Lagrangiano debe de conducirnos a ecuaciones diferenciales ordinarias de movimiento, con soluciones numéricas correspondientes a orbitas lunares elípticas observadas desde la Tierra. Es el caso de las soluciones Keplerianas.

ii) Cuando $m_{pl} \gg m_{sa}$: Por ejemplo la Tierra y satélite artificial

Este caso podría corresponder a un satélite artificial de la Tierra, de tal forma que el Lagrangiano sería,

$$L \equiv \frac{m_{pl}}{2} \left| \dot{\vec{r}}_{CM} \right|^2 + \frac{GMm_{pl}}{|\vec{r}_{CM}|} + \frac{m_{sa}}{2} \left| \dot{\vec{r}} \right|^2 + G \frac{m_{pl} m_{sa}}{|\vec{r}|} + \delta \quad (2.26)$$

donde, $\vec{r}_{CM} \equiv \vec{r}_{pl}$ y $\delta \equiv reconsiderarse$ (ver Ap B Pág 150).

Con este Lagrangiano obtendríamos ecuaciones diferenciales ordinarias de movimiento, con soluciones numéricas que podrían verificarse con datos fidedignos de algún satélite artificial terrestre.

iii) Cuando $m_{pl} \approx m_{sa}$: Por ejemplo Plutón y Caronte

Este caso es muy interesante puesto que además la distancia de separación media entre las masas es pequeña, alrededor de 2×10^4 km. El Lagrangiano sería (solo respecto a la condición de las masas),

$$L \equiv m_{sa} \left| \dot{\vec{r}}_{CM} \right|^2 + \frac{2GMm_{sa}}{|\vec{r}_{CM}|} + \frac{m_{sa}}{4} \left| \dot{\vec{r}} \right|^2 + G \frac{m_{sa}^2}{|\vec{r}|} + \delta \quad (2.27)$$

donde, $\bar{r}_{CM} \equiv \frac{1}{2}(\bar{r}_{pl} + \bar{r}_{sa})$ y $\delta \equiv \frac{GMm_{sa}}{4r_{CM}^3} \left\{ 3 \frac{(\bar{r} \cdot \bar{r}_{CM})^2}{r_{CM}^2} - r^2 \right\}$.

iv) Lagrangiano en coordenadas esféricas

Consideramos al sistema Sol-Tierra-Luna, con el sol (M) en el centro del sistema de referencia inercial XYZ; la Tierra (m_{pl}), considerada como masa puntual, en el centro del sistema xyz (que se mueve con sus ejes paralelos a los ejes XYZ) ubicado en el plano XY (considerado plano de la eclíptica Sol-Tierra); y la Luna (m_{sa}), considerada también como masa puntual, localizada con el vector posición r respecto al sistema xyz, ver Fig 2.4.

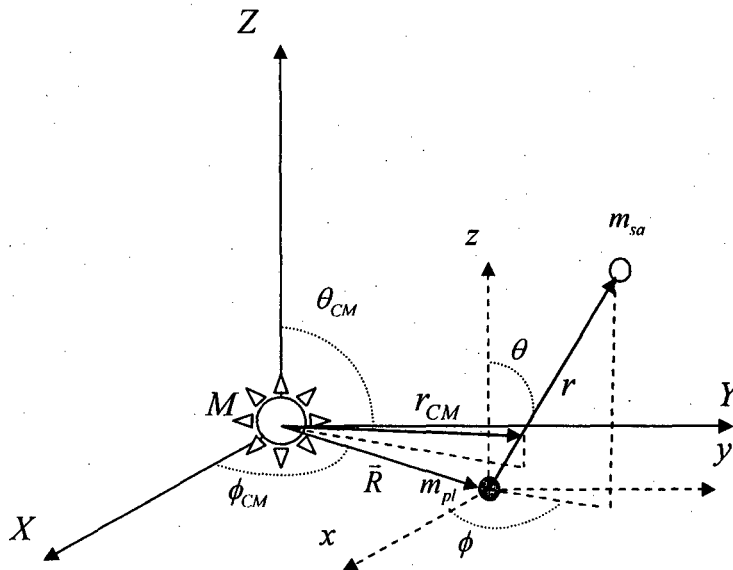


Fig 2.4 Sistema de partículas STL en coordenadas polares.

Al asumir en el Lagrangiano de la Ec (2.24), tanto las coordenadas esféricas del CM, r_{CM} , θ_{CM} y ϕ_{CM} , como las de m_{sa} , r , θ y ϕ , obtenemos el siguiente lagrangiano del sistema Sol-Tierra-Luna,

$$L \equiv \frac{(m_1 + m_2)}{2} (\dot{r}_{CM}^2 + r_{CM}^2 \dot{\theta}_{CM}^2 + r_{CM}^2 \dot{\phi}_{CM}^2 \sin^2 \theta_{CM}) + \frac{\mu}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{GM(m_1 + m_2)}{r_{CM}} + G \frac{m_1 m_2}{r} + \delta \quad (2.28)$$

donde δ toma la forma (ver Ap B, Pág 148),

$$\delta \equiv \frac{GM\mu}{2} \frac{r^2}{r_{CM}^3} \left\{ 3 [\sin \theta \sin \theta_{CM} \cos(\phi - \phi_{CM}) + \cos \theta \cos \theta_{CM}]^2 - 1 \right\} \quad (2.29)$$

Recordemos que este Lagrangiano es válido si $r_{pl}, r_{sa} \gg r$.

El Lagrangiano expresado en coordenadas esféricas, ver Fig 2.5, como comprobaremos en el Cap 3, permitirá efectuar descripciones adecuadas del movimiento satelital, en particular de la Luna, así como obtener parámetros orbitales importantes.

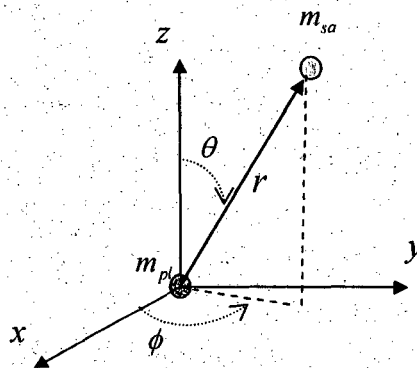


Fig 2.5 Coordenadas esféricas del satélite.

CAPITULO III

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE MOVIMIENTO EN COORDENADAS ESFERICAS DEL SISTEMA AISLADO SOL-TIERRA-LUNA Y SOLUCION NUMERICA

- 3.1) Introducción.**
- 3.2) Obtención de las ecuaciones diferenciales ordinarias de movimiento en coordenadas esféricas del sistema aislado Sol-Tierra-Luna.**
- 3.3) Análisis de la línea de nodos.**
- 3.4) Energía mecánica del sistema.**
- 3.5) Solución numérica de las ecuaciones diferenciales ordinarias de movimiento.**
- 3.6) Observaciones y discusión de resultados.**
- 3.7) Conclusiones.**

3.1) Introducción

En este capítulo se obtendrán las ecuaciones diferenciales ordinarias de movimiento del sistema Sol-Tierra-Luna, considerando las coordenadas esféricas del vector posición del centro de masas y las coordenadas esféricas del vector posición relativo de la Luna respecto de la Tierra. Para lo cual, usando las funciones de Lagrange del capítulo anterior, obtendremos 6 ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden, que luego serán convertidas en 12 ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, las cuales serán resueltas numéricamente. Finalmente, mostraremos y analizaremos los resultados del cálculo numérico, mediante las graficas tanto de las coordenadas esféricas como de diversos parámetros de la órbita lunar, para intervalos de tiempo de 1 mes, 1, 10, 20 y 100 años, respectivamente, y los compararemos con los resultados del Cap I.

3.2) Obtención de las ecuaciones diferenciales ordinarias de movimiento en coordenadas esféricas del sistema Sol-Tierra-Luna moviéndose en el espacio.

Para obtener las 6 ecuaciones diferenciales ordinarias de movimiento, partimos del siguiente Lagrangiano (Ec (2.28)),

$$L \equiv \frac{(m_{pl} + m_{sa})}{2} (\dot{r}_{CM}^2 + r_{CM}^2 \dot{\theta}_{CM}^2 + r_{CM}^2 \dot{\phi}_{CM}^2 \text{sen}^2 \theta_{CM}) + \frac{\mu}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 \text{sen}^2 \theta) \\ + \frac{GM(m_{pl} + m_{sa})}{r_{CM}} + G \frac{m_{pl} m_{sa}}{r} + \delta$$

donde δ toma la forma,

$$\delta \equiv \frac{GM\mu}{2} \frac{r^2}{r_{CM}^3} \left\{ 3 \left[\text{sen} \theta \text{sen} \theta_{CM} \cos(\phi - \phi_{CM}) + \cos \theta \cos \theta_{CM} \right]^2 - 1 \right\}$$

Luego, aplicando las ecuaciones diferenciales de Lagrange,

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} \equiv \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \quad (3.1)$$

a cada una de las coordenadas,

$$q_1 \equiv r_{CM} \quad (3.2)$$

$$q_2 \equiv \theta_{CM} \quad (3.3)$$

$$q_3 \equiv \phi_{CM} \quad (3.4)$$

$$q_4 \equiv r \quad (3.5)$$

$$q_5 \equiv \theta \quad (3.6)$$

$$q_6 \equiv \phi \quad (3.7)$$

obtendríamos 6 ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden, que se hacen adimensionales aplicando transformaciones similares a las dadas por las ecuaciones (1.11) a (1.17). Estas 6 ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden, adimensionales, vinculadas a las ecuaciones de movimiento, se muestran a continuación (donde se conserva la nomenclatura inicial de las coordenadas, esto es, prescindimos de los asteriscos),

$$\ddot{r}_{CM} - (\dot{\theta}_{CM}^2 + \dot{\phi}_{CM}^2 \text{sen}^2 \theta_{CM}) r_{CM} + \frac{4\pi^2}{r_{CM}^2} + k_1 \frac{r^2}{r_{CM}^4} \left\{ 3 \left[\text{sen} \theta \text{sen} \theta_{CM} \cos(\phi - \phi_{CM}) + \cos \theta \cos \theta_{CM} \right]^2 - 1 \right\} \equiv 0 \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned}
& \ddot{\theta}_{CM} + 2 \frac{\dot{r}_{CM} \dot{\theta}_{CM}}{r_{CM}} - \frac{1}{2} \dot{\phi}_{CM}^2 \text{sen}(2\theta_{CM}) \\
& - k_1 \frac{r^2}{r_{CM}^5} \left\{ \text{sen}^2 \theta \text{sen}(2\theta_{CM}) \cos^2(\phi - \phi_{CM}) + \text{sen} 2\theta \cos(2\theta_{CM}) \cos(\phi - \phi_{CM}) \right. \\
& \left. - \cos^2 \theta \text{sen}(2\theta_{CM}) \right\} \equiv 0 \quad (3.9)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \ddot{\phi}_{CM} + \frac{\dot{\theta}_{CM} \text{sen}(2\theta_{CM})}{\text{sen}^2 \theta_{CM}} \dot{\phi}_{CM} + 2 \frac{\dot{r}_{CM} \dot{\phi}_{CM}}{r_{CM}} \\
& - 2k_1 \frac{r^2}{r_{CM}^5} \left\{ \text{sen} \theta \cos(\phi - \phi_{CM}) + \cos \theta \left[\frac{\cos \theta_{CM}}{\text{sen} \theta_{CM}} \right] \right\} \text{sen} \theta \text{sen}(\phi - \phi_{CM}) \equiv 0 \quad (3.10)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \ddot{r} - r(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \text{sen}^2 \theta) + \frac{k_2}{r^2} \\
& - 4\pi^2 \frac{r}{r_{CM}^3} \left\{ 3 \left[\text{sen} \theta \text{sen} \theta_{CM} \cos(\phi - \phi_{CM}) + \cos \theta \cos \theta_{CM} \right]^2 - 1 \right\} \equiv 0 \quad (3.11)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \ddot{\theta} + 2 \frac{\dot{r} \dot{\theta}}{r} - \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 \text{sen}(2\theta) \\
& - \frac{6\pi^2}{r_{CM}^3} \left\{ \text{sen}^2 \theta_{CM} \text{sen}(2\theta) \cos^2(\phi - \phi_{CM}) + \text{sen}(2\theta_{CM}) \cos(2\theta) \cos(\phi - \phi_{CM}) \right. \\
& \left. - \cos^2(\theta_{CM}) \text{sen}(2\theta) \right\} \equiv 0 \quad (3.12)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \ddot{\phi} + \frac{\dot{\theta} \dot{\phi} \text{sen}(2\theta)}{\text{sen}^2 \theta} + 2 \frac{\dot{r} \dot{\phi}}{r} \\
& + \frac{12\pi^2}{r_{CM}^3} \left\{ \text{sen} \theta_{CM} \cos(\phi - \phi_{CM}) + \cos \theta_{CM} \left[\frac{\cos \theta}{\text{sen} \theta} \right] \right\} \text{sen} \theta_{CM} \text{sen}(\phi - \phi_{CM}) \equiv 0 \quad (3.13)
\end{aligned}$$

Estas son las ecuaciones que hemos de resolver, en la sección 5, usando el método de cálculo numérico.

3.3) Análisis de la línea de nodos

Como mencionamos en el Cap I, para analizar el movimiento del plano que contiene a la órbita lunar, graficaremos la función ϕ (Ec (1.65)), que en coordenadas esféricas tiene la forma,

$$\phi(r, \theta, \phi) \equiv \arctg \left\{ \frac{-r^2 \dot{\theta} \text{sen} \phi - r^2 \dot{\phi} \text{sen} \theta \cos \theta \cos \phi}{-r^2 \dot{\theta} \cos \phi + r^2 \dot{\phi} \text{sen} \theta \cos \theta \text{sen} \phi} \right\} \quad (3.14)$$

y con el cambio de variables de las ecuaciones (3.21) a (3.32) tendremos que,

$$\phi(x_1, \dots, x_{12}) \equiv \arctg \left\{ \frac{-x_4^2 x_{11} \text{sen} x_6 - x_4^2 x_{12} \text{sen} x_5 \cos x_5 \cos x_6}{-x_4^2 x_{11} \cos x_6 + x_4^2 x_{12} \text{sen} x_5 \cos x_5 \text{sen} x_6} \right\} \quad (3.15)$$

De acuerdo a las posiciones y velocidades que actualmente tiene la Luna, la línea de nodos L_n , tiene un periodo rotacional de aproximadamente 18,6 años, como resultado de la influencia solar en el movimiento lunar.

Mostraremos y analizaremos gráficos de la función $\phi(t)$ (Pág 74) obtenidas después de la resolución de las ecuaciones diferenciales ordinarias de movimiento para intervalos de tiempo de 20 hasta 100 años.

3.4) Energía mecánica del sistema

La energía mecánica del sistema viene dada por la siguiente ecuación (Ec (1.66)),

$$E_m \equiv E_{Kpl} + E_{Ksa} + E_{pg, Epl} + E_{pg, Esa} + E_{pg, plsa} \quad (3.16)$$

la cual considera el caso general de una Estrella (E), planeta (pl) y satélite (sa). Expresando la Ec (3.16) según la aproximación multipolar realizada en el Cap II (Ec (2.24)) resulta,

$$E_m \equiv \frac{(m_{pl} + m_{sa})}{2} |\dot{\vec{r}}_{CM}|^2 + \frac{\mu}{2} |\dot{\vec{r}}|^2 - \frac{GM(m_{pl} + m_{sa})}{r_{CM}} - \frac{Gm_{pl}m_{sa}}{r} - \frac{GM\mu r^2}{2r_{CM}^3} \left\{ 3 \frac{(\vec{r} \cdot \vec{r}_{CM})^2}{r^2 r_{CM}^3} - 1 \right\} \quad (3.17)$$

Escribiendo esta ecuación en coordenadas esféricas y haciéndola adimensional, con ecuaciones análogas a las Ec (1.11)-(1.17), (1.68), tenemos,

$$E_m \equiv \frac{1}{2} \frac{(m_{pl} + m_{sa})}{m_{sa}} \left(\dot{r}_{CM}^2 + r_{CM}^2 \dot{\theta}_{CM}^2 + r_{CM}^2 \dot{\phi}_{CM}^2 \sin^2 \theta_{CM} \right) + \frac{1}{2} \frac{m_{pl}}{(m_{pl} + m_{sa})} \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta \right) - \frac{4\pi^2 (m_{pl} + m_{sa})}{m_{sa} r_{CM}} - \frac{4\pi^2 m_{pl}}{Mr} - \frac{2\pi^2 m_{pl}}{(m_{pl} + m_{sa}) r_{CM}^3} \left\{ 3 \left[\sin \theta \sin \theta_{CM} \cos(\phi - \phi_{CM}) + \cos \theta \cos \theta_{CM} \right]^2 - 1 \right\} \quad (3.18)$$

donde, por simplicidad, no escribimos los asteriscos. Reemplazando los valores de las masas dados por las Ec (1.28), (1.31) y (1.32), y la Ec (1.33), resulta,

$$\begin{aligned}
E_m \equiv & 41,1399 \left(\dot{r}_{CM}^2 + r_{CM}^2 \dot{\theta}_{CM}^2 + r_{CM}^2 \dot{\phi}_{CM}^2 \text{sen}^2 \theta_{CM} \right) \\
& + 0,4939 \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 \text{sen}^2 \theta \right) \\
& \frac{3248,2883}{r_{CM}} - \frac{11853,2861 \times 10^{-8}}{r} \\
& - 19,4994 \frac{r^2}{r_{CM}^3} \left\{ 3 \left[\text{sen} \theta \text{sen} \theta_{CM} \cos(\phi - \phi_{CM}) + \cos \theta \cos \theta_{CM} \right]^2 - 1 \right\} \quad (3.19)
\end{aligned}$$

De tal forma que la ecuación final, proporcional a la energía mecánica del sistema, se obtiene con el cambio de variables dado por las Ec (3.21)-(3.32), resultando,

$$\begin{aligned}
E_m \equiv & 41,1399 \left(x_7^2 + x_1^2 x_8^2 + x_1^2 x_9^2 \text{sen}^2 x_2 \right) \\
& + 0,4939 \left(x_{10}^2 + x_4^2 x_{11}^2 + x_4^2 x_{12}^2 \text{sen}^2 x_5 \right) \\
& \frac{3248,2883}{x_1} - \frac{11863,5194 \times 10^{-8}}{x_4} \\
& - 19,4994 \frac{x_4^2}{x_1^3} \left\{ 3 \left[\text{sen} x_5 \text{sen} x_2 \cos(x_6 - x_3) + \cos x_5 \cos x_2 \right]^2 - 1 \right\} \quad (3.20)
\end{aligned}$$

Posteriormente, en la Pág 75 mostraremos y analizaremos gráficos de la $E_m(t)$ obtenidas después de la resolución de las ecuaciones diferenciales ordinarias de movimiento para intervalos de tiempo de 20 hasta 100 años.

3.5) Solución numérica de las ecuaciones diferenciales ordinarias de movimiento.

Para resolver numéricamente las 6 ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden Ec (3.8)-(3.13), primero aplicamos los cambios de variables dados por las Ec (1.36)-(1.47),

$$x_1 \equiv r_{CM} \quad (3.21)$$

$$x_2 \equiv \theta_{CM} \quad (3.22)$$

$$x_3 \equiv \phi_{CM} \quad (3.23)$$

$$x_4 \equiv r \quad (3.24)$$

$$x_5 \equiv \theta \quad (3.25)$$

$$x_6 \equiv \phi \quad (3.26)$$

$$x_7 \equiv \dot{r}_{CM} \quad (3.27)$$

$$x_8 \equiv \dot{\theta}_{CM} \quad (3.28)$$

$$x_9 \equiv \dot{\phi}_{CM} \quad (3.29)$$

$$x_{10} \equiv \dot{r} \quad (3.30)$$

$$x_{11} \equiv \dot{\theta} \quad (3.31)$$

$$x_{12} \equiv \dot{\phi} \quad (3.32)$$

Con estas nuevas variables obtenemos las siguientes 12 ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden,

$$\dot{x}_1 \equiv x_7 \quad (3.33)$$

$$\dot{x}_2 \equiv x_8 \quad (3.34)$$

$$\dot{x}_3 \equiv x_9 \quad (3.35)$$

$$\dot{x}_4 \equiv x_{10} \quad (3.36)$$

$$\dot{x}_5 \equiv x_{11} \quad (3.37)$$

$$\dot{x}_6 \equiv x_{12} \quad (3.38)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_7 \equiv & \left(x_8^2 + x_9^2 \text{sen}^2 x_2 \right) x_1 - \frac{4\pi^2}{x_1^2} \\ & - k_1 \frac{x_4^2}{x_1^4} \left\{ 3 \left[\text{sen} x_5 \text{sen} x_2 \cos(x_6 - x_3) + \cos x_5 \cos x_2 \right]^2 - 1 \right\} \end{aligned} \quad (3.39)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_8 \equiv & -2 \frac{x_7 x_8}{x_1} + \frac{1}{2} x_9^2 \text{sen}(2x_2) \\ & + k_1 \frac{x_4^2}{x_1^5} \left\{ \text{sen}^2 x_5 \text{sen}(2x_2) \cos^2(x_6 - x_3) + \text{sen} 2x_5 \cos(2x_2) \cos(x_6 - x_3) \right. \\ & \left. - \cos^2 x_5 \text{sen}(2x_2) \right\} \end{aligned} \quad (3.40)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_9 \equiv & -\frac{x_8 \text{sen}(2x_2)}{\text{sen}^2 x_2} x_9 - 2 \frac{x_7 x_9}{x_1} \\ & + 2k_1 \frac{x_4^2}{x_1^5} \left\{ \text{sen} x_5 \cos(x_6 - x_3) + \cos x_5 \left[\frac{\cos x_2}{\text{sen} x_2} \right] \right\} \text{sen} x_5 \text{sen}(x_6 - x_3) \end{aligned} \quad (3.41)$$

$$\dot{x}_{10} \equiv x_4 \left(x_{11}^2 + x_{12}^2 \text{sen}^2 x_5 \right) - \frac{k_2}{x_4} + 4\pi^2 \frac{x_4}{x_1^3} \left\{ 3 \left[\text{sen} x_5 \text{sen} x_2 \cos(x_6 - x_3) + \cos x_5 \cos x_2 \right]^2 - 1 \right\} \quad (3.42)$$

$$\dot{x}_{11} \equiv -2 \frac{x_{10} x_{11}}{x_4} + \frac{1}{2} x_{12}^2 \text{sen}(2x_5) + \frac{6\pi^2}{x_1^3} \left\{ \text{sen}^2 x_2 \text{sen}(2x_5) \cos^2(x_6 - x_3) + \text{sen}(2x_2) \cos(2x_5) \cos(x_6 - x_3) - \cos^2(x_2) \text{sen}(2x_5) \right\} \quad (3.43)$$

$$\dot{x}_{12} \equiv -\frac{x_{11} x_{12} \text{sen}(2x_5)}{\text{sen}^2 x_5} - 2 \frac{x_{10} x_{12}}{x_4} - \frac{12\pi^2}{x_1^3} \left\{ \text{sen} x_2 \cos(x_6 - x_3) + \cos x_2 \left[\frac{\cos x_5}{\text{sen} x_5} \right] \right\} \text{sen} x_2 \text{sen}(x_6 - x_3) \quad (3.44)$$

donde,

$$k_1 \equiv \frac{6\pi^2 m_{pl} m_{sa}}{(m_{pl} + m_{sa})^2} \quad (3.45), \quad k_2 \equiv \frac{4\pi^2 (m_{pl} + m_{sa})}{M} \quad (3.46)$$

y para los valores de las masas citados en la Pág 10, obtenemos,

$$k_1 \equiv 0,7110 \text{ y } k_2 \equiv 0,11999 \times 10^{-3}$$

Las condiciones iniciales para resolver las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden se muestran en la Fig 3.1,

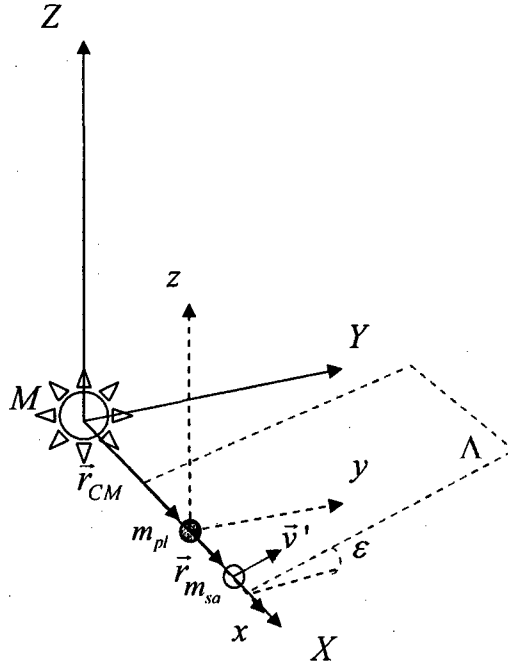


Fig 3.1 Condiciones iniciales para el sistema STL.

donde $\bar{v}' \equiv \bar{v}_{L,T}$, velocidad de la Luna respecto a la Tierra, calculada con el mes sideral (tiempo que tarda la Luna en pasar dos veces consecutivas por una posición fija respecto de las estrellas lejanas) correspondiente de 27,3217 d, tiene un modulo $|\bar{v}'| \approx 0,2151(UA/año)$; ε , ángulo que forma el plano orbital lunar, Λ , con la eclíptica, con un valor de $\varepsilon \approx 5^\circ$. Se puede probar (ver Ap C, Pág 151) que las condiciones iniciales para las velocidades generalizadas de las coordenadas esféricas, la velocidad $v_{L,T}$ (v') y el ángulo ε (ver Fig 2.4) están relacionadas por,

$$\dot{r}_{CM}(0) \equiv 0 \quad (3.47)$$

$$\dot{\theta}_{CM}(0) \equiv - \left\{ \frac{m_{sa}}{m_{pl} + m_{sa}} \right\} \frac{v' \text{sen} \varepsilon}{r_{CM}(0)} \quad (3.48)$$

$$\dot{\phi}_{CM}(0) \equiv \left[2\pi + \left\{ \frac{m_{sa}}{m_{pl} + m_{sa}} \right\} v' \cos \varepsilon \right] \left\{ \frac{1}{r_{CM}(0)} \right\} \quad (3.49)$$

$$\dot{r}(0) \equiv 0 \quad (3.50)$$

$$\dot{\theta}(0) \equiv -\frac{v' \operatorname{sen} \varepsilon}{r(0)} \quad (3.51)$$

$$\dot{\phi}(0) \equiv \frac{v' \cos \varepsilon}{r(0)} \quad (3.52)$$

De tal forma que las condiciones iniciales para resolver las 12 ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, para los valores actuales de posiciones y velocidades del sistema Sol-Tierra-Luna, son las siguientes,

$$x_1(0) \equiv r_{CM}(0) \equiv 1,00003 \quad (3.53)$$

$$x_2(0) \equiv \theta_{CM}(0) \equiv \frac{\pi}{2} \quad (3.54)$$

$$x_3(0) \equiv \phi_{CM}(0) \equiv 0 \quad (3.55)$$

$$x_4(0) \equiv r(0) \equiv 0,00256 \quad (3.56)$$

$$x_5(0) \equiv \theta(0) \equiv \frac{\pi}{2} \quad (3.57)$$

$$x_6(0) \equiv \phi(0) \equiv 0 \quad (3.58)$$

$$x_7(0) \equiv \dot{x}_1(0) \equiv \dot{r}_{CM}(0) \equiv 0 \quad (3.59)$$

$$x_8(0) \equiv \dot{x}_2(0) \equiv \dot{\theta}_{CM}(0) \equiv -0,00023 \quad (3.60)$$

$$x_9(0) \equiv \dot{x}_3(0) \equiv \dot{\phi}_{CM}(0) \equiv 6,28562 \quad (3.61)$$

$$x_{10}(0) \equiv \dot{x}_4(0) \equiv \dot{r}(0) \equiv 0 \quad (3.62)$$

$$x_{11} \equiv \dot{x}_5(0) \equiv \dot{\theta}(0) \equiv -7,3231 \quad (3.63)$$

$$x_{12} \equiv \dot{x}_6(0) \equiv \dot{\phi}(0) \equiv 83,7037 \quad (3.64)$$

Mostraremos y analizaremos las graficas de $r(t)$ y $\theta(t)$, Pág 71, 72, que se obtienen luego de resolver las 12 ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, usando el método numérico de Runge-Kutta mejorado. De igual forma graficaremos y analizaremos el movimiento relativo lunar mediante la proyección de su órbita en el plano xy, Pág 73. También mostraremos como se afecta el movimiento orbital al variar v' y ε .

3.5.1) Variación de la velocidad relativa de la Luna, v'

La variación de v' afecta las condiciones iniciales de movimiento de la Luna, según las Ec (3.51), (3.52). Cuando se resuelvan numéricamente las ecuaciones diferenciales ordinarias de movimiento se consideraran los siguientes valores de velocidad relativa de la Luna,

a) $v' = 0,2151$ UA/año (caso real)

a1) 99% v'

a2) 101% v'

a3) 90% v'

a4) 110% v'

a5) 200% v'

Las nuevas condiciones iniciales para cada caso se muestran en la Tabla 3.1. Las graficas de las funciones ϕ se encuentran en la Pág 76 y las correspondientes a las proyecciones en el plano xy de la órbita lunar, en la Pág 77.

Tabla 3.1 Condiciones iniciales para diversos valores de v' .

$t=0$	Caso a	Caso a1	Caso a2	Caso a3	Caso a4	Caso a5
\dot{r}_{CM}	0	0	0	0	0	0
$\dot{\theta}_{CM}$	-0,00023	-0,000234	-0,000239	-0,000213	-0,00026	-0,00047
$\dot{\phi}_{CM}$	6,28562	6,2856	6,28565	6,285361	6,285883	6,288233
\dot{r}	0	0	0	0	0	0
$\dot{\theta}$	-7,32312	-7,249891	-7,396354	-6,590810	-8,055435	-14,646245
$\dot{\phi}$	83,7037	82,866676	84,540750	75,333342	92,074084	167,407426

Mostraremos y analizaremos los gráficos de las funciones ϕ , que permiten obtener el tiempo en que precesa el plano orbital lunar, y los gráficos de las proyecciones de la órbita lunar en el plano xy, donde se pueden determinar el periodo y la estabilidad de la órbita lunar (en el sentido de la sección 1.6-6, Pág 39).

3.5.2) Variación de ε

Al igual que la velocidad relativa de la luna, ε influye en las condiciones iniciales de las variables de velocidad. Calculando las nuevas condiciones iniciales para dichas variables, usando las Ec (3.47)-(3.52), para los siguientes casos,

b) $\varepsilon = 5^\circ$ (caso real)

b1) $\varepsilon = 10^\circ$

b2) $\varepsilon = 15^\circ$

b3) $\varepsilon = 20^\circ$

b4) $\varepsilon = 25^\circ$

b5) $\varepsilon = 30^\circ$

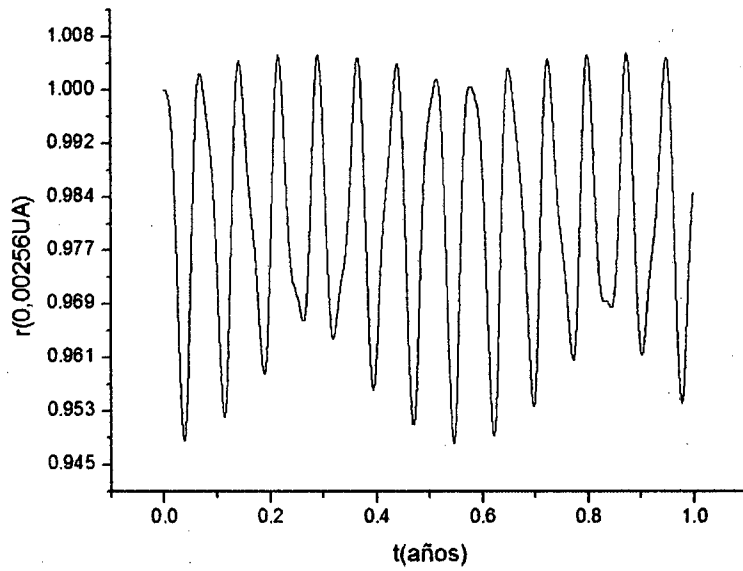
obtenemos las nuevas condiciones iniciales, que se muestran en la Tabla 3.2,

Tabla 3.2 Condiciones iniciales para diversos valores de ε .

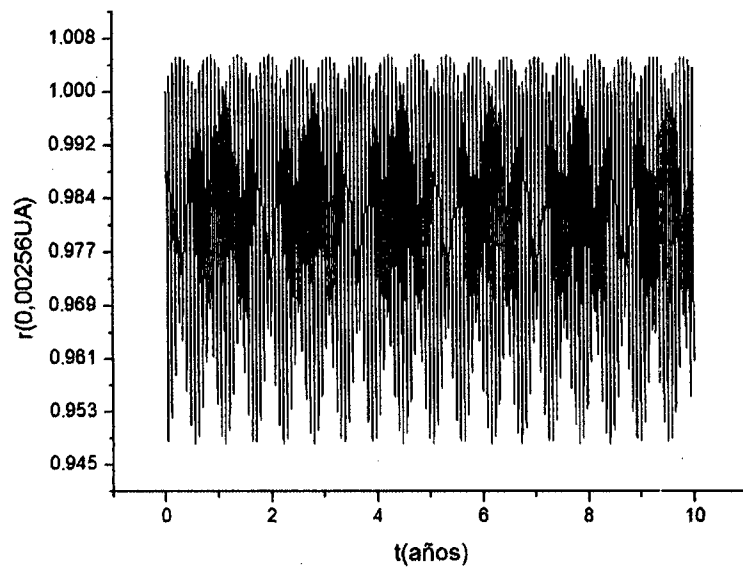
t=0	Caso b	Caso b1	Caso b2	Caso b3	Caso b4	Caso b5
\dot{r}_{CM}	0	0	0	0	0	0
$\dot{\theta}_{CM}$	-0,00023	-0,00046	-0,00068	-0,000896	-0,001107	-0,00131
$\dot{\phi}_{CM}$	6,28562	6,285592	6,285543	6,285474	6,285386	6,285281
\dot{r}	0	0	0	0	0	0
$\dot{\theta}$	-7,32312	-14,5905	-21,7469	-28,7377	-35,5098	-42,0117
$\dot{\phi}$	83,7037	82,7469	81,1604	78,9562	76,1511	72,7664

Mostraremos y analizaremos los gráficos de la función ϕ así como los gráficos de la proyección del movimiento orbital lunar en el plano xy (de las Pág 76-79).

A continuación mostraremos los resultados numéricos para ser observados, comparados, contrastados y discutidos en la sección siguiente, buscando correlacionarlos con las características del movimiento lunar, tal como se realizó en el Cap I.

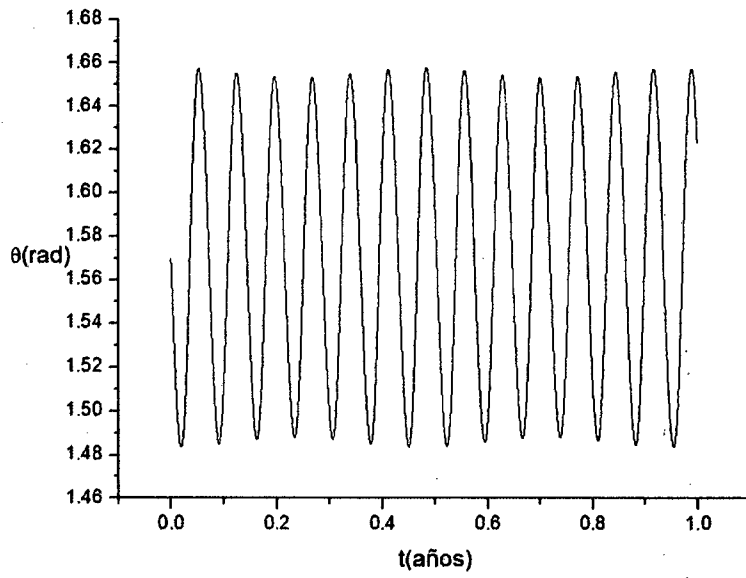


(a)

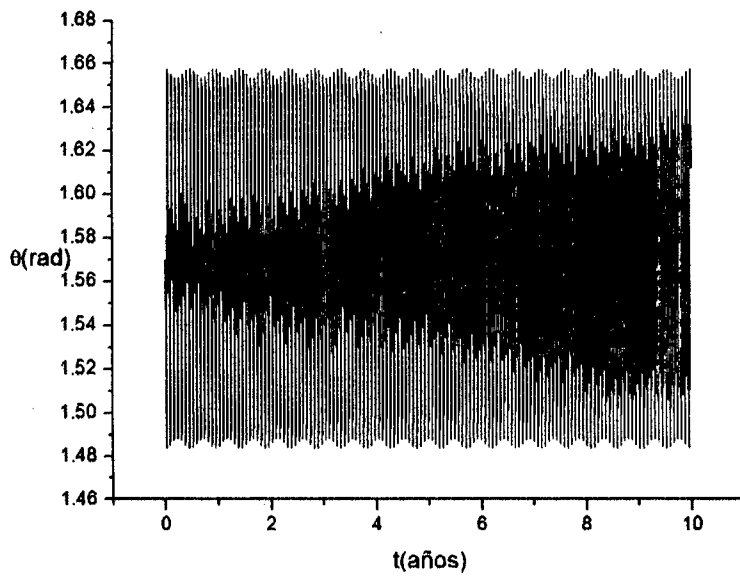


(b)

Fig 3.2 Distancia relativa Tierra- Luna, r , para (a) 1 año y (b) 10 años.
 Ci: $v' = 0,2151 \text{ UA/año}$, $\varepsilon = 5^\circ$.



(a)



(b)

Fig 3.3 Gráficas de θ - t , para (a) 1 año y (b) 10 años. Ci: $v' = 0,2151$ UA/año, $\varepsilon = 5^\circ$.

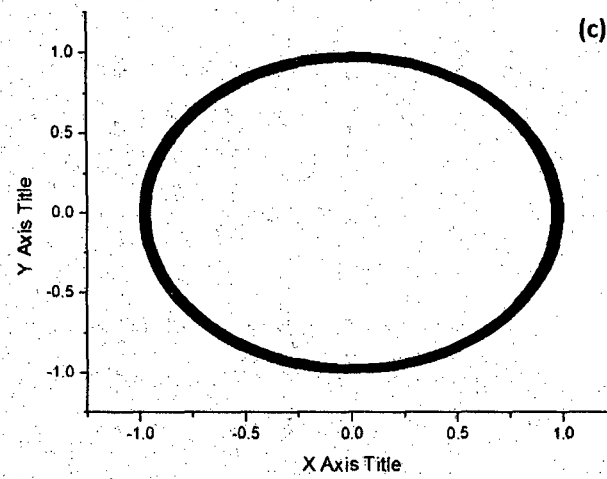
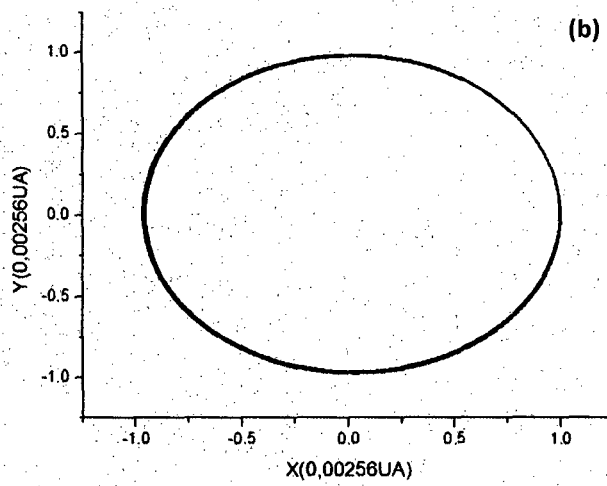
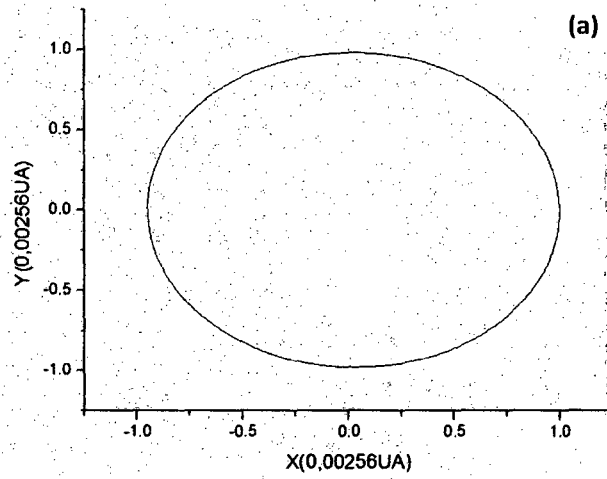
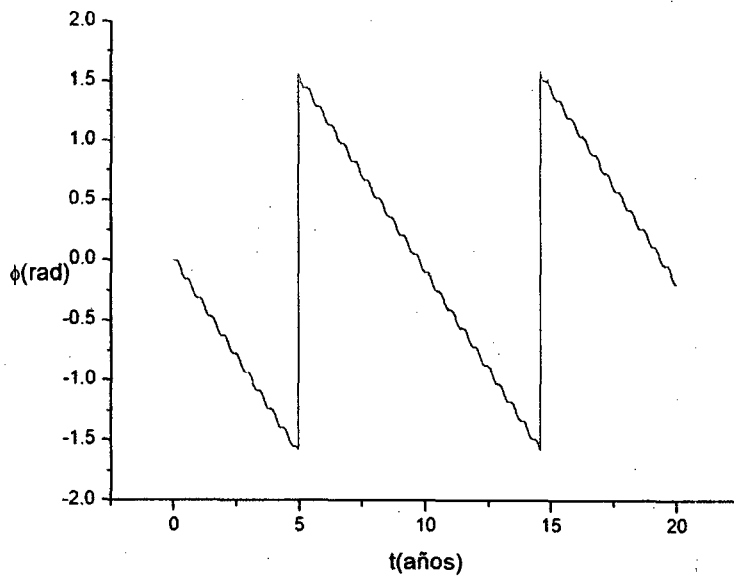
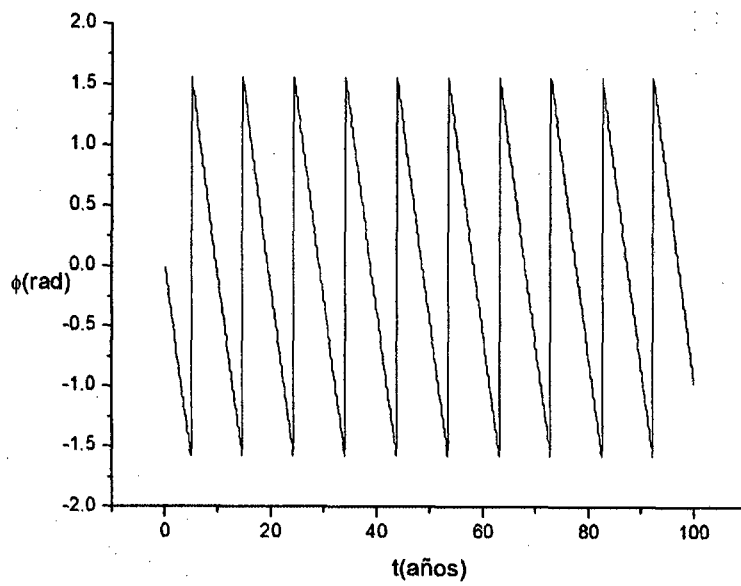


Fig 3.4 Proyección de la órbita lunar en el plano xy para (a) 1 mes, (b) 1 año y (c) 20 años. Ci: $v' = 0,2151$ UA/año, $\epsilon = 5^\circ$.



(a)



(b)

Fig 3.5 Precesión del plano orbital lunar instantáneo: $T=19,3$ años, para (a) 20 años y (b) 100 años. Ci: $v' = 0,2151$ UA/año, $\epsilon=5^\circ$.

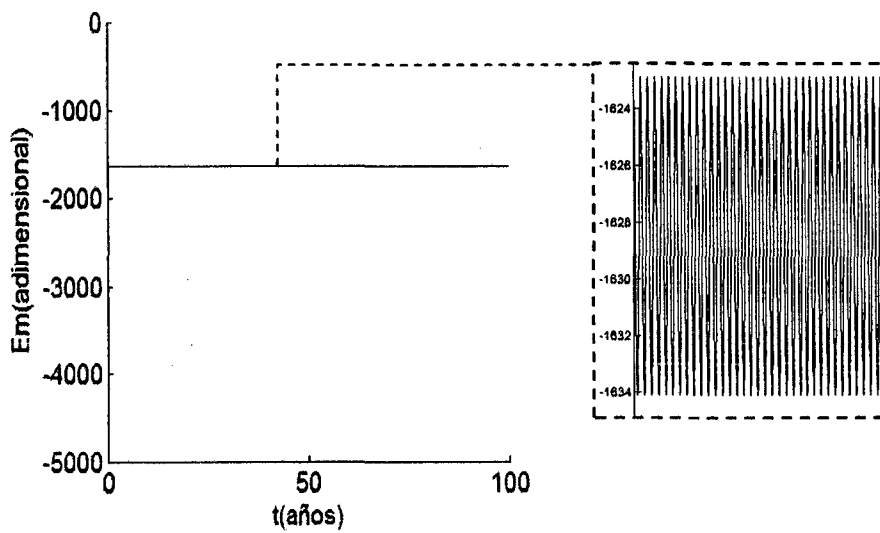
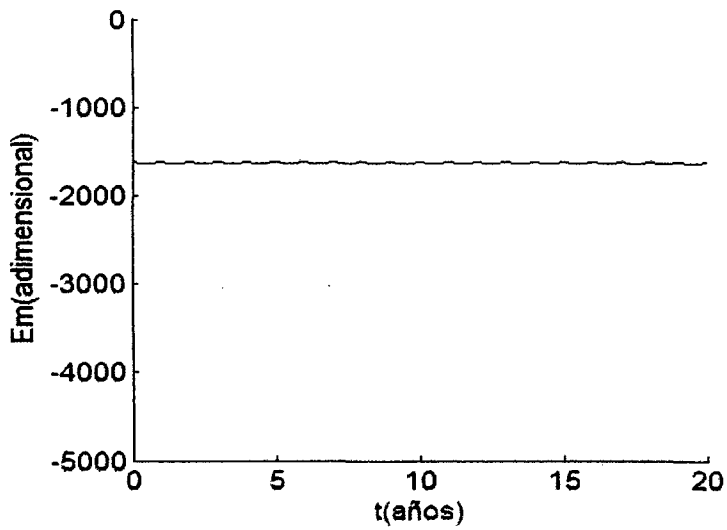


Fig 3.6 Energía mecánica adimensional, E_m , en función del tiempo, para $v'=0,2151$ UA/año y $\varepsilon=5^\circ$. Se observa valor medio de -1628,0. El recuadro muestra la dispersión de la energía

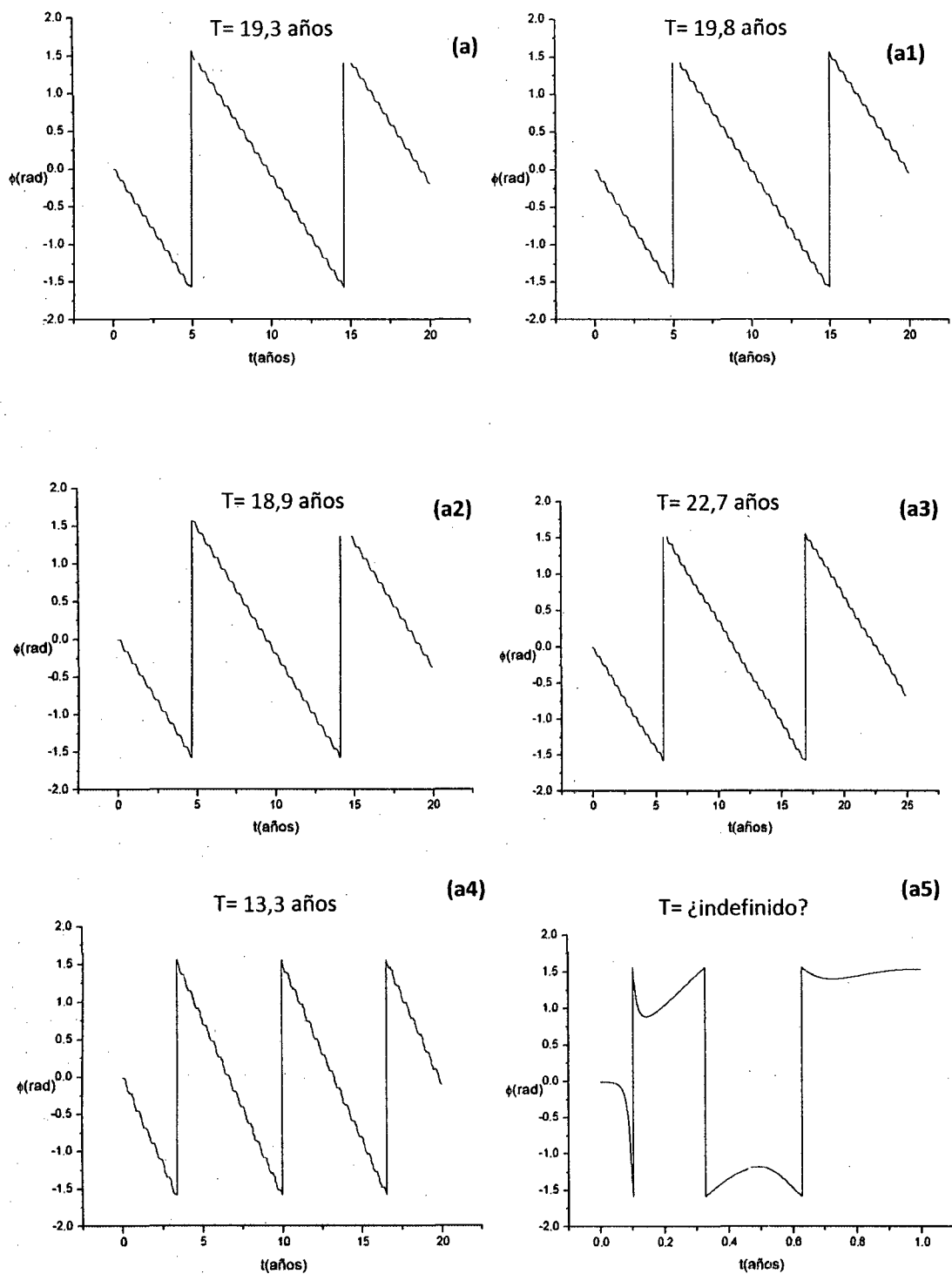


Fig 3.7 Precesión del plano orbital lunar instantáneo para las velocidades v' de la Tabla 3.1.

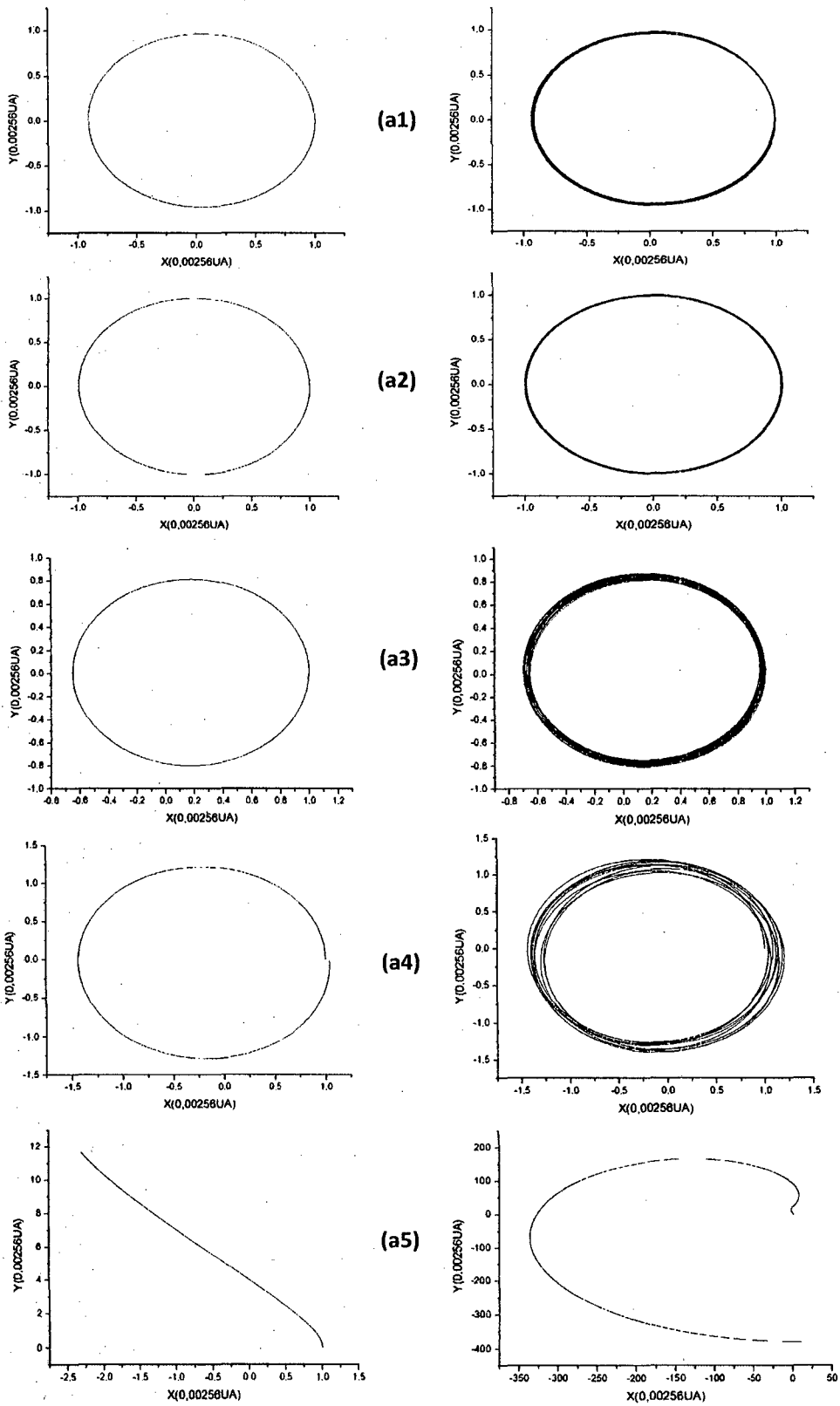


Fig 3.8 Proyección de la órbita lunar en el plano xy para las velocidades V' dadas en la Tabla 3.1. La columna izquierda corresponde a 1 mes y la derecha a 1 año.

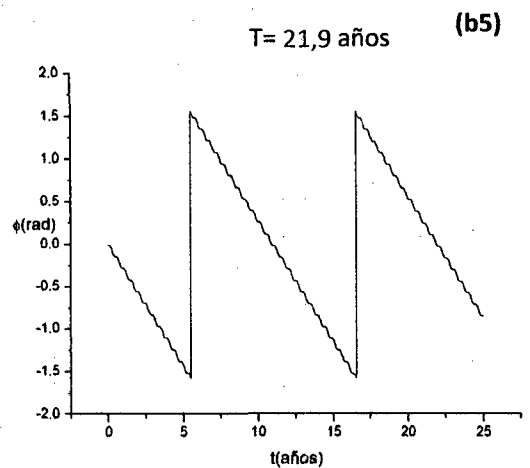
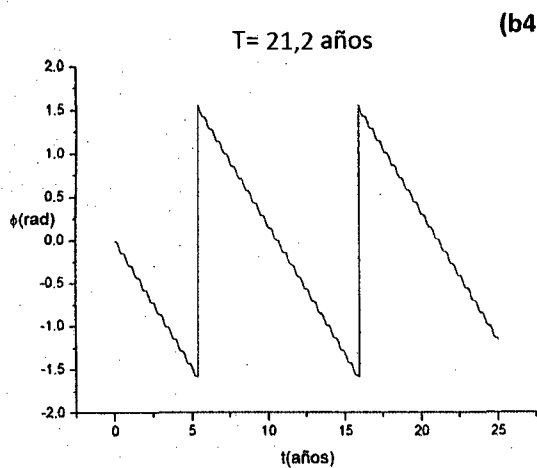
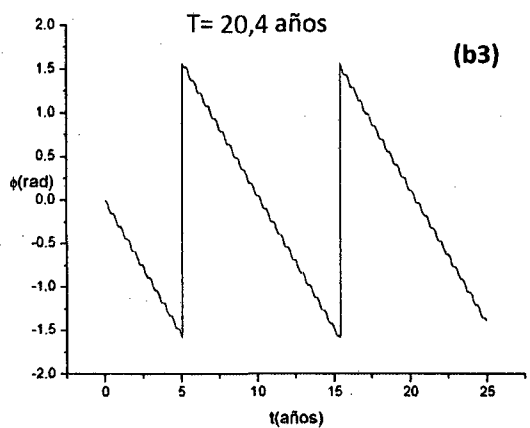
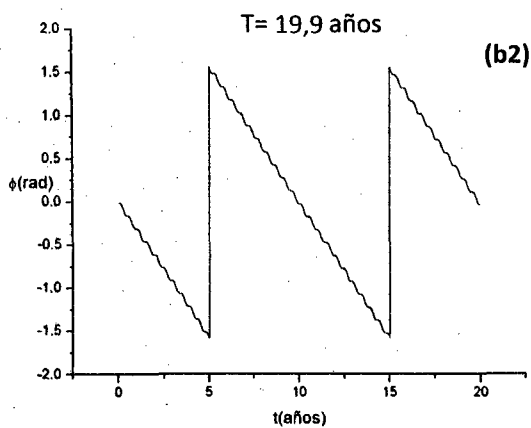
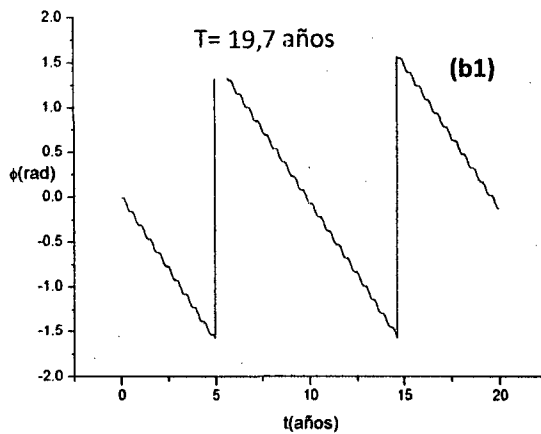
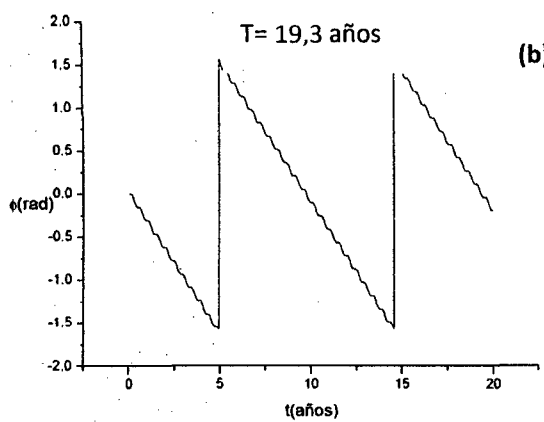


Fig 3.9 Precesión del plano orbital lunar instantáneo para los ángulos ϵ de la Tabla 3.2.

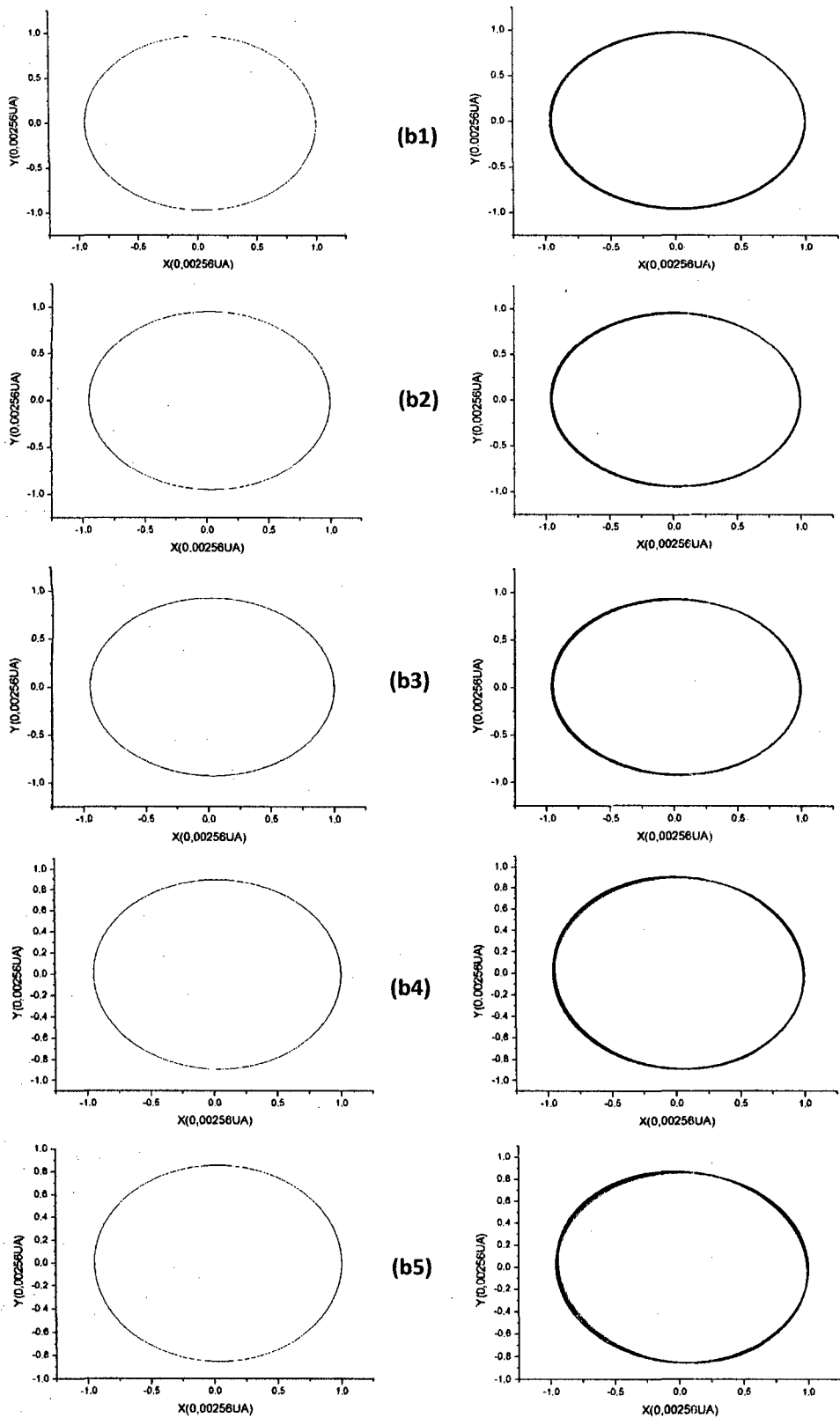


Fig 3.10. Proyección de la órbita lunar en el plano xy para los ángulos ϵ dados en la Tabla 3.2. La columna izquierda corresponde a 1 mes y la derecha a 1 año.

3.6) Observaciones y discusión de resultados

Los gráficos de las funciones mostradas son muy parecidos a los del capítulo I.

- 1) De las gráficas $r-t$ (Pág 71) obtenidas con $v'=0,2151$ UA/año y $\varepsilon=5^\circ$, se observa que el perigeo (r_{\min}) varía de 0,00243 UA a 0,00247 UA y el apogeo (r_{\max}) de 0,00256 UA a 0,00257 UA.
La influencia solar se aprecia en la grafica con un "periodo" aproximado de un año, produciendo primeramente el perigeo en contraste con el apogeo cuando no se considera el Sol; retomando periódicamente sus valores de máximo y mínimo acercamiento al Sol. Esto se logró contrastando los gráficos de $r-t$ con los correspondientes sin influencia solar (ver Ap C, Pág 154).
- 2) Las gráficas de $\theta-t$ (Pág 72) muestran el movimiento lunar en el plano Δ con la influencia periódica solar, que produce variaciones de θ de aproximadamente 0,005 rad. Las observadas son de alrededor de 0,006 rad [1-2].
Esta diferencia puede deberse, por ejemplo, a no considerar el efecto de otros planetas, la forma volumétrica de la Luna [3] o la inclinación del eje rotacional terrestre (alrededor de 23° respecto de la perpendicular a la eclíptica).
- 3) De las curvas de la proyección de la órbita lunar (Pág 73) se aprecian trayectorias elípticas casi cerradas con un periodo de 26,426 días, para $v'=0,2151$ UA/año y $\varepsilon=5^\circ$. Estas curvas en el tiempo muestran dos comportamientos: el primero, la reducción del radio orbital medio de aproximadamente 6,6% estabilizándose para 20 años, y el segundo, la trayectoria no se encuentra en el mismo plano original.
- 4) Las gráficas $\phi-t$ (Pág 74) muestra un periodo de aproximadamente 19,3 años para $v'=0,2151$ UA/año y $\varepsilon=5^\circ$. Este resultado se diferencia en alrededor de 3,7% del valor observado de 18,6 años [4].
- 5) Las gráficas para E_m (adimensional) (Pág 75) muestra un valor referencial constante medio de -1628,0, ver recuadro.
Este resultado es coherente con un sistema aislado donde la energía debe mantenerse constante; comparando la dispersión con el valor medio referencial, se obtiene un error porcentual inferior al obtenido en el capítulo I.

- 6) De las gráficas para $\phi-v'$ (Pág 76) se observa un decremento del periodo con aumento de v' . Se tiene un periodo de aproximadamente 18,9 años para una velocidad $v' = 0,2173$ UA/año. Tal como se observó en el Cap I, al aumentar la v' el periodo disminuye. También, en pleno acuerdo con lo visto en el capítulo I, ya para el caso (a5) el periodo es indeterminado.
- 7) De las gráficas de la proyección de la órbita lunar en función de v' (Pág 77) se observan órbitas cerradas y abiertas con meses lunares que van desde 20,331 días hasta 38,325 días. Los radios medios orbitales decrecen hasta un 30% y crecen hasta un 50%. En los gráficos para 1 o más años se aprecia una órbita lunar en diferentes planos. Para $v' = 0,4302$ UA/año, el radio orbital medio crece rápidamente; en un año es aproximadamente 350 unidades astronómicas lunares (0,00256 UA).
Para la velocidad usada, $v'=0,2151$ UA/año, se obtiene un mes de 26,426 días, que se desvía alrededor del 3% del valor aceptado para el mes sideral, es decir 27,3217 días. En cuanto al plano orbital lunar, las proyecciones muestran que no es único; podemos imaginar que el plano orbital lunar inicial rota en forma horaria visto de la parte $z > 0$.
- 8) De las graficas $\phi-\varepsilon$ (Pág 78) se observa que el periodo aumenta a medida que lo hace también ε . Los periodos van de 19,7 años hasta 21,9 años, para $v' = 0,2151$ UA/año constante.
El periodo de precesión de la línea de nodos, asociado a la expresión ϕ , va en relación directa con ε debido a que una mayor inclinación del plano orbital lunar produce variaciones en las componentes de velocidad de la Luna (tal como lo indicamos en el capítulo I) incrementando así dicho periodo de precesión.
- 9) Las gráficas de la proyección de la órbita lunar en función de ε (Pág 79), manteniendo constante $v' = 0,2151$ UA/año, muestran para todos los casos un mes lunar de 26,426 días.
La mayor inclinación inicial del plano orbital lunar no altera la duración del mes lunar. Para partículas, aparentemente cualquier plano orbital sería equivalente, por lo tanto la duración del mes lunar no debe de cambiar, y esto ocurre para los ángulos indicados. Sin embargo, como ya se indico en el capítulo I, para ángulos mayores la órbita puede tornarse inestable.

3.7) Conclusiones

- 1) Considerando las simulaciones usadas en este modelo, se obtiene un resultado para el tiempo de precesión de la Línea de Nodos que se aparta en tan solo 3,7 % del valor observado por mediciones astronómicas. Para una velocidad $v' = 0,2173$ UA/año el resultado es comparable al obtenido usando el otro modelo (Cap I).
- 2) La ventaja del uso de las coordenadas polares nos permite apreciar detalles de la órbita lunar, como por ejemplo estimar las variaciones de la distancia orbital Tierra-Luna o variaciones de la inclinación del plano orbital lunar. Por ejemplo, según el modelo usado obtenemos una variación en la inclinación de $\Delta\theta \sim 0,005$ rad.
- 3) Características periódicas se pueden apreciar en todas las gráficas obtenidas, particularmente en las de distancia lunar relativa, función ϕ , etc.
- 4) También es posible estimar los efectos periódicos a futuro sobre los parámetros de la órbita lunar, como por ejemplo proyectar a futuro la precesión de la Línea de Nodos.
- 5) Cuando se obtienen los gráficos para el sistema Tierra-Luna, luego de analizar los resultados, se deduce que en este modelo es el Sol el causante de la precesión de la Línea de Nodos.

Referencias

- [1] Peterson, Ivars. El reloj d Newton, Caos en el sistema solar, edición castellana, Alianza Editorial, S.A., Madrid-España, 1995; capítulos 6 y 7.
- [2] Lunar Constants and Models Documents. Jet Propulsion Laboratory, JPL D-32296. Lsa0801112300.
- [3] Henrard, J. Perturbations due to shape of the Moon en the Lunar Theory, Celestial Mechanics and Dynamics Astronomy, noviembre-1980, vol 22, N°4.
- [4] Kotkin G.L., Serbo V.G. Problemas de mecánica clásica, segunda edición, Editorial Mir, Moscú, 1980; páginas 14, 103-104.

CAPITULO IV

MOVIMIENTO DEL SISTEMA TIERRA-LUNA USANDO COORDENADAS ESFERICAS Y POTENCIAL DE MAC-CULLAGH

- 4.1) Introducción.**
- 4.2) Introducción al potencial de Mac-Cullagh.**
- 4.3) Lagrangiano del sistema Sol-Tierra-Luna.**
- 4.4) Energía mecánica del sistema y línea de nodos.**
- 4.5) Obtención y solución numérica de las ecuaciones diferenciales de movimiento usando método numérico.**
- 4.6) Resultados numéricos, observaciones y discusión.**
- 4.7) Conclusiones.**

4.1) Introducción

En este capítulo, la Tierra ya no es considerada una partícula, por lo tanto, la energía potencial de interacción entre ella y la Luna ya no es Kepleriana, sino que deberá usarse el potencial de Mac-Cullagh (que en resumen es el potencial Kepleriano más un término perturbativo). Los otros términos del Lagrangiano considerado en el capítulo anterior son los mismos, luego, el procedimiento a seguir será semejante a lo hecho en el Cap 3. Seguiremos asumiendo los ejes coordenados como en los capítulos anteriores, es decir, el eje de la Tierra es siempre perpendicular al plano XY. El objetivo de este capítulo es analizar si la forma geométrica de la Tierra afecta el movimiento de la Línea de Nodos.

Consideramos al sistema Sol-Tierra-Luna con el Sol (M) como partícula en el centro del sistema XYZ; a la Tierra (m_{pl}) como un elipsoide de revolución de semiejes a, b, c (caso $a=b>c$) y a la Luna (m_{sa}) también como una partícula. Al centro de masa de la Tierra se le asocia el vector posición \vec{r}_1 . Para describir el movimiento relativo de la Luna con respecto al sistema de referencia xyz (con origen en el centro de masa de la Tierra) consideramos al vector \vec{r} . Como en el capítulo anterior, el sistema de referencia xyz es tal que siempre es paralelo al sistema de referencia XYZ, ver Fig 4.1.

Como se dijo, el Lagrangiano del sistema Sol-Tierra-Luna será determinado, esta vez, mediante el potencial de Mac-Cullagh, el cual considera la forma geométrica de la Tierra sobre el potencial gravitacional Tierra-Luna. Por lo tanto, de alguna manera se evaluará el efecto de estas dos aproximaciones basadas en expansión multipolar: primero, por la distancia de la Tierra y Luna respecto del Sol y, segundo, por la forma achatada de la Tierra [1].

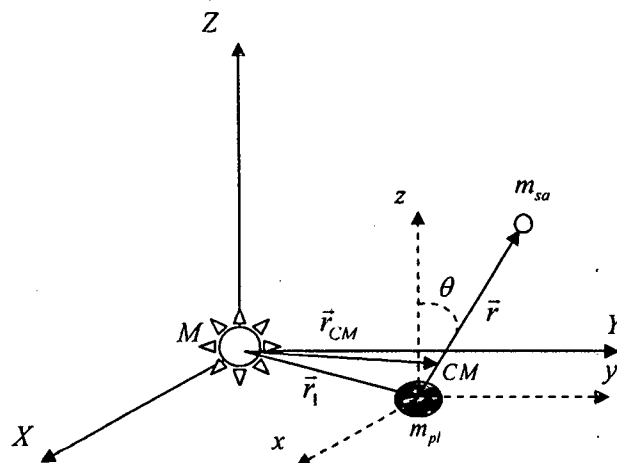


Fig 4.1 Sistemas de referencia XYZ y xyz.

4.2) Introducción al potencial de Mac-Cullagh

Consideramos un sistema mecánico formado por una partícula de masa m_{sa} y un cuerpo esférico homogéneo de masa m_{pl} (ver Fig 4.2)

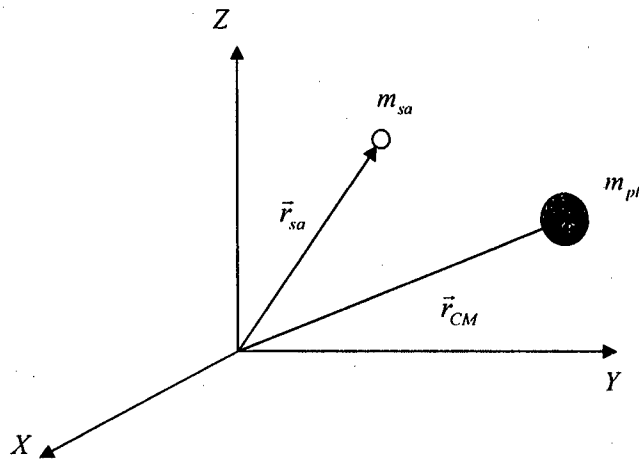


Fig 4.2 Sistema mecánico formado por una esfera y una partícula.

En este caso, la energía potencial gravitatoria del sistema es,

$$E_p \equiv - \frac{G m_{pl} m_{sa}}{|\vec{r}_{sa} - \vec{r}_{CM}|} \quad (4.1)$$

pero, si el cuerpo de masa m_{pl} es ahora un cuerpo homogéneo elipsoidal de revolución con semiejes a , b y c , tal que $a = b > c$, y los ejes x_k se mueven con el cuerpo elipsoidal coincidiendo con los ejes de simetría (ver Fig 4.3), se demuestra que la energía potencial gravitatoria del sistema es [2-3],

$$E_p \equiv - \frac{G m_{sa} m_{pl}}{|\vec{r}_{sa} - \vec{r}_{CM}|} - \frac{G m_{sa} (I - I_3)}{2 |\vec{r}_{sa} - \vec{r}_{CM}|^3} \{3 \cos^2 \gamma_3 - 1\} \quad (4.2)$$

si $|\vec{r}_{sa} - \vec{r}_{CM}| \gg a, b, c$.

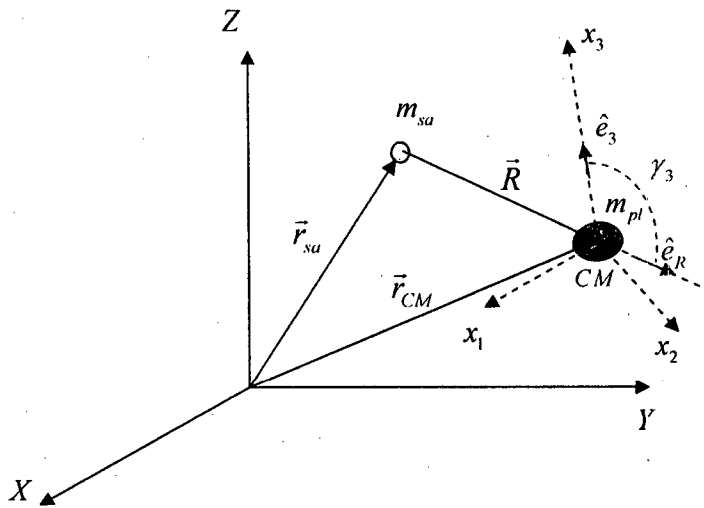


Fig 4.3 Cuerpo esférico y partícula.

A este potencial se le denomina **potencial de Mac-Cullagh**. La demostración de la Ec (4.2) se realiza mediante expansión multipolar.

En la Ec (4.2) las constantes I, I_3 , son los momentos de inercia del cuerpo con respecto a los ejes x_1, x_3 , respectivamente. El ángulo γ_3 es el ángulo entre el vector \hat{e}_3 y el vector $\hat{e}_R \equiv \frac{\vec{R}}{R}$ (ver Fig 4.3).

Consideremos el caso particular en que el cuerpo elipsoidal se mueve de tal forma que el eje x_3 es perpendicular al plano XY para todo tiempo, luego, $\hat{e}_3 \equiv \hat{k}$ (ver Fig 4.4).

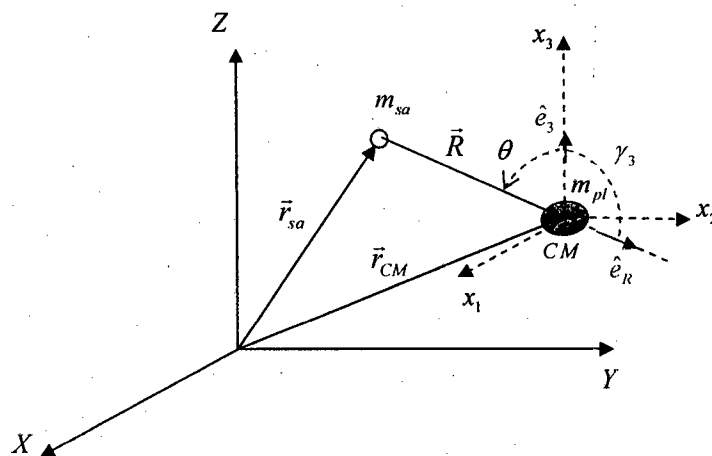


Fig 4.4 Caso particular de ejes XYZ-xyz paralelos.

Si adaptamos este potencial a nuestro caso especial, donde el sistema $x_1x_2x_3$ (xyz) siempre es paralelo al sistema XYZ, comparar Fig 4.4, 4.1, resulta,

$$\vec{R} \equiv -(\vec{r}_{sa} - \vec{r}_{CM}) \equiv -\vec{r} \quad (4.3)$$

$$\hat{e}_R \equiv (-\hat{e}_r) \quad (4.4)$$

$$\hat{e}_3 \equiv \hat{k} \quad (4.5)$$

De la Fig 4.4,

$$\gamma_3 \equiv \pi - \theta \quad (4.6)$$

donde θ es el ángulo relativo lunar, luego,

$$\cos \gamma_3 \equiv -\cos \theta \quad (4.7)$$

De tal forma que el potencial de Mac-Cullagh que consideraremos es,

$$E_p \equiv -\frac{G m_{pl} m_{sa}}{r} - \frac{G m_{sa} (I - I_3)}{2r^3} \{3 \cos^2 \theta - 1\} \quad (4.8)$$

La consideración de mantener a los sistemas XYZ y xyz paralelos, nos permitirá seguir usando las mismas seis coordenadas generalizadas $r_{CM}, \theta_{CM}, \phi_{CM}, r, \theta$ y ϕ .

4.3) Lagrangiano del sistema Sol-Tierra-Luna

En esta sección hallaremos la función de Lagrange de un sistema mecánico formado por tres cuerpos celestes: una estrella de masa M (que se supone fija en el origen de coordenadas), un planeta de masa m_{pl} y un satélite del planeta de masa m_{sa} . Se está considerando la trayectoria tridimensional del planeta y para todo x_3 paralelo al eje Z (ver Fig 4.5).

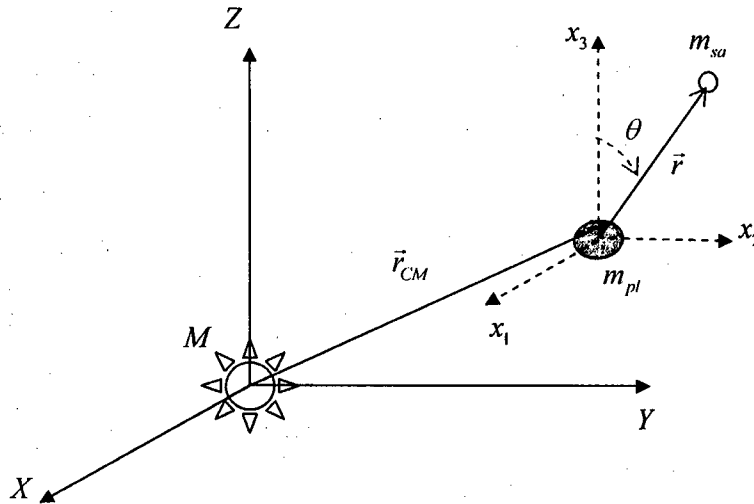


Fig 4.5 Sistema formado por una estrella, planeta y satélite.

Luego, mediante la Ec (4.8) el Lagrangiano L del sistema sería entonces,

$$L \equiv \frac{(m_{pl} + m_{sa})}{2} \dot{r}_{CM}^2 + \frac{\mu}{2} \dot{r}^2 + \frac{GM(m_{pl} + m_{sa})}{r_{CM}} + \frac{Gm_{pl}m_{sa}}{r} + \frac{Gm_{sa}(I - I_3)}{2r^3} \{3 \cos^2 \theta - 1\} + \delta \dots (4.9)$$

donde,

$$\delta \equiv \frac{GM\mu}{2r_{CM}^3} \left\{ 3 \frac{(\vec{r} \cdot \vec{r}_{CM})^2}{r_{CM}^2} - r^2 \right\} \quad (4.10)$$

Recordando que los momentos de inercia respecto a los ejes x_1 y x_3 son,

$$I \equiv I_1 \equiv I_2 \equiv \frac{m_{pl}}{5} (a^2 + c^2) \quad (4.11)$$

$$I_3 \equiv \frac{m_{pl}}{5} (a^2 + b^2) \equiv \frac{2}{5} m_{pl} a^2 \quad (4.12)$$

Para el caso del planeta Tierra tenemos,

$$a \equiv b \equiv 6376,46 \text{ km} \quad (4.13)$$

$$c \equiv 6355,55 \text{ km} \quad (4.14)$$

Escribiendo el lagrangiano en coordenadas esféricas,

$$L \equiv \frac{(m_{pl} + m_{sa})}{2} (\dot{r}_{CM}^2 + r_{CM}^2 \dot{\theta}_{CM}^2 + r_{CM}^2 \dot{\phi}_{CM}^2 \text{sen}^2 \theta_{CM}) + \frac{\mu}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 \text{sen}^2 \theta) \\ + \frac{GM(m_{pl} + m_{sa})}{r_{CM}} + G \frac{m_{pl} m_{sa}}{r} + G \frac{m_{sa} (I - I_3)}{2r^3} \{3 \cos^2 \theta - 1\} + \delta \quad (4.15)$$

donde,

$$\delta \equiv \frac{GM\mu}{2} \frac{r^2}{r_{CM}^3} \left\{ 3 \left[\text{sen} \theta \text{sen} \theta_{CM} \cos(\phi - \phi_{CM}) + \cos \theta \cos \theta_{CM} \right]^2 - 1 \right\} \quad (4.15.1)$$

4.4) Energía mecánica del sistema y línea de nodos

La energía mecánica para este caso viene dada por la Ec (1.66),

$$E_m \equiv E_{KT} + E_{KL} + E_{pg,ST} + E_{pg,SL} + E_{pg,TL}$$

Expresándola en coordenadas esféricas, teniendo en cuenta la aproximación multipolar del capítulo III y el potencial de Mac-Cullagh de la Ec (4.8), tenemos,

$$\begin{aligned}
 E_m \equiv & \frac{(m_{pl} + m_{sa})}{2} (\dot{r}_{CM}^2 + r_{CM}^2 \dot{\theta}_{CM}^2 + r_{CM}^2 \dot{\phi}_{CM}^2 \sin^2 \theta_{CM}) \\
 & + \frac{m_{pl} m_{sa}}{2(m_{pl} + m_{sa})} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) \\
 & - \frac{GM(m_{pl} + m_{sa})}{r_{CM}} - \frac{Gm_{pl} m_{sa}}{r} + \frac{Gm_{pl} m_{sa}}{10} (a^2 - c^2) \frac{\{3 \cos^2 \theta - 1\}}{r^3} \\
 & - \frac{MGm_{pl} m_{sa}}{2(m_{pl} + m_{sa})} \frac{r^2}{r_{CM}^3} \left\{ 3 \left[\sin \theta \sin \theta_{CM} \cos(\phi - \phi_{CM}) + \cos \theta \cos \theta_{CM} \right]^2 - 1 \right\} \quad (4.16)
 \end{aligned}$$

Transformando esta ecuación de energía a una ecuación de energía adimensional (para simplificar los cálculos), usando las Ec (1.11)-(1.17) para las coordenadas esféricas y el tiempo, la Ec (1.68) para las masas y la Ec (1.33), tenemos,

$$\begin{aligned}
E_m^* &\equiv \frac{(m_{pl}^* + m_{sa}^*)}{2} (\dot{r}_{CM}^{*2} + r_{CM}^{*2} \dot{\theta}_{CM}^{*2} + r_{CM}^{*2} \dot{\phi}_{CM}^{*2} \text{sen}^2 \theta_{CM}^*) \\
&+ \frac{1}{2} \frac{m_{pl}^* m_{sa}^*}{(m_{pl}^* + m_{sa}^*)} (\dot{r}^{*2} + r^{*2} \dot{\theta}^{*2} + r^{*2} \dot{\phi}^{*2} \text{sen}^2 \theta^*) \\
&- \frac{4\pi^2 (m_{pl}^* + m_{sa}^*)}{r_{CM}^*} - \frac{4\pi^2 m_{pl}^* m_{sa}^* m_{sa}^*}{Mr^*} + \frac{2}{5} \pi^2 \frac{m_{pl}^* m_{sa}^* m_{sa}^*}{M} \frac{(a^2 - c^2)}{R^2} \frac{\{3 \cos^2 \theta^* - 1\}}{r^{*3}} \\
&- \frac{2\pi^2 m_{pl}^* m_{sa}^*}{(m_{pl}^* + m_{sa}^*)} \frac{r^{*2}}{r_{CM}^*} \left\{ 3 \left[\text{sen} \theta^* \text{sen} \theta_{CM}^* \cos(\phi^* - \phi_{CM}^*) + \cos \theta^* \cos \theta_{CM}^* \right]^2 - 1 \right\} \quad (4.17)
\end{aligned}$$

Finalmente, expresando la ecuación de energía en las variables a ser calculadas numéricamente, usando las Ec (3.21)-(3.32), obtenemos la siguiente ecuación asociada a la energía mecánica del sistema,

$$\begin{aligned}
E_m^* &\equiv \frac{(m_{pl}^* + m_{sa}^*)}{2} (x_7^2 + x_1^2 x_8^2 + x_1^2 x_9^2 \text{sen}^2 x_2) \\
&+ \frac{1}{2} \frac{m_{pl}^* m_{sa}^*}{(m_{pl}^* + m_{sa}^*)} (x_{10}^2 + x_4^2 x_{11}^2 + x_4^2 x_{12}^2 \text{sen}^2 x_5) \\
&- \frac{4\pi^2 (m_{pl}^* + m_{sa}^*)}{x_1} - \frac{4\pi^2 m_{pl}^* m_{sa}^*}{Mx_4} + \frac{2}{5} \pi^2 \frac{m_{pl}^* m_{sa}^* m_{sa}^*}{M} \frac{(a^2 - c^2)}{R^2} \frac{\{3 \cos^2 x_5 - 1\}}{x_4^3} \\
&- \frac{2\pi^2 m_{pl}^* m_{sa}^*}{(m_{pl}^* + m_{sa}^*)} \frac{x_4^2}{x_1^3} \left\{ 3 \left[\text{sen} x_5 \text{sen} x_2 \cos(x_6 - x_3) + \cos x_5 \cos x_2 \right]^2 - 1 \right\} \quad (4.18)
\end{aligned}$$

Para el sistema mecánico donde la estrella es el Sol, el planeta es la Tierra y el satélite la Luna, obtenemos de la Ec (4.18),

$$\begin{aligned}
E_m^* \equiv & 41,1399(x_7^2 + x_1^2 x_8^2 + x_1^2 x_9^2 \text{sen}^2 x_2) \\
& + 0,4939(x_{10}^2 + x_4^2 x_{11}^2 + x_4^2 x_{12}^2 \text{sen}^2 x_5) - \frac{3248,2883}{x_1} \\
& - \frac{11863,5194 \times 10^{-8}}{x_4} + k_3 \frac{\{3 \cos^2 x_5 - 1\}}{x_4^3} \\
& - 19,4994 \frac{x_4^2}{x_1^3} \left\{ 3 \left[\text{sen} x_5 \text{sen} x_2 \cos(x_6 - x_3) + \cos x_5 \cos x_2 \right]^2 - 1 \right\} \quad (4.19)
\end{aligned}$$

donde, $k_3 \equiv \frac{2 \pi^2 m_{pl} (a^2 - c^2)}{5 M R^2} \equiv 1,403 \times 10^{-16}$.

Como antes, la expresión E_m^* es proporcional a la energía mecánica del sistema Sol-Tierra-Luna, E_m , por lo tanto, su evaluación y control permitirá estimar la consistencia de los cálculos del método numérico.

La ecuación para la función ϕ (que nos permitirá calcular el movimiento de la línea de nodos), es en este caso igual a la Ec (3.14),

$$\phi(r, \theta, \phi) \equiv \arctg \left\{ \frac{-r^2 \dot{\theta} \text{sen} \phi - r^2 \dot{\phi} \text{sen} \theta \cos \theta \cos \phi}{-r^2 \dot{\theta} \cos \phi + r^2 \dot{\phi} \text{sen} \theta \cos \theta \text{sen} \phi} \right\}$$

y, con el cambio de variables de las ecuaciones (3.21) a (3.32) tendremos que,

$$\phi(x_1, \dots, x_{12}) \equiv \arctg \left\{ \frac{-x_4^2 x_{11} \text{sen} x_6 - x_4^2 x_{12} \text{sen} x_5 \cos x_5 \cos x_6}{-x_4^2 x_{11} \cos x_6 + x_4^2 x_{12} \text{sen} x_5 \cos x_5 \text{sen} x_6} \right\}$$

Los resultados numéricos para la E_m ($=E_m^*$) y ϕ , luego de resolver numéricamente las ecuaciones diferenciales ordinarias correspondientes, se mostraran y analizaran en la sección 4.6.

4.5) Obtención y solución numérica de las ecuaciones diferenciales ordinarias de movimiento

Ahora, obtendremos las ecuaciones de movimiento siguiendo el procedimiento del Cap III, aplicando las ecuaciones de Lagrange a la función L (ecuación 4.15) y usando la definición dada en la Ec (4.15.1), tenemos,

$$\ddot{r}_{CM} - (\dot{\theta}_{CM}^2 + \dot{\phi}_{CM}^2 \text{sen}^2 \theta_{CM}) r_{CM} + \frac{MG}{r_{CM}^2} + \frac{3}{2} \frac{GM\mu}{(m_{pl} + m_{sa}) r_{CM}^4} \left\{ 3 \left[\text{sen} \theta \text{sen} \theta_{CM} \cos(\phi - \phi_{CM}) + \cos \theta \cos \theta_{CM} \right]^2 - 1 \right\} \equiv 0 \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}_{CM} + 2 \frac{\dot{r}_{CM} \dot{\theta}_{CM}}{r_{CM}} - \frac{1}{2} \dot{\phi}_{CM}^2 \text{sen}(2\theta_{CM}) \\ - \frac{3}{2} \frac{GM\mu}{(m_{pl} + m_{sa}) r_{CM}^5} \left\{ \text{sen}^2 \theta \text{sen}(2\theta_{CM}) \cos^2(\phi - \phi_{CM}) + \text{sen} 2\theta \cos(2\theta_{CM}) \cos(\phi - \phi_{CM}) \right. \\ \left. - \cos^2 \theta \text{sen}(2\theta_{CM}) \right\} \equiv 0 \end{aligned} \quad (4.21)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\phi}_{CM} + \frac{\dot{\theta}_{CM} \text{sen}(2\theta_{CM})}{\text{sen}^2 \theta_{CM}} \dot{\phi}_{CM} + 2 \frac{\dot{r}_{CM} \dot{\phi}_{CM}}{r_{CM}} \\ - 3 \frac{GM\mu}{(m_{pl} + m_{sa}) r_{CM}^5} \left\{ \text{sen} \theta \cos(\phi - \phi_{CM}) \right. \\ \left. + \cos \theta \left[\frac{\cos \theta_{CM}}{\text{sen} \theta_{CM}} \right] \right\} \text{sen} \theta \text{sen}(\phi - \phi_{CM}) \equiv 0 \end{aligned} \quad (4.22)$$

$$\begin{aligned} \ddot{r} - r(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \text{sen}^2 \theta) + \frac{G(m_{pl} + m_{sa})}{r^2} \\ - MG \frac{r}{r_{CM}^3} \left\{ 3 \left[\text{sen} \theta \text{sen} \theta_{CM} \cos(\phi - \phi_{CM}) + \cos \theta \cos \theta_{CM} \right]^2 - 1 \right\} \\ - \frac{3}{10} a^2 G(m_{pl} + m_{sa}) \left\{ 1 - \left(\frac{c}{a} \right)^2 \right\} \frac{\{3 \cos^2 \theta - 1\}}{r^4} \equiv 0 \end{aligned} \quad (4.23)$$

$$\ddot{\theta} + 2\frac{\dot{r}\dot{\theta}}{r} - \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 \text{sen}(2\theta) - \frac{3MG}{2r_{CM}^3} \left\{ \text{sen}^2\theta_{CM} \text{sen}(2\theta) \cos^2(\phi - \phi_{CM}) + \text{sen}(2\theta_{CM}) \cos(2\theta) \cos(\phi - \phi_{CM}) - \cos^2(\theta_{CM}) \text{sen}(2\theta) \right\} - \frac{3}{10} a^2 G (m_{pl} + m_{sa}) \left\{ 1 - \left(\frac{c}{a}\right)^2 \right\} \frac{\text{sen}(2\theta)}{r^5} \equiv 0 \quad (4.24)$$

$$\ddot{\phi} + \frac{\dot{\theta}\dot{\phi} \text{sen}(2\theta)}{\text{sen}^2\theta} + 2\frac{\dot{r}\dot{\phi}}{r} + \frac{3MG}{r_{CM}^3} \left\{ \text{sen}\theta_{CM} \cos(\phi - \phi_{CM}) + \cos\theta_{CM} \left[\frac{\cos\theta}{\text{sen}\theta} \right] \right\} \text{sen}\theta_{CM} \text{sen}(\phi - \phi_{CM}) \equiv 0 \quad (4.25)$$

Para transformar estas ecuaciones en ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, consideramos los cambios de variables del Cap III, obteniendo las ecuaciones,

$$\dot{x}_1 \equiv x_7 \quad (4.26)$$

$$\dot{x}_2 \equiv x_8 \quad (4.27)$$

$$\dot{x}_3 \equiv x_9 \quad (4.28)$$

$$\dot{x}_4 \equiv x_{10} \quad (4.29)$$

$$\dot{x}_5 \equiv x_{11} \quad (4.30)$$

$$\dot{x}_6 \equiv x_{12} \quad (4.31)$$

$$\dot{x}_7 \equiv \left(x_8^2 + x_9^2 \text{sen}^2 x_2 \right) x_1 - \frac{4\pi^2}{x_1^2} - k_1 \frac{x_4^2}{x_1^4} \left\{ 3 \left[\text{sen} x_5 \text{sen} x_2 \cos(x_6 - x_3) + \cos x_5 \cos x_2 \right]^2 - 1 \right\} \quad (4.32)$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_8 \equiv & -2 \frac{x_7 x_8}{x_1} + \frac{1}{2} x_9^2 \text{sen}(2x_2) \\ & + k_1 \frac{x_4^2}{x_1^5} \left\{ \text{sen}^2 x_5 \text{sen}(2x_2) \cos^2(x_6 - x_3) + \text{sen} 2x_5 \cos(2x_2) \cos(x_6 - x_3) \right. \\ & \left. - \cos^2 x_5 \text{sen}(2x_2) \right\}\end{aligned}\quad (4.33)$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_9 \equiv & -\frac{x_8 \text{sen}(2x_2)}{\text{sen}^2 x_2} x_9 - 2 \frac{x_7 x_9}{x_1} \\ & + 2k_1 \frac{x_4^2}{x_1^5} \left\{ \text{sen} x_5 \cos(x_6 - x_3) + \cos x_5 \left[\frac{\cos x_2}{\text{sen} x_2} \right] \right\} \text{sen} x_5 \text{sen}(x_6 - x_3)\end{aligned}\quad (4.34)$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_{10} \equiv & x_4 \left(x_{11}^2 + x_{12}^2 \text{sen}^2 x_5 \right) - \frac{k_2}{x_4^2} \\ & + 4\pi^2 \frac{x_4}{x_1^3} \left\{ 3 \left[\text{sen} x_5 \text{sen} x_2 \cos(x_6 - x_3) + \cos x_5 \cos x_2 \right]^2 - 1 \right\} \\ & + k_4 \frac{\{3 \cos^2 x_5 - 1\}}{x_4^4}\end{aligned}\quad (4.35)$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_{11} \equiv & -2 \frac{x_{10} x_{11}}{x_4} + \frac{1}{2} x_{12}^2 \text{sen}(2x_5) \\ & + \frac{6\pi^2}{x_1^3} \left\{ \text{sen}^2 x_2 \text{sen}(2x_5) \cos^2(x_6 - x_3) + \text{sen}(2x_2) \cos(2x_5) \cos(x_6 - x_3) \right. \\ & \left. - \cos^2(x_2) \text{sen}(2x_5) \right\} + k_4 \frac{\text{sen}(2x_5)}{x_4^5}\end{aligned}\quad (4.36)$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_{12} \equiv & -\frac{x_{11} x_{12} \text{sen}(2x_5)}{\text{sen}^2 x_5} - 2 \frac{x_{10} x_{12}}{x_4} \\ & - \frac{12\pi^2}{x_1^3} \left\{ \text{sen} x_2 \cos(x_6 - x_3) + \cos x_2 \left[\frac{\cos x_5}{\text{sen} x_5} \right] \right\} \text{sen} x_2 \text{sen}(x_6 - x_3)\end{aligned}\quad (4.37)$$

donde,

$$k_1 \equiv \frac{6\pi^2 m_{pl} m_{sa}}{(m_{pl} + m_{sa})^2} \quad y \quad k_2 \equiv \frac{4\pi^2 (m_{pl} + m_{sa})}{M} \quad (4.38)$$

$$k_4 \equiv \frac{6\pi^2 (m_{pl} + m_{sa})(a^2 - c^2)}{5MR^2} \quad (4.39)$$

Para el caso de nuestro interés la estrella será el Sol, el planeta la Tierra y el satélite la Luna, luego usando las masas para estos cuerpos y los parámetros geométricos para la Tierra, obtenemos,

$$k_1 \equiv 0,7110 \quad y \quad k_2 \equiv 0,11999 \times 10^{-3} \quad (4.40)$$

$$k_4 \equiv 4,259 \times 10^{-16} \quad (4.41)$$

Las condiciones iniciales, análogas a las del Cap III, son las siguientes,

$$x_1(0) \equiv 1,00003 \quad (4.42)$$

$$x_2(0) \equiv \frac{\pi}{2} \quad (4.43)$$

$$x_3(0) \equiv 0 \quad (4.44)$$

$$x_4(0) \equiv 0,00256 \quad (4.45)$$

$$x_5(0) \equiv \frac{\pi}{2} \quad (4.46)$$

$$x_6(0) \equiv 0 \quad (4.47)$$

$$x_7(0) \equiv 0 \quad (4.48)$$

$$x_8(0) \equiv -0,00023 \quad (4.49)$$

$$x_9(0) \equiv 6,28562 \quad (4.50)$$

$$x_{10}(0) \equiv 0 \quad (4.51)$$

$$x_{11}(0) \equiv -7,32312 \quad (4.52)$$

$$x_{12}(0) \equiv 83,7037 \quad (4.53)$$

Luego de resolver numéricamente las ecuaciones diferenciales ordinarias de movimiento de la Luna, mostraremos y analizaremos las gráficas más importantes del movimiento orbital lunar, como por ejemplo, la distancia relativa Luna-Tierra respecto del tiempo, la proyección de la órbita lunar respecto del tiempo, energía mecánica del sistema Sol-Tierra-Luna y la gráfica correspondiente al movimiento de la línea de nodos. De igual forma, analizaremos la incidencia de modificar los valores de la velocidad relativa lunar, v' , y del plano orbital lunar, Λ , en el movimiento lunar. También analizaremos como la geometría terrestre (en base al potencial de Mac-Cullagh) repercute en el movimiento lunar.

4.6) Resultados numéricos, observaciones y discusión

i) Considerando dimensiones reales de la Tierra

Mostraremos los gráficos de $r(t)$, $\theta(t)$, proyección de la órbita lunar en el plano de la eclíptica, $\phi(t)$ y $E_m(t)$, para intervalos de tiempo que van desde un mes lunar sidereal, hasta 1, 10, 20 o 100 años, dependiendo del caso, para analizar simultáneamente la influencia del Sol y del achatamiento de la Tierra en el movimiento orbital lunar. Asumiremos las condiciones actuales del sistema Sol-Tierra-Luna. Para la geometría de la Tierra, consideramos las dimensiones de los parámetros elípticos de las E_c (4.13), (4.14),

$$a \equiv b \equiv 6376,46 \text{ km}$$

$$c \equiv 6355,55 \text{ km}$$

- 1) De las gráficas de la distancia relativa lunar, Pág 100, éstas varían alrededor del 5%, mostrando que las funciones son oscilatorias, no diferenciándose significativamente de los resultados del Cap III.
- 2) En las gráficas θ -t, Pág 101, se aprecia oscilación del plano orbital lunar entre $4,74^\circ$ y $5,03^\circ$, de forma periódica. Esta variación es comparable con la de $0,33^\circ$ observada [4,5].
- 3) Las curvas de proyección de la órbita lunar, Pág 102, son equivalentes a las obtenidas en el Cap III, es decir, muestran una órbita aproximadamente circular contenida en diversos planos.
- 4) De las gráficas de ϕ -t, Pág 103, se observa un periodo $T=19,3$ años para las condiciones del caso a) Cap III. En la Pág 105 se muestra como el periodo depende en forma inversa de la velocidad v' , siendo los resultados comparables a los del capítulo III. En la Pág 106 los periodos tampoco muestran variación respecto de ε , comparados con los del Cap III. Resultado interesante para la $v'=0,2173$ UA/año, $T=19,0$ años, puesto que es solo 2,0% mayor del valor observado de 18,6 años.

Esta concordancia en los resultados (retrasos de a lo más 0,5%), para cuando se varia v' , tal vez esté relacionada a la pequeña diferencia $a-c \sim 21$ km, que no hace significativa la forma esferoidal de la Tierra (radio medio de $\sim 6366,01$ km). Esta escasa influencia de la forma es ratificada cuando se ensayan diversos ε , donde no se observa variación de los periodos excepto en casos donde cambia en 0,05%.

- 5) De las gráficas relacionadas a la energía mecánica, pagina 104, el valor medio referencial de $E_m = -1628,467$ con una dispersión de 0,6 %, garantiza la consistencia de los cálculos numéricos. Recordemos que las energías mecánicas adimensionales referenciales calculadas en los Capítulo I y III fueron $E_m = -1622,6935$ y $-1628,0$, respectivamente.

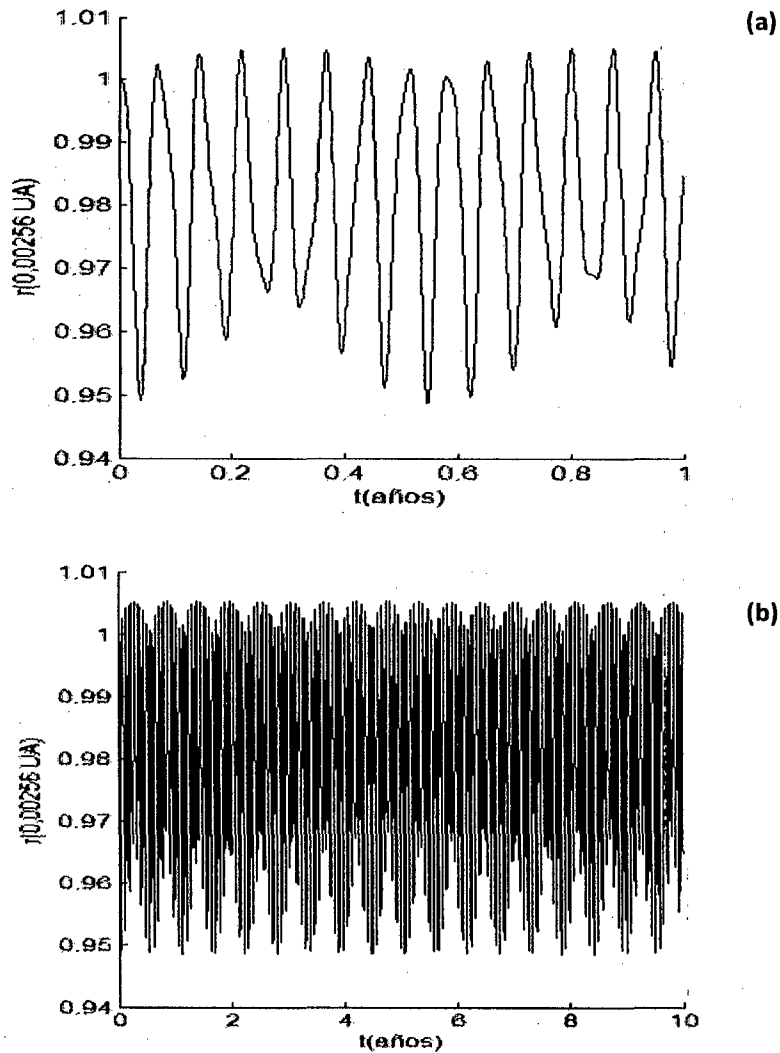


Fig 4.6 Distancia relativa Tierra- Luna, r , para (a) 1 año y (b) 10 años.
Ci: $v' = 0,2151$ UA/año, $\varepsilon = 5^\circ$.

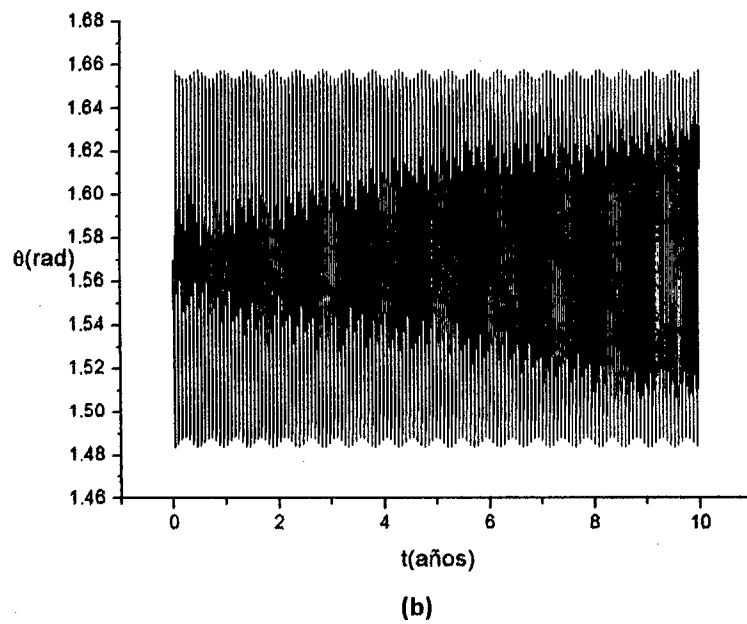
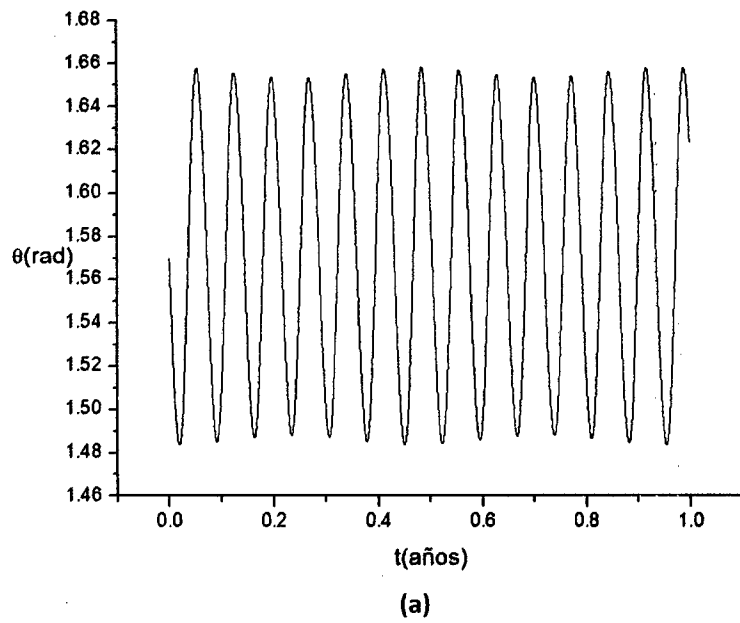


Fig 4.7 Gráficas de θ - t , para (a) 1 año y (b) 10 años. Ci: $v = 0,2151$ UA/año, $\varepsilon = 5^\circ$.

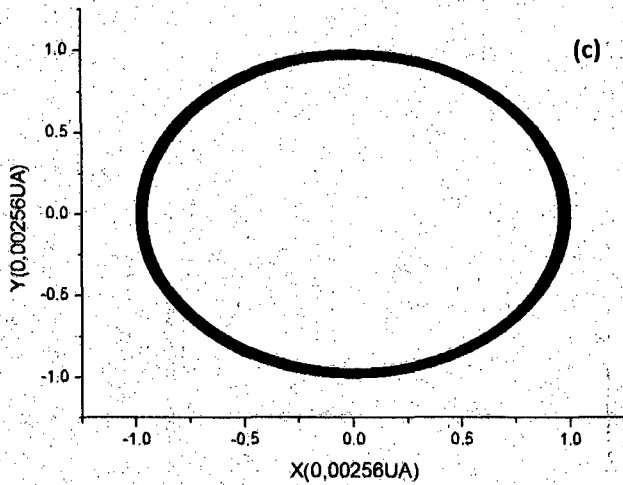
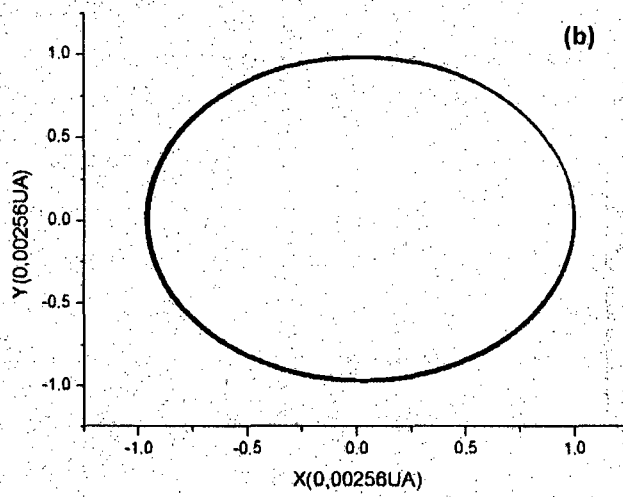
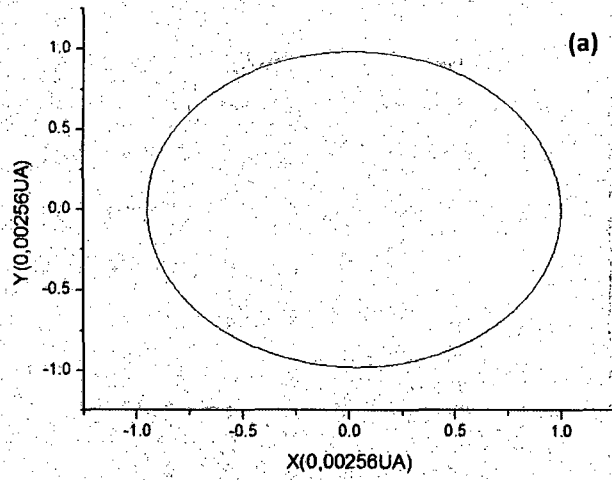
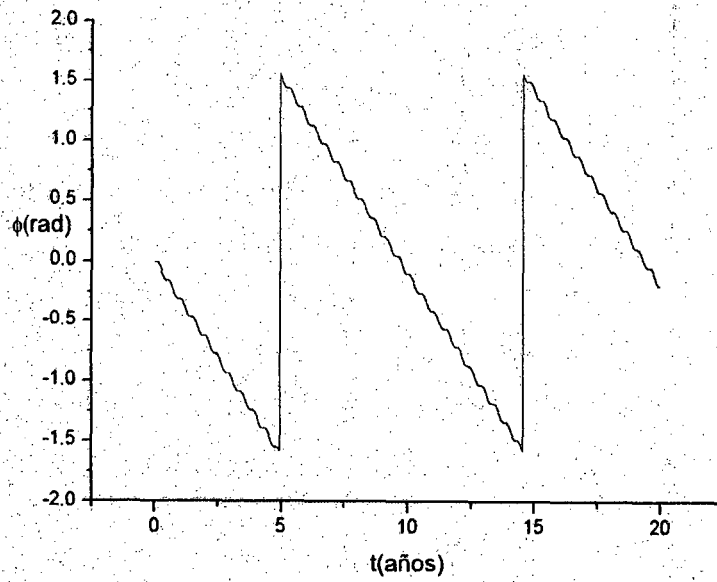
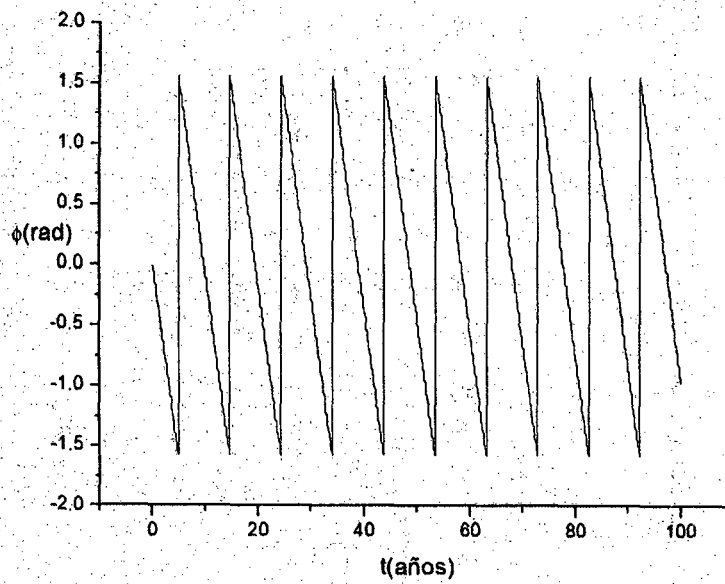


Fig 4.8 Proyección de la órbita lunar en el plano xy para (a) 1 mes, (b) 1 año y (c) 20 años. Ci: $v' = 0,2151$ UA/año, $\epsilon = 5^\circ$.



(a)



(b)

Fig 4.9 Precesión del plano orbital lunar instantáneo: $T=19,3$ años, para (a) 20 años y (b) 100 años. Ci: $v' = 0,2151$ UA/año, $\epsilon = 5^\circ$.

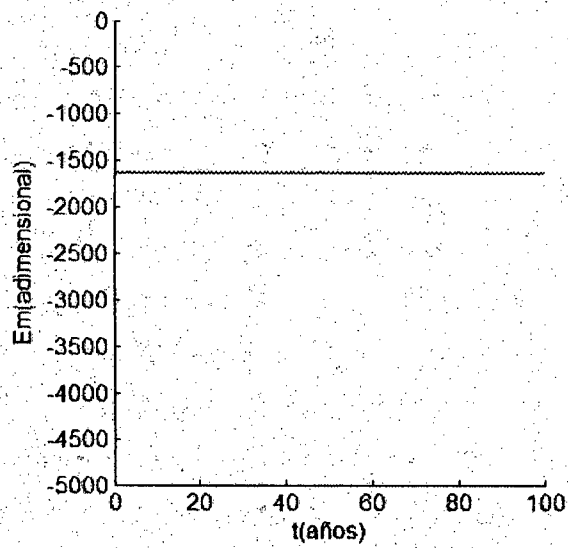
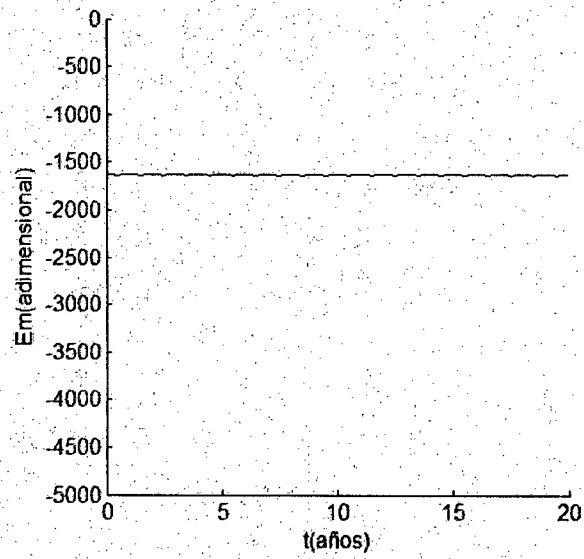


Fig 4.10 Energía mecánica adimensional, E_m , en función del tiempo, para $v=0,2151$ UA/año y $\varepsilon=5^\circ$. Se observa valor medio de $-1628,467$.

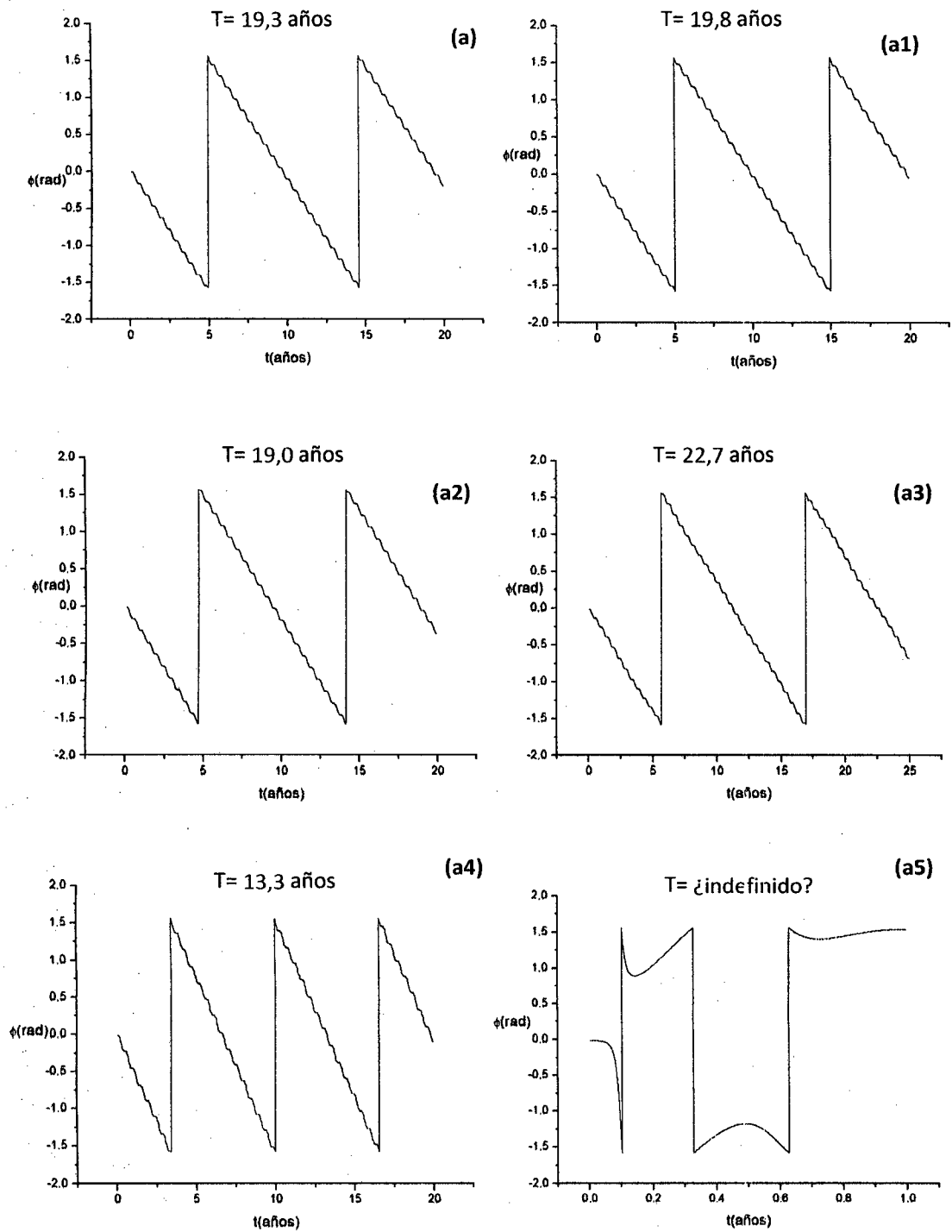


Fig 4.11 Precesión del plano orbital lunar instantáneo para las velocidades v' de la Tabla 3.1.

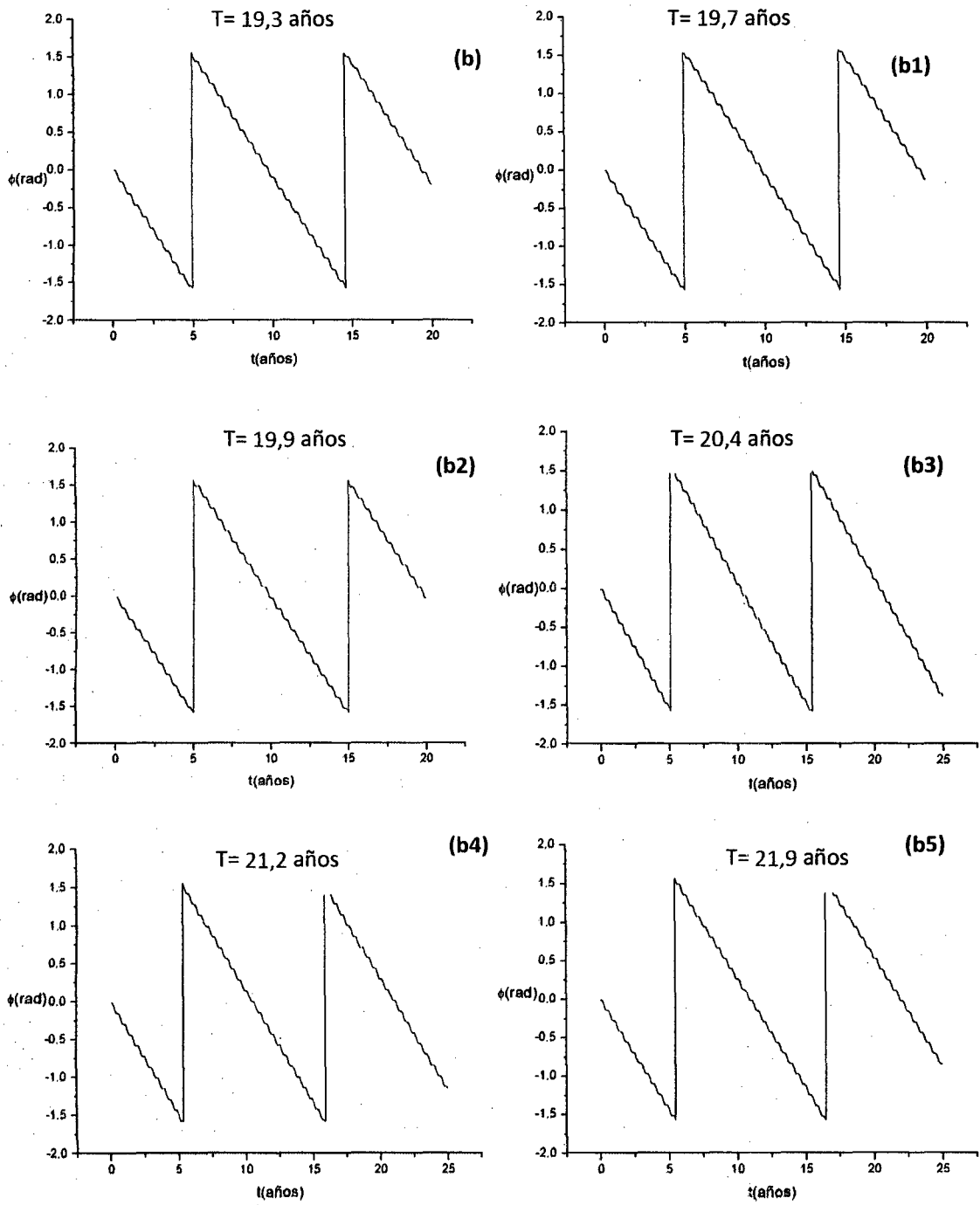


Fig 4.12 Precesión del plano orbital lunar instantáneo para los ángulos ϵ de la Tabla 3.2.

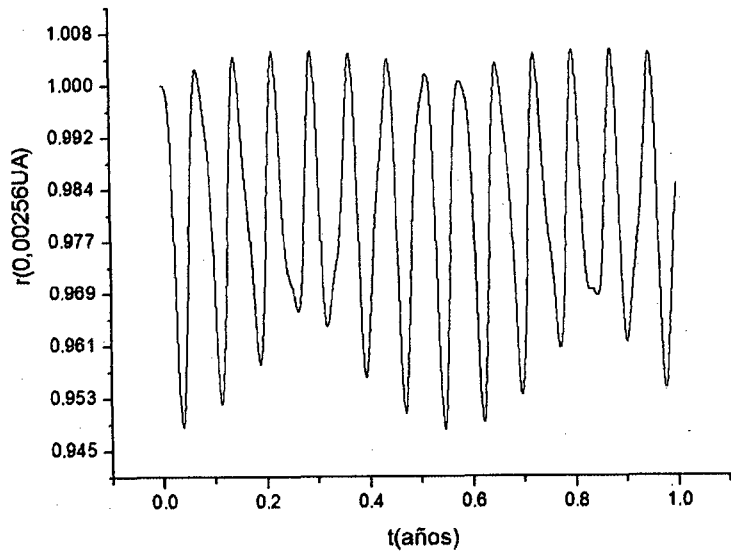
ii) Considerando otras dimensiones de la Tierra

1) En relación al inciso anterior, mostraremos los gráficos relacionados al caso de la Tierra bien achatada (esferoide oblato), es decir, asumiremos las siguientes condiciones para los semiejes del elipsoide,

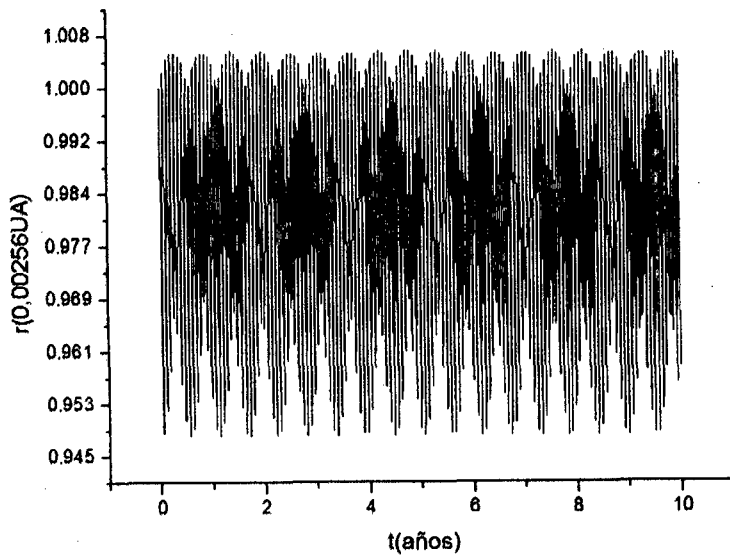
$$a \equiv b \equiv 6376,46 \text{ km}$$

$$c \equiv 3000,00 \text{ km}$$

Las graficas correspondientes se muestran en las Pág 108-112, donde no se aprecia variación significativa con lo obtenido en el primer inciso de esta sección, excepto en lo referente al periodo de la Línea de Nodos, el cual adelanta en todos los casos. Para las condiciones actuales se produce un adelanto del periodo de 0,2 años; el adelanto del periodo, cuando variamos la velocidad (recordar que v' se relaciona inversamente con T), se produce entre 0,1 años hasta 1,0 años, siempre comparando con los resultados del primer inciso, siendo este último caso correspondiente a $v' = 0,1936 \text{ UA/año}$. Cuando variamos el plano lunar orbital, ε , en todos los casos el periodo disminuye (adelanta, haciendo la precesión más rápida) entre 0,1 y 0,4 años, siempre respecto del inciso i), lo cual mostraría la influencia de la forma hipotética de la Tierra sobre T , el periodo de precesión de la línea de nodos.

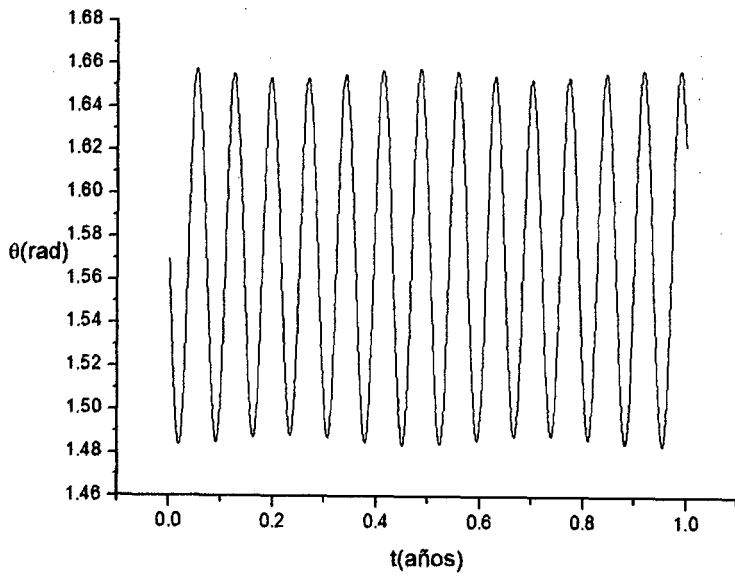


(a)

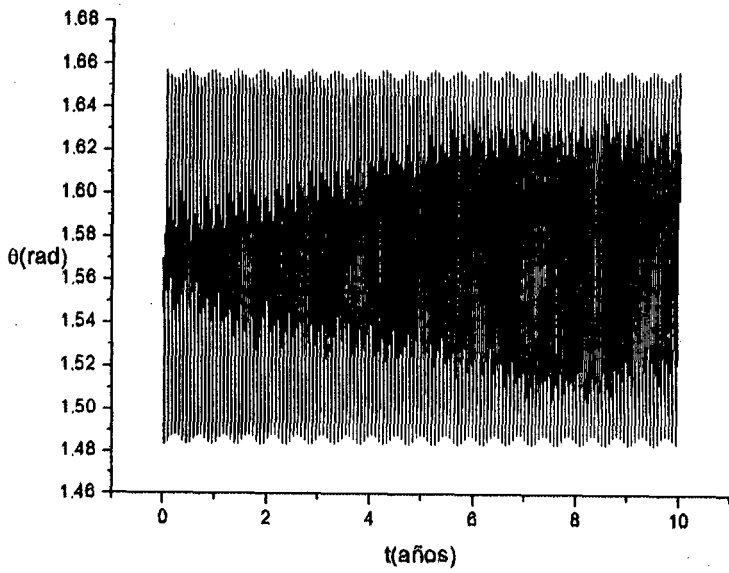


(b)

Fig 4.13 Distancia relativa Tierra- Luna, r , para (a) 1 año y (b) 10 años.
 Ci: $v' = 0,2151$ UA/año, $\epsilon = 5^\circ$.



(a)



(b)

Fig 4.14 Gráficas de θ - t , para (a) 1 año y (b) 10 años. Ci: $v' = 0,2151$ UA/año, $\epsilon = 5^\circ$.

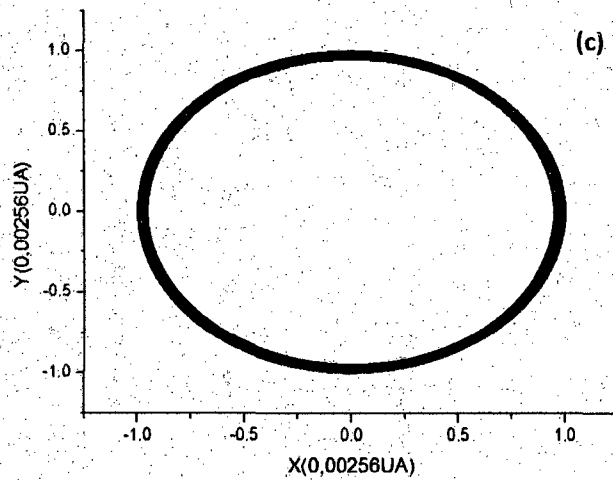
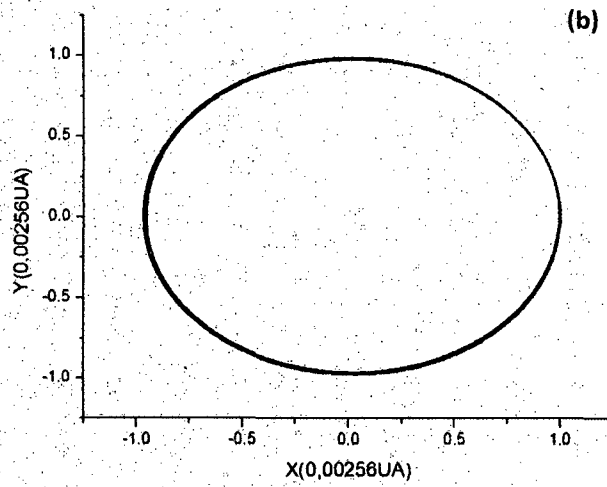
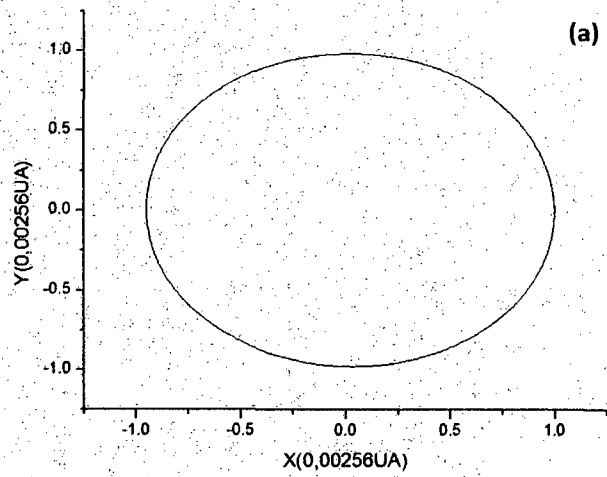


Fig 4.15 Proyección de la órbita lunar en el plano xy para (a) 1 mes, (b) 1 año y (c) 20 años. Ci: $v' = 0,2151$ UA/año, $\epsilon = 5^\circ$.

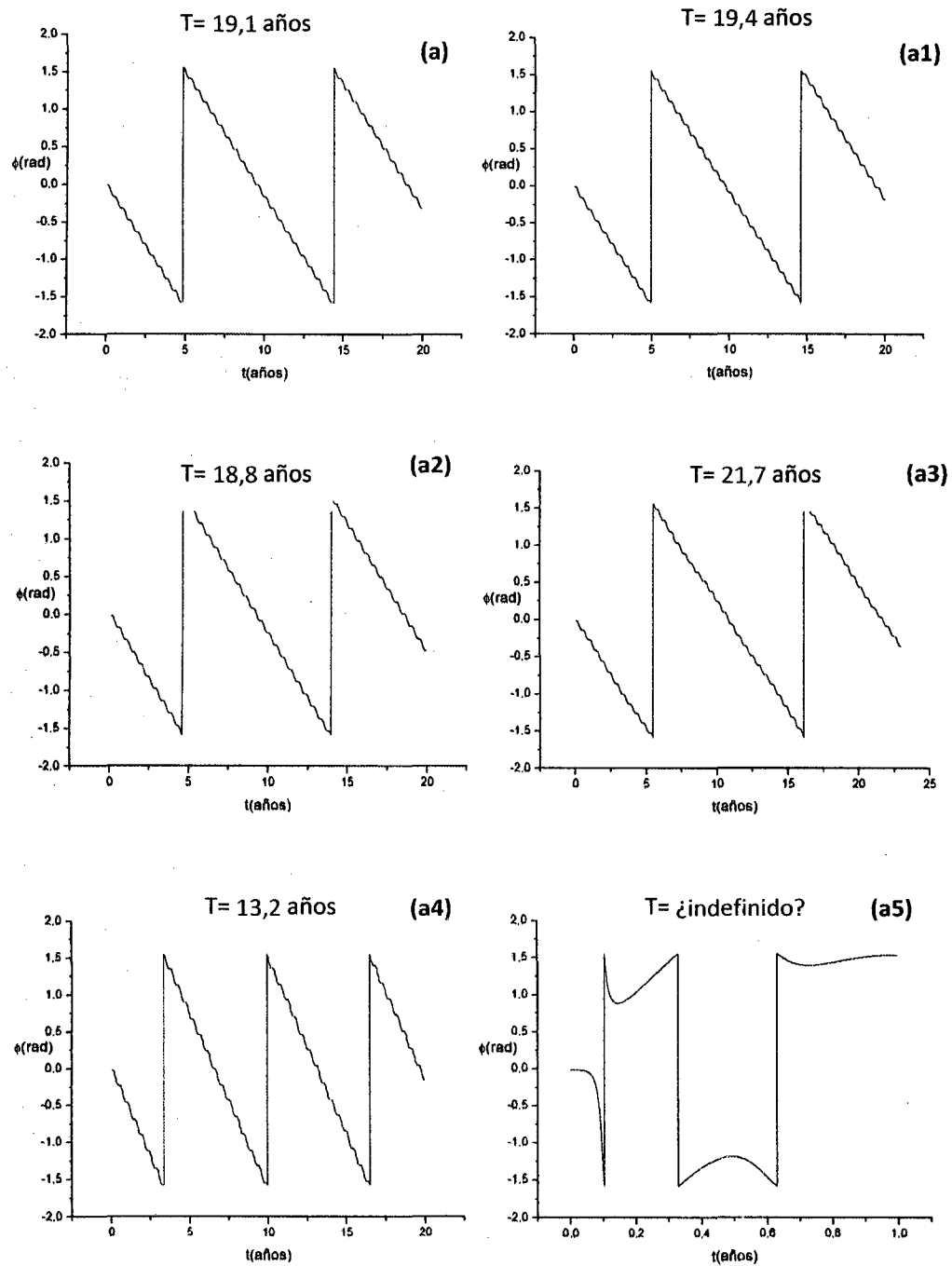


Fig 4.16 Precesión del plano orbital lunar instantáneo para las velocidades v' de la Tabla 3.1.

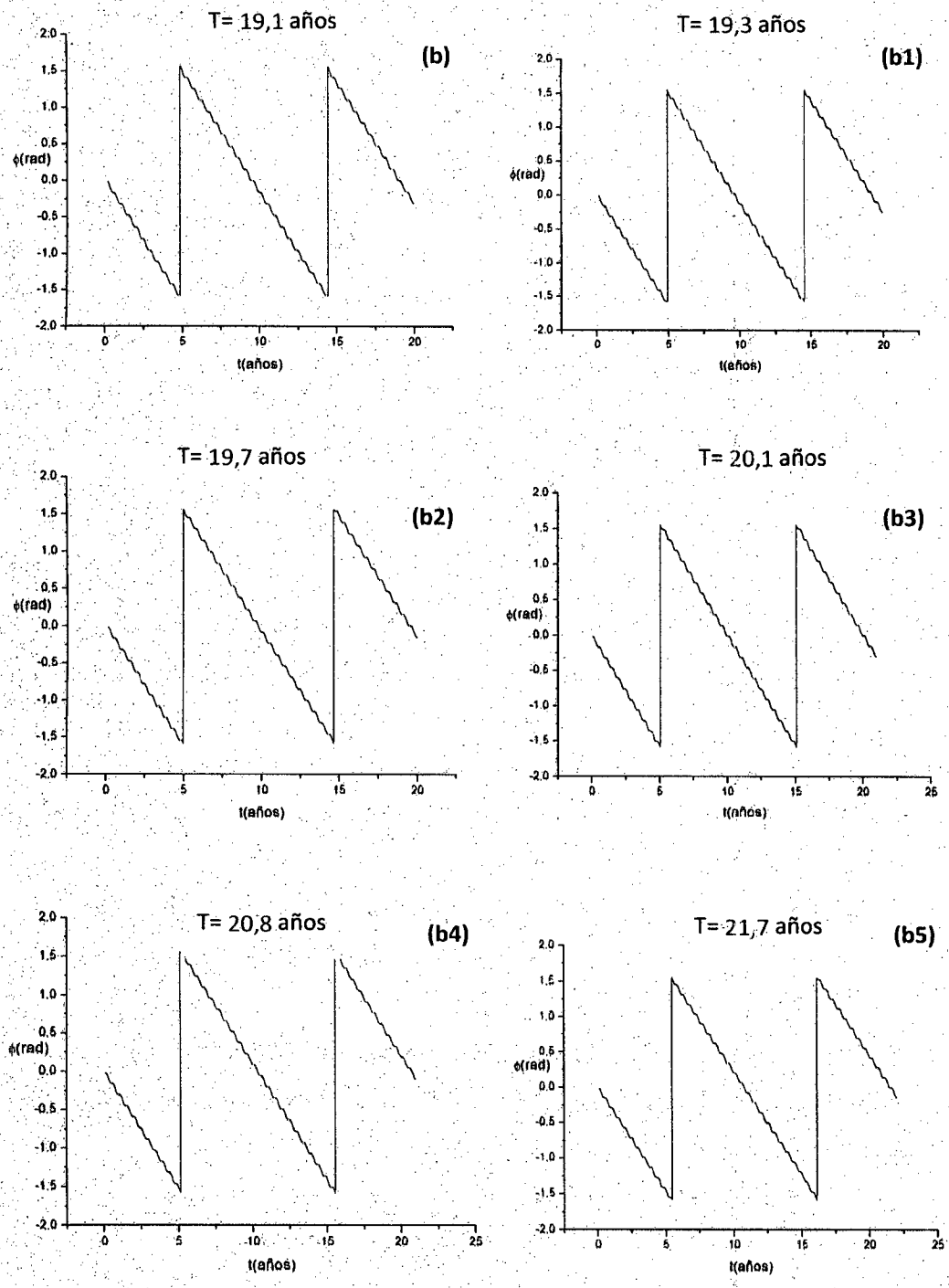


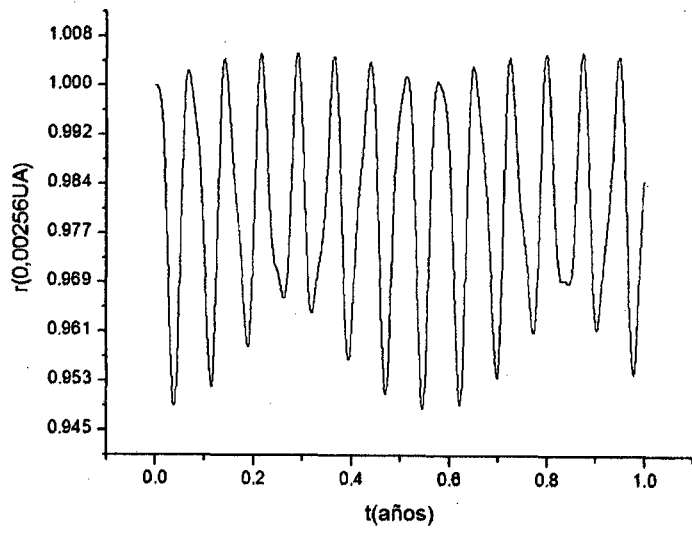
Fig 4.17 Precesión del plano orbital lunar instantáneo para los ángulos ϵ de la Tabla 3.2.

2) De igual forma, mostraremos también los gráficos relacionados al caso de la Tierra bien alargada (esferoide prolato), es decir, asumiremos las siguientes condiciones para los semiejes del elipsoide,

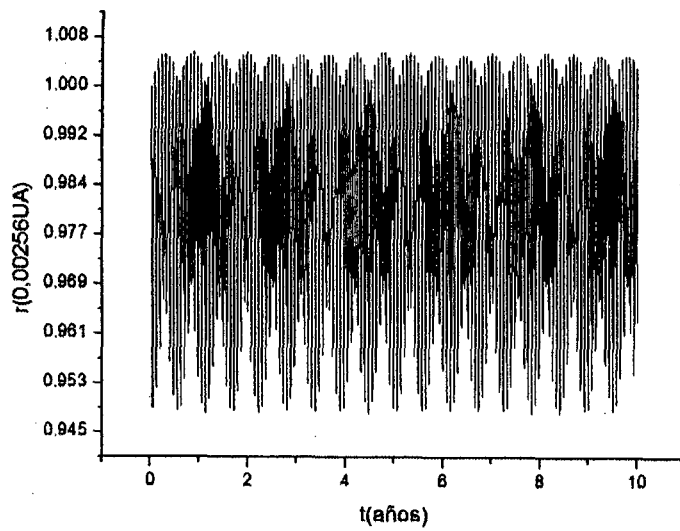
$$a \equiv b \equiv 3000,00 \text{ km}$$

$$c \equiv 6376,46 \text{ km}$$

Las graficas correspondientes se muestran en las Pág 114-118, donde, al igual que en los casos anteriores, no hay cambios significativos en los otros parámetros de la órbita lunar, excepto en lo referente al periodo de la Línea de Nodos, el cual retrasa. Para las condiciones actuales se obtiene un retraso de 0,5 años. En cuanto a los cambios de velocidad v' , donde se sigue observando la dependencia inversa con el periodo T , se produce retraso en casi todos los casos que van desde 0,2 años hasta 1,0 años; este último retraso siempre para la velocidad $v'=0,1936$ UA/año. Para los cambios de ε , se observan retrasos desde 0,2 años hasta 0,5 años. En ambos casos los resultados se compararon con los del inciso i). También para esta variante de las dimensiones de la Tierra se observa influencia sobre el periodo de precesión de la línea de nodos.

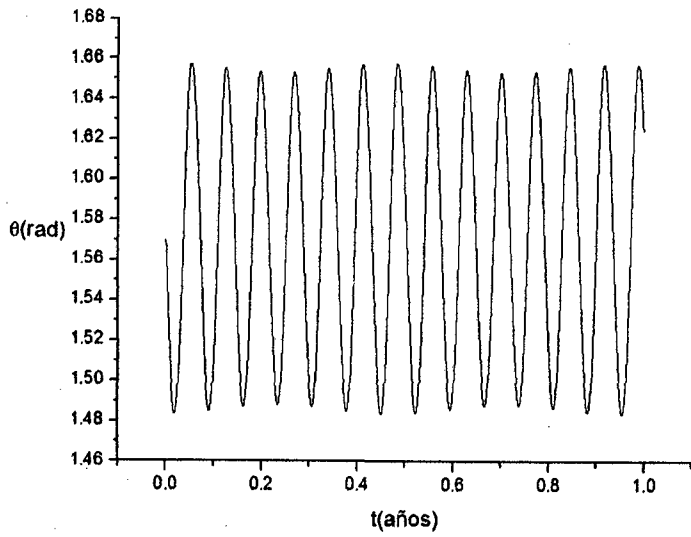


(a)

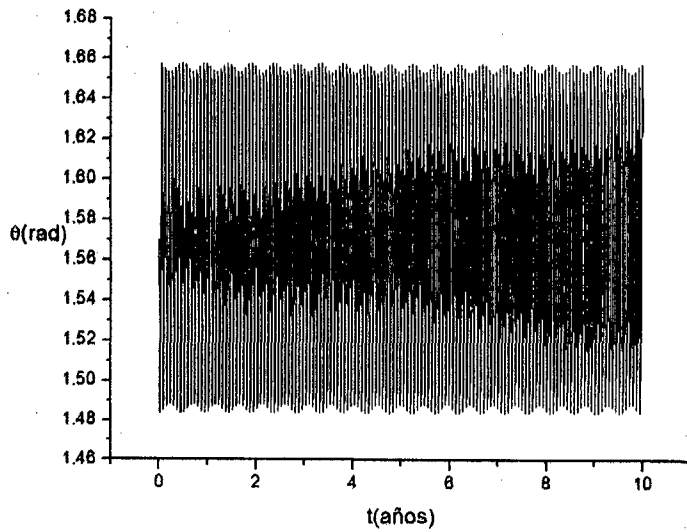


(b)

Fig 4.18. Distancia relativa Tierra- Luna, r , para (a) 1 año y (b) 10 años.
 Ci: $v' = 0,2151$ UA/año, $\epsilon = 5^\circ$.



(a)



(b)

Fig 4.19 Gráficas de θ - t , para (a) 1 año y (b) 10 años. Ci: $v' = 0,2151$ UA/año, $\varepsilon = 5^\circ$.

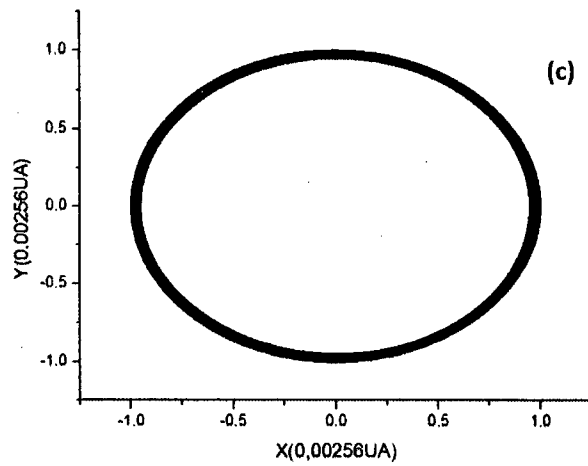
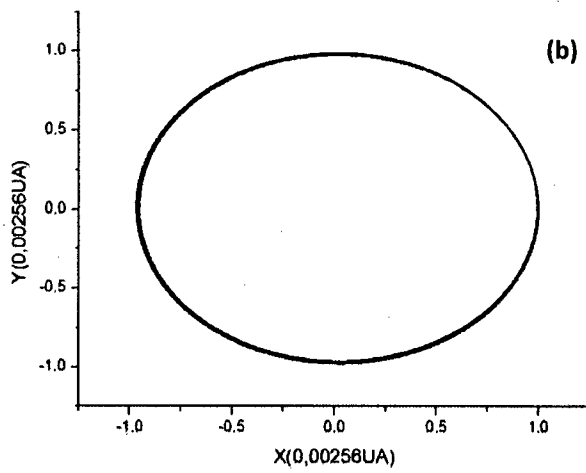
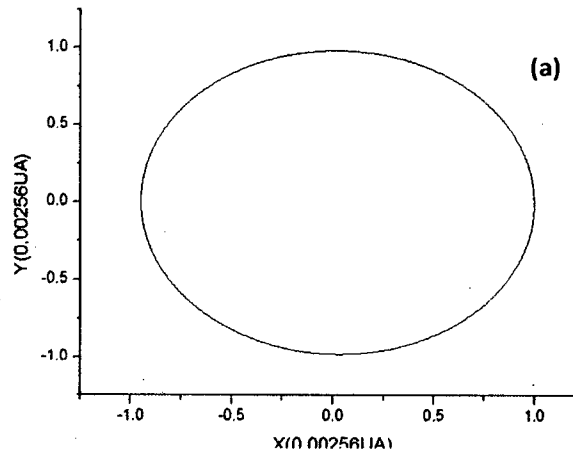


Fig 4.20 Proyección de la órbita lunar en el plano xy para (a) 1 mes, (b) 1 año y (c) 20 años. Ci: $v' = 0,2151$ UA/año, $\varepsilon = 5^\circ$.

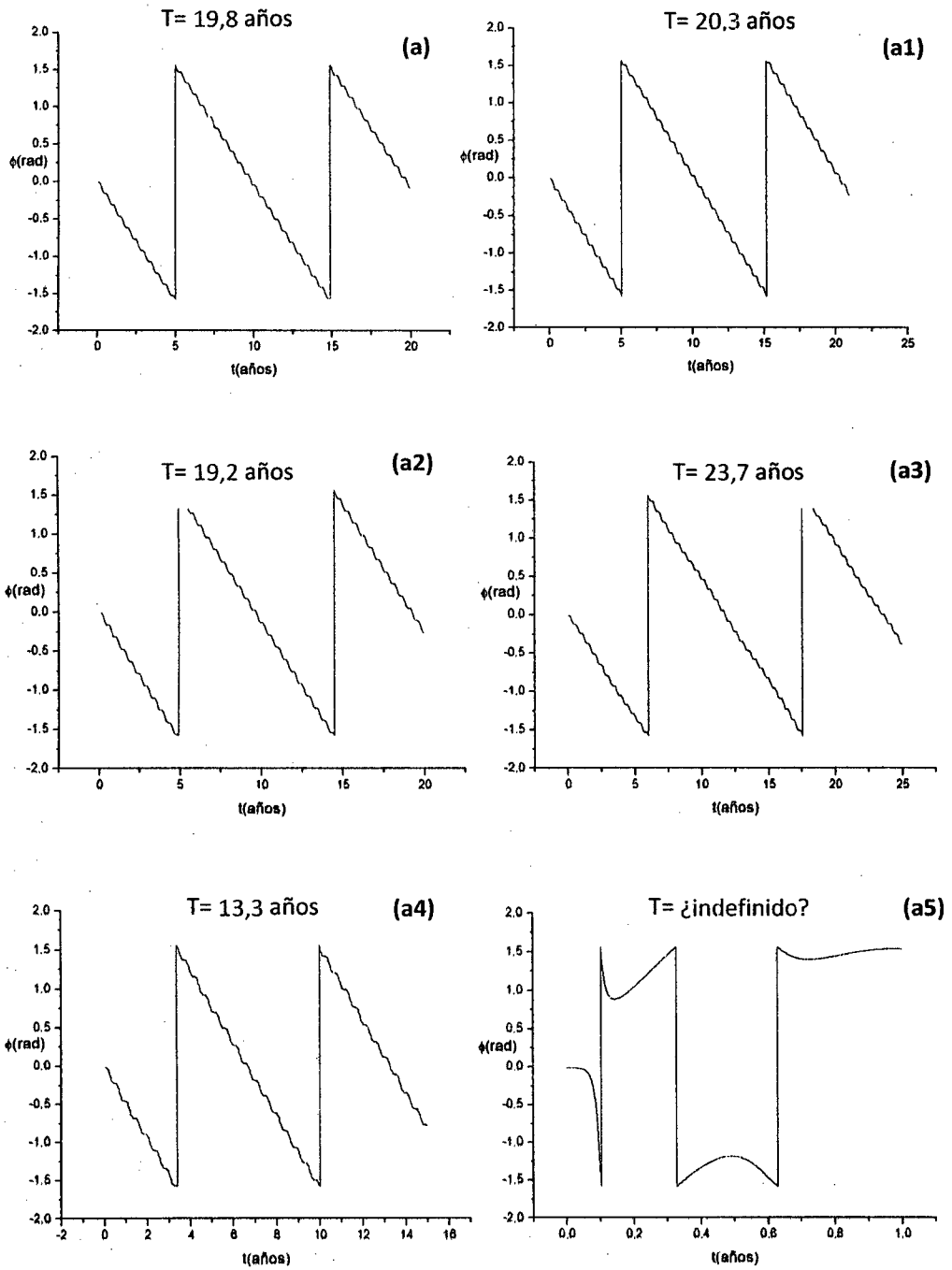


Fig 4.21 Precesión del plano orbital lunar instantáneo para las velocidades v' de la Tabla 3.1.

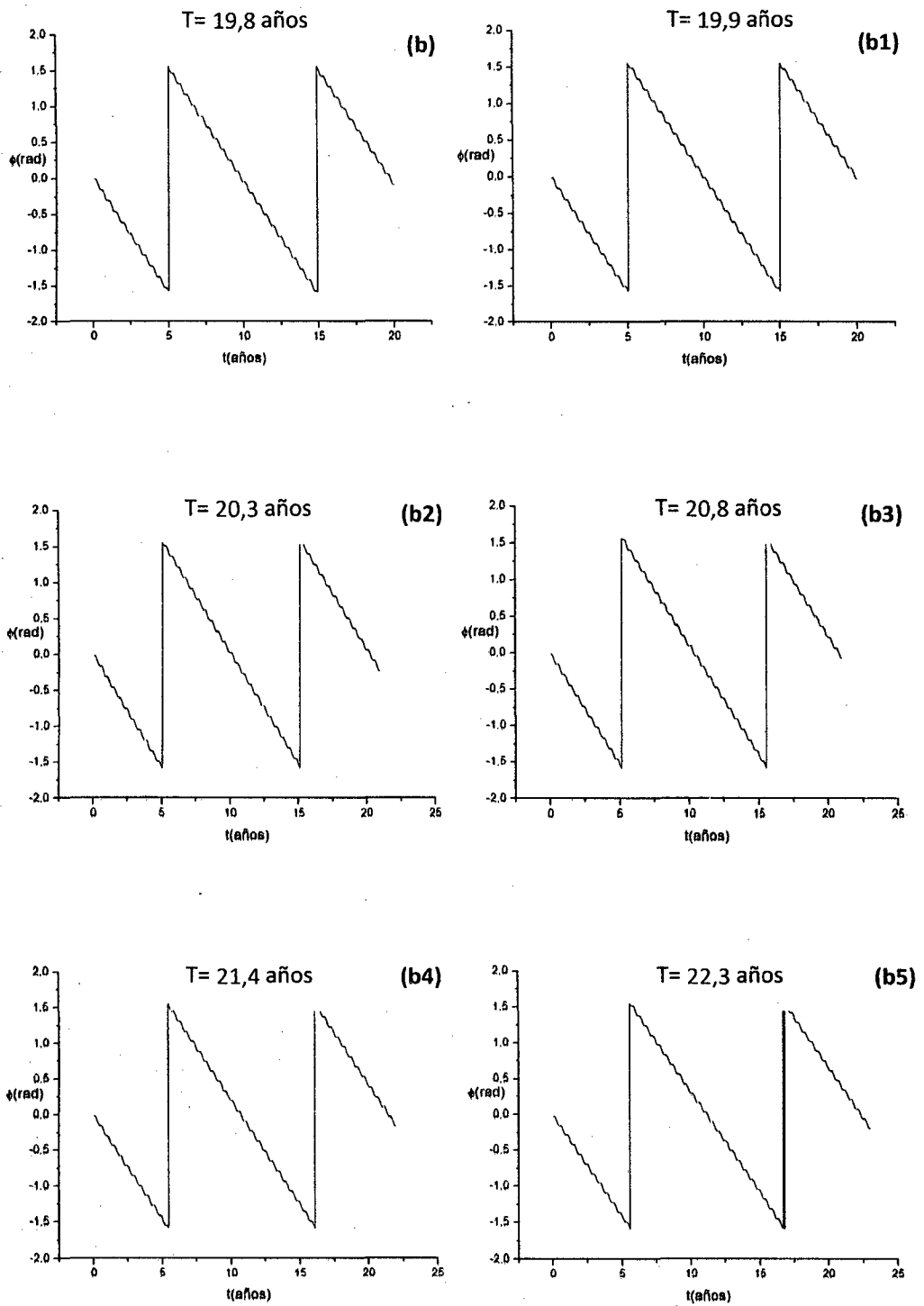


Fig 4.22 Precesión del plano orbital lunar instantáneo para los ángulos ϵ de la Tabla 3.2.

4.7) Conclusiones

- 1) El achatamiento actual de la Tierra, representado por $a=b>c$, no ejerce efecto significativo en la órbita lunar según los parámetros orbitales analizados (comparar los gráficos de las Pág 71-100, 72-101, 73-102 y 74-103).
- 2) Al variar el parámetro c (o a) hasta aproximadamente 50% de su valor actual, se obtiene para las condiciones actuales un pequeño efecto sobre la precesión de la Línea de Nodos, adelanto de 0,2 años (o retraso de 0,5 años). En casi todos los casos el valor del periodo disminuye (o aumenta), obteniéndose para la velocidad $v'=0,2173$ UA/año un periodo de $T=18,8$ años (ii)1).
- 3) Podemos considerar que el término cuadrupolar (Mac-Cullagh) actual es realmente una perturbación para el término δ pues su valor es pequeño ($\sim 10^{-3}$).
- 4) La constancia del valor referencial de E_m así como su dispersión nos permite concluir que el programa y el método numérico utilizados dan resultados consistentes del movimiento del satélite con los valores observados.

Referencias

- [1] Henrard, J. The Earth-Figure Perturbations in the Lunar Theory, *Celestial Mechanics and Dynamics Astronomy*, diciembre-1981, vol 25, N°4.
- [2] Goldstein, Herbert. *Mecánica Clásica*, segunda edición, Editorial Reverte, Madrid-España, 1987.
- [3] Chirinos Villaruel, Fernando. Tesis de Licenciatura, *Precesión de los Equinoccios de la Tierra*, UNI, Facultad de Ciencias, 2008, capítulo II.
- [4] Peterson, Ivars. *El reloj d Newton, Caos en el sistema solar*, edición castellana, Alianza Editorial, S.A., Madrid-España, 1995; capítulos 6 y 7.
- [5] *Lunar Constants and Models Documents*. Jet Propultion Laboratory, JPL D-32296. Lsa0801112300.

CAPITULO V

ESTABILIDAD DEL MOVIMIENTO LUNAR

5.1) Introducción.

5.2) Estabilidad de las soluciones del sistema de ecuaciones diferenciales no-lineales del sistema STL. Exponentes de Lyapunov.

5.3) Obtención de los exponentes de Lyapunov.

5.4) Análisis de la estabilidad del sistema STL.

5.5) Análisis de la estabilidad del movimiento Lunar.

5.6) Conclusiones.

5.1) Introducción

En este capítulo se analiza la estabilidad del movimiento Lunar usando la teoría de los sistemas dinámicos [1,2], aplicada al espacio de fases asociado al sistema de ecuaciones diferenciales no-lineales del sistema STL. En esta teoría se supone que los diversos estados del sistema dinámico analizado son descritos por las diversas trayectorias (orbitas) en dicho espacio de fases. Si asumimos que las soluciones del sistema de ecuaciones diferenciales son periódicas, para determinadas condiciones iniciales (según las evidencias numéricas de los capítulos precedentes), las orbitas en el espacio de fases deben ser cerradas. En estas circunstancias, un parámetro usado para describir la estabilidad de las soluciones (de las orbitas, en el espacio de fases) es el exponente de Lyapunov [3,4,5]. Este exponente proporciona una estimación cuantitativa de cuanto varía la órbita al cambiar las condiciones iniciales. Es posible determinar tantos exponentes de Lyapunov como ecuaciones diferenciales definen al sistema dinámico, por lo tanto, en primer lugar, se determinarían los exponentes de las 12 ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden obtenidas en el capítulo I, para luego analizar la estabilidad del movimiento Lunar en términos de los exponentes relacionados directamente a su movimiento.

5.2) Estabilidad de las soluciones del sistema de ecuaciones diferenciales no-lineales del sistema STL. Exponentes de Lyapunov.

Sea un sistema dinámico descrito por el conjunto de ecuaciones diferenciales siguientes,

$$\dot{x}_i \equiv f_i(x_i) ; i \equiv 1, \dots, n \quad (5.1)$$

De todas las soluciones que podrían tener estos sistemas, nos interesan aquellas que sean periódicas (o cuasiperiódicas). Una solución periódica podría ser representada con la Ec (5.2),

$$x_i(t) \equiv x_i(t+T), T \equiv cte > 0; i \equiv 1, \dots, n \quad (5.2)$$

El espacio de fases asociado al conjunto de ecuaciones diferenciales que describe al sistema dinámico, está determinado por el conjunto de coordenadas (variables dependientes, de estado del sistema) siguiente,

$$x_i ; i \equiv 1, \dots, n \quad (5.3)$$

Un sistema dinámico no-lineal bien conocido es el péndulo simple. El sistema de ecuaciones diferenciales que lo describe es,

$$\begin{aligned}\dot{x} &\equiv y, \\ \dot{y} &\equiv -\text{sen } x\end{aligned}\tag{5.4}$$

Las soluciones en el espacio de fases están dadas por la función (5.5), donde la cte depende de las condiciones iniciales,

$$\frac{1}{2}y^2 + (1 - \cos x) = \text{cte}\tag{5.5}$$

Las gráficas en el espacio de fases de la ecuación anterior se muestran en la Fig (5.1) [2]. Observar que las soluciones periódicas son curvas cerradas en torno de las posiciones $x \equiv 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$. La orientación en estas curvas, que está relacionada a la evolución del sistema, es dada por sus vectores tangentes $(y, -\text{sen}x)$ (campo vectorial tangente).

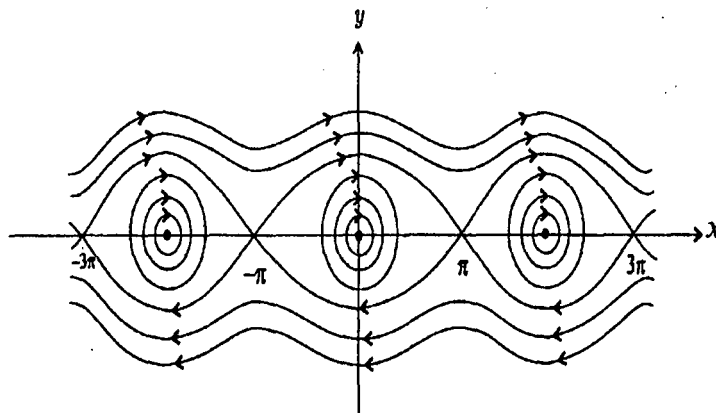


Fig 5.1 Trayectorias del espacio de fases del péndulo simple.

Uno de los principales objetivos de la teoría de sistemas dinámicos, es el estudio del comportamiento de los estados estables del sistema, es decir, describir tanto cuantitativa como cualitativamente la evolución asintótica del sistema a medida que el tiempo tiende al infinito. Un concepto importante para este propósito es el de Conjunto Límite. Un conjunto límite es el conjunto al cual tienden asintóticamente cierto conjunto de soluciones, asociadas a determinadas condiciones iniciales. Un sistema dinámico podría tener uno o varios conjuntos límites, cada cual vinculado a determinadas condiciones iniciales. Por lo tanto, las condiciones iniciales determinarían el tipo de conjunto límite al cual evolucione asintóticamente el sistema dinámico. Existen cuatro tipos fundamentales de conjuntos límites, correspondientes a las diversas

soluciones del sistema de ecuaciones diferenciales [2,6]. Sea f^t el conjunto de trayectorias en el espacio de fases (flujo) donde x representa a las soluciones del sistema de ecuaciones. Definimos,

- 1) **Puntos fijos.** Puntos del espacio de fases tales que $f^t(x) \equiv x$ para todo tiempo t . En el espacio de fases del péndulo simple, los puntos de la forma $x \equiv 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$, serían un ejemplo típico. Corresponden a los estados de equilibrio.
- 2) **Movimientos periódicos.** Un movimiento periódico es una solución f^t tal que $f^t(x) \equiv f^{t+T}(x)$ para una constante $T > 0$ (llamada período) y para todo tiempo t . El conjunto límite correspondiente a una solución periódica es la curva cerrada $f^t(x)$ dibujada para un periodo, la cual es topológicamente equivalente a un círculo S^1 . Este tipo de trayectorias son representadas en el espacio de fases del péndulo simple por circunferencias en torno de los puntos fijos.
- 3) **Movimientos cuasiperiódicos.** Una solución cuasiperiódica de un sistema dinámico es una función f expresada en términos de frecuencias características, linealmente independientes, de periodo 2π [7]. El conjunto límite de una solución cuasiperiódica es la superficie de un toro, esto es, la solución cuasiperiódica tendera a estar contenida completamente en la superficie del toro [2]. Un sistema capaz de producir dichas soluciones podría ser un péndulo simple acoplado en condiciones adecuadas.
- 4) **Movimientos caóticos.** Las dinámicas caóticas son caracterizadas por tres propiedades: (a) Las trayectorias son aleatorias y bien diferentes a las vistas previamente; (b) Convergen hacia los llamados atractores extraños, de forma geométrica compleja [6]; (c) Dependen sensiblemente de las condiciones iniciales, esto es, orbitas caóticas divergen localmente unas de otras y cambios pequeños en las condiciones iniciales producen grandes cambios en la evolución del sistema. Un caso típico es el atractor de Lorenz, ver Fig 5.2.

El concepto de estabilidad de las soluciones de un sistema dinámico, en particular si este es no-lineal, está vinculado estrechamente a las condiciones iniciales del sistema estudiado. Esto es, obtenida una solución periódica, para ciertas condiciones iniciales, ¿qué ocurre con la solución cuando se varían ligeramente dichas condiciones iniciales? ¿las nuevas soluciones se mantendrán en las vecindades de la primera (solución estable), tenderán a ella (solución asintóticamente estable) o se alejarán completamente de ella (solución inestable)?, es decir, ¿cómo se comporta el conjunto de soluciones

vecinas a dicha solución periódica? (¿Conjunto límite?). El exponente de Lyapunov trata de dar respuesta a estas interrogantes, permitiendo clasificar a los sistemas en base a su evolución asintótica.

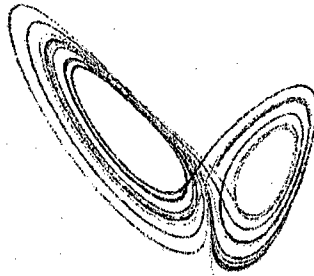


Fig 5.2 Atractor de Lorenz.

Supongamos dos trayectorias próximas en el espacio de fases, como se muestra en la Fig (5.2) [6,4], donde f^t describe las trayectorias en el espacio de fases. La primera trayectoria describe los estados del sistema en el tiempo a partir de la condición inicial x_0 , mientras que la segunda nos describe cómo evoluciona el sistema cuando las condiciones anteriores se perturban, es decir, cuando son $(x_0 + u_0)$, con u_0 pequeña. Una medida del alejamiento de la segunda trayectoria respecto de la primera, se puede establecer comparando las medidas del alejamiento de los estados del sistema en el tiempo t , para cada curva, descrito por u_t , con la medida del alejamiento inicial, u_0 . Es frecuente modelar este alejamiento en el tiempo de forma exponencial considerando comportamiento asintótico para tiempos al infinito [5,6].

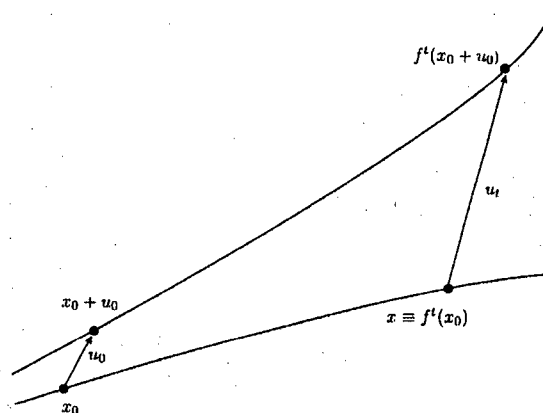


Fig 5.3 Trayectorias proximas en el espacio de fases.

El exponente de Lyapunov queda definido, por lo tanto, según la Ec (5.6),

$$\lambda(x_0, u_0) \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{t} \ln \left(\frac{\|u_t\|}{\|u_0\|} \right) \right\} \quad (5.6)$$

donde $\|u\|$ representa la magnitud del vector u y u_t es definido por la Ec (5.7),

$$u_t \equiv f'(x_0 + u_0) - f'(x_0) \quad (5.7)$$

Como lo indica la Ec (5.6), el exponente de Lyapunov depende de las condiciones iniciales x_0 así como de la perturbación u_0 , lo cual haría muy sensible su determinación al cálculo numérico, o a como se efectúe la perturbación de las condiciones iniciales, o a si se consideran valores promedio [6]. La existencia de los coeficientes de Lyapunov para determinados sistemas dinámicos y para muchas condiciones iniciales así como vectores u_0 , ha sido demostrada hace varias décadas [6].

Por lo tanto, de la definición del coeficiente de Lyapunov, Ec (5.6), si $\lambda > 0$, la trayectoria se aleja rápidamente de la trayectoria inicial, estaríamos frente a un trayectoria inestable; si $\lambda < 0$, la trayectoria sería asintóticamente estable y si $\lambda \sim 0$, el sistema sería caótico [6].

5.3) Obtención de los exponentes de Lyapunov.

Los exponentes de Lyapunov se calcularon usando MATDS, programa en MATLAB para investigación de sistemas dinámicos, propuesto por Govorukhin V N [8]. Existen en la literatura diversos procesos de cálculo [9,10,11,12]. Los resultados se muestran a continuación, donde hemos considerado las ecuaciones diferenciales del Cap I, con las condiciones iniciales de la Tabla 1.1 casos a) y a4), que corresponden a los casos de estabilidad e inestabilidad. Los exponentes de Lyapunov se evaluaron para lapsos de 100 y 1000 años, considerando a este último lapso como adecuado para estimar el comportamiento dinámico del sistema.

Las Fig 5.4 y 5.5 muestran la evolución temporal de los 12 exponentes de Lyapunov, EL, para las condiciones iniciales del caso a) hasta 100 años. Los exponentes de Lyapunov calculados para este lapso se muestran en la Tabla 5.1,

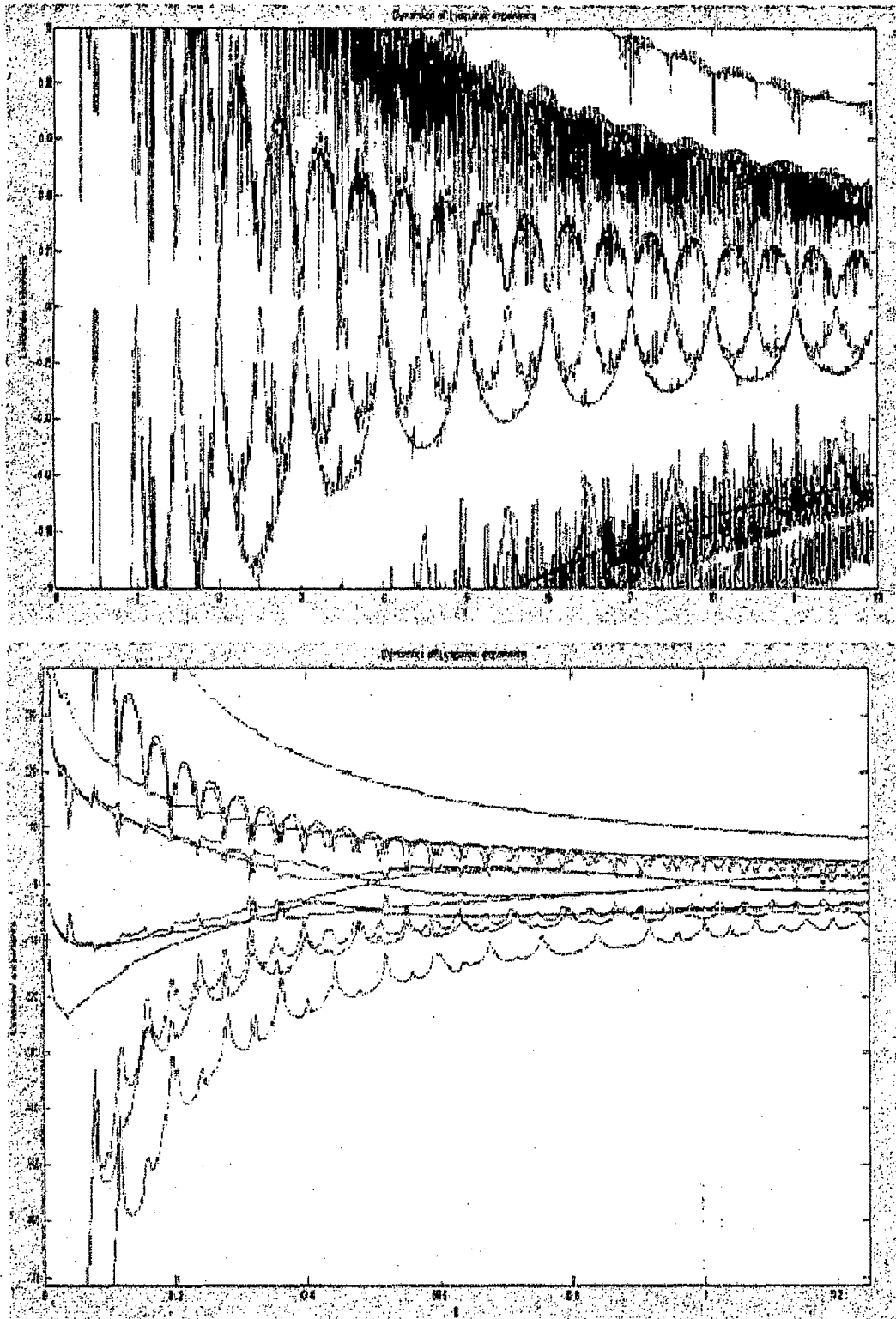


Fig 5.4 Evolución temporal de los exponentes de Lyapunov, Tabla 1.1, a), 100 años.

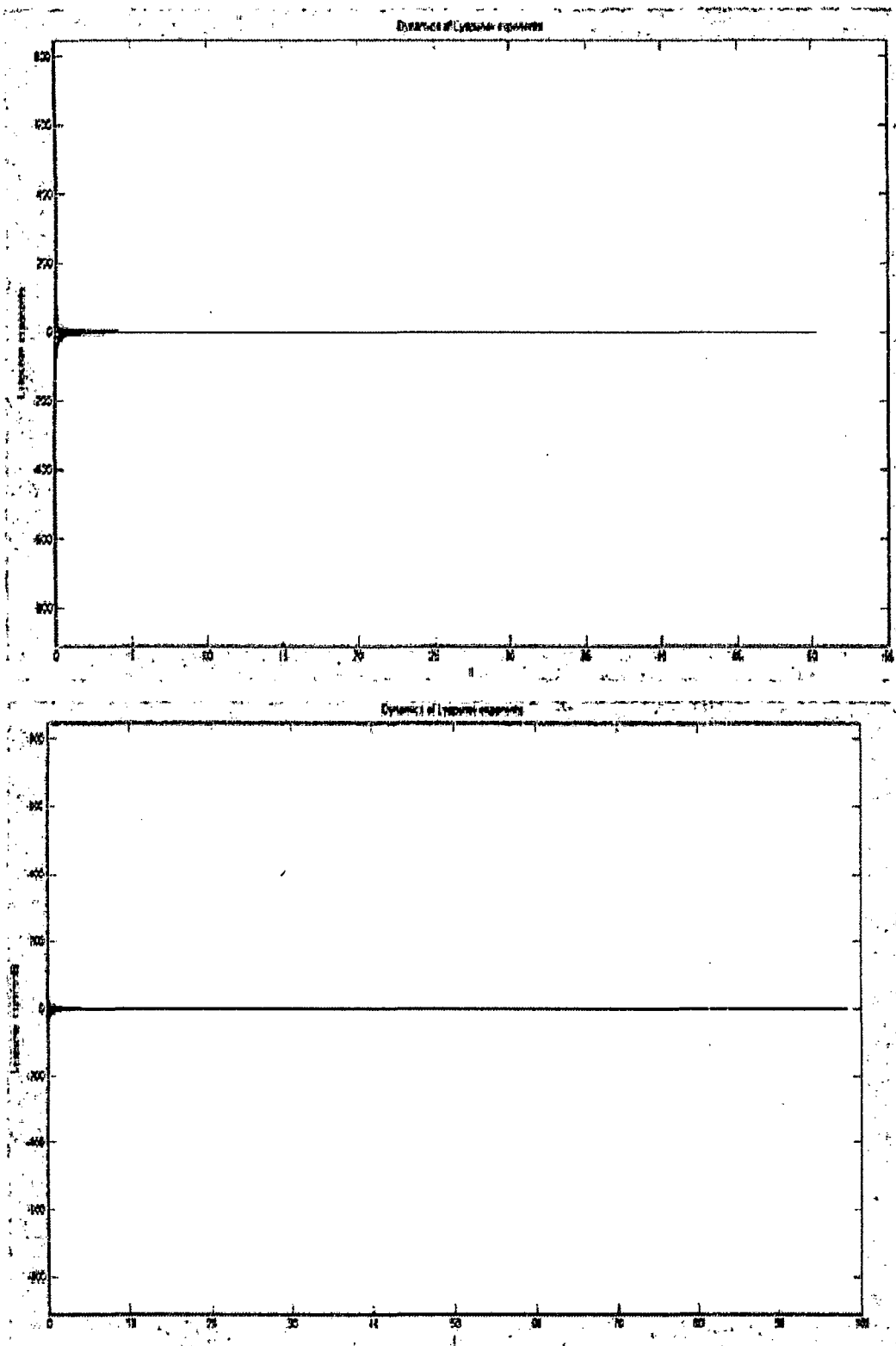


Fig 5.5 Evolución temporal de los exponentes de Lyapunov, Tabla 1.1, a), 100 años.

Tabla 5.1 Exponentes de Lyapunov para la Tabla 1.1, caso a), 100 años.

$\lambda_1=0,257063$	$\lambda_2=0,049642$	$\lambda_3=0,041192$	$\lambda_4=0,088333$	$\lambda_5=0,015030$	$\lambda_6=0,014680$
$\lambda_7=-0,081209$	$\lambda_8=-0,017242$	$\lambda_9=-0,011940$	$\lambda_{10}=-0,092074$	$\lambda_{11}=-0,068017$	$\lambda_{12}=-0,195460$

La evolución de los EL para el caso a) y 1000 años se muestra en las Fig 5.6, 5.7. Los exponentes de Lyapunov calculados para el lapso se muestran en la Tabla 5.2,

Tabla 5.2 Exponentes de Lyapunov para la Tabla 1.1, caso a), 1000 años.

$\lambda_1=0,174654$	$\lambda_2=0,007497$	$\lambda_3=0,004577$	$\lambda_4=0,008245$	$\lambda_5=0,002439$	$\lambda_6=0,000615$
$\lambda_7=-0,008256$	$\lambda_8=-0,002233$	$\lambda_9=-0,001308$	$\lambda_{10}=-0,011421$	$\lambda_{11}=-0,007323$	$\lambda_{12}=-0,167979$

Las Fig 5.8, 5.9 muestran la evolución para el caso a4) de la Tabla 1.1, para un lapso de 100 años.

Los exponentes de Lyapunov calculados para este lapso de 100 años se muestran en la Tabla 5.3,

Tabla 5.3 Exponentes de Lyapunov para la Tabla 1.1, caso a4), 100 años.

$\lambda_1=0,115746$	$\lambda_2=0,051017$	$\lambda_3=0,043915$	$\lambda_4=0,093223$	$\lambda_5=0,014403$	$\lambda_6=0,015818$
$\lambda_7=-0,086940$	$\lambda_8=-0,016368$	$\lambda_9=-0,012672$	$\lambda_{10}=-0,107584$	$\lambda_{11}=-0,063090$	$\lambda_{12}=-0,047467$

Las gráficas correspondiente a 1000 años se muestran en las Fig 5.10, 5.11.

Los exponentes de Lyapunov calculados para este lapso de 1000 años se muestran en la Tabla 5.4,

Tabla 5.4 Exponentes de Lyapunov para la Tabla 1.1, caso a4), 1000 años.

$\lambda_1=0,012211$	$\lambda_2=0,005368$	$\lambda_3=0,004364$	$\lambda_4=0,009222$	$\lambda_5=0,001342$	$\lambda_6=-0,000398$
$\lambda_7=-0,007026$	$\lambda_8=-0,002709$	$\lambda_9=-0,000116$	$\lambda_{10}=-0,010940$	$\lambda_{11}=-0,006122$	$\lambda_{12}=-0,005252$

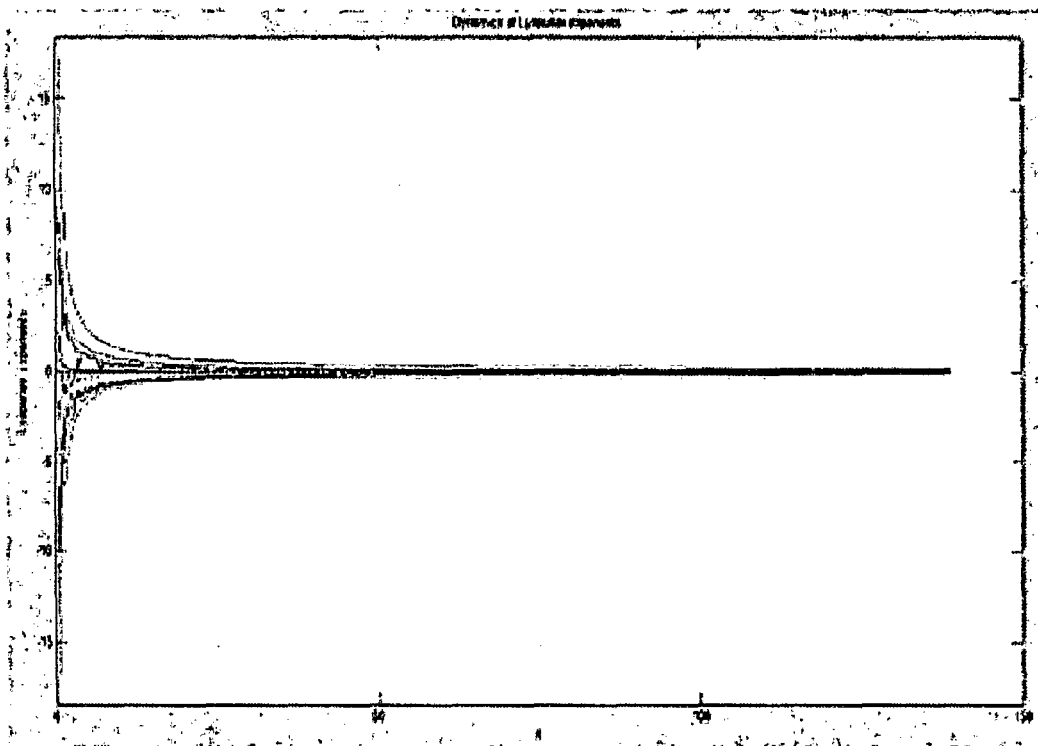
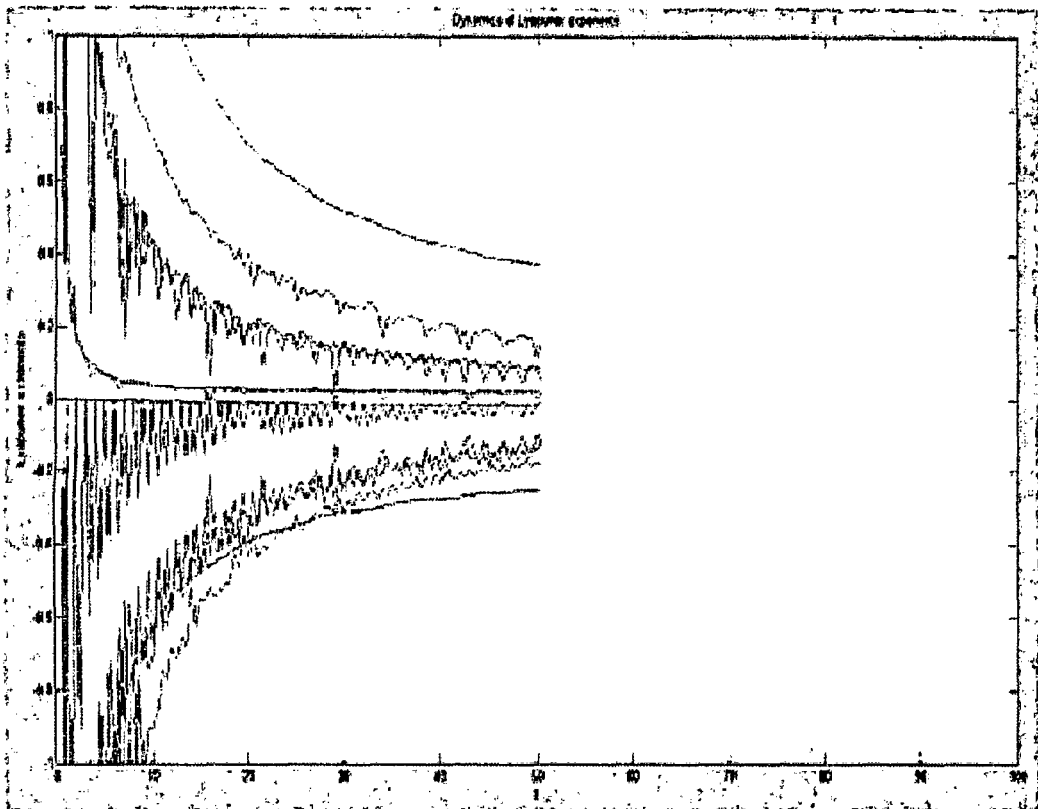


Fig 5.6 Evolución temporal de los exponentes de Lyapunov, Tabla 1.1, a), 1000 años.

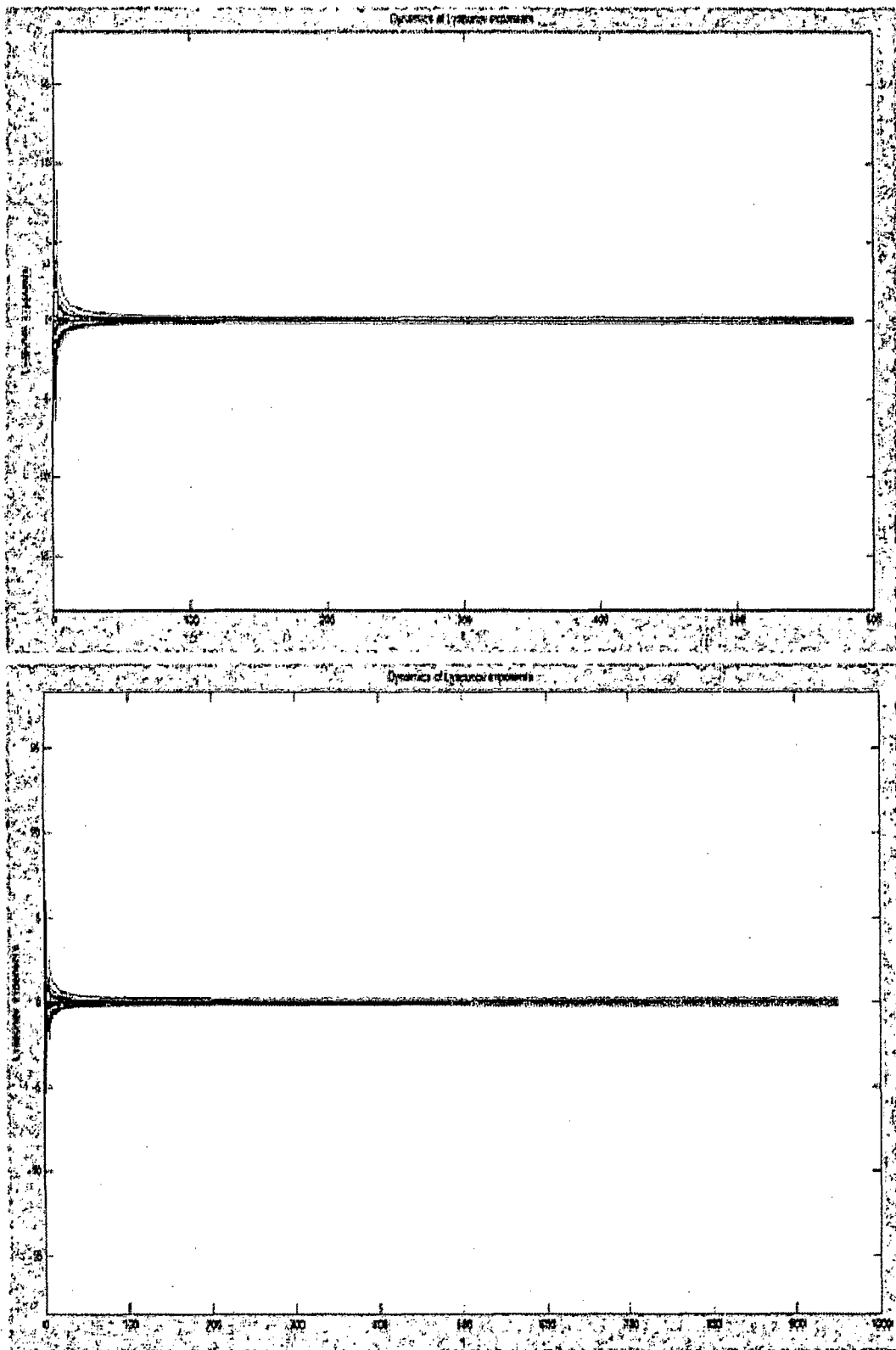


Fig 5.7 Evolución temporal de los exponentes de Lyapunov, Tabla 1.1, a), 1000 años.

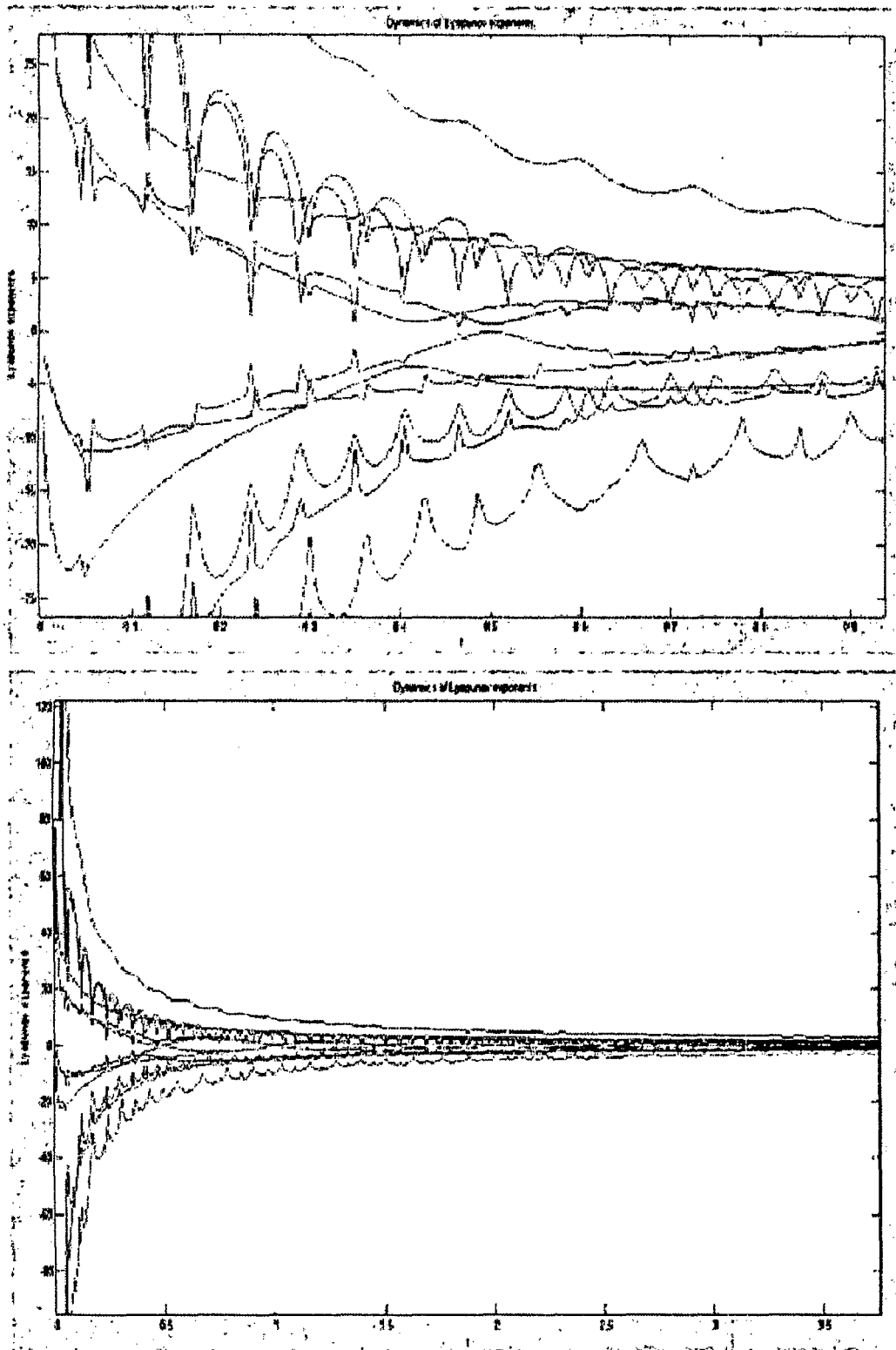


Fig 5.8 Evolución temporal de los exponentes de Lyapunov, Tabla 1.1, a4), 100 años.

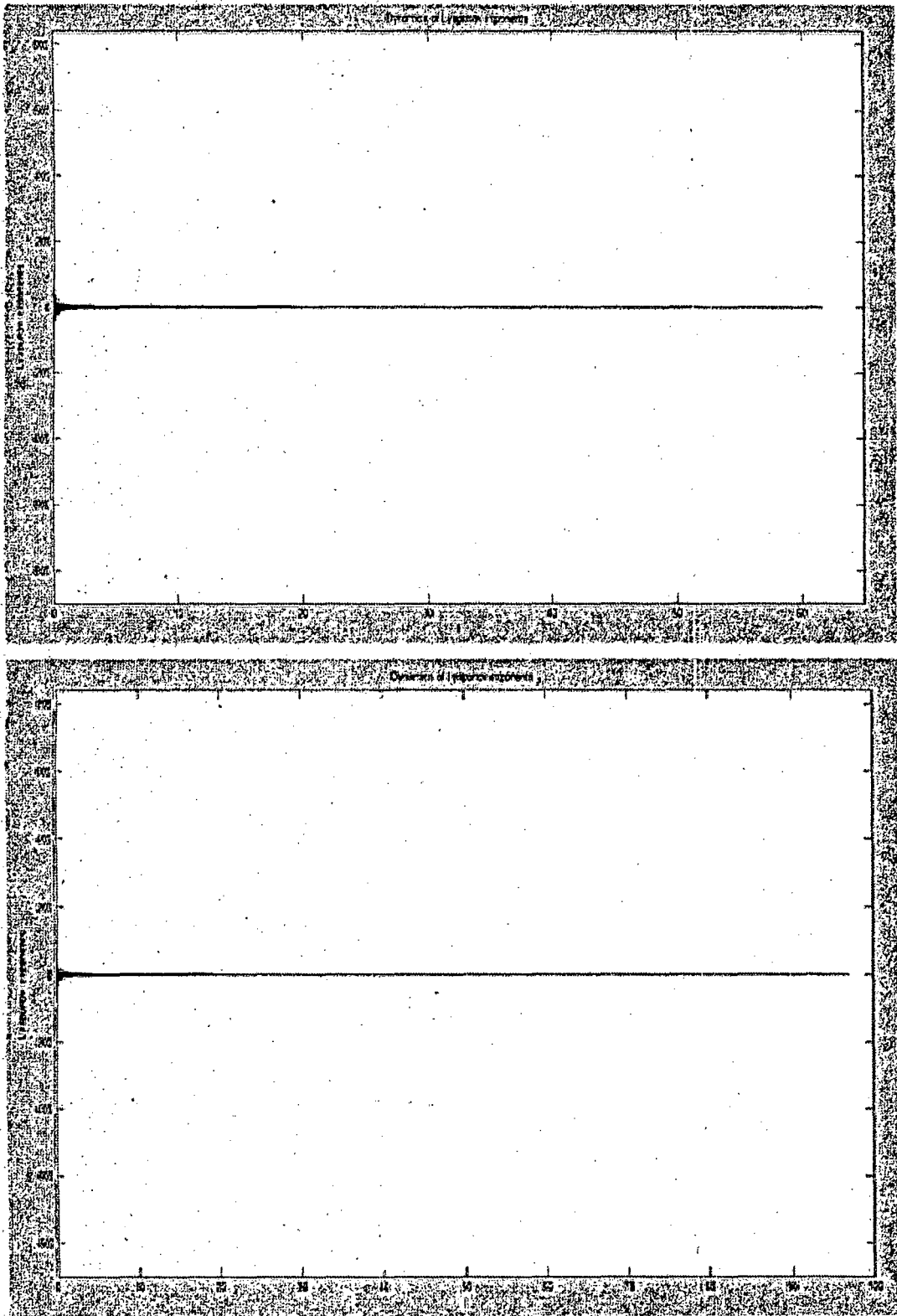


Fig 5.9 Evolución temporal de los exponentes de Lyapunov, Tabla 1.1, a4), 100 años.

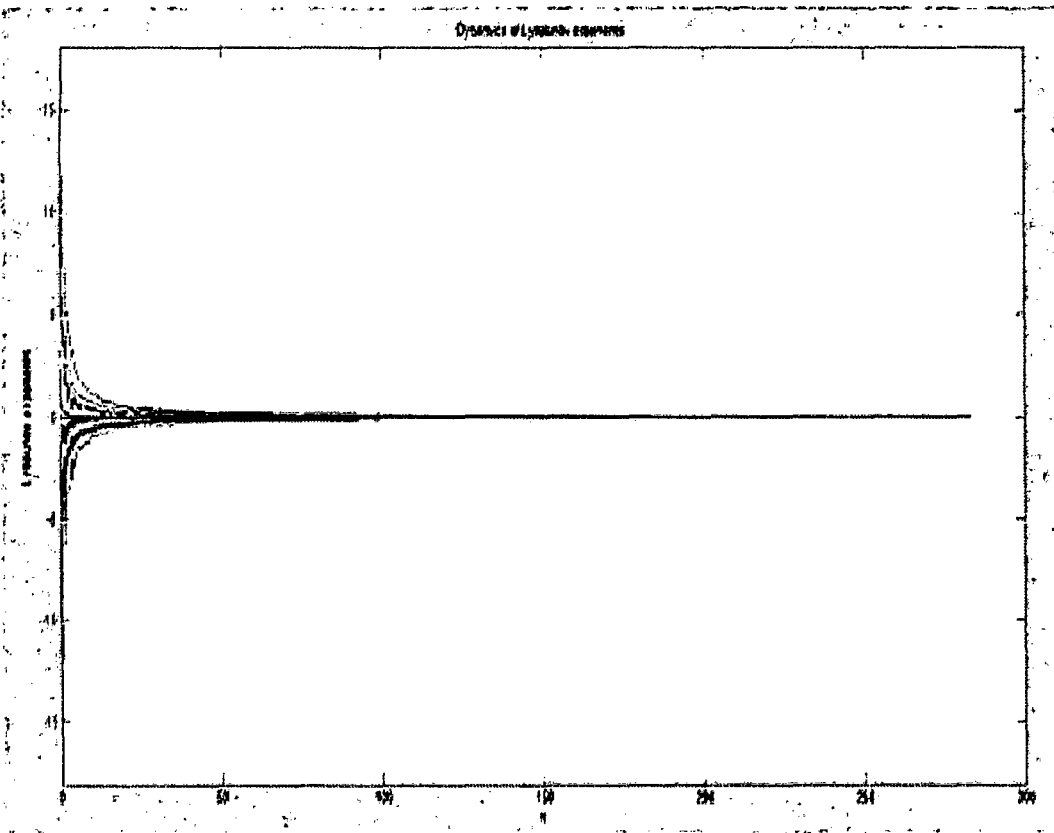
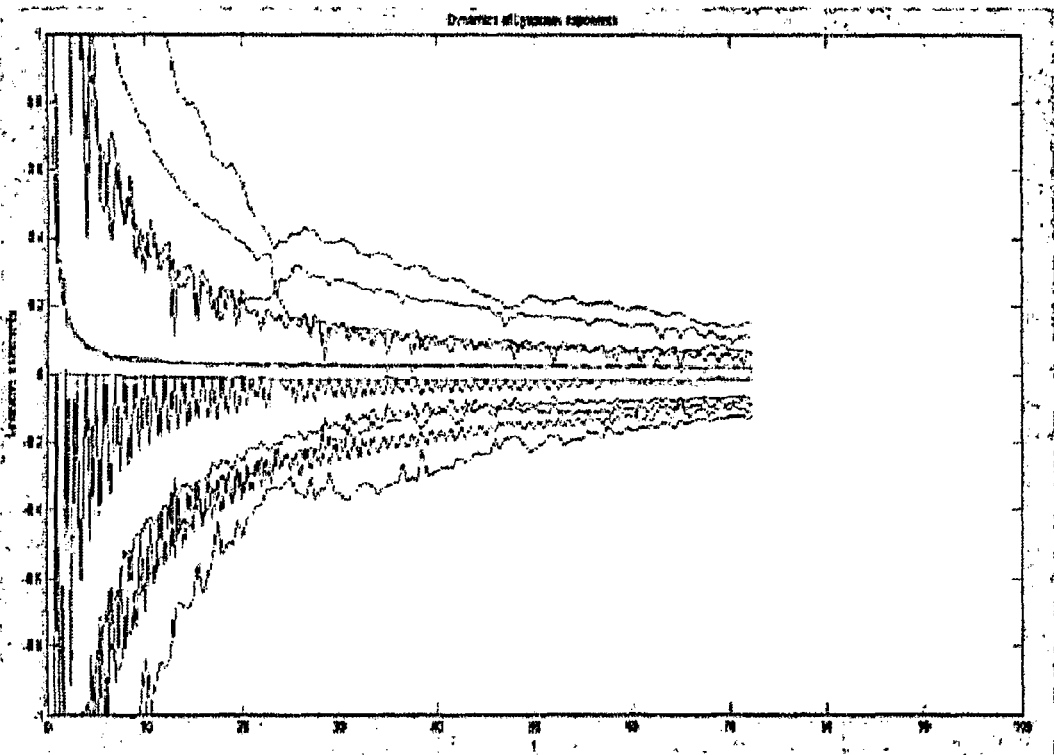


Fig 5.10 Evolución temporal de los exponentes de Lyapunov, tabla 1.1, a4), 1000 años.

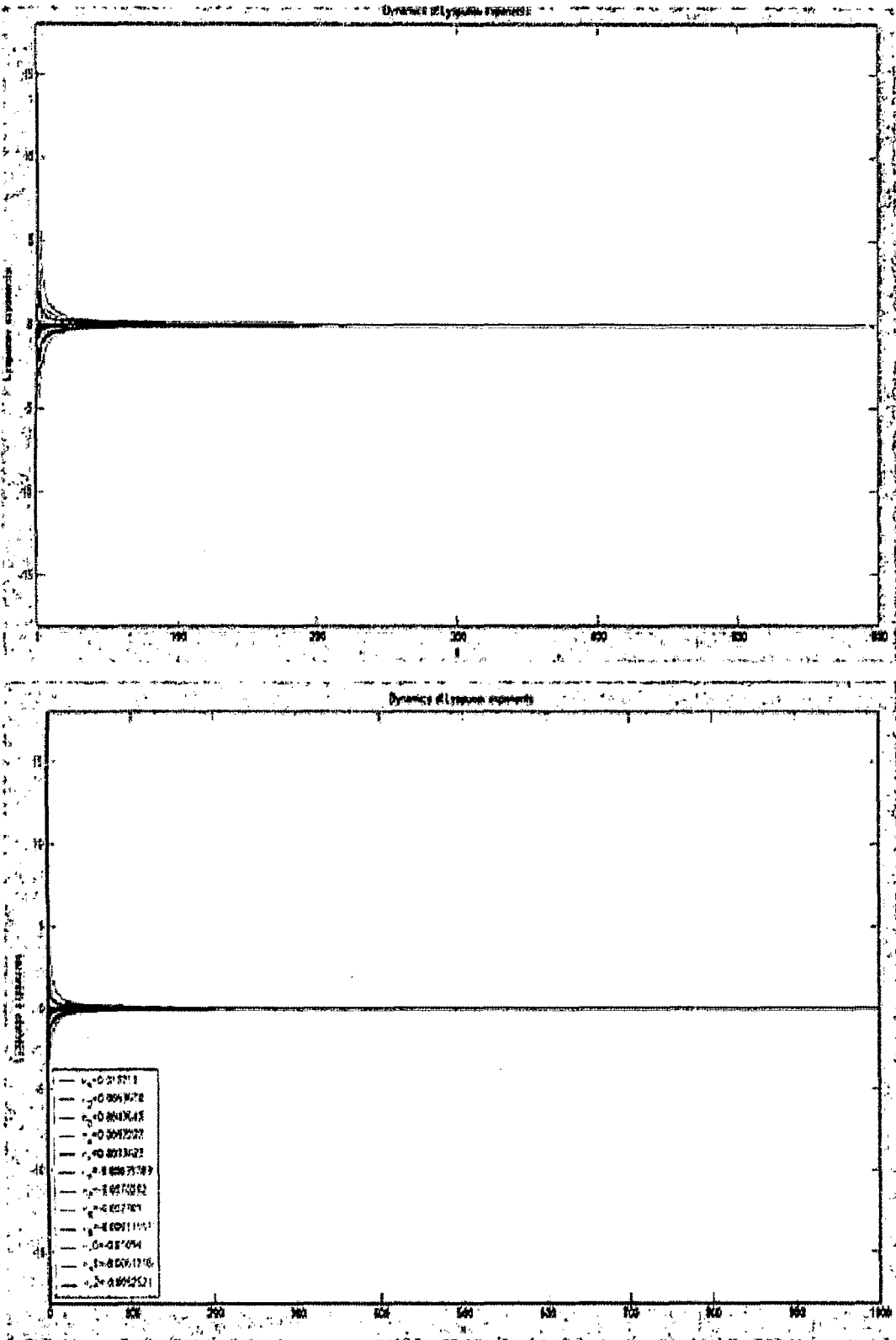


Fig 5.11 Evolución temporal de los exponentes de Lyapunov, Tabla 1.1, a4), 1000 años.

5.4) Análisis de la estabilidad del sistema STL.

Realizaremos el análisis a partir de la dinámica de los exponentes de Lyapunov del sistema de ecuaciones de primer orden del Cap I, con las condiciones iniciales a) de la Tabla 1.1.

De las Fig 5.4-5.7 y las Tablas 5.1, 5.2, se observa que de los 12 exponentes de Lyapunov del sistema STL, 6 resultaron ser positivos y 6 negativos, tendiendo ostensiblemente todos a 0. Para las condiciones iniciales del caso a) se observa que 10 de ellos, 5 positivos y 5 negativos, convergen más rápido a 0, en los 1000 años simulados. Los otros dos, el más positivo y el más negativo, también lo hacen pero a una tasa menor, tendiendo, posiblemente, también a cero.

Si se conservara la tendencia, el sistema STL sería probablemente un sistema caótico [6], con un λ positivo, otro negativo y los demás todos 0. Por otro lado, al tratarse de un sistema conservativo la suma de los λ s debería ser cero (para $\Delta t=100$ años es de -2×10^{-6}), lo cual podría producir un sistema por lo menos estable a gran escala de tiempo [13] (lo que observamos actualmente) o caotizar si el λ positivo resuena [14,1].

5.5) Análisis de la estabilidad del movimiento lunar.

La estabilidad del movimiento lunar será analizada igualmente mediante la dinámica de los exponentes de Lyapunov, pero, además de las condiciones iniciales dadas por a) de la Tabla 1.1, consideramos las condiciones iniciales dadas por a4), que como ya se observó conducen a un movimiento lunar inestable.

De las Fig 5.8-5.11 y de las Tabla 5.3, 5.4, se observa la evolución de las λ s y sus valores al cabo de 100 y 1000 años, para las condiciones iniciales a4) de la Tabla 1.1.

La estabilidad del movimiento lunar podría discutirse a la luz del conocimiento que para estas condiciones iniciales, el movimiento orbital lunar ya no es estable (recordemos que según lo visto en el Cap I, los radios orbitales varían 30-55%). Lo cual podría estar en relación al λ positivo.

5.6) Conclusiones

1) Considerando las simulaciones usadas en este modelo, basadas en el conjunto de exponentes de Lyapunov, consideramos posible que el sistema STL sea caótico, es decir, que dependa sensiblemente de las condiciones iniciales. Recordemos que según lo visto en el Cap I, al cambiar en 1% v' , el radio orbital lunar podría cambiar en 5%.

2) En particular, la estabilidad del movimiento lunar, podría verse afectada por aquellas λ_s positivas de "lenta" (el mayor) o "rápida" (los menores) convergencia a 0. En lo relacionado a las condiciones a4) la existencia de un λ positivo es condición suficiente para la inestabilidad del sistema.

Referencias

[1] Solé RV, Manrubia SC. Orden y caos en sistemas complejos-Fundamentos, primera edición, Ediciones UPC, Barcelona-España, 2001.

[2] Lacomba EA, Los sistemas dinámicos, ¿Qué son y para qué sirven? Departamento de matemáticas, Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa, Miscelánea Matemática 32 (2000) 39-50.

[3] Cornish NJ, Levin JJ. Chaos, Fractals and Inflation, Phys.Rev. D53 (1996) 3022-3032.

[4] "Metodología métrica compleja aplicada a series bursátiles cortas y ruidosas", www.openarchives.es/oai:dialnet.unirioja.es:ART0000190201.

[5] Espinosa Contreras AE, "El Caos y la Caracterización de Series de Tiempo a Través de Técnicas de la Dinámica No-Lineal", intermat.fciencias.unam.mx/caos.pdf.

[6] Sandri M, "Numerical Calculation of Lyapunov Exponents", The Mathematical Journal, Vol 6, Issue 3, 1996.

[7] Parker S, Chua LO, "Practical Numerical Algorithms for Chaotic Systems", NY, Springer-Verlag, 1991.

[8] Govorukhin V. N., MATDS is a MATLAB-based program for dynamical system investigation. It works with version 6.5 of MATLAB. <http://kvm.math.rsu.ru/matds/>.

[9] Michael T. Rosenstein, James J. Collins, and Carlo J. De Luca, "A practical method for calculating largest Lyapunov exponents from small data set", Boston University, 1992.

[10] Lara I et al, "Estimación de los exponentes de Lyapunov", Mecánica Computacional Vol XXII, 2003.

[11] Seoane JM, Zambrano S, Sanjuan MAF, "Teaching Nonlinear Dynamics and Chaos for Beginners" Lat. Am. J. Phys. Educ, Vol 2 N°3, Sept 2008.

[12] Haken, H, "At least one Lyapunov exponents vanishes if the trajectory of an attractor does not contain a fixed point", Physics Letters A, Volume 94, Issue 2, p. 71-72, 1983.

[13] Sussman G J, Wisdom J, "Chaotic Evolution of the Solar System", Science, New Series, Vol. 257, No. 5066 (Jul. 3, 1992), 56-62.

[14] Selles, Manuel A. Astronomía y Navegación en el siglo XVIII. Historia de la Ciencia y de la Técnica. Vol 25, 1992.

[15] Kotkin G.L., Serbo V.G. Problemas de mecánica clásica, segunda edición, Editorial Mir, Moscú, 1980; páginas 14, 103-104.

[16] Danby, J.M.A. Fundamentals of Celestial Mechanics, segunda edición, Willmann-Bell, Inc; Virginia-USA, 1991; capítulo 12.

Conclusiones Generales

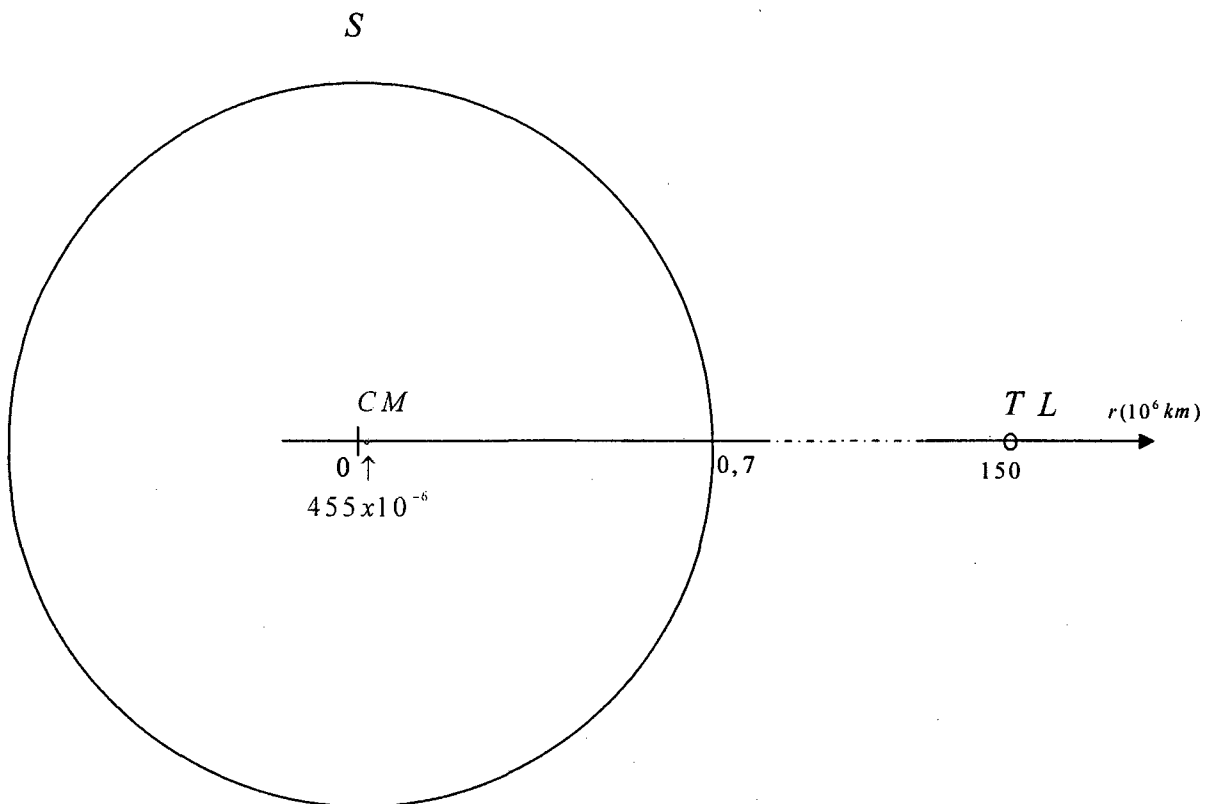
- 1) El Sol es el causante de los cambios en el movimiento orbital de la Luna respecto de un posible movimiento Kepleriano esperado en presencia solo de la Tierra. En particular estos efectos solares hacen que el plano orbital lunar, o su equivalente la Línea de Nodos, realice una precesión con periodo observado de 18,6 años.
- 2) Los modelos dinámicos usados así como el método numérico empleado nos han permitido simular el movimiento de la Luna de forma adecuada, así hemos obtenido resultados para el periodo de precesión de la Línea de Nodos que se diferencian en menos del 3,7 % del valor observado, en el caso menos favorable. Otros autores encuentran resultados con mayor diferencia del periodo observado [15-16].
- 3) La forma geométrica actual de la Tierra no afecta significativamente el movimiento lunar, sin embargo, un mayor achatamiento podría influir en el periodo de precesión de la Línea de Nodos (ver los gráficos de las Pág 111,112 y compararlos con los de las Pág 105,106).
- 4) La constancia de la función E_m , expresada tanto en su valor referencial como en su dispersión, relacionada a la energía mecánica del sistema conservativo, refleja la consistencia de los algoritmos numéricos empleados.
- 5) Los exponentes de Lyapunov encontrados muestran que es posible que el sistema STL sea un sistema caótico. En particular, la inestabilidad del movimiento lunar estaría asociada al aumento secular de su aceleración [14], fenómeno relacionado a la existencia de un exponente de Lyapunov positivo.

Apéndices

Apéndice A

En este apéndice vamos a justificar porque tomamos al SRI XYZ en el Sol; luego, deduciremos las ecuaciones de velocidad para las condiciones iniciales de velocidad para la Luna; finalmente, mostramos algunos gráficos de casos especiales del movimiento lunar.

1) A continuación mostramos (esquemáticamente) al sistema STL,



La determinación del CM del sistema STL respecto del centro del Sol la efectuamos usando la Ec (A1) [3],

$$r_{CM} \equiv \frac{Mr_S + m_T r_T + m_L r_L}{M + m_T + m_L} \quad (A1)$$

usando los valores de la Pág 10, obtenemos,

$$r_{CM} \equiv 455\text{km} \quad (\text{A2})$$

¿Qué error se introduce al medir desde 0 (centro del Sol)?

Asumiendo que el mayor error al medir r es, $r_{CM} \equiv \Delta r \equiv 455\text{km} \equiv 3,033 \times 10^{-6}\text{UA}$, el error al medir las energías potenciales gravitacionales $E_{pg,ST}$ y $E_{pg,SL}$, serían,

$$\Delta(E_{pg,ST}) \equiv \frac{GMm_T}{r^2} \Delta r \equiv 4\pi^2 \frac{m_T}{m_L} \Delta r \quad (\text{A3})$$

$$\text{y} \quad \Delta(E_{pg,SL}) \equiv \frac{GMm_L}{r^2} \Delta r \equiv 4\pi^2 \frac{1}{(1+0,00256)^2} \Delta r \quad (\text{A4})$$

donde los errores ya son adimensionales. Los errores porcentuales los calculamos con las siguientes ecuaciones,

$$\% \Delta(E_{pg,ST}) \equiv 4\pi^2 \frac{m_T}{m_L} \frac{\Delta r}{E_m} \quad (\text{A5})$$

y

$$\% \Delta(E_{pg,SL}) \equiv 4\pi^2 \frac{1}{(1+0,00256)^2} \frac{\Delta r}{E_m} \quad (\text{A6})$$

Usando como energía mecánica adimensional referencial del sistema STL, E_m , la que se obtiene en la Pág 28, obtenemos,

$$\% \Delta(E_{pg,ST}) \equiv 6 \times 10^{-4}\% \quad \text{y} \quad \% \Delta(E_{pg,SL}) \equiv 0,01 \times 10^{-4}\%$$

Por lo tanto, como los errores introducidos son inferiores al error al medir la E_m del sistema STL, $7,2 \times 10^{-6}\%$ según Pág 28, podemos realizar las mediciones desde el centro del Sol, considerándolo como SRI.

2) La velocidad inicial de la Luna respecto del sistema inercial XYZ se puede obtener de la Fig 1.6. Partiendo de la transformación galileana,

$$\vec{v}_L \equiv \vec{v}_T + \vec{v}'_L \quad (\text{A7})$$

donde,

\vec{v}_L : velocidad de la Luna respecto de XYZ

\vec{v}_T : velocidad de la Tierra respecto de XYZ

\bar{v}'_L : velocidad de la Luna respecto de xyz

Estas velocidades se expresan con las siguientes ecuaciones,

$$\bar{v}_L(0) \equiv x_{10}(0)\hat{i} + x_{11}(0)\hat{j} + x_{12}(0)\hat{k} \quad (\text{A8})$$

$$\bar{v}_T(0) \equiv 0\hat{i} + 2\pi\hat{j} + 0\hat{k} \quad (\text{A9})$$

$$\bar{v}'_L(0) \equiv 0\hat{i} + v'\cos(\varepsilon)\hat{j} + v'\text{sen}(\varepsilon)\hat{k} \quad (\text{A10})$$

Reemplazando en la Ec (A17), se obtienen las ecuaciones para las componentes de la velocidad inicial de la Luna respecto de XYZ, Ec (1.83)-(1.85).

$$x_{10}(0) \equiv 0 \quad (\text{1.83})$$

$$x_{11}(0) \equiv 2\pi \text{ UA/año} + v'\cos\varepsilon \quad (\text{1.84})$$

$$x_{12}(0) \equiv v'\text{sen}\varepsilon \quad (\text{1.85})$$

- 3) Gráficas de la proyección de la órbita lunar en el plano xy para condiciones de velocidad v' que producen orbitas irregulares. Fig A3.
- 4) Gráficas de la proyección de la órbita lunar en el plano xy para condiciones de ε que producen orbitas irregulares. Fig A4.
- 5) Gráficas del sistema Tierra-Luna. Trayectoria orbital lunar y distancia relativa Tierra-Luna d_{LT} con $v'=0,2189 \text{ UA/año}$, para 2 y 20 años. Fig A5.

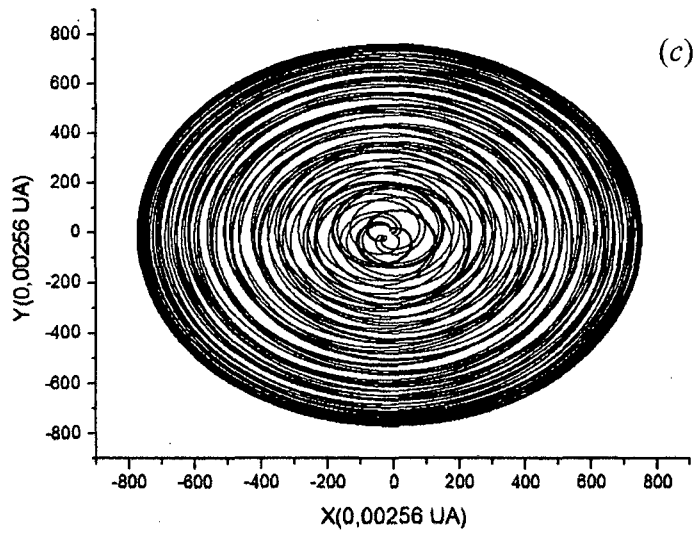
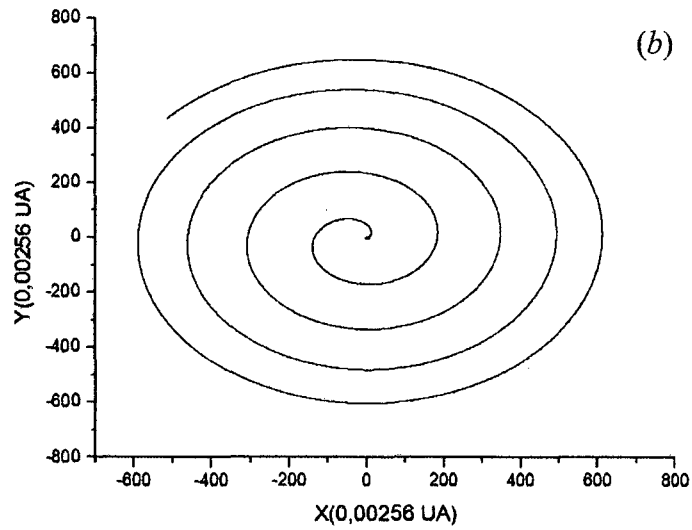
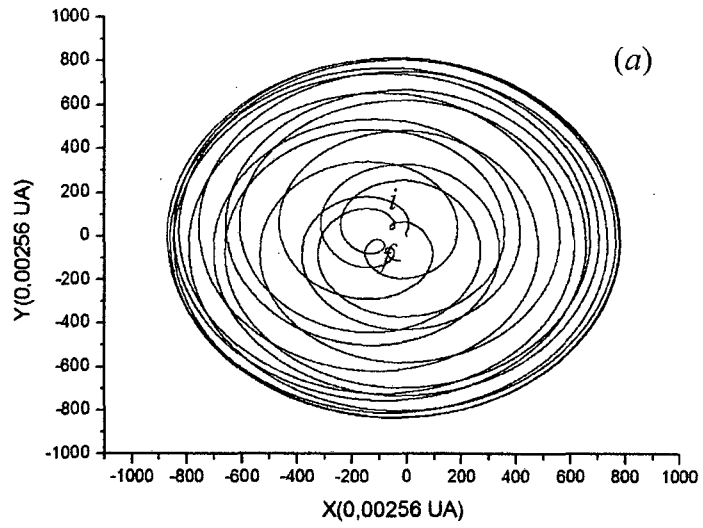


Fig A3. Proyección de la órbita lunar en el plano xy , (a) para 20 años, $C_i: v' = 0,4378$ UA/año, $\epsilon = 5^\circ$, (b)-(c) para 20 y 100 años, $C_i: v' = 0,2592$ UA/año, $\epsilon = 5^\circ$.

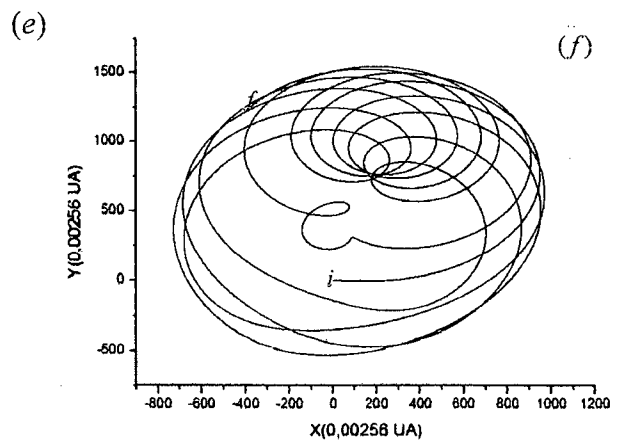
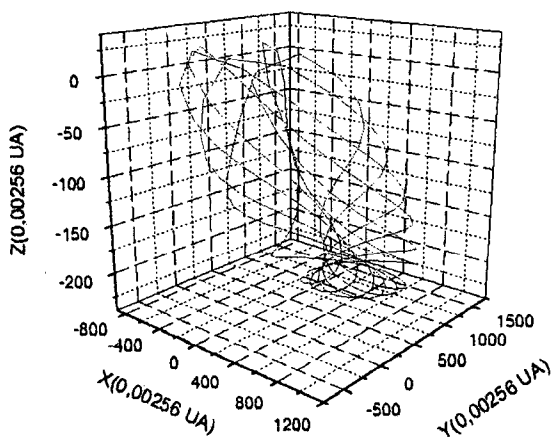
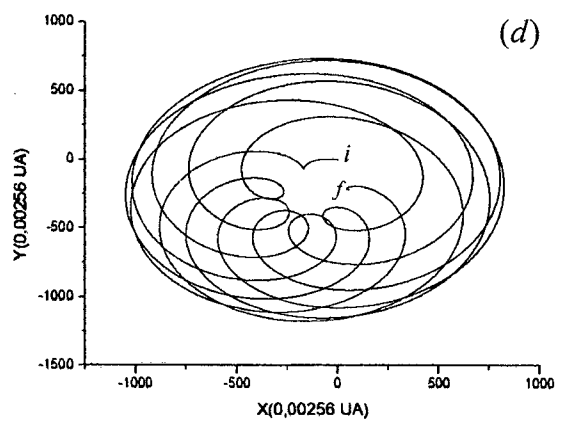
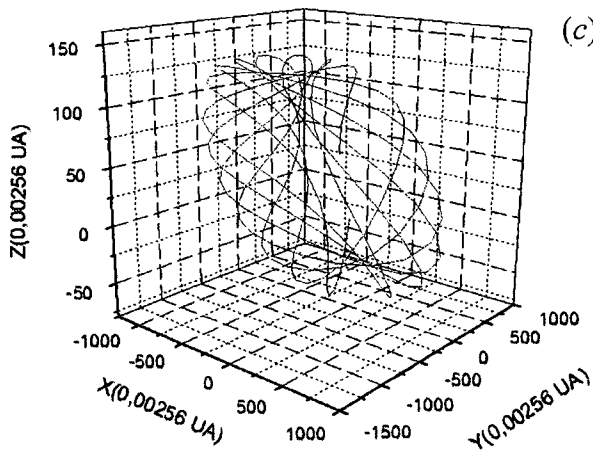
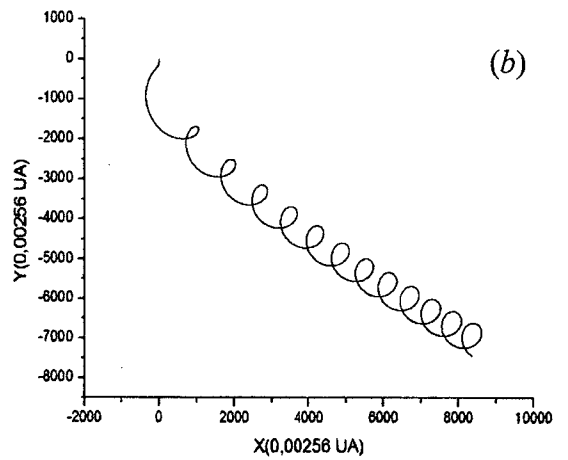
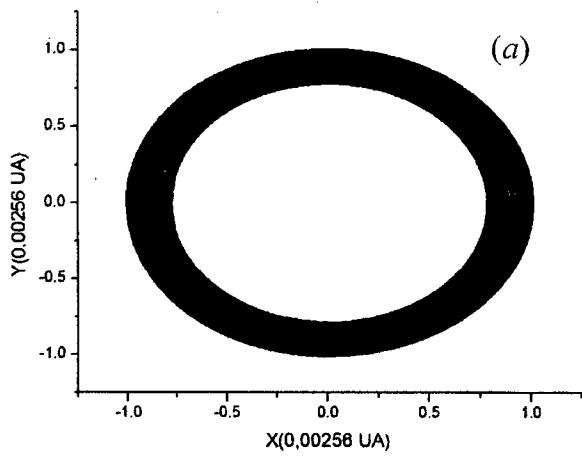
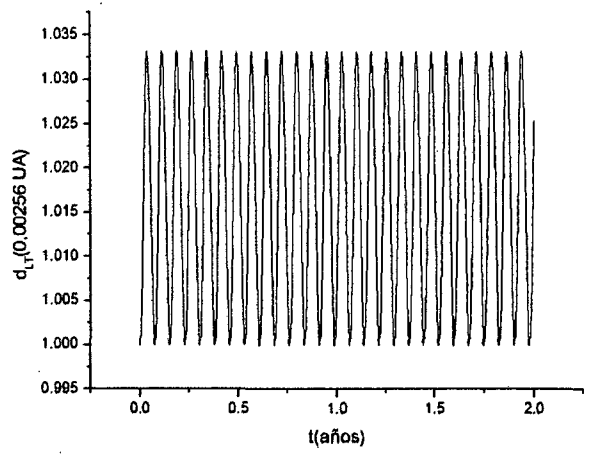
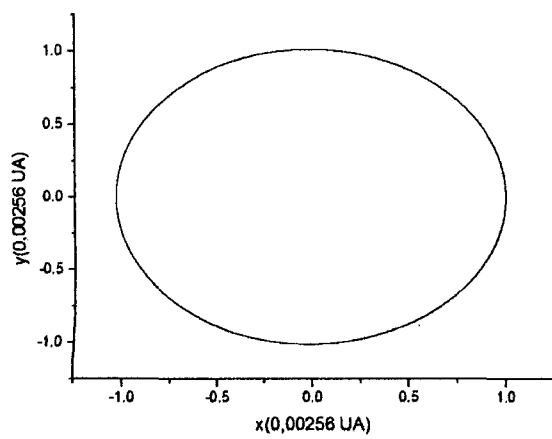
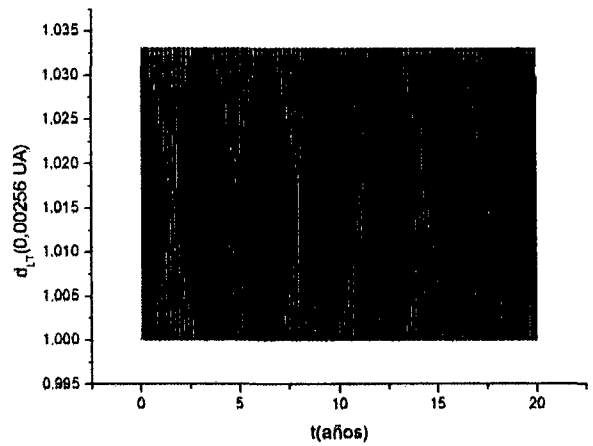
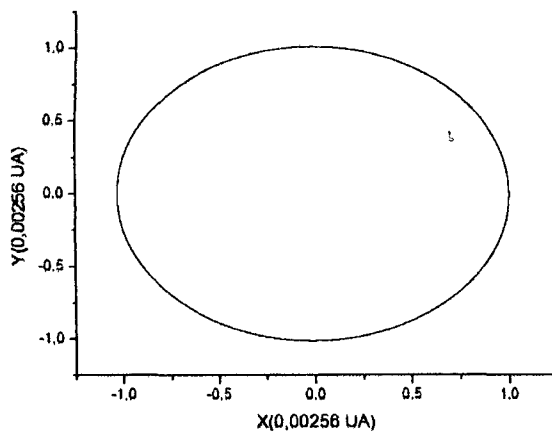


Fig A4. Proyección de la órbita lunar en el plano xy para 20 años y $v' = 0,2189$ UA/año, (a) $\epsilon = 40^\circ$, (b) $\epsilon = 80^\circ$, (d) $\epsilon = 90^\circ$ y (f) $\epsilon = 89^\circ$. Trayectoria orbital espacial (c) $\epsilon = 90^\circ$ y (e) $\epsilon = 89^\circ$.



(a)



(b)

Fig A5. Sistema Tierra-Luna. Órbita lunar y distancia Tierra-Luna con $v' = 0,2189$ UA/año para (a) 2 años y (b) 20 años.

Apéndice B

En este apéndice mostramos la deducción de la expresión δ de la Ec (2.29) así como analizamos su expresión (basada en expansión multipolar) para ciertos casos particulares.

1) Demostración de la Ec (2.29)

$$\delta \equiv \frac{GM\mu}{2} \frac{r^2}{r_{CM}^3} \left\{ 3 \left[\text{sen}\theta \text{sen}\theta_{CM} \cos(\phi - \phi_{CM}) + \cos\theta \cos\theta_{CM} \right]^2 - 1 \right\}$$

$$\text{Sea } \delta \equiv \frac{GM\mu}{2r_{CM}^3} \left\{ 3 \frac{(\vec{r} \cdot \vec{r}_{CM})^2}{r_{CM}^2} - r^2 \right\}$$

De la mecánica teórica y análisis vectorial los vectores \vec{r} y \vec{r}_{CM} , tienen la forma,

$$\vec{r}_{CM} \equiv (r_{CM} \text{sen}\theta_{CM} \cos\phi_{CM}) \hat{i} + (r_{CM} \text{sen}\theta_{CM} \text{sen}\phi_{CM}) \hat{j} + (r_{CM} \cos\theta_{CM}) \hat{k}$$

$$\vec{r} \equiv (r \text{sen}\theta \cos\phi) \hat{i} + (r \text{sen}\theta \text{sen}\phi) \hat{j} + (r \cos\theta) \hat{k}$$

Ahora, haciendo el producto escalar,

$$\begin{aligned} \vec{r} \cdot \vec{r}_{CM} &\equiv r \text{sen}\theta \cos\phi r_{CM} \text{sen}\theta_{CM} \cos\phi_{CM} + r \text{sen}\theta \text{sen}\phi r_{CM} \text{sen}\theta_{CM} \text{sen}\phi_{CM} \\ &\quad + r \cos\theta r_{CM} \cos\theta_{CM} \\ &\equiv r r_{CM} \left(\text{sen}\theta \cos\phi \text{sen}\theta_{CM} \cos\phi_{CM} + \text{sen}\theta \text{sen}\phi \text{sen}\theta_{CM} \text{sen}\phi_{CM} \right. \\ &\quad \left. + \cos\theta \cos\theta_{CM} \right) \end{aligned}$$

Luego, factorizando y aplicando suma de ángulos,

$$\begin{aligned}\vec{r} \cdot \vec{r}_{CM} &\equiv r r_{CM} \left(\text{sen}\theta \text{sen}\theta_{CM} \left[\cos\phi \cos\phi_{CM} + \text{sen}\phi \text{sen}\phi_{CM} \right] \right. \\ &\quad \left. + \cos\theta \cos\theta_{CM} \right) \\ &\equiv r r_{CM} \left(\text{sen}\theta \text{sen}\theta_{CM} \cos\{\phi - \phi_{CM}\} + \cos\theta \cos\theta_{CM} \right)\end{aligned}$$

Reemplazando esta expresión en δ , tenemos,

$$\begin{aligned}\delta &\equiv \frac{GM\mu}{2r_{CM}^3} \left\{ 3 \frac{\left(r r_{CM} \left(\text{sen}\theta \text{sen}\theta_{CM} \cos\{\phi - \phi_{CM}\} + \cos\theta \cos\theta_{CM} \right) \right)^2}{r_{CM}^2} - r^2 \right\} \\ &\equiv \frac{GM\mu}{2r_{CM}^3} r^2 \left\{ 3 \left(\text{sen}\theta \text{sen}\theta_{CM} \cos\{\phi - \phi_{CM}\} + \cos\theta \cos\theta_{CM} \right)^2 - 1 \right\}\end{aligned}$$

Con lo que obtenemos la expresión para δ ,

$$\delta \equiv \frac{GM\mu}{2} \frac{r^2}{r_{CM}^3} \left\{ 3 \left[\text{sen}\theta \text{sen}\theta_{CM} \cos(\phi - \phi_{CM}) + \cos\theta \cos\theta_{CM} \right]^2 - 1 \right\}$$

2) De la aproximación multipolar.

Al despreciar los términos cúbicos se está suponiendo que su contribución a la energía es inferior a la de los términos cuadráticos, los cuales tienen que ser a la vez mejores que la menor contribución antes de aproximar, veamos que ocurre así.

El término T_3 de la expansión o serie multipolar, ha permitido obtener la expresión δ dada por la siguiente ecuación,

$$\delta \equiv \frac{GM\mu}{2r_{CM}^3} \left\{ 3 \frac{(\vec{r} \cdot \vec{r}_{CM})^2}{r_{CM}^2} - r^2 \right\}$$

que puede reescribirse de la siguiente forma,

$$\delta \equiv \frac{GM\mu r^2}{r_{CM}^3} \left(\frac{1}{2} \left\{ 3(\cos \gamma_{pl})^2 - 1 \right\} \right) \equiv \frac{GM\mu r^2}{r_{CM}^3} (P_2(x))$$

la cual, usando propiedades del polinomio de Legendre $P_2(x)$, puede ser a lo más, $|\delta| \equiv \frac{GM\mu r^2}{r_{CM}^3}$, y comparada con $\frac{GM(m_{pl} + m_{sa})}{|\bar{r}_{CM}|}$ del Lagrangiano, obtenemos,

$$\frac{\frac{GM\mu r^2}{r_{CM}^3}}{\frac{GM(m_{pl} + m_{sa})}{r_{CM}}} \equiv \frac{m_{sa}m_{pl}}{(m_{pl} + m_{sa})^2} \left(\frac{r}{R} \right)^2 \approx 8 \times 10^{-8}, \text{ donde se ha tomado } r_{CM} \approx R.$$

Cuando se analiza la expresión de la energía, ecuación (1.70) (o su equivalente la expresión del Lagrangiano (2.24)), se obtiene, al comparar los sumandos 4 y 2 de energía potencial gravitacional de la ecuación lagrangiana, un orden de 10^{-5} . Por lo tanto, la contribución del termino 3, T_3 (o su equivalente δ) de la expansión multipolar, del orden de 10^{-8} , permitiría cortar la serie de la expansión en el término T_4 , puesto que contribuiría comparativamente con un orden menor en la aproximación ($\sim 10^{-3}$). Estimemos la contribución de T_4 .

El término T_4 aportaría a la energía de la siguiente forma,

$$T_4' \equiv \left[m_{pl} \left(\frac{|\bar{r}_{pl,CM}|}{|\bar{r}_{CM}|} \right)^3 \left(\frac{1}{2} \left\{ 5(\cos \gamma_{pl})^3 - 3(\cos \gamma_{pl}) \right\} \right) \right] + \left[m_{sa} \left(\frac{|\bar{r}_{sa,CM}|}{|\bar{r}_{CM}|} \right)^3 \left(\frac{1}{2} \left\{ 5(\cos \gamma_{sa})^3 - 3(\cos \gamma_{sa}) \right\} \right) \right]$$

en esta expresión asumimos,

$$|\bar{r}_{pl,CM}| \equiv \frac{m_{sa}}{m_{pl} + m_{sa}} r, \quad |\bar{r}_{sa,CM}| \equiv \frac{m_{pl}}{m_{pl} + m_{sa}} r, \quad \gamma_{pl} + \gamma_{sa} \equiv \pi \quad \text{y} \quad |\bar{r}_{CM}| \approx R$$

Con lo cual obtenemos,

$$T_4' \equiv \left(\frac{m_{pl} - m_{sa}}{m_{pl} + m_{sa}} \right) \mu \left(\frac{r}{R} \right)^3 \left(\frac{1}{2} \left\{ 5(\cos \gamma_{sa})^3 - 3(\cos \gamma_{sa}) \right\} \right)$$

el cual a lo más podría ser (usando propiedades de $P_3(x)$),

$$T_4' \sim \left(\frac{m_{pl} - m_{sa}}{m_{pl} + m_{sa}} \right) \mu \left(\frac{r}{R} \right)^3$$

Por lo tanto el termino correspondiente al lagrangiano seria,

$$T_4'' \sim \frac{GM}{R} \left(\frac{m_{pl} - m_{sa}}{m_{pl} + m_{sa}} \right) \mu \left(\frac{r}{R} \right)^3$$

Y, comparando con la contribución asociada a T_3 ,

$$\frac{\frac{GM}{R} \left(\frac{m_{pl} - m_{sa}}{m_{pl} + m_{sa}} \right) \mu \left(\frac{r}{R} \right)^3}{\frac{GM \mu r^2}{2r_{CM}^3}} \equiv \frac{2(m_{pl} - m_{sa})}{(m_{pl} + m_{sa})} \left(\frac{r}{R} \right) \approx 5 \times 10^{-3}$$

De esta forma el término T_4 es tres órdenes inferior a T_3 .

3) Reconsideración de δ cuando $m_{pl} \gg m_{sa}$.

En este caso, la expansión multipolar debe de considerar un número de términos que estén de acuerdo al orden de la menor contribución energética en el Lagrangiano. En tal sentido, para comparar las contribuciones, asumimos un satélite de 10^3 kg en una órbita de altitud 17×10^3 km. El menor orden de energía potencial gravitacional seria de 10^{-22} . Esta sensible influencia solar sobre el satélite, su reducida masa (orden de 10^{-20} de la lunar) y sobre todo su cercanía a la Tierra (5-10% de la lunar) obligaría a tomar más sumandos de la serie multipolar. Por lo general se asume hasta el término 5to o 6to.

Apéndice C

1) Demostración de las ecuaciones (3.47) a (3.52)

$$\dot{r}_{CM}(0) \equiv 0 \quad (3.47)$$

$$\dot{\theta}_{CM}(0) \equiv - \left\{ \frac{m_{sa}}{m_{pl} + m_{sa}} \right\} \frac{v' \operatorname{sen} \varepsilon}{r_{CM}(0)} \quad (3.48)$$

$$\dot{\phi}_{CM}(0) \equiv \left[2\pi + \left\{ \frac{m_{sa}}{m_{pl} + m_{sa}} \right\} v' \cos \varepsilon \right] \left\{ \frac{1}{r_{CM}(0)} \right\} \quad (3.49)$$

$$\dot{r}(0) \equiv 0 \quad (3.50)$$

$$\dot{\theta}(0) \equiv - \frac{v' \operatorname{sen} \varepsilon}{r(0)} \quad (3.51)$$

$$\dot{\phi}(0) \equiv \frac{v' \cos \varepsilon}{r(0)} \quad (3.52)$$

Primero las tres últimas ecuaciones. Partiendo de la figura 3.1, asumiendo $t=0$,

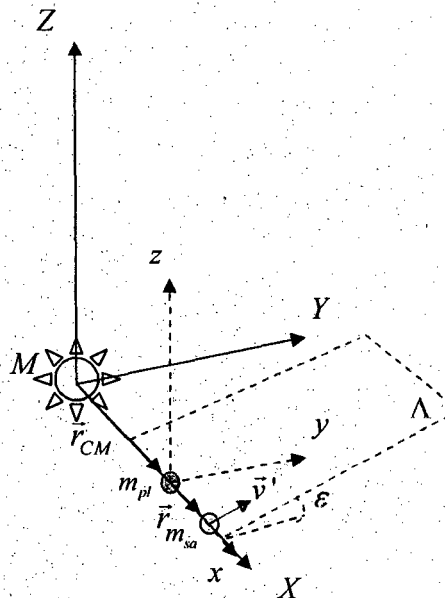


Fig C1. Condiciones iniciales del sistema Sol-Tierra-Luna.

Escribiendo \vec{v}' en xyz, recordar que \vec{v}' es la velocidad relativa lunar respecto de Tierra,

$$\vec{v}' \equiv 0\hat{i} + v' \cos \varepsilon \hat{j} + v' \text{sen} \varepsilon \hat{k} \quad (C1)$$

Ahora, del vector posición de la Luna,

$$\vec{r} \equiv (r \text{sen} \theta \cos \phi) \hat{i} + (r \text{sen} \theta \text{sen} \phi) \hat{j} + (r \cos \theta) \hat{k}$$

Obtenemos la velocidad en polares,

$$\begin{aligned} \vec{v} \equiv & \left(\dot{r} \text{sen} \theta \cos \phi + r \left[\dot{\theta} \cos \theta \cos \phi - \dot{\phi} \text{sen} \theta \text{sen} \phi \right] \right) \hat{i} \\ & + \left(\dot{r} \text{sen} \theta \text{sen} \phi + r \left[\dot{\theta} \cos \theta \text{sen} \phi + \dot{\phi} \text{sen} \theta \cos \phi \right] \right) \hat{j} \\ & + \left(\dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \text{sen} \theta \right) \hat{k} \end{aligned}$$

que, evaluándola en $t=0$ y comparándola con la Ec C1,

$$\begin{aligned} \vec{v}(0) \equiv & \left(\dot{r}(0) \right) \hat{i} + \left(r(0) \dot{\phi}(0) \right) \hat{j} \\ & + \left(-r(0) \dot{\theta}(0) \right) \hat{k} \equiv 0\hat{i} + v' \cos \varepsilon \hat{j} + v' \text{sen} \varepsilon \hat{k} \end{aligned}$$

obtendríamos, igualando componentes,

$$\dot{r}(0) \equiv 0 \quad (3.50)$$

$$\dot{\theta}(0) \equiv -\frac{v' \text{sen} \varepsilon}{r(0)} \quad (3.51)$$

$$\dot{\phi}(0) \equiv \frac{v' \cos \varepsilon}{r(0)} \quad (3.52)$$

Para las tres primeras ecuaciones, partimos de la definición de CM,

$$\vec{r}_{CM} \equiv \frac{m_{pl} \vec{r}_{pl} + m_{sa} \vec{r}_{sa}}{m_{pl} + m_{sa}}$$

y la velocidad del CM,

$$\dot{\vec{r}}_{CM} \equiv \vec{v}_{CM} \equiv \frac{m_{pl} \vec{v}_{pl} + m_{sa} \vec{v}_{sa}}{m_{pl} + m_{sa}}$$

Donde las velocidades (UA/año) son respecto del Sol, por lo tanto, en $t=0$,

$$\vec{v}_{pl} \equiv \vec{v}_r \equiv (2\pi) \hat{j}$$

$$\vec{v}_{sa} \equiv \vec{v}_l \equiv (2\pi) \hat{j} + v' \cos \varepsilon \hat{j} + v' \operatorname{sen} \varepsilon \hat{k} \equiv (2\pi + v' \cos \varepsilon) \hat{j} + v' \operatorname{sen} \varepsilon \hat{k}$$

Reemplazando en la ecuación para la velocidad del CM, tenemos,

$$\vec{v}_{CM}(0) \equiv (0) \hat{i} + \left[2\pi + \left\{ \frac{m_{sa}}{m_{pl} + m_{sa}} \right\} v' \cos \varepsilon \right] \hat{j} + \left\{ \frac{m_{sa}}{m_{pl} + m_{sa}} \right\} v' \operatorname{sen} \varepsilon \hat{k}$$

Igualándola a su equivalente en polares,

$$\vec{v}_{CM}(0) \equiv (\dot{r}_{CM}(0)) \hat{i} + (r_{CM}(0) \dot{\phi}_{CM}(0)) \hat{j} + (-r_{CM}(0) \dot{\theta}_{CM}(0)) \hat{k}$$

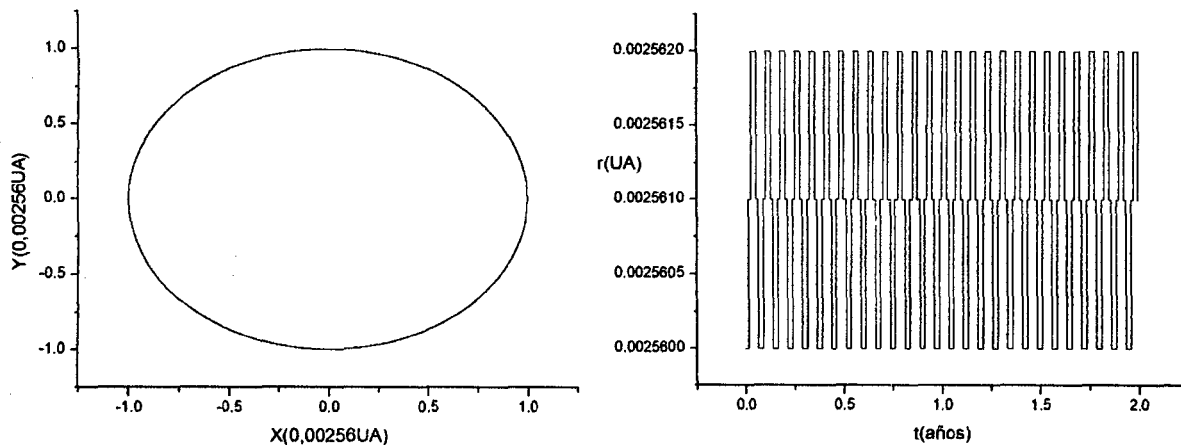
Se obtendrían las siguientes ecuaciones,

$$\dot{r}_{CM}(0) \equiv 0 \quad (3.47)$$

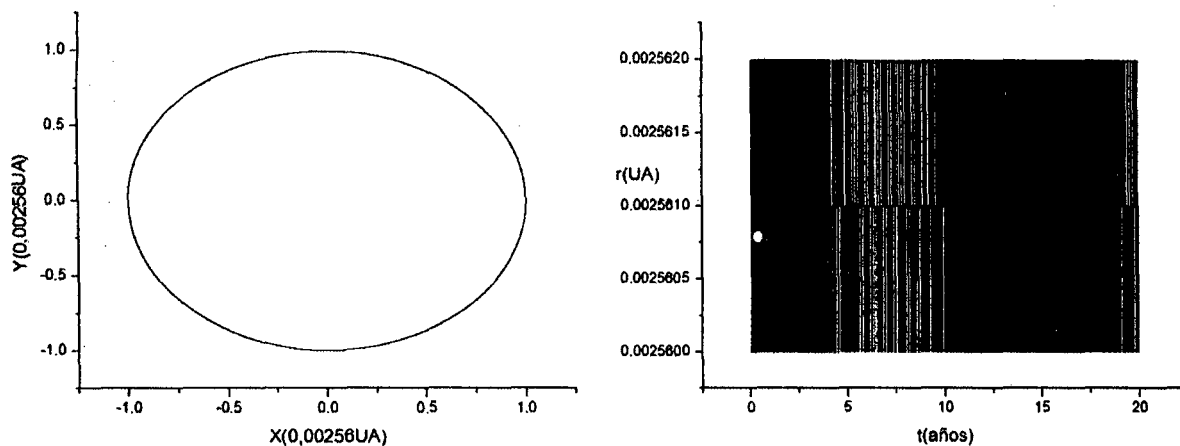
$$\dot{\theta}_{CM}(0) \equiv - \left\{ \frac{m_{sa}}{m_{pl} + m_{sa}} \right\} \frac{v' \operatorname{sen} \varepsilon}{r_{CM}(0)} \quad (3.48)$$

$$\dot{\phi}_{CM}(0) \equiv \left[2\pi + \left\{ \frac{m_{sa}}{m_{pl} + m_{sa}} \right\} v' \cos \varepsilon \right] \left\{ \frac{1}{r_{CM}(0)} \right\} \quad (3.49)$$

2) Gráficas del sistema Tierra-Luna. Trayectoria orbital lunar y distancia relativa Tierra-Luna r con $v'=0,2151$ UA/año, para 2 y 20 años. Fig C2.



(a)



(b)

Fig C2 Sistema Tierra-Luna. Órbita lunar y distancia Tierra-Luna con $v'= 0,2151$ UA/año para (a) 2 años y (b) 20 años.

Apéndice D

Programas

Rutinas del MATLAB para la solución de sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden: ODE45 y ODE113.

```
y0 = [1; 0; 0; 1.00256; 0; 0; 0; 2*pi; 0; 0; 6.4728; 0.1095];
%y0 = [1.00003; pi/2; 0; 0.00256; pi/2; 0; 0; -0.00023; 6.28562; 0; -
7.3231; 83.7037];
```

```
options = odeset('RelTol',1e-6,'AbsTol',1e-6);
```

```
[t,y] = ode113(@f,[0 1],y0,options);
```

```
figure;
```

```
plot((y(:,4)-y(:,1))/0.00256,(y(:,5)-y(:,2))/0.00256);
title('Proyeccion de la orbita lunar en el plano xy');
ylabel('y(0,00256 UA)');
xlabel('x(0,00256 UA)');
```

```
figure;
```

```
%k7=7.3477*1.e22;%masa de la Luna
ML=7.34767309245735*1.e22;%masa de la Luna
%k8=597.219*1.e22;%masa de la Tierra
MT=597.219*1.e22;%masa de la Tierra
%k9=1.9891*1.e30;%masa del Sol
M=1.9891*1.e30;%masa del Sol
%k3=40.5313;
%k3=0.5*(k8/k7);
%k4=-3200.2409;
%k4=-4*pi^2*(k8/k7);
%k5=-39.4786;
%k5=-4*pi^2;
%k6=-11863.5194e-8;
%k6=-4*pi^2*(k8/k9);
r3 = y(:,7).^2 + y(:,8).^2 + y(:,9).^2;
r4 = y(:,10).^2 + y(:,11).^2 + y(:,12).^2;
%r5 = (y(:,1).^2 + y(:,2).^2 + y(:,3).^2).^0.5;
r5 = sqrt(y(:,1).^2 + y(:,2).^2 + y(:,3).^2);
%r6 = (y(:,4).^2 + y(:,5).^2 + y(:,6).^2).^0.5;
r6 = sqrt(y(:,4).^2 + y(:,5).^2 + y(:,6).^2);
%r34 = ((y(:,4)-y(:,1)).^2 + (y(:,5)-y(:,2)).^2 + (y(:,6)-
y(:,3)).^2).^0.5;
r34 = sqrt((y(:,4)-y(:,1)).^2 + (y(:,5)-y(:,2)).^2 + (y(:,6)-
y(:,3)).^2);

%E = k3*r3 + 0.5*r4 + k4./r5 + k5./r6 + k6./r34;
E = 0.5*(MT/ML)*r3 + 0.5*r4 -4*pi^2*(MT/ML)./r5 -4*pi^2./r6 -
4*pi^2*(MT/M)./r34;
```

```
plot(t,E,'b');
```

```

title('Energia mecanica adimensional contra el tiempo');
ylabel('Em(adimensional)');
xlabel('t(años)');

figure;

r7 = ((y(:,4)-y(:,1)).^2 + (y(:,5)-y(:,2)).^2 + (y(:,6)-y(:,3)).^2
).^0.5;

plot(t,r7/0.00256,'b');
title('Distancia relativa Tierra-Luna, dTL contra el tiempo');
ylabel('dTL(0,00256 UA)');
xlabel('t(años)');

figure;

r8 = ((y(:,5)-y(:,2)).*(y(:,12)-y(:,9))-(y(:,11)-y(:,8)).*(y(:,6)-
y(:,3)))/((y(:,4)-y(:,1)).*(y(:,12)-y(:,9))-(y(:,10)-
y(:,7)).*(y(:,6)-y(:,3))));

r9 = atan(r8);%r9=fi

plot(t,r9,'b');
title('Precesion del plano orbital lunar instantaneo');
ylabel('fi(rad)');
xlabel('t(años)');

figure;

k10=5*pi./180;
r10 = (y(:,4)-y(:,1));
r11 = (y(:,5)-y(:,2)).*cos(k10)+(y(:,6)-y(:,3)).*sin(k10);
r12 = -(y(:,5)-y(:,2)).*sin(k10)+(y(:,6)-y(:,3)).*cos(k10);

plot3(r10/0.00256,r11/0.00256,r12/0.00256,'b');
title('Movimiento espacial lunar');
zlabel('z(0,00256 UA)');
ylabel('y(0,00256 UA)');
xlabel('x(0,00256 UA)');

figure;

plot(r10/0.00256,r11/0.00256,'b');
title('Proyeccion del movimiento lunar en el plano xy inclinado 5°');
ylabel('y(0,00256 UA)');
xlabel('x(0,00256 UA)');

function dydt = f(t,y)
k = -4*pi^2;
%k7=7.3477*1.e22;%masa de la Luna
ML=7.34767309245735*1.e22;%masa de la Luna
%k8=597.219*1.e22;%masa de la Tierra
MT=597.219*1.e22;%masa de la Tierra
%k9=1.9891*1.e30;%masa del Sol
M=1.9891*1.e30;%masa del Sol
%k1 = 3.71e-8;
%k1= k7/k9;
%k2 = 302.02e-8;

```

```

%k2= k8/k9;
%r1 = (y(1)^2 + y(2)^2 + y(3)^2) ^ 1.5;
r1 = (sqrt(y(1)^2 + y(2)^2 + y(3)^2))^3;
%r2 = (y(4)^2 + y(5)^2 + y(6)^2) ^ 1.5;
r2 = (sqrt(y(4)^2 + y(5)^2 + y(6)^2))^3;
%r12 = ((y(1)-y(4))^2 + (y(2)-y(5))^2 + (y(3)-y(6))^2) ^ 1.5 ;
r12 = (sqrt((y(1)-y(4))^2 + (y(2)-y(5))^2 + (y(3)-y(6))^2))^3 ;

```

```

dydt = [ y(7)
         y(8)
         y(9)
         y(10)
         y(11)
         y(12)
         k*( y(1)/r1 + (ML/M)*((y(1)-y(4))/r12) )
         k*( y(2)/r1 + (ML/M)*((y(2)-y(5))/r12) )
         k*( y(3)/r1 + (ML/M)*((y(3)-y(6))/r12) )
         k*( y(4)/r2 - (MT/M)*((y(1)-y(4))/r12) )
         k*( y(5)/r2 - (MT/M)*((y(2)-y(5))/r12) )
         k*( y(6)/r2 - (MT/M)*((y(3)-y(6))/r12) ) ];

```

```
%figure;
```

```

%plot(t,y(:,4)/0.00256,'b');
%title('r-t');
%ylabel('r(0,00256 UA)');
%xlabel('t(años)');

```

```
%figure;
```

```

%plot(t,y(:,5),'b');
%title('teta-t');
%ylabel('teta(rad)');
%xlabel('t(años)');

```

```
%function dydt = f(t,y)
```

```
%k1 = 0.7131;
```

```
%k2 = 0.120e-3;
```

```

%dydt = [ y(7)
         %y(8)
         %y(9)
         %y(10)
         %y(11)
         %y(12)
         %y(1)*(y(8)^2 + (y(9)*sin(y(2))))^2-4*pi^2/y(1)^2-
k1*y(4)^2*(3*(sin(y(5))*sin(y(2))*cos(y(6)-
y(3))+cos(y(5))*cos(y(2)))^2-1)/y(1)^4
         %-2*y(7)*y(8)/y(1)+0.5*y(9)^2*sin(2*y(2))+
k1*y(4)^2*((sin(y(5)))^2*sin(2*y(2))*(cos(y(6)-y(3)))^2 +
sin(2*y(5))*cos(2*y(2))*cos(y(6)-y(3))-
(cos(y(5)))^2*sin(2*y(2)))/y(1)^5
         %-y(8)*y(9)*sin(2*y(2))/(sin(y(2)))^2 - 2*y(7)*y(9)/y(1) +
2*k1*y(4)^2*(sin(y(5))*cos(y(6)-y(3))+
cos(y(5))*cos(y(2))/sin(y(2)))*sin(y(5))*sin(y(6)-y(3))/y(1)^5

```

```

    % (y(11)^2 + (y(12)*sin(y(5)))^2)*y(4) - k2/y(4)^2 +
4*pi^2*y(4)*(3*(sin(y(5))*sin(y(2))*cos(y(6) -
y(3)) + cos(y(5))*cos(y(2)))^2 - 1)/y(1)^3
    %-2*y(10)*y(11)/y(4) + 0.5*y(12)^2*sin(2*y(5)) +
6*pi^2*((sin(y(2)))^2*sin(2*y(5))*(cos(y(6) - y(3)))^2 +
sin(2*y(2))*cos(2*y(5))*cos(y(6) - y(3)) -
(cos(y(2)))^2*sin(2*y(5)))/y(1)^3
    %-y(11)*y(12)*sin(2*y(5))/(sin(y(5)))^2 - 2*y(10)*y(12)/y(4)
- 12*pi^2*(sin(y(2))*cos(y(6) - y(3)) +
cos(y(2))*cos(y(5))/sin(y(5)))*sin(y(2))*sin(y(6) - y(3))/y(1)^3 ];

% -----
-----

```