

**UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE INGENIERÍA CIVIL**



**MODELOS DE ELEMENTOS FINITOS h -ADAPTIVOS EN EL
ANÁLISIS DE CÁSCARAS AXISIMÉTRICAS**

TESIS

Para optar el Título Profesional de:

INGENIERO CIVIL

MARCO POLO ASCENCIOS VÁSQUEZ

Lima- Perú

2011

Digitalizado por:

**Consortio Digital del
Conocimiento MebLatam,
Hemisferio y Dalse**

DEDICATORIA

Dedico esta tesis a mis padres, Dora y Neptalí, a mi padrino Víctor y a mi hermana Edith; quienes desde el cielo me guían, por todo lo que me han dado en esta vida y por sus sabios consejos. Estoy seguro de que se sienten orgullosos de mí.

A mis hermanas: Ruth, Liz y Marlene, por el apoyo que siempre me han brindado.

A mi esposa Antonieta y a mis hijos: Cristina, Arturo y Andrea, por su amor y compañía en cada etapa del camino recorrido juntos. Ellos son sin duda el motor que me impulsa a continuar superándome.

AGRADECIMIENTOS

Antes que a todos quiero agradecer a Dios por darme las fuerzas necesarias en los momentos en que más las necesité y bendecirme con la posibilidad de caminar a su lado durante mi vida.

A mi Asesor Dr. Hugo Scaletti, quien ha inculcado en mí un sentido de seriedad, responsabilidad y rigor académico sin los cuales no podría tener una formación académica como ingeniero.

También me gustaría agradecer los consejos recibidos a lo largo de todos estos años del Dr. Javier Piqué del Pozo.

Gracias a ambos por haber fomentado en mí el deseo de superación y el anhelo de triunfo en la vida. Gracias por su apoyo y comprensión en los momentos difíciles. Espero no defraudarlos y contar siempre con su valioso apoyo.

ÍNDICE

	Pág.
RESUMEN	III
LISTA DE FIGURAS Y TABLAS	V
LISTA DE SÍMBOLOS	IX
INTRODUCCIÓN	1
CAPÍTULO I: TÉCNICAS DE ELEMENTOS FINITOS	3
1.1 NATURALEZA APROXIMADA DEL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS..	3
1.2 APLICACIÓN AL ANÁLISIS ESTRUCTURAL.....	4
1.3 NORMAS DE ERROR Y VELOCIDAD DE CONVERGENCIA.....	8
1.4 REFINAMIENTO h-ADAPTIVO.....	12
CAPÍTULO II: MODELO h-ADAPTIVO	14
2.1 ECUACIONES BÁSICAS.....	14
2.2 SOLUCIÓN CON ELEMENTOS FINITOS TRONCO-CÓNICOS.....	20
2.3 ESTIMACIÓN DEL ERROR.....	26
CAPÍTULO III: APLICACIONES	29
3.1 CÚPULAS ESFÉRICAS.....	29
3.1.1 Cúpula esférica	29
3.1.2 Domo esférico con abertura	34
3.1.3 Tanque esférico	38
3.2 RESERVORIOS APOYADOS.....	43
3.2.1 Reservoirio recto.....	43
3.2.2 Reservoirio recto con cubierta circular	47
3.3 RESERVORIOS ELEVADOS	51

3.3.1 Tanque Intze	51
3.3.2 Reservoirio elevado en forma de copa	57
3.3.3 Reservoirio elevado doble.....	62
3.4 OTRAS ESTRUCTURAS.....	67
3.4.1 Tanque cónico.....	67
3.4.2 Panteón Romano	72
CONCLUSIONES	78
RECOMENDACIONES	80
BIBLIOGRAFÍA	81
ANEXO	83
DESCRIPCIÓN DEL PROGRAMA hAdaptive.xls	83
CÓDIGO EN VISUAL BASIC.....	87

RESUMEN

En el estudio y resolución de procesos que llevan implícita una ecuación en derivadas parciales, una técnica cada vez más utilizada en prácticamente todas las ramas de la ciencia y de la ingeniería, es la de los elementos finitos.

Las técnicas de elementos finitos son intrínsecamente aproximadas. La solución se basa en aproximaciones de carácter local, típicamente polinómicas. Si las funciones incógnita se aproximan con polinomios completos de grado p y los elementos son de un tamaño h , los errores en las incógnitas básicas (que en el análisis estructural son habitualmente las componentes de desplazamiento) son de orden h^{p+1} . Para las derivadas m -ésimas de las incógnitas básicas el error es típicamente mayor, de orden h^{p-m+1} . Dependiendo del problema considerado y de la clase de elementos finitos utilizados, las medidas de esfuerzo y de deformación en los problemas de análisis estructural pueden relacionarse con derivadas primeras o segundas de los desplazamientos.

Por otro lado, las aproximaciones locales, independientes para cada elemento, no son continuas en los bordes entre elementos en el sentido más estricto. En los resultados obtenidos con una malla inicial pueden observarse diversas manifestaciones de tales faltas de continuidad, que los programas de cómputo corrigen con técnicas relativamente simples, pero que pueden servir de base para estimar la magnitud de los errores. Esta información, combinada con el orden de convergencia, permite establecer el tamaño que deberían tener los elementos en cada región del modelo para conseguir los objetivos de precisión.

Al disponerse de computadoras cada vez más veloces y con más memoria, se ha hecho factible procesar modelos con un número muy grande de incógnitas. Como consecuencia, han cobrado importancia los estudios relativos a la "convergencia" de distintos tipos de elementos finitos, es decir, la reducción de los errores a medida que se refina la malla de elementos, y más recientemente en relación al refinamiento automático de las mallas (proceso h -adaptivo) o de las aproximaciones locales (p -adaptivo) para conseguir una precisión establecida a-priori en los resultados.

La mayor parte de la información disponible en los textos y publicaciones especializadas con relación a procedimientos h -adaptivos se refiere a modelos bidimensionales y más específicamente a estados planos de esfuerzo o a estados planos de deformación. En el presente trabajo se aplican ideas análogas a la situación geoméricamente simple de cáscaras axisimétricas.

La inclusión del refinamiento h -adaptivo en los programas de análisis estructural no solamente facilitará grandemente la preparación de los modelos; sino que garantizará además que los resultados obtenidos sean correctos, es decir, con errores dentro de los límites preestablecidos.

El objetivo principal de esta tesis es estudiar la aplicabilidad de un proceso de refinamiento automático h -adaptivo en el análisis de cáscaras axisimétricas con elementos finitos.

Como objetivos más específicos se plantean:

- El desarrollo de un programa de cómputo para el análisis de cáscaras axisimétricas, con refinamiento h -adaptivo.
- La identificación de las posibles dificultades para el refinamiento automático en el análisis de cáscaras axisimétricas, teniendo en cuenta las limitaciones prácticas que resultan de la aritmética imperfecta de las computadoras digitales.

Con este proceso de refinamiento es factible obtener resultados muy precisos, mucho más que lo que podría ser necesario en cualquier diseño.

LISTA DE FIGURAS Y TABLAS

	Pág.
Fig. 1.1 Viga corta en voladizo.....	9
Fig. 1.2 Velocidades de convergencia (Zienkiewicz et al., 2004).	9
Fig. 1.3 Malla adaptable de elementos triangulares lineales para la viga corta en voladizo (Zienkiewicz et al., 2004).	10
Fig. 2.1 Definición de ejes globales, ejes locales y radio de curvatura positivo (Zienkiewicz et al., 2004).	16
Fig. 2.2 Cáscara de revolución, carga, desplazamiento y resultantes de esfuerzo. La cáscara se representa como conjunto de troncos de cono. (Zienkiewicz et al., 2004).	20
Fig. 2.3 Un elemento de cáscara de revolución. (Zienkiewicz et al., 2004).	21
Fig. 3.1 Cúpula esférica. Timoshenko(1959).....	29
Fig. 3.2 Refinamiento h-adaptivo	30
Fig. 3.3 Reducción del error relativo	31
Fig. 3.4 Desplazamientos máximos	31
Fig. 3.5 Momentos meridionales, M_s	32
Fig. 3.6 Momentos tangenciales, M_θ	32
Fig. 3.7 Fuerzas de membrana meridionales, N_s	33
Fig. 3.8 Fuerzas de membrana tangenciales, N_θ	33
Fig. 3.9 Domo esférico con abertura. Timoshenko(1959).....	34
Fig. 3.10 Refinamiento h-adaptivo (iteración 1).	34
Fig. 3.11 Refinamiento h-adaptivo (iteraciones 2 y 3).	35
Fig. 3.12 Reducción del error relativo.	35
Fig. 3.13 Desplazamientos máximos	36

Fig. 3.14 Momentos meridionales, M_s	37
Fig. 3.15 Momentos tangenciales, M_θ	37
Fig. 3.16 Fuerzas de membrana meridionales, N_s	37
Fig. 3.17 Fuerzas de membrana tangenciales, N_θ	38
Fig. 3.18 Tanque esférico. Timoshenko (1959).....	38
Fig. 3.19 Refinamiento h-adaptivo (iteraciones 1 a 4).....	39
Fig. 3.20 Refinamiento h-adaptivo (iteraciones 5 a 7).....	40
Fig. 3.21 Reducción del error relativo	41
Fig. 3.22 Desplazamientos máximos.	41
Fig. 3.23 Momentos meridionales, M_s	42
Fig. 3.24 Momentos tangenciales, M_θ	42
Fig. 3.25 Fuerzas de membrana meridionales, N_s	43
Fig. 3.26 Fuerzas de membrana tangenciales, N_θ	43
Fig. 3.27 Reservorio recto. Timoshenko (1959).....	44
Fig. 3.28 Refinamiento h-adaptivo	44
Fig. 3.29 Reducción del error relativo	45
Fig. 3.30 Desplazamientos máximos	45
Fig. 3.31 Momentos meridionales, M_s	46
Fig. 3.32 Momentos tangenciales, M_θ	46
Fig. 3.33 Fuerzas de membrana tangenciales, N_θ	47
Fig. 3.34 Reservorio recto con cubierta circular. Abbett (1957).....	47
Fig. 3.35 Refinamiento h-adaptivo	48
Fig. 3.36 Reducción del error relativo.	49
Fig. 3.37 Desplazamientos máximos.	49
Fig. 3.38 Momentos meridionales, M_s	50
Fig. 3.39 Momentos tangenciales, M_θ	50
Fig. 3.40 Fuerzas de membrana tangenciales, N_θ	50

Fig. 3.41 Reservorio elevado con fuste recto y cubierta circular. Guerrin (1968) ..	51
.....	
Fig. 3.42 Refinamiento h-adaptivo (iteraciones 1 a 3).....	52
Fig. 3.43 Refinamiento h-adaptivo (iteraciones 4 y 5).....	53
Fig. 3.44 Reducción del error relativo	53
Fig. 3.45 Desplazamientos máximos	54
Fig. 3.46 Momentos meridionales, M_S	55
Fig. 3.47 Momentos tangenciales, M_θ	55
Fig. 3.48 Fuerzas de membrana meridionales, N_S	56
Fig. 3.49 Fuerzas de membrana tangenciales, N_θ	56
Fig. 3.50 Reservorio elevado en forma de copa. Guerrin (1968).....	57
Fig. 3.51 Refinamiento h-adaptivo	58
Fig. 3.52 Reducción del error relativo	59
Fig. 3.53 Desplazamientos máximos	59
Fig. 3.54 Momentos meridionales, M_S	60
Fig. 3.55 Momentos tangenciales, M_θ	60
Fig. 3.56 Fuerzas de membrana meridionales, N_S	61
Fig. 3.57 Fuerzas de membrana tangenciales, N_θ	61
Fig. 3.58 Reservorio elevado con doble almacenamiento de agua. Guerrin (1968).	62
Fig. 3.59 Refinamiento h-adaptivo	63
Fig. 3.60 Reducción del error relativo	64
Fig. 3.61 Desplazamientos máximos	64
Fig. 3.62 Momentos meridionales, M_S	65
Fig. 3.63 Momentos tangenciales, M_θ	65
Fig. 3.64 Fuerzas de membrana meridionales, N_S	66
Fig. 3.65 Fuerzas de membrana tangenciales, N_θ	66

Fig. 3.66 Tanque cónico. Timoshenko (1959).....	67
Fig. 3.67 Refinamiento h-adaptivo	68
Fig. 3.68 Reducción del error relativo.	69
Fig. 3.69 Desplazamientos máximos	69
Fig. 3.70 Momentos meridionales, M_s	70
Fig. 3.71 Momentos tangenciales, M_θ	70
Fig. 3.72 Fuerzas de membrana meridionales, N_s	71
Fig. 3.73 Fuerzas de membrana tangenciales, N_θ	71
Fig. 3.74 Sección transversal del Panteón Romano. Prieto-Portar (2009).	72
Fig. 3.75 Vista interior del Panteón Romano. Prieto-Portar(2009).	73
Fig. 3.76 Vista panorámica del Panteón Romano. Foto de Stefan Bauer(2005).	73
Fig. 3.77 Refinamiento h-adaptivo	74
Fig. 3.78 Reducción del error relativo	75
Fig. 3.79 Desplazamientos máximos	75
Fig. 3.80 Momentos meridionales, M_s	76
Fig. 3.81 Momentos tangenciales, M_θ	76
Fig. 3.82 Fuerzas de membrana meridionales, N_s	77
Fig. 3.83 Fuerzas de membrana tangenciales, N_θ	77
Tabla 3.1 Refinamiento h-adaptivo (Iteraciones 4-17).....	58
Tabla 3.2 Refinamiento h-adaptivo (Iteraciones 4-8).....	63
Tabla 3.3 Refinamiento h-adaptivo (Iteraciones 3-11).....	74

LISTA DE SÍMBOLOS

\mathbf{a}	parámetros de problemas discretos
\mathbf{a}^e	vector de desplazamientos nodales
$\bar{\mathbf{b}}$	fuerzas de cuerpo (por unidad de volumen)
\mathbf{B}	matriz deformación – desplazamiento
\mathbf{D}	matriz de rigidez elástica (esfuerzo – deformación)
∂	matriz de operadores de derivación
\mathbf{e}	error local
$\mathbf{e}_u, \mathbf{e}_\sigma$	error local en \mathbf{u} o $\boldsymbol{\sigma}$
$\ e\ ; \ u\ $	norma de energía de e o u
$\boldsymbol{\varepsilon}$	componentes de deformación (vector columna)
$\boldsymbol{\sigma}$	esfuerzos en el elemento
\mathbf{f}_p^e	fuerzas nodales del elemento debidas a cargas p
$\mathbf{f}_{\varepsilon 0}^e$	fuerzas nodales del elemento debidas a deformación inicial
h	dimensión representativa del elemento
\mathbf{K}^e, \mathbf{K}	matriz de rigidez de un elemento y de la estructura
λ	potencia de la singularidad
\mathbf{N}	funciones de interpolación
η	porcentaje de error relativo
θ	índice de efectividad
Π	energía potencial total
\mathbf{q}^e	fuerzas nodales para el elemento e
S_σ	superficie con tracciones prescritas
$\bar{\mathbf{T}}$	tracciones de borde
\mathbf{u}	vector de desplazamientos en un punto cualquiera del elemento
$\hat{\mathbf{u}}$	aproximación de \mathbf{u}
V	volumen de la estructura
ξ	indicador de refinamiento

INTRODUCCIÓN

La presente tesis trata sobre el desarrollo y la aplicación de un procedimiento h -adaptivo en el análisis estructural con elementos finitos. Aunque se hace referencia al análisis de cáscaras axisimétricas de diferentes formas, los procedimientos descritos son aplicables al análisis estructural en general e incluso en la solución de sistemas de ecuaciones diferenciales en otras áreas de la ciencia y la ingeniería.

Las limitaciones computacionales eran el más grande obstáculo para la aproximación de las soluciones de ecuaciones diferenciales. Específicamente, previo al advenimiento de las computadoras electrónicas, la solución numérica de grandes sistemas de ecuaciones no fue una opción práctica. Matemáticos, científicos e ingenieros recurrieron a una variedad de procedimientos. Por ejemplo, en la literatura se describe el uso de funciones ortogonales con el método de Galerkin o con el método de Rayleigh-Ritz, pero las aplicaciones estuvieron esencialmente limitadas a formas geométricas muy simples. Los métodos de relajación fueron un medio para enfrentar la solución de grandes sistemas algebraicos, pero aún así limitados por requerimientos computacionales.

El desarrollo de las modernas computadoras se unió al reconocimiento de los elementos finitos como forma de aproximación. Los ingenieros rápidamente tomaron estas herramientas y las aplicaron a los problemas estructurales.

En la solución de elementos finitos el error más importante es el error de discretización. Dicho error está asociado con el grado de las funciones de aproximación y con las características de la malla de elementos finitos utilizada.

Para mejorar la solución de elementos finitos existen varios procedimientos. El primero es la simple reducción del tamaño de los elementos (procedimiento h -adaptivo). El segundo es incrementar el grado de las funciones de aproximación, utilizando elementos de mayor orden en una malla con una subdivisión determinada (procedimiento p -adaptivo).

Los aspectos matemáticos de la predicción del error utilizando el procedimiento p -adaptivo han sido extensamente estudiados, pudiendo obtenerse expresiones relativamente sencillas de los estimadores del error. No obstante, el procedimiento p -adaptivo reviste mayor complejidad que el refinamiento h -adaptivo.

Al disponerse de computadoras cada vez más veloces y con más memoria, se ha hecho factible procesar modelos con un número muy grande de incógnitas. Como consecuencia, han cobrado importancia los estudios relativos a la "convergencia" de los elementos finitos, es decir, la reducción de los errores a medida que se refina la malla de elementos, y más recientemente en relación al refinamiento automático de las mallas (proceso h -adaptivo) que permite dar un paso adelante en la línea de investigación del método de elementos finitos.

El trabajo desarrollado en esta tesis puede ser dividido en tres partes:

Etapa 1: Recopilación de información. En esta fase se realizó el estudio y la definición del problema a analizar, se recopiló la información teórica y los antecedentes de investigaciones anteriores relacionadas con el tema.

Etapa 2: Creación y uso del programa. Esta etapa consistió en la elaboración y prueba del programa hAdaptive.xls desarrollado en Visual Basic, encargado de realizar el proceso de refinamiento h -adaptivo.

Etapa 3: Análisis de resultados. Esta parte de la investigación se refirió al análisis de los resultados obtenidos por el programa creado y la comparación con ejemplos de la literatura consultada.

CAPÍTULO I: TÉCNICAS DE ELEMENTOS FINITOS

1.1 NATURALEZA APROXIMADA DEL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

El método de los elementos finitos es uno de los procedimientos más potentes para la solución de ecuaciones diferenciales, pudiéndose trabajar con modelos matemáticos de carácter uni, bi o tridimensional y con las acciones externas más diversas. Desde el punto de vista del ingeniero de estructuras, el método de elementos finitos puede verse como una extrapolación de los métodos de cálculo matricial para estructuras de barras al análisis de estructuras de tipo continuo.

El proceso de aproximar el comportamiento de un continuo mediante elementos finitos que se comportan de una forma similar a los elementos reales se puede comprender más fácilmente utilizando aplicaciones físicas. Por ejemplo, hay muchos casos en ingeniería en los que se requiere determinar la distribución de esfuerzos y deformaciones en un continuo elástico. Pueden ser problemas bidimensionales de tensión o deformación plana, sólidos de revolución, flexión de losas y láminas o cáscaras, que es precisamente el tema de esta tesis.

En todos los casos mencionados, los elementos componentes de un modelo discreto no están claramente identificados, como sí ocurre en estructuras más simples, compuestas por elementos de barras. En el caso de un medio continuo se definen las subregiones o *elementos finitos* mediante líneas o superficies imaginarias, en alguna medida arbitrarias. El número de interconexiones entre un elemento finito cualquiera rodeado por fronteras imaginarias y los elementos vecinos a él es infinito. Sin embargo, en el procedimiento numérico se supone que los distintos elementos están interconectados sólo en los nudos, con una continuidad imperfecta en los bordes entre elementos. Se obtiene así un modelo discreto, con un número finito de incógnitas.

Las incógnitas fundamentales en el análisis estructural son habitualmente los desplazamientos de los nudos. A partir de ellos se interpolan los desplazamientos en los puntos interiores de cada elemento. Típicamente se

emplean interpolaciones polinómicas, que en prácticamente todos los casos son sólo aproximaciones de la solución exacta. Sin embargo, se espera que a medida que se tengan elementos más pequeños se reduzcan los errores, lo que en el contexto de los elementos finitos se denomina *convergencia*.

Para que se tenga convergencia se requiere que las aproximaciones sean consistentes con las hipótesis planteadas para el elemento diferencial, a partir del cual se desarrollaron las ecuaciones que se están resolviendo. En el contexto del análisis estructural, es por lo tanto indispensable que las funciones de aproximación puedan representar exactamente movimientos de cuerpo rígido y estados de deformación constante, ya que en caso contrario no se podría obtener la solución exacta, aún cuando los elementos fueran infinitamente pequeños. Idealmente, las funciones de aproximación deben satisfacer también un mínimo de condiciones de continuidad en todos los bordes entre elementos. Si en las expresiones que gobiernan el problema se tienen derivadas hasta de orden m , se requiere continuidad en las aproximaciones para las funciones incógnita (v.g. los desplazamientos) y sus derivadas hasta de orden $m-1$. Con esto se garantiza que en las expresiones utilizadas los integrandos sean finitos en los bordes entre elementos, lo que a su vez posibilita expresar las integrales como una sumatoria de integrales análogas calculadas independientemente para cada uno de los elementos.

Dado que todo el proceso se construye a partir de aproximaciones tales como las interpolaciones de desplazamientos ya mencionadas, los resultados son en general aproximaciones a lo que serían las soluciones exactas de las ecuaciones diferenciales. Refiriéndose al caso del análisis estructural, la continuidad entre elementos sólo se satisface para la función incógnita y para sus derivadas de menor orden. Las condiciones de equilibrio sólo se cumplen para el conjunto del continuo. Normalmente tales condiciones no se cumplen punto por punto dentro y en los bordes de cada elemento.

1.2 APLICACIÓN AL ANÁLISIS ESTRUCTURAL

Las ecuaciones que deben resolverse en un problema de análisis estructural corresponden a tres grupos. Por un lado, deben considerarse las ecuaciones de equilibrio, típicamente expresadas en términos de fuerzas o de esfuerzos. De otro lado, deben satisfacerse condiciones de continuidad

geométrica, expresadas en términos de desplazamientos o de deformaciones. Finalmente, se introducen las relaciones constitutivas, que establecen un nexo entre las medidas de esfuerzo (o fuerzas resultantes de sección) y las correspondientes medidas de deformación. En la literatura especializada se encuentran más de un centenar de formas distintas para resolver las referidas ecuaciones mediante elementos finitos. Sin embargo, la formulación más exitosa, como se observa por su uso casi exclusivo en los programas de cómputo comerciales, es la de los llamados *modelos de desplazamiento*. Esta formulación es la empleada en esta tesis y se describe brevemente a continuación.

Suponiendo que el medio estudiado haya sido dividido en elementos, se plantean separadamente para cada uno de ellos interpolaciones de los desplazamientos:

$$\mathbf{u} \approx \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{N} \mathbf{a}^e \quad (1.1)$$

En esta expresión, \mathbf{u} es una matriz columna que agrupa a las distintas componentes de desplazamiento en un punto cualquiera del elemento, $\hat{\mathbf{u}}$ es su aproximación numérica, \mathbf{a}^e es una matriz columna que incluye todas las componentes de desplazamiento en los nudos directamente vinculados con el elemento y \mathbf{N} es una matriz de funciones de interpolación. En aplicaciones tales como el análisis de estados planos de esfuerzo o el análisis de sólidos tridimensionales, es habitual utilizar las mismas funciones de interpolación para cada una de las componentes de desplazamiento en las distintas direcciones del modelo, evitando así introducir en el modelo numérico una anisotropía ficticia. Sin embargo, esto no es indispensable, ni siempre resulta lo más conveniente. En el capítulo siguiente, en el que se analizan las expresiones empleadas en este trabajo, puede observarse que se han usado interpolaciones lineales para la componente de desplazamiento en la dirección meridional de la cáscara y cúbicas en dirección transversal, lo que resulta más apropiado para el análisis de cáscaras axisimétricas, con las hipótesis simplificadoras habituales.

Las expresiones de interpolación, \mathbf{N} , deben ser suficientemente derivables y continuas en todos los puntos del elemento. Refiriéndose al análisis lineal de esfuerzos en un sólido, para el que las medidas de deformación se relacionan con derivadas primeras de los desplazamientos, suficientemente derivables significa que las interpolaciones deben ser lineales o de mayor grado. Sin

embargo, al analizar losas o cáscaras con las hipótesis habituales algunas de las medidas de deformación se relacionan con derivadas segundas de los desplazamientos transversales, que deben ser entonces interpolados con polinomios de grado 2 ó superior.

A partir de las expresiones de interpolación de desplazamientos se obtienen expresiones para las componentes de deformación:

$$\boldsymbol{\varepsilon} \approx \partial \hat{\mathbf{u}} = \partial \mathbf{N} \mathbf{a}^e = \mathbf{B} \mathbf{a}^e \quad (1.2)$$

Donde ∂ denota una matriz de operadores de derivación. En este trabajo se ha supuesto que las deformaciones y desplazamientos son pequeños, empleándose deformaciones infinitesimales. Con tales hipótesis, las deformaciones $\boldsymbol{\varepsilon}$ se relacionan linealmente con los desplazamientos nodales \mathbf{a}^e , mediante la matriz deformación – desplazamiento, \mathbf{B} .

Suponiendo también una relación lineal entre esfuerzos y deformaciones, se puede escribir:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} \approx \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{a}^e \quad (1.3)$$

Las expresiones de interpolación (1.1) son continuas en el interior de cada elemento y, además, se satisfacen un mínimo de condiciones de continuidad en los bordes entre elementos. Por otro lado, con las expresiones (1.2) y (1.3) se satisfacen exactamente las ecuaciones constitutivas. El proceso siguiente consiste en determinar los parámetros \mathbf{a} que minimizan los errores en las restantes ecuaciones: las ecuaciones diferenciales de equilibrio. Para ello, pueden remplazarse la solución aproximada (1.1) y sus consecuencias (1.2) y (1.3) en las ecuaciones diferenciales, obteniéndose un error o residuo, que se minimiza empleando alguno de los criterios de los procesos clásicos de parámetros indeterminados. Para una descripción simple de tales procesos, véase el texto de Segerlind (1984). Sin embargo puede ser más fácil emplear una reformulación de las ecuaciones de equilibrio, como el principio de trabajos virtuales o el funcional de mínima energía potencial. Refiriéndose a este último, se puede demostrar que los desplazamientos \mathbf{u} que satisfacen las ecuaciones de equilibrio son los que hacen mínimo el funcional de energía potencial:

$$\Pi_P(\mathbf{u}) = \int_V \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV - \int_V \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{b}} dV - \int_{S_\sigma} \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{T}} dS \quad (1.4)$$

Donde \mathbf{u} son los desplazamientos, $\boldsymbol{\varepsilon}$ y $\boldsymbol{\sigma}$ las deformaciones y esfuerzos, respectivamente (expresados en función de los desplazamientos), $\bar{\mathbf{b}}$ son las fuerzas de cuerpo (por unidad de volumen) y $\bar{\mathbf{T}}$ las tracciones de borde (fuerzas de superficie). V es el volumen de la estructura y S_σ la porción de su superficie donde las tracciones están prescritas.

Al remplazar las aproximaciones (1.1) y sus consecuencias (1.2) y (1.3) en el funcional (1.4), éste se transforma en una simple función de los parámetros indeterminados \mathbf{a} (los desplazamientos de los nudos):

$$\Pi_p(\mathbf{a}) = \sum_e \left(\int_{V_e} \frac{1}{2} (\mathbf{B}\mathbf{a})^T (\mathbf{D}\mathbf{B}\mathbf{a}) dV \right) - \sum_e \left(\int_{V_e} (\mathbf{N}\mathbf{a})^T \bar{\mathbf{b}} dV \right) - \sum_e \left(\int_{S_{\sigma_e}} (\mathbf{N}\mathbf{a})^T \bar{\mathbf{T}} dS \right) \quad (1.5)$$

Al ser las aproximaciones distintas para cada elemento, las integrales han sido descompuestas en sumatorias de expresiones análogas sobre cada elemento o segmento de borde. Los parámetros \mathbf{a} que minimizan (1.5) son aquello para los que:

$$\frac{\partial \Pi_p}{\partial \mathbf{a}} = \sum_e \mathbf{q}^e = \mathbf{0} \quad (1.6)$$

Donde:

$$\mathbf{q}^e = \mathbf{K}^e \mathbf{a}^e + \mathbf{f}_p^e + \mathbf{f}_{\varepsilon_0}^e \quad (1.7)$$

donde \mathbf{f}_p^e son las fuerzas nodales necesarias para equilibrar cualquier carga distribuida que actúe sobre el elemento y $\mathbf{f}_{\varepsilon_0}^e$ las fuerzas nodales necesarias para compensar cualquier deformación inicial, como la que puede ocasionar un cambio de temperatura. El primer término representa las fuerzas inducidas por los desplazamientos de los nudos, en donde \mathbf{K}^e es la matriz de rigidez del elemento.

De (1.6) y (1.7) se obtiene:

$$\mathbf{K} \mathbf{a} = \mathbf{f} \quad (1.8)$$

En esta ecuación \mathbf{K} es la matriz de rigidez de la estructura, obtenida del ensamble de las \mathbf{K}^e , \mathbf{a} son los desplazamientos nodales y \mathbf{f} son fuerzas obtenidas al ensamblar \mathbf{f}_p^e y $\mathbf{f}_{\varepsilon_0}^e$ con signo cambiado. Al resolver (1.8) se obtienen los desplazamientos \mathbf{a} y luego, aplicando (1.2) y (1.3), las deformaciones y los esfuerzos (o fuerzas resultantes en las secciones).

Sin embargo, el equilibrio es satisfecho sólo en forma aproximada. Las fuerzas nodales \mathbf{q}^e sí están en equilibrio, pero los esfuerzos (o fuerzas

resultantes de sección) no lo están en cada punto, en el interior y en los bordes de los elementos. Los errores observados son la base para evaluar la calidad del modelo y para definir el tamaño que deberían tener los elementos para conseguir una precisión preestablecida, como se detalla más adelante.

1.3 NORMAS DE ERROR Y VELOCIDAD DE CONVERGENCIA.

El método de los elementos finitos se basa en aproximaciones locales de las funciones incógnita, y en consecuencia produce solamente una aproximación a la solución exacta de las ecuaciones diferenciales. Esta aproximación dará la solución exacta en el límite, si el tamaño h de los elementos se va haciendo cada vez más pequeño.

Suponiendo que la solución exacta puede desarrollarse en series en las proximidades de cualquier punto o nudo i , se tendría, para cualquier componente de desplazamiento:

$$u = u_i + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i (x - x_i) + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_i (y - y_i) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i (x - x_i)^2 + \dots \quad (1.9)$$

Si en el interior de un elemento de tamaño h se emplea un desarrollo polinómico de grado p , éste podrá ajustarse localmente al desarrollo en series hasta dicho grado y, como x e y son de orden h , el error en u será de $O(h^{p+1})$. Así, por ejemplo, si en un problema de elasticidad plana se emplean aproximaciones lineales ($p = 1$), se debe esperar errores en u de $O(h^2)$, lo cual implica que el error en los desplazamientos se reducirá a $1/4$ si el tamaño de los elementos de la malla se reduce a la mitad.

Con un argumento similar, las deformaciones (o los esfuerzos) dadas por las derivadas m -ésimas de los desplazamientos, convergerían con un error de $O(h^{p+1-m})$. Para $m = 1$ en el ejemplo anterior, se tendría que el error de convergencia sería $O(h)$. La energía de deformación, relacionada con el cuadrado de los esfuerzos, exhibirá un error de $O(h^{2(p+1-m)})$.

Estos argumentos son correctos para problemas sin singularidades. Para problemas con singularidad puede demostrarse que el orden de convergencia es $O(NGL)^{-\lambda/2}$ donde NGL es el número de grados de libertad y λ es un número asociado a la intensidad de la singularidad. Para problemas de elasticidad, λ varía desde 0.5 para una fisura casi cerrada a 0.7 para un ángulo de 90° .

En la Figura 1.1 se muestra un problema con una influencia de singularidad fuerte (Zienkiewicz et al., 2004).

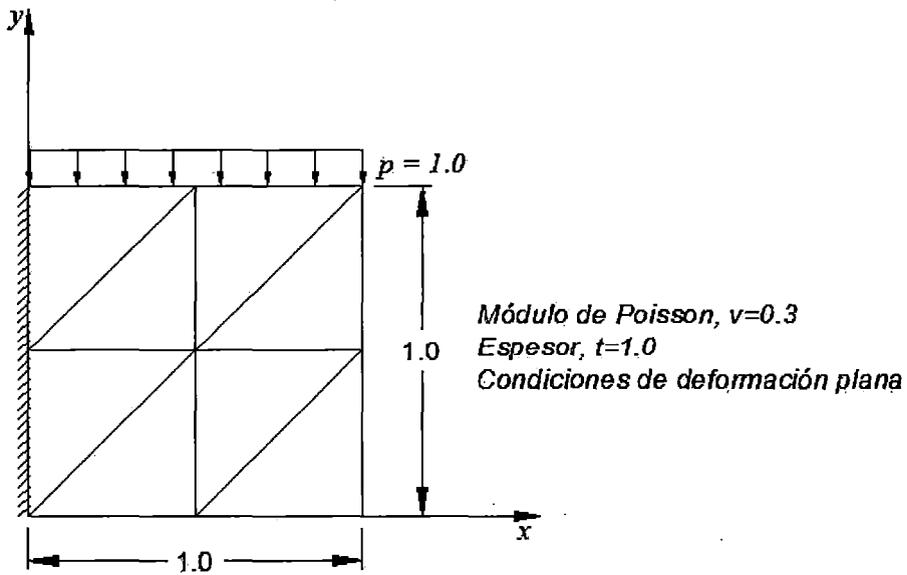
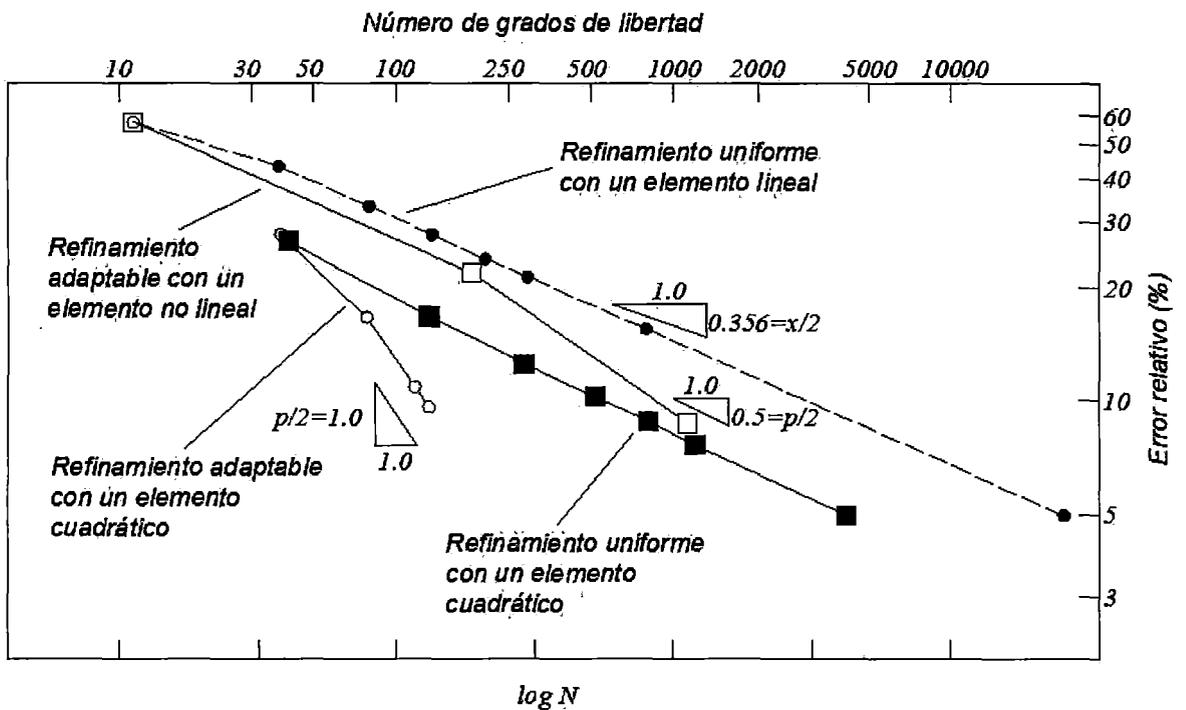


Fig. 1.1 Viga corta en voladizo



$\lambda/2=0.356$, Velocidad teórica de convergencia para un refinamiento uniforme
 $p/2$ máxima velocidad de convergencia

Fig. 1.2 Velocidades de convergencia (Zienkiewicz et al., 2004).

En la Figura 1.2 se muestra el error relativo en el esfuerzo normal máximo como función del número de grados de libertad. El número de grados de libertad es aproximadamente inversamente proporcional al tamaño de los elementos, h , al cuadrado. En consecuencia, teniendo en cuenta que la gráfica se presenta con escalas logarítmicas, debería esperarse una pendiente de aproximadamente 1:0.5 al emplear elementos con interpolaciones lineales y de 1:1 al utilizar elementos con interpolaciones de segundo grado. Al utilizar mallas con una subdivisión uniforme, la pendiente es casi la misma (1:0.356) porque predomina la singularidad. Sin embargo, sí puede alcanzarse la velocidad de convergencia teórica, dependiente de p , cuando se utilizan mallas con distinta densidad de elementos, como se muestra en la secuencia de mallas de la Figura 1.3. Los resultados correspondientes también han sido graficados en la Figura 1.2.

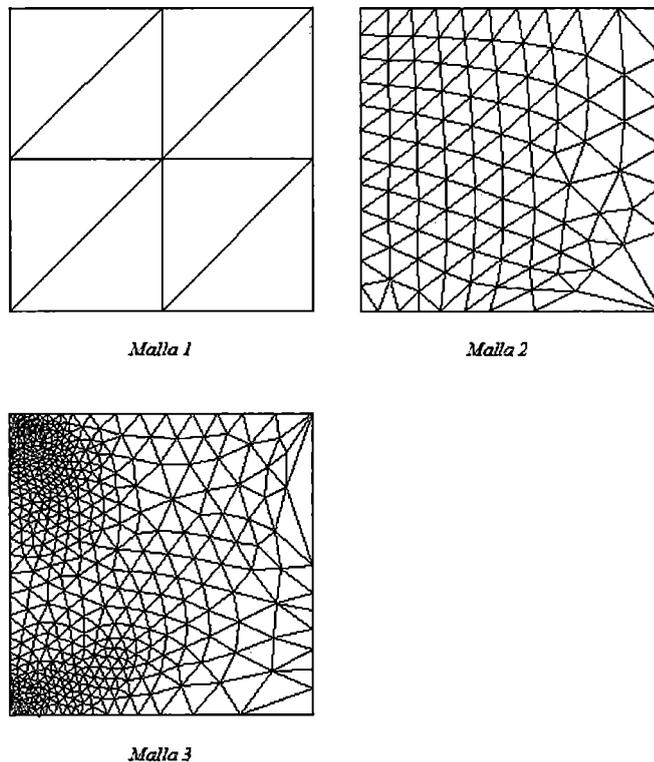


Fig. 1.3 Malla adaptable de elementos triangulares lineales para la viga corta en voladizo (Zienkiewicz et al., 2004).

El hecho de que determinar la velocidad de convergencia a priori resulte imposible en la práctica quiere decir que con la excepción de los problemas más simples, la extrapolación a la respuesta exacta no es generalmente útil a la hora de estimar errores. La manera óptima de refinar la aproximación para conseguir resultados de una exactitud deseada dada será un proceso adaptable, pudiendo

ser necesarios muchos pasos para alcanzar resultados óptimos. Para ello se requiere en primer lugar estimar los errores asociados a una determinada malla.

Si se conociera la solución exacta (desplazamientos $\hat{\mathbf{u}}$, esfuerzos $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$) se podrían cuantificar los errores en términos de desplazamientos:

$$\mathbf{e}_u = \mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}} \quad (1.9)$$

o de esfuerzos:

$$\mathbf{e}_\sigma = \boldsymbol{\sigma} - \hat{\boldsymbol{\sigma}} \quad (1.10)$$

Sin embargo, la determinación del error local en esta forma no es siempre la conveniente, y a veces puede resultar engañosa. Por ejemplo, bajo una carga puntual ambos errores, en desplazamientos y en esfuerzos, serán localmente infinitos, aunque la solución en conjunto sea aceptable. Situaciones similares se dan cerca de esquinas en aberturas, donde existen singularidades de esfuerzos.

Por esta razón, pueden ser más convenientes ciertas normas que representan alguna cantidad escalar integral para medir el error o la función misma. Por ejemplo, en el contexto del análisis estructural, podría usarse como medida del error una norma de energía:

$$\|e\| = \left[\frac{1}{2} \int (\boldsymbol{\sigma} - \hat{\boldsymbol{\sigma}})^T \mathbf{D}^{-1} (\boldsymbol{\sigma} - \hat{\boldsymbol{\sigma}}) dV \right]^{1/2} = \left[\frac{1}{2} \int (\boldsymbol{\varepsilon} - \hat{\boldsymbol{\varepsilon}})^T (\boldsymbol{\sigma} - \hat{\boldsymbol{\sigma}}) dV \right]^{1/2} \quad (1.13)$$

en términos relativos a:

$$\|u\| = \left[\int \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{D}^{-1} \boldsymbol{\sigma} dV \right]^{1/2} = \left[\int \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV \right]^{1/2} \quad (1.14)$$

El error $\|e\|$ puede también ser evaluado separadamente para cada elemento. Nótese que:

$$\|e\|^2 = \sum_{i=1}^{\# \text{elementos}} \|e\|_i^2 \quad (1.15)$$

Y en cualquier caso se puede considerar un error relativo. Por ejemplo:

$$\eta = \frac{\|e\|}{\theta \|u\|} \times 100\% \quad (1.16)$$

θ es un factor empírico, menor que 1, que tiene como propósito compensar el que el error se determine en relación a una solución u que no es la exacta, sino tan sólo una aproximación.

1.4 REFINAMIENTO *h*-ADAPTIVO

Si los errores estimados se encuentran dentro de los límites prescritos por el analista, entonces el trabajo está claramente terminado. Sin embargo, frecuentemente estos límites se ven superados y es necesario refinar la malla de elementos finitos. Para llevar a cabo este refinamiento de forma óptima son posibles muchas estrategias y mucho depende de los objetivos que se quieren alcanzar.

Se puede intentar hacer el porcentaje de error relativo η menor que algún valor especificado $\bar{\eta}$:

$$\eta \leq \bar{\eta} \quad (1.17)$$

En una malla óptima es deseable que la distribución del error en norma de energía (esto es, $\|e\|_i$) sea igual para todos los elementos. Así, si el error permisible total está determinado (sobre la base de resultados de un análisis aproximado) por $\bar{\eta} \|u\|$, se podría exigir una condición en la que el error en cualquier elemento i fuera

$$\|e\|_i < \bar{\eta} \frac{\|u\|}{n^{1/2}} \equiv \bar{e}_m \quad (1.18)$$

donde n es el número de elementos implicados y \bar{e}_m es una medida del máximo error aceptable.

Los elementos en que no se cumple lo anterior deben ser refinados. Así, si se define el cociente:

$$\frac{\|e\|_i}{\bar{e}_m} = \xi_i \quad (1.19)$$

se reducirá el tamaño de los elementos cuando $\xi_i > 1$. En caso contrario podría mantenerse el tamaño de los elementos.

El refinamiento podría llevarse a cabo progresivamente, refinando solamente aquellos elementos en los que ξ_i sea mayor que un cierto límite y cada vez dividir a la mitad el tamaño de tales elementos. Aunque un proceso como el indicado lleva finalmente a una solución satisfactoria, con un número relativamente pequeño de grados de libertad, no es en general económico, ya que el número total de soluciones de prueba puede ser excesivo.

Un procedimiento más eficaz es diseñar una malla completamente nueva que cumpla el requisito $\xi_i \leq 1$. En este caso una posibilidad es determinar el tamaño de los elementos sobre la base de la velocidad de convergencia asintótica para la clase de elementos empleados. Si se supone que los errores son proporcionales a h^p el nuevo tamaño del elemento no debería exceder de:

$$h = (\xi_i^{-1/p}) h_i \quad (1.20)$$

donde h_i es la dimensión característica del elemento en la malla ya analizada y h la nueva dimensión requerida.

En la Figura 1.3 se muestra cómo, empezando por una solución relativamente burda, una única predicción de malla permite una solución que casi satisface el nivel de precisión especificado como deseable. La razón del éxito de la regeneración de malla basada en el simple supuesto de velocidad de convergencia asintótica supuesto en la Ec. (1.20) es el hecho de que, con refinamiento, la malla tiende a ser óptima y la influencia de la singularidad localizada ya no afecta a la convergencia global. Los efectos de la singularidad están todavía presentes en los elementos adyacentes a la misma, y la subdivisión de malla puede mejorarse si en tales elementos se utiliza la convergencia adecuada y se escribe, en lugar de la Ec. (1.20),

$$h = (\xi_i^{-1/\lambda}) h_i \quad (1.21)$$

en la que λ es la potencia de la singularidad. Un número conveniente para utilizar en este caso es $\lambda = 0.5$, ya que la mayoría de los parámetros de singularidad están entre 0.5 y 1.

CAPÍTULO II: MODELO h-ADAPTIVO

2.1 ECUACIONES BÁSICAS.

Las estructuras con simetría de revolución son frecuentes. En algunos casos se tiene la doble circunstancia de tipología de cáscara (espesor pequeño) y de simetría axial. Si las cargas actuantes presentan la misma simetría axial que la cáscara; puede llegar a plantearse un modelo de elementos finitos de carácter unidimensional. Esta condición permite simplificar notablemente el cálculo, que se reduce al estudio de la deformación y de los esfuerzos a lo largo de la línea generatriz, es decir, la curva que resulta de la intersección de la superficie neutra de la cáscara con un semiplano cualquiera que pase por el eje de simetría.

La generatriz puede aproximarse por un conjunto de elementos finitos unidimensionales, cada uno de los cuales representa una superficie tronco cónica. La primera solución de este tipo se debe a Grafton y Strome (1963), quienes plantearon un modelo de desplazamientos con interpolaciones lineales en dirección meridional e interpolaciones cúbicas en dirección transversal. Las expresiones que se presentan en la sección 2.2 son básicamente las de ese trabajo.

Como en otros casos de análisis de losas y cáscaras, conviene trabajar con fuerzas resultantes de sección, en lugar de trabajar directamente con los esfuerzos en cada punto. En las cáscaras axisimétricas se deben considerar momentos flectores y fuerzas de membrana, tanto en dirección meridional como en dirección de los paralelos. Las correspondientes medidas de deformación son las curvaturas y las deformaciones unitarias de la superficie media. En este trabajo se ha supuesto que los desplazamientos son en general pequeños y no hay acoplamiento entre las acciones de membrana y de flexión.

Las distintas componentes de deformación pueden relacionarse con las componentes de desplazamiento; a su vez, si se supone un comportamiento lineal, las medidas de esfuerzo (los momentos flectores y las fuerzas de membrana) se relacionan con las deformaciones (curvaturas y deformaciones de

la superficie neutra) mediante expresiones simples, todo lo cual permite escribir las ecuaciones de equilibrio o plantear un principio variacional equivalente en términos de los desplazamientos, a partir de lo cual se formulan las ecuaciones para el análisis.

Geometría del Modelo

En lo que sigue se supone que el modelo está en el plano XZ , siendo Z el eje de simetría y X la dirección radial. Por otra parte, en cada punto de la generatriz puede también considerarse un sistema de referencia local, $X'Z'$, siendo X' la dirección tangente a la generatriz y Z' la dirección normal. Los vectores unitarios en esas dos direcciones se definen como:

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{a}} &= \cos\phi \bar{\mathbf{i}} + \text{sen}\phi \bar{\mathbf{k}} \\ \bar{\mathbf{n}} &= -\text{sen}\phi \bar{\mathbf{i}} + \cos\phi \bar{\mathbf{k}}\end{aligned}\quad (2.1)$$

donde $\bar{\mathbf{i}}$ y $\bar{\mathbf{k}}$ son los vectores unitarios asociados a los ejes globales X y Z , respectivamente, y ϕ es el ángulo que el vector tangente a la generatriz, $\bar{\mathbf{a}}$, hace con el eje de simetría, Z . Si la superficie fuera esférica sería apropiado referirse a ϕ como el complemento de la latitud. En notación matricial:

$$\bar{\mathbf{a}} = \begin{Bmatrix} \text{sen } \phi \\ \cos \phi \end{Bmatrix} \quad \text{y} \quad \bar{\mathbf{n}} = \begin{Bmatrix} \cos \phi \\ -\text{sen } \phi \end{Bmatrix}\quad (2.2)$$

Adicionalmente, se define el sentido positivo de los arcos de forma que:

$$ds = R d\phi\quad (2.3)$$

donde R es el radio de curvatura de cada punto de la generatriz y s es la longitud de arco medida a partir de un punto fijo de la misma (Fig. 2.1).

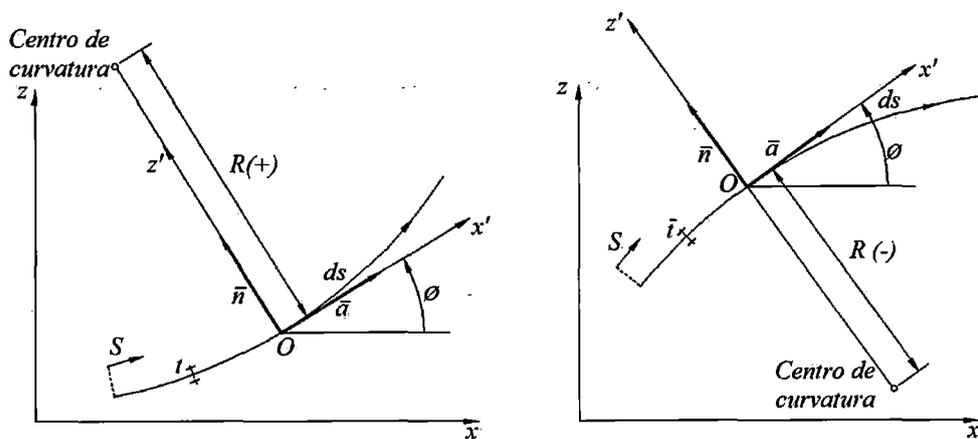


Fig. 2.1 Definición de ejes globales, ejes locales y radio de curvatura positivo (Zienkiewicz et al., 2004).

De las ecuaciones (2.1) y (2.3) se deduce que:

$$\frac{d\bar{\mathbf{a}}}{ds} = \frac{1}{R} \bar{\mathbf{n}} \quad \text{y} \quad \frac{d\bar{\mathbf{n}}}{ds} = -\frac{1}{R} \bar{\mathbf{a}} \quad (2.4)$$

Considerando un punto en la generatriz y luego derivando el vector de posición, se tiene finalmente que

$$\frac{\partial}{\partial x'} = \frac{\partial}{\partial s} \quad (2.5)$$

Desplazamientos

Como consecuencia de la simetría de revolución, todas las secciones meridionales se deforman de manera idéntica y en su plano. El desplazamiento de un punto cualquiera queda definido por dos componentes, en la dirección del eje de simetría y en la dirección radial, o alternativamente en las direcciones tangencial y normal a la cáscara. Suponiendo que las secciones planas antes de la deformación se mantienen planas después de la deformación, puede simplificarse la descripción del estado de desplazamiento, refiriéndolo a los desplazamientos de la superficie neutra y a los giros de las secciones. Además, siendo la cáscara delgada, se supone que en una sección cualquiera el desplazamiento en dirección normal a la superficie neutra es constante.

En lo que sigue, \bar{u} y \bar{w} son las componentes de desplazamiento de la superficie neutra en las direcciones del eje de simetría y radial, respectivamente, mientras que u y w son las correspondientes componentes en las direcciones

tangencial (meridional) y normal a la cáscara. β es el giro de la sección. Para un nudo i , las componentes de desplazamiento referidas a los ejes locales se relacionan con aquellas referidas a los ejes globales mediante:

$$\mathbf{a}'_i = \begin{Bmatrix} u_i \\ w_i \\ (\partial w / \partial s)_i \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{w}_i \\ \beta_i \end{Bmatrix} = \lambda \mathbf{a}_i \quad (2.6)$$

Deformaciones

Si se consideran las deformaciones referidas a los ejes locales se tiene que, por la simetría de revolución, dos de las componentes de deformaciones tangenciales son nulas. Por otro lado, al haber supuesto que en cada sección el desplazamiento en dirección normal a la superficie neutra es constante, la deformación unitaria en esa dirección es también cero.

Por comodidad en la formulación, las componentes de deformación no nulas pueden agruparse en una matriz columna. Las deformaciones se relacionan con las componentes de desplazamiento como se indica en la expresión siguiente:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_s \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial s} - \frac{w}{R} - z' \frac{\partial \beta}{\partial s} \\ w \cos \phi + u \sin \phi - z' \beta \sin \phi \\ \frac{x}{\partial s} + \frac{w}{R} - \beta \end{Bmatrix} \quad (2.7)$$

En (2.7) R es el radio de curvatura de la generatriz; x es la distancia al eje de simetría; z' es la distancia a la superficie neutra. Separando las deformaciones de membrana y aquellas debidas a la flexión y al corte transversal se tiene:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial s} - \frac{w}{R} \\ w \cos \phi + u \sin \phi \\ x \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -z' \frac{\partial \beta}{\partial s} \\ -z' \beta \sin \phi \\ \frac{x}{\partial s} + \frac{w}{R} - \beta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_m \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} z' \boldsymbol{\chi} \\ \gamma \end{Bmatrix} \quad (2.8)$$

donde $\varepsilon_m, \chi, \gamma$ son las medidas de deformación de membrana, flexión y cortante, respectivamente. Las componentes de ε_m pueden interpretarse como las deformaciones de la superficie neutra según las direcciones meridional y circunferencial; las χ son las curvaturas en esas mismas dos direcciones.

En el análisis de cáscaras delgadas puede suponerse que los efectos de las deformaciones cortantes son despreciables, es decir, $\gamma = 0$. Con esa simplificación las medidas de deformación serían:

$$\varepsilon = \varepsilon_m + z' \chi = \begin{Bmatrix} \varepsilon_s \\ \varepsilon_\theta \end{Bmatrix} + z' \begin{Bmatrix} \chi_s \\ \chi_\theta \end{Bmatrix} \quad (2.9)$$

Esfuerzos

Consistentemente con las componentes de deformación consideradas en (2.8), las componentes de esfuerzo significativas pueden agruparse en una matriz columna:

$$\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_s \\ \sigma_\theta \\ \tau \end{Bmatrix} \quad (2.10)$$

donde σ_s y σ_θ son los esfuerzos normales en dirección meridional y circunferencial, respectivamente, y τ es el esfuerzo cortante (en cualquier semiplano que contenga a una generatriz y al eje de simetría).

Sin embargo, en lugar de trabajar directamente con los esfuerzos en cada punto, conviene utilizar las fuerzas resultantes de sección:

$$\text{Fuerzas de membrana:} \quad \mathbf{N} = \begin{Bmatrix} N_s \\ N_\theta \end{Bmatrix} = \int_{-t/2}^{+t/2} \begin{Bmatrix} \sigma_s \\ \sigma_\theta \end{Bmatrix} dz' \quad (2.11)$$

$$\text{Momentos flectores:} \quad \mathbf{M} = \begin{Bmatrix} M_s \\ M_\theta \end{Bmatrix} = \int_{-t/2}^{+t/2} \begin{Bmatrix} \sigma_s \\ \sigma_\theta \end{Bmatrix} z' dz' \quad (2.12)$$

$$\text{Fuerza cortante:} \quad Q_s = \int_{-t/2}^{+t/2} \tau dz' \quad (2.13)$$

En estas expresiones z' denota la distancia a la superficie neutra y t es el espesor. Todas las fuerzas resultantes están dadas por unidad de ancho.

Relaciones Constitutivas

Para una cáscara de material isotrópico los esfuerzos y deformaciones en un punto se relacionan mediante:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_s \\ \sigma_\theta \\ \tau \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\nu) \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_s \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma \end{Bmatrix} \quad (2.14)$$

Remplazando (2.8) en (2.14) y a su vez ésta en (2.11), (2.12) y (2.13) se obtienen (para una cáscara homogénea e isotrópica):

$$\mathbf{N} = \int_{-t/2}^{t/2} \boldsymbol{\sigma} dz' = \begin{Bmatrix} N_s \\ N_\theta \end{Bmatrix} = \frac{Et}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu \\ \nu & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_s \\ \varepsilon_\theta \end{Bmatrix} = \mathbf{D}_m \boldsymbol{\varepsilon}_m \quad (2.15)$$

$$\mathbf{M} = \int_{-t/2}^{t/2} \boldsymbol{\sigma} z' dz' = \begin{Bmatrix} M_s \\ M_\theta \end{Bmatrix} = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \begin{pmatrix} 1 & \nu \\ \nu & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \chi_s \\ \chi_\theta \end{Bmatrix} = \mathbf{D}_f \boldsymbol{\chi} \quad (2.16)$$

$$Q_s = \int_{-t/2}^{t/2} \tau dz' = \beta Gt \gamma = \beta \frac{Et}{2(1+\nu)} \gamma \quad (2.17)$$

donde se ha introducido el factor de corrección $\beta = 5/6$ teniendo en cuenta que los esfuerzos cortantes son variables en la sección.

Expresión de los trabajos virtuales.

La determinación de las rigideces de los elementos finitos y de las fuerzas nodales equivalentes a las acciones distribuidas puede facilitarse al usar el principio de trabajos virtuales, en lugar de las ecuaciones de equilibrio en su forma original. En términos generales, el principio de trabajos virtuales puede escribirse como:

$$\iiint_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV = \iiint_V \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b} dV + \iint_A \delta \mathbf{u}^T \mathbf{t} dA + \sum_i \int \delta u_i^T q_i d\Gamma \quad (2.18)$$

donde \mathbf{b} y \mathbf{t} son los vectores de fuerzas de cuerpo (es decir, por unidad de volumen) y de superficie (por unidad de área), mientras que las q_i son las fuerzas "concentradas" expresadas por unidad de longitud de circunferencia. Las $\delta \mathbf{u}$ son desplazamientos virtuales y $\delta \boldsymbol{\varepsilon}$ son las correspondientes deformaciones virtuales.

Considerando las hipótesis habituales en el análisis de losas y cáscaras y haciendo uso de la simetría de revolución se puede simplificar la expresión anterior para reducirla a una en la que sólo se tienen integrales de línea sobre la generatriz de la cáscara. Los detalles se indican en el acápite siguiente.

2.2 SOLUCIÓN CON ELEMENTOS FINITOS TRONCO-CÓNICOS.

En esta sección se consideran elementos finitos tronco-cónicos para el análisis de cáscaras axisimétricas, originalmente propuestos por Grafton y Strome (1963).

La figura siguiente muestra la aproximación de la cáscara axisimétrica, en la que la generatriz se reemplaza por un conjunto de segmentos de recta. Cada segmento corresponde a un elemento finito tronco cónico con dos nudos. Aunque por claridad en la presentación se muestra un elemento relativamente grande, se entiende que los elementos deben ser tan pequeños como sea necesario para que los errores en la geometría y en los resultados del análisis estén dentro de límites aceptables.

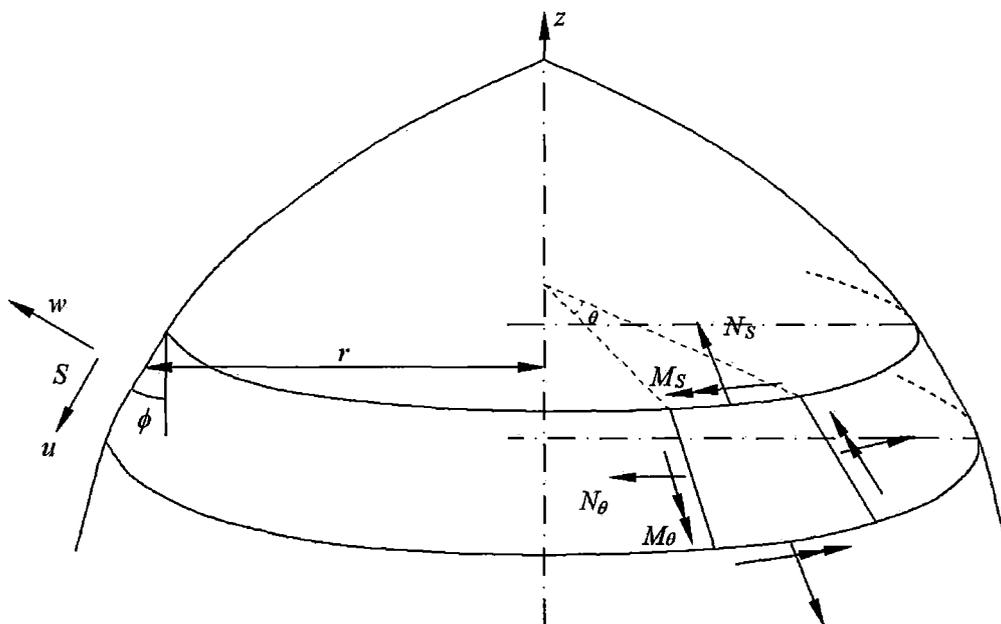


Fig. 2.2 Cáscara de revolución, carga, desplazamiento y resultantes de esfuerzo. La cáscara se representa como conjunto de troncos de cono. (Zienkiewicz et al., 2004).

Aproximación para cáscaras delgadas

En lo que sigue se supone que la cáscara es delgada; es decir que su espesor es muy pequeño en relación a las otras dimensiones. En tal caso, puede considerarse que las secciones planas normales a la generatriz permanecen planas y ortogonales a la generatriz después de la deformación (la hipótesis de Kirchoff). Además, pueden despreciarse los efectos de las deformaciones de corte. El suponer $\gamma=0$ implica que el giro de la normal coincide con la pendiente de la deformada en cada punto, es decir:

$$\beta = \frac{\partial w}{\partial s} \quad (2.19)$$

Remplazando (2.19) en (2.7) y (2.8), se observa que las deformaciones se relacionan con derivadas primeras del desplazamiento tangencial (meridional) u y con derivadas segundas del desplazamiento transversal w .

Interpolación de desplazamientos

Para cada elemento finito se plantean inicialmente aproximaciones para las componentes de desplazamiento en ejes locales. Típicamente éstas se escriben como interpolaciones de los desplazamientos de los nudos (Figura 2.3):

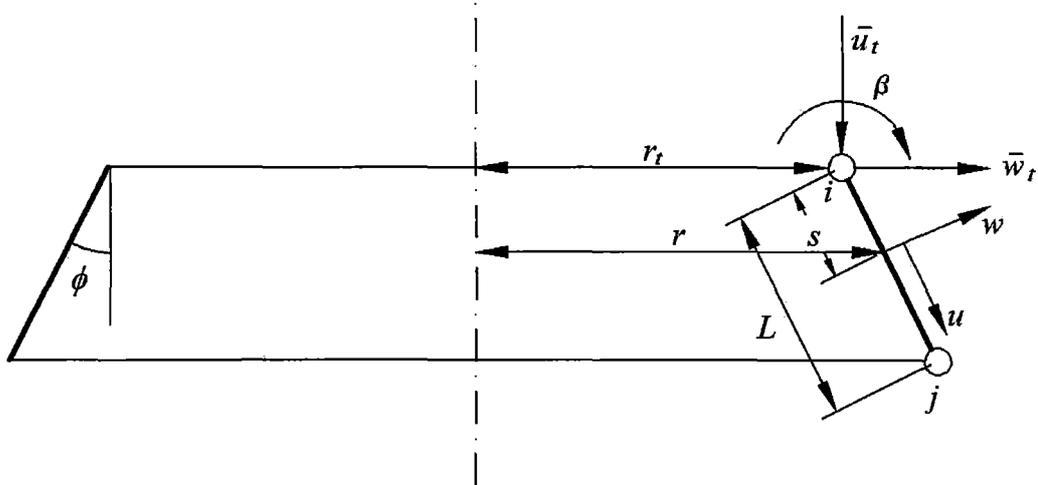


Fig. 2.3 Un elemento de cáscara de revolución. (Zienkiewicz et al., 2004).

El desplazamiento de la superficie neutra en dirección tangencial (meridional) u se aproxima con funciones lineales:

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 s \quad (2.20)$$

y el desplazamiento en dirección transversal, w , con un polinomio de tercer grado:

$$w = \alpha_3 + \alpha_4 s + \alpha_5 s^2 + \alpha_6 s^3 \quad (2.21)$$

Las expresiones anteriores son aplicables a todos los puntos del elemento, incluyendo los nudos. Eso permite relacionar los parámetros α con los valores nodales de u , w y β , con lo que las expresiones precedentes se pueden describir como interpolaciones:

$$u = \sum_{i=1}^2 N_i^u u_i \quad (2.22)$$

$$w = \sum_{i=1}^2 (N_i^w w_i + \bar{N}_i^w \beta_i) \quad (2.23)$$

Agrupando (2.22) y (2.23) en una sola expresión:

$$\mathbf{u} = \mathbf{N} \mathbf{a}'^e \quad (2.24)$$

En este caso \mathbf{a}'^e se refiere a las componentes de desplazamiento en los nudos del elemento, referidas a ejes con las orientaciones locales, tangencial (meridional) y normal a la superficie neutra de la cáscara. Más explícitamente:

$$\begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 1-s' & 0 & 0 & s' & 0 & 0 \\ 0 & 1-3s'^2+2s'^3 & (s'-2s'^2+s'^3)L & 0 & 3s'^2-2s'^3 & (-s'^2+s'^3)L \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ w_i \\ \beta_i \\ u_j \\ w_j \\ \beta_j \end{Bmatrix}$$

donde $s' = \frac{s}{L}$ (2.25)

Debe anotarse que las interpolaciones (2.25) se refieren a componentes de desplazamiento u w que siguen las direcciones de los ejes locales del elemento. Como en general los segmentos de la generatriz correspondientes a los distintos elementos pueden tener distintas orientaciones, es conveniente transformar tales expresiones para que se refieran a las orientaciones de los ejes globales o de la estructura, en este caso las direcciones radial y del eje de simetría, comunes a todos los elementos. Las componentes de desplazamiento en cada nudo se transforman según (2.6) y por lo tanto:

$$\mathbf{a}'^e = \begin{Bmatrix} \mathbf{a}'_i \\ \mathbf{a}'_j \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \lambda \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_i \\ \mathbf{a}_j \end{Bmatrix} = \mathbf{T} \mathbf{a}^e \quad (2.26)$$

Sustituyendo (2.26) en (2.24):

$$\mathbf{u} = \mathbf{N} \mathbf{T} \mathbf{a}^e \quad (2.27)$$

Matrices Deformación – Desplazamiento

Dado que en cada uno de los elementos tronco-cónicos la generatriz se aproxima por un segmento de recta, es decir se tiene $R = \infty$, se pueden simplificar las expresiones para las medidas de deformación:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_m + z \boldsymbol{\chi} \quad (2.28)$$

siendo:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_m = \begin{Bmatrix} \varepsilon_s \\ \varepsilon_\theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial s} \\ \frac{w \cos \phi + u \operatorname{sen} \phi}{x} \end{Bmatrix}; \quad \boldsymbol{\chi} = \begin{Bmatrix} \chi_s \\ \chi_\theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \\ -\frac{\operatorname{sen} \phi}{x} \frac{\partial w}{\partial s} \end{Bmatrix} \quad (2.29)$$

las deformaciones de membrana (deformaciones de la superficie neutra) y de flexión (curvaturas), respectivamente.

Remplazando (2.27) en (2.28) y (2.29) se relacionan las componentes de deformación con los desplazamientos nodales:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \sum_{i=1}^2 \mathbf{B}_i \mathbf{a}'_i^e = (\mathbf{B}_1 \quad \mathbf{B}_2) \mathbf{a}'^e = (\mathbf{B}_1 \quad \mathbf{B}_2) \mathbf{T} \mathbf{a}^e \quad (2.30)$$

siendo \mathbf{a}'_i^e las componentes de desplazamiento en el nudo i , \mathbf{a}'^e el conjunto de los desplazamientos en los dos nudos, referidos a las orientaciones locales, y \mathbf{a}^e los mismos desplazamientos referidos a ejes globales. Las matrices \mathbf{B}_1 y \mathbf{B}_2 resultan:

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_{1m} + z' \mathbf{B}_{1f} \quad (2.31)$$

$$\mathbf{B}_2 = \mathbf{B}_{2m} + z' \mathbf{B}_{2f}$$

$$\mathbf{B}_{1m} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{L} & 0 & 0 \\ (1-s') \frac{\operatorname{sen} \phi}{x} & (1-3s'^2 + 2s'^3) \frac{\cos \phi}{x} & L(s' - 2s'^2 + s'^3) \frac{\cos \phi}{x} \end{pmatrix} \quad (2.32)$$

$$\mathbf{B}_{1f} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{(6-12s')}{L^2} & \frac{(4-6s')}{L} \\ 0 & (6s'-6s'^2)\frac{\text{sen}\phi}{xL} & (-1+4s'-3s'^2)\frac{\text{sen}\phi}{x} \end{pmatrix} \quad (2.33)$$

$$\mathbf{B}_{2m} = \begin{pmatrix} \frac{1}{L} & 0 & 0 \\ s'\frac{\text{sen}\phi}{x} & (3s'^2-2s'^3)\frac{\text{cos}\phi}{x} & L(-s'^2+s'^3)\frac{\text{cos}\phi}{x} \end{pmatrix} \quad (2.34)$$

$$\mathbf{B}_{2f} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{(-6+12s')}{L^2} & \frac{(2-6s')}{L} \\ 0 & (-6s'+6s'^2)\frac{\text{sen}\phi}{xL} & (2s'-3s'^2)\frac{\text{sen}\phi}{x} \end{pmatrix} \quad (2.35)$$

Alternativamente, puede escribirse:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}_m &= \mathbf{B}_m \mathbf{a}'^e = (\mathbf{B}_{1m} \quad \mathbf{B}_{2m}) \mathbf{T} \mathbf{a}^e \\ \boldsymbol{\chi} &= \mathbf{B}_f \mathbf{a}'^e = (\mathbf{B}_{1f} \quad \mathbf{B}_{2f}) \mathbf{T} \mathbf{a}^e \end{aligned} \quad (2.36)$$

y a partir de éstas se obtienen las fuerzas resultantes de sección (por unidad de ancho de cáscara), con las ecuaciones (2.15) y (2.16):

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= \mathbf{D}_m \mathbf{B}_m \mathbf{T} \mathbf{a}^e \\ \mathbf{M} &= \mathbf{D}_f \mathbf{B}_f \mathbf{T} \mathbf{a}^e \end{aligned} \quad (2.37)$$

Ecuaciones de equilibrio

Suponiendo para cada elemento desplazamientos virtuales de la forma (2.27):

$$\delta \mathbf{u} = \mathbf{N} \mathbf{T} \delta \mathbf{a}^e \quad (2.38)$$

y considerando las correspondientes deformaciones virtuales:

$$\begin{aligned} \delta \boldsymbol{\varepsilon}_m &= \mathbf{B}_m \mathbf{T} \delta \mathbf{a}^e \\ \delta \boldsymbol{\chi} &= \mathbf{B}_f \mathbf{T} \delta \mathbf{a}^e \end{aligned} \quad (2.39)$$

la ecuación (2.18) se convierte en:

$$\begin{aligned} (\delta \mathbf{a})^T \mathbf{T}^T \sum_e \left(\iint_A (\mathbf{B}_m^T \mathbf{D}_m \mathbf{B}_m + \mathbf{B}_f^T \mathbf{D}_f \mathbf{B}_f) dA \right) \mathbf{T} \mathbf{a} &= \\ &= (\delta \mathbf{a})^T \left(\mathbf{T}^T \sum_e \iint_A \mathbf{N}^T \mathbf{t} dA + \oint \mathbf{q} d\Gamma \right) \end{aligned} \quad (2.40)$$

\mathbf{q} son fuerzas "concentradas" en los nudos, en este caso expresadas por unidad de longitud de la circunferencia y con las orientaciones de los ejes de referencia globales. Las integrales son calculadas como sumatorias de las contribuciones de los distintos elementos, en cada uno de los cuales se tienen interpolaciones distintas. Ello requiere que los integrandos sean finitos en los bordes entre elementos. Dado que en este caso las expresiones de \mathbf{B}_f incluyen derivadas segundas del desplazamiento transversal w , las funciones de interpolación deben ser tales que se mantenga la continuidad del desplazamiento y de su primera derivada (en este caso el giro) en los bordes entre elementos. Esta condición es satisfecha, ya que los distintos elementos que concurren a un nudo comparten los mismos desplazamientos nodales $\bar{u} \bar{w} \beta$. Nótese que en (2.40) las matrices \mathbf{a} y $\delta \mathbf{a}$ se refieren a desplazamientos reales y virtuales, respectivamente, para toda la estructura. Las sumatorias deben ser entendidas como el ensamble de los aportes de los elementos según los grados de libertad comunes para toda la estructura a los que corresponden los grados de libertad de cada elemento. Por otro lado, siendo $d\Gamma = x d\theta$ y $dA = (x d\theta) ds$ y todos los integrandos independientes de θ la ecuación (2.40) puede escribirse como:

$$\begin{aligned} (\delta \mathbf{a})^T \mathbf{T}^T 2\pi \sum_e \left(\int_{L^e} (\mathbf{B}_m^T \mathbf{D}_m \mathbf{B}_m + \mathbf{B}_f^T \mathbf{D}_f \mathbf{B}_f) x ds \right) \mathbf{T} \mathbf{a} = \\ = (\delta \mathbf{a})^T \mathbf{T}^T 2\pi \sum_e \left(\int_{L^e} \mathbf{N}^T \mathbf{t} x ds \right) + \mathbf{p} \end{aligned} \quad (2.41)$$

En esta expresión \mathbf{p} denota las fuerzas "concentradas" totales sobre la circunferencia representada por cada nudo. La distancia x varía linealmente con s :

$$x = (1 - s/L^e) x_i + (s/L^e) x_j \quad (2.42)$$

En forma más sucinta:

$$(\delta \mathbf{a})^T \sum_e \mathbf{K}^e \mathbf{a} = (\delta \mathbf{a})^T \left(\sum_e \mathbf{f}^e + \mathbf{p} \right) \quad (2.43)$$

y dado que los desplazamientos nodales virtuales son arbitrarios, pueden cancelarse, obteniéndose:

$$\sum_e \mathbf{K}^e \mathbf{a} = \sum_e \mathbf{f}^e + \mathbf{p} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{K} \mathbf{a} = \mathbf{f} \quad (2.44)$$

En las expresiones precedentes \mathbf{K} es la matriz de rigidez de la estructura y \mathbf{K}^e es la matriz de rigidez de un elemento, dada por:

$$\mathbf{K}^e = 2\pi \mathbf{T}^T \int_{\mathcal{L}} \left(\mathbf{B}_m^T \mathbf{D}_m \mathbf{B}_m + \mathbf{B}_f^T \mathbf{D}_f \mathbf{B}_f \right) \mathbf{x} \, ds \, \mathbf{T} \quad (2.45)$$

y \mathbf{f} es la matriz de fuerzas que resulta del ensamble de las fuerzas "concentradas" \mathbf{p} y de las fuerzas estáticamente equivalentes a las acciones distribuidas:

$$\mathbf{f}^e = 2\pi \int_{\mathcal{L}} \mathbf{N}^T \mathbf{t} \, x \, ds \quad (2.46)$$

Aún cuando la evaluación de las integrales para las matrices de rigidez $\mathbf{K}^{(e)}$ y de fuerzas $\mathbf{f}^{(e)}$ podría hacerse en forma analítica, es más conveniente, e incluso más precisa, una integración numérica con el método de Gauss-Legendre:

$$\mathbf{K}^e = 2\pi \mathbf{T}^T \sum_{q=1}^n \mathbf{J}^e \left(\mathbf{B}_m^T \mathbf{D}_m \mathbf{B}_m \mathbf{x} + \mathbf{B}_f^T \mathbf{D}_f \mathbf{B}_f \mathbf{x} \right)_q w_q \, \mathbf{T} \quad (2.47)$$

$$\mathbf{f}^e = 2\pi \sum_{q=1}^n \mathbf{J}^e \left(\mathbf{N}^T \mathbf{t} \, x \right)_q w_q \quad (2.48)$$

En estas expresiones n denota el número de puntos de integración. Aún cuando con un solo punto de integración numérica por elemento se tendrían resultados convergentes, en el sentido que al reducir el tamaño de los elementos se tendrían resultados cada vez más próximos a los exactos, se ha preferido en esta tesis utilizar cuatro puntos de integración. Con $n=4$ se integran exactamente polinomios hasta de grado 7, como se tienen al evaluar algunos de los coeficientes de \mathbf{K}^e . En (2.47) y (2.48) se tiene $\mathbf{J}^e = L^e / 2$. El integrando se evalúa en cada uno de los puntos de integración numérica, con $s_q = L^e / 2 (\xi_q + 1)$, donde los ξ_q son los ceros del polinomio de Legendre de grado N , y se multiplica por el correspondiente peso w_q . Las abscisas y pesos para integraciones de Gauss-Legendre pueden encontrarse en Abramovitz y Stegun (1964) o en otras tablas análogas y textos de elementos finitos.

2.3 ESTIMACIÓN DEL ERROR.

En el capítulo 1 se indicó que si en un elemento finito se interpolan los desplazamientos con polinomios completos de grado p el orden de convergencia en los resultados para los desplazamientos es de $O(h^{p+1})$, mientras que para sus derivadas m -ésimas es de $O(h^{p+1-m})$. En los elementos

truncocónicos empleados en esta tesis, el desplazamiento u en dirección meridional es interpolado con funciones lineales ($p=1$), mientras que el desplazamiento transversal w es interpolado con funciones cúbicas ($p=3$). En consecuencia, puede esperarse que los desplazamientos en dirección meridional converjan como $O(h^2)$ y los desplazamientos trasversales converjan con $O(h^4)$.

Para las deformaciones de membrana ε_s , que corresponden a la primera derivada del desplazamiento u respecto a s , la convergencia es de $O(h)$, mientras que para ε_θ sería de $O(h^2)$, si la geometría se representara exactamente. Similarmente, para las curvaturas χ_s y χ_θ , los órdenes de convergencia serían $O(h^2)$ y $O(h^3)$, respectivamente, ya que se asocian en el primer caso a derivadas segundas del desplazamiento transversal y en el segundo caso a derivadas primeras. De las expresiones (2.15) y (2.16), se concluye que las fuerzas de membrana convergen con $O(h)$ y los momentos de flexión con $O(h^2)$.

El orden de convergencia es importante para determinar en qué forma deben reducirse o agrandarse las dimensiones de los elementos para conseguir los objetivos de precisión, pero por sí solo no determina la magnitud de los errores al emplear una determinada malla de elementos finitos. Para esto tiene importancia también la forma de la solución que se está aproximando. Si la solución es casi constante, podrá aproximarse con elementos relativamente grandes e interpolaciones lineales. En cambio, si la solución varía muy rápidamente (en espacio) se requerirán elementos más pequeños e interpolaciones de mayor grado. En el estudio de cáscaras axisimétricas se observa que, en la mayor parte de los casos, la forma de la estructura responde a la naturaleza de las cargas, teniéndose fuerzas de membrana que varían muy lentamente y momentos flectores poco significativos en la mayor parte de la estructura. Tales fuerzas de membrana son en general de compresión en estructuras de concreto armado y de tracción en estructuras metálicas. Sin embargo en la proximidad de los apoyos, o donde se unen distintas partes de geometría distinta, como por ejemplo en el encuentro entre la pared de un tanque y la cáscara de cobertura, si se pueden producir momentos flectores importantes, que decrecen muy rápidamente, al ser el espesor relativamente pequeño. Como resultado de esto, para el modelo de elementos finitos el cómputo de momentos flectores resulta un desafío mayor que la determinación

de las fuerzas de membrana, aún siendo el orden de convergencia de estas últimas menor.

En este trabajo se ha tomado como medida del error el desequilibrio del momento meridional en cada nudo, ΔM_s . Dado que no se conoce a-priori la solución exacta, el error relativo se determinó teniendo como referencia el momento meridional máximo entre los estimados para los distintos elementos concurrentes al nudo, $\max M_s$ multiplicado por un factor empírico, θ :

$$\eta = \frac{\Delta M_s}{\theta (\max M_s)} \times 100\% \quad (2.49)$$

A pesar que $\max M_s$ es en la mayor parte de los casos un valor mayor que el resultado exacto, los resultados numéricos indican que θ debe ser cercano a la unidad. Un valor $\theta = 0.95$ resultó el más apropiado para los casos estudiados. Contrariamente a lo que podría suponerse, si se toma un valor de θ bajo se produce una subdivisión excesiva e ineficiente en la mayor parte del modelo.

Para cada sector (es decir, para cada porción de la estructura con una definición geométrica distinta) se determina la razón entre el error observado en cada nudo, η , y el máximo error aceptable, $\bar{\eta}$:

$$\frac{\eta}{\bar{\eta}} = \xi \quad (2.50)$$

y dado que los errores en los momentos meridionales se reducen en proporción a h^2 , se pueden determinar las nuevas dimensiones requeridas para los elementos adyacentes a un nudo:

$$h_{\text{nuevo}} = h_{\text{previo}} \xi^{-1/2} \quad (2.51)$$

donde h_{previo} se refiere a la menor de las dimensiones (longitud del segmento de recta o del arco) de los elementos que concurren al nudo. Finalmente, puede construirse una nueva malla, con dimensiones de los elementos menores o iguales que las requeridas por (2.51). En este proceso conviene referirse a la definición de la geometría de la estructura real, en lugar de subdividir los elementos persistentes, ya que en cáscaras de doble curvatura los elementos troncocónicos solo corresponden a la geometría correcta en los nudos.

CAPÍTULO III: APLICACIONES

El estudio se refiere a modelos de elementos finitos para cáscaras axisimétricas con cargas también axisimétricas. Los modelos empleados corresponden a la generatriz de la cáscara y por su carácter lineal demandan poco esfuerzo de cómputo. Esto permite centrar la atención en el refinamiento adaptivo, que es el tema central de este trabajo.

Para llevar a cabo el estudio se ha preparado un programa de cómputo en Visual Basic (hAdaptive.xls), cuyo código se adjunta en el anexo.

3.1 CÚPULAS ESFÉRICAS

3.1.1 Cúpula esférica

Se muestra a continuación el refinamiento h -adaptivo para una estructura tomada de Timoshenko (1959). Suponiendo una cúpula de 60 pies de luz entre apoyos, un radio a de 60 pies, 8 pies de altura, 14 pulgadas de espesor constante y un ángulo α de 30° .

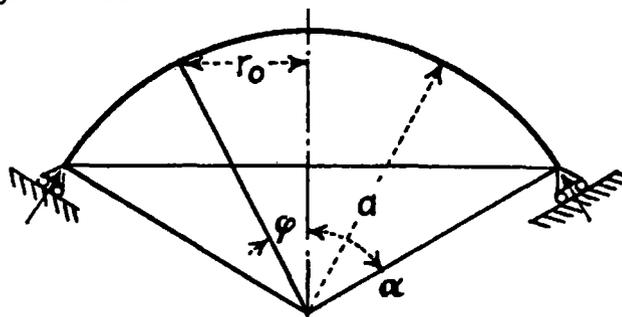


Fig. 3.1 Cúpula esférica. Timoshenko(1959).

La cúpula soporta una presión uniforme exterior de 2 psi. Para el análisis se han supuesto $E=3.12 \times 10^6$ psi y $\nu=0.25$.

Se puede ver en la figura siguiente el refinamiento h -adaptivo, indicándose el máximo error relativo en el momento meridional y el número de divisiones en cada iteración.

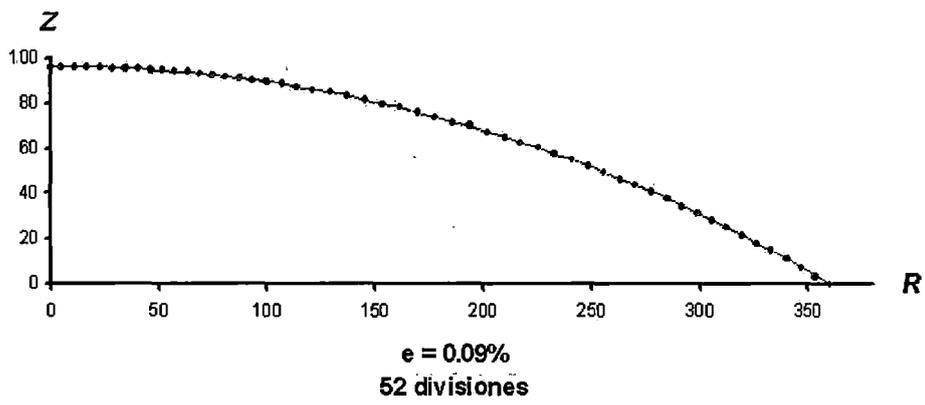
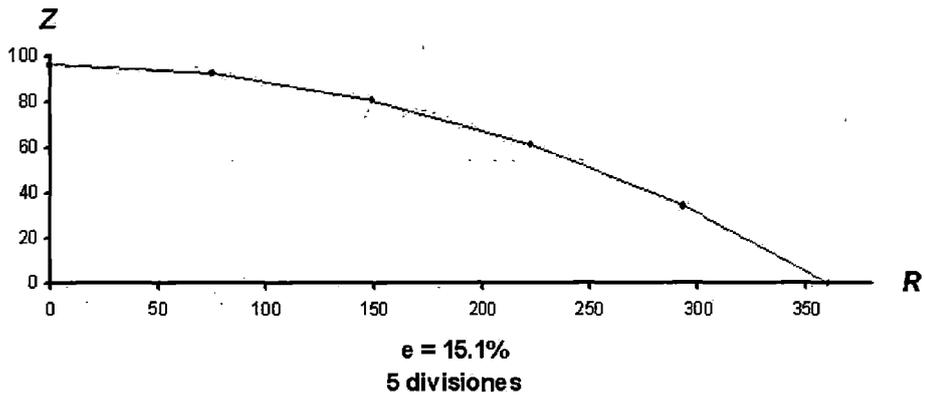


Fig. 3.2 Refinamiento h -adaptivo

Se muestra a continuación la reducción del error relativo en función del número de grados de libertad generados al dividir el elemento de dos maneras: uniformemente y con el procedimiento h -adaptivo, el último de los cuales sólo tuvo 2 iteraciones.

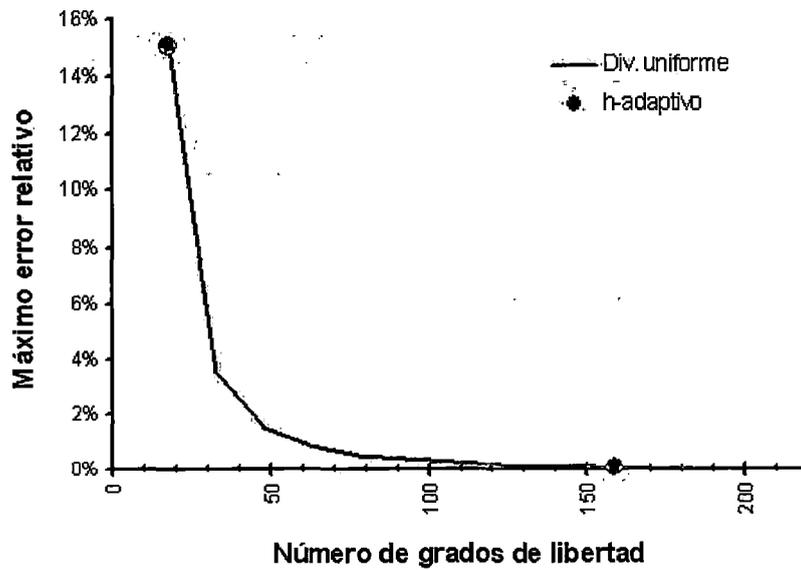


Fig. 3.3 Reducción del error relativo

Los desplazamientos máximos son los siguientes:

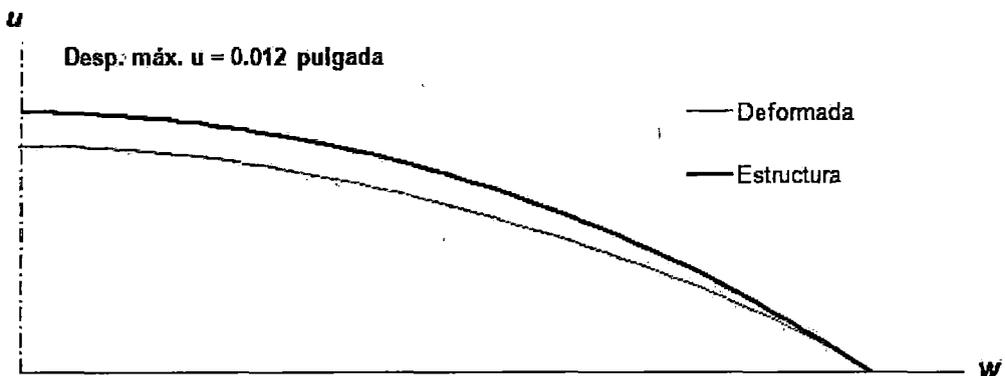


Fig. 3.4 Desplazamientos máximos

En el proceso se consideró un error objetivo de 0.1%, más que suficiente para fines de diseño. Para los momentos meridionales, con una división en 5 elementos se tiene un error relativo de 15.1%; con una división en 30 elementos, 0.4% y con una división en 60 elementos, 0.09%. Con el procedimiento h -adaptivo se logra 0.09% con una división en 52 elementos.

La fuerza de membrana meridional en la posición $\varphi = 0^\circ$ (es decir, en el eje de simetría) resulta $N_s = -720$ kip/in según las fórmulas aproximadas de Timoshenko con la teoría de membrana, ignorando los efectos de flexión. Con el método de elementos finitos y el procedimiento h -adaptivo se obtiene

$N_s = -739$ kip/in. La teoría de membrana podría ser apropiada en posiciones alejadas de los apoyos, pero sus errores se incrementan notoriamente al aproximarse a los mismos. Así, para la posición $\varphi = 30^\circ$ la fuerza indicada por Timoshenko es $N_s = -771.7$ kip/in, mientras que con el procedimiento h -adaptivo se obtiene $N_s = -605$ kip/in. Es notorio el error al utilizar las fórmulas aproximadas de la teoría de membrana.

En las figuras siguientes se muestran las gráficas para los momentos meridionales y tangenciales y para las fuerzas de membrana meridionales y tangenciales obtenidas con distintos grados de refinamiento. Como se anotó anteriormente, los errores de discretización más importantes son los que se observan en los momentos flectores, sobre todo en dirección meridional.

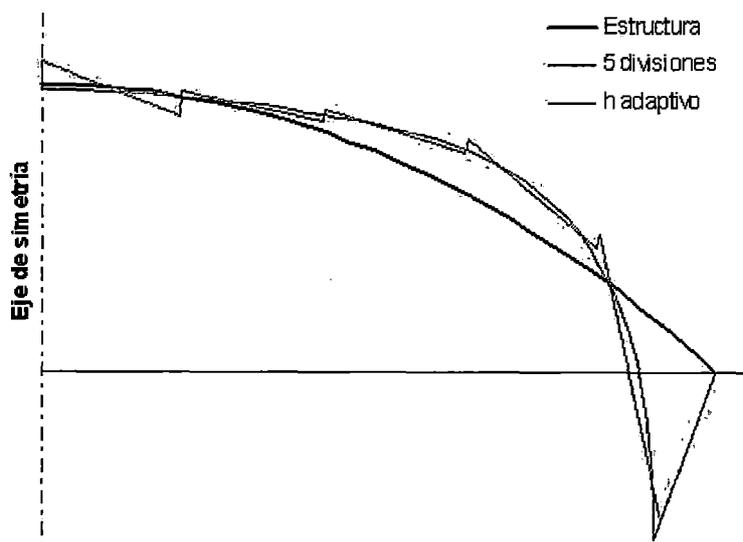


Fig. 3.5 Momentos meridionales, M_s

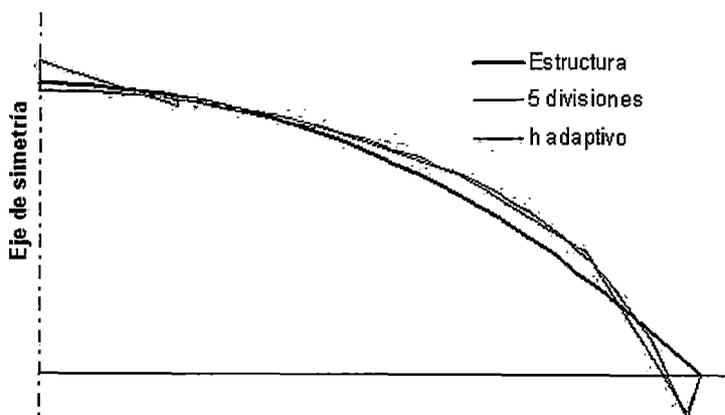


Fig. 3.6 Momentos tangenciales, M_θ

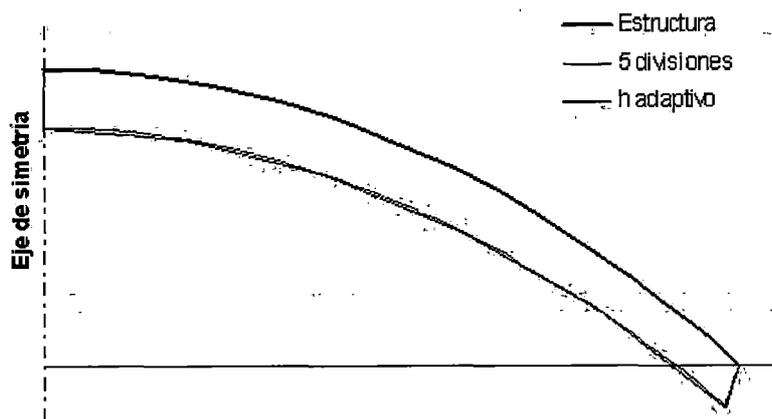


Fig. 3.7 Fuerzas de membrana meridionales, N_s

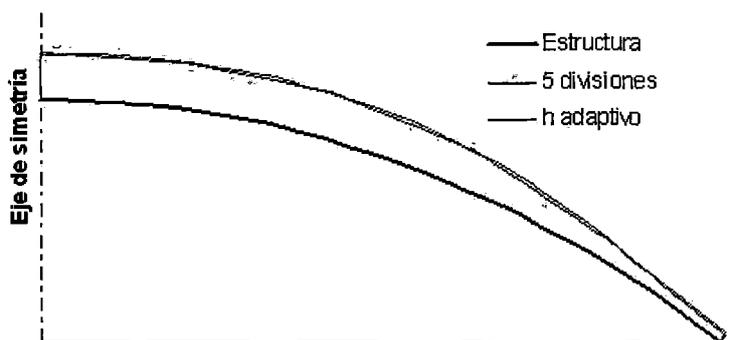


Fig. 3.8 Fuerzas de membrana tangenciales, N_θ

3.1.2 Domo esférico con abertura

Se considera a continuación el refinamiento h -adaptivo para otra estructura presentada por Timoshenko (1959), un domo esférico con abertura (figura 3.9). Se supondrán ángulos φ de 60° y φ_0 de 15° , 100 pulgadas de radio y 1 pulgada de espesor constante. La cáscara soportará una carga uniforme vertical $P= 1$ kip/in en el anillo de la abertura y una carga uniforme vertical de 2 psi. Se ha supuesto $E = 3.12 \times 10^6$ psi y $\nu = 0.25$.

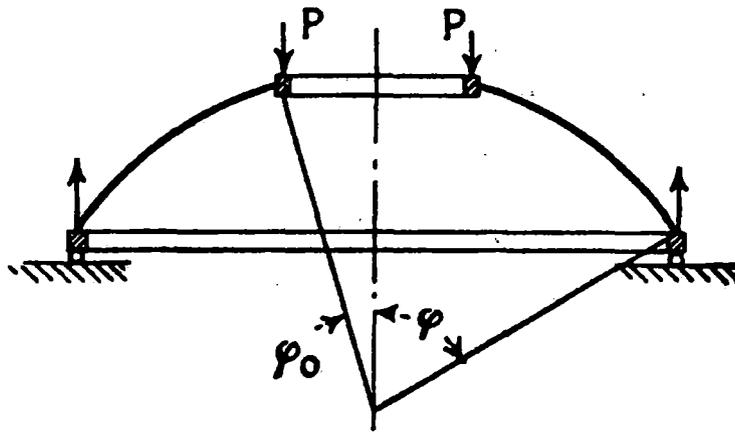


Fig. 3.9 Domo esférico con abertura. Timoshenko(1959).

Se puede ver en la figura siguiente una secuencia del refinamiento h -adaptivo, indicándose el máximo error relativo en el momento meridional y el número de divisiones en cada iteración.

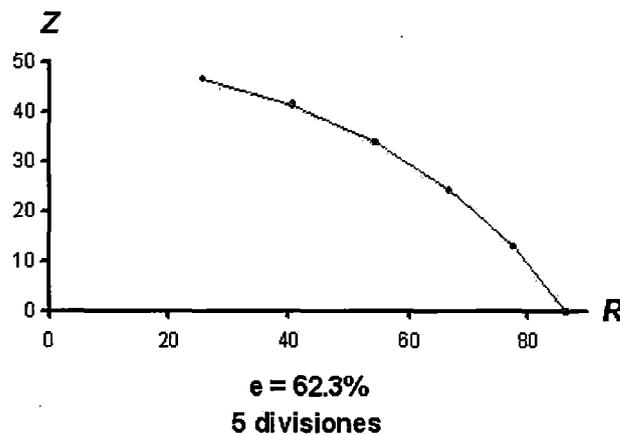


Fig. 3.10 Refinamiento h -adaptivo (iteración 1).

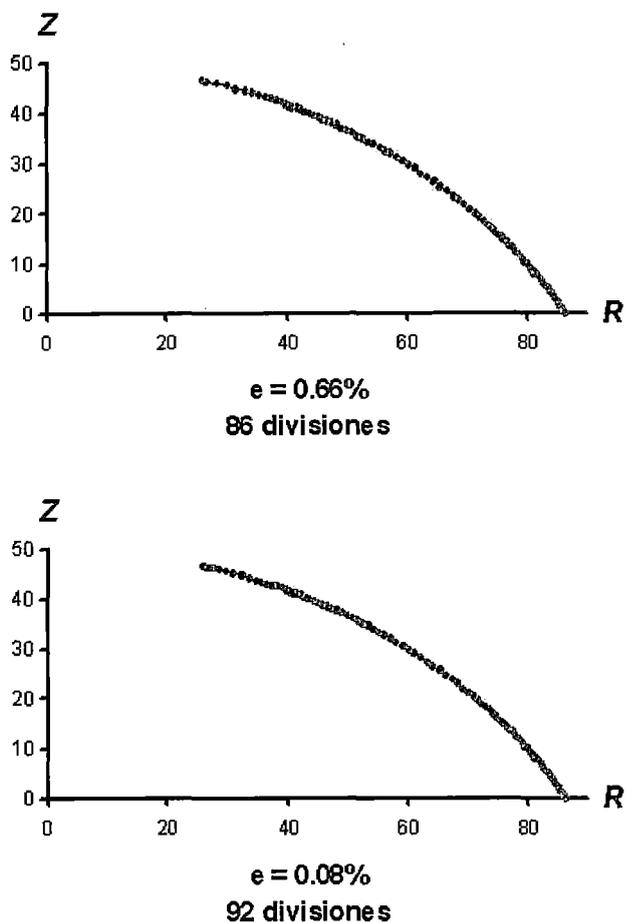


Fig. 3.11 Refinamiento *h*-adaptivo (iteraciones 2 y 3).

Se muestra a continuación la reducción del error relativo en función de los grados de libertad generados al dividir el elemento de dos maneras: uniformemente y con el procedimiento *h*-adaptivo.

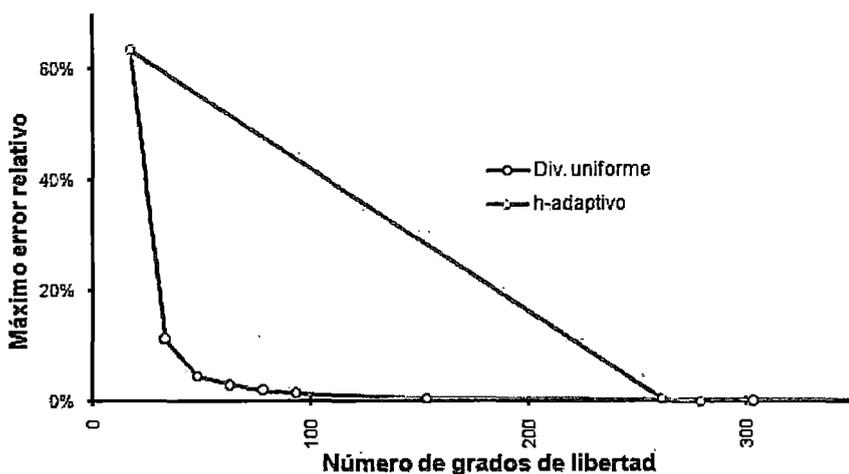


Fig. 3.12 Reducción del error relativo.

La figura siguiente muestra la deformada de la estructura:

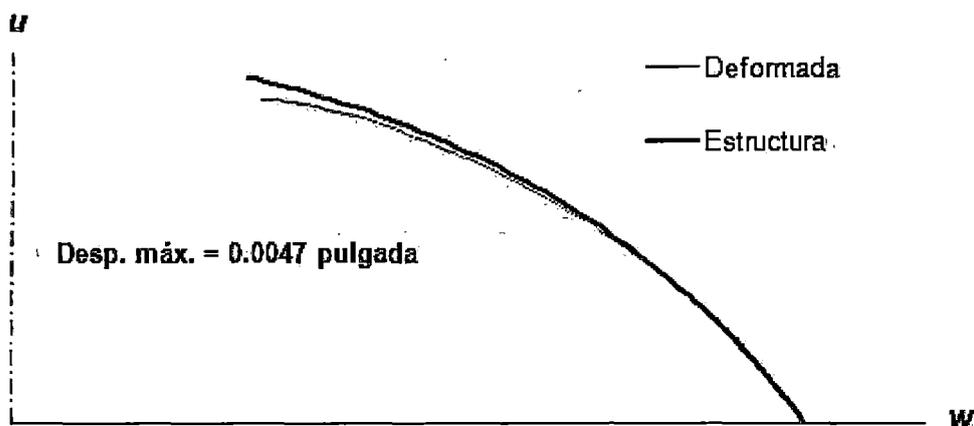


Fig. 3.13 Desplazamientos máximos

Para los momentos meridionales, con una división en 5 elementos se tiene un error relativo de 62.3%; con una división en 20 elementos, 3.1%; y con una división en 150 elementos, 0.08%. Con el procedimiento h -adaptivo se logra 0.08% con una división en 92 elementos.

Al igual que en el caso anterior, se observa que la teoría de membrana no es adecuada para estimar las fuerzas en las cercanías de los apoyos y en este caso también en la proximidad de la abertura. Por ejemplo, para $\varphi=15^\circ$ se obtiene una fuerza meridional $N_s=3.86$ kip/in con las fórmulas aproximadas presentadas por Timoshenko. De acuerdo al procedimiento h -adaptivo esta misma fuerza resulta $N_s=2.38$ kip/in. Algo análogo sucede con la fuerza de membrana tangencial, el valor obtenido con la teoría de membrana cuando φ es 15° resulta $N_\theta =189.3$ kip/in. Con el procedimiento de elementos finitos h -adaptivo resulta $N_\theta =273.26$ kip/in.

Se muestran también las gráficas de momentos meridionales y tangenciales y de las fuerzas de membrana meridionales y tangenciales. En este caso se aprecia que el error de discretización en las fuerzas de membrana meridionales si puede ser importante

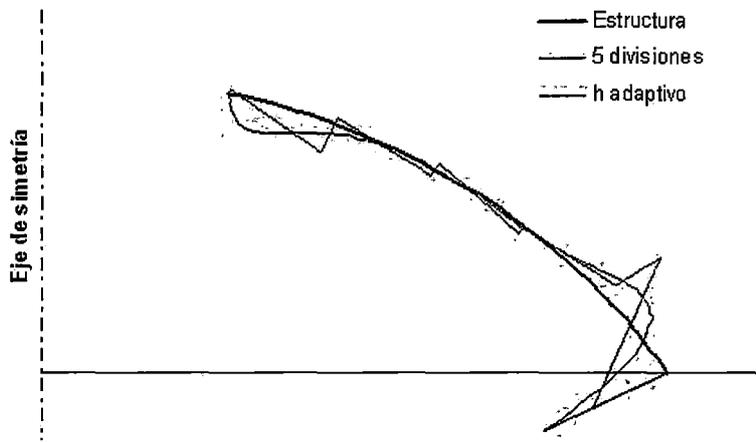


Fig. 3.14 Momentos meridionales, M_s

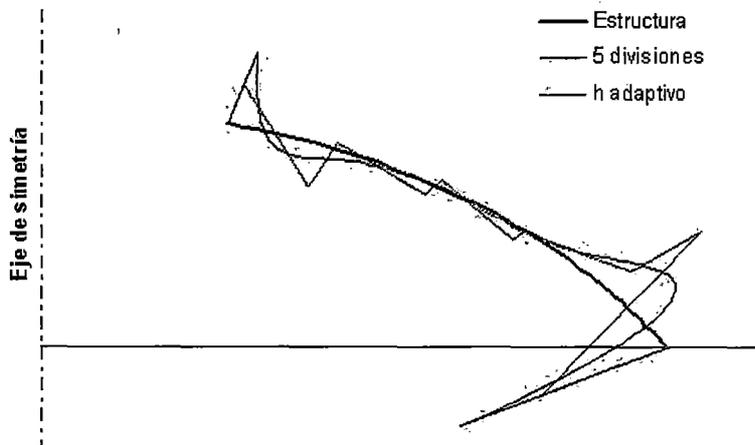


Fig. 3.15 Momentos tangenciales, M_θ

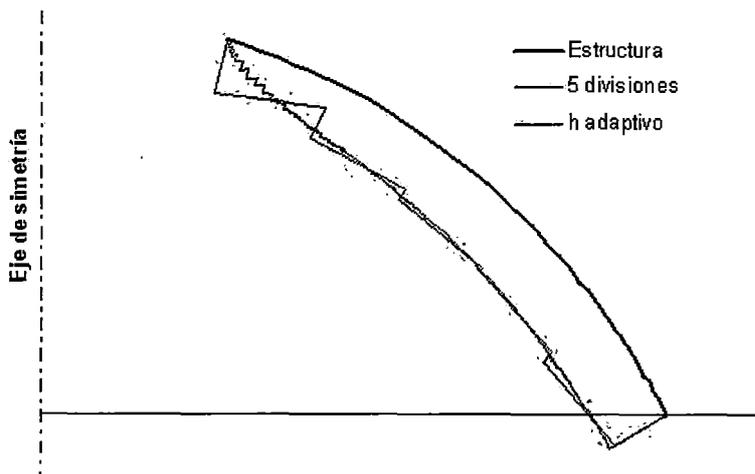


Fig. 3.16 Fuerzas de membrana meridionales, N_s

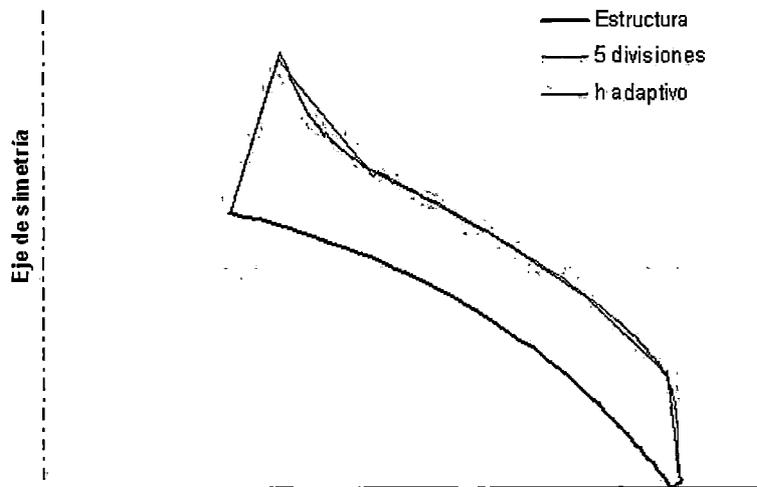


Fig. 3.17 Fuerzas de membrana tangenciales, N_{θ}

3.1.3 Tanque esférico

En este acápite se considera el refinamiento h -adaptivo del modelo de elementos finitos para el análisis de un tanque esférico. Se ha tomado como referencia la solución basada en la teoría de membrana presentada por Timoshenko (1959). Se supuso un ángulo φ_0 de 120° , 60 pies de radio y 15 pulgadas de espesor constante. El tanque soporta una carga hidrostática hasta la parte superior de la esfera. El peso específico del líquido es $\gamma = 0.03613 \text{ lb/in}^3$. Para las paredes del tanque se consideraron $E = 3.12 \times 10^6 \text{ psi}$ y $\nu = 0.25$.

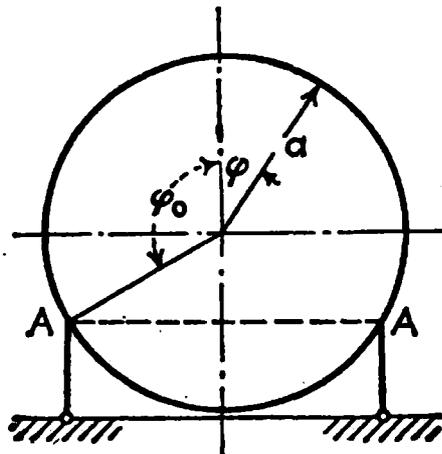


Fig. 3.18 Tanque esférico. Timoshenko (1959).

Se puede ver en la figura siguiente una secuencia del refinamiento h -adaptivo, indicándose el máximo error relativo en el momento meridional y el número de divisiones en cada iteración.

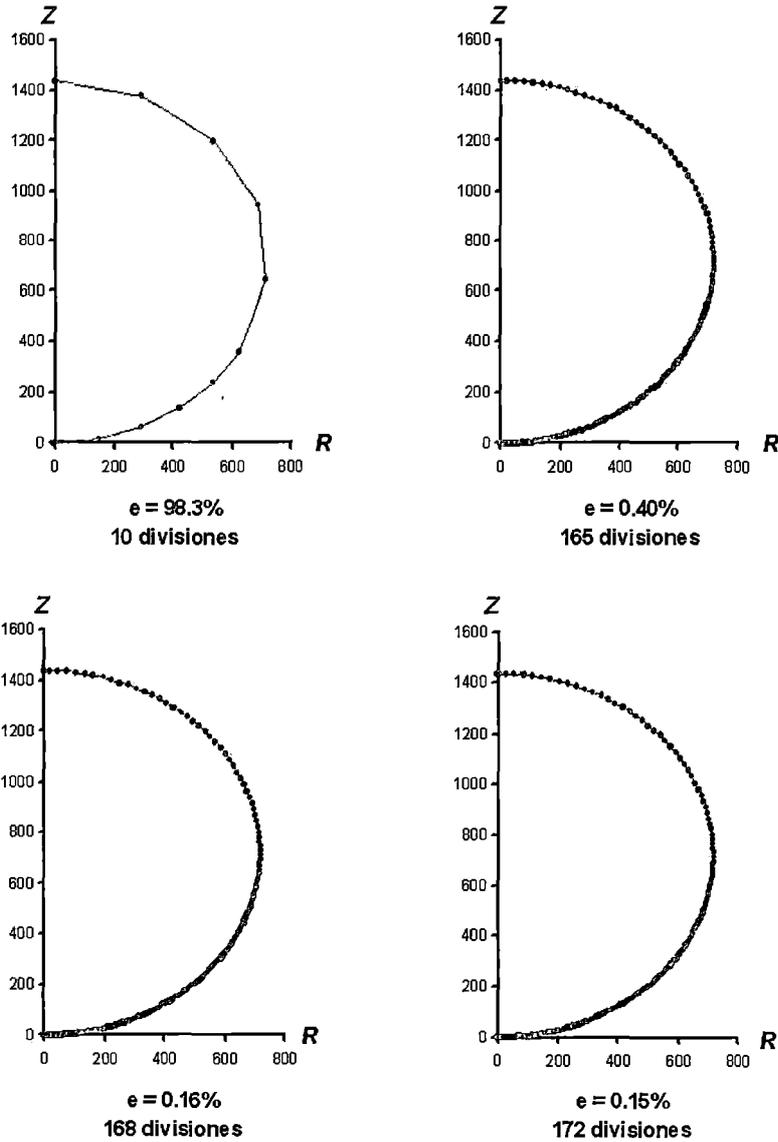


Fig. 3.19 Refinamiento h -adaptivo (iteraciones 1 a 4).

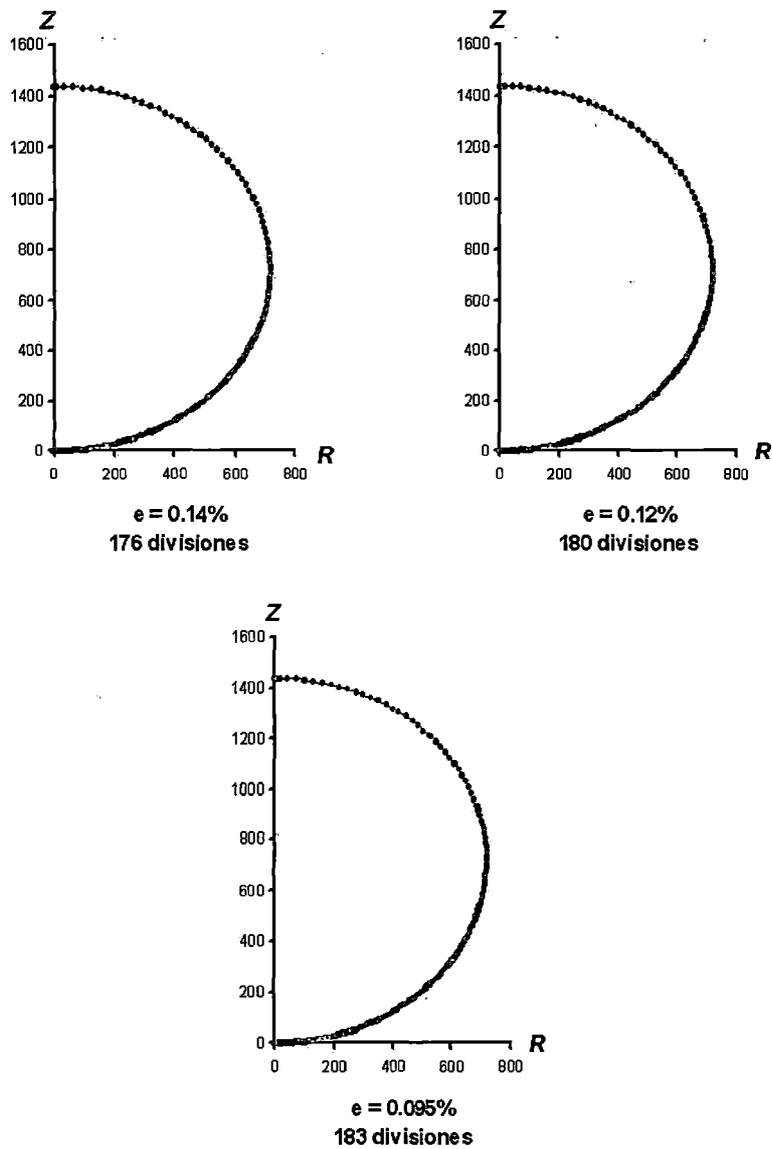


Fig. 3.20 Refinamiento h -adaptivo (iteraciones 5 a 7).

Se muestra a continuación la reducción del error relativo en función de los grados de libertad generados al dividir el modelo uniformemente y con el procedimiento h -adaptivo.

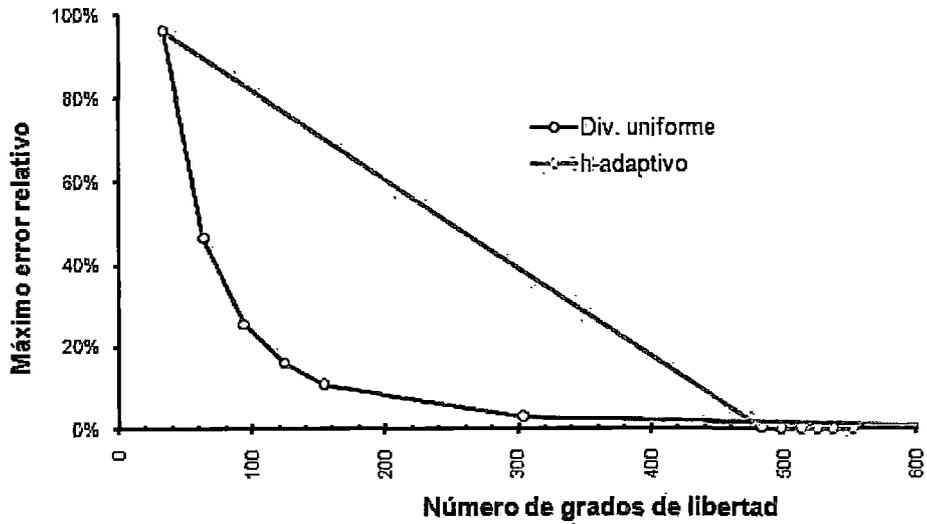


Fig. 3.21 Reducción del error relativo

La deformada de la estructura se muestra en la figura siguiente:

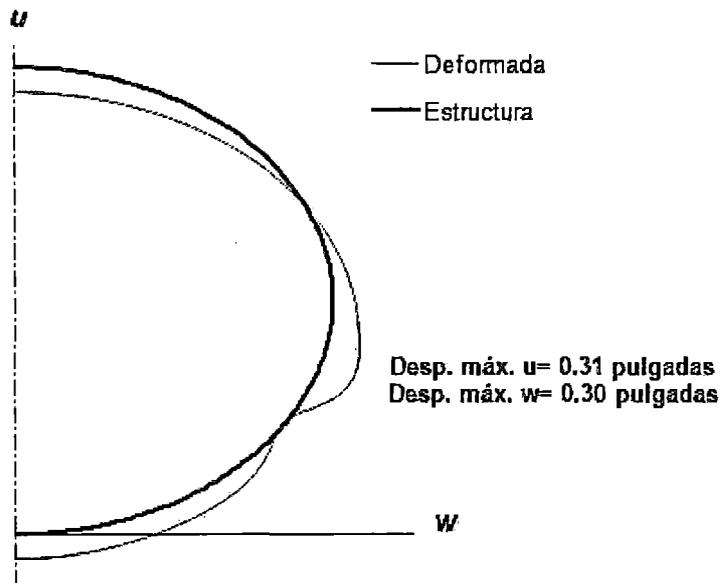


Fig. 3.22 Desplazamientos máximos.

En este caso se estableció un error objetivo de 0.1%. Para los momentos meridianales, con una división en 10 elementos se tiene un error relativo de 96.3%, con una división en 50 elementos, 10.9% y con una división en 600 elementos, 0.09%. En cambio con el procedimiento *h*-adaptivo se logra 0.09% con una división en sólo 183 elementos.

Para la fuerza de membrana meridional cuando el ángulo φ es 60° se obtiene $N_s=2094$ kip/in con las fórmulas aproximadas de Timoshenko, mientras que con el modelo de elementos finitos h -adaptivo resulta $N_s=2101$ kip/in. Para la correspondiente fuerza de membrana tangencial se obtienen $N_\theta=7343$ kip/in y $N_\theta=7346$ kip/in, respectivamente.

A continuación se muestran las gráficas para los momentos flectores y para las fuerzas de membrana.

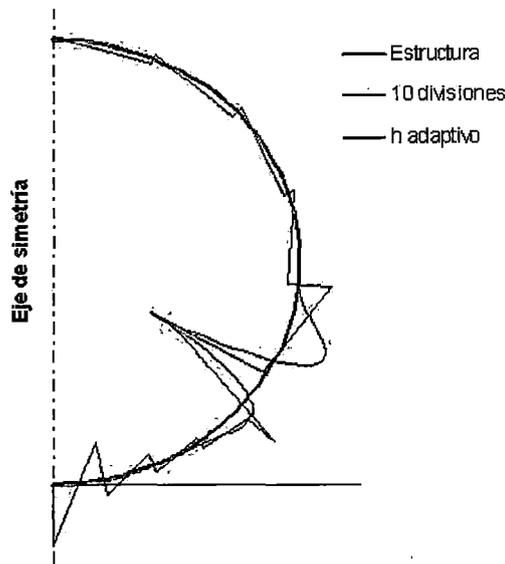


Fig. 3.23 Momentos meridianales, M_s

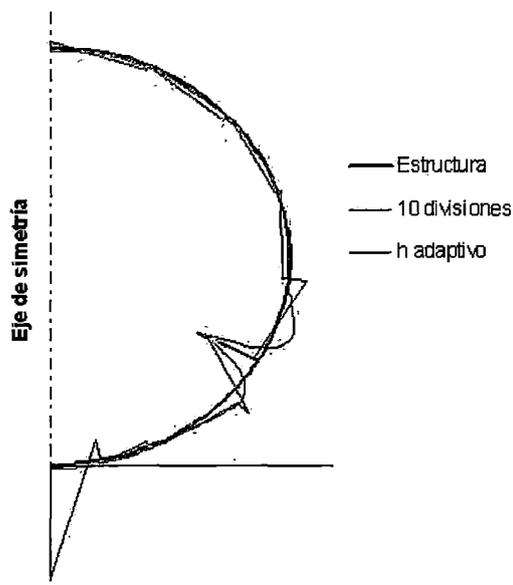


Fig. 3.24 Momentos tangenciales, M_θ

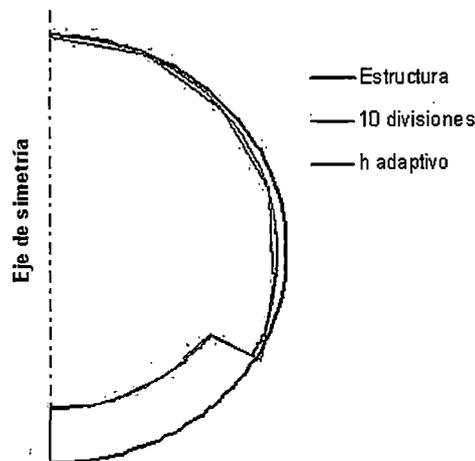


Fig. 3.25 Fuerzas de membrana meridionales, N_s

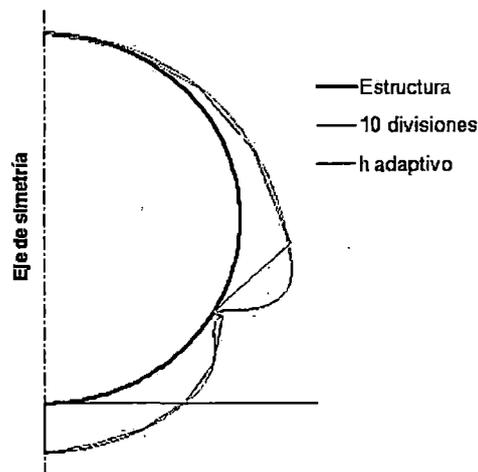


Fig. 3.26 Fuerzas de membrana tangenciales, N_θ

3.2 RESERVORIOS APOYADOS.

3.2.1 Reservoirio recto

En la figura siguiente se muestra una estructura cilíndrica de 30 pies de radio, 26 pies de altura y 14 pulgadas de espesor constante. La carga es hidrostática hasta el borde del cilindro, con $\gamma = 0.03613 \text{ lb/in}^3$. Para la estructura se supuso $E = 3.12 \times 10^6 \text{ psi}$ y $\nu = 0.25$. No se consideró el peso propio. Los resultados se comparan con los presentados por Timoshenko (1959).

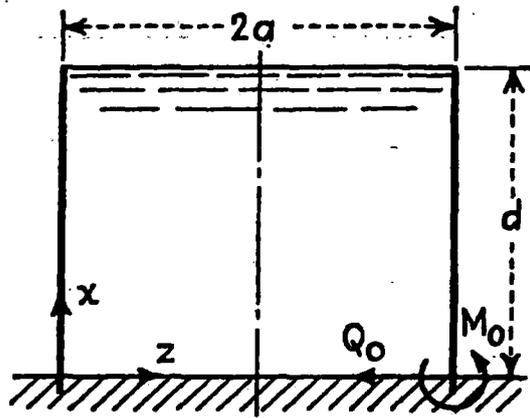


Fig. 3.27 Reservoirio recto. Timoshenko (1959).

Se puede ver en la figura siguiente una secuencia del refinamiento h -adaptivo, indicándose el máximo error relativo en el momento meridional y el número de divisiones en cada iteración.

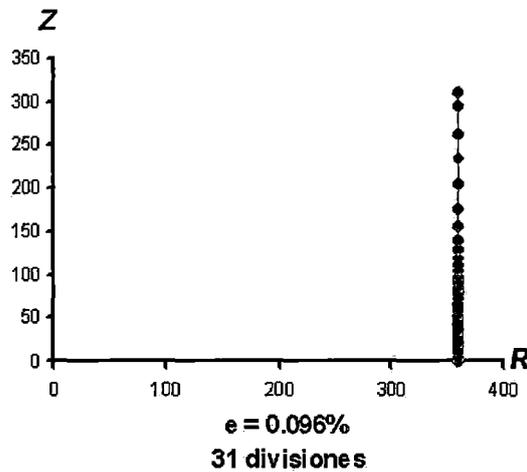
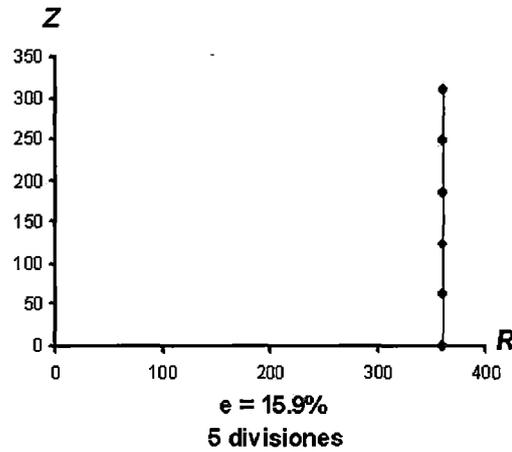


Fig. 3.28 Refinamiento h -adaptivo

Se muestra a continuación la reducción del error relativo en función de los grados de libertad generados al dividir el modelo uniformemente y con el procedimiento h -adaptivo, que tuvo dos iteraciones.

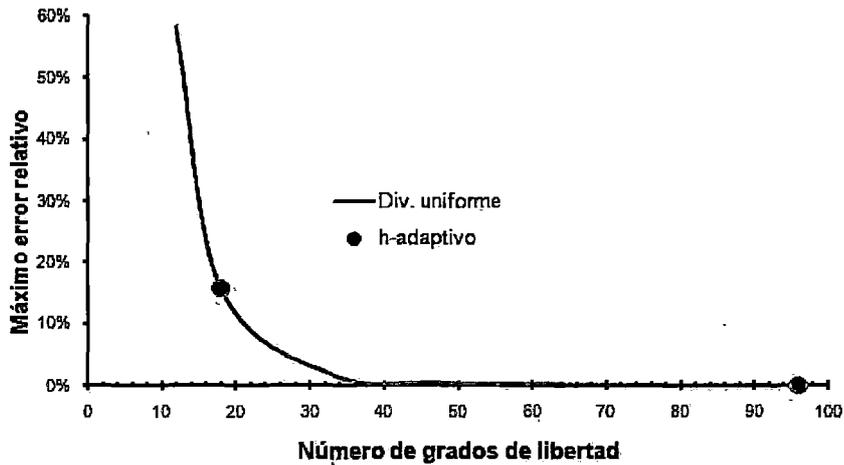


Fig. 3.29 Reducción del error relativo

En la figura siguiente se muestra la deformada de la estructura:

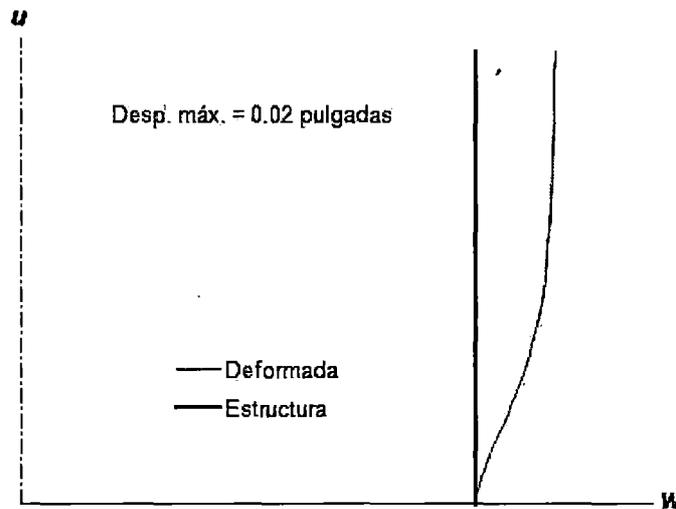


Fig. 3.30 Desplazamientos máximos

Para los momentos meridionales, con una división en 5 elementos se tiene un error relativo máximo de 15.9%; con una división en 30 elementos, 0.07% y con el procedimiento h -adaptivo se logra 0.1% con una división en 31 elementos, similar a la división uniforme.

Según las aproximaciones de Timoshenko, el momento en la base resulta $M_0=13960$ in-lb/in. De acuerdo al procedimiento h -adaptivo con un error objetivo de 0.1% el correspondiente valor es $M_0=13940$ in-lb/in. La diferencia entre los dos valores tiene un error relativo del 0.15%.

En las figuras siguientes se muestran los momentos meridionales y tangenciales, así como las fuerzas de membrana tangenciales. Las fuerzas de membrana meridionales son en este caso iguales a cero, aunque en el modelo de elementos finitos se obtienen pequeños errores numéricos.

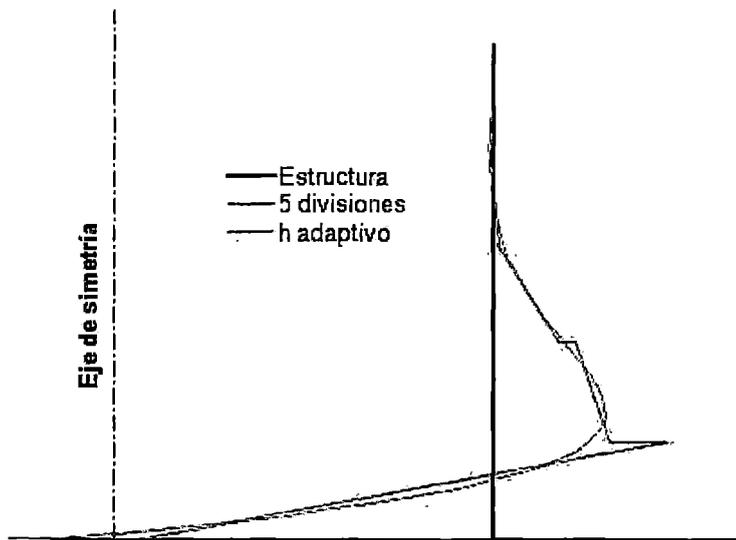


Fig. 3.31 Momentos meridionales, M_s

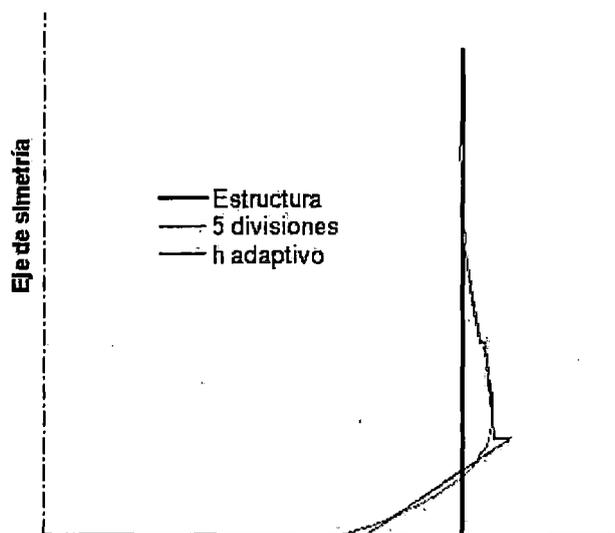


Fig. 3.32 Momentos tangenciales, M_θ

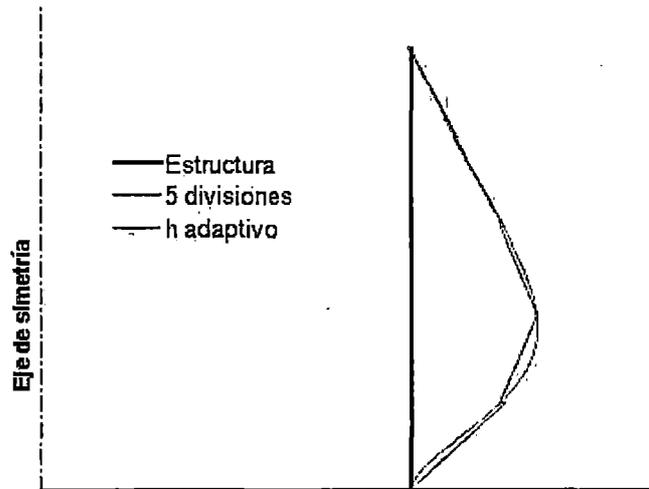


Fig. 3.33 Fuerzas de membrana tangenciales, N_θ

3.2.2 Reservorio recto con cubierta circular

Se ha tomado de Abbett (1957) un reservorio típico, con un diámetro de 151pies y una altura de muros de 37.5pies. El espesor de los muros es de 17.5 pulgadas en la base y de 8.75 pulgadas en el extremo superior. La carga de agua ($\gamma=0.03613 \text{ lb/in}^3$) llega a la altura del muro. El espesor de la cubierta es de 4 pulgadas, sin sobrecarga en la misma. La altura de la cubierta es de 18.875 pies. Para toda la estructura se supuso $E=3.12 \times 10^6 \text{ psi}$ y $\nu=0.25$. No se consideró el peso propio.

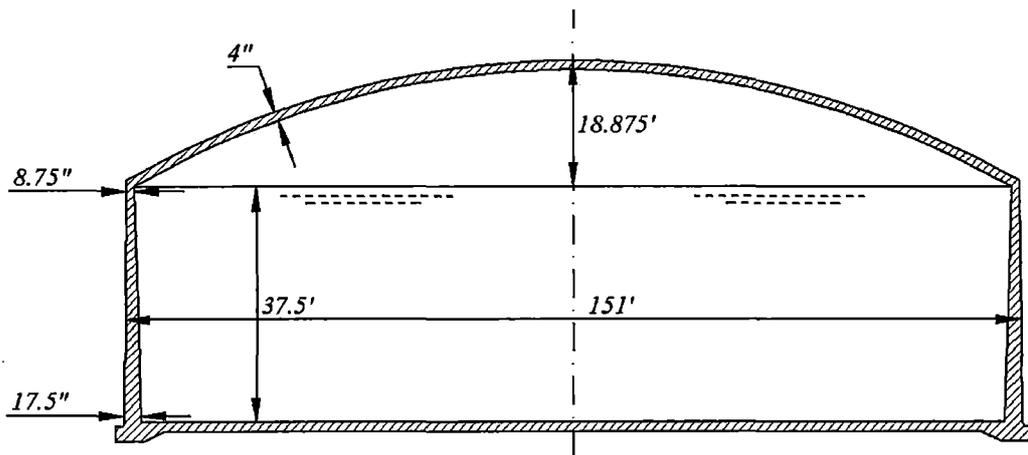


Fig. 3.34 Reservorio recto con cubierta circular. Abbett (1957).

En la figura siguiente se muestra la secuencia del refinamiento h -adaptivo, indicándose el máximo error relativo en el momento meridional y el número de divisiones en cada iteración.

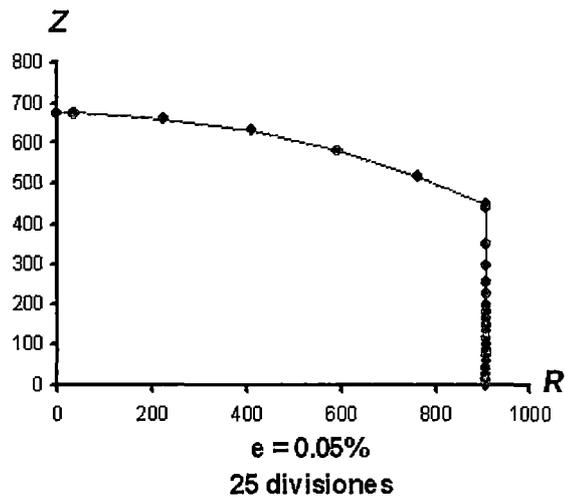
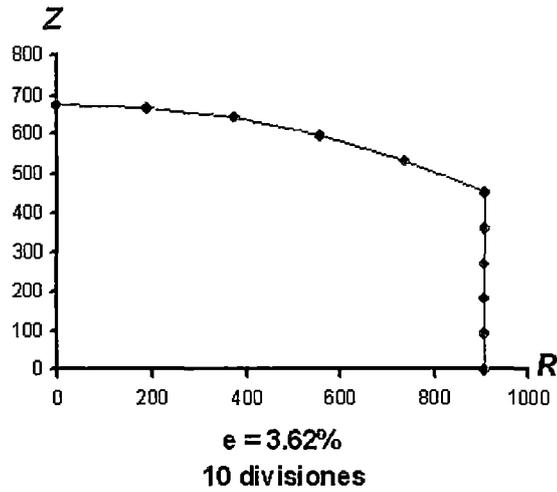


Fig. 3.35 Refinamiento h -adaptivo

Se indica a continuación la reducción del error relativo en función de los grados de libertad generados al dividir el modelo uniformemente y con el procedimiento h -adaptivo (dos iteraciones).

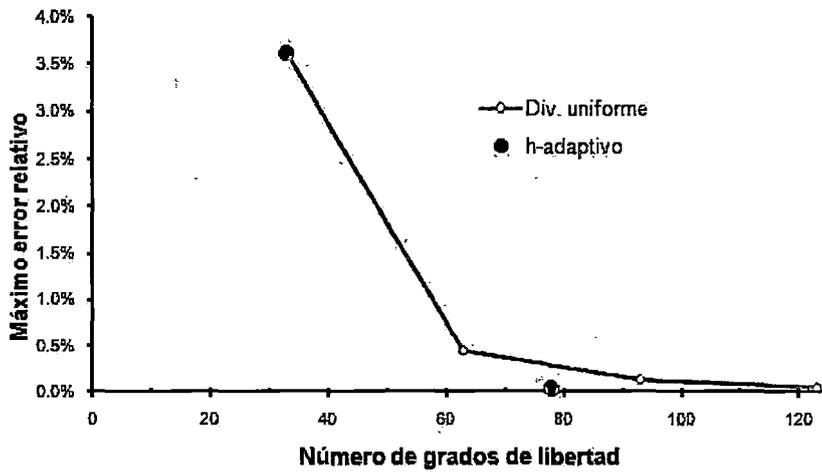


Fig. 3.36 Reducción del error relativo.

La deformada de la estructura se muestra a continuación:

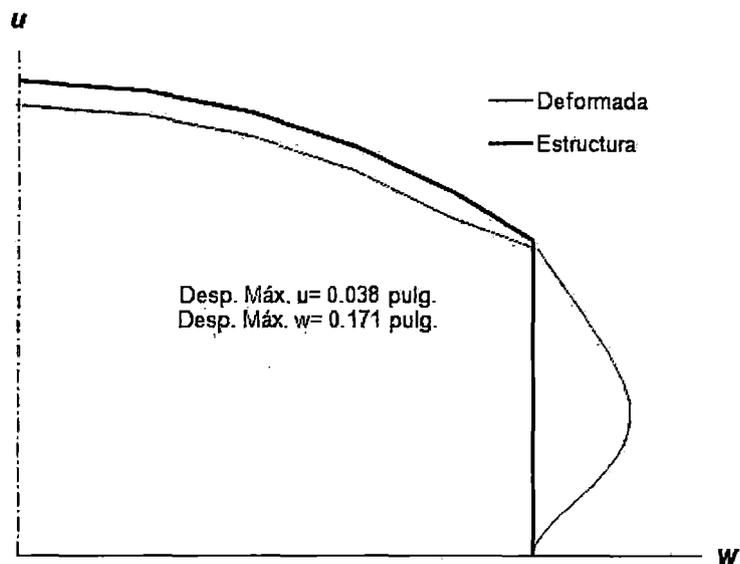


Fig. 3.37 Desplazamientos máximos.

Con una división en 40 elementos se obtuvo un error relativo máximo de 0.06% en los momentos meridionales. Con el procedimiento *h*-adaptivo se logra 0.05% con una división en 25 elementos.

Se muestran las respectivas gráficas para los momentos meridionales y tangenciales y para las fuerzas de membrana meridionales y tangenciales.

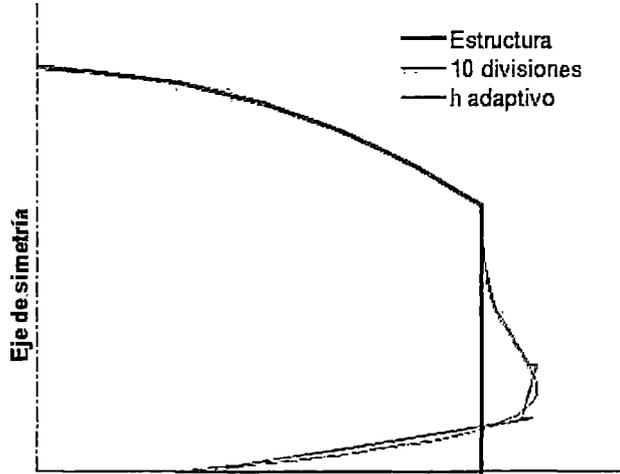


Fig. 3.38 Momentos meridionales, M_s

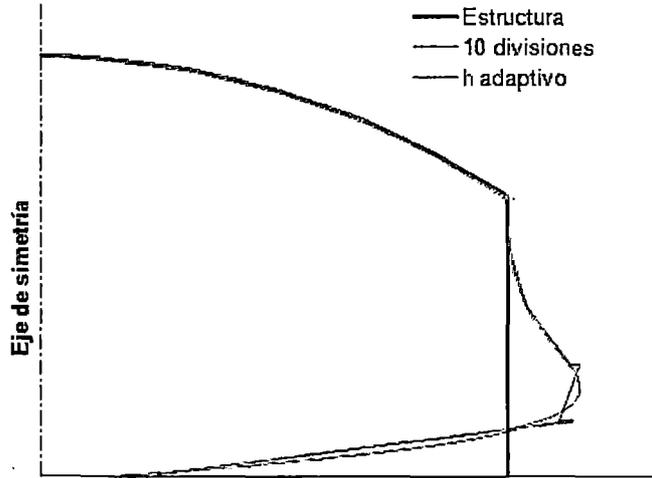


Fig. 3.39 Momentos tangenciales, M_θ

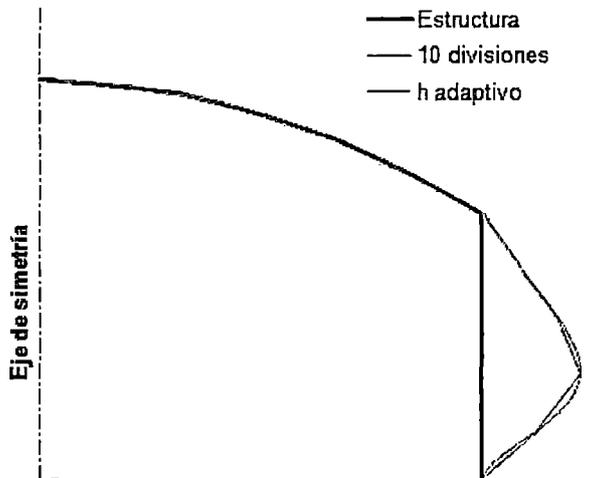


Fig. 3.40 Fuerzas de membrana tangenciales, N_θ

3.3 RESERVIORIOS ELEVADOS

3.3.1 Tanque Intze

En este acápite se analiza un reservorio elevado con fuste recto, tomado de Guerrin (1968), que se muestra en la figura 3.41. Es una estructura de 6m de diámetro en el fuste y 9m de diámetro en el reservorio propiamente dicho, 11.25m de altura, 0.25m de espesor en el fuste, 0.15m de espesor en el reservorio y 0.10m de espesor en la cubierta. La carga es hidrostática y de aproximadamente 5m de altura ($\gamma=1 \text{ t/m}^3$). No se incluyó el peso propio. La estructura es de concreto armado, con $E=2.1 \times 10^6 \text{ t/m}^2$ y $\nu=0.25$.

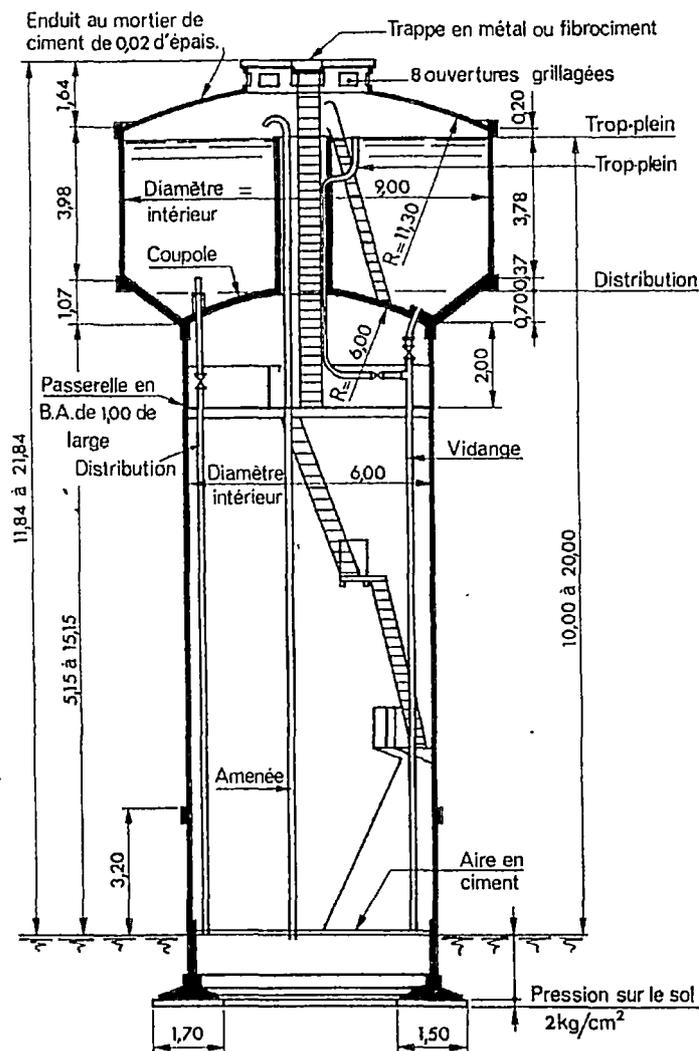


Fig. 3.41 Reservorio elevado con fuste recto y cubierta circular. Guerrin (1968).

En la figura siguiente se muestra la secuencia del refinamiento h -adaptivo, indicándose el máximo error relativo en el momento meridional y el número de divisiones en cada iteración.

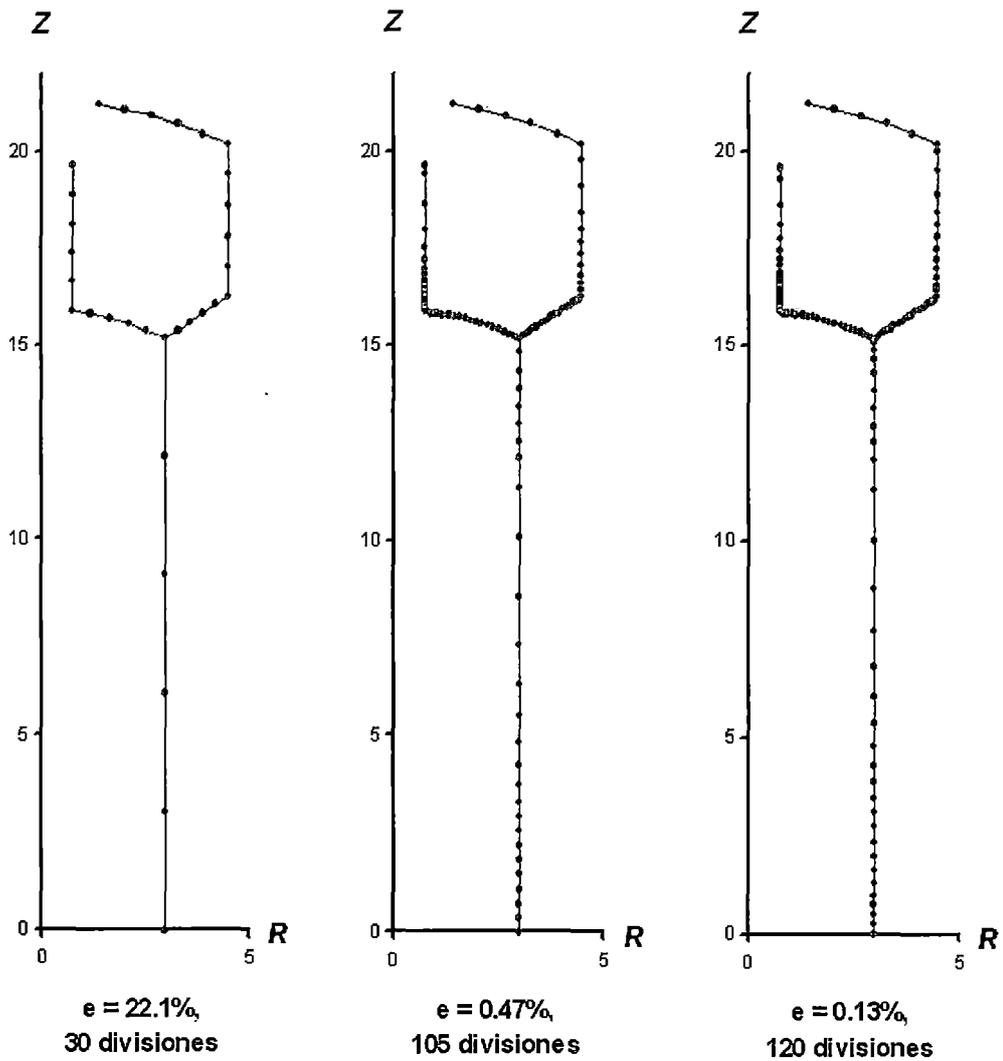


Fig. 3.42 Refinamiento h -adaptivo (iteraciones 1 a 3).

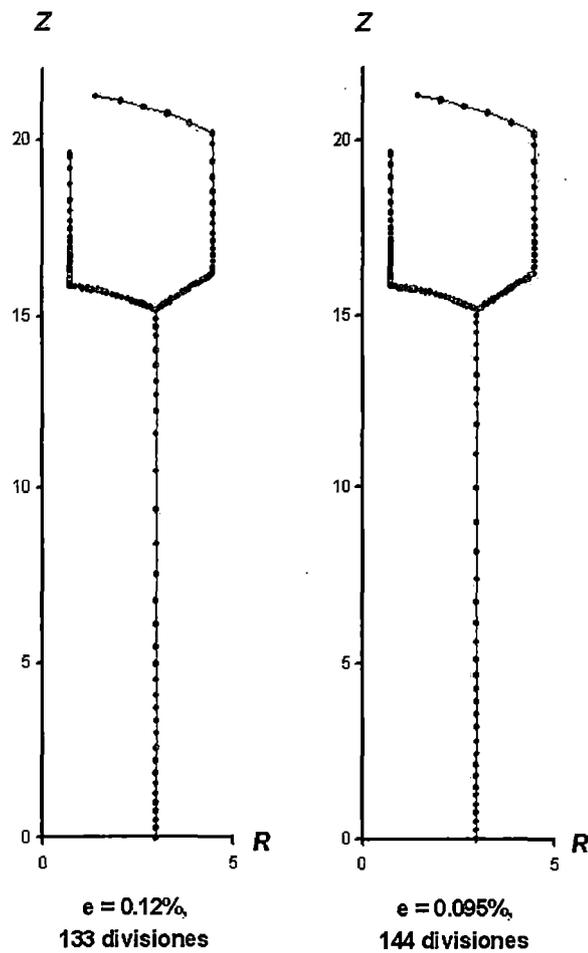


Fig. 3.43 Refinamiento h -adaptivo (iteraciones 4 y 5).

Se muestra a continuación la reducción del error relativo en función de los grados de libertad. Nuevamente, se puede notar que con el procedimiento h -adaptivo la reducción del error es mucho más rápida que la división uniforme.

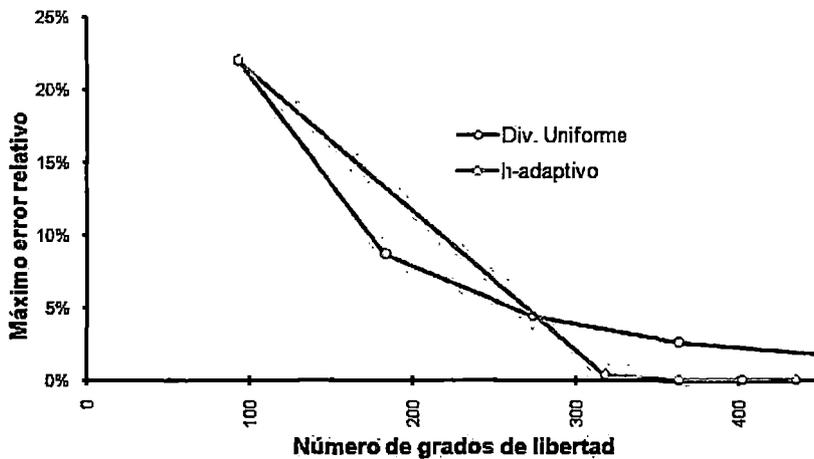


Fig. 3.44 Reducción del error relativo

En la figura siguiente se muestra la deformada de la estructura:

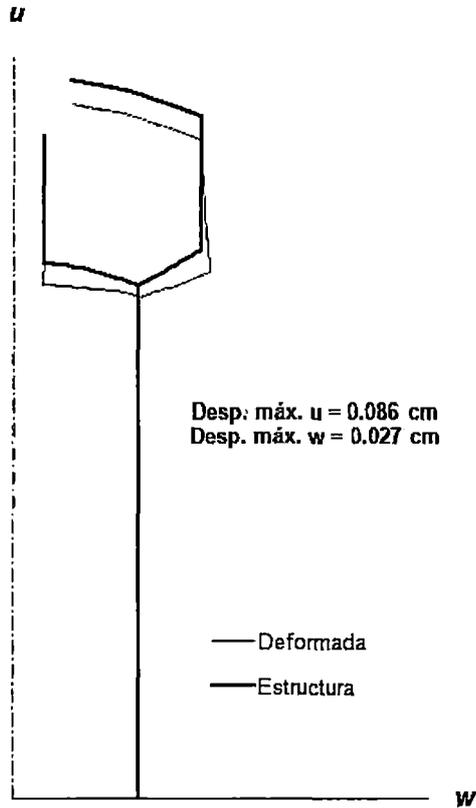


Fig. 3.45 Desplazamientos máximos

Para los momentos meridionales, con una división en 30 elementos se tiene un error relativo de 22.1%; con una división en 60 elementos, 8.8% y con una división en 600 elementos se obtuvo 0.12% de error. En cambio con el procedimiento h -adaptivo sólo se necesitó dividir en 144 elementos para conseguir un error relativo de 0.10%.

A continuación se muestran las gráficas para los momentos meridionales y tangenciales, para las fuerzas de membrana meridionales y para las fuerzas de membrana tangenciales.

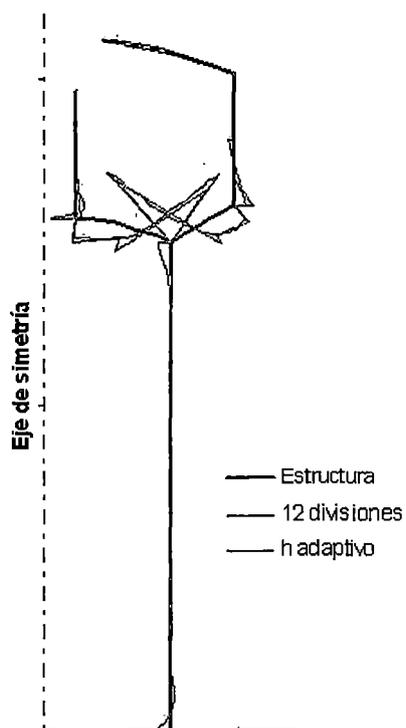


Fig. 3.46 Momentos meridianales, M_s

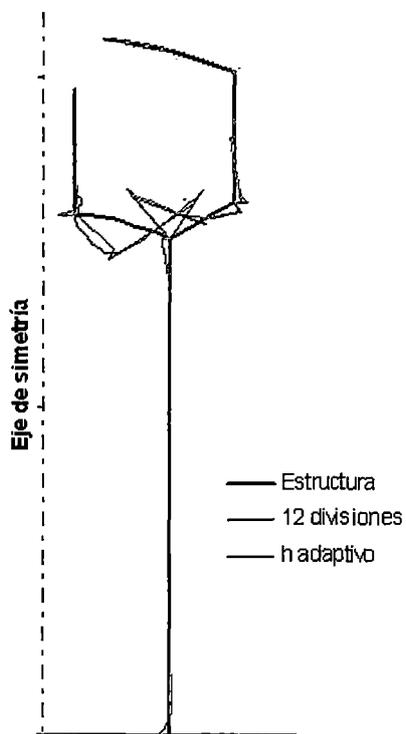


Fig. 3.47 Momentos tangenciales, M_t

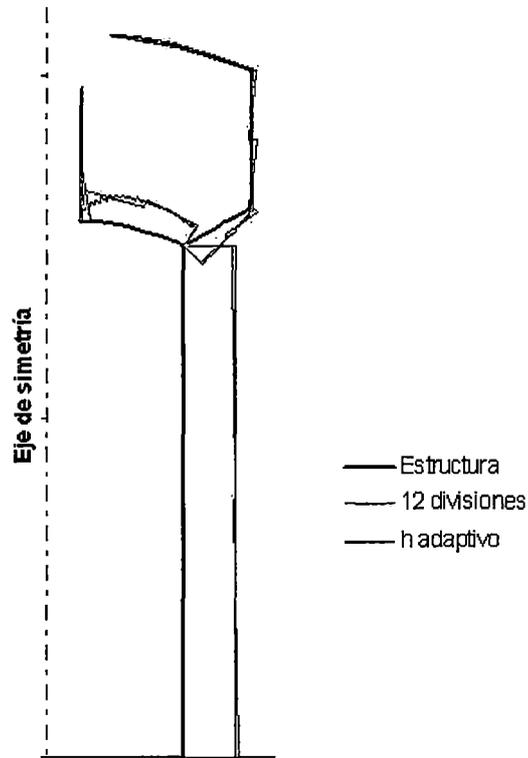


Fig. 3.48 Fuerzas de membrana meridionales, N_s

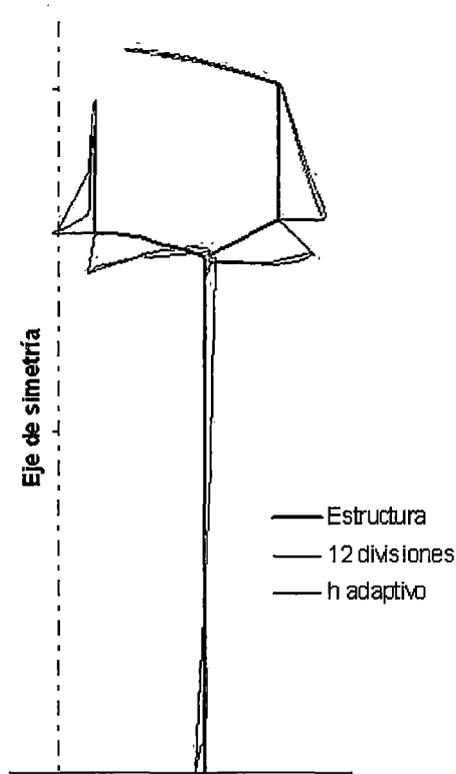


Fig. 3.49 Fuerzas de membrana tangenciales, N_θ

3.3.2 Reservoirio elevado en forma de copa.

Se analiza un reservoirio elevado, tomado de Guerrin (1968). Es una estructura tipo copa, de 1.8m de diámetro en el fuste y 10.1m de diámetro máximo en el reservoirio, son 34 m de altura total, 0.15m de espesor en el fuste, y espesor variable en el reservoirio de 0.34m a 0.15m. La carga es hidrostática, con aproximadamente 15m de altura de agua ($\gamma=1 \text{ t/m}^3$). La estructura es de concreto armado, con $E=2.1 \times 10^6 \text{ t/m}^2$ y $\nu=0.25$. No se incluyó el peso propio.

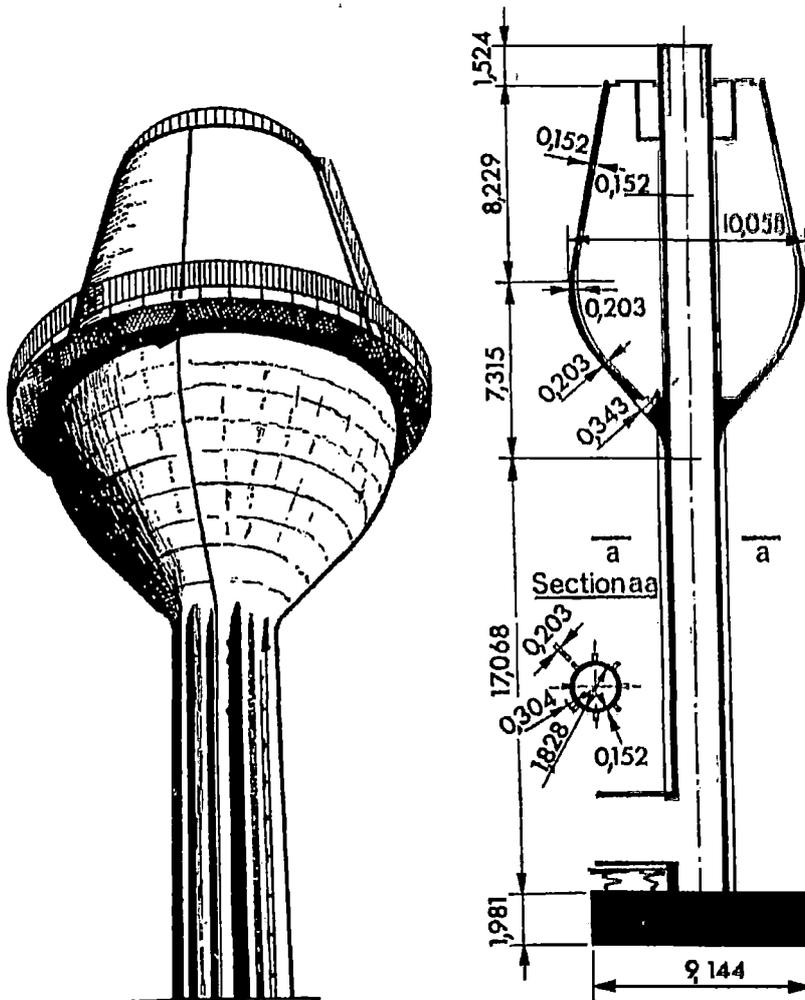


Fig. 3.50 Reservoirio elevado en forma de copa. Guerrin (1968).

Se necesitaron 17 iteraciones para llegar al error objetivo, como se observa en la tabla 3.3.2. Nótese que entre la iteración 11 y 12 hay un aumento del error relativo y no una disminución como se esperaba. Esto suele ocurrir en zonas de concentración de esfuerzos.

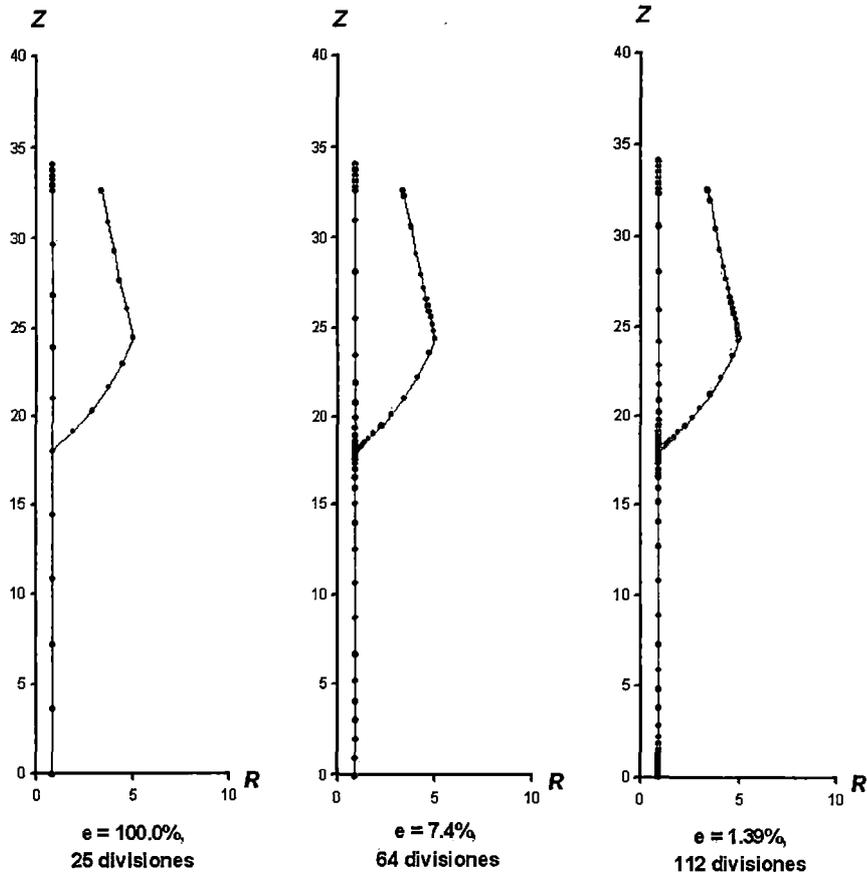


Fig. 3.51 Refinamiento h-adaptivo

Las restantes iteraciones se pueden ver en la siguiente tabla:

Tabla 3.1 Refinamiento h-adaptivo (Iteraciones 4-17).

<u>Iteración</u>	<u>Error relativo</u>	<u>Divisiones</u>
4	1.099%	132
5	0.753%	149
6	0.514%	165
7	0.454%	179
8	0.422%	195
9	0.383%	208
10	0.294%	223
11	0.218%	236
12	0.236%	249
13	0.186%	262
14	0.151%	275
15	0.137%	287
16	0.121%	297
17	0.095%	309

La reducción del error relativo es bastante lenta para una división uniforme de los elementos. Por ejemplo, para una división en 250 elementos (50 por tramo, 753 grados de libertad), se obtuvo un error relativo alto, del orden de 9%.

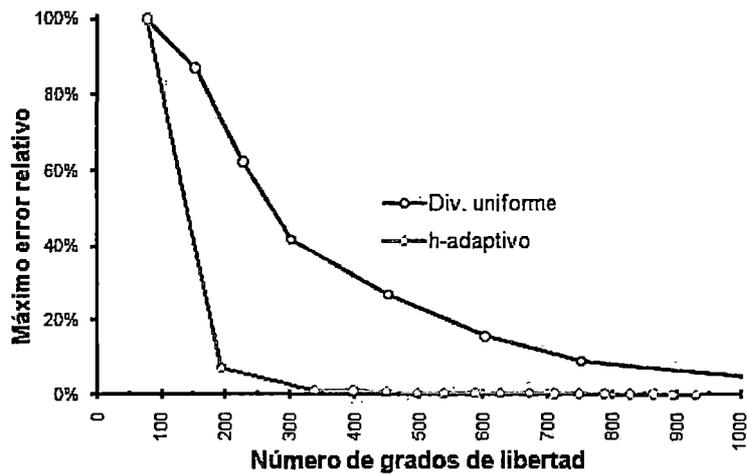


Fig. 3.52 Reducción del error relativo

En la gráfica que sigue se muestra la deformada de la estructura, indicándose los desplazamientos máximos:

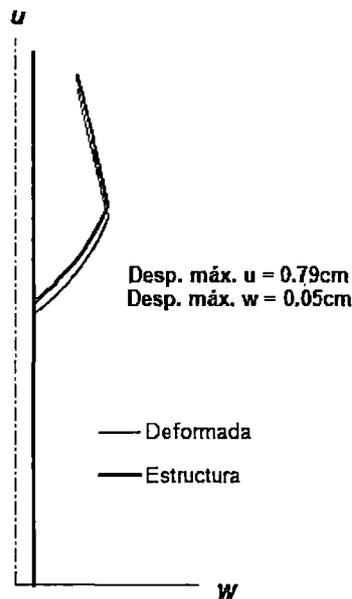
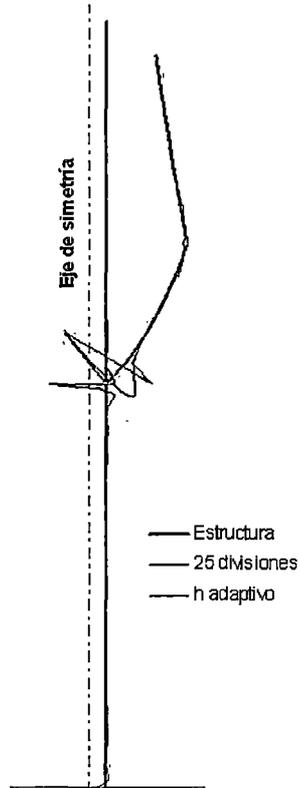


Fig. 3.53 Desplazamientos máximos

Para los momentos meridionales, con una división en 25 elementos se obtuvo un error relativo de 100%; con una división en 100 elementos, 41.9% y con una división en 1750 elementos se obtuvo 0.1% de error. Con el procedimiento h -adaptivo sólo se necesitó dividir en 309 elementos para conseguir el mismo error. La mayor parte del refinamiento h -adaptivo ha sido realizada en la unión del fuste con el muro de borde, donde se tiene concentración de momentos.



4

Fig. 3.54 Momentos meridianales, M_s

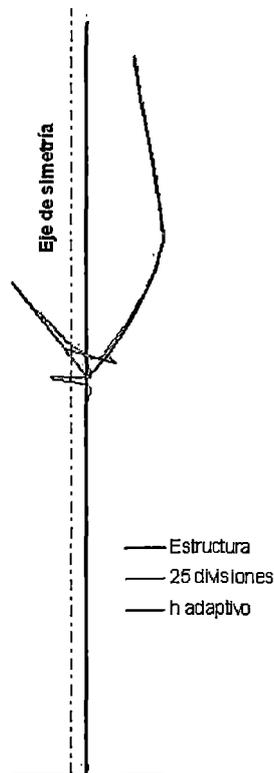


Fig. 3.55 Momentos tangenciales, M_t

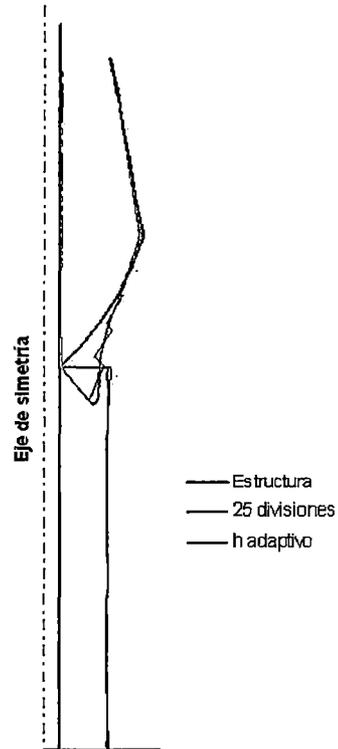


Fig. 3.56 Fuerzas de membrana meridionales, N_s

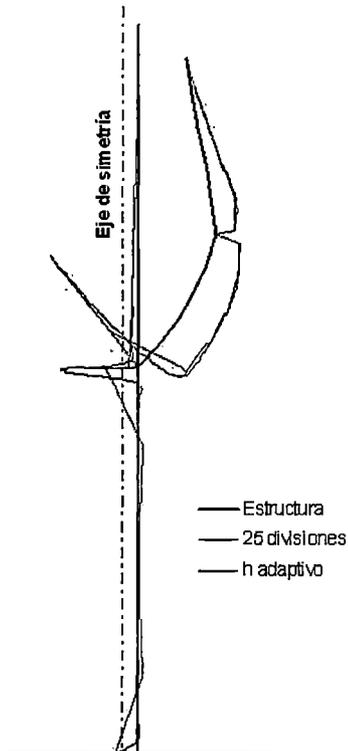


Fig. 3.57 Fuerzas de membrana tangenciales, N_θ

3.3.3 Reservorio elevado doble

Por último, se muestra el refinamiento h -adaptivo para un reservorio tomado de Guerrin (1968). Es una estructura con doble almacenamiento de agua, de 28m de diámetro exterior y 10m de diámetro interior, 55m de altura total. Los muros tienen 0.24m de espesor y las losas tienen 0.15m de espesor. En total se almacenan 8000m^3 de agua ($\gamma=1\text{ t/m}^3$). La estructura es de concreto armado, con $E=2.1 \times 10^6\text{ t/m}^2$ y $\nu=0.25$. En el análisis no se incluyó el peso propio.

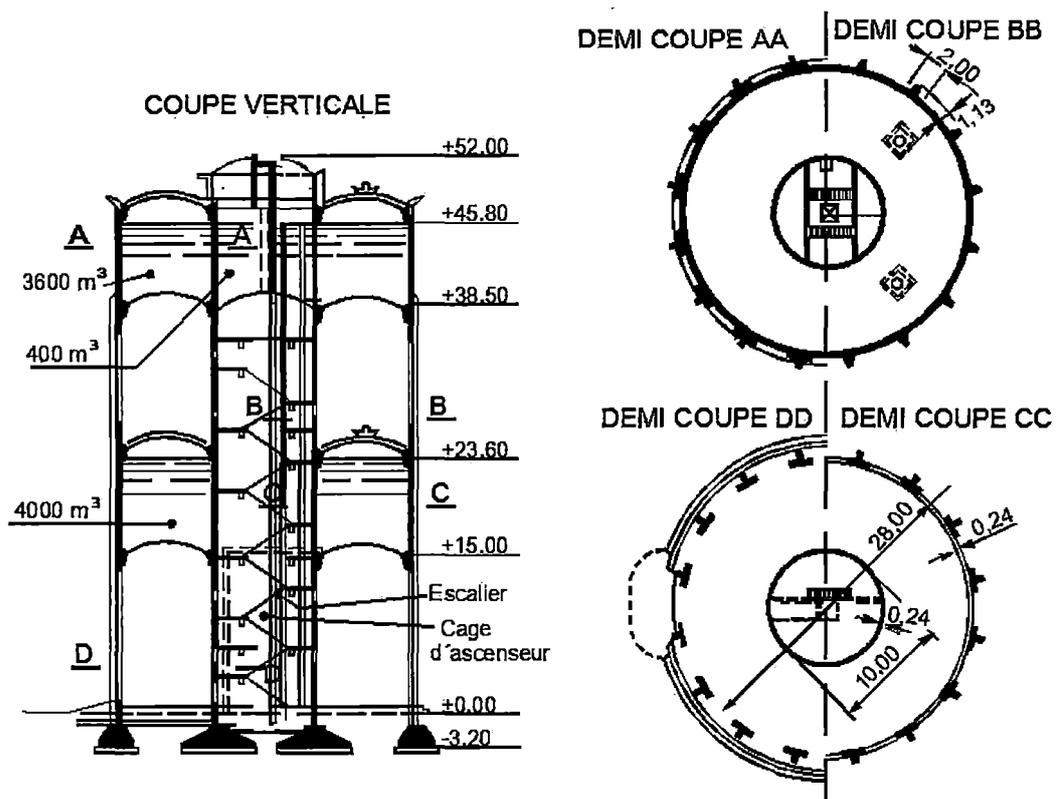


Fig. 3.58 Reservorio elevado con doble almacenamiento de agua. Guerrin (1968).

Las tres primeras iteraciones del refinamiento h -adaptivo se grafican seguidamente, indicándose el máximo error relativo en el momento meridional y el número de divisiones en cada iteración. Para este análisis se consideró un error objetivo de 1%, más que suficiente para este tipo de estructuras.

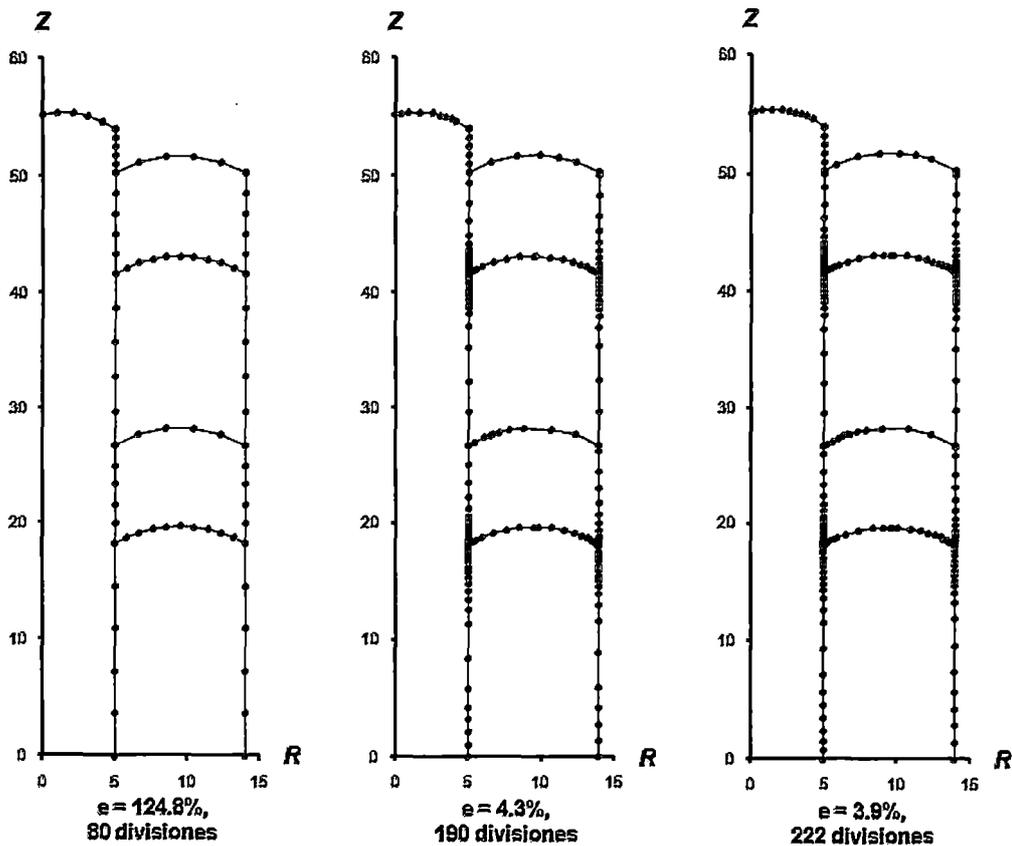


Fig. 3.59 Refinamiento h -adaptivo

Algunos resultados para las 5 iteraciones restantes se pueden ver en la siguiente tabla:

Tabla 3.2 Refinamiento h -adaptivo (Iteraciones 4-8).

<u>Iteración</u>	<u>Error relativo</u>	<u>Divisiones</u>
4	1.87%	253
5	1.89%	279
6	1.20%	299
7	1.27%	315
8	0.98%	328

La reducción del error relativo es lenta para una división uniforme de los elementos. Para una división en 240 elementos totales (15 por tramo, 711 grados de libertad), se obtiene un error relativo de 25.2%. Sigue una gráfica comparativa entre la división uniforme y el procedimiento h -adaptivo.

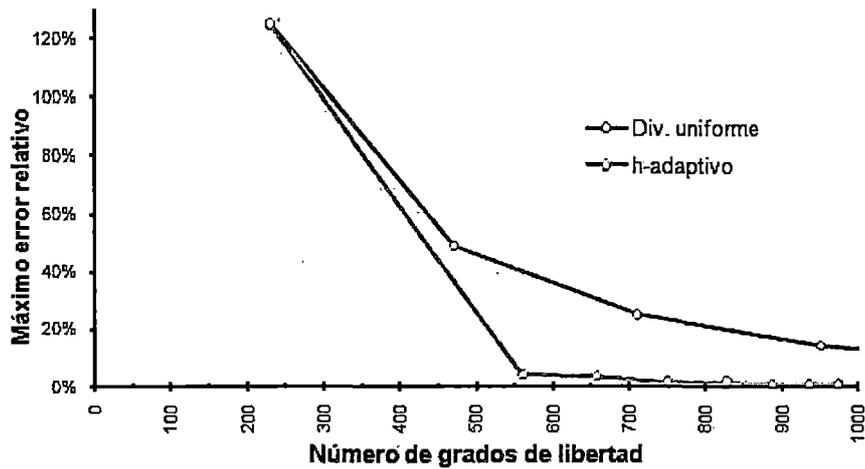


Fig. 3.60 Reducción del error relativo

La deformada de la estructura se muestra en la gráfica siguiente:

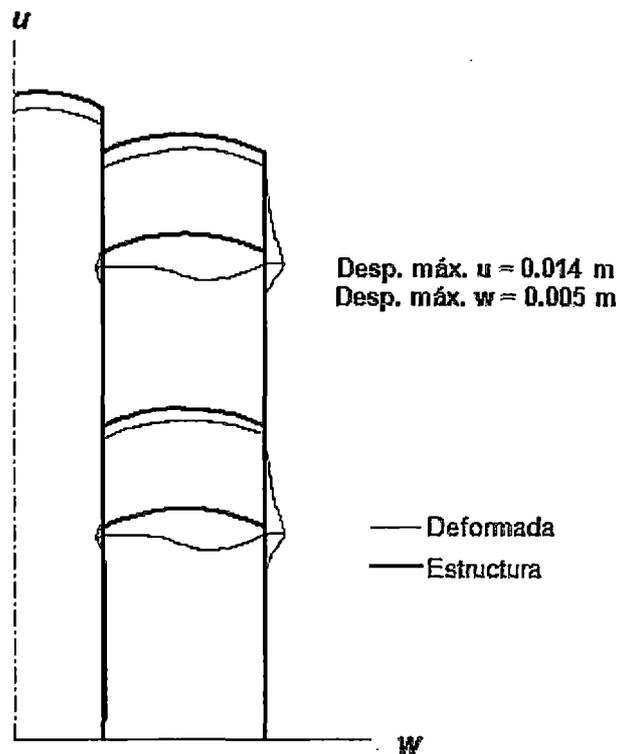


Fig. 3.61 Desplazamientos máximos

Para los momentos meridionales, con una división en 80 elementos se obtuvo un error relativo máximo de 124.8%; con una división en 400 elementos, 9.4% y con una división en 1280 elementos se logró 0.94% de error. Con el

procedimiento h -adaptivo sólo fueron necesarios 328 elementos para conseguir un error relativo del 0.98%.

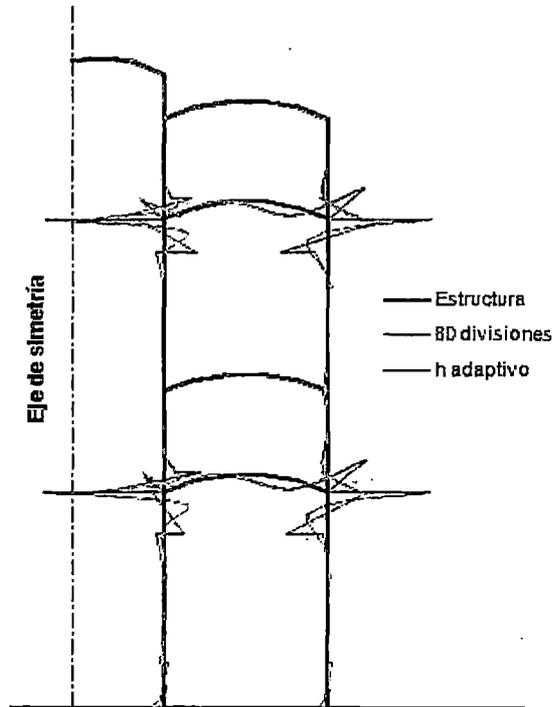


Fig. 3.62 Momentos meridianales, M_s

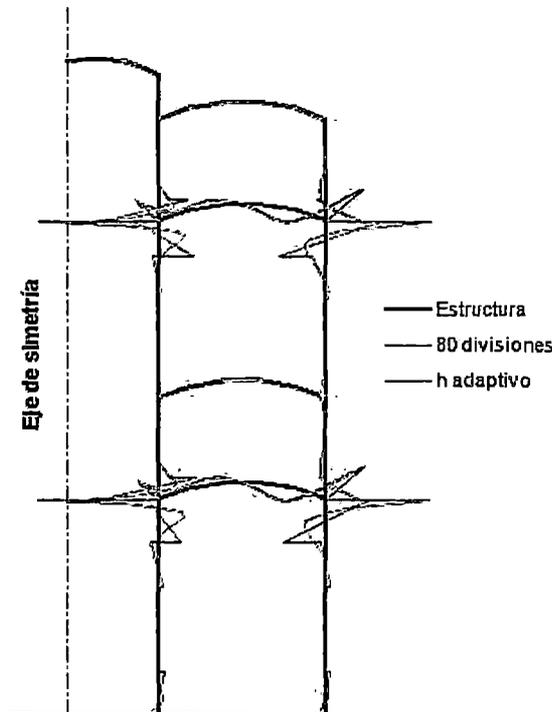


Fig. 3.63 Momentos tangenciales, M_θ

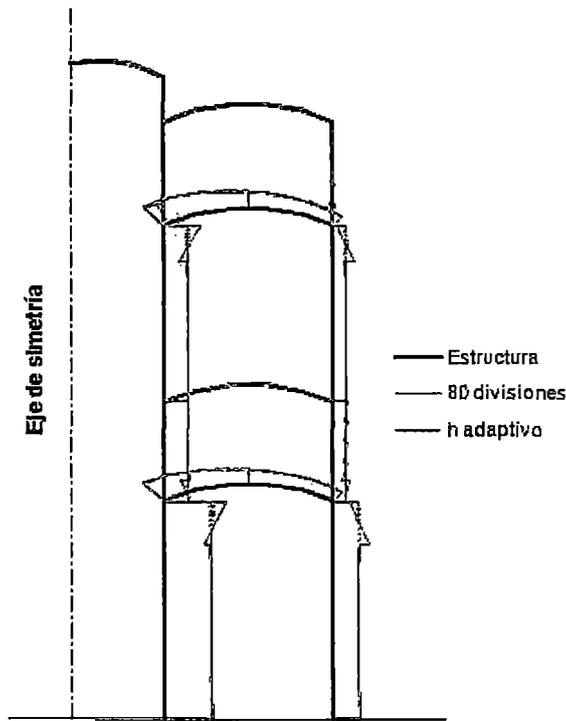


Fig. 3.64 Fuerzas de membrana meridionales, N_s

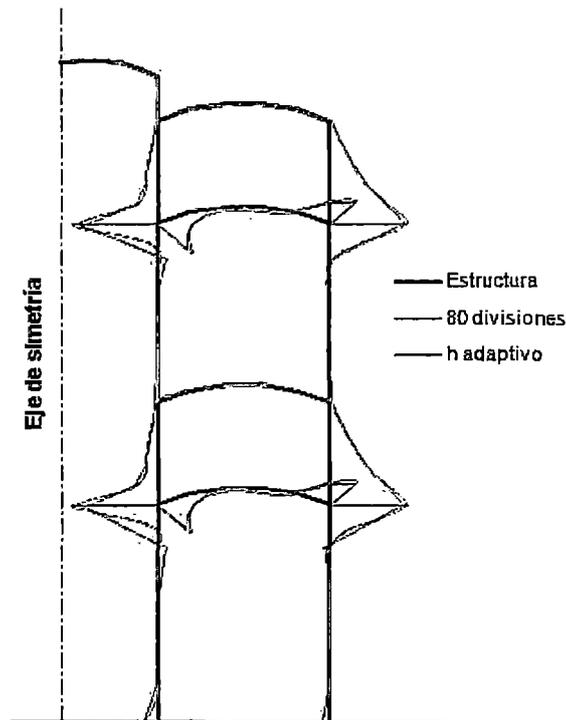


Fig. 3.65 Fuerzas de membrana tangenciales, N_θ

3.4 OTRAS ESTRUCTURAS.

3.4.1 Tanque cónico

De Timoshenko (1959) se analiza a continuación un tanque cónico invertido. Se supone el ángulo α de 15° , 30 pies de altura d y 8 pulgadas de espesor constante. Soportará una carga hidrostática hasta su altura total ($\gamma=0.03613 \text{ lb/in}^3$). Para la estructura se supuso $E=3.12 \times 10^6 \text{ psi}$ y $\nu=0.25$. No se consideró el peso propio.

Este problema presenta una singularidad al acercarse al origen en donde los esfuerzos tienden al infinito. Para eliminar la singularidad, se consideró arbitrariamente un radio mínimo de 4 pulgadas.

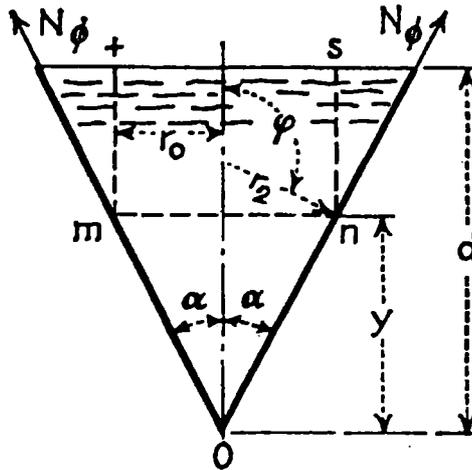


Fig. 3.66 Tanque cónico. Timoshenko (1959).

Se requirieron 3 iteraciones para alcanzar el error objetivo de 0.1%. En las gráficas a continuación se indican el máximo error relativo en el momento meridional y el número de divisiones en cada iteración.

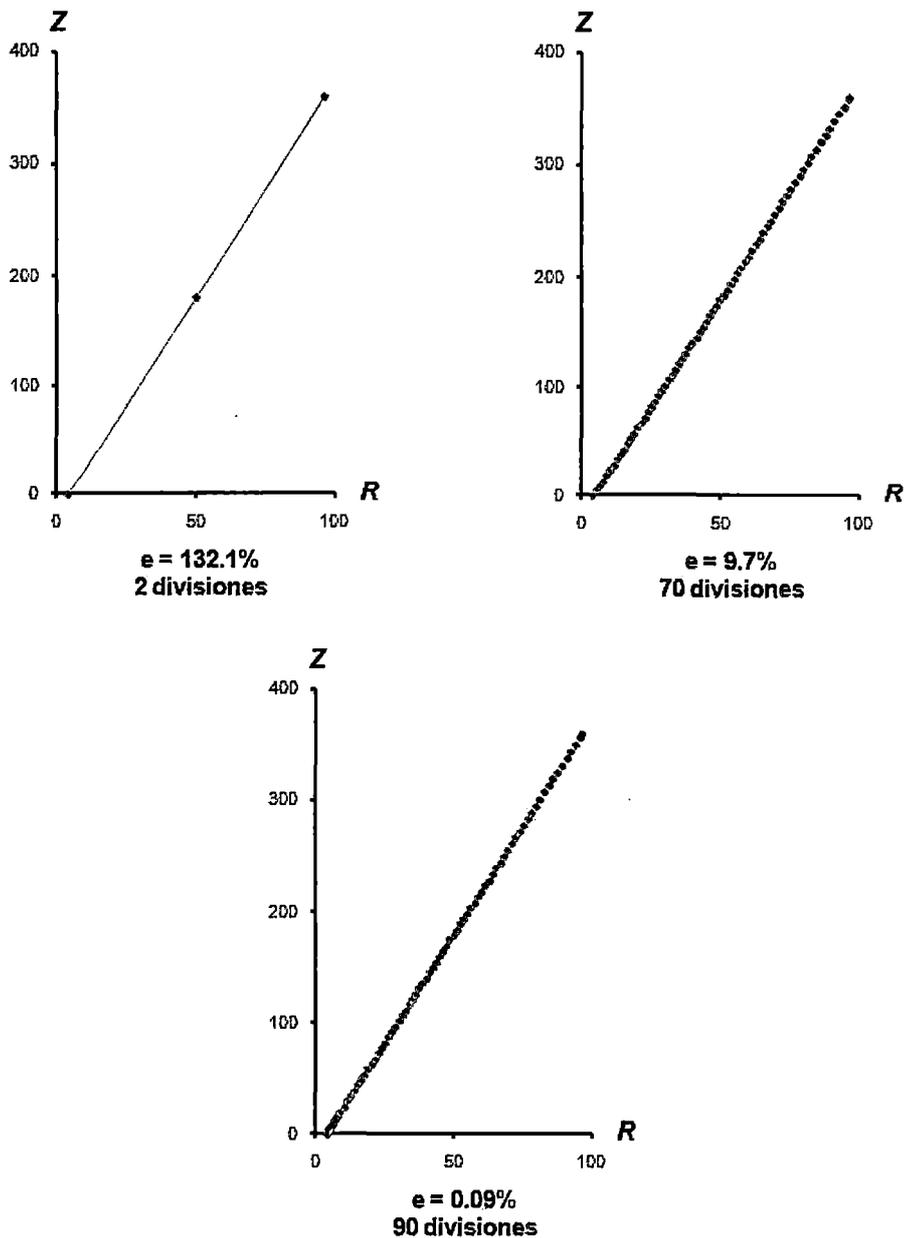


Fig. 3.67 Refinamiento h -adaptivo

La división uniforme de la estructura es mucho más lenta que el procedimiento h -adaptivo en lograr el error objetivo, lo cual puede verse en la Figura 3.68.

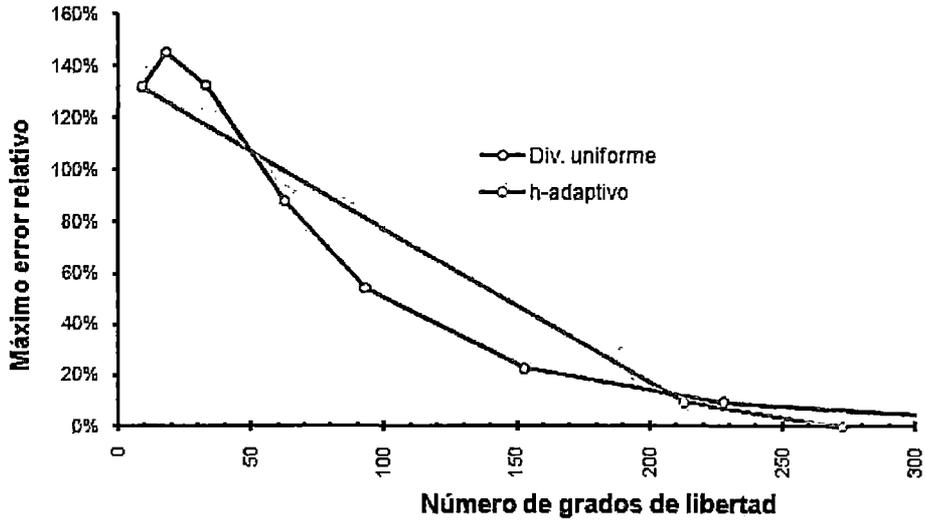


Fig. 3.68 Reducción del error relativo.

La deformada de la estructura es la siguiente::

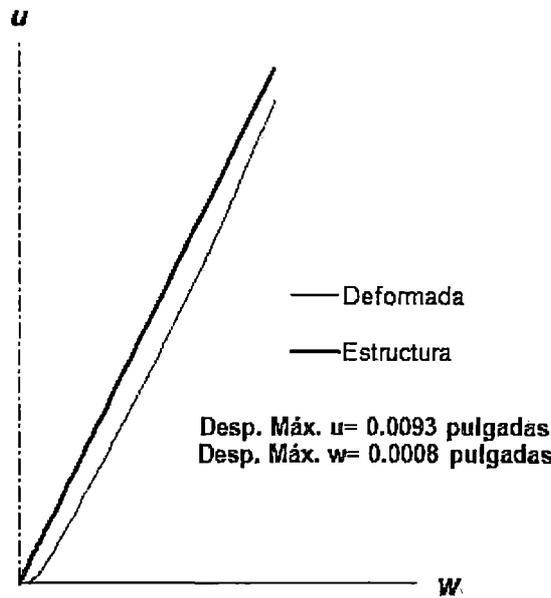


Fig. 3.69 Desplazamientos máximos

Para los momentos meridionales, con una división en 2 elementos se obtuvo un error relativo de 132.1%; con una división en 175 elementos, 1% y con una división en 375 elementos, 0.1%. En cambio con el procedimiento *h*-adaptivo se logra 0.09% de error con una división en sólo 90 elementos.

Para la fuerza de membrana meridional cuando y es $d/2$ se obtiene un

valor mediante las fórmulas aproximadas de Timoshenko de $N_S=219$ kip/in. De acuerdo al procedimiento h -adaptivo este mismo valor es $N_S=192$ kip/in. Lo mismo sucede con la fuerza de membrana tangencial, el valor cuando y es $d/2$ resulta $N_\theta =324$ kip/in. Con el procedimiento h -adaptivo se obtiene $N_\theta =339$ kip/in.

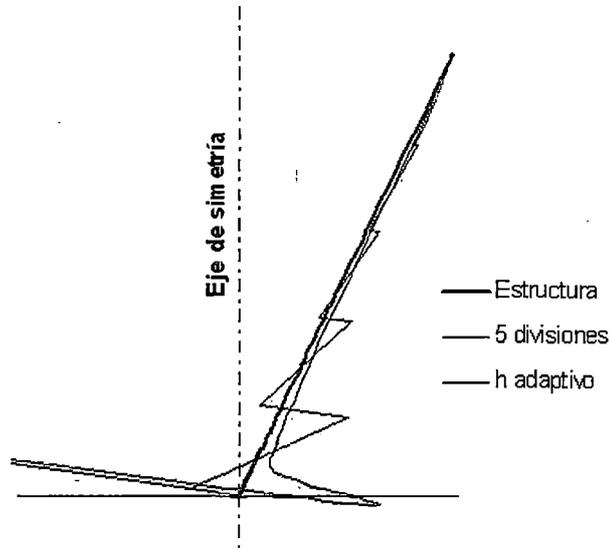


Fig. 3.70 Momentos meridionales, M_s

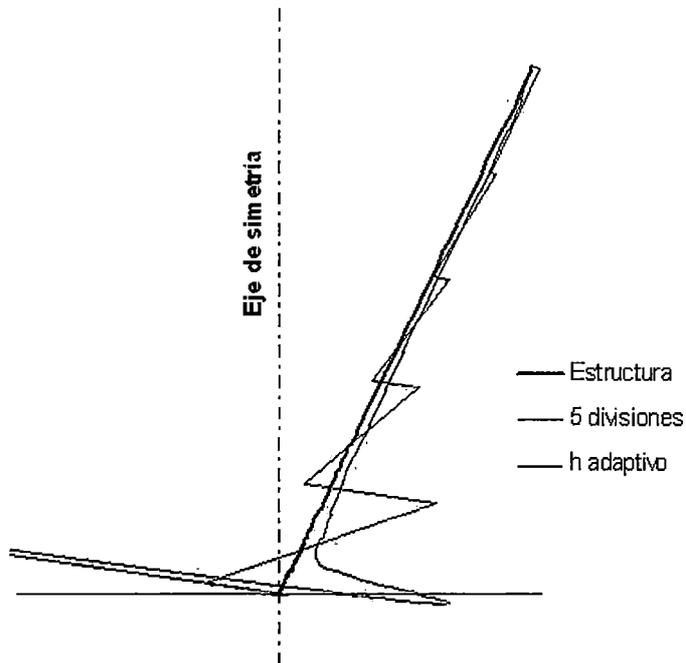


Fig. 3.71 Momentos tangenciales, M_θ

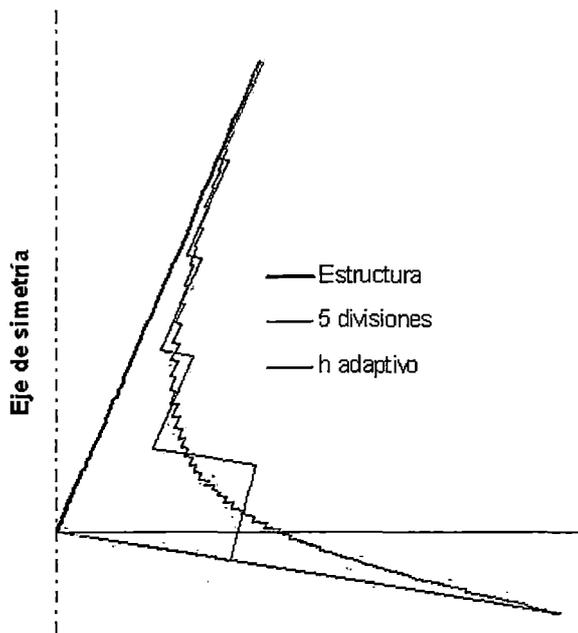


Fig. 3.72 Fuerzas de membrana meridionales, N_s

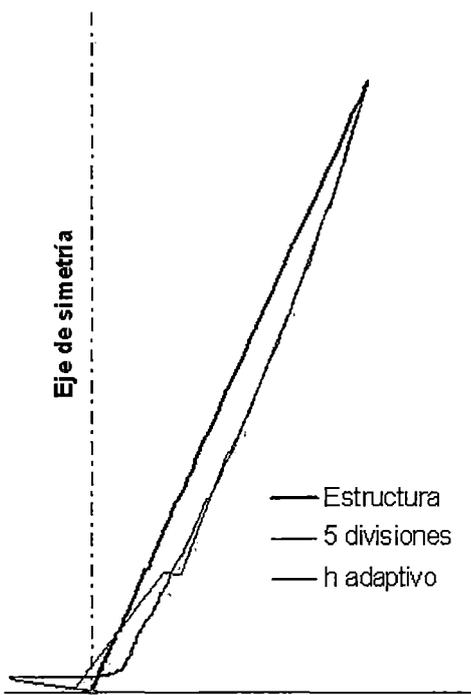


Fig. 3.73 Fuerzas de membrana tangenciales, N_θ

3.4.2 Panteón Romano

El Panteón Romano fue construido por Adriano entre el 118 y 128 d.C. (Magro, 2005). Consta de tres partes: un profundo pórtico octástilo Corintio, una estructura intermedia y una inmensa cella con una cúpula. Ésta última es la que se analiza a continuación.

Sobre una base cilíndrica de 43.3m de diámetro se eleva una cúpula hemisférica, que alcanza los mismos 43.3m por encima del pavimento. Como la altura del tambor es igual a su radio, si la cúpula hemisférica fuera ampliada a una esfera, tocaría el suelo. La cúpula tiene cinco hileras de artesones, disminuyendo en tamaño y profundidad y suben hasta dos tercios de su altura, dejando un anillo de superficie lisa de un ancho aproximado al diámetro del óculo, que mide 8.5m. El material utilizado es el Opus Caementicium (Adam, 1996), cuyo componente más destacable era el polvo puzolánico, o pulvis puteolani el cual, mezclado con mortero de cal aérea producía un material de características parecidas al concreto actual. Para el presente análisis se supuso un peso específico de 2.3t/m^3 , $E=2.1 \times 10^6 \text{ t/m}^2$ y $\nu=0.25$.

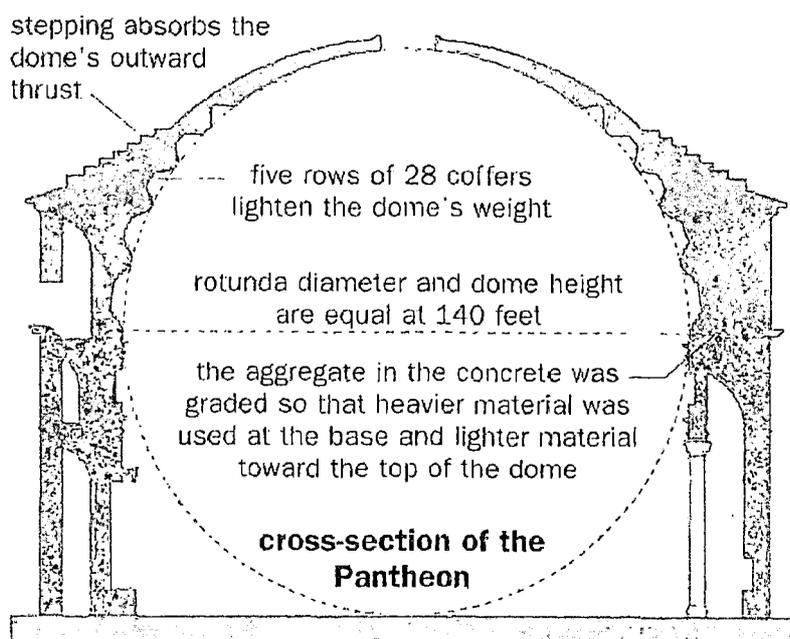


Fig. 3.74 Sección transversal del Panteón Romano. Prieto-Portar (2009).

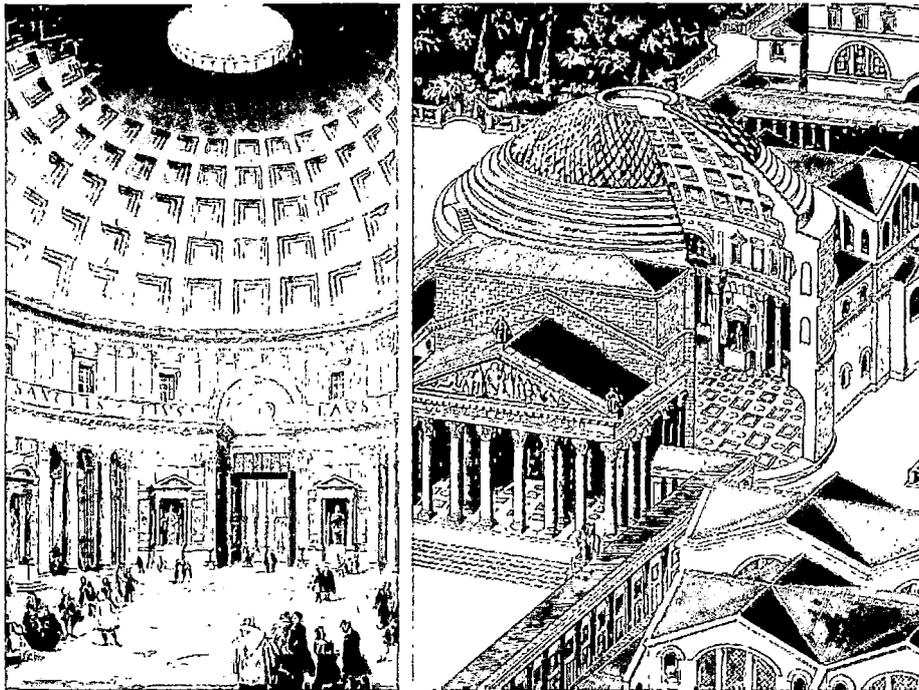


Fig. 3.75 Vista interior del Panteón Romano. Prieto-Portar(2009).



Fig. 3.76 Vista panorámica del Panteón Romano. Foto de Stefan Bauer(2005).

Se pueden ver las gráficas de las 2 primeras iteraciones del refinamiento h -adaptivo, mostrándose el máximo error relativo en el momento meridional y el número de divisiones en cada iteración.

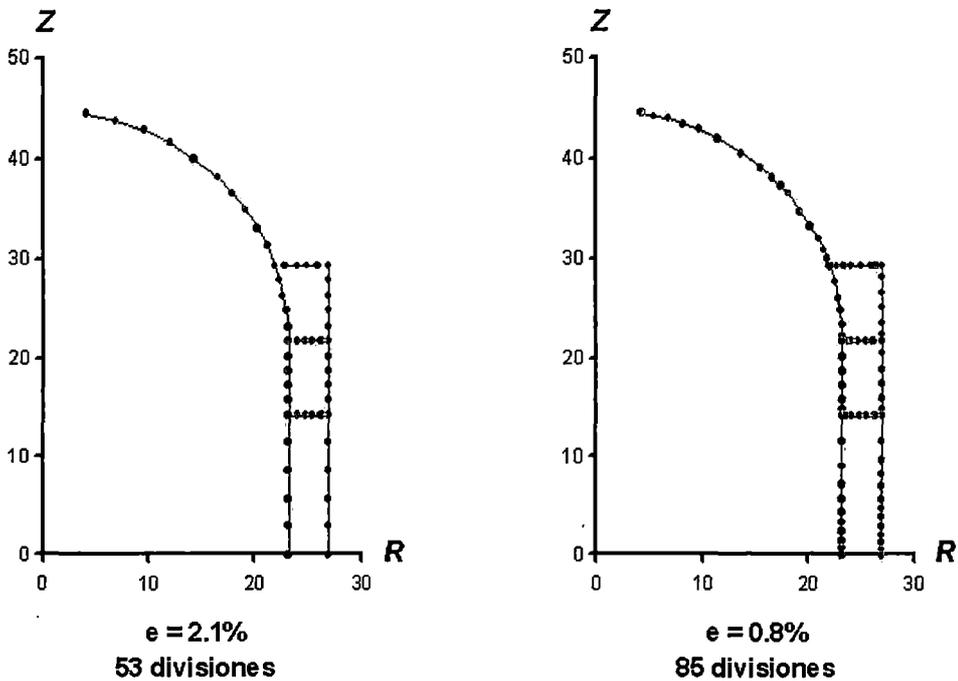


Fig. 3.77 Refinamiento h -adaptivo

Algunos resultados para las restantes iteraciones se pueden ver en la siguiente tabla:

Tabla 3.3 Refinamiento h -adaptivo (Iteraciones 3-11).

<u>Iteración</u>	<u>Error relativo</u>	<u>Divisiones</u>
3	2.103%	53
4	0.794%	85
5	0.513%	121
6	0.487%	145
7	0.409%	163
8	0.201%	177
9	0.129%	189
10	0.103%	197
11	0.095%	208

La reducción del error relativo en función de los grados de libertad generados al dividir el modelo uniformemente y con el procedimiento h -adaptivo son mostradas en la figura 3.78. Como en otros casos, con este último procedimiento se alcanza más rápidamente el error objetivo.

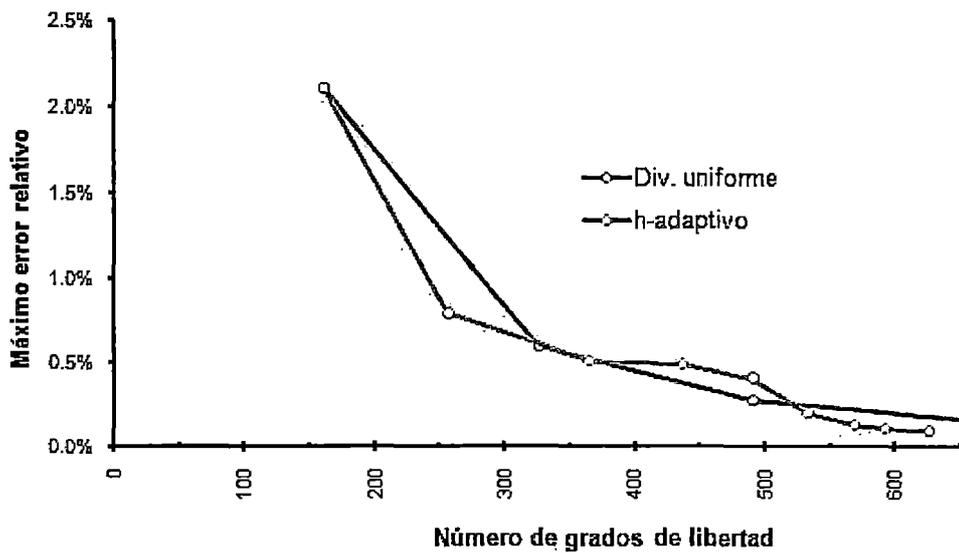


Fig. 3.78 Reducción del error relativo

Los desplazamientos máximos son los siguientes:

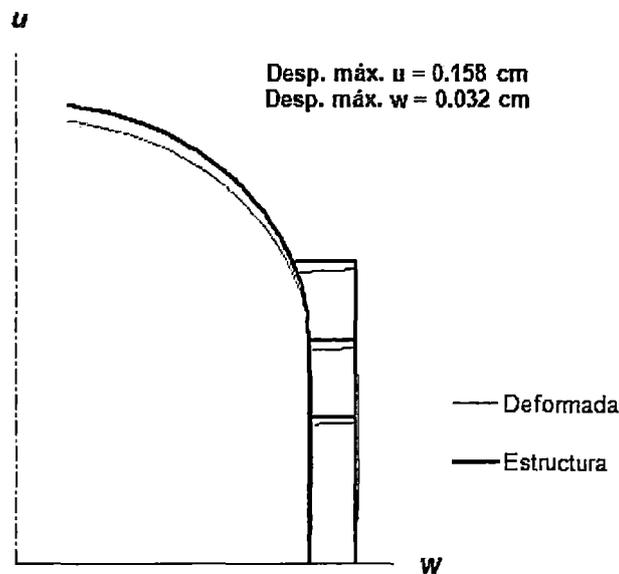


Fig. 3.79 Desplazamientos máximos

Se ha considerado un error objetivo del 0.1%. Para los momentos meridionales, con una división en 55 elementos se tiene un error relativo de 2.1%, con una división en 220 elementos, 0.16% y con una división en 330 elementos, 0.1%. En cambio con el procedimiento h -adaptivo se logra 0.095% con una división en sólo 208 elementos.

En las figuras siguientes se muestran las gráficas para los momentos meridionales y tangenciales y para las fuerzas de membrana meridionales y tangenciales obtenidas con distintos grados de refinamiento.

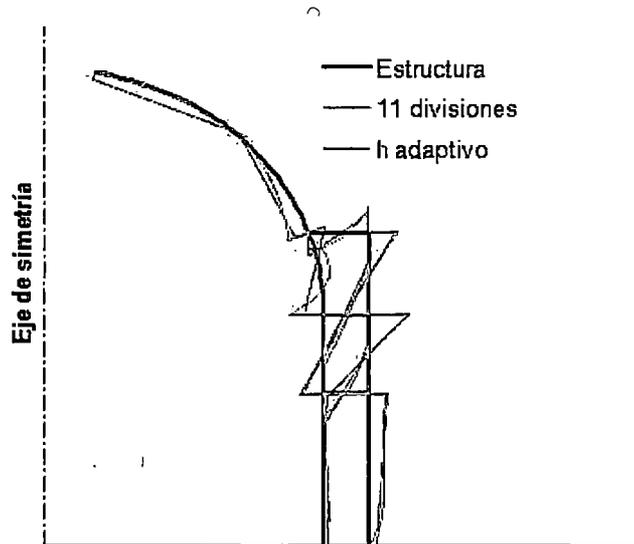


Fig. 3.80 Momentos meridionales, M_s

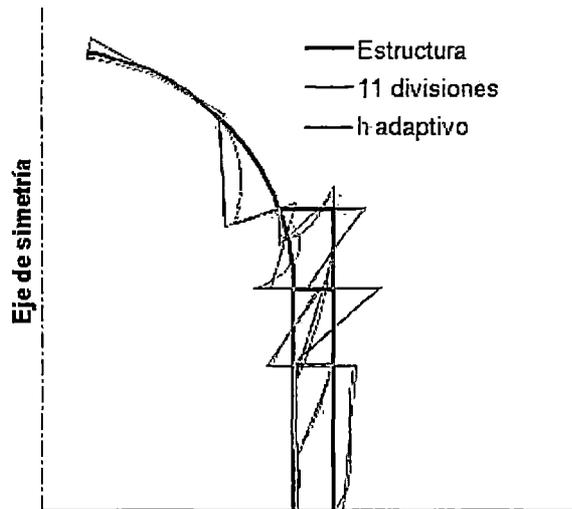


Fig. 3.81 Momentos tangenciales, M_t

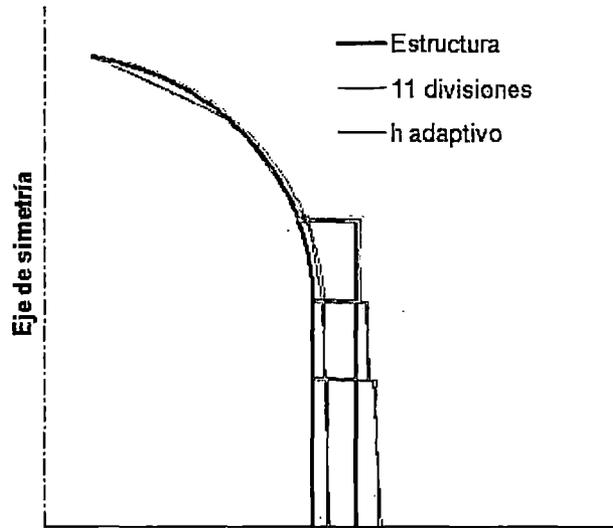


Fig. 3.82 Fuerzas de membrana meridionales, N_s

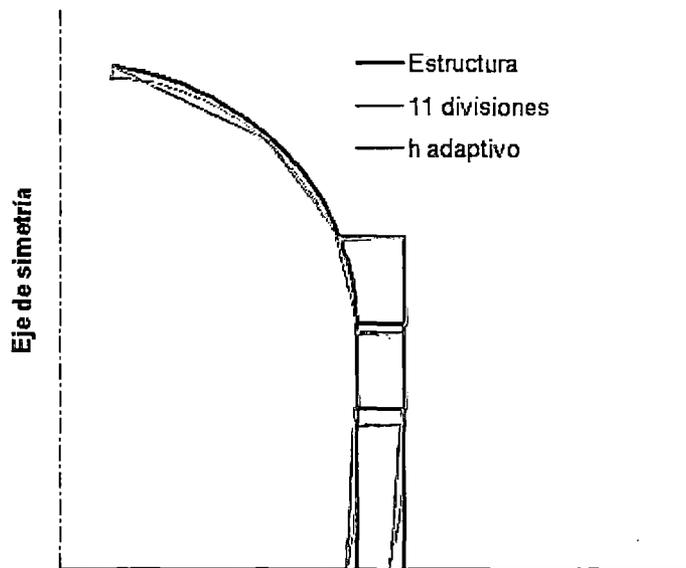


Fig. 3.83 Fuerzas de membrana tangenciales, N_θ

CONCLUSIONES

1. En esta tesis se revisaron diversos aspectos teóricos relativos a las aproximaciones de elementos finitos, la estimación de los errores y la velocidad a la que estos se reducen cuando se refinan las mallas. Sobre esa base se planteó un procedimiento h -adaptivo para el análisis de cáscaras axisimétricas. Aún cuando el trabajo se refiere al caso geoméricamente simple de cáscaras axisimétricas, el refinamiento h -adaptivo es igualmente aplicable a otras clases de problemas de análisis estructural y en general a la solución de ecuaciones en derivadas parciales de cualquier tipo usando técnicas de elementos finitos.
2. Se desarrolló un programa en Visual Basic para el análisis de cáscaras axisimétricas con elementos finitos tronco – cónicos y refinamiento h -adaptivo, con lo que se demostró la factibilidad del proceso. En el listado que se presenta en el anexo puede observarse que, por lo menos en el caso de cáscaras axisimétricas, la determinación del tamaño de los elementos que se requiere para lograr los objetivos de precisión y la construcción de la nueva malla pueden hacerse con un programa de cómputo relativamente simple.
3. Los resultados obtenidos para distintos grados de subdivisión de la malla son consistentes con el orden de convergencia teórico esperado. Dado que en el elemento finito utilizado se interpolan los desplazamientos en dirección tangencial (meridional) con polinomios de primer grado y los desplazamientos transversales con polinomios completos de tercer grado, las fuerzas de membrana, asociadas a derivadas primeras del desplazamiento tangencial, tienen un orden de convergencia como $O(h)$, mientras los momentos flectores, dependientes de derivadas segundas del desplazamiento transversal, convergen con $O(h^2)$.
4. No obstante lo anterior, el error en el equilibrio de los momentos flectores meridionales es la medida más adecuada de la calidad de la malla y no los errores en las fuerzas de membrana. Esto se explica porque en la mayor parte de las cáscaras axisimétricas la forma de la generatriz es tal que las

fuerzas de membrana varían muy lentamente y pueden aproximarse fácilmente. En cambio, los momentos flectores se concentran en los apoyos y en los nudos a los que concurren porciones de la estructura con distinta geometría. Por ser el espesor de la cáscara en general muy pequeño en relación a otras dimensiones, los momentos flectores decrecen muy rápidamente, de donde se origina la necesidad de concentrar elementos muy pequeños en esas regiones.

5. La estimación del error relativo en cada nudo es sólo aproximada, puesto que no se conoce a-priori la solución exacta. Por ello se requiere un "índice de efectividad", θ . Sin embargo, para los distintos casos estudiados se ha encontrado un valor óptimo $\theta \approx 0.95$, muy cercano a 1. Al considerar valores menores, el proceso de refinamiento desmejora.
6. Se ha verificado que en la mayor parte de los casos es factible reducir los errores relativos por debajo de 0.1%, mucho menos que lo que típicamente puede considerarse aceptable para fines de ingeniería, teniendo en cuenta la incertidumbre en las propiedades de los materiales, las tolerancias permitidas en las dimensiones de los elementos estructurales y la variabilidad en la aplicación de las cargas. No se logra esta precisión en los puntos con una singularidad fuerte, como en el extremo inferior del tanque cónico analizado en la sección 3.4.1, el cual sólo se presenta teóricamente.
7. Al comparar la calidad de los resultados obtenidos con mallas producidas usando los criterios de refinamiento h -adaptivo contra aquellos obtenidos con una subdivisión uniforme de los elementos, se observa que con el refinamiento adaptivo se logran mejores resultados con menos grados de libertad, lo que significa menor tiempo de cómputo. Por ejemplo, para la estructura analizada en la sección 3.3.3 se tendrían que tener más de 600 subdivisiones uniformes para lograr el mismo error que se logra (0.8%) con las 113 divisiones del procedimiento h -adaptivo.
8. La conclusión anterior es válida sobre todo para las estructuras con geometría más compleja. Para las estructuras más simples los desafíos son menores y la subdivisión uniforme resulta prácticamente tan eficiente como el refinamiento h -adaptivo.

RECOMENDACIONES

1. Si bien las técnicas de elementos finitos han hecho más fácil la solución numérica de ecuaciones diferenciales en una diversidad de campos, no debe olvidarse su carácter aproximado. Los resultados obtenidos muestran que con mallas de elementos finitos relativamente gruesas los errores pueden ser muy superiores a los aceptables para fines de diseño. En los programas de análisis estructural, es una práctica habitual promediar los esfuerzos calculados para los distintos elementos concurrentes a cada nudo, lo que mejora los resultados, pero también no permite una apreciación directa de los errores. Desactivando temporalmente tales procesos se puede tener un estimado de la posible magnitud de los errores.
2. Aunque los principios básicos del refinamiento h -adaptivo considerados en esta tesis son los mismos que se emplearían en modelos bi o tridimensionales, las dificultades de orden práctico serían en esos casos mayores. Estos temas han sido materia de investigación en las décadas pasadas, pero aún se requiere mejorar las técnicas para que puedan ser incorporadas en programas de uso general, por lo que cabe recomendar la continuación de los trabajos en aspectos tales como la estimación más eficiente de los errores o la construcción automática de mallas.
3. En la literatura especializada se encuentran procesos de refinamiento adaptivo sobre todo en relación con la solución de problemas estáticos o estacionarios. En el análisis dinámico no lineal se presentan dificultades adicionales. Por ejemplo, si los elementos no son suficientemente pequeños pueden restringir la propagación de las componentes de alta frecuencia, lo que se agrava con la no linealidad, al reducirse las velocidades y longitudes de onda. Por ello, se propone continuar la investigación de procesos h -adaptivos en el contexto de problemas de análisis dinámico no lineal.

BIBLIOGRAFÍA

1. Abbett, R.W. American Civil Engineering Practice, Volume III. John Wiley & Sons, N.Y., 1957.
2. Abramovitz, M. y Stegun, I. Handbook of Mathematical Functions. Dover, 1964. Abramovitz, M. y Stegun, I. Handbook of Mathematical Functions. Dover, 1964.
3. Adam, J. Roman building: materials and techniques. Routledge, 1999.
4. Akin, J. E. Finite Element Analysis with Errors Estimators. Elsevier Butterworth-Heinemann, Oxford, 2005.
5. Bathe, K.J. *Finite Element Procedures*. Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1995. Cook, R.D. *Finite Element Modeling for Stress Analysis*. John Wiley and Sons, N.Y., 1999.
6. Chen, Zhangxin. Finite Element Methods and their Applications. Springer. Dallas. 2005.
7. Cook, R.D. *Finite Element Modeling for Stress Analysis*. John Wiley and Sons, N.Y., 1999.
8. Cook, R.D., Malkus, D.S., Plesha, M.E. y Witt, R.J. *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*. 4ª edición. John Wiley & Sons, N.Y., 2003.
9. Courant R. Variational Methods for The Solution of Problems of Equilibrium and Vibration. Bull. Am. Math. Soc., 49, 1943.
10. Flügge, W. *Stresses in Shells*, Springer-Verlag, Berlin, 1960.
11. Grafton, P.E. y Strome, D.R. *Analysis of Axi-Symmetric Shells by the Direct Stiffness Method*, J.A.I.A.A. 1, 1963.
12. Guerrin, A. *Traité de Béton Armé*. Tome VI. Reservoirs – Chateaux D'eau – Piscines. Dunod, París, 1968.

13. Hartman, F. Katz, C. *Structural Analysis with Finite Elements*. Springer. Berlin. 2007.
14. Magro Moro, J. *Historia de la Construcción. La construcción en la antigua Roma*. Universidad Politécnica de Valencia, 1999.
15. Oñate, E. *Cálculo de Estructuras por el Método de Elementos Finitos, Análisis Elástico Lineal*. Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería (CIMNE), Barcelona, 1992.
16. Peñafiel, P. *Proceso h-Adaptivo y Generación Automática de Elementos Finitos*. Tesis de Maestría, Facultad de Ingeniería Civil, Universidad Nacional de Ingeniería, Lima, 2000.
17. Prieto-Portar, L. *Foundation Engineering. Roman Engineering*. Florida International University. 2009.
18. Segerlind, L.J. *Applied Finite Element Analysis*. 2ª edición. John Wiley & Sons Inc. N.Y., 1984.
19. Smith, I.M. y Griffiths, D.V. *Programming the Finite Element Method*. 4ª edición. John Wiley & Sons Ltd., Londres, 2004.
20. Timoshenko, S. y Woinowsky-Krieger, S. *Theory of Plates and Shells*. 2ª edición. Mc.Graw Hill Book Company. N.Y., 1959.
21. Turner M.J., Clough R.W., Martin H.C y Topp L.J. *Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures*. J. Aero. Sci., 23, 1956
22. Zienkiewicz, O.C., Bauer, J., Morgan, K. y Oñate, E. *A Simple and Efficient Shell Element for Axisymmetric Shells*. Int. J. Num. Meth. Eng., 1977.
23. Zienkiewicz, O.C. y Zhu, J.Z. *A Simple Error Estimator and Adaptive Procedure for Practical Engineering Analysis*. Int. J. Num Meth. Eng. 24, 1987.
24. Zienkiewicz O.C.y Taylor R.L. *El Método de los Elementos Finitos*. 5ª edición. CIMNE, Barcelona, 2004.

ANEXO

DESCRIPCIÓN DEL PROGRAMA hAdaptive.xls

hAdaptive.xls es un programa desarrollado para el refinamiento h -adaptivo de cáscaras axisimétricas. Está realizado en Visual Basic. Cuenta con cuatro pasos principales:

1. Determinación de las ecuaciones de rigidez. Identifica los grados de libertad activos, determina apuntadores a las ecuaciones y las posiciones de los coeficientes de la diagonal principal, establece las abscisas y pesos de integración, ensambla las fuerzas concentradas y equivalentes a presiones y la matriz de rigidez.
2. Solución de las ecuaciones. Factoriza la matriz de rigidez (simétrica y definida positiva) $A = LDL^T$; reduce la matriz de fuerzas y completa el proceso por sustitución inversa.
3. Resultados de desplazamiento y esfuerzos. Reordena y lista los desplazamientos, determina y lista las fuerzas resultantes. Determina los errores relativos en cada nudo.
4. Refinamiento h -adaptivo. Analiza los errores y se reconstruye la malla para cada sector. Forma la lista de dimensiones objetivo en la malla nueva. Si el error relativo en cualquier nudo es mayor al error objetivo se regresa al paso 1.

La entrada de datos es mediante el entorno de la hoja de cálculo Excel. Por ejemplo, la aplicación 3.2.1 (reservorio recto) tendría la siguiente forma:

Análisis de Cáscaras Axisimétricas

Reservorio Recto (Timoshenko)

$f = (A + Br + Cz) \text{ factor}$

#	A	B	C	factor
1	312 000		-1.000	-0.036
2				
3				
4				

Material

E	ν	γ	ϵ_n
3.12E+06	0.250	0.000	0.00E+00

Coordenadas

n	r	z	1	2	3	F_r	F_θ	M
1	360.000	0.000	x	x	x			
2	360.000	312.000						
3								
4								
5								

Conectividad y espesores

n	l	j	R	a_i	a_j	f#
1		2		14.000	14.000	1
2						
3						
4						

Presión

#	A	B	C	factor
1	312 000		-1.000	-0.036
2				
3				
4				

Datos

Subdivisión inicial	6
Error objetivo %	0.10
Orden de convergencia	2.0
Factor empírico	0.95

En la pestaña Datos se debe colocar la subdivisión inicial, el porcentaje de error objetivo, el orden de convergencia (2) y el factor empírico (generalmente 0.95).

En el cuadro de material colocar el módulo de elasticidad (E), el módulo de Poisson, el peso específico del material y la deformación unitaria correspondiente a la condición de esfuerzo cero (en el caso de un incremento de temperatura éste sería el producto del cambio de temperatura por el coeficiente de dilatación térmica). Estos dos últimos datos son opcionales.

En la tabla de la izquierda se deben ingresar las coordenadas r y z de los nudos. Las columnas siguientes, indicadas como 123, permiten restringir los desplazamientos en cualquiera de los grados de libertad de los nudos; si la celda no está vacía esto se interpreta como que el desplazamiento está fijado a-priori, típicamente cero. Para considerar un nudo empotrado se colocará una x (u otro caracter) en las tres columnas, como puede verse en la figura siguiente. Para restringir sólo el grado de libertad en la dirección del eje de simetría debe marcarse la casilla en la columna 1; para restringir análogamente el

desplazamiento en dirección radial debe marcarse en la columna 2 y para restringir el giro debe marcarse la casilla en la columna 3. Cabe anotar que si se marca alguna de las casillas en estas columnas, los correspondientes valores en las columnas con el encabezamiento Fuerzas/Desplazamientos se interpretan como desplazamientos prescritos, que pueden ser distintos de cero.

Asimismo se colocarán los valores de las Fuerzas Verticales (F_v), Fuerzas horizontales o radiales (F_r) y los momentos en los nudos (M).

Patrón de presiones

Análisis de Cáscaras Axisimétricas

Reservorio Recto (Timoshenko)

Subdivisión inicial: 5
 Error objetivo %: 0.10
 Orden de convergencia: 2.0
 Factor empírico: 0.95

Material: E, ν , γ , ϵ_n
 3.12E+06, 0.250, 0.000, 0.00E+00

Coordenadas: n, r, z
 1, 360.000, 0.000
 2, 360.000, 312.000

Fuerzas/Desplazamientos: 1 2 3, F_v , F_r , M
 x x x

Conectividad/Cáscaras: n, l, j, R, e_i , e_j , f#
 1, 1, 2, 14.000, 14.000, 1

Radio de tramo circular

Restringir desplazamientos

Formula: $f = (A + B \cdot r + C \cdot z) \cdot \text{factor}$

#	A	B	C	factor
1	312.000		-1.000	-0.036

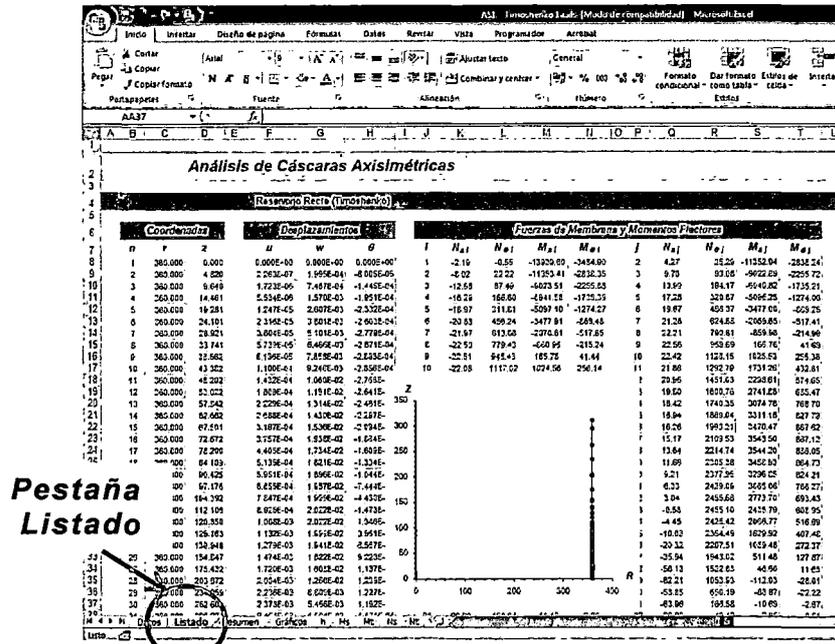
En la conectividad se podrá colocar un valor en la columna R para indicar un tramo curvo. De lo contrario se dejará la celda vacía, lo que se interpreta como que el tramo es recto.

Se debe indicar el espesor inicial y el final en cada tramo, en las columnas e_i y e_j . Si los dos datos son diferentes se supone que el espesor es linealmente variable.

Para cada elemento se podrá colocar un patrón de presiones de acuerdo a la fórmula: $f = (A + B \cdot r + C \cdot z) \cdot \text{factor}$. En el ejemplo mostrado se tiene un factor igual al peso específico del fluido, $\gamma = 0.036 \text{ lb/in}^3$.

Todas las unidades deben ser compatibles y es responsabilidad del usuario verificar éstas.

Luego de ingresados todos estos datos se podrá pasar a la pestaña Listado, y automáticamente el programa comenzará a iterar hasta alcanzar el error objetivo. En la pantalla final se podrá ver la figura del refinamiento alcanzado. También se observarán los desplazamientos para cada nudo, las fuerzas de membrana y los momentos flectores para cada elemento.



hAdaptive.xls es un programa de dominio público. En caso se utilice para producir documentos de cualquier tipo o modalidad, deberá explícitamente indicarse el nombre del programa y el autor. Sin embargo, el autor del programa no es responsable por cualquier perjuicio, directo o indirecto, que pudiera resultar del buen o el mal uso del mismo. Es de entera responsabilidad del usuario verificar que los datos y los resultados sean los correctos.

CÓDIGO EN VISUAL BASIC

A continuación se muestra el código en Visual Basic del programa hAdaptive.xls:

```
' Análisis Estático Lineal Elástico de Cáscaras Axisimétricas
' Elemento Tronco Cónico de Grafton y Stromme

Option Explicit

'control
Dim OK As Boolean
Public modified As Boolean
Public plotted As Boolean

Dim np As Long           'número inicial de elementos por sector
Dim targetError As Double 'máximo error relativo establecido como objetivo
Dim pOrder As Double     'orden de convergencia del EF para el resultado comparado
Dim theta As Double      'corrección del estimador del error

'datos de materiales
Dim E As Double          'módulo de Young
Dim nu As Double         'razón de Poisson
Dim gamma As Double      'peso específico
Dim epsilon As Double    'deformación inicial

'datos de fórmulas
'f = (a0 + a1*r + a2*z > 0) * formulaFactor
Dim a0(3) As Double
Dim a1(3) As Double
Dim a2(3) As Double
Dim formulaFactor(3) As Double

'nudos maestros
Dim mn As Long           'número de nudos maestros
Dim rm(24) As Double     'coordenadas de nudos maestros
Dim zm(24) As Double
Dim restrained(25, 2) As Boolean 'índices fuerza/desplazamiento
Dim LoadsAndDisplacements(24, 2) As Double 'fuerzas/desplazamientos prescritos
Dim alias(24) As Long    'número de nudo en malla generada

'sectores
Dim ms As Long           'número de sectores
Dim mi(24) As Long       'nudo inicial (base 1)
Dim mj(24) As Long       'nudo final
Dim rc(24) As Double     'radio de curvatura del sector
Dim r0(24) As Double     'coordenada r del centro
Dim z0(24) As Double     'coordenada z del centro
Dim tmi(24) As Double    'espesor inicial
```

```

Dim tmj(24) As Double      'espesor final
Dim formula(24) As Long    'fórmula para presiones

'nudos generados
Dim nn As Long             'número de nudos
Dim r() As Double         'coordenadas de nudos generados
Dim z() As Double

'elementos generados
Dim ne As Long             'número de elementos
Dim ns() As Long          'sector al que pertenece
Dim ni() As Long          'nudo inicial
Dim nj() As Long          'nudo final
Dim ti() As Double        'espesor inicial
Dim tj() As Double        'espesor final

'variables compartidas (elementos)
Dim npi As Long           'número de puntos de integración
Dim eta(3) As Double      'abscisas de integración
Dim wGauss(3) As Double   'pesos de integración

Dim n As Long             'índice del elemento activo
Dim code(5) As Long       'códigos de ensamble
Dim Ke(20) As Double      'matriz de rigidez de un elemento
Dim fe(5) As Double       'fuerzas equivalentes a acciones distribuidas

'sistema de ecuaciones
Dim nx As Long            'número de ecuaciones
Dim pointerToEquation() As Long 'puntero de GDL a ecuación
Dim columnHeight() As Long 'número de coeficientes en cada columna
Dim diagonalPointer() As Long 'puntero a diagonal principal de K

Dim K() As Double         'matriz de rigidez global
Dim f() As Double         'matriz de fuerzas global
Dim energy As Double      'energía potencial

'fuerzas de membrana y momentos de flexión
Dim Ns1 As Double, Ns2 As Double
Dim Nt1 As Double, Nt2 As Double
Dim Ms1 As Double, Ms2 As Double
Dim Mt1 As Double, Mt2 As Double

Dim maxMs() As Double, errMs() As Double
Dim maxMt() As Double, errMt() As Double

Dim lineCount As Integer

Const pi As Double = 3.1415926535898

```

```
Sub main_program()
```

'Análisis Estático Lineal Elástico de Cáscaras Axisimétricas

Dim iteration As Integer

iteration = 0

Worksheets("Resumen").Range("a1:d100").ClearContents

getDataFromWorksheet

startingMesh

Do

 setUpStiffnessEquations

 LDL_Decomposition

 reduceAndBacksubstitute

 outputDisplacementsAndStresses

 iteration = iteration + 1

 If OK Or iteration > 15 Then Exit Do

 newMesh

Loop

modified = False

plotted = False

End Sub

Private Sub getDataFromWorksheet()

'Adquisición de datos

Dim i As Long, j As Long, n As Long, m As Long

Dim w As Range

'Tabla 1 - control

np = Worksheets("datos").Cells(6, 5).value

targetError = Worksheets("datos").Cells(7, 5).value

pOrder = Worksheets("datos").Cells(8, 5).value

theta = Worksheets("datos").Cells(9, 5).value

'Tabla 2 - datos de materiales

E = Worksheets("datos").Cells(8, 8).value

nu = Worksheets("datos").Cells(8, 9).value

gamma = Worksheets("datos").Cells(8, 10).value

epsilon = Worksheets("datos").Cells(8, 11).value

'Tabla 3 - fórmulas

```
Set w = Worksheets("Datos").Range("p6:s9")
i = 0
For n = 1 To 4
    a0(i) = w(n, 1)
    a1(i) = w(n, 2)
    a2(i) = w(n, 3)
    formulaFactor(i) = w(n, 4)
    i = n
Next n
```

'Tabla 4 - nudos maestros (máximo 25 nudos)

```
'número de nudos maestros
Set w = Worksheets("Datos").Range("c13:j37")
For mn = 25 To 1 Step -1
    If w(mn, 1) <> Empty Or w(mn, 2) <> Empty Then Exit For
Next mn
If mn = 0 Then End
```

'coordenadas, códigos, fuerzas/desplazamientos

```
i = 0
For n = 1 To mn
    m(i) = w(n, 1)
    zm(i) = w(n, 2)
    alias(i) = -1
    For j = 0 To 2
        restrained(i, j) = False
        If w(n, 3 + j) <> Empty Then restrained(i, j) = True
    Next j
    For j = 0 To 2
        LoadsAndDisplacements(i, j) = w(n, 6 + j)
    Next j
    i = n
Next n
```

'Tabla 5 - elementos maestros (máximo 25 elementos)

```
'número de sectores
Set w = Worksheets("Datos").Range("m13:r37")
For ms = 25 To 1 Step -1
    If w(ms, 1) <> Empty Then Exit For
Next ms
If ms = 0 Then End
```

'conectividad, radio de curvatura, espesores, fórmula para presiones

```
i = 0
For n = 1 To ms
    mi(i) = w(n, 1) - 1
    mj(i) = w(n, 2) - 1
    rc(i) = w(n, 3)
```

```
tmi(i) = w(n, 4)
tmj(i) = w(n, 5)
formula(i) = w(n, 6) - 1
j = n
Next n
```

End Sub

Private Sub startingMesh()

'Genera la malla inicial

```
Dim i As Long, j As Long, m As Long
Dim sector As Long
Dim j0 As Long, j1 As Long
```

```
Dim r1 As Double, z1 As Double, t1 As Double
Dim Dr As Double, Dz As Double, Dt As Double
```

```
Dim alfa As Double
Dim cAlfa As Double, sAlfa As Double
```

```
Dim c As Double, s As Double
Dim temp As Double
```

```
nn = 0
ne = 0
```

```
m = ms * np
ReDim r(m), z(m)
m = m - 1
ReDim ns(m), ni(m), nj(m), ti(m), tj(m)
```

```
For sector = 0 To ms - 1
```

```
    i = mi(sector)
    j = mj(sector)
```

```
    If alias(i) < 0 Then
        r(nn) = rm(i)
        z(nn) = zm(i)
        alias(i) = nn
        nn = nn + 1
    End If
```

```
    j0 = alias(i)
```

```
    r1 = rm(i)
    z1 = zm(i)
    t1 = tmi(sector)
```

```

Dr = rm(j) - r1
Dz = zm(j) - z1
Dt = (tmj(sector) - t1) / np

If rc(sector) = 0# Then
    Dr = Dr / np
    Dz = Dz / np
Else
    c = Sqr(rc(sector) ^ 2 / (Dr ^ 2 + Dz ^ 2) - 0.25)
    r0(sector) = 0.5 * (r1 + rm(j)) - Dz * c
    z0(sector) = 0.5 * (z1 + zm(j)) + Dr * c

    alfa = centralAngle(r1, z1, r0(sector), z0(sector), rm(j), zm(j), rc(sector)) / np
    cAlfa = Cos(alfa)
    sAlfa = Sin(alfa)

    c = (r1 - r0(sector)) / rc(sector)
    s = (z1 - z0(sector)) / rc(sector)
End If

For m = 1 To np

    If rc(sector) = 0# Then
        r1 = r1 + Dr
        z1 = z1 + Dz
    Else
        temp = c
        c = cAlfa * c - sAlfa * s
        s = cAlfa * s + sAlfa * temp
        r1 = r0(sector) + c * rc(sector)
        z1 = z0(sector) + s * rc(sector)
    End If

    If m = np And alias(j) >= 0 Then
        j1 = alias(j)
    Else
        r(nn) = r1
        z(nn) = z1
        j1 = nn
        nn = nn + 1
    End If

    If m = np Then alias(j) = j1

    ns(ne) = sector
    ni(ne) = j0
    nj(ne) = j1
    ti(ne) = t1
    t1 = t1 + Dt
    tj(ne) = t1

```

```

        ne = ne + 1
        j0 = j1

    Next m

Next sector

End Sub

Private Function centralAngle(r1 As Double, z1 As Double, r0 As Double, z0 As Double, _
    r2 As Double, z2 As Double, rc As Double) As Double

'Determina el ángulo central

Dim c As Double

c = ((r1 - r0) * (r2 - r0) + (z1 - z0) * (z2 - z0)) / rc ^ 2
centralAngle = pi
If Abs(c) <> 1# Then centralAngle = Atn(-c / Sqr(1# - c ^ 2)) + pi / 2#

End Function

Private Sub setUpStiffnessEquations()

'Primera etapa: Formación del sistema de ecuaciones de equilibrio

setActiveDOF
defineColumnHeights
setDiagonalPointers

GaussAbcisaeAndWeights
globalForceVector
globalStiffnessMatrix

End Sub

Private Sub setActiveDOF()

'Identifica GDL activos; determina apuntadores a ecuaciones
'nx es el número de ecuaciones

Dim masterNode As Boolean
Dim i As Long, j As Long, m As Long
Dim ny As Long

nx = 0
ny = 3 * nn - 1
ReDim pointerToEquation(ny)
    
```

```
i = 0
For n = 0 To nn - 1

    'determina si el nudo es un nudo maestro
    masterNode = False
    For m = 0 To mn - 1
        If n = alias(m) Then
            masterNode = True
        Exit For
    End If
Next m

    For j = 0 To 2
        If masterNode And restrained(m, j) Then
            pointerToEquation(i) = ny
            ny = ny - 1
        Else
            pointerToEquation(i) = nx
            nx = nx + 1
        End If
        i = i + 1
    Next j

Next n

End Sub

Private Sub defineColumnHeights()

    'Determina altura de cada columna de la matriz de rigidez

    Dim i As Long, j As Long, m As Long
    Dim low As Long
    Dim height As Long

    ReDim columnHeight(nx - 1)

    'revisa cada elemento
    For n = 0 To ne - 1

        assemblyCodes

        'determina la primera ecuación con la que se relaciona
        low = nx
        For j = 0 To 5
            i = code(j)
            If i >= 0 And i < low Then low = i
        Next j
    
```

```
'revisa la altura de cada columna
For j = 0 To 5
  i = code(j)
  If i >= 0 And i < nx Then
    height = i - low + 1
    If height > columnHeight(i) Then columnHeight(i) = height
  End If
Next j

Next n

End Sub

Private Sub assemblyCodes()

  'Códigos de ensamble (ni,nj numerados a partir de cero)
  Dim i As Long

  i = 3 * ni(n)
  code(0) = pointerToEquation(i)
  code(1) = pointerToEquation(i + 1)
  code(2) = pointerToEquation(i + 2)

  i = 3 * nj(n)
  code(3) = pointerToEquation(i)
  code(4) = pointerToEquation(i + 1)
  code(5) = pointerToEquation(i + 2)

End Sub

Private Sub setDiagonalPointers()

  'Determina posiciones de coeficientes de la diagonal principal
  'a partir de las alturas (número de coeficientes) de cada columna

  Dim i As Long
  ReDim diagonalPointer(nx - 1)

  diagonalPointer(0) = 0
  For i = 1 To nx - 1
    diagonalPointer(i) = diagonalPointer(i - 1) + columnHeight(i)
  Next i

End Sub

Private Sub GaussAbcisaeAndWeights()
```

'Abcisas y pesos de integración

npi = 4

eta(0) = 0.0694318

eta(1) = 0.3300095

eta(2) = 0.6699905

eta(3) = 0.9305682

wGauss(0) = 1.0928182

wGauss(1) = 2.0487744

wGauss(2) = wGauss(1)

wGauss(3) = wGauss(0)

End Sub

Private Sub globalForceVector()

'Ensambla fuerzas concentradas y equivalentes a presiones

Dim i As Long, j As Long, m As Long

Dim indexS As Long, indexF As Long

Dim j0 As Long, j1 As Long

Dim thickness As Double

Dim radius As Double

Dim height As Double

Dim h0 As Double

'funciones de interpolación

Dim h1 As Double

Dim h2 As Double

Dim Dr As Double

Dim Dz As Double

Dim L As Double

Dim cr As Double

'cosenos directores

Dim cz As Double

Dim value As Double

Dim pressure As Double

'presión en punto de integración

m = 3 * nn - 1

ReDim f(m)

'matriz de fuerzas

'fuerzas concentradas

For n = 0 To mn - 1

```

m = alias(n)
value = 6.283185307 * r(n)
If r(n) = 0# Then value = 1#
For j = 0 To 2
    i = pointerToEquation(3 * m + j)
    If i < nx Then
        f(i) = value * LoadsAndDisplacements(n, j)
    Else
        f(i) = LoadsAndDisplacements(n, j)
    End If
Next j
Next n

'presiones (fuerzas por unidad de longitud)
For n = 0 To ne - 1

    j0 = ni(n)
    j1 = nj(n)

    Dr = r(j1) - r(j0)
    Dz = z(j0) - z(j1)
    L = Sqr(Dr ^ 2 + Dz ^ 2)
    cr = Dr / L
    cz = Dz / L

    For j = 0 To 5
        fe(j) = 0#
    Next j

    indexS = ns(n)
    indexF = formula(indexS)

    'integración numérica
    For i = 0 To npi - 1

        'funciones de interpolación
        h0 = eta(i)
        h1 = 1# - h0
        radius = h0 * r(j0) + h1 * r(j1)
        height = h0 * z(j0) + h1 * z(j1)
        thickness = h0 * ti(n) + h1 * tj(n)

        If indexF >= 0 Then
            value = a0(indexF) + a1(indexF) * radius + a2(indexF) * height
            If value < 0# Then value = 0#
            pressure = value * formulaFactor(indexF)
        Else
            pressure = 0#
        End If
    Next i
Next n
    
```

```

value = wGauss(i) * L * radius * pressure

'fuerzas concentradas equivalentes
h2 = h1 ^ 2 * (3# - 2# * h1)
fe(1) = fe(1) + value * (1# - h2)
fe(2) = fe(2) + value * L * h0 ^ 2 * h1
fe(4) = fe(4) + value * h2
fe(5) = fe(5) - value * L * h0 * h1 ^ 2

Next i

fe(0) = -fe(1) * cr
fe(1) = fe(1) * cz
fe(3) = -fe(4) * cr
fe(4) = fe(4) * cz

'ensamble
assemblyCodes
For j = 0 To 5
    i = code(j)
    If i < nx Then f(i) = f(i) + fe(j)
Next j

Next n

End Sub
    
```

```

Private Sub globalStiffnessMatrix()

'Ensambla matriz de rigidez (perfil variable)

Dim i As Long, j As Long, m As Long
Dim ii As Long, jj As Long, ij As Long, ji As Long
Dim i0 As Long

'inicializa
m = diagonalPointer(nx - 1)
ReDim K(m)

'para cada elemento
For n = 0 To ne - 1

'matriz de rigidez
elementStiffnessMatrixAndForces

'códigos de ensamble
assemblyCodes

'ensambla
    
```

```
For i = 0 To 5
  ii = code(i)
  i0 = i * (i + 1) / 2

  If ii < nx Then

    f(ii) = f(ii) + fe(i)

    For j = 0 To i
      jj = code(j)
      If jj < nx Then
        If ii > jj Then
          ij = diagonalPointer(ii) + jj - ii
        Else
          ij = diagonalPointer(jj) + ii - jj
        End If
        K(ij) = K(ij) + Ke(i0 + j)
      End If
    Next j

  Elseif ii >= nx Then

    For j = 0 To 5

      If j <= i Then
        ji = i0 + j
      Else
        ji = ji + j
      End If

      jj = code(j)
      If jj < nx Then f(jj) = f(jj) - Ke(ji) * f(ii)
    Next j

  End If

Next i
Next n

End Sub
```

```
Private Sub elementStiffnessMatrixAndForces()
```

```
'Matrices de Rigidez y Fuerza,  
'Elemento Axisimétrico Tronco Cónico
```

```
Dim i As Long, j As Long, m As Long  
Dim ij As Long
```

```

Dim p As Long
Dim j0 As Long, j1 As Long

Dim Dr As Double, Dz As Double
Dim L As Double
Dim cr As Double, cz As Double

Dim h(5) As Double           'funciones de interpolación
Dim B(23) As Double         'matriz deformación-desplazamiento

Dim value As Double
Dim h0 As Double, h1 As Double, h2 As Double, h3 As Double, h4 As Double, h5 As Double
Dim radius As Double, thickness As Double
Dim c0 As Double, c1 As Double, c2 As Double, c3 As Double
Dim d1 As Double, d2 As Double, e1 As Double, e2 As Double
Dim b1 As Double, b5 As Double, b6 As Double, b7 As Double, b13 As Double, b17 As Double
Dim db0 As Double, db1 As Double, db2 As Double, db3 As Double

'inicializa
For ij = 0 To 20
    Ke(ij) = 0#
Next
For i = 0 To 5
    fe(i) = 0#
Next i

'geometría
j0 = ni(n)
j1 = nj(n)
Dr = r(j1) - r(j0)
Dz = z(j0) - z(j1)
L = Sqr(Dr ^ 2 + Dz ^ 2)
cr = Dr / L
cz = Dz / L

e1 = E / (1# - nu ^ 2)

'inicializa
B(12) = cz / L
B(16) = cr / L
B(0) = -B(12)
B(4) = -B(16)
B(8) = 0#
B(20) = 0#

'integración numérica
For p = 0 To npi - 1

    h1 = eta(p)
    h0 = 1# - h1

```

```
radius = h0 * r(j0) + h1 * r(j1)
thickness = h0 * ti(n) + h1 * tj(n)
value = wGauss(p) * L * radius
```

```
c0 = thickness ^ 3 / 12#
d1 = e1 * c0
d2 = d1 * nu
```

```
c1 = e1 * thickness
c2 = c1 * nu
c3 = (c1 + c2) * epsilon
```

'funciones de interpolación (ejes locales)

```
h2 = h0 ^ 2 * (1# + 2# * h1)
h3 = 1# - h2
h4 = L * h0 ^ 2 * h1
h5 = -L * h0 * h1 ^ 2
```

'funciones de interpolación (ejes globales)

```
h(0) = h0 * cz * cz + h2 * cr * cr
h(1) = (h0 - h2) * cr * cz
h(2) = -h4 * cr
h(3) = h1 * cz * cz + h3 * cr * cr
h(4) = (h1 - h3) * cr * cz
h(5) = -h5 * cr
```

'matriz deformación-desplazamiento (ejes locales)

```
b1 = h0 * cr / radius
b5 = h2 * cz / radius
b6 = (6# - 12# * h1) / L ^ 2
b7 = 6# * h0 * h1 * cr / (radius * L)
b13 = h1 * cr / radius
b17 = h3 * cz / radius
```

'matriz deformación-desplazamiento (ejes globales)

```
B(1) = b1 * cz - b5 * cr
B(2) = -b6 * cr
B(3) = -b7 * cr
B(5) = b1 * cr + b5 * cz
B(6) = b6 * cz
B(7) = b7 * cz
B(9) = h4 * cz / radius
B(10) = (4# - 6# * h1) / L
B(11) = h0 * (3# * h1 - 1#) * cr / radius
B(13) = b13 * cz - b17 * cr
B(14) = -B(2)
B(15) = -B(3)
B(17) = b13 * cr + b17 * cz
B(18) = -B(6)
B(19) = -B(7)
```

B(21) = h5 * cz / radius
 B(22) = (2# - 6# * h1) / L
 B(23) = h1 * (2# - 3# * h1) * cr / radius

'matriz de rigidez (ejes globales)

ij = 0

For j = 0 To 20 Step 4

db0 = c1 * B(j) + c2 * B(j + 1)

db1 = c2 * B(j) + c1 * B(j + 1)

db2 = d1 * B(j + 2) + d2 * B(j + 3)

db3 = d2 * B(j + 2) + d1 * B(j + 3)

For i = 0 To j Step 4

Ke(ij) = Ke(ij) + value * (B(i) * db0 + B(i + 1) * db1 + B(i + 2) * db2 + B(i + 3) * db3)

ij = ij + 1

Next i

Next j

'matriz de fuerzas (peso propio, contracción/temperatura)

j = 0

For i = 0 To 5

fe(i) = fe(i) + value * (h(i) * gamma * thickness + c3 * (B(j) + B(j + 1)))

j = j + 4

Next i

Next p

End Sub

Private Sub LDL_Decomposition()

'Factorización de matriz simétrica definida positiva A = LDL

'coeficientes almacenados con perfil variable por columnas

'K() matriz de rigidez, factores LDL

' 0 1 3 9 .

' 2 4 6 10 .

' 5 7 11 .

' 8 12 .

' 13 .

'

'f() vector de constantes/solución

'nx número de ecuaciones

'diagonalPointer()

' apuntador a coeficientes de diagonal principal de K

Dim i As Long, j As Long

Dim n As Long, m As Long

```

Dim ii As Long, jj As Long, ij As Long
Dim lastColumnDiagonal As Long
Dim columnHeight As Long
Dim topRow As Long
Dim lastRowDiagonal As Long
Dim d As Double
Dim factor As Double

Const tol As Double = 0.5 * 10 ^ -30

jj = 0
For j = 1 To nx - 1
    lastColumnDiagonal = jj
    jj = diagonalPointer(j)
    d = K(jj)
    columnHeight = jj - lastColumnDiagonal
    topRow = j - columnHeight + 1

    'reduce columna j excepto diagonal
    If columnHeight > 2 Then
        ii = diagonalPointer(topRow)
        ij = lastColumnDiagonal + 1
        For i = topRow + 1 To j - 1
            lastRowDiagonal = ii
            ii = diagonalPointer(i)
            ij = ij + 1
            n = ii - lastRowDiagonal - 1
            m = i - topRow
            If m < n Then n = m
            For m = 1 To n
                K(ij) = K(ij) - K(ij - m) * K(ii - m)
            Next m
        Next i
    End If

    'reduce coeficiente de diagonal principal
    If columnHeight > 1 Then
        ij = lastColumnDiagonal
        For i = topRow To j - 1
            ii = diagonalPointer(i)
            ij = ij + 1
            If K(ii) > 0 Then
                factor = K(ij)
                K(ij) = K(ij) / K(ii)
                K(jj) = K(jj) - factor * K(ii)
            End If
        Next i
    End If

    'ecuación en blanco?

```

```
If K(jj) = 0 Then Exit For
'matriz mal condicionada
If K(jj) < 0# Then
'If K(jj) < tol * d Then
    MsgBox ("No se pudo alcanzar el objetivo: insuficiente precisión en aritmética")
End
End If

Next j

End Sub

Private Sub reduceAndBacksubstitute()

'Solución de sistema de ecuaciones lineales con matriz de
'coeficientes simétrica almacenada con perfil variable

Dim i As Long, j As Long, n As Long
Dim ij As Long, ii As Long, jj As Long
Dim factor As Double

'reducción (resuelve Lz=b)
ij = 1
For j = 1 To nx - 1
    jj = diagonalPointer(j)
    n = j - (jj - ij)
    For i = n To j - 1
        f(i) = f(j) - K(ij) * f(i)
        ij = ij + 1
    Next i
    ij = jj + 1
Next j

'división entre diagonal (resuelve Dz=z)
energy = 0
For i = 0 To nx - 1
    ii = diagonalPointer(i)
    If K(ii) > 0 Then
        factor = f(i)
        f(i) = f(i) / K(ii)
        energy = energy + factor * f(i)
    Else
        If f(i) <> 0 Then Stop
    End If
Next i

'sustitución inversa (resuelve Lx=y)
For j = nx - 1 To 1 Step -1
    ij = diagonalPointer(j) - 1
```

```

    i = j
    While ij > diagonalPointer(j - 1)
        i = i - 1
        f(i) = f(i) - K(ij) * f(j)
        ij = ij - 1
    Wend
Next j

ReDim K(0)

End Sub

Private Sub outputDisplacementsAndStresses()

'Lista desplazamientos, determina y lista esfuerzos

Dim i As Long, j As Long, m As Long
Dim w As Range
Dim j0 As Long, j1 As Long

Dim value As Double
Dim value1 As Double

'coordenadas de los nudos
Set w = Worksheets("Listado").Range("b8:d10007")
w.ClearContents
For n = 0 To nn - 1
    i = n + 1
    w(i, 1) = i
    w(i, 2) = r(n)
    w(i, 3) = z(n)
Next n

'reordena y lista desplazamientos
Set w = Worksheets("Listado").Range("f8:h10007")
w.ClearContents
For i = 0 To 3 * nn - 1
    j = pointerToEquation(i)
    'If Abs(f(j)) < 0.000000000001 Then f(j) = 0#
    w(i + 1) = f(j)
Next i

Set w = Worksheets("Listado").Range("j8:t10007")
w.ClearContents
ReDim maxMs(nn - 1), errMs(nn - 1)
ReDim maxMt(nn - 1), errMt(nn - 1)

'fuerzas de membrana, momentos de flexión
i = 1

```

```

For n = 0 To ne - 1
    mf

    j0 = ni(n)
    j1 = nj(n)

    w(i, 1) = j0 + 1
    w(i, 2) = Ns1
    w(i, 3) = Nt1
    w(i, 4) = Ms1
    w(i, 5) = Mt1
    w(i, 7) = j1 + 1
    w(i, 8) = Ns2
    w(i, 9) = Nt2
    w(i, 10) = Ms2
    w(i, 11) = Mt2
    i = i + 1

    errMs(j0) = errMs(j0) + Ms1
    errMs(j1) = errMs(j1) - Ms2
    Ms1 = Abs(Ms1)
    If Ms1 > maxMs(j0) Then maxMs(j0) = Ms1
    Ms2 = Abs(Ms2)
    If Ms2 > maxMs(j1) Then maxMs(j1) = Ms2

    errMt(j0) = errMt(j0) + Mt1
    errMt(j1) = errMt(j1) - Mt2
    Mt1 = Abs(Mt1)
    If Mt1 > maxMt(j0) Then maxMt(j0) = Mt1
    Mt2 = Abs(Mt2)
    If Mt2 > maxMt(j1) Then maxMt(j1) = Mt2

Next n

'Determina el momento máximo
value = 0#
For n = 0 To nn - 1
    If maxMs(n) > value Then value = maxMs(n)
Next n

value1 = 0#
For n = 0 To nn - 1
    If maxMt(n) > value1 Then value1 = maxMt(n)
Next n

'corregir por apoyos y por momentos externos
For n = 0 To mn - 1
    m = alias(n)

    If restrained(n, 2) Or rm(n) = 0# Then
    
```

```
        errMs(m) = 0#
        errMt(m) = 0#
    End If
Next n

Set w = Worksheets("Listado").Range("v8:x20007")
w.ClearContents

OK = True
i = 1
For n = 0 To nn - 1
    w(i, 1) = i
    errMs(n) = Abs(errMs(n)) / value * 100
    errMt(n) = Abs(errMt(n)) / value1 * 100
    If errMs(n) > targetError Then OK = False
    w(i, 2) = errMs(n)
    w(i, 3) = errMt(n)
    i = i + 1
Next n
End Sub
```

```
Private Sub mf()
```

```
    Dim i As Long, j As Long
    Dim j0 As Long, j1 As Long
```

```
    Dim Dr As Double, Dz As Double
    Dim cr As Double, cz As Double
    Dim radius As Double
    Dim L As Double
```

```
    Dim u(5) As Double
    Dim u1 As Double, u2 As Double
    Dim w1 As Double, w2 As Double
```

```
    Dim eps_s As Double, eps_t As Double
    Dim chi_s As Double, chi_t As Double
```

```
    Dim e1 As Double, c0 As Double
    Dim c1 As Double, c2 As Double
    Dim d1 As Double, d2 As Double
```

```
    'geometría
    j0 = ni(n)
    j1 = nj(n)
    Dr = r(j1) - r(j0)
    Dz = z(j0) - z(j1)
    L = Sqr(Dr ^ 2 + Dz ^ 2)
    cr = Dr / L
```

```
cz = Dz / L

'desplazamientos (ejes globales)
assemblyCodes
For i = 0 To 5
    u(i) = f(code(i))
Next i

'desplazamientos (ejes locales)
u1 = cz * u(0) + cr * u(1)
u2 = cz * u(3) + cr * u(4)
w1 = -cr * u(0) + cz * u(1)
w2 = -cr * u(3) + cz * u(4)

'propiedades del material
e1 = E / (1# - nu * nu)

' deformaciones primer nudo
eps_s = (u2 - u1) / L
chi_s = 6# / L ^ 2 * (w1 - w2) + (4# * u(2) + 2# * u(5)) / L
If r(j0) > 0# Then
    eps_t = u(1) / r(j0)
    chi_t = -cr * u(2) / r(j0)
Else
    eps_t = eps_s
    chi_t = chi_s
End If

'constantes primer nudo
c1 = e1 * ti(n)
d1 = e1 * ti(n) ^ 3 / 12#
c0 = epsilon * (1# + nu)

' fuerzas de membrana (tracciones) y momentos (antihorarios)
Ns1 = c1 * (eps_s + nu * eps_t - c0)
Nt1 = c1 * (nu * eps_s + eps_t - c0)
Ms1 = -d1 * (chi_s + nu * chi_t)
Mt1 = -d1 * (nu * chi_s + chi_t)

' deformaciones segundo nudo
chi_s = 6# / L ^ 2 * (w2 - w1) - (2# * u(2) + 4# * u(5)) / L
If r(j1) > 0# Then
    eps_t = u(4) / r(j1)
    chi_t = -cr * u(5) / r(j1)
Else
    eps_t = eps_s
    chi_t = chi_s
End If

'constantes segundo nudo
```

```

c1 = e1 * tj(n)
d1 = e1 * tj(n) ^ 3 / 12#

' fuerzas de membrana (tracciones) y momentos (antihorarios)
Ns2 = c1 * (eps_s + nu * eps_t - c0)
Nt2 = c1 * (nu * eps_s + eps_t - c0)
Ms2 = -d1 * (chi_s + nu * chi_t)
Mt2 = -d1 * (nu * chi_s + chi_t)
    
```

End Sub

Private Sub newMesh()

```

Dim m As Long           'dimensión de un arreglo
Dim sector As Long     'índice de sector
Dim i As Long          'índice auxiliar
Dim j As Long          'índice de nudo
Dim n As Long          'último nudo agregado

Dim first As Long      'primer elemento de sector en malla antigua
Dim last As Long       'último elemento de sector en malla antigua

Dim r1 As Double       'coordenada r del primer nudo del sector
Dim z1 As Double       'coordenada z id.
Dim r2 As Double       'coordenada r del último nudo
Dim z2 As Double       'coordenada z id.

Dim Dr As Double       'componente r de la longitud de un sector o un elemento
Dim Dz As Double       'componente z id.

Dim sectorLength As Double 'longitud del sector
Dim c As Double, s As Double 'cosenos directores
Dim cAlfa As Double
Dim sAlfa As Double
    
```

Dim sectorMaximumRelativeError As Double

'Variables temporales usadas para la nueva malla:

```

Dim new_nn As Long     'número de nudos
Dim new_ne As Long     'número de elementos
Dim new_alias() As Long
Dim new_r() As Double
Dim new_z() As Double
Dim new_ns() As Long
Dim new_ni() As Long
Dim new_nj() As Long
Dim new_ti() As Double
Dim new_tj() As Double
    
```

```

Dim oldNode() As Double
Dim oldSize As Double, temp As Double
Dim newSize() As Double
Dim elementSize As Double
Dim distance As Double
Dim alfa As Double
Dim thickness As Double

new_nn = 0
new_ne = 0
m = 32001 'dimensionamiento provisional
ReDim new_r(m), new_z(m)
m = m - 1
ReDim new_ns(m), new_ni(m), new_nj(m), new_ti(m), new_tj(m)
m = mn - 1
ReDim new_alias(m)
For i = 0 To m
    new_alias(i) = -1
Next i

'se analizan los errores y se reconstruye la malla para cada sector
For sector = 0 To ms - 1

    'coordenadas de los nudos extremos del sector
    j = mi(sector)
    r1 = rm(j)
    z1 = zm(j)
    j = mj(sector)
    r2 = rm(j)
    z2 = zm(j)

    'geometría básica del sector
    'para un sector circular, la 'longitud' se define como el ángulo central
    If rc(sector) = 0# Then
        Dr = r2 - r1
        Dz = z2 - z1
        sectorLength = Sqr(Dr ^ 2 + Dz ^ 2)
        c = Dr / sectorLength
        s = Dz / sectorLength
    Else
        sectorLength = centralAngle(r1, z1, r0(sector), z0(sector), r2, z2, rc(sector))
    End If

    'agrega primer nudo a la lista (si no fue anteriormente considerado)
    j = mi(sector)
    If new_alias(j) < 0 Then
        new_r(new_nn) = r1
        new_z(new_nn) = z1
        new_alias(j) = new_nn
    
```

```
new_nn = new_nn + 1
End If
n = new_alias(j)

'se identifica el primer y el último elemento de la malla antigua para este sector
'los elementos de cada sector son siempre contiguos y ordenados en forma ascendente
For first = 0 To ne - 1
    If ns(first) = sector Then Exit For
Next first
If sector = ms - 1 Then
    last = ne - 1
Else
    For last = first To ne - 1
        If ns(last) <> sector Then Exit For
    Next last
    last = last - 1
End If
m = last - first + 1

'forma lista de posiciones de nudos en malla antigua
ReDim oldNode(m)
oldNode(0) = 0#
j = nj(first)
For i = 1 To m
    If i = m Then j = nj(last)
    If rc(sector) = 0# Then
        oldNode(i) = Sqr((r(j) - r1) ^ 2 + (z(j) - z1) ^ 2)
    Else
        oldNode(i) = centralAngle(r1, z1, r0(sector), z0(sector), r(j), z(j), rc(sector))
    End If
    j = j + 1
Next i

'forma lista de dimensiones objetivo en malla nueva
ReDim newSize(m)
j = ni(first)
oldSize = oldNode(1)

If errMs(j) = 0# Then errMs(j) = errMs(j + 1)
newSize(0) = oldSize * (theta * targetError / errMs(j)) ^ (1# / pOrder)
If newSize(0) > oldSize Then newSize(0) = oldSize

sectorMaximumRelativeError = errMs(j)

For i = 1 To m - 1
    oldSize = oldNode(i) - oldNode(i - 1)
    temp = oldNode(i + 1) - oldNode(i)
    If temp < oldSize Then oldSize = temp
    j = j + 1
    If errMs(j) > 0# Then
```

```
    newSize(i) = oldSize * (theta * targetError / errMs(j)) ^ (1# / pOrder)
Else
    newSize(i) = oldSize
End If
If newSize(i) > oldSize Then newSize(i) = oldSize
If errMs(j) > sectorMaximumRelativeError Then sectorMaximumRelativeError = errMs(j)
Next i

j = nj(last)
oldSize = oldNode(m) - oldNode(m - 1)
If errMs(j) > 0# Then
    newSize(m) = oldSize * (theta * targetError / errMs(j)) ^ (1# / pOrder)
    If newSize(m) > oldSize Then newSize(m) = oldSize
Else
    newSize(m) = oldSize / 2
End If
If errMs(j) > sectorMaximumRelativeError Then sectorMaximumRelativeError = errMs(j)

r2 = r1
z2 = z1
distance = 0#
elementSize = newSize(0)
thickness = tmi(sector)

Do
    new_ns(new_ne) = sector
    new_ni(new_ne) = n
    new_ti(new_ne) = thickness

    distance = distance + elementSize

'Dimensión mínima = diezmilésima de la del sector
If distance > 0.9999 * sectorLength Then Exit Do

If rc(sector) = 0# Then
    Dr = c * elementSize
    Dz = s * elementSize
    r2 = r2 + Dr
    z2 = z2 + Dz
Else
    c = (r2 - r0(sector)) / rc(sector)
    s = (z2 - z0(sector)) / rc(sector)
    cAlfa = Cos(elementSize)
    sAlfa = Sin(elementSize)
    temp = c
    c = cAlfa * c - sAlfa * s
    s = cAlfa * s + sAlfa * temp
    r2 = r0(sector) + c * rc(sector)
    z2 = z0(sector) + s * rc(sector)
End If
```

```

new_r(new_nn) = r2
new_z(new_nn) = z2

new_nj(new_ne) = new_nn
alfa = distance / sectorLength
thickness = (1# - alfa) * tmi(sector) + alfa * tmj(sector)
new_tj(new_ne) = thickness
n = new_nn

new_nn = new_nn + 1
new_ne = new_ne + 1

For j = 1 To m
    If oldNode(j) > distance Then Exit For
Next j
If j > m Then j = m
alfa = (distance - oldNode(j - 1)) / (oldNode(j) - oldNode(j - 1))
elementSize = (1# - alfa) * newSize(j - 1) + alfa * newSize(j)

Loop

j = mj(sector)
If new_alias(j) >= 0 Then
    n = new_alias(j)
Else
    new_r(new_nn) = rm(j)
    new_z(new_nn) = zm(j)
    n = new_nn
    new_alias(j) = n
    new_nn = new_nn + 1
End If

new_nj(new_ne) = n
new_tj(new_ne) = tmj(sector)
new_ne = new_ne + 1

Next sector

For j = 0 To mn - 1
    alias(j) = new_alias(j)
Next j

nn = new_nn
m = nn - 1
ReDim r(m), z(m)
For j = 0 To m
    r(j) = new_r(j)
    z(j) = new_z(j)

```

```
Next j

ne = new_ne
m = ne - 1
ReDim ns(m), ni(m), nj(m), ti(m), tj(m)
For i = 0 To m
    ns(i) = new_ns(i)
    ni(i) = new_ni(i)
    nj(i) = new_nj(i)
    ti(i) = new_ti(i)
    tj(i) = new_tj(i)
Next i

End Sub
```