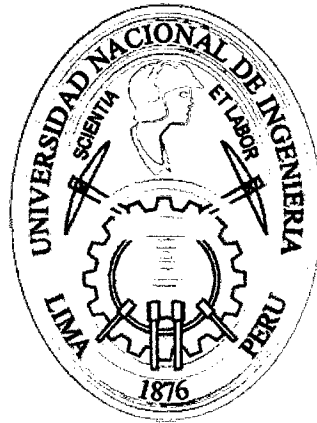


UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA



TESIS PARA OBTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE:
LICENCIADO EN MATEMÁTICA

TÍTULADA:

**FUNCIÓN SIGNO MATRICIAL EN LAS EAR'S, EAR'S EN ESPACIOS DE
HILBERT ASÍ COMO SU ESTUDIO EN LA ECUACIÓN DEL CALOR**

PRESENTADO POR:

FELIPE ANTONY TORRES ESTRELLA

ASESOR:

Mg. WILLIAM CARLOS ECHEGARAY CASTILLO

LIMA - PERU

2014

Digitalizado por:

**Consortio Digital del
Conocimiento MebLatam,
Hemisferio y Dalse**

*Con todo mi cariño y mi amor para las personas que hicieron
todo en la vida para que yo pudiera lograr mis sueños, por
motivarme y darme la mano cuando sentía que el camino se
terminaba, a ustedes por siempre mi corazón y mi
agradecimiento.
Papá y mamá.*

Índice general

Resumen	v
Agradecimientos	vii
1. Preliminares	1
1.1. Definiciones Básicas y Propiedades	2
1.2. Bases de Riesz, Operador Riesz-espectral y C_0 -semigrupo	4
1.3. Resultados acerca de bases de Riesz	13
1.4. ¿Dónde está un sistema de Riesz-espectral?	14
2. Función Signo Matricial	19
2.1. Definición y Propiedades de la Función Signo Matricial	19
2.2. Modelo de Sistemas Dinámicos Lineales	26
2.3. Cálculo de la Función Signo Matricial	27
2.3.1. Método de Schur	30
2.4. Criterios de Estabilidad Iterativos	31
2.5. Ejemplos	35
2.5.1. Finalización de las iteraciones	37
2.6. Función Signo Matricial Generalizado	40
2.7. Función Signo Matricial del conjunto de Matrices Rectangulares	47
3. Ecuación Algebraica de Riccati	53
3.1. Clasificación de Soluciones	53
3.2. Soluciones Hermitianas	55
3.2.1. Existencia de Soluciones Únicas	56
3.2.2. Soluciones Puras	63
3.2.3. Teoremas de Clasificación	68
3.2.4. Cardinalidad de Soluciones	72
3.3. Soluciones Definidas	74
3.3.1. Existencia de Soluciones Extremas	74
3.3.2. Teoremas de Clasificación	76
3.3.3. Estabilización de soluciones	81
3.4. Método iterativo para la Ecuación Algebraica de Riccati	83

ÍNDICE GENERAL

4. Ecuación Algebraica de Riccati en espacios de Hilbert	89
4.1. Clasificación de las soluciones de la EAR	89
4.1.1. Forma General de las Soluciones	89
4.1.2. Soluciones Autoadjuntas y no Negativas	99
4.1.3. Soluciones Estables	101
4.2. Aplicaciones	106
4.2.1. Aplicación de la Función Signo Matricial para resolver Ecuaciones Algebraicas de Riccati	106
4.2.2. Aplicación de la Función Signo Matricial para resolver Ecuaciones de Lyapunov y Sylvester	109
4.2.3. La Ecuación del Calor	114
5. Conclusiones	121
Bibliografía	123

Resumen

Las propiedades de la función signo matricial, relativamente un nuevo objeto de la teoría de matrices, se describen. En la moderna algebra computacional, subyace una tecnología eficiente que permite resolver los problemas actuales de la teoría de control. Las potencialidades de esta tecnología se demuestran con el ejemplo de los problemas espectrales y ecuaciones matriciales algebraicas de Lyapunov, Sylvester y Riccati. Criterios prácticos de estabilidad para sistemas dinámicos lineales se proponen en las bases del proceso iterativo para el cálculo de la función signo matricial.

En este trabajo estudiaremos la función signo para una matriz $\mathbb{C}^{n \times n}$, veremos que propiedades tiene esta nueva función tomando como base el Álgebra Lineal. Uno de los objetivos a tratar es de hallar la función signo para una matriz de cualquier orden, pero para matrices de mayor orden daremos métodos iterativos para su cálculo, estudiando el método de Newton y el de Schur. Para el éxito de estas iteraciones estudiaremos una manera de decidir cuando terminarlas. La función signo matricial para el conjunto de matrices rectangulares se definen basándose en el álgebra de relaciones lineales.

Introduciremos conceptos nuevos que pueden ser tratados en un curso de Sistemas Lineales de Dimensión Infinita, como por ejemplo: bases de Riesz, operador Riesz espectral y C_0 -semigrupo; así como resultados de bases de Riesz que serán utilizados a lo largo del desarrollo del tema. El objetivo principal se centra en el estudio de la ecuación algebraica de Riccati en dos tipos de espacios, $\mathbb{C}^{n \times n}$ y espacios de Hilbert; estudiando el tipo de soluciones y cardinalidad en este último espacio. Para el conjunto de matrices reales cuadradas se dará un método iterativo para la resolución de la ecuación algebraica de Riccati.

Por último, todo lo estudiado se aplicará a encontrar las soluciones de la ecuación del calor, dando una expresión explícita para todas ellas.

Agradecimientos

Agradezco a Dios, por iluminar y protegerme en cada paso de mi existencia.

Al Mg. William Echegaray Castillo, mi orientador no solo por su paciencia y cuidado durante la elaboración de este trabajo si no también por su amistad e incentivo en las horas más adversas.

A mis padres por ser el pilar fundamental en todo lo que soy, en toda mi educación, tanto académica, como de la vida, por su incondicional apoyo perfectamente mantenido a través del tiempo.

Todo este trabajo ha sido posible gracias a ellos.

Capítulo 1

Preliminares

La definición 1.0.3, los teoremas 1.0.1 y 1.0.2 mencionados a continuación serán de mayor utilidad en el capítulo 2. En el capítulo 3, las definiciones y propiedades que se dan en 1.1 es de gran utilidad. En este capítulo 1.2, 1.3 y 1.4 serán de mayor importancia para el desarrollo del capítulo 4.

Definición 1.0.1. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, decimos que Ω es cerrado bajo la conjugación si para todo $z \in \Omega$ se tiene $\bar{z} \in \Omega$.

Daremos el concepto de espectro de una matriz.

Definición 1.0.2. Sea $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ una matriz, el espectro de A denotado por $\sigma(A)$ es el conjunto de autovalores de A .

Teorema 1.0.1. ([14]) Dada una función analítica f en un subconjunto abierto $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ tal que cada componente conexa de Ω es cerrado bajo la conjugación. Consideremos la función matricial f correspondiente en su dominio natural $\mathbb{C}^{n \times n}$, el conjunto D dado por

$$D = \left\{ A \in \mathbb{C}^{n \times n} : \sigma(A) \subseteq \Omega \right\},$$

Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:

1. $f(A^*) = f(A)^*$, $\forall A \in D$.
2. $f(\bar{A}) = \overline{f(A)}$, $\forall A \in D$.
3. $f(\mathbb{R}^{n \times n} \cap D) \subseteq \mathbb{R}^{n \times n}$.
4. $f(\mathbb{R} \cap \Omega) \subseteq \mathbb{R}$

donde A^* denota la matriz transpuesta conjugada de A .

Demostración: Ver [14] página 13. □

Teorema 1.0.2. ([14]) Sea $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ una matriz la cual no tiene autovalores en \mathbb{R}^- . Luego existe una única matriz cuadrada X de entre todas de A cuyos autovalores se encuentran en el semiplano abierto derecho y es una función matricial primaria de A , es decir X es la raíz cuadrada principal de A y escribimos $X = A^{1/2}$. Si A es real entonces $A^{1/2}$ es real.

Demostración: Ver [14] página 20. □

1. Preliminares

Definición 1.0.3. (Función Matricial via Integral de Cauchy) Para la matriz compleja A , definimos

$$f(A) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z)(zI - A)^{-1} dz,$$

donde f es analítica sobre y dentro de un contorno cerrado Γ tal que incluya a $\sigma(A)$.

1.1. Definiciones Básicas y Propiedades

Para cualquier matriz compleja A , usaremos χ_A para designar al polinomio característico de A y L_A^{ℓ}, L_A^0, L_A^r la suma de los autoespacios correspondientes a los autovalores que pertenecen al semiplano izquierdo, eje imaginario, semiplano derecho (los cuales tienen parte real negativa, cero, positiva respectivamente).

Definición 1.1.1. Dada una matriz compleja A luego:

1. Decimos que A es estable si todos sus autovalores tienen parte real negativa.
2. Decimos que A es anti-estable si $-A$ es estable.

Las multiplicidades parciales de un autovalor λ de A son justamente los tamaños de los bloques de Jordan correspondientes a λ en la forma de Jordan de A , o, que es lo mismo, los grados de los divisores elementales de $sI - A$ del tipo $(s - \lambda)^x$. La multiplicidad de λ es la suma de las multiplicidades parciales de λ .

Ejemplo 1.1.1. Sea

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Esta matriz de Jordan tiene autovalores 1 y 0. Las multiplicidades parciales de 1 son 4, 1 y 1, su respectiva multiplicidad es 6; para el autovalor 0 las multiplicidades parciales 2 y 1, su respectiva multiplicidad es 3.

Definición 1.1.2. Decimos que A es cíclico si cada autovalor de A tiene una sola multiplicidad parcial.

Definición 1.1.3. Un subespacio $V \subset \mathbb{C}^n$ se dice invariante bajo A o A -invariante, si $AV \subset V$. Para un subespacio A -invariante $V \subset \mathbb{C}^n$, $A|_V$ denota la restricción de A a V .

Notación 1.1.1.

1. Si A es una matriz, A^* denotará la conjugada transpuesta de la matriz A .
2. Si v es un vector, v^* denotará la conjugada transpuesta del vector v .

1.1. Definiciones Básicas y Propiedades

Para un polinomio complejo $q = \lambda_0 + \lambda_1 s + \dots + \lambda_n s^n$, denotamos por q^* a la conjugada polinomial definida por:

$$q^* = \lambda_0^* + \lambda_1^*(-s) + \dots + \lambda_n^*(-s)^n$$

Definición 1.1.4. Sea A una matriz compleja

1. Denotamos por $Sp(A)$ el espacio generado por los vectores columnas de A i.e si $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $A = [A_1, A_2, \dots, A_n]$ donde cada A_i , $i = 1, 2, \dots, n$ son las columnas de A entonces,

$$Sp(A) = \text{span} \{ A_1, A_2, \dots, A_n \}$$

2. Denotamos por $Ker(A)$ al núcleo de A i.e si $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ entonces,

$$Ker(A) = \{ v \in \mathbb{C}^n / Av = 0 \}$$

Definición 1.1.5. Dados $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$, definimos los subespacios en \mathbb{C}^n ; $R_{A,B}$ y $S_{A,B}$ por:

$$R_{A,B} = Sp(B) + Sp(AB) + \dots + Sp(A^{n-1}B)$$

y

$$S_{A,B} = R_{A,B} + L_A^\ell$$

Definición 1.1.6. Dados $A, C \in \mathbb{C}^{n \times n}$, definimos los subespacios en \mathbb{C}^n ; $O_{A,C}$ y $D_{A,C}$ por:

$$O_{A,C} = Ker(C) + Ker(CA) + \dots + Ker(CA^{n-1})$$

y

$$D_{A,C} = O_{A,C} + (L_A^0 + L_A^r)$$

Observación 1.1.1. Todos estos subespacios de \mathbb{C}^n son invariantes bajo A .

Definición 1.1.7. Dados $A, B, C \in \mathbb{C}^{n \times n}$

1. Se dice que el par (A, B) es accesible si $R_{A,B} = \mathbb{C}^n$.
2. Se dice que el par (A, B) es estabilizable si $S_{A,B} = \mathbb{C}^n$.
3. Se dice que el par (A, C) es observable si $O_{A,C} = \{0\}$.
4. Se dice que el par (A, C) es detectable si $D_{A,C} = \{0\}$.

Definición 1.1.8. Dadas las matrices A, B, C decimos que:

1. Un autovalor $\lambda \in \mathbb{C}$ de A es llamado B -accesible si $v^* A = \lambda v^*$, $v^* B = 0$ implica que $v = 0$.
2. Un autovalor $\lambda \in \mathbb{C}$ de A es llamado C -observable si $Aw = \lambda w$, $Cw = 0$ implica que $w = 0$.

Definición 1.1.9. Diremos que (A, B) es signo-accesible si cualquiera λ o $-\lambda^*$ es B -accesible para cualquier autovalor λ de A .

Definición 1.1.10. Decimos que dos polinomios complejos p y q son relativamente primos si el máximo común divisor de p y q es igual a 1.

1. Preliminares

Para referencias posteriores, consideremos dos proposiciones cuyas demostraciones o mayor información se encuentran en los siguientes textos respectivamente [12] página 225 y [2]:

Proposición 1.1.1. ([12]) Consideremos $A, B, C \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Entonces la ecuación de Sylvester

$$XA + BX + C = 0$$

tiene una única solución X si y sólo si χ_A y χ_B son primos relativos.

Definición 1.1.11.

1. Decimos que una matriz $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ hermitiana es definida no negativa si $u^* A u \geq 0$, para todo $u \in \mathbb{C}^n$ o si se tiene un producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}$ entonces $\langle A u, u \rangle \geq 0$, para todo $u \in \mathbb{C}^n$ y se denota por $A \geq 0$.
2. Decimos que una matriz $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ hermitiana es definida positiva si $u^* A u > 0$, para todo $u \in \mathbb{C}^n$ o si se tiene un producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}$ entonces $\langle A u, u \rangle > 0$, para todo $u \in \mathbb{C}^n$ y se denota por $A > 0$.

Definición 1.1.12. La desigualdad $X_1 \geq X_2$ entre matrices hermitianas X_1, X_2 , significa que $X_1 - X_2$ es definida no negativa y $X_1 > X_2$, significa que $X_1 - X_2$ es definida positiva.

Proposición 1.1.2. ([2]) Dados $A, C \in \mathbb{C}^{n \times n}$ tal que $C = C^*$ y consideremos la ecuación de Lyapunov

$$XA + A^* X + C = 0$$

si A es estable y $C \geq 0$ entonces, existe una única solución X y $X \geq 0$. Por otro lado si existe una solución $X \geq 0$ y $C > 0$ entonces, A es estable.

1.2. Bases de Riesz, Operador Riesz-espectral y C_0 -semigrupo

En esta sección, daremos algunas definiciones básicas, resultados e hipótesis, que necesitaremos a lo largo del tema a desarrollar. Asumiremos que todo espacio de Hilbert en este tema es separable.

Notación 1.2.1. Dados Z_1 y Z_2 espacios de Hilbert, $T : Z_1 \rightarrow Z_2$ un operador lineal. Entonces:

1. $D(T) :=$ dominio de T .
2. $R(T) :=$ conjunto resolvente de T .
3. $\sigma(T) :=$ espectro de T .
4. $\sigma_p(T) :=$ espectro puntual de T .
5. $Z_0 := \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.
6. $L(Z_1, Z_2) := \{T : Z_1 \rightarrow Z_2 / T \text{ es lineal y acotado}\}$.
7. $L(Z_1, Z_1) := L(Z_1) = \{T : Z_1 \rightarrow Z_1 / T \text{ es lineal y acotado}\}$.

1.2. Bases de Riesz, Operador Riesz-espectral y C_0 -semigrupo

Definición 1.2.1. Dado un espacio de Hilbert Z sobre \mathbb{C} y $T : Z \rightarrow Z$ un operador lineal, definimos:

a) Un número complejo $\lambda \in \mathbb{C}$ es llamado valor regular de T cuando:

1. El operador $T - \lambda I$ es inyectivo.
2. El rango de $T - \lambda I$ es denso en Z .
3. El operador $(T - \lambda I)^{-1}$ es continuo.

Al conjunto de todos los valores regulares de T lo denotaremos por $R(T)$.

b) El espectro de T es el complemento de $\rho(T)$, es decir

$$\sigma(T) = \mathbb{C} \setminus R(T)$$

Observación 1.2.1. Dado un espacio de Hilbert Z , $T : Z \rightarrow Z$ un operador lineal y $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} \text{Si } \lambda \in \sigma_p(T) &\Leftrightarrow (T - \lambda I) \text{ no es inyectivo} \\ &\Leftrightarrow N(T - \lambda I) \neq \{0\} \\ &\Leftrightarrow \text{existe } z \in Z \setminus \{0\} \text{ tal que } (T - \lambda I)z = 0 \\ &\Leftrightarrow \text{existe } z \in Z \setminus \{0\} \text{ tal que } Tz = \lambda z \\ &\Leftrightarrow \lambda \text{ es un autovalor.} \\ \sigma_p(T) &= \left\{ \lambda \in \mathbb{C} / \lambda \text{ es un autovalor de } T \right\} \end{aligned}$$

Definición 1.2.2. Dados Z_1 y Z_2 espacios de Hilbert, $T : D(T) \rightarrow Z_2$ un operador lineal con dominio $D(T) \subset Z_1$. Entonces T es llamado un operador lineal cerrado si su grafo

$$G(T) = \left\{ (x, y) / x \in D(T), y = T(x) \right\}$$

es cerrado en $Z_1 \times Z_2$.

Teorema 1.2.1. ([18]) Dado $T : D(T) \rightarrow Z_2$ un operador lineal, donde $D(T) \subset Z_1$ y Z_1, Z_2 son espacios de Hilbert. Entonces T es cerrado si y sólo si tiene la siguiente propiedad: Si $x_n \rightarrow x$, donde $x_n \in D(T)$, y $Tx_n \rightarrow y$, entonces $x \in D(T)$ y $Tx = y$.

Demostración: La cual se puede ver en [18] páginas 293 – 294. □

Ejemplo 1.2.1. Dado $T : D(T) \rightarrow Z$ un operador lineal y \mathcal{G}_T , denota el grafo de T , definido por

$$\mathcal{G}_T = \{(x; Tx) \in Z \oplus Z : x \in D(T)\}$$

Si \mathcal{G}_T es un subespacio lineal cerrado de $Z \oplus Z$, entonces T es un operador lineal cerrado.

Definición 1.2.3. Dados Z_1, Z_2 espacios de Hilbert. Un operador lineal $T : Z_1 \rightarrow Z_2$ es llamado compacto cuando $\overline{T(B)}$, la clausura de $T(B)$, es compacto en Z_2 ; donde $B = \{z \in Z_1 / \|z\| \leq M\}$ con $\|z\| = \sqrt{\langle z, z \rangle}$ para todo $z \in Z_1$.

Definición 1.2.4. Una sucesión de vectores $\{\phi_n, n \geq 1\}$ en un espacio de Hilbert Z forma una base de Riesz para Z si:

1. Preliminares

1.

$$\overline{\text{span}\{\phi_n\}_{n \geq 1}} = Z \quad (1.1)$$

2. Existen constantes positivas m y M tales que para $N \in \mathbb{N}$ arbitrario y escalares arbitrarios α_n , $n = 1, 2, \dots, N$, tales que

$$m \sum_{n=1}^N |\alpha_n|^2 \leq \left\| \sum_{n=1}^N \alpha_n \phi_n \right\|^2 \leq M \sum_{n=1}^N |\alpha_n|^2 \quad (1.2)$$

Por supuesto, se puede definir una base de Riesz para Z que conste de una sucesión ϕ_n que pertenecen a un subconjunto numerable de $\mathbb{Z} = \{n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$; frecuentemente usaremos $\{\phi_n, n \geq 0\}$, $\{\phi_n, n = \pm 1, \pm 2, \dots\}$ y $\{\phi_n, n \in \mathbb{Z}\}$. La teoría para bases de Riesz es independiente de la elección del subconjunto contable de \mathbb{Z} .

De la definición, es obvio que una base ortonormal es una base de Riesz.

En el siguiente lema mostraremos que si $\{\phi_n, n \geq 1\}$ es una base de Riesz entonces cada elemento de Z puede ser representado únicamente como una combinación de los ϕ_n , aún si los ϕ_n no son ortogonales. La sucesión $\{\phi_n, \psi_n\}$ es biortogonal si:

$$\langle \phi_n, \psi_m \rangle = \delta_{mn}. \quad (1.3)$$

donde

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 1, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases}$$

Definición 1.2.5. Sea $\{e_n, n \geq 1\}$ un subconjunto de un espacio de Hilbert Z . Se dice que $\{e_n, n \geq 1\}$ es maximal si

$$\overline{\text{span}\{e_n\}_{n \geq 1}} = Z$$

Lema 1.2.1. ([9]) Suponemos que el operador lineal, cerrado $T : Z \rightarrow Z$, donde Z es un espacio de Hilbert, tiene autovalores simples $\{\lambda_n, n \geq 1\}$ y que sus correspondientes autovectores $\{\phi_n, n \geq 1\}$ forman una base de Riesz para Z , entonces:

1. Si $\{\psi_n, n \geq 1\}$ son todos los autovectores del autoadjunto de T correspondientes a los autovalores $\{\overline{\lambda_n}, n \geq 1\}$, entonces los ψ_n pueden ser los adecuados para que $\{\phi_n, \psi_n\}$ forme una sucesión biortogonal, donde $\overline{\lambda_n}$ es la conjugada compleja de λ_n .
2. Cada $z \in Z$ puede ser representado únicamente por

$$z = \sum_{n=1}^{\infty} \langle z, \psi_n \rangle \phi_n \quad (1.4)$$

y existen constantes $m' > 0$ y $M' > 0$ tales que

$$m' \sum_{n=1}^{\infty} |\langle z, \psi_n \rangle|^2 \leq \|z\|^2 \leq M' \sum_{n=1}^{\infty} |\langle z, \psi_n \rangle|^2 \quad (1.5)$$

3. $\{\psi_n, n \geq 1\}$ forma una base de Riesz para Z .

Demostración:

1.2. Bases de Riesz, Operador Riesz-espectral y C_0 -semigrupo

1. Consideremos

$$\begin{aligned}\lambda_n \langle \phi_n, \psi_m \rangle &= \langle T\phi_n, \psi_m \rangle = \langle \phi_n, T^*\psi_m \rangle \\ &= \langle \phi_n, \overline{\lambda_m} \psi_m \rangle = \lambda_m \langle \phi_n, \psi_m \rangle\end{aligned}$$

asi que si $\lambda_n \neq \lambda_m$, tenemos que $\langle \phi_n, \psi_m \rangle = 0$. Desde que nosotros suponemos que los λ_n son autovalores simples. Obtenemos (1.3) por adecuada ψ_n .

2. Desde que $\{\phi_n\}$ es maximal en Z , tenemos que para cada $z \in Z$, existe una sucesión $z^p = \sum_{n=1}^p \alpha_n \phi_n$ tal que $z^p \rightarrow z$ en Z . Para $j < p$, (1.3) muestra que

$$\alpha_j^p = \langle z^p, \psi_j \rangle \rightarrow \langle z, \psi_j \rangle \text{ cuando } p \rightarrow \infty$$

por la convergencia de z^p y la continuidad del producto interno. Desde que $\{\phi_n\}$ es base de Riesz por (1.2) tenemos que existen $m, M \in \langle 0, \infty \rangle$ tales que:

$$m \sum_{j=1}^p |\langle z^p, \psi_j \rangle|^2 = m \sum_{j=1}^p |\alpha_j^p|^2 \leq \|z^p\|^2 \leq M \sum_{j=1}^p |\langle z^p, \psi_j \rangle|^2 \quad (1.6)$$

mostraremos que $\{\langle z, \psi_j \rangle\}$ es una sucesión cuadrado sumable. Para $N \in \mathbb{N}$, usando la desigualdad triangular en l_2 , tenemos que

$$\begin{aligned}\left[\sum_{j=1}^N |\langle z, \psi_j \rangle|^2 \right]^{1/2} &\leq \left[\sum_{j=1}^N |\langle z, \psi_j \rangle - \langle z^p, \psi_j \rangle|^2 \right]^{1/2} \\ &+ \left[\sum_{j=1}^N |\langle z^p, \psi_j \rangle|^2 \right]^{1/2} \\ &\leq \left[\sum_{j=1}^N |\langle z, \psi_j \rangle - \langle z^p, \psi_j \rangle|^2 \right]^{1/2} + \frac{1}{\sqrt{m}} \|z^p\|\end{aligned}$$

desde que $z^p \rightarrow z$, $\|z^p\|$ es uniformemente acotado en p y para todo N existe p_N tal que el primer término en el lado derecho es más pequeño que cualquier $\epsilon > 0$ dado. Por tanto $\{\langle z, \psi_j \rangle\}$ es una sucesión cuadrado sumable, más aún

$$z = \lim_{p \rightarrow \infty} z^p = \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \langle z^p, \psi_n \rangle \phi_n = \sum_{n=1}^{\infty} \langle z, \psi_n \rangle \phi_n$$

y tomando límite en (1.6) cuando $p \rightarrow \infty$ se obtiene (1.5).

3. • Primero probaremos que $\{\psi_n\}$ es maximal.

La sucesión $\{\psi_n\}$ es maximal si y sólo si $\langle z, \psi_n \rangle = 0$ para todo n implica $z = 0$ (Capítulo 6 de [25], ejercicio 7 página 434 – 435). Pero por la parte 2 ya tenemos que $\{\langle z, \psi_n \rangle\} = 0$ implica que $z = 0$.

1. Preliminares

- Tenemos que probar una desigualdad similar a (1.2). Desde $\sum_{n=1}^N \alpha_n \psi_n$ es un elemento de Z , la siguiente desigualdad se mantiene:

$$\left\| \sum_{n=1}^N \alpha_n \psi_n \right\| = \sup_{y \in Z \setminus \{0\}} \frac{\left| \left\langle \sum_{n=1}^N \alpha_n \psi_n, y \right\rangle \right|}{\|y\|} = \sup_{y \in Z \setminus \{0\}} \frac{\left| \sum_{n=1}^N \alpha_n \langle \psi_n, y \rangle \right|}{\|y\|}$$

por tanto

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n=1}^N \alpha_n \psi_n \right\|^2 &= \sup_{y \in Z \setminus \{0\}} \left(\frac{\left| \left\langle \sum_{n=1}^N \alpha_n \psi_n, y \right\rangle \right|}{\|y\|} \right)^2 \\ &\leq \sup_{y \in Z \setminus \{0\}} \left(\frac{\sum_{n=1}^N |\alpha_n|^2 \sum_{n=1}^N |\langle \psi_n, y \rangle|^2}{\|y\|^2} \right) \end{aligned}$$

usando (1.5)

$$\leq \sup_{y \in Z \setminus \{0\}} \left(\frac{\sum_{n=1}^N |\alpha_n|^2 \frac{1}{m} \|y\|^2}{\|y\|^2} \right) = \frac{1}{m} \sum_{n=1}^N |\alpha_n|^2$$

en el otro lado, si escogemos $y_0 = \frac{\sum_{n=1}^N \alpha_n \psi_n}{\sqrt{\sum_{n=1}^N |\alpha_n|^2}}$, entonces

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n=1}^N \alpha_n \psi_n \right\|^2 &= \sup_{y \in Z \setminus \{0\}} \left(\frac{\left| \sum_{n=1}^N \alpha_n \langle \psi_n, y \rangle \right|}{\|y\|} \right)^2 \\ &\geq \left(\frac{\left| \sum_{n=1}^N \alpha_n \langle \psi_n, y_0 \rangle \right|}{\|y_0\|} \right)^2 = \frac{\sum_{n=1}^N |\alpha_n|^2}{\|y_0\|^2} \\ &\geq \frac{1}{M} \sum_{n=1}^N |\alpha_n|^2 \end{aligned}$$

haciendo $m' = \frac{1}{M}$ y $M' = \frac{1}{m}$ tenemos

$$m' \sum_{n=1}^N |\alpha_n|^2 \leq \left\| \sum_{n=1}^N \alpha_n \psi_n \right\|^2 \leq M' \sum_{n=1}^N |\alpha_n|^2$$

luego $\{\psi_n, n \geq 1\}$ es una base de Riesz para Z

□

1.2. Bases de Riesz, Operador Riesz-espectral y C_0 -semigrupo

Definición 1.2.6. Suponemos que T es un operador lineal, cerrado en un espacio de Hilbert Z con autovalores simples $\{\lambda_n, n \geq 1\}$ y suponemos que los correspondientes autovectores $\{\phi_n, n \geq 1\}$ forman una base de Riesz para Z . Si la clausura de $\{\lambda_n, n \geq 1\}$ es totalmente desconexo, entonces llamamos a T un operador de Riesz-espectral.

Por totalmente desconexo quiere decir que no hay dos puntos $\lambda, \mu \in \overline{\{\lambda_n, n \geq 1\}}$, que se pueden unir por un segmento comprendido en su totalidad en $\{\lambda_n, n \geq 1\}$.

Teorema 1.2.2. ([9]) Suponemos que T es un operador Riesz-espectral con autovalores simples $\{\lambda_n, n \geq 1\}$ y sus autovectores correspondientes $\{\phi_n, n \geq 1\}$. Dados $\{\psi_n, n \geq 1\}$ los autovectores de T^* , el adjunto de T , tal que $\langle \phi_n, \psi_m \rangle = \delta_{mn}$. Entonces:

1. $R(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} / \inf_{n \geq 1} |\lambda - \lambda_n| > 0\}$ y para $\lambda \in R(T)$, $(\lambda I - T)^{-1}$ es dado por

$$(\lambda I - T)^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda - \lambda_n} \langle \cdot, \psi_n \rangle \phi_n \quad (1.7)$$

2. T tiene la representación

$$Tz = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle z, \psi_n \rangle \phi_n \quad (1.8)$$

para $z \in D(T)$, y

$$D(T) = \{z \in Z / \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2 |\langle z, \psi_n \rangle|^2 < \infty\}$$

3. T^* es también un operador de Riesz-espectral con autovalores simples $\{\overline{\lambda_n}, n \geq 1\}$ y autovectores correspondientes $\{\psi_n, n \geq 1\}$, donde $\overline{\lambda_n}$ es el complejo conjugado de λ_n .

Demostración: Ver [9] página 42. □

Definición 1.2.7. Un semigrupo fuertemente continuo es una función valorada por el operador $T(t)$ de \mathbb{R}^+ a $L(Z)$ que satisface las siguientes propiedades:

$$T(t+s) = T(t)T(s), \text{ para } t, s \geq 0, \quad (1.9)$$

$$T(0) = I, \quad (1.10)$$

$$\|T(t)z_0 - z_0\| \rightarrow 0 \text{ cuando } t \rightarrow 0^+, \forall z_0 \in Z. \quad (1.11)$$

Usaremos la abreviación estándar C_0 -semigrupo para un semigrupo fuertemente continuo.

Ejemplo 1.2.2. Dados $A \in L(Z)$ y definamos $T(t)$ por

$$T(t) = e^{At} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(At)^n}{n!} \quad (1.12)$$

tenemos que mostrar que la suma converge. Consideremos la suma finita, tenemos para $M > N$

$$\left\| \sum_{n=0}^M \frac{(At)^n}{n!} - \sum_{n=0}^N \frac{(At)^n}{n!} \right\| = \left\| \sum_{n=N+1}^M \frac{(At)^n}{n!} \right\| \leq \sum_{n=N+1}^M \left\| \frac{(At)^n}{n!} \right\| \leq \sum_{n=N+1}^M \frac{\|A\|^n t^n}{n!}$$

desde que la última serie es una serie de Cauchy, se concluye que el lado derecho de (1.12) converge.

1. Preliminares

• $T(0) = e^{A0} = I$, entonces $T(0) = I$ luego se cumple (1.10).

$$\bullet \quad \|e^{At}z_0 - z_0\| = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(At)^n}{n!} z_0 \right\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|A\|^n t^n}{n!} \|z_0\| = [e^{\|A\|t} - 1] \|z_0\|$$

luego cuando $t \rightarrow 0^+$, $[e^{\|A\|t} - 1] \|z_0\| \rightarrow 0$, luego $\|e^{At}z_0 - z_0\| \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow 0^+$ y para todo $z_0 \in Z$. La continuidad de $e^{\|A\|t}$ implica que (1.11) se cumpla.

•

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n (t+s)^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} t^k s^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{A^k t^k}{k!} \frac{A^{n-k} s^{n-k}}{(n-k)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!} \frac{A^{n-k} s^{n-k}}{(n-k)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{A^l s^l}{l!} \end{aligned}$$

así que

$$\begin{aligned} e^{A(t+s)} &= e^{At} e^{As} \\ T(t+s) &= T(t)T(s) \end{aligned}$$

(1.9) se cumple y $T(t) = e^{At}$ es C_0 -semigrupo, en efecto, es uniformemente continua.

Teorema 1.2.3. ([9]) Un semigrupo fuertemente continuo en un espacio de Hilbert Z , $T(t)$ tiene las siguientes propiedades:

a) $\|T(t)\|$ es acotado en cada subintervalo finito de $[0, \infty)$.

b) $T(t)$ es fuertemente continua para todo $t \in [0, \infty)$.

c) Para todo $z \in Z$ tenemos que $\frac{1}{t} \int_0^t T(s)z ds \rightarrow z$ cuando $t \rightarrow 0^+$.

d) Si $w_0 = \inf_{t>0} \left(\frac{1}{t} \log \|T(t)\| \right)$, entonces $w_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{t} \log \|T(t)\| \right) < \infty$.

e) Para todo $w > w_0$, existe una constante M_w tal que $\forall t \geq 0$, $\|T(t)\| \leq M_w e^{wt}$.

Demostración: Ver [9] página 18. □

Definición 1.2.8. El generador infinitesimal A de un C_0 -semigrupo en un espacio de Hilbert Z es definido por:

$$Az = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} (T(t) - I)z$$

siempre que el límite exista; el dominio de A , $D(A)$, siendo el conjunto de elementos de Z para los cuales el límite existe.

1.2. Bases de Riesz, Operador Riesz-espectral y C_0 -semigrupo

Ejemplo 1.2.2. Consideremos el C_0 -semigrupo e^{At} del ejemplo 1.2.1 donde $A \in L(Z)$. Tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} \|e^{At}z - z - Atz\| &= \frac{1}{t} \left\| \sum_{n=2}^{\infty} \frac{A^n t^n}{n!} z \right\| \leq \frac{1}{t} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\|A^n\| t^n}{n!} \|z\| \leq \frac{1}{t} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\|A\|^n t^n}{n!} \|z\| \\ &= \left[\frac{e^{\|A\|t} - 1}{t} - \|A\| \right] \|z\| \\ \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{e^{\|A\|t} - 1}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \|A\| e^{\|A\|t} = \|A\| \\ \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} \|e^{At}z - z - Atz\| &= 0 \end{aligned}$$

entonces

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} (e^{At}z - z) = Az$$

por lo tanto el generador infinitesimal del C_0 -semigrupo e^{At} es A .

Teorema 1.2.4. ([9]) Dado $T(t)$ un semigrupo fuertemente continuo en un espacio de Hilbert Z con generador infinitesimal A . Entonces se espera los siguientes resultados:

- Para $z_0 \in D(A)$, se tiene $T(t)z_0 \in D(A)$ para todo $t \geq 0$.
- $\frac{d}{dt}(T(t)z_0) = AT(t)z_0 = T(t)Az_0$, para $z_0 \in D(A)$ y para todo $t \geq 0$.
- $\frac{d^n}{dt^n}(T(t)z_0) = A^n T(t)z_0 = T(t)A^n z_0$, para $z_0 \in D(A)$ y para todo $t \geq 0$.
- $T(t)z_0 - z_0 = \int_0^t T(s)Az_0 ds$, para $z_0 \in D(A)$.
- $\int_0^t T(s)z ds \in D(A)$ y $A \int_0^t T(s)z ds = T(t)z - z$, para todo $z \in Z$ y $D(A)$ es denso en Z .
- A es un operador lineal cerrado.
- $\bigcap_{n=1}^{\infty} D(A^n)$ es denso en Z .

Demostración: Ver [9] página 21. □

Teorema 1.2.5. (Hille-Yosida) ([7]) Una condición necesaria y suficiente para que un operador cerrado A con dominio denso en un espacio de Hilbert Z pueda generar un semigrupo fuertemente continuo es que existan reales M, w tal que para todo real $\lambda > w$, $\lambda \in \rho(A)$ y

$$\|(\lambda I - A)^{-r}\| \leq \frac{M}{(\lambda - w)^r}, \quad r = 1, 2, \dots$$

en este caso

$$\|T(t)\| \leq M e^{wt}$$

Demostración: Ver [7] página 17. □

1. Preliminares

Definición 1.2.9. Sean E un espacio vectorial, F_1 y F_2 subespacios de E . Cuando F_1, F_2 tienen en común sólo el elemento 0 , se escribe $F_1 \oplus F_2$ en vez de $F_1 + F_2$ y se dice $F = F_1 \oplus F_2$ es la suma directa de F_1 y F_2 .

Hipótesis 1.2.1.

1. Z es un espacio de Hilbert complejo separable.
2. $A : D(A) \subset Z \rightarrow Z$ es el generador infinitesimal del C_0 -semigrupo $T(t)$.
3. $Q_1 = Q_1^* \in L(Z)$.
4. $Q_2 = Q_2^* \in L(Z)$.
5. H denota el Hamiltoniano definido por

$$H = \begin{pmatrix} A & -Q_1 \\ -Q_2 & -A^* \end{pmatrix} \quad (1.13)$$

en el espacio de Hilbert $Z \oplus Z$ con dominio $D(H) = D(A) \oplus D(A^*)$.

Hipótesis 1.2.2. El Hamiltoniano H dado por la ecuación (1.13) es un operador Riesz-espectral con autovalores $\{\lambda_n, n \in \mathbb{Z}_0\}$ y autovectores $\left\{ \psi_n = \begin{pmatrix} \eta_n \\ \xi_n \end{pmatrix}, n \in \mathbb{Z}_0 \right\}$.

Desde que el Hamiltoniano H , dado por la ecuación (1.13), es un operador Riesz-espectral, hablaremos acerca de un sistema Riesz-espectral.

Necesitaremos la Ecuación Algebraica de Riccati(EAR). Por definición, $X \in L(Z)$ es una solución de la EAR si para todo $z_1, z_2 \in D(A)$ se cumple

$$\langle Az_1, Xz_2 \rangle + \langle X^*z_1, Az_2 \rangle + \langle Q_2z_1, z_2 \rangle - \langle Q_1X^*z_1, Xz_2 \rangle = 0 \quad (1.14)$$

Definición 1.2.10. Un C_0 -semigrupo, $T(t)$, en un espacio de Hilbert Z , es exponencialmente estable si existen constantes positivas M y α tales que

$$\|T(t)\| \leq Me^{-\alpha t}, \quad t \geq 0 \quad (1.15)$$

Definición 1.2.11. Suponemos que A genera al C_0 -semigrupo $T(t)$ en el espacio de Hilbert Z y $B \in L(U, Z)$ donde U es un espacio de Hilbert. Si existe $F \in L(Z, U)$ tal que $A + BF$ genera un C_0 -semigrupo exponencialmente estable, $T_F(t)$, entonces decimos que (A, B) es exponencialmente estable.

Definición 1.2.12. Un subespacio V se dice invariante bajo el operador $T : Z \rightarrow Z$ o T -invariante, si $TV \subset V$. Para un subespacio T -invariante V , $T|_V$ denota la restricción de T a V .

1.3. Resultados acerca de bases de Riesz

Por la hipótesis 1.2.2, tenemos que el Hamiltoniano H , dado por (1.13) es un operador Riesz-espectral. Ésto implica que los correspondientes autovectores $\left\{ \Phi_n = \begin{pmatrix} \eta_n \\ \xi_n \end{pmatrix}, n \in \mathbb{Z}_0 \right\}$ forman una base de Riesz para el espacio de Hilbert $Z \oplus Z$. En esta sección, veremos la existencia de un conjunto índice $J \subset \mathbb{Z}_0$, en general, tal que $\{\eta_n, n \in J\}$ es una base de Riesz para Z . Para este estudio no necesitaremos la forma especial del Hamiltoniano o el hecho de que $\left\{ \Phi_n = \begin{pmatrix} \eta_n \\ \xi_n \end{pmatrix}, n \in \mathbb{Z}_0 \right\}$ son los correspondientes autovectores. Así que tomaremos una sucesión arbitraria de vectores en el espacio de Hilbert $Z \oplus Z$, que forman una base de Riesz para $Z \oplus Z$. Probaremos que si $\left\{ \Phi_n = \begin{pmatrix} \eta_n \\ \xi_n \end{pmatrix}, n \in \mathbb{Z}_0 \right\}$ forman una base de Riesz para $Z \oplus Z$, entonces existe un subconjunto $J \subset \mathbb{Z}_0$ tal que $\{\eta_n, n \in J\}$ es maximal en Z y cada subconjunto finito es linealmente independiente. Pero en general esta necesidad no implica que $\{\eta_n, n \in J\}$ forma una base de Riesz para Z .

Lema 1.3.1. ([20]) Dada una sucesión de vectores $\left\{ \Phi_n = \begin{pmatrix} \eta_n \\ \xi_n \end{pmatrix}, n \in \mathbb{Z}_0 \right\}$ en un espacio de Hilbert $Z \oplus Z$. Si $\overline{\text{span}\{\Phi_n\}_{n \in \mathbb{Z}_0}} = Z \oplus Z$, entonces $\overline{\text{span}\{\eta_n\}_{n \in \mathbb{Z}_0}} = Z$.

Demostración: Supongamos que $\overline{\text{span}\{\eta_n\}_{n \in \mathbb{Z}_0}} \neq Z$. Entonces existirá un $\nu \in Z$ no nulo tal que

$$\langle \nu, \eta_n \rangle = 0, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{Z}_0$$

esto implica que

$$\left\langle \begin{pmatrix} \nu \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \eta_n \\ \xi_n \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

ésto es una contradicción con $\overline{\text{span}\{\Phi_n\}_{n \in \mathbb{Z}_0}} = Z \oplus Z$, por lo tanto

$$\overline{\text{span}\{\eta_n\}_{n \in \mathbb{Z}_0}} = Z$$

□

Lema 1.3.2. ([20]) Dada una sucesión de vectores $\left\{ \Phi_n = \begin{pmatrix} \eta_n \\ \xi_n \end{pmatrix}, n \in \mathbb{Z}_0 \right\}$ en un espacio de Hilbert $Z \oplus Z$. Si $\overline{\text{span}\{\Phi_n\}_{n \in \mathbb{Z}_0}} = Z \oplus Z$, entonces existe un conjunto índice $J \subset \mathbb{Z}_0$ tal que $\overline{\text{span}\{\eta_n\}_{n \in J}} = Z$, y cada combinación finita de los η_n 's es linealmente independiente.

Demostración: La prueba se sigue del lema de Zorn's, ver [20]

□

Teorema 1.3.1. ([20]) Dada una base de Riesz $\left\{ \Phi_n = \begin{pmatrix} \eta_n \\ \xi_n \end{pmatrix}, n \in \mathbb{Z}_0 \right\}$ para $Z \oplus Z$. Si existe un conjunto índice $J \subset \mathbb{Z}_0$ tal que

1. $\overline{\text{span}\{\eta_n\}_{n \in J}} = Z$ y

1. Preliminares

2. Existe un X acotado satisfaciendo $X\eta_n = \xi_n$, para $n \in J$

entonces, $\{\eta_n/n \in J\}$ es base de Riesz para Z .

Demostración: Notamos que el conjunto índice $J \subset \mathbb{Z}_0$ es isomórfico a \mathbb{N} . Por tanto, sin pérdida de generalidad, asumiremos que $J = \mathbb{N}$, y que

$$\overline{\text{span}\{\eta_n\}_{n \in \mathbb{N}}} = Z$$

defino $\Phi_0 = 0$. Desde que $\{\Phi_n/n \in \mathbb{Z}_0\}$ es una base de Riesz para $Z \oplus Z$, podemos escoger constantes positivas m y M tal que para $N \in \mathbb{N}$ arbitrario y escalares α_n arbitrarios ($n = -N, -N+1, \dots, N$),

$$m \sum_{n=-N}^N |\alpha_n|^2 \leq \left\| \sum_{n=-N}^N \alpha_n \eta_n \right\|^2 + \left\| \sum_{n=-N}^N \alpha_n \xi_n \right\|^2 \leq M \sum_{n=-N}^N |\alpha_n|^2 \quad (1.16)$$

ésto implica que para arbitrario $N \in \mathbb{N}$ y escalares α_n arbitrarios ($n = 1, 2, \dots, N$) existe una constante positiva $M' (= M)$ tal que

$$\left\| \sum_{n=1}^N \alpha_n \eta_n \right\|^2 \leq M' \sum_{n=1}^N |\alpha_n|^2$$

se sigue de (1.16) que para arbitrario $N \in \mathbb{N}$ y escalares α_n arbitrarios ($n = 1, 2, \dots, N$)

$$\begin{aligned} m \sum_{n=1}^N |\alpha_n|^2 &\leq \left\| \sum_{n=1}^N \alpha_n \eta_n \right\|^2 + \left\| \sum_{n=1}^N \alpha_n \xi_n \right\|^2 = \left\| \sum_{n=1}^N \alpha_n \eta_n \right\|^2 + \|X \left(\sum_{n=1}^N \alpha_n \eta_n \right)\|^2 \\ &\text{desde } X\eta_n = \xi_n \\ &\leq (1 + \|X\|^2) \left(\left\| \sum_{n=1}^N \alpha_n \eta_n \right\|^2 \right) \\ &\leq (1 + K^2) \left(\left\| \sum_{n=1}^N \alpha_n \eta_n \right\|^2 \right), \text{ desde } X \text{ es acotado} \end{aligned}$$

Así existe una constante positiva $m' = \frac{m}{1 + K^2}$ tal que para arbitrario $N \in \mathbb{N}$ y escalares α_n arbitrarios ($n = 1, 2, \dots, N$) se tiene

$$m' \sum_{n=1}^N |\alpha_n|^2 \leq \left\| \sum_{n=1}^N \alpha_n \eta_n \right\|^2$$

por lo tanto $\{\eta_n/n \in \mathbb{N}\}$ es una base de Riesz para Z . □

1.4. ¿Dónde está un sistema de Riesz-espectral?

Seguiremos con nuestra hipótesis de que el Hamiltoniano H , definido por (1.13), será un operador Riesz-espectral i.e nuestro sistema será Riesz-espectral. En esta sección, daremos condiciones suficientes en el generador infinitesimal A para que el Hamiltoniano H sea un operador Riesz-espectral.

1.4. ¿Dónde está un sistema de Riesz-espectral?

Definición 1.4.1. Un operador lineal $T : Z \rightarrow Z$ es discreto si existe un número λ en su conjunto resolvente $R(T)$ para que el operador resolvente $R(\lambda, T) = (\lambda I - T)^{-1}$ sea compacto.

Lema 1.4.1. ([10]) Si un operador lineal $T : Z \rightarrow Z$ es discreto, entonces:

1. El operador resolvente $R(\lambda, T)$ es compacto para cada $\lambda \in R(T)$.
2. El espectro de T , $\sigma(T)$, consiste de sólo autovalores aislados con multiplicidad finita.

Demostración: Ver [10] página 2292. □

Dado el operador discreto $T : Z \rightarrow Z$ que tiene autovalores $\{\lambda_n, n \geq 1\}$. La proyección espectral $E(\lambda_n)$ definida por

$$E(\lambda_n)z = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Upsilon} (\lambda I - T)^{-1} z d\lambda \quad (1.17)$$

donde Υ es una curva simple cerrada que rodea sólo los autovalores λ_n . Ésto es posible, desde que todos los autovalores λ_n son aislados.

Definición 1.4.2. Un operador discreto $T : Z \rightarrow Z$ es espectral si la proyección espectral $E(\lambda_n)$ definida por (1.17) satisface:

1. La familia de suma de colecciones finitas de proyecciones $E(\lambda_n)$ es uniformemente acotada.
2. $0 \neq z \in Z$ satisface todas las ecuaciones $E(\lambda_n)z = 0, \lambda_n \in \sigma(T)$.

Observación 1.4.1. Suponemos que T es un operador Riesz-espectral discreto en el espacio de Hilbert Z con autovalores simples $\{\lambda_n, n \geq 1\}$ y autovectores correspondientes $\{\phi_n, n \geq 1\}$. Dados los autovectores $\{\psi_n, n \geq 1\}$ del adjunto de T tal que $\langle \phi_n, \psi_m \rangle = \delta_{mn}$. Usando el teorema 1.2.2 y el teorema de Cauchy se sigue que

$$E(\lambda_n)z = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Upsilon} (\lambda I - T)^{-1} z d\lambda = \langle z, \psi_n \rangle \phi_n$$

así tenemos para arbitrario $N \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n=1}^N E(\lambda_n)z \right\|^2 &= \left\| \sum_{n=1}^N \langle z, \psi_n \rangle \phi_n \right\|^2 \leq M \sum_{n=1}^N |\langle z, \psi_n \rangle|^2 \text{ desde que } \phi_n \text{ es base de Riesz} \\ &\leq M \sum_{n=1}^{\infty} |\langle z, \psi_n \rangle|^2 \\ &\leq \frac{M}{m'} \|z\|^2, \text{ por el lema 1.2.1} \end{aligned}$$

donde m' y M son constantes positivas. Ésto nos da que la familia de sumas de colecciones finitas de proyecciones $E(\lambda_n)$ es uniformemente acotada. Así un operador de Riesz-espectral discreto es un operador espectral discreto.

Lema 1.4.2. ([20]) Suponemos que T es un operador espectral discreto en el espacio de Hilbert Z con autovalores simples $\{\lambda_n, n \geq 1\}$ y correspondientes autovectores normalizados $\{\phi_n, n \geq 1\}$. Dados los autovectores $\{\psi_n, n \geq 1\}$ del adjunto de T correspondientes a los autovalores $\{\overline{\lambda_n}, n \geq 1\}$. Para adecuados ψ_n tal que $\langle \phi_n, \psi_m \rangle = \delta_{mn}$ (ver lema 1.2.1). Entonces:

1. Preliminares

1. $\sum_{n=1}^{\infty} E(\lambda_n) = I$, donde la convergencia es en la topología fuerte.

2.

$$E(\lambda_n)z = \langle z, \psi_n \rangle \phi_n \quad (1.18)$$

3. $\{\psi_n, n \geq 1\}$ forma una base de Riesz para Z .

Demostración: Ver [20] □

Corolario 1.4.1. ([20]) Suponemos que T es un operador en un espacio de Hilbert con autovalores simples $\{\lambda_n, n \geq 1\}$ y correspondientes autovectores normalizados $\{\phi_n, n \geq 1\}$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

1. T es un operador espectral discreto.

2. T es un operador Riesz-espectral discreto.

Demostración: Usando lema 1.4.1, observación 1.4.1 y lema 1.4.2. □

El siguiente teorema da condición en el operador infinitesimal A tal que el Hamiltoniano H es un operador Riesz-espectral.

Teorema 1.4.1. ([20]) Dados A un generador infinitesimal del C_0 -semigrupo $T(t)$ en el espacio de Hilbert Z y $\{\mu_n, n \geq 1\}$ una enumeración de $\sigma_p(A) \cup -\overline{\sigma_p(A)}$, donde la barra denota la conjugada compleja. Defino d_n como la distancia de μ_n a $\{\sigma_p(A) \cup -\overline{\sigma_p(A)}\} - \{\mu_n\}$. Si

1. A es un operador Riesz-espectral discreto.

2. Para todo $\mu_n \in \sigma_p(A)$, excepto un número finito de n , $-\overline{\mu_n} \notin \sigma_p(A)$.

3. $\sum_{n=-\infty, n \neq 0}^{\infty} \frac{1}{d_n^2} < \infty$, donde la suma es tomada sobre estos n para que $d_n \neq 0$.

4. Todos los autovalores del Hamiltoniano $H = \begin{pmatrix} A & -Q_1 \\ -Q_2 & -A^* \end{pmatrix}$ son simples, donde $Q_1 = Q_1^* \in L(Z)$ y $Q_2 = Q_2^* \in L(Z)$.

Entonces:

1a) $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -A^* \end{pmatrix}$ es un operador espectral discreto.

1b) $H = \begin{pmatrix} A & -Q_1 \\ -Q_2 & -A^* \end{pmatrix}$ es un operador Riesz-espectral (discreto), cuyos autovectores normalizados forman una base de Riesz.

Demostración:

1.4. ¿Dónde está un sistema de Riesz-espectral?

1a) Por la observación 1.4.1 tenemos que A es un operador espectral discreto. Usando el lema 5.4 de [10] página 2354, obtenemos que $-A^*$ también es un operador espectral discreto. Para mostrar que $A_e = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -A^* \end{pmatrix}$ es un operador espectral discreto, primero probaremos que este operador es discreto. Desde que A y $-A^*$ son discretos,

$$\sigma(A_e) = \sigma(A) \cup \sigma(-A^*) = \sigma_p(A) \cup \overline{-\sigma_p(A)} \quad (1.19)$$

donde la barra denota la conjugada compleja.

Desde que $\sigma_p(A) \cup \overline{-\sigma_p(A)}$ es contable, esto implica que $R(A_e) \neq 0$. Para $\lambda \in R(A_e)$ se ve que

$$(\lambda I - A_e)^{-1} = \begin{pmatrix} (\lambda I - A)^{-1} & 0 \\ 0 & (\lambda I + A^*)^{-1} \end{pmatrix} \quad (1.20)$$

implica que $R(A_e) = R(A) \cap R(-A^*)$, y que A_e es un operador discreto. Por (1.19), $\sigma_p(A_e)$ es enumerado como $\{\mu_n/n \in \mathbb{Z}_0\}$. Así para $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \in Z \oplus Z$ la proyección espectral correspondiente al autovalor μ_n del operador A_e , se convierte

$$\begin{aligned} E(\mu_n)z &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Upsilon} (\lambda I - A_e)^{-1} z d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Upsilon} \begin{pmatrix} (\lambda I - A)^{-1} z_1 \\ (\lambda I + A^*)^{-1} z_2 \end{pmatrix} d\lambda \text{ por (1.20)} \\ &= \begin{pmatrix} E_A(\mu_n)z_1 \\ E_{-A^*}(\mu_n)z_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Notamos que si μ_n no es un autovalor de A , entonces $(\lambda I - A)^{-1}$ es una función analítica dentro y en el contorno de Υ . Luego, por el teorema de Cauchy,

$$E_A(\mu_n)z_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Upsilon} (\lambda I - A)^{-1} z_1 d\lambda = 0 \text{ (un argumento análogo se mantiene para } -A^* \text{).}$$

Por hipótesis 1.2.2 y (1.19) tenemos para todo $\mu_n \in \sigma_p(A)$, excepto un número finito de n , $\mu_n \notin \sigma_p(-A^*)$. Así, excepto para algunos finitos n , una de los componentes de

$\begin{pmatrix} E_A(\mu_n)z_1 \\ E_{-A^*}(\mu_n)z_2 \end{pmatrix}$ es cero. Usando la fórmula de arriba para $E(\mu_n)z$ y el factor que A y $-A^*$ son operadores espectrales discretos, se sigue de la definición 1.4.2 que A_e también es un operador espectral.

1b) Notar que el Hamiltoniano H es igual a la perturbación lineal acotada $\begin{pmatrix} 0 & -Q_1 \\ -Q_2 & 0 \end{pmatrix}$

del operador nominal $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -A^* \end{pmatrix}$. Por hipótesis 3 podemos aplicar el teorema 2.7 y el corolario 2.9 (páginas 2296 y 2303 respectivamente de [10]). Ésto da que el Hamiltoniano H es un operador espectral discreto. Desde que todos los autovalores de H son simples, tenemos por el corolario 1.4.1 que H es un operador Riesz-espectral (discreto) y que sus autovalores normalizados forman una base de Riesz.

□

1. Preliminares

Teorema 1.4.2. ([20]) *Dados A el generador infinitesimal del C_0 -semigrupo $T(t)$ en el espacio de Hilbert Z y $\{\mu_n, n \in \mathbb{Z}_0\}$ la enumeración de $\sigma_p(A) \cup -\overline{\sigma_p(A)}$, donde la barra denota la conjugada compleja. Asumimos que $\begin{pmatrix} 0 & -Q_1 \\ -Q_2 & 0 \end{pmatrix}$ tiene rango m y es escrito como*

$$\begin{pmatrix} 0 & -Q_1 \\ -Q_2 & 0 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^m \langle \cdot, g_i \rangle_{Z \oplus Z} b_i$$

donde $g_i, b_i \in Z \oplus Z$ para $i = 1, 2, \dots, m$. Si

1. Si A es un operador Riesz-espectral discreto.
2. Para todo $\mu_n \in \sigma_p(A)$, $-\overline{\mu_n} \notin \sigma_p(A)$.
3. Todos los autovalores de

$$\left(\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -A^* \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^k \langle \cdot, g_i \rangle_{Z \oplus Z} b_i \right)$$

son simples para $k = 1, 2, \dots, m$.

4. $\inf_{\forall n \neq j} |\mu_n - \mu_j| = \delta > 0$, con $n, j \neq 0$.
5. $\sup_{-\infty < n < \infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{1}{|\mu_j - \mu_n|^2} = \tau < \infty$, con $n, j \neq 0$.

Entonces el operador $H = \left(\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -A^* \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^m \langle \cdot, g_i \rangle_{Z \oplus Z} b_i \right) = \begin{pmatrix} A & -Q_1 \\ -Q_2 & -A^* \end{pmatrix}$ es un operador Riesz-espectral.

Demostración: Usando teorema 1.4.1 se demuestra de manera análoga. \square

Capítulo 2

Función Signo Matricial

En el presente capítulo extenderemos la función signo en los números complejos (\mathbb{C}) al conjunto de matrices cuadradas complejas ($\mathbb{C}^{n \times n}$), luego se darán métodos para su cálculo, y para matrices complejas de dimensión mayor el método de Schur nos dará la función signo matricial. Por último se verá la función signo matricial para el conjunto de matrices rectangulares.

2.1. Definición y Propiedades de la Función Signo Matricial

Dada la función signo escalar para $z \in \mathbb{C}$ definida por:

$$\operatorname{sgn}(z) = \begin{cases} 1, & \operatorname{Re}(z) > 0 \\ -1, & \operatorname{Re}(z) < 0 \end{cases}$$

Consideremos una matriz $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ tal que no tiene autovalores imaginarios puros, la forma canónica de Jordan de A está dada por

$$A = T \begin{bmatrix} J_- & 0 \\ 0 & J_+ \end{bmatrix} T^{-1}$$

donde $J_- \in \mathbb{C}^{k \times k}$ y $J_+ \in \mathbb{C}^{(n-k) \times (n-k)}$ son los bloques de Jordan y T se obtiene de la descomposición de Jordan de A , definimos:

$$\begin{aligned} \sigma(J_-) &= \left\{ \lambda_j \in \mathbb{C}^- : \det(\lambda_j I_n - A) = 0, j = \overline{1, k}, \operatorname{Re}(\lambda_j) < 0 \right\} \subseteq \sigma(A) \\ \sigma(J_+) &= \left\{ \lambda_j \in \mathbb{C}^+ : \det(\lambda_j I_n - A) = 0, j = \overline{1, k}, \operatorname{Re}(\lambda_j) > 0 \right\} \subseteq \sigma(A) \end{aligned}$$

Donde $\mathbb{C}^+ = \{\lambda_j \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(\lambda_j) > 0\}$ y $\mathbb{C}^- = \{\lambda_j \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(\lambda_j) < 0\}$. Notemos que $\mathbb{C} = \mathbb{C}^+ \uplus \mathbb{C}^- \uplus \{0\}$ (donde \uplus denota la unión disjunta) y $f(\lambda) = \operatorname{sgn}(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces

$$\operatorname{sgn}(A) = T \operatorname{sgn} \left(\begin{bmatrix} J_- & 0 \\ 0 & J_+ \end{bmatrix} \right) T^{-1}$$

luego

$$\operatorname{sgn}(A) = T \operatorname{diag}[\operatorname{sgn}(J_-), \operatorname{sgn}(J_+)] T^{-1} \quad (2.1)$$

2. Función Signo Matricial

donde $J_- = \text{diag}[J_{m_1}(\lambda_1), J_{m_2}(\lambda_2), \dots, J_{m_s}(\lambda_s)]$, con $\lambda_i \in \sigma(J_-)$; $i = 1, 2, \dots, s$ tal que $\sum_{i=1}^s m_i = k$, y

$$J_{m_i}(\lambda_i) = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \lambda_i & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \lambda_i \end{pmatrix} = \lambda_i I + S_{m_i} \in \mathbb{C}^{m_i \times m_i}$$

Donde

$$S_{m_i} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, s.$$

Luego $f(J_{m_i}(\lambda_i)) = \sum_{v=0}^{m_i-1} \frac{1}{v!} f^{(v)}(\lambda_i) S_{m_i}^v$; $i = 1, 2, \dots, s$. Como $f'(z) = 0$, para todo $z \in \mathbb{C}$ entonces, $f^{(n)}(z) = 0$, para todo $n \geq 1$, $z \in \mathbb{C}$. Se sabe $\lambda_i \in \sigma(J_-)$, entonces $f(\lambda_i) = \text{sgn}(\lambda_i) = -1$

$$f(J_{m_i}(\lambda_i)) = \text{sgn}(J_{m_i}) = \frac{1}{0!} f(\lambda_i) I = -I_{m_i \times m_i}, \quad i = 1, 2, \dots, s$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} f(J_-) = \text{sgn}(J_-) &= \text{diag}[\text{sgn}(J_{m_1}(\lambda_1)), \text{sgn}(J_{m_2}(\lambda_2)), \dots, \text{sgn}(J_{m_s}(\lambda_s))] \\ &= \text{diag}[-I_{m_1 \times m_1}, -I_{m_2 \times m_2}, \dots, -I_{m_s \times m_s}] \\ &= -\text{diag}[I_{m_1 \times m_1}, I_{m_2 \times m_2}, \dots, I_{m_s \times m_s}] \\ \text{sgn}(J_-) &= -I_{k \times k} \end{aligned}$$

repetiendo el proceso anterior obtenemos que:

$$\text{sgn}(J_+) = I_{(n-k) \times (n-k)}$$

reemplazando en (2.1) tenemos que

$$\begin{aligned} \text{sgn}(A) &= T \text{diag}[-I_{k \times k}, I_{(n-k) \times (n-k)}] T^{-1} \\ \text{sgn}(A) &= T \begin{bmatrix} -I_{k \times k} & 0 \\ 0 & I_{(n-k) \times (n-k)} \end{bmatrix} T^{-1} \end{aligned}$$

Definición 2.1.1. Si $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, definimos la función signo matricial de A mediante la matriz:

$$\text{sgn}(A) = T \begin{bmatrix} -I_{k \times k} & 0 \\ 0 & I_{(n-k) \times (n-k)} \end{bmatrix} T^{-1} \quad (2.2)$$

donde T es una matriz que se obtiene de la descomposición de Jordan de A , $A = T J T^{-1}$.

2.1. Definición y Propiedades de la Función Signo Matricial

Proposición 2.1.1. Dado $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, si $\sigma(A) \subset \mathbb{C}^-$ entonces, $\text{sgn}(A) = -I_{n \times n}$.

Demostración: $\sigma(A) = \{ \lambda_j \in \mathbb{C}^- : \det(\lambda_j I_n - A) = 0, j = \overline{1, k}, \text{Re}(\lambda_j) < 0 \}$
dados $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s \in \sigma(A)$, la descomposición de Jordan de A es de la forma $A = TJT^{-1}$

$$\text{sgn}(A) = T \text{sgn}(J) T^{-1}$$

$J = \text{diag}[J_{m_1}(\lambda_1), J_{m_2}(\lambda_2), \dots, J_{m_s}(\lambda_s)]$ de lo anterior sabemos que

$$J_{m_i} = \lambda_i I_{m_i \times m_i} + S_{m_i}, \quad \sum_{i=1}^s m_i = n$$

$f(z) = \text{sgn}(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$ entonces, $f^{(n)}(z) = 0$ para todo $n \geq 1$; como $\lambda_i \in \sigma(J) = \sigma(A) \subset \mathbb{C}^-$ entonces, $f(\lambda_i) = -1$ luego,

$$\begin{aligned} f(J_{m_i}(\lambda_i)) &= \text{sgn}(J_{m_i}) = \sum_{v=0}^{m_i-1} \frac{1}{v!} f^{(v)}(\lambda_i) S_{m_i}^v \\ &= \frac{1}{0!} f(\lambda_i) I = -I_{m_i \times m_i} \\ f(J_{m_i}(\lambda_i)) &= \text{sgn}(J_{m_i}) = -I_{m_i \times m_i}, \quad \forall i = 1, 2, \dots, s \end{aligned}$$

De ésto se sigue,

$$\begin{aligned} f(J) = \text{sgn}(J) &= \text{diag}[\text{sgn}(J_{m_1}(\lambda_1)), \text{sgn}(J_{m_2}(\lambda_2)), \dots, \text{sgn}(J_{m_s}(\lambda_s))] \\ &= \text{diag}[-I_{m_1 \times m_1}, -I_{m_2 \times m_2}, \dots, -I_{m_s \times m_s}] \\ &= -\text{diag}[I_{m_1 \times m_1}, I_{m_2 \times m_2}, \dots, I_{m_s \times m_s}] \\ \text{sgn}(J) &= -I_{n \times n}, \text{ entonces} \\ \text{sgn}(A) &= T(-I_{n \times n})T^{-1}, \text{ por lo tanto} \\ \text{sgn}(A) &= -I_{n \times n} \end{aligned}$$

□

Proposición 2.1.2. Dado $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, si $\sigma(A) \subset \mathbb{C}^+$ entonces, $\text{sgn}(A) = I_{n \times n}$.

Demostración: La prueba es análogo a la proposición 2.1.1. □

Proposición 2.1.3. Dado $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, para cualquier matriz $W^{-1}AW$; $W \in \mathbb{C}^{n \times n}$ entonces:

$$\text{sgn}(W^{-1}AW) = W^{-1} \text{sgn}(A)W$$

Demostración: Definamos $B = W^{-1}AW$ y $f(\lambda) = \text{sgn}(\lambda)$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ luego, $f(B) = W^{-1}f(A)W$ como $f(\lambda) = \text{sgn}(\lambda)$

$$\begin{aligned} \text{sgn}(B) &= W^{-1} \text{sgn}(A)W \\ \text{sgn}(W^{-1}AW) &= W^{-1} \text{sgn}(A)W \end{aligned}$$

□

Proposición 2.1.4. Dado $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $A = [A_1, A_2]$ entonces

$$\text{sgn}(A) = \text{diag}[\text{sgn}(A_1), \text{sgn}(A_2)]$$

2. Función Signo Matricial

Demostración: $f(\lambda) = \text{sgn}(\lambda)$ para todo $z \in \mathbb{C}$ entonces,

$$\begin{aligned} f(A) &= \text{diag}[f(A_1), f(A_2)] \\ \therefore \text{sgn}(A) &= \text{diag}[\text{sgn}(A_1), \text{sgn}(A_2)] \end{aligned}$$

□

Proposición 2.1.5. ([11]) Dado $A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ A' & A_2 \end{bmatrix}$ entonces, $\text{sgn}(A) = \begin{bmatrix} \text{sgn}(A_1) & 0 \\ \Gamma & \text{sgn}(A_2) \end{bmatrix}$, donde Γ es alguna matriz (posiblemente cero).

Demostración: Ver [11]

□

Proposición 2.1.6. ([11]) Dada una matriz $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, la función signo matricial $\text{sgn}(A)$ es única e independiente de la multiplicidad algebraica y geométrica de sus autovalores.

Demostración: Ver [11]

□

Teorema 2.1.1. ([14]) Dados $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ la cual no tiene autovalores imaginarios puros y $S = \text{sgn}(A)$ entonces:

1. $S^2 = I$.
2. S es diagonalizable y tiene autovalores ± 1 .
3. $SA = AS$.
4. Si A es real entonces S es real.
5. $\text{sgn}(cA) = \text{sgn}(c)\text{sgn}(A)$.
6. $\text{sgn}(A^*) = (\text{sgn}(A))^*$

Demostración:

1.

$$\begin{aligned} S = \text{sgn}(A) &= T \begin{bmatrix} -I_{k \times k} & 0 \\ 0 & I_{(n-k) \times (n-k)} \end{bmatrix} T^{-1} \\ S^2 = \text{sgn}(A)^2 &= T \begin{bmatrix} -I_{k \times k} & 0 \\ 0 & I_{(n-k) \times (n-k)} \end{bmatrix} T^{-1} T \begin{bmatrix} -I_{k \times k} & 0 \\ 0 & I_{(n-k) \times (n-k)} \end{bmatrix} T^{-1} \\ &= T \begin{bmatrix} -I_{k \times k} & 0 \\ 0 & I_{(n-k) \times (n-k)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -I_{k \times k} & 0 \\ 0 & I_{(n-k) \times (n-k)} \end{bmatrix} T^{-1} \\ &= TIT^{-1} \text{ entonces,} \\ S^2 &= I \end{aligned}$$

2. Como $S = \text{sgn}(A) = T \begin{bmatrix} -I_{k \times k} & 0 \\ 0 & I_{(n-k) \times (n-k)} \end{bmatrix} T^{-1}$, entonces S es semejante a $\begin{bmatrix} -I_{k \times k} & 0 \\ 0 & I_{(n-k) \times (n-k)} \end{bmatrix}$ luego, S es diagonalizable y tiene el mismo polinomio característico por ende los mismos autovalores que $\begin{bmatrix} -I_{k \times k} & 0 \\ 0 & I_{(n-k) \times (n-k)} \end{bmatrix}$ que son 1 y -1.

2.1. Definición y Propiedades de la Función Signo Matricial

3. Sabemos que si $f(z)$ es una función y $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ entonces, existe un polinomio $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ luego $f(A) = p(A)$
 $f(A)A = p(A)A = Ap(A) = Af(A)$, si $f(z) = \text{sgn}(z)$

$$\begin{aligned} f(A)A &= Af(A) \\ \text{sgn}(A)A &= A\text{sgn}(A) \\ SA &= AS \end{aligned}$$

4. Por el teorema 1.0.1 $f(\mathbb{R}^{n \times n} \cap D) \subseteq \mathbb{R}^{n \times n}$, donde $D = \{ A \in \mathbb{C}^{n \times n} : \sigma(A) \subseteq \mathbb{C} \}$ como $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $\sigma(A) \subseteq \mathbb{C}$ luego, $A \in \mathbb{R}^{n \times n} \cap D$. $f(A) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, si $f(A) = \text{sgn}(A)$ entonces, $\text{sgn}(A) \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Por lo tanto, $\text{sgn}(A)$ es real.

Las pruebas de 5 y 6 se hacen fácilmente usando sólo la definición de la Función Signo Matricial. \square

Dada $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ una matriz que no tiene autovalores imaginarios puros, la respectiva descomposición de A , $A = TJT^{-1}$ donde $J = \begin{bmatrix} J_- & 0 \\ 0 & J_+ \end{bmatrix}$

$$J = \begin{bmatrix} J_- & 0 \\ 0 & J_+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -J_- & 0 \\ 0 & J_+ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -I_{k \times k} & 0 \\ 0 & I_{(n-k) \times (n-k)} \end{bmatrix}$$

Luego,

$$\begin{aligned} A &= T \begin{bmatrix} J_- & 0 \\ 0 & J_+ \end{bmatrix} T^{-1} = T \begin{bmatrix} -J_- & 0 \\ 0 & J_+ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -I_{k \times k} & 0 \\ 0 & I_{(n-k) \times (n-k)} \end{bmatrix} T^{-1} \\ &= T \begin{bmatrix} -J_- & 0 \\ 0 & J_+ \end{bmatrix} T^{-1} T \begin{bmatrix} -I_{k \times k} & 0 \\ 0 & I_{(n-k) \times (n-k)} \end{bmatrix} T^{-1} \\ A &= T \begin{bmatrix} -J_- & 0 \\ 0 & J_+ \end{bmatrix} T^{-1} T \begin{bmatrix} -I_{k \times k} & 0 \\ 0 & I_{(n-k) \times (n-k)} \end{bmatrix} T^{-1} \quad (2.3) \end{aligned}$$

Lo anterior nos dice que la matriz A se puede descomponer, $A = NS$, donde $N = T \begin{bmatrix} -J_- & 0 \\ 0 & J_+ \end{bmatrix} T^{-1}$
y

$$S = \text{sgn}(A) = T \begin{bmatrix} -I_{k \times k} & 0 \\ 0 & I_{n-k \times n-k} \end{bmatrix} T^{-1}$$

veamos que por el teorema 2.1.1 ítem 1 que $S^2 = I = S S$ entonces, $S = S^{-1}$ de esto $S^{-1}A = SA = N$ luego $A^2 = N^2$.

Supongamos que A^2 tiene autovalores en $\mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R} : x < 0\}$ entonces, dado $\lambda = a + ib$, con $a \neq 0$ un autovalor de A asociado a v

$$\begin{aligned} Av &= \lambda v \\ A^2 v &= \lambda^2 v \\ &= [(a^2 - b^2) + 2abi]v \text{ entonces, } (a^2 - b^2) + 2abi \in \mathbb{R}^- \end{aligned}$$

luego

$$ab = 0 \text{ entonces, } a = 0 \vee b = 0$$

2. Función Signo Matricial

- si $b = 0$ entonces, $\lambda^2 \in \mathbb{R}^+$ (contradicción).
- si $a = 0$ entonces, $\lambda^2 \in \mathbb{R}^-$ pero $\lambda = ib$ (contradicción).

Por lo tanto, A^2 no tiene autovalores en \mathbb{R}^- .

Vemos que $\sigma(SA) = \sigma(N)$ pertenece al semiplano abierto derecho. Por el teorema 1.0.2 N es la única raíz cuadrada de A^2 tal que sus autovalores pertenecen al semiplano abierto derecho

$$\begin{aligned} N &= (A^2)^{1/2} \\ AN^{-1} &= S \text{ entonces,} \\ A(A^2)^{-1/2} &= S \end{aligned}$$

luego

$$\text{sgn}(A) = A(A^2)^{-1/2} \quad (2.4)$$

Vamos a obtener una fórmula integral para $\text{sgn}(A)$: dado $f(z) = z^{-1/2}$, por la definición 1.0.3 de la función matricial via integral de Cauchy

$$f(A^2) = \frac{1}{2\pi i} \int_H f(z)(zI - A^2)^{-1} dz$$

donde H es el contorno de Hankel que va desde $-\infty + 0i$ luego alrededor de 0 y por último a $-\infty - 0i$; donde H contiene a $\sigma(A)$.

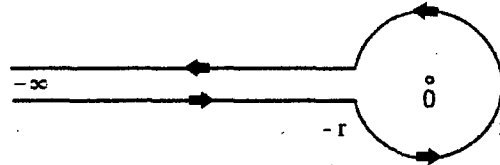


Fig. 2.1 Contorno de Hankel

haciendo $t = iz^{1/2}$, $dt = \frac{1}{2}iz^{-1/2}dz$; luego la integral en el círculo de radio r tiende a 0 cuando $r \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} f(A^2) &= \frac{2}{2\pi i} \int_0^{+\infty} z^{-1/2}(zI - A^2)^{-1} dz = \frac{2}{-\pi} \int_0^{+\infty} (-t^2I - A^2)^{-1} dt \\ (A^2)^{-1/2} &= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} (t^2I + A^2)^{-1} dt \\ A(A^2)^{-1/2} &= \frac{2}{\pi} A \int_0^{+\infty} (t^2I + A^2)^{-1} dt \\ \text{sgn}(A) &= \frac{2}{\pi} A \int_0^{+\infty} (t^2I + A^2)^{-1} dt \quad (2.5) \end{aligned}$$

Teorema 2.1.2. ([14]) Dados $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ y suponemos que AB así como también BA no tienen autovalores en \mathbb{R}^- , entonces

$$\text{sgn} \left(\begin{bmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 & C \\ C^{-1} & 0 \end{bmatrix}$$

donde $C = A(BA)^{-1/2}$

2.1. Definición y Propiedades de la Función Signo Matricial

Demostración:

La matriz $P = \begin{bmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{bmatrix}$ no puede tener cualquier autovalor en el eje imaginario porque si los tuviera entonces $P^2 = \begin{bmatrix} AB & 0 \\ 0 & BA \end{bmatrix}$ podría tener un autovalor en \mathbb{R}^- . Por tanto, $\text{sgn}(P)$ está bien definido y por (2.4)

$$\begin{aligned} \text{sgn}(P) = P(P^2)^{-1/2} &= \begin{bmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} AB & 0 \\ 0 & BA \end{bmatrix}^{-1/2} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (AB)^{-1/2} & 0 \\ 0 & (BA)^{-1/2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & A(BA)^{-1/2} \\ B(AB)^{-1/2} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & C \\ D & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

por el teorema 2.1.1

$$I = (\text{sgn}(P))^2 = \begin{bmatrix} 0 & C \\ D & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} CD & 0 \\ 0 & DC \end{bmatrix}$$

$$CD = I \quad \wedge \quad DC = I$$

$$D = C^{-1}$$

$$\therefore \text{sgn} \left(\begin{bmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 & C \\ C^{-1} & 0 \end{bmatrix}, \text{ donde } C = A(BA)^{-1/2}$$

□

Definición 2.1.2. La descomposición polar de la matriz $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ con A que no posee autovalores en el eje imaginario es de la forma $A = UH$, donde U es matriz unitaria y H matriz hermitiana semidefinida positiva.

Sabemos que $A = SN$, donde $S = \text{sgn}(A)$ y $N = (A^2)^{1/2}$, también que $A = UH$ luego

$$\begin{aligned} A^* &= HU^*, \quad U^*U = UU^* = I \\ A^*A &= H^2 \end{aligned}$$

luego como H es semidefinida positiva entonces todos sus autovalores son no negativos luego H^2 también tiene autovalores no negativos entonces, H^2 no tiene autovalores en \mathbb{R}^- luego, A^*A tampoco tiene autovalores negativos luego por el teorema 1.0.2 se tiene

$$\begin{aligned} H &= (A^*A)^{1/2} \\ U = AH^{-1} &\Rightarrow U = A(A^*A)^{-1/2} \end{aligned}$$

Por el teorema 2.1.2

$$\text{sgn} \left(\begin{bmatrix} 0 & A \\ A^* & 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 & U \\ U^* & 0 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

2. Función Signo Matricial

Por (2.5)

$$\begin{aligned}
 \operatorname{sgn}(A) &= \frac{2}{\pi} A \int_0^{+\infty} (t^2 I + A^2)^{-1} dt \\
 \begin{bmatrix} 0 & U \\ U^* & 0 \end{bmatrix} &= \frac{2}{\pi} \begin{bmatrix} 0 & A \\ A^* & 0 \end{bmatrix} \int_0^{+\infty} \begin{bmatrix} t^2 I + AA^* & 0 \\ 0 & t^2 I + A^* A \end{bmatrix}^{-1} dt \\
 \begin{bmatrix} 0 & U \\ U^* & 0 \end{bmatrix} &= \frac{2}{\pi} \begin{bmatrix} 0 & A \\ A^* & 0 \end{bmatrix} \int_0^{+\infty} \begin{bmatrix} (t^2 I + AA^*)^{-1} & 0 \\ 0 & (t^2 I + A^* A)^{-1} \end{bmatrix} dt \\
 &= \frac{2}{\pi} \begin{bmatrix} 0 & A \\ A^* & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \int_0^{+\infty} (t^2 I + AA^*)^{-1} dt & 0 \\ 0 & \int_0^{+\infty} (t^2 I + A^* A)^{-1} dt \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{\pi} A \int_0^{+\infty} (t^2 I + A^* A)^{-1} dt \\ \frac{2}{\pi} A^* \int_0^{+\infty} (t^2 I + AA^*)^{-1} dt & 0 \end{bmatrix} \\
 U &= \frac{2}{\pi} A \int_0^{+\infty} (t^2 I + A^* A)^{-1} dt \tag{2.7}
 \end{aligned}$$

2.2. Modelo de Sistemas Dinámicos Lineales

Consideremos el sistema dinámico estacionario:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}(t) &= A x(t) + B u(t) \\
 y(t) &= C x(t) \tag{2.8}
 \end{aligned}$$

donde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ y $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$. Asumamos que la matriz A en (2.8) es no singular y no tiene autovalores en el eje imaginario y el sistema (2.8) es controlable y observable, ésto es:

$$\forall \lambda_j \in \sigma(A) : \operatorname{rang}[A - \lambda_j I_n | B] = n, \quad \operatorname{rang} \begin{bmatrix} A - \lambda_j I_n \\ C \end{bmatrix} = n \tag{2.9}$$

Una representación más general del sistema dinámico estacionario lineal tiene la forma:

$$E \dot{x}(t) = A x(t) + B u(t), \quad y = C x(t) \tag{2.10}$$

aquí $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ e $y \in \mathbb{R}^n$; donde la matriz E en (2.10) puede ser ambos rectangular o cuadrada singular ($\det E = 0$).

Si la matriz E es cuadrada, entonces $\sigma(A, E)$ significa el conjunto de autovalores generalizados (espectro generalizado) de la matriz generalizada $A - \lambda E$.

$$\sigma(A, E) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \det(A - \lambda E) = 0 \right\} \tag{2.11}$$

Si E es matriz rectangular ($l \times n$), $l > n$, entonces $\sigma(A, E)$ tiene el siguiente significado:

$$\sigma(A, E) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C}, x \in \mathbb{R}^n : (A - \lambda E)x = 0, x \neq 0 \right\} \tag{2.12}$$

El sistema dinámico (2.10) será asintóticamente estable si y solo sí para (2.12)

$$\sigma(A, E) \subseteq \mathbb{C}^-$$

2.3. Cálculo de la Función Signo Matricial

Para el caso de una matriz cuadrada E , el sistema dinámico (2.10) es considerado completamente estable y observable si y solo si se cumple la siguiente condición:

$$\forall \lambda_j \in \sigma(A, E): \text{rang}[A - \lambda_j E|B] = n, \quad \text{rang} \left[\frac{A - \lambda_j E}{C} \right] = n$$

2.3. Cálculo de la Función Signo Matricial

Comenzaremos con la siguiente definición.

Definición 2.3.1. *Cualquier norma matricial si $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$ para todo $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ y $B \in \mathbb{C}^{n \times p}$ entonces, la norma matricial es llamada consistente.*

Observación 2.3.1. *Para cualquier $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ y $\epsilon > 0$ existe una norma matricial consistente (dependiente de A) tal que $\|A\| \leq \rho(A) + \epsilon$. En particular si $\rho(A) < 1$ existe una norma matricial consistente tal que $\|A\| < 1$, donde $\rho(A)$ denota el espectro de la matriz A .*

Definición 2.3.2. *Dada una norma vectorial en \mathbb{C}^n , la correspondiente norma matricial subordinada es definida por:*

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

Observación 2.3.2. *Dada $\|\cdot\|$ una norma matricial subordinada. Si $\|E\| < 1$ entonces, $I + E$ es no singular y $\|(I + E)^{-1}\| < \frac{1}{1 - \|E\|}$.*

Daremos una interpretación de los principales aspectos del esquema computacional basados en el Método Iterativo de Newton.

Conocemos que el proceso iterativo de Newton

$$s_{k+1} = \frac{1}{2} \left(s_k + \frac{1}{s_k} \right)$$

usado para resolver la ecuación cuadrática $z^2 - 1 = 0$ converge a 1 para toda aproximación inicial s_0 que pertenece a \mathbb{C}^+ y a -1 para toda aproximación inicial s_0 que pertenece a \mathbb{C}^- . En el caso del cálculo de la función signo matricial este proceso tiene la forma:

$$S_{k+1} = \frac{1}{2}(S_k + S_k^{-1}), \quad S_0 = A \tag{2.13}$$

Teorema 2.3.1. *([14]) Si la sucesión $\{S_k\}_{k=0}^{\infty}$ definida como en (2.13) converge, entonces*

$$\text{sgn}(A) = \lim_{k \rightarrow \infty} S_k$$

Demostración: Como A no tiene autovalores imaginarios puros para $\lambda = r e^{i\theta}$ entonces

$$\lambda + \lambda^{-1} = (r + r^{-1})\cos \theta + i(r - r^{-1})\text{sen } \theta$$

y así los autovalores de S_k pertenecen a su semiplano abierto bajo la aplicación (2.13). Así S_k es definida y no singular para todo k .

Más aún $\text{sgn}(S_k) = \text{sgn}(S_0) = S$ y $S_k + S = S_k + \text{sgn}(S_k)$ es también no singular.

2. Función Signo Matricial

Vemos que los S_k son funciones (racionales) de A y así como A commuta con S entonces S_k también lo hará. Luego:

$$\begin{aligned}
 S_{k+1} \pm S &= \frac{1}{2}(S_k + S_k^{-1} \pm 2S) \\
 &= \frac{1}{2}S_k^{-1}(S_k^2 \pm 2S_k S + S^2) = \frac{1}{2}(S_k^2 \pm 2S_k S + S^2)S_k^{-1} \\
 &= \frac{1}{2}S_k^{-1}(S_k \pm S)^2 = \frac{1}{2}(S_k \pm S)^2 S_k^{-1} \\
 (S_{k+1} - S)(S_{k+1} + S)^{-1} &= \frac{1}{2}(S_k - S)^2 S_k^{-1} \left(\frac{1}{2}(S_k + S)^2 S_k^{-1} \right)^{-1} \\
 &= \frac{1}{2}(S_k - S)^2 S_k^{-1} 2S_k (S_k + S)^{-2} \\
 (S_{k+1} - S)(S_{k+1} + S)^{-1} &= [(S_k - S)(S_k + S)^{-1}]^2
 \end{aligned}$$

definamos $G_k = (S_k - S)(S_k + S)^{-1}$, entonces $G_{k+1} = G_k^2 = \dots = G_0^{2^{k+1}}$, luego $G_0 = (S_0 - S)(S_0 + S)^{-1} = (A - S)(A + S)^{-1}$ tiene autovalores $\left(\frac{\lambda - \operatorname{sgn}(\lambda)}{\lambda + \operatorname{sgn}(\lambda)} \right)$, donde $\lambda \in \sigma(A)$, luego éstos pertenecen al círculo unitario desde que λ no es imaginario puro como $\rho(G_0) < 1$ entonces, por la observación 2.3.1 existe una norma matricial consistente tal que $\|G_0\| < 1$

$$\begin{aligned}
 \lim_{k \rightarrow \infty} \|G_0^{2^k}\| &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \|G_0\|^{2^k} = 0 \\
 \lim_{k \rightarrow \infty} \|G_0^{2^k}\| &= \lim_{k \rightarrow \infty} \|G_k\| = 0 \text{ entonces,} \\
 \lim_{k \rightarrow \infty} G_k &= 0
 \end{aligned}$$

como $G_k = (S_k - S)(S_k + S)^{-1}$ entonces, $G_k(S_k + S) = (S_k - S)$

$$\begin{aligned}
 S_k G_k + S G_k &= S_k - S \\
 (I + G_k)S &= (I - G_k)S_k \\
 (I - G_k)^{-1}(I + G_k)S &= S_k
 \end{aligned}$$

como S_k es convergente cuando $k \rightarrow \infty$ se tiene que $G_k \rightarrow 0$ entonces, $S_k \rightarrow S$ cuando $k \rightarrow \infty$ $\therefore \{S_k\}_{k=0}^{\infty}$ converge a $S = \operatorname{sgn}(S_0) = \operatorname{sgn}(A)$. \square

El proceso iterativo de Schultz es una alternativa al proceso (2.13). Está basado en el método de Newton de la calculación de la raíz de la ecuación $z^{-2} - 1 = 0$. En el caso del cálculo de la función signo matricial, el proceso iterativo de Schultz es el siguiente:

$$S_{k+1} = \frac{1}{2}S_k(3I_n - S_k^2), \quad S_0 = A \quad (2.14)$$

El proceso iterativo (2.14) converge seguro sí $\|I - A^2\| < 1$.

Una de las iteraciones basadas en la aproximación de Padé de la función $(1 - z)^{-1/2}$ es la siguiente:

$$S_{k+1} = S_k N_{\mu\nu}(S_k^2) D_{\mu\nu}(S_k^2)^{-1}, \quad S_0 = A \quad (2.15)$$

2.3. Cálculo de la Función Signo Matricial

donde

$$N_{\mu\nu}(\lambda) = \sum_{j=0}^{\mu} \frac{(\mu + \nu - j)}{(\mu + \nu)!(\mu - \nu)!j!} \lambda^j, \quad D_{\mu\nu}(\lambda) = \sum_{j=0}^{\nu} \frac{(\mu + \nu - j)! \nu!}{(\mu + \nu)!(\nu - j)!j!} (-\lambda)^j$$

Para, $\mu = 2p$, $\nu = 2p - 1$, (2.15) nos da el proceso iterativo

$$S_{k+1} = ((I_n + S_k)^{2p} + (I_n - S_k)^{2p})((I_n + S_k)^{2p} - (I_n - S_k)^{2p})^{-1}, \quad S_0 = A \quad (2.16)$$

Teorema 2.3.2. ([17]) Si la matriz $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ no tiene autovalores en el eje imaginario, las iteraciones (2.16) convergen a $\text{sgn}(A)$. Más aún, uno tiene

$$(\text{sgn}(A) - S_k)(\text{sgn}(A) + S_k)^{-1} = ((\text{sgn}(A) - A)(\text{sgn}(A) + A))^{(2p)^k}$$

que, en el caso que es diagonalizable $A = TJT^{-1}$, nos da

$$\|(\text{sgn}(A) - S_k)(\text{sgn}(A) + S_k)^{-1}\| \leq \|T\| \|T^{-1}\| \left(\max_{\lambda \in \sigma(A)} \frac{\text{sgn}(\lambda) - \lambda}{\text{sgn}(\lambda) + \lambda} \right)^{2p^k}$$

Demostración: Ver [17].

□

2. Función Signo Matricial

2.3.1. Método de Schur

Dado $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ tiene la descomposición de Schur $A = QTQ^*$, donde Q es unitaria y T es triangular superior. Entonces $\text{sgn}(A) = Q\text{sgn}(T)Q^*$ (por la proposición 2.1.3).

El problema se reduce a calcular $U = \text{sgn}(T)$, y claramente U es triangular superior con $u_{ii} = \text{sgn}(t_{ii}) = \pm 1$ para todo i . Se determinará u_{ij} de la ecuación $U^2 = I$ cuando sea posible (es decir, cuando $u_{ii} + u_{jj} \neq 0$), y de $TU = UT$ de lo contrario (en cuyo caso $t_{ii} \neq t_{jj}$), empleando el algoritmo de recurrencia de Parlett (ver [14], página 86).

A continuación daremos un algoritmo con su implementación en Matlab para hallar la función signo matricial.

Algoritmo 1 Método de Schur para hallar la Función Signo Matricial

Entrada: $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ que no tenga autovalores imaginarios puros .

Salida: La Función Signo Matricial de A , $S = \text{sgn}(A)$, vía una descomposición de Schur.

1: Dar una descomposición de Schur compleja para A , $A = QTQ^*$.

2: $u_{ii} \leftarrow \text{sgn}(t_{ii})$, $i = 1 : n$.

3: **para** $j = 2 : n$ **hacer**

4: **para** $i = j - 1 : -1 : 1$ **hacer**

$$5: \quad u_{ij} = \begin{cases} \frac{\sum_{k=i+1}^{j-1} u_{ik}u_{kj}}{u_{ii}+u_{jj}}, & u_{ii} + u_{jj} \neq 0 \\ t_{ij} \frac{u_{ii} - u_{jj}}{t_{ii} - t_{jj}} + \frac{\sum_{k=i+1}^{j-1} (u_{ik}t_{kj} - t_{ik}u_{kj})}{t_{ii} - t_{jj}}, & u_{ii} + u_{jj} = 0 \end{cases}$$

6: **fin para**

7: **fin para**

8: $S \leftarrow QUQ^*$

Este algoritmo implementado en Matlab es el siguiente:

```
function [S]=schursign(A)
[n,n]=size(A);
[Q,T] = schur(A,'complex');%Forma compleja de Schur
for i=1:n
    U(i,i)=sign(real(T(i,i)));
end
a=0;
t=0;
for j=2:n
    for i=j-1:-1:1
        if U(i,i)+U(j,j)~=0
            for k=i+1:j-1
                a=a+U(i,k)*U(k,j);
            end
            U(i,j)=-a/(U(i,i)+U(j,j));
        else
```

```

t=t+(U(i,k)*T(k,j)-T(i,k)*U(k,j));
end
U(i,j)=T(i,j)*(U(i,i)-U(j,j))/(T(i,i)-T(j,j))+t/(T(i,i)-T(j,j));
end
end
end
S=Q*U*Q';

```

2.4. Criterios de Estabilidad Iterativos

Definición 2.4.1. Decimos que $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ es estable si $\sigma(A) \subseteq \mathbb{C}^-$.

Definición 2.4.2. Decimos que $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ es inestable si A no es estable.

Usaremos definitivamente el Proceso Iterativo de Newton, sobre la base de los datos del Proceso Iterativo de Newton y el teorema 2.3.1 formularemos el siguiente criterio para la estabilidad de matrices numéricas.

Proposición 2.4.1. Si la sucesión $\{S_k\}_{k=0}^{\infty}$ donde S_k fue determinada usando (2.13), converge al límite

$$\operatorname{sgn}(A) = \lim_{k \rightarrow \infty} S_k = -I_n$$

entonces la matriz A es estable.

Demostración: Por (2.2) tenemos

$$\operatorname{sgn}(A) = T \begin{bmatrix} -I_{k \times k} & 0 \\ 0 & I_{n-k \times n-k} \end{bmatrix} T^{-1} = -I_{n \times n}$$

$$T \left(\begin{bmatrix} -I_{k \times k} & 0 \\ 0 & I_{n-k \times n-k} \end{bmatrix} + I_{n \times n} \right) T^{-1} = 0$$

luego

$$\begin{bmatrix} -I_{k \times k} & 0 \\ 0 & I_{n-k \times n-k} \end{bmatrix} = -I_{n \times n}$$

entonces $k = n$; por lo tanto $\sigma(A) \subset \mathbb{C}^-$ entonces, A es estable \square

Proposición 2.4.2. Si para cada elemento de la sucesión convergente $\{S_k\}_{k=0}^{\infty}$ donde S_k fue determinada usando (2.13), la condición $\det(I_{n \times n} - S_k) \neq 0$ se satisface entonces A es estable. Recíprocamente si existen elementos de la sucesión $\{S_k\}_{k=0}^{\infty}$ convergente tal que la condición $\det(I_{n \times n} - S_k) = 0$ se satisface entonces A es inestable.

Demostración:

- $\det(I_{n \times n} - S_k) \neq 0, \forall k = 0, 1, \dots; \operatorname{sgn}(A) = \lim_{k \rightarrow \infty} S_k$. Sabemos que $\det : \mathbb{C}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{C}$ es continua, entonces

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \det(I_{n \times n} - S_k) = \det(\lim_{k \rightarrow \infty} I_{n \times n} - S_k) = \det(I_{n \times n} - \operatorname{sgn}(A)) \quad (2.17)$$

Si A es inestable se tiene:

2. Función Signo Matricial

1. $\sigma(A) \subset \mathbb{C}^+$

Por la proposición 2.1.2 se tiene que $\text{sgn}(A) = I_{n \times n}$, entonces

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \det(I_{n \times n} - S_k) = 0$$

entonces para un k suficientemente grande se tiene que $\det(I_{n \times n} - S_k) = 0$ (contradicción)

2. Si algunos de los autovalores de A poseen parte real positiva y otros negativa entonces:

la función signo matricial es de la forma:

$$\begin{aligned} \text{sgn}(A) &= T \begin{bmatrix} -I_{k \times k} & 0 \\ 0 & I_{(n-k) \times (n-k)} \end{bmatrix} T^{-1} \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \det(I_{n \times n} - S_k) &= \det\left(\lim_{k \rightarrow \infty} I_{n \times n} - S_k\right) = \det(I_{n \times n} - \text{sgn}(A)) \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \det(I_{n \times n} - S_k) &= \det\left(I_{n \times n} - T \begin{bmatrix} -I_{k \times k} & 0 \\ 0 & I_{(n-k) \times (n-k)} \end{bmatrix} T^{-1}\right) \\ &= \det\left(I_{n \times n} - \begin{bmatrix} -I_{k \times k} & 0 \\ 0 & I_{(n-k) \times (n-k)} \end{bmatrix}\right) \\ &= \det\begin{pmatrix} 2 I_{k \times k} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= 0 \end{aligned}$$

entonces para un k suficientemente grande se tiene que $\det(I_{n \times n} - S_k) = 0$ (contradicción)

$\therefore A$ es estable.

▪ Existe $\{S_{k_i}\} \subset \{S_k\}$ tal que $\det(I_{n \times n} - S_{k_i}) = 0$, $i = 1, 2, \dots$

Supongamos que A es estable ésto es $\sigma(A) \in \mathbb{C}^-$ entonces por la proposición 2.1.1 tenemos que $\text{sgn}(A) = -I_{n \times n}$

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \det(I_{n \times n} - S_k) &= \det\left(\lim_{k \rightarrow \infty} I_{n \times n} - S_k\right) = \det(I_{n \times n} - \text{sgn}(A)) \\ &= \det(I_{n \times n} - (-I_{n \times n})) = \det(2 I_{n \times n}) \\ &= 2^n > 0 \end{aligned}$$

entonces, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\det(I_{n \times n} - S_k) > 0$; para todo $k > k_0$, como $\{S_{k_i}\} \subset \{S_k\}$ entonces, existen k_i tales que $k_i > k_0$ lo que nos da $\det(I_{n \times n} - S_{k_i}) > 0$ para todo $k_i > k_0$ lo cual es una contradicción.

$\therefore A$ es inestable. □

Definición 2.4.3. Decimos que $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ es estrictamente inestable si $\sigma(A) \in \mathbb{C}^+$

Proposición 2.4.3. Si la sucesión $\{\det(I_{n \times n} - S_k)\}_{k=0}^{\infty}$ donde S_k fue determinada usando (2.13), converge a 2^n entonces la matriz A es estable. Para la matriz estable se cumple la siguiente igualdad:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \det(S_k) = (-1)^n$$

2.4. Criterios de Estabilidad Iterativos

Inversamente, si la sucesión $\{\det(I_{n \times n} - S_k)\}_{k=0}^{\infty}$ converge a 0 entonces la matriz A es inestable. Para la matriz inestable estrictamente se cumple la igualdad:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \det(S_k) = 1$$

Demostración:

- Sabemos que $\lim_{k \rightarrow \infty} \det(I_{n \times n} - S_k) = 2^n$ y como $\det : \mathbb{C}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{C}$ es continua entonces, $\det \left(\lim_{k \rightarrow \infty} (I_{n \times n} - S_k) \right) = 2^n$ y como $\lim_{k \rightarrow \infty} S_k = \text{sgn}(A)$ luego $\det(I_{n \times n} - \text{sgn}(A)) = 2^n$

Supongamos que A es inestable. Aquí pueden ocurrir dos casos para la representación de la función signo matricial de $A(\text{sgn}(A))$:

1. si $\text{sgn}(A) = T \begin{bmatrix} -I_{k \times k} & 0 \\ 0 & I_{(n-k) \times (n-k)} \end{bmatrix} T^{-1}$ entonces,

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \det(I_{n \times n} - S_k) &= \det \left(I_{n \times n} - T \begin{bmatrix} -I_{k \times k} & 0 \\ 0 & I_{(n-k) \times (n-k)} \end{bmatrix} T^{-1} \right) \\ &= \det \left(I_{n \times n} - \begin{bmatrix} -I_{k \times k} & 0 \\ 0 & I_{(n-k) \times (n-k)} \end{bmatrix} \right) \\ &= \det \begin{pmatrix} 2 I_{k \times k} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= 0 \end{aligned}$$

luego

$$2^n = 0 \quad (\text{contradicción})$$

2. Si $\text{sgn}(A) = I_{n \times n}$,

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \det(I_{n \times n} - S_k) &= \det(I_{n \times n} - I_{n \times n}) \\ &= \det(0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$\therefore A$ es estable.

Como A es estable entonces $\sigma(A) \subset \mathbb{C}^-$ luego por la proposición 2.1.1 tenemos que $\text{sgn}(A) = -I_{n \times n}$

Debido a que la función determinante es continua:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \det(S_k) &= \det(\lim_{k \rightarrow \infty} S_k) \\ &= \det(\text{sgn}(A)) \\ &= \det(-I_{n \times n}) \\ &= (-1)^n \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \det(S_k) &= (-1)^n \end{aligned}$$

2. Función Signo Matricial

- Dados $\{det(I_{n \times n} - S_k)\}_{k=0}^{\infty}$ con $\lim_{k \rightarrow \infty} det(I_{n \times n} - S_k) = 0$

Supongamos que A es estable ésto es $\sigma(A) \subset \mathbb{C}^-$ entonces, $sgn(A) = -I_{n \times n}$
 $\lim_{k \rightarrow \infty} S_k = sgn(A)$ y como $det : \mathbb{C}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{C}$ es continua entonces,

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} det(I_{n \times n} - S_k) &= det(\lim_{k \rightarrow \infty} I_{n \times n} - S_k) \\ &= det(\lim_{k \rightarrow \infty} I_{n \times n} - sgn(A)) \\ &= det(\lim_{k \rightarrow \infty} I_{n \times n} + (I_{n \times n})) \\ &= det(2 I_{n \times n}) \\ &= 2^n \end{aligned}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} det(I_{n \times n} - S_k) = 2^n \quad (\text{contradicción})$$

$\therefore A$ es inestable

Si A es estrictamente inestable entonces, por la proposición 2.1.2 tenemos que

$$sgn(A) = I_{n \times n}$$

Dado $\{S_k\}_{k=0}^{\infty}$ donde S_k fue determinada usando (2.13); $\lim_{k \rightarrow \infty} S_k = sgn(A)$

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} det(S_k) &= det(\lim_{k \rightarrow \infty} S_k) \\ &= det(sgn(A)) \\ &= det(I_{n \times n}) \\ &= 1 \\ \lim_{k \rightarrow \infty} det(S_k) &= 1 \end{aligned}$$

□

Este último criterio será usado como la base para la generación del algoritmo iterativo para analizar el sistema (2.8).

Algoritmo 2

Entrada: $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ que no tenga autovalores imaginarios puros .

Salida: La determinante de las sucesiones del método de Newton (2.13).

0: Asumimos que $S_0 = A$.

1: Calculamos $d_0 = det(I_{n \times n} - S_0)$.

2: Calculamos $S_1 = \frac{1}{2}(A + A^{-1})$, $d_1 = det(I_{n \times n} - S_1)$

\vdots

N: Calculamos $S_N = \frac{1}{2}(S_{N-1} + S_{N-1}^{-1})$, $d_N = det(I_{n \times n} - S_N)$

2.5. Ejemplos

Veamos la naturaleza de variaciones de la función d_k , $k = 1, 2, \dots, N$. Si esta función es decreciente, el sistema (2.8) es inestable. Si la función d_k , $k = 1, 2, \dots, N$, tiende a 2^n entonces se puede concluir que el sistema es estable.

A continuación daremos un programa realizado en Matlab para observar si una matriz $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ es estable por el Proceso Iterativo de Newton:

```
function[d0,p]=estabilidad(A)
[n,n]=size(A);
S0=A;
d0=det(S0);
j=0;
if det(A)==0
    fprintf('El m\etodo no se puede aplicar a esta matriz')
else
    while (d0~=2^n)
        S0=(S0+inv(S0))/2;
        d0=det(eye(n)-S0);
        j=j+1;
        if (d0==0) break, end
    end
end
if d0==2^n
    p=j-1;
    fprintf('La matriz es estable')
else
    fprintf('La matriz no es estable')
    p=j;
end
```

2.5. Ejemplos

Ejemplo 2.5.1. *Dado*

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

$$\sigma(A) = \{ -3, -2, -1 \}$$

Aplicamos el algoritmo de estabilidad para (2.18) y tenemos los siguientes pasos:

$$0: \quad S_0 = A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad d_0 = -6$$

$$1: \quad S_1 = \begin{pmatrix} 2.0833 & 0 & -0.4167 \\ 1.5833 & -1 & 0.4167 \\ 0.8333 & 0 & -0.8333 \end{pmatrix}, \quad d_1 = 12$$

2. Función Signo Matricial

$$2: \quad S_2 = \begin{pmatrix} -1.2417 & 0 & -0.1083 \\ 0.2417 & -1 & 0.1083 \\ 0.2167 & 0 & -0.9167 \end{pmatrix}, \quad d_2 = 8.6400$$

$$3: \quad S_3 = \begin{pmatrix} -1.0154 & 0 & -0.0075 \\ 0.0154 & -1 & 0.0075 \\ 0.0154 & 0 & -0.9928 \end{pmatrix}, \quad d_3 = 8.0326$$

$$4: \quad S_4 = \begin{pmatrix} -1.0001 & 0 & 0 \\ 0.0001 & -1 & 0 \\ 0.0001 & 0 & -1.0000 \end{pmatrix}, \quad d_4 = 8.0001$$

$$5: \quad S_5 = \begin{pmatrix} -1.0000 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1.0000 \end{pmatrix}, \quad d_5 = 8 = 2^3$$

Como los valores de las determinantes convergen a 2^3 , la matriz (2.18) es estable de acuerdo la proposición 2.4.3.

Ejemplo 2.5.2. Dado

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 5 \\ -9 & -1 & 5 \\ -10 & 0 & 7 \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

$$\sigma(A) = \{ -1, 7.5 + 7.0534 i, 7.5 - 7.0534 i \}$$

Aplicamos el algoritmo de estabilidad para (2.19) y tenemos los siguientes pasos:

$$0: \quad S_0 = A = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 5 \\ -9 & -1 & 5 \\ 10 & 0 & -7 \end{pmatrix}, \quad d_0 = -106$$

$$1: \quad S_1 = \begin{pmatrix} 4.0330 & 0 & 2.4764 \\ -4.5613 & -1 & 2.9009 \\ -4.9528 & 0 & 3.5377 \end{pmatrix}, \quad d_1 = 39.9245$$

$$2: \quad S_2 = \begin{pmatrix} 2.0832 & 0 & 1.1915 \\ -2.3140 & -1 & 1.8838 \\ -2.3831 & 0 & 1.8449 \end{pmatrix}, \quad d_2 = 7.5094$$

$$3: \quad S_3 = \begin{pmatrix} 1.1746 & 0 & 0.5066 \\ -1.1405 & -1 & 1.4418 \\ -1.0132 & 0 & 1.0783 \end{pmatrix}, \quad d_3 = 1.0548$$

$$4: \quad S_4 = \begin{pmatrix} 0.8918 & 0 & 0.1114 \\ -0.5055 & -1 & 1.3591 \\ -0.2228 & 0 & 0.8695 \end{pmatrix}, \quad d_4 = 0.0779$$

Se ve que los valores de las determinantes están decreciendo, lo que indica la inestabilidad de la matriz.

Se observa que en $N = 10$, $d_{10} = 0$ entonces la matriz en (2.19) es inestable de acuerdo a la proposición 2.4.3.

2.5.1. Finalización de las iteraciones

Comenzaremos con un lema que proporcionará algunas cotas que nos ayudarán a obtener un criterio de pare tanto en pruebas relativas a base de error como en residuales.

Lema 2.5.1. ([14]) (Kenney, Laub, Pandey y Papadopoulos). Dados $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ que no tiene autovalores imaginarios puros, $S = \text{sgn}(A)$, y $\|\cdot\|$ cualquier norma matricial subordinada. Si $\|S(A - S)\| = \epsilon < 1$ entonces,

$$\left(\frac{1 - \epsilon}{2 + \epsilon} \right) \|A - A^{-1}\| \leq \|A - S\| \leq \left(\frac{1 + \epsilon}{2 - \epsilon} \right) \|A - A^{-1}\| \quad (2.20)$$

y

$$\frac{\|A^2 - I\|}{\|S\|(\|A\| + \|S\|)} \leq \frac{\|A - S\|}{\|S\|} \leq \|A^2 - I\| \quad (2.21)$$

la cota inferior de (2.21) siempre se mantiene.

Demostración: Definamos $E = A - S$. Como $S^2 = I$, tenemos $A = S + E = (I + ES)S$. Debido a que $S^2 = I$ entonces, $S = S^{-1}$ de ésto se tiene que $A^{-1} = S^{-1}(I + ES)^{-1}$

$$\begin{aligned} (A - A^{-1})(I + ES) &= A(I + ES) - A^{-1}(I + ES) \\ &= A(I + ES) - S^{-1}(I + ES)^{-1}(I + ES) \\ &= (E + S)(I + ES) - S \\ &= E + E^2S + S + SES - S \\ &= E + E^2S + S(A - S)S \\ &= E + E^2S + (SA - S^2)S \\ &= E + E^2S + (AS - I)S \\ &= E + E^2S + AS^2 - S \\ &= E + E^2S + A - S \\ &= E + E^2S + E \\ &= 2E + E^2S \\ &= E(2I + ES) \end{aligned}$$

entonces

$$(A - A^{-1})(I + ES) = E(2I + ES) \quad (2.22)$$

La cota superior de (2.20) la obtenemos multiplicando por $(2I + ES)^{-1}$ a (2.22), obtenemos:

$$\begin{aligned} (A - A^{-1})(I + ES)(2I + ES)^{-1} &= E \\ \|E\| &= \|(A - A^{-1})(I + ES)(2I + ES)^{-1}\| \\ &\leq \|A - A^{-1}\| \|I + ES\| \|(2I + ES)^{-1}\| \\ \|I + ES\| &\leq \|I\| + \|ES\| \\ &= (1 + \epsilon) \\ \|(2I + ES)^{-1}\| &= 2^{-1} \left\| \left(I + \frac{1}{2}ES \right)^{-1} \right\| \end{aligned}$$

como

$$\left\| \frac{1}{2}ES \right\| = \frac{1}{2} \|ES\| = \frac{1}{2} \epsilon < 1$$

2. Función Signo Matricial

luego de la observación 2.3.2

$$\begin{aligned}\|(2I + ES)^{-1}\| &= 2^{-1} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}\|ES\|} = \frac{1}{2 - \|ES\|} = \frac{1}{2 - \epsilon} \\ \|(2I + ES)^{-1}\| &\leq \frac{1}{2 - \epsilon}\end{aligned}$$

entonces,

$$\begin{aligned}\|E\| &\leq \left(\frac{1 + \epsilon}{2 - \epsilon}\right) \|A - A^{-1}\| \\ \|A - S\| &\leq \left(\frac{1 + \epsilon}{2 - \epsilon}\right) \|A - A^{-1}\|\end{aligned}$$

para obtener la cota inferior de (2.20) multiplicamos por $(I + ES)^{-1}$ a (2.22)

$$\begin{aligned}(A - A^{-1}) &= E(2I + ES)(I + ES)^{-1} \\ \|A - A^{-1}\| &= \|E(2I + ES)(I + ES)^{-1}\| \\ &\leq \|E\| \|2I + ES\| \|(I + ES)^{-1}\|\end{aligned}$$

como $\|ES\| = \epsilon < 1$ tenemos

$$\begin{aligned}\|2I + ES\| &\leq 2\|I\| + \|ES\| \\ &= 2 + \epsilon\end{aligned}$$

por la observación 2.3.2 se tiene

$$\|(I + ES)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|ES\|} = \frac{1}{1 - \epsilon}$$

luego

$$\begin{aligned}\|A - A^{-1}\| &\leq \|E\| \left(\frac{2 + \epsilon}{1 - \epsilon}\right) \\ \left(\frac{1 - \epsilon}{2 + \epsilon}\right) \|A - A^{-1}\| &\leq \|A - S\|\end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\left(\frac{1 - \epsilon}{2 + \epsilon}\right) \|A - A^{-1}\| \leq \|A - S\| \leq \left(\frac{1 + \epsilon}{2 - \epsilon}\right) \|A - A^{-1}\|$$

Ahora veamos la obtención de (2.21) sale para la cota inferior.

$$\begin{aligned}\|A^2 - I\| &= \|(A - S)(A + S)\| \leq \|A - S\| \|A + S\| \\ &\leq \|A - S\| (\|A\| + \|S\|) \\ \frac{\|A^2 - I\|}{(\|A\| + \|S\|)} &\leq \|A - S\|\end{aligned}$$

como $\|S^2\| \leq \|S\|^2$ de ésto, $1 \leq \|S\|^2$ por ende, $\|S\| \geq 1$. Luego,

$$\frac{\|A^2 - I\|}{\|S\|(\|A\| + \|S\|)} \leq \frac{\|A - S\|}{\|S\|}$$

2.5. Ejemplos

para la cota superior; sabemos que $(A - S)(A + S) = A^2 - I$ luego,

$$(A - S) = (A^2 - I)(A + S)^{-1}$$

Ahora acotaremos $\|(A + S)^{-1}\|$, desde que $A + S = 2S(I + \frac{1}{2}S(A - S))$ se tiene

$$\begin{aligned} \|(A + S)^{-1}\| &= \frac{1}{2} \left\| \left(I + \frac{1}{2}S(A - S) \right)^{-1} S^{-1} \right\| \\ &\leq \frac{1}{2} \left\| \left(I + \frac{1}{2}S(A - S) \right)^{-1} \right\| \|S^{-1}\| \\ \text{por la observaci3n 2.3.2} &\leq \frac{\frac{1}{2}\|S^{-1}\|}{1 - \frac{1}{2}\|S(A - S)\|} \leq \frac{\frac{1}{2}\|S\|}{1 - \frac{\epsilon}{2}} \leq \|S\| \\ \|(A + S)^{-1}\| &\leq \|S\| \end{aligned}$$

de 3sto se sigue

$$\begin{aligned} \|A - S\| &= \|A^2 - I\| \|(A + S)^{-1}\| \\ &\leq \|A^2 - I\| \|S\| \end{aligned}$$

entonces,

$$\frac{\|A - S\|}{\|S\|} \leq \|A^2 - I\|$$

por lo tanto,

$$\frac{\|A^2 - I\|}{\|S\|(\|A\| + \|S\|)} \leq \frac{\|A - S\|}{\|S\|} \leq \|A^2 - I\|$$

□

Se ve que desde las iteraciones de inter3s satisfacen $\text{sgn}(X_k) = \text{sgn}(A)$, las cotas del lema anterior son aplicados con A reemplazando a una iteraci3n X_k .

Dada η una tolerancia de convergencia, c_n constante. La cota superior de (2.21) muestra que

$$\frac{\|X_k - S\|}{\|S\|} \leq \|X_k^2 - I\| \text{ y as3 se sugiere una finalizaci3n cuando}$$

$$\|X_k^2 - I\| \leq \eta \tag{2.23}$$

Este test es adecuado para iteraciones de la forma X_k^2 , tal como la iteraci3n de Schultz (2.14). Tener en cuenta, sin embargo, que el error en la formaci3n de $fl(X_k^2 - I)$ est3 acotado por el mejor de los $c_n u \|X_k\|^2 \approx c_n u \|S\|^2$, por lo que cuando $\|S\|$ es grande tal vez no sea posible satisfacer (2.23), y un test m3s adecuado es entonces

$$\frac{\|X_k^2 - I\|}{\|X_k\|^2} \leq \eta$$

2. Función Signo Matricial

2.6. Función Signo Matricial Generalizado

La definición de la función signo matricial (2.2) y el proceso práctico para su cálculo (2.13) será extendido al problema del valor propio generalizado $A - \lambda E$ que representan el sistema dinámico (2.10). El **Proceso Iterativo Generalizado de Newton** es el siguiente: Dada $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ una matriz que no tiene autovalores en el eje imaginario y $E \in \mathbb{C}^{n \times n}$ una matriz invertible luego las siguientes iteraciones

$$S_{k+1} = \frac{1}{2}(S_k + E S_k^{-1} E), \quad S_0 = A \quad (2.24)$$

convergen a la matriz

$$E \operatorname{sgn}(E^{-1}A) = \operatorname{sgn}(AE^{-1})E$$

En efecto:

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= \frac{1}{2}E(E^{-1}S_k + S_k^{-1}E) \\ E^{-1}S_{k+1} &= \frac{1}{2}(E^{-1}S_k + (E^{-1}S_k)^{-1}), \quad S_0 = A \text{ entonces } E^{-1}S_0 = E^{-1}A \end{aligned}$$

Luego haciendo $F_k = E^{-1}S_k$, $k = 0, 1, 2, \dots$

De donde (2.24) se convierte en

$$F_{k+1} = \frac{1}{2}(F_k + F_k^{-1}), \quad F_0 = E^{-1}A$$

Lo anterior nos da el proceso iterativo de Newton (2.10) visto anteriormente y se vio que esta iteración converge a $\operatorname{sgn}(F_0) = \operatorname{sgn}(E^{-1}A)$ lo cual significa que

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} F_k &= \operatorname{sgn}(E^{-1}A) \\ \lim_{k \rightarrow \infty} E^{-1}S_k &= \operatorname{sgn}(E^{-1}A) \\ \lim_{k \rightarrow \infty} S_k &= E \operatorname{sgn}(E^{-1}A) \end{aligned}$$

si

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= \frac{1}{2}(S_k E^{-1} + E S_k^{-1})E \\ S_{k+1} E^{-1} &= \frac{1}{2}(S_k E^{-1} + (S_k E^{-1})^{-1}), \quad S_0 = A \text{ entonces } S_0 E^{-1} = A E^{-1} \end{aligned}$$

Luego haciendo $F_k = S_k E^{-1}$, $k = 0, 1, 2, \dots$

De donde (2.24) se convierte en

$$F_{k+1} = \frac{1}{2}(F_k + F_k^{-1}), \quad F_0 = A E^{-1}$$

Lo anterior nos da el proceso iterativo de Newton (2.10) visto anteriormente y se vio que esta iteración converge a $\operatorname{sgn}(F_0) = \operatorname{sgn}(A E^{-1})$ lo cual significa que

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} F_k &= \operatorname{sgn}(A E^{-1}) \\ \lim_{k \rightarrow \infty} S_k E^{-1} &= \operatorname{sgn}(A E^{-1}) \\ \lim_{k \rightarrow \infty} S_k &= \operatorname{sgn}(A E^{-1})E \end{aligned}$$

2.6. Función Signo Matricial Generalizado

y como el límite es único

$$\text{sgn}(AE^{-1})E = E\text{sgn}(E^{-1}A)$$

por lo tanto las iteraciones definidas en (2.24) convergen a

$$\text{sgn}(AE^{-1})E = E\text{sgn}(E^{-1}A)$$

Luego para el problema de los autovalores generalizados usamos el **Proceso Iterativo Generalizado de Newton**.

Daremos a continuación el problema generalizado de autovalores (2.11) en la forma de un producto vectorial.

Dado $(\alpha, \beta) \neq 0$ un par de escalares para que la matriz $\beta A - \alpha E$ sea singular

$$\det(\beta A - \alpha E) = 0$$

entonces el par (α, β) denota los autovalores del conjunto matricial $\beta A - \alpha E$ (denotaremos abreviando por el par de matrices (A, E)) en el sentido que

$$\det(\delta\beta A - \delta\alpha E) = 0 \tag{2.25}$$

para algún $\delta \neq 0$

La matriz $\beta A - \alpha E$ o el par (A, E) son considerados como degenerada (singular) si $\det(\beta A - \alpha E) = 0$, para cualquier (α, β) .

Si $\beta \neq 0$ entonces sin pérdida de generalidad asumimos que $\beta = 1$ y $\alpha = \lambda$ que da origen a (2.11).

Lema 2.6.1. ([28]) *Si $(F, G) = (YAX^{-1}, YEX^{-1})$ es una transformación de la matriz par (A, E) donde X e Y son matrices no degeneradas. El **Proceso Iterativo Generalizado de Newton** (2.24) con la aproximación inicial como el par (F, G) converge si y sólo si el **Proceso Iterativo Generalizado de Newton** (2.24) con la aproximación inicial en la forma del par (A, E) converge.*

Demostración:

(\Rightarrow)

Dado
$$T_{k+1} = \frac{1}{2}(T_k + ET_k^{-1}E), T_0 = A \tag{*}$$

$$\begin{aligned} T_{k+1} &= \frac{1}{2}(T_k + Y^{-1}YEX^{-1}XT_k^{-1}Y^{-1}YEX^{-1}X) \\ &= \frac{1}{2}(Y^{-1}(YT_kX^{-1})X + Y^{-1}((YEX^{-1})(XT_k^{-1}Y^{-1})(YEX^{-1})X)) \end{aligned}$$

haciendo $G = YEX^{-1}$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2}Y^{-1}(YT_kX^{-1} + G(XT_k^{-1}Y^{-1})G)X \\ YT_{k+1}X^{-1} &= \frac{1}{2}(YT_kX^{-1} + G(YT_k^{-1}X^{-1})^{-1}G) \end{aligned}$$

haciendo $S_k = YT_kX^{-1}, k = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= \frac{1}{2}(S_k + GS_k^{-1}G) \\ T_0 &= A \text{ entonces, } YT_0X^{-1} = YAX^{-1} = F \text{ luego } S_0 = F \end{aligned}$$

2. Función Signo Matricial

entonces el Proceso Iterativo Generalizado de Newton

$$S_{k+1} = \frac{1}{2}(S_k + GS_k^{-1}G), \quad S_0 = F$$

por dato es convergente entonces existe $R \in \mathbb{C}^{n \times n}$ tal que

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} S_k &= R \\ \lim_{k \rightarrow \infty} Y T_k X^{-1} &= R \\ Y \lim_{k \rightarrow \infty} T_k X^{-1} &= R \\ \lim_{k \rightarrow \infty} T_k &= Y^{-1} R X \end{aligned}$$

luego el Proceso Iterativo Generalizado de Newton (*) con valor inicial aproximado (A, E) es convergente.

(\Leftarrow)

Dado
$$Q_{k+1} = \frac{1}{2}(Q_k + GQ_k^{-1}G), \quad Q_0 = F \quad (**)$$

$$\begin{aligned} Q_{k+1} &= \frac{1}{2}(Q_k + YEX^{-1}Q_k^{-1}YEX^{-1}) \\ &= \frac{1}{2}(YY^{-1}Q_kXX^{-1} + YEX^{-1}Q_k^{-1}YEX^{-1}) \\ &= \frac{1}{2}Y(Y^{-1}Q_kX + EX^{-1}Q_k^{-1}YE)X^{-1} \\ Y^{-1}Q_{k+1}X &= \frac{1}{2}(Y^{-1}Q_kX + E(Y^{-1}Q_kX)^{-1}E) \end{aligned}$$

haciendo $S_k = Y^{-1}Q_kX$, $k = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= \frac{1}{2}(S_k + ES_k^{-1}E) \\ Q_0 &= F = YAX^{-1} \text{ entonces, } Y^{-1}Q_0X = A \text{ luego } S_0 = A \end{aligned}$$

entonces el Proceso Iterativo Generalizado de Newton

$$S_{k+1} = \frac{1}{2}(S_k + ES_k^{-1}E), \quad S_0 = A$$

por dato es convergente entonces, existe $Q \in \mathbb{C}^{n \times n}$ tal que

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} S_k &= Q \\ \lim_{k \rightarrow \infty} Y^{-1}Q_kX &= Q \\ Y^{-1} \lim_{k \rightarrow \infty} Q_kX &= Q \\ \lim_{k \rightarrow \infty} Q_k &= YQX^{-1} \end{aligned}$$

luego el Proceso Iterativo Generalizado de Newton (***) con valor inicial aproximado (F, G) es convergente. \square

2.6. Función Signo Matricial Generalizado

Del lema anterior se observa que, dado un Proceso Iterativo Generalizado de Newton con valor inicial (A, E) converge a A_∞ correspondiente al par (A, E) y F_∞ converge al correspondiente par (F, G) entonces

$$A_\infty = Y^{-1}F_\infty X \quad (2.26)$$

El par matricial (F, G) es equivalente al par (A, E) en el sentido de:

$$(F, G) = (YAX^{-1}, YEX^{-1})$$

entonces el **Proceso Iterativo Generalizado de Newton** (2.24) con la aproximación inicial (F, G) se dice ser equivalente en el sentido de (2.26) a las iteraciones de **Proceso Iterativo Generalizado de Newton** con la aproximación inicial (A, E) . Las iteraciones generalizadas con (A, E) también son convergentes si las iteraciones generalizadas convergen con algún par equivalente.

Observación 2.6.1. Si la matrices A y E son no singulares, entonces el par matricial (A, E) es conocido a ser equivalente a los pares (AE^{-1}, I_n) y $(E^{-1}A, I_n)$ en el sentido de igualdad de autovalores. Consecuentemente el Proceso Iterativo Generalizado de Newton (2.24) con la aproximación inicial (A, E) es equivalente al Proceso Iterativo de Newton (2.13) con la aproximación inicial $S_0 = AE^{-1}$ y $S_0 = E^{-1}A$ respectivamente.

Notamos que, el proceso iterativo de Newton (2.13) converge si y sólo si la matriz A no tiene autovalores en el eje imaginario. Se sigue del lema 2.6.1 que el proceso iterativo generalizado de Newton (2.24) con el par (A, E) también converge si las matrices $S_0 = AE^{-1}$ y $E^{-1}A$ no tienen autovalores en el eje imaginario.

Sabemos que el proceso iterativo generalizado de Newton (2.24) converge a $\text{sgn}(AE^{-1})E = E\text{sgn}(E^{-1}A)$ entonces,

$$A_\infty = \text{sgn}(AE^{-1})E = E\text{sgn}(E^{-1}A) \text{ y } E \pm A_\infty = (I_n \pm \text{sgn}(AE^{-1}))E = E(I_n \pm \text{sgn}(E^{-1}A))$$

Las matrices $I_n + E^{-1}A_\infty$ y $I_n - E^{-1}A_\infty$ son las proyecciones a los subespacios del par (A, E) correspondientes a los autovalores en el semiplano complejo derecho \mathbb{C}^+ y el semiplano complejo izquierdo \mathbb{C}^- .

Dados Q y Z matrices unitarias tales que:

$$A = Q \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} Z^*, \quad E = Q \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} \\ 0 & E_{22} \end{bmatrix} Z^* \quad (2.27)$$

donde:

$$\sigma(A_{11}, E_{11}) \subset \mathbb{C}^-, \quad \sigma(A_{22}, E_{22}) \subset \mathbb{C}^+ \\ \sigma(A_{11}, E_{11}) \cup \sigma(A_{22}, E_{22}) = \sigma(A, E)$$

Adicionalmente, dados X e Y dos matrices no degeneradas tales que:

$$A = Y \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} X^{-1}, \quad E = Y \begin{bmatrix} E_{11} & 0 \\ 0 & E_{22} \end{bmatrix} X^{-1} \quad (2.28)$$

donde

$$X = Z \begin{bmatrix} I_n & F \\ 0 & I_n \end{bmatrix}, \quad Y = Q \begin{bmatrix} I_n & G \\ 0 & I_n \end{bmatrix}$$

2. Función Signo Matricial

donde también F y G son las soluciones de la ecuación matricial siguiente:

$$GA_{22} - A_{11}F = A_{12}, \quad GE_{22} - E_{11}F = E_{12} \quad (2.29)$$

con (2.28) y el lema 2.6.1, el proceso iterativo generalizado de Newton con el par (A, E) es equivalente a dos iteraciones con los pares (A_{11}, E_{11}) y (A_{22}, E_{22}) .

En efecto:

$$S_{k+1} = Y \begin{bmatrix} S_{11}^{(k+1)} & 0 \\ 0 & S_{22}^{(k+1)} \end{bmatrix} X^{-1}$$

$$S_{k+1} = Q \begin{bmatrix} S_{11}^{(k+1)} & GS_{22}^{(k+1)} - S_{11}^{(k+1)}F \\ 0 & S_{22}^{(k+1)} \end{bmatrix} Z^*$$

donde

$$S_{ii}^{(k+1)} = \frac{1}{2}(S_{ii}^{(k)} + E_{ii}(S_{ii}^{(k)})^{-1}E_{ii}), \quad i = 1, 2$$

como E es no singular entonces E_{11} y E_{22} también lo son, luego como $\sigma(A_{11}, E_{11}) \subset \mathbb{C}^-$ entonces, $\det(A_{11} - \lambda E_{11}) = 0$ luego

$$A_{11}x = \lambda E_{11}x, \quad x \neq 0, \quad \lambda \in \sigma(A_{11}, E_{11}) \subset \mathbb{C}^-$$

$$E_{11}^{-1}A_{11}x = \lambda x$$

$$\sigma(E_{11}^{-1}A_{11}) \subset \mathbb{C}^-$$

$$\text{sgn}(E_{11}^{-1}A_{11}) = -I_n$$

El mismo proceso se hace para $\sigma(A_{22}, E_{22}) \subset \mathbb{C}^+$ obteniéndose $\text{sgn}(E_{22}^{-1}A_{22}) = I_n$.

$$S_{11}^{(k+1)} = \frac{1}{2}(S_{11}^{(k)} + E_{11}(S_{11}^{(k)})^{-1}E_{11}), \quad S_{11}^0 = A_{11}$$

sabemos que esta iteración por lo visto anteriormente converge a $E_{11}\text{sgn}(E_{11}^{-1}A_{11}) = -E_{11}$

$$S_{22}^{(k+1)} = \frac{1}{2}(S_{22}^{(k)} + E_{22}(S_{22}^{(k)})^{-1}E_{22}), \quad S_{22}^0 = A_{22}$$

sabemos que esta iteración por lo visto anteriormente converge a $E_{22}\text{sgn}(E_{22}^{-1}A_{22}) = E_{22}$
Luego el límite de la matriz de la convergencia del proceso iterativo generalizado de Newton con el par (A, E) es representado por

$$A_\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} S_k = \lim_{k \rightarrow \infty} Y \begin{bmatrix} S_{11}^{(k)} & 0 \\ 0 & S_{22}^{(k)} \end{bmatrix} X^{-1}$$

$$A_\infty = Y \begin{bmatrix} -E_{11} & 0 \\ 0 & E_{22} \end{bmatrix} X^{-1} \quad (2.30)$$

$$A_\infty = Q \begin{bmatrix} -E_{11} & GE_{22} + E_{11}F \\ 0 & E_{22} \end{bmatrix} Z^* \quad (2.31)$$

Definición 2.6.1. Se define la función signo matricial del par matricial (A, E) mediante la expresión

$$\text{sgn}(A, E) = Y \begin{bmatrix} -E_{11} & 0 \\ 0 & E_{22} \end{bmatrix} X^{-1} \quad (2.32)$$

donde E_{11} , E_{22} , X y Y como en (2.28). La matriz E es llamada la matriz rotación

2.6. Función Signo Matricial Generalizado

De la definición 2.6.1 vemos que la función signo matricial introducida en (2.2) es un caso especial de la función signo matricial generalizada $sgn(A, E)$, que es:

$$sgn(A, I_n) = sgn(A)$$

donde la matriz rotación E es igual a la identidad I_n .

Teorema 2.6.1. ([28]) *Si las matrices A y E son no degeneradas (no singulares) y el par (A, E) no tiene autovalores generalizados (2.11) en el eje imaginario entonces el proceso iterativo generalizado de Newton (2.24) con el par (A, E) converge y el límite matricial es la función signo matricial generalizada del par (A, E) que es igual a $sgn(A, E)$ (2.32).*

Demostración: La demostración proviene de la prueba que se hizo anteriormente para hallar (2.30) y (2.31). \square

En lo que sigue, asumimos que E es una matriz degenerada (singular) y A es no degenerada (no singular) que no tiene autovalores en el eje imaginario.

Definición 2.6.2. *Decimos que el espectro generalizado es de la forma μ si*

$$\sigma(A, E) = \left\{ \mu \in \mathbb{C} : \det(\mu A - E) = 0 \right\}$$

Si la matriz E es singular entonces el espectro generalizado es de la forma μ ; los pares (A, E) tienen $\sigma(A, E) = \{0\}$.

Lema 2.6.2. *Dado $J_n(0)$ la $n \times n$ celda de Jordan asociado con el autovalor 0 dado por:*

$$J_1(0) = 0, J_2(0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \dots, J_n(0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

El proceso iterativo generalizado de Newton (2.24) con aproximación inicial $(I_n, J_n(0))$ converge si y sólo si $n \leq 2$. Y que si $n \leq 2$ entonces converge a la matriz cero con razón lineal.

Demostración: Dado $S_0 = I_n$, si $n \leq 2$ entonces $J_n^2(0) = 0$

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad n = 1, J_1(0) = 0 &\Rightarrow S_1 = \frac{1}{2}(S_0 + J_1(0)S_0^{-1}J_1(0)) = \frac{1}{2}(S_0) \\ &\text{para un } k \in \mathbb{N} \text{ se tiene } S_k = \frac{1}{2^k}S_0 \\ &\text{para } k + 1 \text{ tenemos } S_{k+1} = \frac{1}{2}(S_k + J_1(0)S_k^{-1}J_1(0)) = \frac{1}{2}(S_k) = \frac{1}{2^{k+1}}(S_0) \\ &\Rightarrow S_k = \frac{1}{2^k}(S_0) = \frac{1}{2^k}I_n, \quad \forall k \geq 1 \end{aligned}$$

$\blacksquare \quad n = 2$

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{2}(S_0 + J_2(0)S_0^{-1}J_2(0)) \\ S_1 &= \frac{1}{2}(I_n + J_2^2(0)) = \frac{1}{2}I_n \end{aligned}$$

2. Función Signo Matricial

para un $k \in \mathbb{N}$ se tiene

$$S_k = \frac{1}{2^k} I_n$$

para $k + 1$ tenemos

$$S_{k+1} = \frac{1}{2}(S_k + J_2(0)S_k^{-1}J_2(0))$$

$$S_{k+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^k}I_n + 2^k J_2^2(0)\right)$$

$$S_{k+1} = \frac{1}{2^{k+1}}I_n$$

$$\Rightarrow S_k = \frac{1}{2^k}I_n \quad (2.33)$$

entonces para $n \leq 2$ se tiene que cuando $k \rightarrow \infty$ obtenemos $S_k \rightarrow 0$

- si $n \geq 3$
mostraremos por inducción que

$$S_k = \frac{1}{2^k}(I_n + \alpha_k J_n^2(0)), \text{ donde } \alpha_k = \sum_{i=0}^{k-1} 4^i; \quad \forall k \geq 1$$

$$S_1 = \frac{1}{2}(S_0 + J_n(0)S_0^{-1}J_n(0)) = \frac{1}{2}(S_0 + J_n^2(0)) = \frac{1}{2^1}(S_0 + \alpha_1 J_n^2(0)), \quad \alpha_1 = \sum_{i=0}^{1-1} 4^i = 1 \text{ si}$$

$$\text{para un } k \in \mathbb{N} \text{ se cumple, } S_k = \frac{1}{2^k}(I_n + \alpha_k J_n^2(0)), \quad \alpha_k = \sum_{i=0}^{k-1} 4^i$$

veamos para $k + 1$

$$S_{k+1} = \frac{1}{2}(S_k + J_n(0)S_k^{-1}J_n(0)), \quad S_k^{-1} = 2^k(I_n - \alpha_k J_n^2(0))$$

$$S_{k+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^k}(I_n + \alpha_k J_n^2(0)) + J_n(0)2^k(I_n - \alpha_k J_n^2(0))J_n(0)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^k}I_n + \frac{1}{2^k}\alpha_k J_n^2(0) + 2^k J_n^2(0) - 2^k \alpha_k J_n^4(0)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^k}I_n + \frac{\alpha_k J_n^2(0) + 4^k J_n^2(0)}{2^k}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^k}(I_n + \alpha_{k+1} J_n^2(0))\right)$$

$$S_{k+1} = \frac{1}{2^{k+1}}(I_n + \alpha_{k+1} J_n^2(0)), \quad \alpha_{k+1} = \sum_{i=0}^k 4^i$$

$$S_k = \frac{1}{2^k}(I_n + \alpha_k J_n^2(0)), \text{ donde } \alpha_k = \sum_{i=0}^{k-1} 4^i; \quad \forall k \geq 1 \quad (2.34)$$

entonces S_k diverge cuando $k \rightarrow \infty$, para $n \geq 3$. □

Teorema 2.6.2. ([28]) Dado (A, E) el par de matrices que no tiene autovalores en el eje imaginario en el sentido de (2.11). El proceso iterativo generalizado de Newton converge si y sólo si E no tiene autovalores cero con multiplicidad más que 2. Más aún,

2.7. Función Signo Matricial del conjunto de Matrices Rectangulares

1. Si la matriz E no tiene autovalores cero entonces la tasa de convergencia es cuadrática.
2. Si la matriz E tiene autovalores cero con multiplicidad menor o igual que 2 entonces la tasa de convergencia es lineal y la matriz a la que converge, A_∞ , es singular.

Demostración: La condición que (A, E) no tiene autovalores en el eje imaginario en el sentido (2.11) nos dice que A es no singular.

Análogamente con (2.28), construimos la descomposición (A, E) para los autovalores generalizados en el sentido de (2.25):

$$A = Y \begin{bmatrix} A_{\beta_0} & 0 \\ 0 & A_\omega \end{bmatrix} X^{-1}, \quad E = Y \begin{bmatrix} E_{\beta_0} & 0 \\ 0 & E_\omega \end{bmatrix} X^{-1}$$

donde X e Y son matrices no degeneradas y

$$\sigma(A_{\beta_0}, E_{\beta_0}) = \{(0, 1)\}, \quad \sigma(A_\omega, E_\omega) = \{(\alpha, \beta) : \alpha\beta = 0\}.$$

Por el lema 2.6.1, el proceso iterativo generalizado de Newton con aproximación inicial (A, E) converge si y sólo si las iteraciones equivalentes con aproximación inicial $(A_{\beta_0}, E_{\beta_0})$ y (A_ω, E_ω) convergen simultáneamente.

La iteración con (A_ω, E_ω) converge siempre debido a que por la definición de este par matricial no tiene autovalores en el eje imaginario. Desde que A_{β_0} es no singular entonces el par $(A_{\beta_0}, E_{\beta_0})$ es equivalente al par $(I, \text{diag}(J(0)))$.

Las iteraciones con aproximación inicial $(A_{\beta_0}, E_{\beta_0})$ convergen si y sólo si las iteraciones con aproximación inicial $(I, \text{diag}(J(0)))$ converge para todo bloque de Jordan $J(0)$, luego por el lema 2.6.2 se completa la prueba de este teorema. \square

2.7. Función Signo Matricial del conjunto de Matrices Rectangulares

Extendemos la noción de función signo matricial a matrices rectangulares. Dadas las matrices rectangulares $A, E \in \mathbb{R}^{m \times n}$, le asignamos a ellos el conjunto de matrices $A - \lambda E$ y definimos la relación lineal:

$$(E \setminus A) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : Ey = Ax\} \quad (2.35)$$

En el sentido de (2.35) el sistema dinámico lineal:

$$E\dot{x}(t) = Ax(t), \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (2.36)$$

con las matrices $A, E \in \mathbb{R}^{m \times n}$ es equivalente a la condición

$$(x, \dot{x}) \in (E \setminus A)$$

Si $\text{rang}(E) = n$ entonces en lugar de (2.35) se puede definir una relación lineal como

$$(E \setminus A) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : y = E^\# Ax\}$$

donde $E^\# = (E^T E)^{-1} E^T$ es la matriz pseudoinversa Moore–Penrose.

Dadas $(E_1 \setminus A_1)$ y $(E_2 \setminus A_2)$ relaciones lineales (2.35). Definimos el producto de relaciones:

$$(E_2 \setminus A_2)(E_1 \setminus A_1) = \{(x, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : \exists y \in \mathbb{R}^n, (x, y) \in (E_1 \setminus A_1), (y, z) \in (E_2 \setminus A_2)\} \quad (2.37)$$

2. Función Signo Matricial

y la inversión

$$(E \setminus A)^{-1} = (A \setminus E) \quad (2.38)$$

con la propiedad

$$(x, y) \in (E \setminus A) \Leftrightarrow (y, x) \in (E \setminus A)^{-1} \quad (2.39)$$

Si $\det(E^T A) \neq 0$ entonces una condición fuerte puede ser definida:

$$(E \setminus A)(E \setminus A)^{-1} = (I_n \setminus I_n) \quad (2.40)$$

Veamos que no se cumple la commutativa en este producto de relaciones. A continuación veamos un ejemplo de ésto:

Si

$$\begin{aligned} ([1] \setminus [0]) &= \{(y, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : z = 0\} \\ ([0] \setminus [1]) &= \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x = 0\} \end{aligned}$$

pero su producto

$$\begin{aligned} ([1] \setminus [0])([0] \setminus [1]) &= \{(x, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R}, (y, z) \in ([1] \setminus [0]), (x, y) \in ([0] \setminus [1])\} \\ &= \{(0, 0)\} \\ ([0] \setminus [1])([1] \setminus [0]) &= \{(x, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R}, (y, z) \in ([0] \setminus [1]), (x, y) \in ([1] \setminus [0])\} \\ &= \mathbb{R} \times \mathbb{R} \text{ entonces,} \\ ([1] \setminus [0])([0] \setminus [1]) &\neq ([0] \setminus [1])([1] \setminus [0]) \end{aligned}$$

El siguiente teorema muestra como identificar matrices que representan un producto de relaciones. Es una generalización de la fórmula para el producto de fracciones escalares.

Teorema 2.7.1. ([4]) Consideremos las relaciones lineales $(E_1 \setminus A_1)$ y $(E_2 \setminus A_2)$ (2.35) donde $E_1, A_1 \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $E_2, A_2 \in \mathbb{R}^{p \times n}$. Si las matrices $\tilde{A}_2 \in \mathbb{R}^{q \times m}$ y $\tilde{E}_1 \in \mathbb{R}^{q \times p}$ satisfacen la condición

$$\text{Ker} \begin{bmatrix} \tilde{A}_2 & \tilde{E}_1 \end{bmatrix} = \text{Rang} \begin{bmatrix} -E_1 \\ A_2 \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

entonces,

$$(E_2 \setminus A_2)(E_1 \setminus A_1) = ((\tilde{E}_1 E_2) \setminus (\tilde{A}_2 A_1)) = \{(x, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : \tilde{E}_1 E_2 z = \tilde{A}_2 A_1 x\}$$

Demostración:

- si $(x, z) \in (E_2 \setminus A_2)(E_1 \setminus A_1)$, entonces por definición existe $y \in \mathbb{R}^n$ tal que $(x, y) \in (E_1 \setminus A_1)$ y $(y, z) \in (E_2 \setminus A_2)$. Luego $E_1 y = A_1 x$ y $E_2 z = A_2 y$ de (2.41) implica que

$$\tilde{E}_1 A_2 = \tilde{A}_2 E_1$$

luego obtenemos

$$\tilde{E}_1 E_2 z = \tilde{E}_1 A_2 y = \tilde{A}_2 E_1 y = \tilde{A}_2 A_1 x$$

implicando que $(x, z) \in ((\tilde{E}_1 E_2) \setminus (\tilde{A}_2 A_1))$ por lo tanto,

$$(E_2 \setminus A_2)(E_1 \setminus A_1) \subset ((\tilde{E}_1 E_2) \setminus (\tilde{A}_2 A_1))$$

2.7. Función Signo Matricial del conjunto de Matrices Rectangulares

- si $(x, z) \in ((\tilde{E}_1 E_2) \setminus (\tilde{A}_2 A_1))$
 $\Rightarrow \tilde{E}_1 E_2 z = \tilde{A}_2 A_1 x \Rightarrow \begin{bmatrix} -A_1 x \\ E_2 z \end{bmatrix} \in \text{Ker} \begin{bmatrix} \tilde{A}_2 & \tilde{E}_1 \end{bmatrix}$
 por (2.41) existe $y \in \mathbb{R}^n$ talque

$$\begin{bmatrix} -A_1 x \\ E_2 z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -E_1 \\ A_2 \end{bmatrix} y$$

$$\begin{aligned} (x, y) &\in (E_1 \setminus A_1) \quad , \quad (y, z) \in (E_2 \setminus A_2) \\ (x, z) &\in (E_2 \setminus A_2)(E_1 \setminus A_1) \\ ((\tilde{E}_1 E_2) \setminus (\tilde{A}_2 A_1)) &\subset (E_2 \setminus A_2)(E_1 \setminus A_1) \\ \therefore (E_2 \setminus A_2)(E_1 \setminus A_1) &= ((\tilde{E}_1 E_2) \setminus (\tilde{A}_2 A_1)) \end{aligned}$$

□

Si $E_1 = I$ y $E_2 = I$ entonces $\tilde{E}_1 = I$ y $\tilde{A}_2 = A_2$ es una posibilidad en (2.41). Este resultado nos da la multiplicación convencional de matrices $((I \setminus A_2)(I \setminus A_1)) = (I \setminus A_2 A_1)$.
 Si $E_1 = I$ y $A_1 = cI$ para algún $c \in \mathbb{R}$ entonces, $\tilde{E}_1 = E_1 = I$ y $\tilde{A}_2 = A_2 = cI$ es una posibilidad en (2.41). Este resultado nos da la multiplicación convencional de un escalar por una matriz $((I \setminus (cI))(I \setminus A_1)) = (I \setminus cA_1)$.

Definición 2.7.1. La operación de adición de relaciones (2.35) está dada por:

$$\begin{aligned} (E_1 \setminus A_1) + (E_2 \setminus A_2) &= \{(x, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : \exists y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n, (x, y_1) \in (E_1 \setminus A_1), \\ &\quad (x, y_2) \in (E_2 \setminus A_2), z = y_1 + y_2\} \end{aligned} \quad (2.42)$$

Teorema 2.7.2. ([4]) Consideremos las relaciones lineales $(E_1 \setminus A_1)$ y $(E_2 \setminus A_2)$ (2.35) donde $E_1, A_1 \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $E_2, A_2 \in \mathbb{R}^{p \times n}$. Si las matrices $\tilde{E}_2 \in \mathbb{R}^{q \times m}$ y $\tilde{E}_1 \in \mathbb{R}^{q \times p}$ satisfacen la condición

$$\text{Ker} \begin{bmatrix} \tilde{E}_2 & \tilde{E}_1 \end{bmatrix} = \text{Rang} \begin{bmatrix} -E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

entonces,

$$(E_1 \setminus A_1) + (E_2 \setminus A_2) = ((\tilde{E}_1 E_2) \setminus (\tilde{E}_2 A_1 + \tilde{E}_1 A_2)) = \{(x, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : \tilde{E}_1 E_2 z = (\tilde{E}_2 A_1 + \tilde{E}_1 A_2)x\} \quad (2.44)$$

Demostración:

- si $(x, z) \in (E_1 \setminus A_1) + (E_2 \setminus A_2)$ entonces por la definición existen $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n$ tales que $E_1 y_1 = A_1 x$, $E_2 y_2 = A_2 x$ y $z = y_1 + y_2$. Si \tilde{E}_1 y \tilde{E}_2 satisfacen (2.43)

$$\tilde{E}_1 E_2 = \tilde{E}_2 E_1$$

luego obtenemos

$$\begin{aligned} \tilde{E}_2 E_1 z &= \tilde{E}_2 A_1 y_1 \quad \text{y} \quad \tilde{E}_1 E_2 y_2 = \tilde{E}_1 A_2 x \\ \tilde{E}_1 E_2 (y_1 + y_2) &= \tilde{E}_1 E_2 z = (\tilde{E}_2 A_1 + \tilde{E}_1 A_2)x \\ (x, y) &\in ((\tilde{E}_1 E_2) \setminus (\tilde{E}_2 A_1 + \tilde{E}_1 A_2)) \end{aligned}$$

luego

$$(E_1 \setminus A_1) + (E_2 \setminus A_2) \subset ((\tilde{E}_1 E_2) \setminus (\tilde{E}_2 A_1 + \tilde{E}_1 A_2))$$

2. Función Signo Matricial

- si $(x, z) \in ((\tilde{E}_1 E_2) \setminus (\tilde{E}_2 A_1 + \tilde{E}_1 A_2))$. Luego se sigue

$$\begin{aligned} \tilde{E}_1 E_2 z &= (\tilde{E}_2 A_1 + \tilde{E}_1 A_2) x \\ \tilde{E}_1 (E_2 z - A_2 x) &= \tilde{E}_2 A_1 x \\ \begin{bmatrix} -A_1 x \\ E_2 z - A_2 x \end{bmatrix} &\in \text{Ker} \begin{bmatrix} \tilde{E}_2 & \tilde{E}_1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

por (2.43), existe $w \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\begin{bmatrix} -A_1 x \\ E_2 z - A_2 x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} w$$

si $y_1 = w$ y $y_2 = z - w$ entonces $E_1 y_1 = A_1 x$, $E_2 y_2 = A_2 x$ y $y_1 + y_2 = z$

$$\begin{aligned} ((\tilde{E}_1 E_2) \setminus (\tilde{E}_2 A_1 + \tilde{E}_1 A_2)) &\subset (E_1 \setminus A_1) + (E_2 \setminus A_2) \\ \therefore (E_1 \setminus A_1) + (E_2 \setminus A_2) &= ((\tilde{E}_1 E_2) \setminus (\tilde{E}_2 A_1 + \tilde{E}_1 A_2)) \end{aligned}$$

□

Vemos que (2.43) implica que $\tilde{E}_1 E_2 = \tilde{E}_2 E_1$ entonces la representación en (2.44) es conmutativa. Si $E_1 = E_2 = I$ entonces $\tilde{E}_1 = \tilde{E}_2 = I$ es una posibilidad en (2.43). Este resultado nos da la suma de matrices convencional $(I \setminus A_1) + (I \setminus A_2) = (I \setminus A_1 + A_2)$.

Veamos si se cumple la ley distributiva en estas relaciones:

$$(E_1 \setminus A_1)(E_2 \setminus A_2) + (E_1 \setminus A_1)(E_3 \setminus A_3) \subset (E_1 \setminus A_1)((E_2 \setminus A_2) + (E_3 \setminus A_3))$$

En efecto:

Dado $(x, z) \in (E_1 \setminus A_1)(E_2 \setminus A_2) + (E_1 \setminus A_1)(E_3 \setminus A_3)$ por definición entonces existen $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n$ tal que $(x, y_1) \in (E_1 \setminus A_1)(E_2 \setminus A_2)$, $(x, y_2) \in (E_1 \setminus A_1)(E_3 \setminus A_3)$ y $y_1 + y_2 = z$ luego existen $u, v \in \mathbb{R}^n$ tales que:

$$\begin{aligned} (x, u) \in (E_2 \setminus A_2), (u, y_1) \in (E_1 \setminus A_1) & \text{ y } (x, v) \in (E_3 \setminus A_3), (v, y_2) \in (E_1 \setminus A_1) \\ (x, u) \in (E_2 \setminus A_2) \text{ y } (x, v) \in (E_3 \setminus A_3) & \Rightarrow (x, u+v) \in (E_2 \setminus A_2) + (E_3 \setminus A_3) \\ (u, y_1) \in (E_1 \setminus A_1) & \Rightarrow E_1 y_1 = A_1 u \\ (v, y_2) \in (E_1 \setminus A_1) & \Rightarrow E_1 y_2 = A_1 v \\ E_1(y_1 + y_2) &= A_1(u + v) \\ (u + v, y_1 + y_2) &\in (E_1 \setminus A_1) \\ (u + v, z) &\in (E_1 \setminus A_1) \\ &\Rightarrow (x, z) \in (E_1 \setminus A_1)((E_2 \setminus A_2) + (E_3 \setminus A_3)) \\ \therefore (E_1 \setminus A_1)(E_2 \setminus A_2) + (E_1 \setminus A_1)(E_3 \setminus A_3) &\subset (E_1 \setminus A_1)((E_2 \setminus A_2) + (E_3 \setminus A_3)) \end{aligned}$$

Pero no se cumple que

$$(E_1 \setminus A_1)((E_2 \setminus A_2) + (E_3 \setminus A_3)) \subset (E_1 \setminus A_1)(E_2 \setminus A_2) + (E_1 \setminus A_1)(E_3 \setminus A_3)$$

En efecto:

$$E_1 = [0], E_2 = [1], E_3 = [1], A_1 = [1], A_2 = [1], A_3 = [-1]$$

2.7. Función Signo Matricial del conjunto de Matrices Rectangulares

$$(E_1 \setminus A_1) = ([0] \setminus [1]), (E_2 \setminus A_2) = ([1] \setminus [1]), (E_3 \setminus A_3) = ([1] \setminus [-1])$$

$$\begin{aligned} (E_2 \setminus A_2) + (E_3 \setminus A_3) &= \{(x, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \exists y_1, y_2 \in \mathbb{R}, (x, y_1) \in ([1] \setminus [1]) \\ &\quad, (x, y_2) \in ([1] \setminus [-1]), y_1 + y_2 = z\} \\ x = y_1, -x = y_2 &\Rightarrow 0 = y_1 + y_2 \Rightarrow z = 0 \\ &= \mathbb{R} \times \{0\} \end{aligned}$$

$(x, z) \in (E_1 \setminus A_1)((E_2 \setminus A_2) + (E_3 \setminus A_3))$ entonces existe $u \in \mathbb{R}$ tal que

$$(x, u) \in \mathbb{R} \times \{0\} \Rightarrow u = 0, (u, z) \in (E_1 \setminus A_1) = ([0] \setminus [1]) \Rightarrow u = 0$$

como $x, z \in \mathbb{R}$ son cualesquiera entonces

$$(E_1 \setminus A_1)((E_2 \setminus A_2) + (E_3 \setminus A_3)) = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

$(x, z) \in (E_1 \setminus A_1)(E_2 \setminus A_2)$ entonces existe $u \in \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{aligned} (x, u) \in ([1] \setminus [1]), (u, z) \in ([0] \setminus [1]) \\ x = u, u = 0 &\Rightarrow x = 0 \\ (x, z) &= (0, z) \end{aligned}$$

y como z es cualquiera entonces

$$(E_1 \setminus A_1)(E_2 \setminus A_2) = \{0\} \times \mathbb{R}$$

$(x, z) \in (E_1 \setminus A_1)(E_3 \setminus A_3)$ entonces existe $u \in \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{aligned} (x, u) \in ([1] \setminus [-1]), (u, z) \in ([0] \setminus [1]) \\ x = -u, u = 0 &\Rightarrow x = 0 \\ &\Rightarrow (x, z) = (0, z) \end{aligned}$$

y como z es cualquiera entonces

$$\begin{aligned} (E_1 \setminus A_1)(E_3 \setminus A_3) &= \{0\} \times \mathbb{R} \\ (E_1 \setminus A_1)(E_2 \setminus A_2) + (E_1 \setminus A_1)(E_3 \setminus A_3) &= \{0\} \times \mathbb{R} \\ (E_1 \setminus A_1)((E_2 \setminus A_2) + (E_3 \setminus A_3)) &\neq (E_1 \setminus A_1)(E_2 \setminus A_2) + (E_1 \setminus A_1)(E_3 \setminus A_3) \end{aligned}$$

Anteriormente vimos que la operación de la multiplicación de relaciones no es conmutativa.

A continuación damos el motivo porque el producto de relaciones no es conmutativo:

En efecto:

Supongamos que $(E_1 \setminus A_1)(E_2 \setminus A_2) = (E_2 \setminus A_2)(E_1 \setminus A_1)$

Consideramos el caso más simple donde todas las matrices en (2.37) son cuadradas e invertibles. Obtenemos de (2.37) que:

$(x, z) \in (E_1 \setminus A_1)(E_2 \setminus A_2)$ cualquiera entonces existe $y_1 \in \mathbb{R}^n$ tal que $(x, y_1) \in (E_2 \setminus A_2)$ y $(y_1, z) \in (E_1 \setminus A_1)$

$$\begin{aligned} E_2 y_1 &= A_2 x \Rightarrow y_1 = E_2^{-1} A_2 x \\ E_1 z &= A_1 y_1 \Rightarrow z = E_1^{-1} A_1 y_1 \\ z &= E_1^{-1} A_1 E_2^{-1} A_2 x \end{aligned}$$

2. Función Signo Matricial

$(x, z) \in (E_2 \setminus A_2)(E_1 \setminus A_1)$ cualesquiera entonces existe $y_2 \in \mathbb{R}^n$ tal que $(x, y_2) \in (E_1 \setminus A_1)$ y $(y_2, z) \in (E_2 \setminus A_2)$

$$\begin{aligned} E_1 y_2 &= A_1 x \Rightarrow y_2 = E_1^{-1} A_1 x \\ E_2 z &= A_2 y_2 \Rightarrow z = E_2^{-1} A_2 y_1 \\ z &= E_2^{-1} A_2 E_1^{-1} A_1 x \end{aligned}$$

entonces debe ocurrir que:

$$E_1^{-1} A_1 E_2^{-1} A_2 = E_2^{-1} A_2 E_1^{-1} A_1$$

si ha ésto hacemos que $A = E_1^{-1} A_1$ y $B = E_2^{-1} A_2$ luego obtenemos

$$AB = BA$$

pero es una contradicción porque este producto matricial no necesariamente es conmutativo por teoría de matrices.

\therefore la multiplicación de relaciones (2.35) no necesariamente es conmutativa.

Definición 2.7.2. Para la función signo matricial del conjunto de matrices rectangulares $A - \lambda E$; $E, A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, se entiende el límite de la sucesión de relaciones

$$(E_{k+1} \setminus A_{k+1}) = (2I_n \setminus I_n)((E_k \setminus A_k) + (E_k \setminus A_k)^{-1}), \quad (E_0 \setminus A_0) = (E \setminus A) \quad (2.45)$$

si existiera, donde las relaciones lineales $(E_k \setminus A_k)$ están definidas como en (2.35) y las operaciones son como (2.37)-(2.40) y (2.42).

En el caso de matrices cuadradas A y E en la que las condiciones del teorema 2.6.2 se imponen, la definición de la sucesión (2.45) se puede completar como sigue:

$$(E_k \setminus A_k) = (E \setminus \hat{A}_k)$$

de (2.45)

$$(E \setminus \hat{A}_{k+1}) = (2I_n \setminus I_n)((E \setminus \hat{A}_k) + (E \setminus \hat{A}_k)^{-1}), \quad (E_k \setminus A_k)^{-1} = (A_k \setminus E_k)$$

Dado cualquier $(x, z) \in (E \setminus \hat{A}_{k+1}) = (2I_n \setminus I_n)((E \setminus \hat{A}_k) + (E \setminus \hat{A}_k)^{-1})$ entonces, $Ez = \hat{A}_{k+1}x$ y $\exists y \in \mathbb{R}^n$ tal que $(y, z) \in (2I_n \setminus I_n)$ entonces, $y = 2z$ y $(x, y) \in ((E \setminus \hat{A}_k) + (E \setminus \hat{A}_k)^{-1})$ entonces, $\exists_n y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n$, $(x, y_1) \in (E \setminus \hat{A}_k)$, $(x, y_2) \in (\hat{A}_k \setminus E)$, $y = y_1 + y_2$

$$\begin{aligned} E y_1 &= \hat{A}_k x \\ E x &= \hat{A}_k y_2 \\ \hat{A}_k^{-1} E x &= y_2 \\ E y_1 + E y_2 &= E y \\ \hat{A}_k x + E \hat{A}_k^{-1} E x &= 2 E z \\ \frac{1}{2}(\hat{A}_k + E \hat{A}_k^{-1} E) x &= \hat{A}_{k+1} x, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \\ \frac{1}{2}(\hat{A}_k + E \hat{A}_k^{-1} E) &= \hat{A}_{k+1} \end{aligned}$$

$$(E_k \setminus A_k) = (E \setminus \hat{A}_k) \quad , \quad \hat{A}_{k+1} = \frac{1}{2}(\hat{A}_k + E \hat{A}_k^{-1} E); \quad \hat{A}_0 = A \quad (2.46)$$

(2.45) y (2.46) son equivalentes, pero (2.45) es equivalente al proceso iterativo de Newton generalizado (2.24), entonces (2.45) y (2.46) son equivalentes al proceso iterativo de Newton generalizado (2.24).

Capítulo 3

Ecuación Algebraica de Riccati

En el presente capítulo daremos una introducción a la *Ecuación Algebraica de Riccati* definido en $\mathbb{C}^{n \times n}$. Debido a que el conjunto solución de la *Ecuación Algebraica de Riccati* son matrices en $\mathbb{C}^{n \times n}$, este conjunto se clasificará en soluciones hermitianas y definidas, de las cuales se tratará sus propiedades y la cardinalidad de cada conjunto de soluciones teniendo en cuenta algunas hipótesis que deberá cumplir su matriz hamiltoniana. Por último se estudiará un método iterativo para la solución de la *Ecuación Algebraica de Riccati*.

Dados $A, B, C \in \mathbb{C}^{n \times n}$. B y C son matrices hermitianas esto es $B = B^*$ y $C = C^*$.

Definición 3.0.3. La ecuación cuadrática

$$XA + A^*X - XBX + C = 0 \quad (3.1)$$

para $X \in \mathbb{C}^{n \times n}$ es llamada *Ecuación Algebraica de Riccati (EAR)*

3.1. Clasificación de Soluciones

La *Ecuación Algebraica de Riccati* (3.1) puede tener soluciones que son hermitianas o no hermitianas y el conjunto de soluciones puede ser cualquiera finito o infinito.

El conjunto solución \mathbf{G} de (3.1) corresponde a una cierta clase de subespacios invariantes de dimensión " n " de la matriz $2n \times 2n$

$$H = \begin{bmatrix} A & -B \\ -C & -A^* \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

Esta matriz tiene la propiedad hamiltoniana

$$JH = -H^*J \quad (3.3)$$

donde

$$J = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Se sigue que H es similar a $-H^*$, y por tanto el espectro de H es simétrico con respecto del eje imaginario, es decir, si $\lambda = a + ib \in \sigma(H)$ con $a, b \in \mathbb{R}$ entonces $-a + ib \in \sigma(H)$.

3. Ecuación Algebraica de Riccati

Teorema 3.1.1. ([5]) Existe una correspondencia uno a uno entre el espacio solución G y el conjunto de subespacios H -invariantes n -dimensionales de \mathbb{C}^{2n} que son complementarios al subespacio n -dimensional $Sp \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}$. Esta correspondencia asigna el subespacio invariante $S_X = Sp \begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix}$ a la solución X . La matriz de $H|_{S_X}$, la restricción de H a S_X , con respecto a la base dada por las columnas de $\begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix}$ es $A - BX$.

Demostación: Si S es un subespacio n -dimensional de \mathbb{C}^{2n} que es complementario a $Sp \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}$, entonces existe una matriz X $n \times n$ tal que $S = Sp \begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix}$, si S es también H -invariante, entonces existe L una matriz $n \times n$ tal que

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} A & -B \\ -C & -A^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix} L \\ A - BX &= L \\ -C - A^*X &= XL \\ \Rightarrow -C - A^*X &= X(A - BX) \\ -C - A^*X &= XA - XBX \\ XA + A^*X - XBX + C &= 0 \end{aligned}$$

se observa que X es una solución de (3.1).

Recíprocamente si X es solución de (3.1) se tiene

$$\begin{bmatrix} A & -B \\ -C & -A^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix} (A - BX)$$

esto muestra que S es H -invariante y que $A - BX$ es la matriz de $H|_{S_X}$ con respecto a la base dadas por las columnas de $\begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix}$. \square

Ejemplo 3.1.1. Dada la ecuación cuadrática escalar

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0, \quad \text{con } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \text{ y } \alpha \neq 0$$

esto también se puede escribir de la siguiente manera

$$x \frac{\beta}{2} + \frac{\beta}{2} x - x(-\alpha)x + \gamma = 0$$

donde

$$A = \frac{\beta}{2}, \quad B = -\alpha, \quad C = \gamma$$

Dada la matriz hamiltoniana

$$\begin{bmatrix} \frac{\beta}{2} & \alpha \\ -\gamma & -\frac{\beta}{2} \end{bmatrix}$$

Defino $\delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$.

3.2. Soluciones Hermitianas

- Si $\delta \neq 0$, existen 2 subespacios H -invariantes 1-dimensional de \mathbb{C}^2

$$S_1 = Sp \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{-\beta + \sqrt{\delta}}{2\alpha} \end{bmatrix}, \quad S_2 = Sp \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{-\beta - \sqrt{\delta}}{2\alpha} \end{bmatrix}$$

que corresponden a las soluciones

$$x_1 = \frac{-\beta + \sqrt{\delta}}{2\alpha}, \quad x_2 = \frac{-\beta - \sqrt{\delta}}{2\alpha}$$

- Si $\delta = 0$, entonces existe solo un subespacio

$$S = Sp \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{\beta}{2\alpha} \end{bmatrix}$$

que corresponde a la única solución

$$x = -\frac{\beta}{2\alpha}$$

3.2. Soluciones Hermitianas

Estudiaremos el espacio de soluciones hermitianas de (3.1), que denotaremos por H , bajo la condición que $B \geq 0$.

Definición 3.2.1. Dada la matriz J definida como en (3.4). Un subespacio S de \mathbb{C}^{2n} tal que $\mu^* J \nu = 0$, para todos $\mu, \nu \in S$ será llamado J -neutral.

Esta propiedad puede ser usado para caracterizar el subconjunto H de G .

Teorema 3.2.1. ([5]) Un elemento X de G pertenece a H si y sólo si el correspondiente subespacio H -invariante $S_X = Sp \begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix}$ de \mathbb{C}^{2n} es J -neutral.

Demostración: Invocamos el teorema 3.1.1 y notamos que:

Si $S = Sp \begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix}$ es J -neutral

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} I & X^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix} &= 0 \\ \begin{bmatrix} -X^* & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix} &= 0 \\ -X^* + X &= 0 \\ X &= X^* \end{aligned}$$

Luego X es solución hermitiana.

Si $X = X^*$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} I & X^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -X^* & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix} \\ &= -X^* + X \\ &= 0 \end{aligned}$$

entonces, $Sp \begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix}$ es J -neutral. □

3. Ecuación Algebraica de Riccati

3.2.1. Existencia de Soluciones Únicas

Cada elemento X de \mathbf{H} da lugar a una factorización del polinomio característico χ_H de H como

$$\chi_H = (-1)^n q q^* \quad (3.5)$$

donde $q = \chi_{A-BX}$. Esto sigue de:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} I & 0 \\ X & I \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A & -B \\ -C & -A^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ X & I \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} I & 0 \\ -X & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & -B \\ -C & -A^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ X & I \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A & -B \\ -XA - C & XB - A^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ X & I \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A - BX & -B \\ -XA - C + XBX - A^*X & XB - A^* \end{bmatrix} \end{aligned}$$

como $X \in \mathbf{H}$ entonces $XA + A^*X - XBX + C = 0$ con $B = B^*$ y $X = X^*$ entonces

$$\begin{aligned} &= \begin{bmatrix} A - BX & -B \\ 0 & X^*B^* - A^* \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A - BX & -B \\ 0 & -(A - BX)^* \end{bmatrix} \end{aligned}$$

luego

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ X & I \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A & -B \\ -C & -A^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ X & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BX & -B \\ 0 & -(A - BX)^* \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Ahora estudiaremos la existencia de soluciones X de (3.1) que son únicas en el sentido que otra solución hermitiana de (3.1) no da lugar al mismo polinomio q .

Lema 3.2.1. (*[5]*) Dado (A, B) accesible. Entonces cada subespacio J -neutral H -invariante n -dimensional de \mathbb{C}^{2n} es complementario a $Sp \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}$.

Demostración: Dado S un subespacio J -neutral H -invariante n -dimensional cualesquiera de \mathbb{C}^{2n} y $\begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix}$ una base para S .

Afirmación: $S \cap Sp \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}$ es H -invariante

En efecto:

Desde que S es J -neutral se tiene

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} U^* & V^* \end{bmatrix} J \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} &= 0, \quad J = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} U^* & V^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} &= 0 \text{ entonces, } \begin{bmatrix} -V^* & U^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} = 0 \\ -V^*U + U^*V &= 0 \text{ entonces, } V^*U = U^*V \end{aligned}$$

3.2. Soluciones Hermitianas

desde que S es H -invariante, entonces existe una matriz $n \times n$ L tal que

$$H \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} L$$

$$\begin{bmatrix} A & -B \\ -C & -A^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} L$$

En particular ésto implica que $AU - BV = UL$. Dado $z \in \text{Ker } U$ entonces, $0 = V^*Uz = U^*Vz$ luego

$$\begin{aligned} z^*V^*(AU - BV)z &= z^*V^*ULz \\ z^*V^*AUz - z^*V^*BVz &= z^*V^*ULz \\ \text{como } Uz &= 0 \text{ entonces,} \\ -z^*V^*BVz &= z^*V^*ULz = z^*U^*VLz \quad (V^*U = U^*V) \\ &= (Uz)^*VLz \\ -z^*V^*BVz &= 0 \\ (Vz)^*BVz &= 0 \\ BVz &= 0 \\ AUz - BVz &= ULz \\ 0 &= ULz \\ Lz &\in \text{Ker } U \\ \text{Ker } U &\text{ es } L\text{-invariante} \end{aligned}$$

dado $w \in S \cap \text{Sp} \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}$ entonces, existen $u, v \in \mathbb{C}^n$ tales que

$$\begin{aligned} w &= \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} u, \quad w = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} v \\ \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} u &= \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} v \\ \begin{bmatrix} Uu \\ Vu \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ v \end{bmatrix} \\ Uu &= 0 \\ u &\in \text{Ker } U \\ S \cap \text{Sp} \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} &= \left\{ \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} z / z \in \text{Ker } U \right\} \end{aligned}$$

desde que $H \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} L$, la L -invarianza de $\text{Ker } U$ implica la H -invarianza de $S \cap \text{Sp} \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}$. Mostraremos que $\text{Sp} \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}$ no contiene ningún subespacio no trivial H -invariante siempre que (A, B) es accesible. Dados W cualquier subespacio H -invariante que está contenido en $\text{Sp} \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 0 \\ w \end{bmatrix}$ una base para W . La H -invarianza de W implica que existe una

3. Ecuación Algebraica de Riccati

matriz N tal que

$$\begin{aligned}
 H \begin{bmatrix} 0 \\ w \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A & -B \\ -C & -A^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ w \end{bmatrix} N \\
 & \begin{bmatrix} -Bw \\ -A^*w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ w \end{bmatrix} N \\
 -Bw &= 0 \text{ entonces, } Bw = 0 \\
 -A^*w &= wN \text{ entonces, } A^*w = -wN
 \end{aligned}$$

De lo anterior tenemos que $w^*B = 0$, mostraremos que se cumple

$$w^*A^nB = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

definimos el siguiente conjunto:

$$Y = \left\{ n \in \mathbb{N} / w^*A^nB = 0 \right\}$$

- veamos que $1 \in Y$

$$\begin{aligned}
 w^*AB &= (A^*w)^*B \\
 &= (-wN)^*B \\
 &= -N^*w^*B = 0 \\
 w^*AB &= 0
 \end{aligned}$$

entonces, vemos que $1 \in Y$.

- dado $m \in Y$

$$\begin{aligned}
 w^*A^{m+1}B &= (w^*A)A^mB \\
 &= (A^*w)^*A^mB \\
 &= (-wN)^*A^mB \\
 &= -N^*w^*A^mB \text{ (como } m \in Y) \\
 &= 0 \\
 w^*A^{m+1}B &= 0
 \end{aligned}$$

luego $m+1 \in Y$ entonces, por el Principio de Inducción Matemática se obtiene que

$$w^*A^nB = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

por lo tanto, $w = 0$ siempre que (A, B) es accesible.

Para concluir, la accesibilidad de (A, B) implica que S es complementario a $Sp \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}$. \square

Lema 3.2.2. ([5]) *Dados $F, G \in \mathbb{C}^{n \times n}$; G hermitiana, $G \geq 0$ y (F, G) accesible. Entonces las multiplicidades parciales de los autovalores imaginarios puros de*

$$M = \begin{bmatrix} F & -G \\ 0 & -F^* \end{bmatrix}$$

(si hay alguno) son todas pares.

3.2. Soluciones Hermitianas

Demostración: Dado iw un autovalor imaginario puro de F . Dados $U(s)$, $V(s)$ dos matrices racionales complejas $2n \times 2n$ tales que $U(s)$, $U^{-1}(s)$ y $V(s)$, $V^{-1}(s)$ no tienen un polo en $s = iw$.

Denotemos por

$$sI - M \sim D(s) \quad (3.7)$$

si

$$U(s)(sI - M)V(s) = D(s)$$

Escogemos $U(s)$ y $V(s)$ con el fin de mostrar los divisores elementales de F correspondiente a iw

$$sI - F \sim \text{diag}[1, \dots, 1, (s - iw)^{r_1}, \dots, (s - iw)^{r_\gamma}], \quad 0 < r_1 \leq \dots \leq r_\gamma$$

entonces

$$sI - M \sim \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & F_2(s) & G_2(s) \\ 0 & 0 & -F_2^*(s) \end{bmatrix}$$

donde

$$F_2(s) \sim \text{diag}[(s - iw)^{r_1}, \dots, (s - iw)^{r_\gamma}]$$

$G_2(s)$ es una matriz racional tal que $G_2(iw) \geq 0$. De hecho $G_2(iw) \geq 0$, para (F, G) accesible implica

$$\text{rang} \begin{bmatrix} F_2(iw) & G_2(iw) \end{bmatrix} = \gamma$$

mientras $F_2(iw) = 0$

obtenemos

$$sI - M \sim \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & W(s) \end{bmatrix}$$

donde $W(s) = -F_2^*(s)G_2^{-1}(s)F_2(s)$. Ésto sigue de $G_2^{-1}(iw) > 0$ que los menores principales de $W(s)$ no son ceros, desde que $F_2(s)$ es diagonal el máximo común divisor de todos los menores $k \times k$ de $W(s)$ es

$$(s - iw)^{d_k}, \quad \text{donde } d_k = \sum_{j=1}^k 2r_j; \quad k = 1, 2, \dots, \gamma$$

por tanto

$$sI - M \sim \text{diag}[1, \dots, 1, (s - iw)^{2r_1}, \dots, (s - iw)^{2r_\gamma}]$$

desde que (3.7) preserva los divisores elementales correspondiente a iw , ésto completa la prueba. \square

Lema 3.2.3. ([5]) Supongamos que (A, B) es accesible. Dado χ_H factorizado como en (3.5) donde los polinomios q y q^* tienen a lo más raíces imaginarias puras en común. Entonces, la ecuación (3.1) tiene una única solución hermitiana X tal que $\chi_{A-BX} = q$ si y sólo si las multiplicidades parciales de los autovalores imaginarios puros de H (si hay alguno) son todas pares.

3. Ecuación Algebraica de Riccati

Demostración: (\Rightarrow) Dado X una única solución hermitiana de (3.1) tal que $\chi_{A-BX} = q$ entonces de (3.6)

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ X & I \end{bmatrix}^{-1} H \begin{bmatrix} I & 0 \\ X & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BX & -B \\ 0 & -(A - BX)^* \end{bmatrix}$$

como (A, B) es accesible entonces $(A - BX, B)$ también lo es, luego el lema 3.2.2 puede ser aplicado a $F = A - BX$ y $G = B$ mostrándonos que las multiplicidades de los autovalores imaginarios puros de (3.6) y por tanto de H son todas pares.

(\Leftarrow) Primero probaremos la existencia de un subespacio J -neutral H -invariante n -dimensional S de \mathbb{C}^{2n} que es complementario a $Sp \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}$. Desde que H es hamiltoniano su espectro es simétrico con respecto al eje imaginario. Dados $iw_1, \dots, iw_\alpha, \lambda_1, -\lambda_1^*, \dots, \lambda_\beta, -\lambda_\beta^*$ los distintos autovalores de H (w_j real y λ_k no imaginario)

$$\mathbb{C}^{2n} = \varepsilon_{iw_1} \oplus \dots \oplus \varepsilon_{iw_\alpha} \oplus (\varepsilon_{\lambda_1} \oplus \varepsilon_{-\lambda_1^*}) \oplus \dots \oplus (\varepsilon_{\lambda_\beta} \oplus \varepsilon_{-\lambda_\beta^*})$$

donde ε_λ es el espacio generalizado de dimensión m_λ correspondiente al autovalor λ . Definiremos los subespacios $N_{iw_j} \subset \varepsilon_{iw_j}$, $j = 1, 2, \dots, \alpha$ como sigue. Escribimos

$$\varepsilon_{iw_j} = P_1 \oplus P_2 \oplus \dots \oplus P_\gamma$$

donde $P_1, P_2, \dots, P_\gamma$ son subespacios cíclicos cuyas dimensiones son iguales a las multiplicidades parciales del autovalor iw_j de H .

Por la hipótesis, todos ellos son pares, por ende estas multiplicidades parciales son de la forma $2r_1, 2r_2, \dots, 2r_\gamma$. Dado e_k un generador de P_k i.e. los vectores $e_k, (sI - H)e_k, \dots, (sI - H)^{2r_k-1}e_k$ forman una base de P_k y $(sI - H)^{2r_k}e_k = 0$.

Dado Q_k el espacio r_k -dimensional generado por $(sI - H)^\mu e_k$, $k = 1, 2, \dots, \gamma$ y $\mu = r_{k+1}, \dots, 2r_k$ y pongamos

$$N_{iw_j} = Q_1 \oplus Q_2 \oplus \dots \oplus Q_\gamma$$

dado S el subespacio de \mathbb{C}^{2n} definido por

$$S = N_{iw_1} \oplus \dots \oplus N_{iw_\alpha} \oplus \varepsilon_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus \varepsilon_{\lambda_\beta} \quad (3.8)$$

luego S es de dimensión n y H -invariante.

Mostraremos que S es J -neutral. Para N_{iw_j} , es suficiente mostrar que

$$e_k^*(sI - H)^{\mu} J (sI - H)^{\nu} e_l = 0$$

por definición asumiremos que $r_k \leq r_l$. En vista de (3.3)

$$e_k^*(sI - H)^{\mu} J (sI - H)^{\nu} e_l = (-1)^{\mu} e_k^*(sI - H)^{\mu+\nu} e_l \quad (3.9)$$

desde $\mu + \nu \geq 2r_k$, el lado derecho de (3.9) deberá desaparecer. Así

$$e_k^*(sI - H)^{\mu} J (sI - H)^{\nu} e_l = 0$$

luego N_{iw_j} , $j = 1, 2, \dots, \alpha$ son J -neutral.

Dada una base E para ε_{λ_j} entonces, existe una matriz L teniendo el autovalor λ_j tal que

$$HE = EL$$

3.2. Soluciones Hermitianas

de (3.3)

$$0 = E^*(JH + H^*J)E = (E^*JE)L + L^*(E^*JE)$$

desde que $\lambda_j \neq -\lambda_j^*$, tenemos que $E^*JE = 0$, luego ésto muestra que ε_{λ_j} , $j = 1, 2, \dots, \beta$ son J -neutral. Finalmente, los autoespacios correspondientes a los distintos autovalores son J -neutral, luego de esto vemos que también S debe ser J -neutral.

Desde que (A, B) es accesible, se sigue del lema 3.2.1 que S es complementario a $Sp \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}$.

Entonces usando el teorema 3.2.1 uno puede asociar con S una solución hermitiana X de (3.1) tal que $S = Sp \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}$.

Dado $q = \chi_{A-BX}$. De (3.5) se tiene por la construcción de S , el polinomio q tiene raíces $i\omega_1, \dots, i\omega_\alpha, \lambda_1, \dots, \lambda_\beta$ y así sólo unos imaginarios puros en común con q^* . Se sigue de (3.9) $N_{i\omega_j}$ es el único subespacio J -neutral H -invariante de ε_{λ_j} , cuya dimensión es la mitad de la dimensión de ε_{λ_j} . Por lo tanto el espacio S correspondiente a q es únicamente determinado, mostrando que X es la única solución de (3.1) tal que $\chi_{A-BX} = q$. \square

El lema 3.2.3 soluciona la existencia de soluciones hermitianas únicas de (3.1) bajo la asunción que (A, B) es accesible. El resultado general será obtenido por reducción al caso accesible. Dada una matriz compleja T no singular $n \times n$ y ponemos

$$\bar{A} = TAT^{-1}, \bar{B} = TBT^*, \bar{C} = (T^*)^{-1}CT^{-1} \quad (3.10)$$

y

$$\bar{X} = (T^*)^{-1}XT^{-1}$$

Observación 3.2.1. Entonces X es solución de (3.1) si y sólo si \bar{X} es solución de

$$\bar{X}\bar{A} + \bar{A}^*\bar{X} - \bar{X}\bar{B}\bar{X} + \bar{C} = 0 \quad (3.11)$$

La matriz Hamiltoniana

$$\bar{H} = \begin{bmatrix} \bar{A} & -\bar{B} \\ -\bar{C} & -\bar{A}^* \end{bmatrix}$$

de (3.11) es relativo a H por $\bar{H} = V^{-1}HV$, donde

$$V = \begin{bmatrix} T^{-1} & 0 \\ 0 & T^* \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

Desde $R_{A,B}$ es A -invariante, la matriz T en (3.10) puede ser escogida tal que

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A_1 & A_{12} \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}, \bar{B} = \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

donde $B_1 \geq 0$ y (A_1, B_1) es accesible. Pongamos

$$h = \chi_{A_2} = (\chi_A / \chi_{A|R_{A,B}})$$

Las raíces del polinomio h son precisamente estos autovalores de A que no son B -accesible. Dados \bar{C} y \bar{X} compatiblemente particionado con (3.12) como

$$\bar{C} = \begin{bmatrix} C_1 & C_{12} \\ C_{12}^* & C_2 \end{bmatrix}, \bar{X} = \begin{bmatrix} X_1 & X_{12} \\ X_{12}^* & X_2 \end{bmatrix}$$

3. Ecuación Algebraica de Riccati

entonces (3.11) se descompone en una ecuación cuadrática y dos ecuaciones lineales

$$X_1 A_1 + A_1^* X_1 - X_1 B_1 X_1 + C_1 = 0 \quad (3.13)$$

$$X_{12} A_2 + (A_1 - B_1 X_1)^* X_{12} + (X_1 A_{12} + C_{12}) = 0 \quad (3.14)$$

$$X_2 A_2 + A_2^* X_2 + (X_{12}^* A_{12} + A_{12}^* X_{12} - X_{12}^* B_1 X_{12} + C_2) = 0 \quad (3.15)$$

Los bloques X_{12} y X_2 no tienen efecto en

$$\chi_{A-BX} = \chi_{A_1 - B_1 X_1} \chi_{A_1}$$

Finalmente, denotamos por n_1, n_2 el tamaño de A_1, A_2 respectivamente y ponemos

$$H_1 = \begin{bmatrix} A_1 & -B_1 \\ -C_1 & -A_1^* \end{bmatrix}$$

entonces,

$$\chi_H = (-1)^{n_2} h \chi_{H_1} h^* \quad (3.16)$$

Lema 3.2.4. ([5]) Dado q un polinomio complejo de grado n tal que q tiene a lo más raíces imaginarias puras en común con q^* . Entonces la ecuación (3.1) tiene una única solución hermitiana X tal que $\chi_{A-BX} = q$ si y sólo si (3.13) tiene una única solución hermitiana X_1 tal que $\chi_{A_1 - B_1 X_1} = q/h$, y $h = \chi_{A_2}$.

Demostración: (\Rightarrow) Dado X solución hermitiana de (3.1) tal que $\chi_{A-BX} = q$ entonces, por la observación 3.2.1 \bar{X} es una única solución hermitiana de (3.11) con $\chi_{\bar{A} - \bar{B}\bar{X}} = q$. En particular X_1 es una única solución hermitiana de (3.13) tal que $\chi_{A_1 - B_1 X_1} = q/h$, y $h = \chi_{A_2}$. (\Leftarrow) Dado X_1 solución única hermitiana de la ecuación algebraica de Riccati (3.13) tal que $\chi_{A_1 - B_1 X_1} = q_1$, donde q_1 es un polinomio complejo teniendo a lo más raíces imaginarias puras en común con q_1^* satisfaciendo

$$\chi_{H_1} = (-1)^{n_1} q_1 q_1^*$$

Podemos asumir que q_1^* es primo relativo a h . Pero si ésto no fuera, podemos intercambiar los roles de q_1 y q_1^* y por la virtud de la accesibilidad de (A_1, B_1) aplicando el lema 3.2.3 concluimos que otra solución hermitiana X_1 de (3.13) existe teniendo ya la propiedad requerida. Por tanto, la ecuación de Sylvester (3.14) posee una única solución X_{12} . La asunción que h es relativamente primo a h^* implica que la ecuación de Lyapunov (3.15) tiene una única solución X_2 . Así la ecuación (3.11) tiene una única solución hermitiana \bar{X} tal que $\chi_{\bar{A} - \bar{B}\bar{X}} = h q_1$. Luego por la observación 3.2.1 concluimos que (3.1) tiene una única solución hermitiana X tal que $\chi_{A-BX} = h q_1$ y $h q_1$ tiene a lo más raíces imaginarias puras en común con $h^* q_1^*$. \square

Teorema 3.2.2. ([5]) Dado q un polinomio que satisface (3.5) y tiene a lo más raíces imaginarias puras en común con q^* . Entonces la ecuación (3.6) tiene una única solución hermitiana X tal que $\chi_{A-BX} = q$ si y sólo si las condiciones siguientes son satisfechas:

1. (A, B) es signo-accesible.
2. Las multiplicidades parciales de los autovalores imaginarios puros de H (si hay alguno) son pares.

3.2. Soluciones Hermitianas

Demostración:

Afirmación: (A, B) es signo-accesible si y sólo si $h = \chi_{A_2}$ es relativamente primo a h^* .

En efecto: (\Rightarrow) si (A, B) es signo-accesible entonces λ o $-\lambda^*$ es B -accesible, $\forall \lambda \in \sigma(A)$ si λ es B -accesible entonces $h(\lambda) \neq 0$, $\forall \lambda \in \sigma(A)$. Como $-\lambda^*$ no es B -accesible luego

$$v^*A = -\lambda^*v^* \quad \wedge \quad v^*B = 0 \text{ entonces } v \neq 0$$

de ésto notamos que $-\lambda$ es un autovalor de A^* entonces $-\lambda^*$ es autovalor de A^* y como $-\lambda^*$ no es B -accesible entonces $h^*(-\lambda^*) = 0$. Supongamos que $h(-\lambda^*) = 0$ luego $-\lambda^* \in A$ y $-\lambda^*$ no es B -accesible. Como $-\lambda^* \in A$ entonces $h(-\lambda^*) \neq 0$ (contradicción) por lo tanto, $h(-\lambda^*) \neq 0$, luego $-\lambda^*$ es raíz del polinomio h^* pero no es raíz del polinomio h , para todo $\lambda \in \sigma(A)$ entonces $\text{mcd}(h, h^*) = 1$. Por lo tanto, h y h^* son relativamente primos. De manera similar cuando $-\lambda^*$ es B -accesible. Entonces h y h^* son relativamente primos luego $h = \chi_{A_2}$ es relativamente primo a h^* .

(\Leftarrow) suponemos que (A, B) no es signo-accesible entonces λ_1 y $-\lambda_1^*$ no son B -accesible, para algún $\lambda_1 \in \sigma(A)$ entonces $\lambda_1 \in \sigma(A)$ y no es B -accesible luego $h(\lambda_1) = 0$.

$$\begin{aligned} v^*A &= -\lambda_1^*v^* & \wedge & & v^*B &= 0 \text{ entonces, } v \neq 0 \\ A^*v &= -\lambda_1^*v^* & \wedge & & Bv &= 0 \text{ entonces, } v \neq 0 \end{aligned}$$

entonces $\lambda_1^* \in \sigma(A^*)$ luego $\lambda_1 \in \sigma(A^*)$ y λ_1 no es B -accesible por tanto $h^*(\lambda_1) = 0$ entonces,

$$(\lambda - \lambda_1) | h(\lambda) \quad \wedge \quad (\lambda - \lambda_1) | h^*(\lambda)$$

de ésto se observa que $(\lambda - \lambda_1) | \text{mcd}(h, h^*)$ entonces, $\text{mcd}(h, h^*) \neq 1$, luego h y h^* no son relativamente primos (contradicción).

Por lo tanto, (A, B) es signo-accesible. Entonces de la afirmación y de los lemas 3.2.3 y 3.2.4 se tiene la prueba del teorema. \square

3.2.2. Soluciones Puras

Definición 3.2.2. Un elemento X de H será llamado puro si

- (a) χ_{A-BX} tiene a lo más raíces imaginarias puras en común con χ_{A-BX}^* (si hay alguno).
- (b) Las multiplicidades parciales de estas raíces imaginarias puras como autovalores de H son todas pares.

o

- (1) si $\lambda \in \sigma(A - BX)$ entonces $-\bar{\lambda} \notin \sigma(A - BX)$.

Ejemplo 3.2.1. Considerar la ecuación (3.1) donde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

tenemos

$$\begin{aligned} H &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \\ \chi_H &= (s-1)^2(s+1)^2 \end{aligned}$$

3. Ecuación Algebraica de Riccati

luego el autoespacio generalizado de H al autovector 1 son todos los $v \in \mathbb{C}^4$ tal que $(H -$

$I)^2v = 0$ luego $\varepsilon_1 = Sp \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ y para el correspondiente autovalor -1 el autoespacio

generalizado son todo los vectores $v \in \mathbb{C}^4$ tal que $(H + I)^2v = 0$ entonces, $\varepsilon_{-1} = Sp \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Existen precisamente 3 subespacios H -invariantes 2-dimensional de \mathbb{C}^4 , los cuales son $S_1 =$

ε_1 , $S_2 = \varepsilon_{-1}$ y $S_3 = Sp \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, los cuales son J -neutral

En efecto:

para S_1 , dados $v, u \in S_1$ entonces, existen α_i y $\beta_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, 2$ tal que

$$v = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad u = \alpha_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$v = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \alpha_1 \\ \beta_1 \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \alpha_2 \\ \beta_2 \end{bmatrix}$$

$$v^*Ju = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \alpha_1 & \beta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \alpha_2 \\ \beta_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\alpha_1 & -\beta_1 & \alpha_1 & \beta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \alpha_2 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$v^*Ju = 0; \quad \forall v, u \in S_1$$

entonces S_1 es J -neutral. De la misma manera para S_2 y S_3 , entonces S_1, S_2 y S_3 son J -

neutrales los cuales son complementarios a $Sp \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ i.e

$$S_1 \oplus Sp \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbb{C}^4, \quad S_2 \oplus Sp \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbb{C}^4, \quad S_3 \oplus Sp \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbb{C}^4$$

Por el teorema 3.2.1, el conjunto solución H de (3.1) consiste de 3 soluciones,

$$X_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, X_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, X_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

luego

$$\begin{aligned} A - BX_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$A - BX_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\chi_{A-BX_1} = (s-1)^2$$

$$\begin{aligned} A - BX_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$A - BX_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\chi_{A-BX_2} = (s+1)^2$$

$$\begin{aligned} A - BX_3 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$A - BX_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\chi_{A-BX_3} = s^2 - 1$$

Luego X_1 y X_2 son soluciones puras, pero X_3 no lo es ya que falla en cualquiera de los requerimientos para ser solución pura.

Ejemplo 3.2.2. Consideremos la ecuación (3.1) donde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

tenemos

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\chi_H = s^2(s^2 - 1)$$

3. Ecuación Algebraica de Riccati

el autoespacio de H correspondiente al autovalor 0 es

$$\varepsilon_0 = Sp \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y los autoespacios correspondientes a los autovalores 1 y -1 son respectivamente

$$\varepsilon_1 = Sp \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \varepsilon_{-1} = Sp \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ahora existen 2 familias de subespacios H -invariantes 2-dimensionales de \mathbb{C}^4 tal que son J -

neutral y complementarios a $Sp \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ los cuales son

$$S_1(\alpha) = Sp \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & \alpha \\ 0 & -\alpha \end{bmatrix}, \quad S_2(\alpha) = Sp \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & \alpha \\ 0 & -\alpha \end{bmatrix}$$

donde $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \alpha \\ -\alpha \end{bmatrix}$ es un vector de ε_0 para cualquier real α . Por el teorema 3.2.1 el conjunto solución \mathbf{H} de (3.1) consiste de las dos familias de soluciones.

$$X_1(\alpha) = \begin{bmatrix} -1-\alpha & \alpha \\ \alpha & -\alpha \end{bmatrix}, \quad X_2(\alpha) = \begin{bmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \alpha & -\alpha \end{bmatrix}$$

$\chi_{A-BX_1(\alpha)} = s(s-1)$ y $\chi_{A-BX_2(\alpha)} = s(s+1)$, para cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$ \mathbf{H} no contiene soluciones puras. En efecto, el requerimiento (2) de la definición 3.2.2 no se cumple desde que las multiplicidades parciales del autovalor 0 de H son 1,1.

- Las soluciones puras gozan de varias propiedades interesantes. Por un lado, son únicas: si X es una solución pura de (3.1) entonces $\chi_{A-BX} = \chi_{A-BX'}$ implica que $X = X'$ para cualquier elemento X' de \mathbf{H} . Esto es una consecuencia del teorema 3.2.2. Dados X_1 un elemento puro de \mathbf{H} y $\chi_{A-BX_1} = q$. En virtud de la accesibilidad, lema 3.2.3 implica la existencia de un elemento único X_2 de \mathbf{H} tal que χ_{A-BX_2} es cualquier polinomio complejo de grado n que tiene a lo más raíces imaginarias puras en común con $\chi_{A-BX_1}^*$. En particular tomemos χ_{A-BX_2} entonces, X_2 es un elemento puro de \mathbf{H} . Decimos que X_1 y X_2 son un par de soluciones puras opuestas de (3.1).
- Existe un par especial de soluciones puras opuestas que es de particular importancia. Corresponde a la factorización de (3.10) en que q tiene todas sus raíces con parte real no positiva y q^* con parte real no negativa. Designaremos estas soluciones X_+ y X_- , deduciremos los siguientes resultados del teorema 3.2.2.

3.2. Soluciones Hermitianas

Corolario 3.2.1. ([5]) Existe una única solución hermitiana X_+ de (3.1) tal que todos los autovalores de $A - BX_+$ tienen parte real no positiva si y sólo si (A, B) es estabilizable y las multiplicidades de los autovalores imaginarios puros de H (si hubiera) son todas pares.

Demostración: Un caso especial del teorema 3.2.2 donde todas las raíces de h tienen parte real negativa i.e donde (A, B) es estabilizable. \square

Corolario 3.2.2. ([5]) Existe una única solución hermitiana X_- de (3.1) tal que todos los autovalores de $A - BX_-$ tienen parte real no negativa si y sólo si $(-A, B)$ es estabilizable y las multiplicidades de los autovalores imaginarios puros de H (si hubiera) son todas pares.

Demostración: Un caso especial del teorema 3.2.2 donde todas las raíces de h tienen parte real positiva i.e donde $(-A, B)$ es estabilizable. \square

Corolario 3.2.3. ([5]) La clase H de soluciones hermitianas contiene ambos elementos X_+ y X_- si y sólo si (A, B) es accesible y las multiplicidades parciales de los autovalores imaginarios puros de H (si hubiera) son todas pares.

Demostración: (A, B) y $(-A, B)$ son estabilizables si y sólo si (A, B) es accesible. \square

Ejemplo 3.2.3. Consideremos la ecuación (3.1) donde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \chi_H &= s^4 - 5s^2 + 4 \\ &= (s+1)(s+2)(s-1)(s-2) \end{aligned}$$

los autoespacios de H ,

$$\varepsilon_1 = Sp \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \varepsilon_{-1} = sp \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \varepsilon_2 = Sp \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \varepsilon_{-2} = Sp \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

son asociados a los autovalores $1, -1$ y $2, -2$ respectivamente. Aplicando el teorema 3.2.1 obtenemos el siguiente par de soluciones puras

$$X_+ = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, X_- = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

que corresponde a la factorización

$$\chi_H = (s^2 - 3s + 2)(s^2 + 3s + 2)$$

3. Ecuación Algebraica de Riccati

y

$$X_{-1,2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad X_{-2,1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

que corresponde a la factorización

$$\chi_H = (s^2 - s - 2)(s^2 + s - 2)$$

no existe mas soluciones de (3.1).

3.2.3. Teoremas de Clasificación

- Los teoremas 3.1.1 y 3.2.1 describen el conjunto \mathbf{H} de soluciones hermitianas de (3.1) relacionándola con el conjunto de subespacios J -neutral H -invariantes n -dimensional de \mathbb{C}^{2n} que son complementarios al subespacio n -dimensional $Sp \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}$. No explican, sin embargo, cómo los requisitos de la neutralidad y la complementariedad cortan un subconjunto del conjunto de todos los subespacios H -invariantes n -dimensionales.
- Daremos una clasificación más simple para el conjunto solución \mathbf{H} con relación a cierto subconjunto del conjunto de subespacios invariantes de la matriz $A - BX_+$ o la matriz $A - BX_-$, la asunción de que X_+ y X_- ambos existen.

Lema 3.2.5. ([5]) *Suponemos que \mathbf{H} es no vacío y (A, B) es accesible. Dados X_1, X_2 dos elementos de \mathbf{H} y ponemos $D = X_2 - X_1$. Dado π, ν, δ el número de autovalores (contados de acuerdo a las multiplicidades) de D con parte real positiva, negativa y cero respectivamente. Entonces,*

- (i) *Ker D es invariante bajo $A - BX_1$.*
- (ii) *$A - BX_1$ tiene π autovalores con parte real positiva y ν autovalores con parte real negativa que no están asociados con Ker D .*

Demostración: La prueba se encuentra en [5] página 68 □

Teorema 3.2.3. ([5]) *Suponemos que \mathbf{H} contiene a X_+ y X_- . Si X es cualquier elemento de \mathbf{H} , entonces*

$$X_+ \geq X \geq X_-$$

Demostración: Tomemos $X_1 = X_+, X_2 = X$ en el lema 3.2.5. Desde que $A - BX_1$ no tiene autovalores con parte real positiva, $X - X_+$ también. Así $X - X_+ \leq 0$, similarmente, tomando $X_1 = X, X_2 = X_-$ se ve que $X - X_- \geq 0$ entonces

$$X_- \leq X \leq X_+$$

□

Ésto es porque X_+ y X_- son llamados las soluciones extremas de (3.1), X_+ es el elemento maximal de \mathbf{H} mientras X_- es el elemento minimal de \mathbf{H} . Ponemos $\Delta = X_+ - X_-$ y lo llamaremos la brecha de (3.1).

3.2. Soluciones Hermitianas

Lema 3.2.6. ([5]) *Suponemos que \mathbf{H} contiene a X_+ y X_- . Si X es cualquier elemento de \mathbf{H} , entonces*

$$\text{Ker } \Delta = L_{A-BX}^0 \quad (3.17)$$

y

$$A - BX_+|_{\text{Ker } \Delta} = A - BX_-|_{\text{Ker } \Delta} \quad (3.18)$$

Demostración: Si $v \in \text{Ker } \Delta$ entonces, $X_+v = Xv = X_-v$ desde que

$$0 \leq v^*(X_+ - X)v \leq v^*(X_+ - X_-)v = 0$$

por el lema 3.2.5 (i) $\text{Ker } \Delta$ es invariante bajo $A - BX_+$. Así ésta es igual de invariante bajo $A - BX_-$. La restricción de $A - BX_+$ a $\text{Ker } \Delta$ tiene solo autovalores imaginarios puros. Por el lema 3.2.5 (ii), $A - BX_+$ no tienen a otros autovalores imaginarios puros, si $A - BX_-$ tiene un autovalor puro imaginario adicional entonces por lema 3.2.5 (ii) de nuevo, que estaría asociado con el núcleo de $X_+ - X$ y por tanto es un autovalor de $A - BX_+$. Esto prueba (3.17).

Desde que

$$(A - BX_+) = (A - BX_-) - B\Delta$$

se ve fácilmente que $A - BX_+ = A - BX_-$ en el $\text{Ker } \Delta$, que es (3.18). \square

Resultará fácil denotar:

$$\begin{aligned} A_+ &= A - BX_+ & , & & A_- &= A - BX_- \\ U_+ &= L_{A_+}^{\ell} & , & & U_- &= L_{A_-}^r \end{aligned}$$

y

$$U_0 = L_{A_+}^0 = L_{A_-}^0 (= \text{Ker } \Delta)$$

Notemos que

$$L_{A_-}^{\ell} = L_{A_+}^r = 0$$

Teorema 3.2.4. ([5]) *Suponemos que \mathbf{H} contiene a X_+ y X_- . Dado V cualquier subespacio A_+ -invariante contenido en U_+ y \tilde{V} el complemento Δ -ortogonal de V en \mathbb{C}^n . Entonces*

$$\mathbb{C}^n = V \oplus \tilde{V}$$

Y supongamos que P la proyección sobre V a lo largo \tilde{V} . Existe una correspondencia 1 - 1 entre el conjunto solución \mathbf{H} de (3.1) y el conjunto de subespacios invariantes de $A_+|_{U_+}$. Esta correspondencia asigna la solución

$$X = X_+P + X_-(I - P) \quad (3.19)$$

al subespacio invariante V . Más aún,

$$L_{A-BX}^{\ell} = V, L_{A-BX}^0 = U_0, L_{A-BX}^r = \tilde{V} \cap U_-$$

Demostración: Se ve que $U_0 \subset \tilde{V}$. Si $u \in V \cap \tilde{V}$ cualquiera entonces $u^* \Delta u = 0$. Desde $\Delta \geq 0$ se sigue que $\Delta u = 0$. Como $U_0 \cap V = 0$ esto implica que $u = 0$. Por lo tanto $V \cap \tilde{V} = 0$. Tenemos también

$$\dim \tilde{V} = n - \dim \Delta V$$

3. Ecuación Algebraica de Riccati

y, por $U_0 \cap V = 0$, $\dim \Delta V = \dim V$. De esto se sigue que

$$V \oplus \tilde{V} = \mathbb{C}^n$$

La diferencia Δ satisface la ecuación

$$\Delta A_- + A_+^* \Delta = 0 \quad (3.20)$$

que es derivada de (3.1). Si $v \in V$ y $\tilde{v} \in \tilde{V}$ entonces por (3.20), $v^* \Delta A_- \tilde{v} = -v^* A_+^* \Delta \tilde{v} = 0$, desde que V es invariante bajo A_+ . Por tanto \tilde{V} es invariante bajo A_- . Así la proyección P satisface

$$P A_+ P = A_+ P \quad (3.21)$$

y $(I - P) A_- (I - P) = A_- (I - P)$; ésto es

$$P A_- P = P A_- \quad (3.22)$$

desde \tilde{V} es Δ -ortogonal a V tenemos también $P^* \Delta (I - P) = 0$ de ésto se obtiene que $P^* \Delta = P^* \Delta P$, como el lado derecho es hermitiana ($\Delta = \Delta^*$)

$$\begin{aligned} P^* \Delta^* (P^*)^* &= \Delta^* (P^*)^* \\ P^* \Delta &= P^* \Delta P = \Delta P \end{aligned}$$

entonces

$$P^* \Delta = \Delta P \quad (3.23)$$

por (3.21) y (3.22)

$$\begin{aligned} (I - P) A_+ &= (I - P) A_+ (I - P) = (I - P) (A_- - B \Delta) (I - P) \\ &= A_- (I - P) - (I - P) B \Delta (I - P) \end{aligned}$$

por (3.20)

$$\Delta (I - P) A_+ + A_+^* \Delta (I - P) + \Delta (I - P) B \Delta (I - P) = 0$$

si definimos X por (3.14) entonces,

$$\begin{aligned} D &= X_+ - X = \Delta (I - P), \text{ por (3.23)} \\ D^* &= (I - P)^* \Delta \\ &= (I - P^*) \Delta \\ &= \Delta - P^* \Delta \\ &= \Delta - \Delta P \\ &= \Delta (I - P) = D \\ D^* &= D \end{aligned}$$

entonces D es hermitiana y así X también lo es. Sabemos que $X = X_+ - \Delta (I - P)$ luego

$$\begin{aligned} X A + A^* X - X B X + C &= [X_+ - \Delta (I - P)] A + A^* [X_+ - \Delta (I - P)] \\ &\quad - [X_+ - \Delta (I - P)] B [X_+ - \Delta (I - P)] + C \\ &= X_+ A - \Delta (I - P) A + A^* X_+ - A^* \Delta (I - P) - X_+ B X_+ \\ &\quad + X_+ B \Delta (I - P) + \Delta (I - P) B X_+ - \Delta (I - P) B \Delta (I - P) \\ &\quad + C \end{aligned}$$

3.2. Soluciones Hermitianas

como X_+ es solución de (3.1) y $A = A_+ + BX_+$

$$\begin{aligned}
 &= -\Delta(I-P)(A_+ + BX_+) - (A_+ + BX_+)^*\Delta(I-P) + X_+B\Delta(I-P) \\
 &+ \Delta(I-P)BX_+ - \Delta(I-P)B\Delta(I-P) \\
 &= -\Delta(I-P)A_+ - \Delta(I-P)BX_+ - (A_+^* + BX_+^*)\Delta(I-P) + X_+B\Delta(I-P) \\
 &+ \Delta(I-P)BX_+ - \Delta(I-P)B\Delta(I-P) \\
 &= -\Delta(I-P)A_+ - A_+^*\Delta(I-P) - BX_+\Delta(I-P) + BX_+\Delta(I-P) \\
 &- \Delta(I-P)B\Delta(I-P) \\
 &= -[\Delta(I-P)A_+ + A_+^*\Delta(I-P) + \Delta(I-P)B\Delta(I-P)] \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

entonces

$$XA + A^*X - XBX + C = 0$$

luego X es solución de (3.1). Si D es la solución de esta ecuación

$$DA_+ + A_+^* + DBD = 0$$

pero ya hemos demostrado que éste es el caso. Además

$$Xu = X_+u, u \in V$$

$$Xu = X_-u, u \in \tilde{V}$$

Por tanto V y \tilde{V} son invariantes bajo $A - BX$ y todos los autovalores de la restricción de $A - BX$ a V, \tilde{V} tienen partes reales negativa, no negativa respectivamente. Ésto prueba que V está determinado únicamente por X y que $L_{A-BX}^\ell = V$, $L_{A-BX}^r = \tilde{V} \cap U_-$ y $L_{A-BX}^0 = U_0$. Recíprocamente, dado X cualquier elemento de \mathbf{H} . Dados $V = L_{A-BX}^\ell$ y \tilde{V} el complemento Δ -ortogonal de V en \mathbb{C}^n . Se sigue que

$$Xu = X_+u, u \in V$$

$$Xu = X_-u, u \in \tilde{V}$$

Así si P es la proyección sobre V a lo largo de \tilde{V} entonces satisface (3.19). Más aún V es invariante bajo A_+ y $U_0 \cap V = 0$. Por tanto $V \subset U_+$. Desde que $X_+ - X = \Delta(I-P)$ es hermitiana, (3.23) se da. Por tanto, desde que P es una proyección, $P^*\Delta = P^*\Delta P$; que es

$$P^*\Delta(I-P) = 0$$

de aquí \tilde{V} es Δ -ortogonal a V . Desde que

$$\mathbb{C}^n = V \oplus \tilde{V}$$

se sigue de la primera parte de la demostración que \tilde{V} es el subespacio de todos los u que son Δ -ortogonales a V . Y luego se completa la prueba. \square

Existe un resultado dual en que X_+ es reemplazado por su opuesto X_- .

Teorema 3.2.5. ([5]) *Suponemos que \mathbf{H} contiene a X_+ y X_- . Dado W cualquier subespacio A_- -invariante contenido en U_- y \tilde{W} el complemento Δ -ortogonal de W en \mathbb{C}^n . Entonces*

$$\mathbb{C}^n = W \oplus \tilde{W}$$

3. Ecuación Algebraica de Riccati

Y supongamos que P' la proyección sobre W a lo largo \widetilde{W} . Existe una correspondencia 1 - 1 entre el conjunto solución H de (3.1) y el conjunto de subespacios invariantes de $A_-|_{U_-}$. Esta correspondencia asigna la solución

$$X = X_+P' + X_-(I - P') \quad (3.24)$$

al subespacio invariante W . Más aún,

$$L_{A-BX}^r = W, L_{A-BX}^0 = U_0, L_{A-BX}^l = \widetilde{W} \cap U_+$$

Demostración: Similar a la prueba teorema 3.2.4. □

Teorema 3.2.6. ([5]) Suponemos que H contiene a X_+ y X_- . Dados X_1, X_2 elementos de H correspondientes a los subespacios invariantes V_1, V_2 de $A_+|_{U_+}$ (o W_1, W_2 de $A_-|_{U_-}$). Entonces $X_1 \geq X_2$ si y sólo si $V_1 \supset V_2$ (o si y sólo si $W_1 \subset W_2$).

Demostración: (\Leftarrow) Supongamos primero que $V_1 \supset V_2$, entonces por el teorema 3.2.4, $V_1 \subset \widetilde{V}_2$. En V_2 tenemos $X_1u = X_+u = X_2u$, en \widetilde{V}_1 tenemos $X_1u = X_-u = X_2u$. Además $V_2 + \widetilde{V}_1$ está contenida en $\text{Ker}(X_1 - X_2)$ y es invariante bajo $A - BX_1$ y $A - BX_2$. El resto de autovalores de $A - BX_1$ tienen parte real negativa, mientras que el resto de autovalores de $A - BX_2$ tienen parte real no negativa. Así

$$\text{Ker}(X_1 - X_2) = V_2 \oplus \widetilde{V}_1$$

se sigue del lema 3.2.5 (ii) que $X_1 - X_2 \geq 0$, entonces $X_1 \geq X_2$.

(\Rightarrow) Supongamos que $X_1 \geq X_2$. El núcleo de $X_1 - X_2$ es invariante bajo $A - BX_2$ y así tiene una única descomposición

$$\text{Ker}(X_1 - X_2) = K_- \oplus K_+$$

donde K_-, K_+ son invariantes bajo $A - BX_2$ y todos los autovalores de la restricción de $A - BX_2$ a K_-, K_+ tienen respectivamente parte real negativa, no negativa. Así tenemos $K_- \subset V_1, K_- \subset V_2$. Por el lema 3.2.5 (ii) los autovalores de $A - BX_2$ no pertenecen al $\text{Ker}(X_1 - X_2)$ tienen parte real positiva. Así $\dim K_- = \dim V_2$, por tanto $K_- = V_2$ y $V_1 \supset V_2$. □

3.2.4. Cardinalidad de Soluciones

Ahora prestaremos atención a la cardinalidad del conjunto solución H , asumiendo que H contiene a ambos X_+ y X_- . Dados β el número de autovalores distintos de $A - BX_+|_{U_+}$ y m_1, m_2, \dots, m_β las multiplicidades de estos autovalores. Debido a las simetrías de H la matriz $A - BX_-|_{U_-}$ muestra la misma estructura de los autovalores.

Teorema 3.2.7. ([5]) Suponemos que H contiene a X_+ y X_- . Entonces H tiene cardinalidad finita si y sólo si $A_+|_{U_+}$ (o $A_-|_{U_-}$) es cíclico. En este caso, H contiene exactamente $(m_1 + 1) \dots (m_\beta + 1)$ elementos.

Demostración: desde que H está en correspondencia 1 - 1 con el conjunto de subespacios invariantes (de todas las dimensiones posibles) de $A_+|_{U_+}$, ésta tiene cardinalidad finita entonces hay un número finito de autovectores asociados a cada autovalor de $A_+|_{U_+}$. Éste es el caso si y sólo si $A_+|_{U_+}$ es cíclico.

Ahora suponemos que $A_+|_{U_+}$ es cíclico. Si λ_j es un autovalor de $A_+|_{U_+}$ con multiplicidad

3.2. Soluciones Hermitianas

m_j , $j = 1, 2, \dots, \beta$, entonces los autoespacios generalizados asociados con λ_j tienen dimensión m_j . Así éste contiene exactamente $m_j + 1$ subespacios que son invariantes bajo A_+ , teniendo las dimensiones $0, 1, \dots, m_j$. Esto prueba el teorema para $A_+|_{U_+}$. Usando la clasificación dual de \mathbf{H} , $A_+|_{U_+}$ puede ser reemplazado por $A_-|_{U_-}$ manteniéndose el mismo resultado. \square

Corolario 3.2.4. (*[5]*) *Suponemos que \mathbf{H} contiene a X_+ y X_- . Si o no $A_+|_{U_+}$ es cíclico, \mathbf{H} contiene exactamente 2^β elementos.*

Demostración: La prueba se encuentra en [5] página 73. \square

Corolario 3.2.5. (*[5]*) *Suponemos que \mathbf{H} es no vacío y (A, B) es accesible. Entonces \mathbf{H} contiene un solo elemento $X_+ = X_-$ si y sólo si los autovalores de H son imaginarios puros.*

Demostración: Tenemos $X_+ = X_-$ si y sólo si $L_{A_+}^\ell = 0 = L_{A_-}^r$. \square

Si $A_+|_{U_+}$ es no cíclico, al menos uno de sus autovalores está asociado con una familia infinita de subespacios invariantes, así que \mathbf{H} es infinito. Notemos, luego, que \mathbf{H} es nunca infinito contable. Es finito o contiene al menos una familia continua de soluciones.

Ejemplo 3.2.4. *Considerar la ecuación (3.1) donde*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y clasificar el conjunto solución \mathbf{H}

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\chi_H = (s-1)^2(s+1)^2$$

y los autoespacios correspondientes a los autovalores 1, -1 de H son

$$\varepsilon_1 = Sp \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \varepsilon_{-1} = Sp \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

así

$$X_+ = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad X_- = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{son las soluciones extremas}$$

$$A_+ = A - BX_+ = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A_- = A - BX_- = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y observamos que $U_+ = \mathbb{C}^2$, $U_- = \mathbb{C}^2$. El conjunto de subespacios invariantes de A_+ (otros que 0 y \mathbb{C}^2 que corresponden a X_+ o X_-) es la familia de subespacios 1-dimensional V_θ de

3. Ecuación Algebraica de Riccati

\mathbb{C}^2 parametrizada por su ángulo polar θ . Desde que $\Delta = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, concluimos que P es la proyección ortogonal en V_θ ,

$$P = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \operatorname{sen} \theta \cos \theta \\ \operatorname{sen} \theta \cos \theta & \operatorname{sen}^2 \theta \end{bmatrix}$$

usando (3.19), la solución X_θ que corresponde a V_θ es

$$X_\theta = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \operatorname{sen} 2\theta \\ \operatorname{sen} 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix}$$

Por tanto H consiste de X_+ , X_- y la familia de funciones continuas X_θ y $X_+ \geq X_\theta \geq X_-$.

3.3. Soluciones Definidas

Ahora estaremos tratando con el conjunto de soluciones hermitianas de (3.1) que son definidas. Usando P para designar el conjunto de soluciones definidas no negativas y N para designar al conjunto de soluciones definidas no positivas. Estos dos conjuntos los estudiaremos bajo la asunción de que $B \geq 0$ y $C \geq 0$.

3.3.1. Existencia de Soluciones Extremas

El punto inicial de nuestro análisis son los corolarios 3.2.1 y 3.2.2. La asunción adicional es que $C \geq 0$, donde combinado con la estabilidad de (A, B) o $(-A, B)$, será para impedir que la matriz H tenga un autovalor imaginario puro con una multiplicidad parcial impar. Se tienen los siguientes resultados:

Teorema 3.3.1. ([5]) *El conjunto solución P contiene un único elemento X_+ tal que cada autovalor de $A - BX_+$ tiene parte real no positiva si y sólo si (A, B) es estabilizable.*

Demostración: (\Leftarrow) supongamos que (A, B) es estabilizable. Entonces existe una matriz X_0 (no necesariamente hermitiana) tal que $A - BX_0$ es estable. Construyamos por inducción una sucesión X_1, X_2, \dots de matrices hermitianas definidas no negativas que satisfacen las siguientes condiciones:

(a)_k $A - BX_k$ es estable.

(b)_k $X_{k+1}(A - BX_k) + (A - BX_k)^* X_{k+1} = -C - X_k B X_k - \frac{1}{k+1} I$.

(c)_k $X_{k+1} \leq X_k$.

Desde que $A - BX_0$ es estable usando la proposición 1.1.2, existe una única matriz X_1 definida no negativa tal que satisface la ecuación de Lyapunov

$$X_1(A - BX_0) + (A - BX_0)^* X_1 = -C - X_0 B X_0 - I$$

3.3. Soluciones Definidas

que puede ser etiquetada $(b)_0$. El requerimiento $(a)_k$ entonces determina únicamente una matriz definida no negativa X_{k+1} que satisface $(b)_k$. Primero probaremos que $(a)_{k+1}$ se cumple. En efecto, por $(b)_k$,

$$\begin{aligned} X_{k+1}(A - BX_{k+1}) + (A - BX_{k+1})^* X_{k+1} &\leq -X_{k+1}BX_{k+1} - (X_k - X_{k+1})B(X_k - X_{k+1}) \\ &\quad - \frac{1}{k+1}I \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

desde que $X_{k+1} \geq 0$, tenemos que $A - BX_{k+1}$ es estable.

Probaremos que se cumple $(c)_{k+1}$, tenemos por $(b)_k$

$$\begin{aligned} (X_k - X_{k+1})(A - BX_k) + (A - BX_k)^*(X_k - X_{k+1}) &\leq -(X_k - X_{k+1})B(X_k - X_{k+1}) \\ &\quad - \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) I \\ &< 0 \end{aligned}$$

desde que $A - BX_k$ es estable, se sigue que $X_k - X_{k+1} \geq 0$, entonces completamos la construcción inductiva.

Como X_1, X_2, \dots es una sucesión no creciente de matrices hermitianas definidas no negativas, éstas convergen a una matriz hermitiana definida no negativa X_+ . Luego de $(a)'_s$ y $(b)'_s$ se tiene que X_+ es una solución de (3.1) y que $A - BX_+$ tiene todos sus autovalores con parte real no negativa.

(\Rightarrow) Dado X_+ que existe teniendo las propiedades requeridas. Entonces (A, B) es estabilizable por el corolario 3.2.1. \square

Teorema 3.3.2. ([5]) *El conjunto solución N contiene un único elemento X_- tal que cada autovalor de $A - BX_-$ tiene parte real no negativa si y sólo si $(-A, B)$ es estabilizable.*

Demostración: Aplicando el teorema 3.3.1 para determinar la solución $-X_+$ de la ecuación

$$-XA - A^*X - XBX + C = 0$$

\square

- Por unicidad, las soluciones X_+ y X_- obtenidas en los teoremas 3.3.1 y 3.3.2 son las soluciones extremas de \mathbf{H} estudiadas en la sección anterior. La condición $C \geq 0$ asegura que X_+ pertenece a \mathbf{P} y X_- pertenece a \mathbf{N} . La existencia de X_+ , pero, excluye la existencia de X_- y viceversa, a menos que (A, B) es accesible.

Teorema 3.3.3. ([5]) *Si \mathbf{P} contiene a X_+ , entonces*

$$\text{Ker } X_+ = D_{-A, C} \quad (3.25)$$

Si \mathbf{N} contiene a X_- , entonces

$$\text{Ker } X_- = D_{A, C} \quad (3.26)$$

Demostración: Probaremos (3.26). Si $X_-u = 0$, entonces de (3.1)

$$\begin{aligned} X_-Au + Cu &= 0 \\ u^*X_-Au + u^*Cu &= 0 \\ (X_-u)^*Au + u^*Cu &= 0 \\ u^*Cu &= 0 \quad (C \geq 0) \\ Cu &= 0 \end{aligned}$$

3. Ecuación Algebraica de Riccati

y entonces $X_-Au = 0$. Así tenemos $Ker X_- \subset O_{A,C}$. $Ker X_- \subset L_A^0 \oplus L_A^r$, desde que los autovalores de A restringidos a $Ker X_-$ deberán ser también autovalores de A_- . Juntos,

$$Ker X_- \subset D_{A,C}$$

para mostrar la otra inclusión consideramos una base donde

$$X_- = \begin{bmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

y $X_1 < 0$, donde A , B y C son compatiblemente particionados como

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_{12} \\ A_{21} & A_2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_1 & B_{12} \\ B_{21}^* & B_2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} C_1 & C_{12} \\ C_{21}^* & C_2 \end{bmatrix}$$

entonces (3.1) se divide como sigue

$$\begin{aligned} X_1 A_1 + A^* X_1 - X_1 B_1 X_1 + C_1 &= 0 \\ X_1 A_{12} + C_{12} &= 0 \\ C_2 &= 0 \end{aligned}$$

desde que $C \geq 0$, vemos que $C_{12} = 0$ y entonces $A_{12} = 0$. Así $D_{A,C} \subset Ker X_-$ entonces

$$Ker X_- = D_{A,C}$$

De manera análoga se prueba (3.25). □

Ya conocemos que X_+ y X_- ambos existen si y sólo si (A, B) es accesible. Desde que ambos (A, C) y $(-A, C)$ son detectables si y sólo si (A, C) es observable, completamos la figura notando que X_+ y X_- son ambos no singulares (ésto es, $X_+ > 0$ y $X_- < 0$) si y sólo si (A, B) es observable.

3.3.2. Teoremas de Clasificación

Ahora probaremos resultados de clasificación para los conjuntos \mathbf{P} y \mathbf{N} que son similares a los de \mathbf{H} . Notemos que $X_+ \leq 0$ solamente en $Ker X_+$ y $X_- \geq 0$ solamente en $Ker X_-$. Por lo tanto, si \mathbf{H} contiene a ambos X_+ y X_- , el conjunto \mathbf{P} puede ser estudiado restringiendo \mathbf{H} a $Ker X_-$ y el conjunto \mathbf{N} puede ser estudiado restringiendo \mathbf{H} a $Ker X_+$. Tenemos $A - BX_+ = A$ en $Ker X_+$ y $A - BX_- = A$ en $Ker X_-$. Por tanto V es un subespacio A_+ -invariante contenido en $U_+ \cap Ker X_+$ si y sólo si V es un subespacio A -invariante contenido en $O_{A,C} \cap L_A^l$ y similarmente, W es un subespacio A_- -invariante contenido en $U_- \cap Ker X_-$ si y sólo si W es un subespacio A -invariante contenido en $O_{A,C} \cap L_A^r$. También se tiene

$$\Delta V = X_- V \quad , \quad \Delta W = X_+ W$$

y los teoremas de clasificación para \mathbf{P} y \mathbf{N} puede ser deducidos de los teoremas 3.2.4 y 3.2.5 respectivamente. Que estamos buscando, pero, es la clasificación de \mathbf{P} y \mathbf{N} donde X_+ y X_- existen individualmente.

3.3. Soluciones Definidas

Teorema 3.3.4. ([5]) *Suponemos que P contiene a X_+ . Dado W cualquier subespacio A -invariante contenido en $O_{A,C} \cap L_A^r$ y \widetilde{W} el complemento X_+ -ortogonal de W en \mathbb{C}^n , entonces*

$$\mathbb{C}^n = W \oplus \widetilde{W}$$

y suponemos que Q es la proyección sobre W a lo largo de \widetilde{W} . Hay una correspondencia 1-1 entre el conjunto solución P de (3.1) y el conjunto de subespacios invariantes de $A|_{O_{A,C} \cap L_A^r}$. Esta correspondencia asigna la solución

$$X = X_+(I - Q) \quad (3.27)$$

al subespacio invariante W . Más aún,

$$L_{A-BX}^r = W, L_{A-BX}^0 = U_0, L_{A-BX}^\ell = \widetilde{W} \cap U_+$$

Demostración: Primero mostraremos que cada elemento X de P puede ser asociado con un subespacio A -invariante W contenido en $O_{A,C} \cap L_A^r$. En efecto, tomamos

$$W = L_A^r, \quad \widetilde{W} = L_A^\ell \oplus L_A^0$$

y dado Q que denota la proyección sobre W a lo largo de \widetilde{W} . De (3.1),

$$X(A - BX) + (A - BX)^*X = -XBX - C$$

desde que W es invariante bajo $A - BX$

$$Q(A - BX)Q = (A - BX)Q$$

entonces

$$QXQ[(A - BX)Q] + [(A - BX)Q]^*QXQ = -Q(XBX + C)Q$$

y todos los autovalores de $(A - BX)Q$ tienen parte real positiva. Desde que $-Q(XBX + C)Q \leq 0$, se sigue de la proposición 1.1.2 que $QXQ \leq 0$. Entonces $XQ = 0$ así $CQ = 0$. Por tanto $W \subset \text{Ker } C$ y $A - BX = A$ en W . Por tanto W es A -invariante, contenido en $O_{A,C} \cap L_A^r$, y únicamente determinado por X .

Suponemos inversamente que W es un subespacio invariante en $O_{A,C} \cap L_A^r$. Entonces

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} w \\ 0 \end{bmatrix} : w \in W \right\}$$

es H -invariante. Denotemos por \widetilde{M} el complemento J -ortogonal de M en \mathbb{C}^{2n} . Por (3.3), JM es H^* -invariante así que M es H -invariante. Por tanto el subespacio

$$N = \widetilde{M} \cap \text{Sp} \begin{bmatrix} I \\ X_+ \end{bmatrix}$$

es también H -invariante.

Ahora ponemos $S = M + N$ y mostraremos que S es un subespacio J -neutral H -invariante n -dimensional de \mathbb{C}^{2n} que es complementario a $\text{Sp} \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}$. Desde que M es J -ortogonal a N y

3. Ecuación Algebraica de Riccati

desde que M y N son ambos J -neutral, S es J -neutral. Debido a que M y N son linealmente independientes,

$$\begin{aligned} \dim S &= \dim M + \dim N \\ &= \dim M + \dim Sp \begin{bmatrix} I \\ X_+ \end{bmatrix} - \dim JM \\ &= \dim Sp \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \end{aligned}$$

así que S es n -dimensional. Finalmente, suponemos que

$$\begin{bmatrix} w \\ 0 \end{bmatrix} \in M, \quad \begin{bmatrix} v \\ X_+v \end{bmatrix} \in N \quad (3.28)$$

y $v + w = 0$. Desde que M es ortogonal a N tenemos $w^* X_+v = 0$, así $v^* X_+v = 0$. Entonces $X_+v = 0$ y así

$$\begin{bmatrix} w \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v \\ X_+v \end{bmatrix} = 0$$

mostrando que S es complementario a $Sp \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}$.

Por el teorema 3.2.1, el subespacio S da lugar a una solución hermitiana X de (3.1) dada por

$$S = Sp \begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix}$$

ponemos

$$\widetilde{W} = \left\{ v \in \mathbb{C}^n : \begin{bmatrix} v \\ X_+v \end{bmatrix} \in N \right\}$$

entonces \widetilde{W} es el complemento X_+ -ortogonal de W en \mathbb{C}^n y $\mathbb{C}^n = W \oplus \widetilde{W}$. En vista de (3.28) cualquier vector

$$\begin{bmatrix} u \\ X u \end{bmatrix} \in S$$

puede ser escrito como

$$\begin{bmatrix} u \\ X u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v \\ X_+v \end{bmatrix}$$

donde $w \in W$ y $v \in \widetilde{W}$, desde que

$$Qw = w, \quad Qv = 0$$

se obtiene

$$X u = X_+(I - Q)v = X_+(I - Q)u$$

esto prueba (3.27) y $X_+ \geq 0$ implica que $X \geq 0$. Más aún

$$\begin{aligned} X u &= 0, \quad u \in W \\ X u &= X_+u, \quad u \in \widetilde{W} \end{aligned}$$

3.3. Soluciones Definidas

así W y \widetilde{W} son invariantes bajo $A - BX$ y todos los autovalores de la restricción de $A - BX$ a W , \widetilde{W} tienen parte real positiva respectivamente y no positiva.

Ésto prueba que

$$L_{A-BX}^r = W, L_{A-BX}^0 = U_0, L_{A-BX}^\ell = \widetilde{W} \cap U_+$$

□

Teorema 3.3.5. ([5]) *Suponemos que N contiene a X_- . Dado V cualquier subespacio A -invariante contenido en $O_{A,C} \cap L_A^\ell$ y \widetilde{V} el complemento X_- -ortogonal de V en \mathbb{C}^n , entonces*

$$\mathbb{C}^n = V \oplus \widetilde{V}$$

y suponemos que Q' es la proyección sobre V a lo largo de \widetilde{V} . Hay una correspondencia 1-1 entre el conjunto solución N de (3.1) y el conjunto de subespacios invariantes de $A|_{O_{A,C} \cap L_A^\ell}$. Esta correspondencia asigna la solución

$$X = X_-(I - Q') \quad (3.29)$$

al subespacio invariante W . Más aún,

$$L_{A-BX}^\ell = V, L_{A-BX}^0 = U_0, L_{A-BX}^r = \widetilde{V} \cap U_-$$

Demostración: De manera similar a la prueba del teorema 3.3.4. □

Teorema 3.3.6. ([5]) *Supongamos que P contiene a X_+ , dados X_1, X_2 elementos de P correspondientes a los subespacios invariantes W_1, W_2 de $A|_{O_{A,C} \cap L_A^r}$ entonces, $X_1 \geq X_2$ si y sólo si $W_1 \subset W_2$.*

Demostración: (\Leftarrow) Suponemos primero que $W_1 \subset W_2$, entonces por el teorema 3.3.4 se tiene $\widetilde{W}_1 \supset \widetilde{W}_2$. En W_1 tenemos $X_1 u = X_2 u = 0$, en \widetilde{W}_2 tenemos $X_1 u = X_2 u = X_+ u$. Por tanto $W_1 \oplus \widetilde{W}_2$ está contenido en $\text{Ker}(X_1 - X_2)$ y es invariante bajo $A - BX_1$ y $A - BX_2$. El resto de autovalores de $A - BX_1$ tienen parte real no positiva mientras el resto de autovalores de $A - BX_2$ tienen parte real positiva. Así $\text{Ker}(X_1 - X_2) = W_1 \oplus \widetilde{W}_2$. $X_1 - X_2$ satisface la ecuación cuadrática:

$$(X_1 - X_2)(A - BX_2) + (A - BX_2)^*(X_1 - X_2) - (X_1 - X_2)B(X_1 - X_2) = 0 \quad (3.30)$$

Considerar una base en que

$$X_1 - X_2 = \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

y D es no singular. Correspondiente, escribimos

$$B = \begin{bmatrix} B_1 & B_{21}^* \\ B_{21} & B_2 \end{bmatrix}, A - BX_2 = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ A_{21} & A_2 \end{bmatrix}$$

entonces (3.30) se reduce a

$$\begin{aligned} DA_1 + A_1^* D - B_1 &= 0 \text{ entonces,} \\ D(-A_1) + (-A_1)^* D + B_1 &= 0 \end{aligned}$$

3. Ecuación Algebraica de Riccati

desde que $B_1 \geq 0$ y todos los autovalores de A_1 tienen parte real positiva o sea $-A_1$ es estable, por proposición 1.1.2, existe $D \geq 0$ entonces $X_1 - X_2 \geq 0$ luego $X_1 \geq X_2$.

(\Leftarrow) suponemos $X_1 \geq X_2$. El núcleo de $X_1 - X_2$ es invariante bajo $A - BX_1$, y así tiene una única descomposición

$$\text{Ker}(X_1 - X_2) = K_+ \oplus K_-$$

donde K_+, K_- son invariantes bajo $A - BX_2$ y todos los autovalores de la restricción de $A - BX_2$ a K_+, K_- tienen respectivamente parte real positiva, no positiva. Así se tiene $K_+ \subset W_1, K_- \subset W_2$. Desde $X_1 - X_2 \geq 0$ los autovalores de $A - BX_2$ no pertenecen a $\text{Ker}(X_1 - X_2)$ tienen parte real negativa por (3.30). Por lo tanto, $\dim K_+ = \dim W_1$, así $K_+ = W_1$ entonces $W_1 \subset W_2$. \square

Teorema 3.3.7. ([5]) *Supongamos que N contiene a X_- , dados X_1, X_2 elementos de N correspondientes a los subespacios invariantes V_1, V_2 de $A|_{O_{A,C} \cap L_A^\ell}$ entonces, $X_1 \leq X_2$ si y sólo si $V_1 \subset V_2$.*

Demostración: Similar a la prueba del teorema 3.3.6. \square

Las solución maximal X_+ de P está asociado con $W = 0$ y la solución minimal X_- de N con $V = 0$. El elemento minimal de P , que corresponde al subespacio A -invariante $W = A|_{O_{A,C} \cap L_A^r}$, será denotado por X_\square mientras el elemento maximal de N , que corresponde al subespacio A -invariante $V = A|_{O_{A,C} \cap L_A^\ell}$ será denotado por X_\diamond .

Dados ρ el número de los distintos autovalores de $A|_{O_{A,C} \cap L_A^r}$ y p_1, p_2, \dots, p_ρ las multiplicidades de estos autovalores. Similarmente, dados σ el número de los distintos autovalores de $A|_{O_{A,C} \cap L_A^\ell}$ y $q_1, q_2, \dots, q_\sigma$ las multiplicidades de estos autovalores.

Teorema 3.3.8. ([5]) *Supongamos que P contiene a X_+ entonces, P tiene cardinalidad finita si y sólo si $A|_{O_{A,C} \cap L_A^r}$ es cíclico. En este caso P contiene exactamente $(p_1 + 1) \dots (p_\rho + 1)$ elementos.*

Demostración: Análogo al teorema 3.2.7. \square

Teorema 3.3.9. ([5]) *Supongamos que N contiene a X_- entonces, N tiene cardinalidad finita si y sólo si $A|_{O_{A,C} \cap L_A^\ell}$ es cíclico. En este caso N contiene exactamente $(q_1 + 1) \dots (q_\sigma + 1)$ elementos.*

Demostración: Análogo al teorema 3.2.7. \square

Si $A|_{O_{A,C} \cap L_A^r}$ no es cíclico, al menos uno de sus autovalores es asociado con una familia infinita de subespacios invariantes, así que P es infinito. Similarmente, si $A|_{O_{A,C} \cap L_A^\ell}$ no es cíclico, entonces N contiene al menos una familia continua de soluciones.

Ejemplo 3.3.1. *Considerar la ecuación (3.1) donde*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

y clasificar los conjuntos solución P y N .

Tenemos

$$X_+ = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}, \quad X_- = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3.3. Soluciones Definidas

En cuanto al conjunto P , notemos que

$$O_{A,C} \cap L_A^r = \mathbb{C}^2$$

hay 3 subespacios A -invariantes

$$W_+ = 0, W_1 = Sp \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, W_\square = \mathbb{C}^2$$

cuyos complementos X_+ -ortogonales son

$$\widetilde{W}_+ = \mathbb{C}^2, \widetilde{W}_1 = Sp \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \widetilde{W}_\square = 0$$

los cuales producen las proyecciones

$$Q_+ = 0, Q_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, Q_\square = I$$

usando (3.27) encontramos que los elementos de P son

$$X_+ = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}, X_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, X_\square = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

por el teorema 3.3.6

$$X_+ \geq X_1 \geq X_\square$$

En cuanto al conjunto N , notamos que

$$O_{A,C} \cap L_A^\ell = 0$$

y así X_- es la única solución definida no positiva de (3.1).

Ejemplo 3.3.2. Considerar la ecuación (3.1) donde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

se ve que ni (A, B) ni $(-A, B)$ es estabilizable, así que ni X_+ ni X_- existen, y nuestro análisis anterior no se aplica. El conjunto H está formado por una familia continua de soluciones

$X_\alpha = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}$, para cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$. Por tanto ambos P y N son conjuntos infinitos.

3.3.3. Estabilización de soluciones

- Una solución hermitiana X de (3.1) se dice que es estable si $A - BX$ es estable, y anti-estable si $-(A - BX)$ es estable. Es claro que la solución estable, si ella existe, es la solución hermitiana maximal de (3.1), y si $C \geq 0$ ella es definida no negativa. Similarmente la solución anti-estable, si existe, es la solución minimal de (3.1) y si $C \geq 0$ ésta es definida no positiva.

3. Ecuación Algebraica de Riccati

- La existencia de solución estable, anti-estable por tanto depende en que $A - BX_+$, $A - BX_-$ tengan solamente autovalores con parte real negativa, positiva respectivamente.

Corolario 3.3.1. ([5]) *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- P contiene una solución estable.
- (A, B) es estabilizable y H no tiene autovalores imaginarios puros.
- (A, B) es estabilizable y los autovalores imaginarios puros de A , si hubiera, son todos C -observable.

Demostración:

- $(i) \Leftrightarrow (ii)$

El conjunto P contiene una solución estable, llamémosla X_+ si y sólo si todos los autovalores de $A - BX_+$ tienen parte real negativa. Por el corolario 3.2.1, esto es equivalente a (ii). por lo tanto $(i) \Leftrightarrow (ii)$.

- $(ii) \Leftrightarrow (iii)$

1. $(ii) \Rightarrow (iii)$

Supongamos que existe un autovalor imaginario puro de A tal que no es C -observable, esto es si $Au = iwu$, $Cu = 0$ para algún real w y $u \neq 0$ entonces,

$$\begin{aligned} H \begin{bmatrix} u \\ 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A & -B \\ -C & -A^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} Au \\ -Cu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} iwu \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= iw \begin{bmatrix} u \\ 0 \end{bmatrix} \\ \text{entonces } H \begin{bmatrix} u \\ 0 \end{bmatrix} &= iw \begin{bmatrix} u \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

así H tienen un autovalor imaginario puro y esto es una contradicción con (ii). Por lo tanto todos los autovalores imaginarios puros de A son C -observables, esto es $(ii) \Rightarrow (iii)$.

2. $(iii) \Rightarrow (ii)$

Suponemos que H tiene un autovalor imaginario puro, por ejemplo iw . Desde que (A, B) es estabilizable, X_+ existe y por (3.6) $A_+v = iwv$ para algún $v \neq 0$. Se sigue de

$$X_+A_+ + A_+^*X_+ + (C + X_+BX_+) = 0$$

que $v^*(C + X_+BX_+) = 0$ desde $B \geq 0$ y $C \geq 0$ entonces $Cv = BX_+v = 0$, así $Cv = 0$ y $Av = iwv$. Luego iw autovalor de A no es C -observable y esto es una contradicción con (iii). Por lo tanto, H no tiene autovalores imaginarios puros. Esto es $(iii) \Rightarrow (ii)$.

3.4. Método iterativo para la Ecuación Algebraica de Riccati

□

Corolario 3.3.2. ([5]) *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- (i) *N contiene una solución anti-estable.*
- (ii) *$(-A, B)$ es estabilizable y H no tiene autovalores imaginarios puros.*
- (iii) *$(-A, B)$ es estabilizable y los autovalores imaginarios puros de A , si hubiera, son todos C -observable.*

Demostración: Similar a la prueba del corolario 3.3.1. □

Corolario 3.3.3. ([5]) *El conjunto P contiene un solo elemento $X_+ = X_\square$ y éste elemento es una solución estable si y sólo si (A, B) es estabilizable y (A, C) es detectable.*

Demostración: Por teorema 3.3.6, se tiene $X_+ = X_\square$ si y sólo si $O_{A,C} \cap L_A^r = 0$ y combinando esto con el corolario 3.3.2 se muestra que $O_{A,C} \cap L_A^r = D_{A,C}$ entonces

$$D_{A,C} = 0$$

$A - BX_+$ es estable, por el teorema 3.3.1 (A, B) es estabilizable y $D_{A,C} = 0$ entonces (A, C) es detectable. □

Corolario 3.3.4. ([5]) *El conjunto N contiene un solo elemento $X_- = X_\diamond$ y éste elemento es una solución anti-estable si y sólo si $(-A, B)$ es estabilizable y $(-A, C)$ es detectable.*

Demostración: Similar a la prueba del corolario 3.3.3. □

3.4. Método iterativo para la Ecuación Algebraica de Riccati

Dado \mathcal{H} el espacio vectorial de todas las matrices hermitianas sobre el cuerpo \mathbb{R} . Para cualquier $X, Y \in \mathcal{H}$, escribimos $X \geq Y$ si $X - Y$ es semi-definida positiva. Para cualquier $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, el espectro de A será denotado por $\sigma(A)$. La conjugada transpuesta de A será denotada por A^* . Denotaremos por $\mathbb{C}_< (\mathbb{C}_\leq)$ al conjunto de números complejos con parte real negativa (respectivamente no positiva).

Definición 3.4.1. *Una matriz A se dice que es de Hurwitz si $\sigma(A) \subset \mathbb{C}_<$.*

Definición 3.4.2. *Para A, B y $C \in \mathbb{C}^{n \times n}$:*

1. *El par (A, B) es estabilizable si $A - BK$ es Hurwitz para algún $K \in \mathbb{C}^{n \times n}$.*
2. *El par (C, A) es detectable si (A^*, C^*) es estabilizable.*

Consideremos la Ecuación Algebraica de Riccati de la forma:

$$\mathcal{R}(X) = A^*X + XA + Q - XSX = 0 \quad (3.31)$$

con $A, Q, S \in \mathbb{C}^{n \times n}$, con $Q = Q^*$, $S = S^*$ y ninguna suposición de definición de signo se colocará en las matrices Q y S .

3. Ecuación Algebraica de Riccati

La primera derivada de Frechet de la función de Riccati \mathcal{R} en una matriz X es un mapeo lineal $\mathcal{R}'_X : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ dado por:

$$\mathcal{R}'_X(Z) = (A - SX)^*Z + Z(A - SZ) \quad (3.32)$$

también la segunda derivada en X , $\mathcal{R}''_X : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ es dada por:

$$\mathcal{R}''_X(Z_1, Z_2) = -Z_1SZ_2 - Z_2SZ_1 \quad (3.33)$$

El método de Newton aplicado a la Ecuación Algebraica de Riccati (3.31) es

$$X_{i+1} = X_i - (\mathcal{R}'_{X_i})^{-1}\mathcal{R}(X_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (3.34)$$

Dado que los mapeos \mathcal{R}'_{X_i} son todos invertibles. En vista de (3.32), la iteración (3.34) es equivalente a

$$(A - SX_i)^*X_{i+1} + X_{i+1}(A - SX_i) = -X_iSX_i - Q \quad (3.35)$$

Definición 3.4.3. Una solución X en la Ecuación Algebraica de Riccati (3.31) es llamada

- Estable si $\sigma(A - SX) \subset \mathbb{C}_<$.
- Semi-estable si $\sigma(A - SX) \subset \mathbb{C}_\leq$.
- Maximal si X es hermitiana y $X \geq \hat{X}$ para cualquier solución hermitiana \hat{X} de la ecuación algebraica de Riccati (3.31).

Para obtener secuencias monótonas, en el método de Newton (3.34), tendremos en cuenta el esquema iterativo modificado como sigue:

$$(A - DX_i)^*X_{i+1} + X_{i+1}(A - DX_i) = -Q - X_iDX_i - X_iWX_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (3.36)$$

Lema 3.4.1. ([1]) Para cualquier matriz hermitiana S , denotemos por $\lambda^*(S)$ su más pequeño autovalor. Entonces para cualquier $\alpha \geq 0$ tal que $\alpha \geq -\lambda^*(S)$, $D = \alpha I_n + S \geq 0$.

Demostración: Ver [1]. □

Pongamos $S = D - W$, con $W = \alpha I_n$ y $D = \alpha I_n + S$, $\alpha \geq \min\{0, -\lambda^*(S)\}$. La motivación para introducir el nuevo proceso iterativo (3.36) consiste en utilizar las hipótesis $S = D - W$, con $W \geq 0$, $D \geq 0$ para probar la monotonicidad de las sucesión (X_k) , $\forall k \geq 0$. Utilizando la definición de $\mathcal{R}(X)$, el proceso iterativo (3.36) puede ser escrito como:

$$(A - DX_i)^*(X_{i+1} - X_i) + (X_{i+1} - X_i)(A - DX_i) = -\mathcal{R}(X_i) \quad (3.37)$$

Lema 3.4.2. ([1]) Dados $A, Q \in \mathbb{C}^{n \times n}$ con A Hurwitz y Q hermitiana. Entonces la ecuación de Lyapunov $A^*X + XA = Q$ tiene una única solución X (no necesariamente Hermitiana). Si $Q \leq 0$, entonces $X \geq 0$.

Demostración: Ver [1]. □

Teorema 3.4.1. Asumimos que existe una solución semidefinida hermitiana \hat{X} para $\mathcal{R}(X) \geq 0$ y una matriz hermitiana X_0 tal que $X_0 \geq \hat{X}$ y $(A - DX_0)$ es Hurwitz. Entonces la iteración (3.35) define una sucesión $(X_i)_{i \geq 0}$ tal que

- $X_i \geq X_{i+1}$ y $X_i \geq \hat{X}$.

3.4. Método iterativo para la Ecuación Algebraica de Riccati

- b) $\mathcal{R}(X_i) \leq 0, \forall i \geq 0.$
c) $\sigma(A - DX_i) \subset \mathbb{C}_<, \forall i \geq 0.$
d) $\lim_{i \rightarrow \infty} X_i = \bar{X}$ es una solución de (3.31) y $\bar{X} \geq \hat{X}.$
e) $\sigma(A - D\bar{X}) \subset \mathbb{C}_<$

Demostración: Se probará por inducción que para cada $\forall i \geq 0, X_{i+1}$ está únicamente determinado y $X_i \geq X_{i+1}, X_i \geq \hat{X}$

$$\mathcal{R}(X) \leq 0, \sigma(A - DX_i) \subset \mathbb{C}_< \quad (3.38)$$

para $i = 0$, ya se tiene $X_0 \geq \hat{X}, \mathcal{R}(X_0) \leq 0$, y $\sigma(A - DX_0) \subset \mathbb{C}_<.$ Por (3.37) con $i = 0$, tenemos

$$(A - DX_0)^*(X_1 - X_0) + (X_1 - X_0)(A - DX_0) = -\mathcal{R}(X_0) \geq 0 \quad (3.39)$$

Usando lema 3.4.2, $X_0 \geq X_1$, y X_1 está únicamente determinado.

Asumimos que X_{k+1} está únicamente determinado y (3.38) es cierto para $i = k (k \geq 0).$

Por (3.31) y (3.36) con $i = k$

$$\begin{aligned} & (A - DX_k)^*(X_{k+1} - \hat{X}) + (X_{k+1} - \hat{X})(A - DX_k) \\ &= (A^* - X_k D)(X_{k+1} - \hat{X}) + (X_{k+1} - \hat{X})(A - DX_k) \\ &= A^* X_{k+1} - A^* \hat{X} - X_k DX_{k+1} + X_k D\hat{X} + X_{k+1} A - X_{k+1} DX_k - \hat{X} A + \hat{X} DX_k \\ &= (A^* - X_k D)X_{k+1} + X_{k+1}(A - DX_k) - A^* \hat{X} - \hat{X} A + X_k D\hat{X} + \hat{X} DX_k \\ &= (A - DX_k)^* X_{k+1} + X_{k+1}(A - DX_k) - A^* \hat{X} - \hat{X} A + X_k D\hat{X} + \hat{X} DX_k \\ &= -X_k DX_k - X_k W X_k - Q - A^* \hat{X} - \hat{X} A + X_k D\hat{X} + \hat{X} DX_k \end{aligned}$$

Como $\mathcal{R}(X) \geq 0$ entonces,

$$\begin{aligned} A^* \hat{X} + \hat{X} A + Q - \hat{X} S \hat{X} &\geq 0 \\ -\hat{X} S \hat{X} &\geq -A^* \hat{X} - \hat{X} A - Q \\ -\hat{X} D \hat{X} + \hat{X} W \hat{X} &\geq -A^* \hat{X} - \hat{X} A - Q \end{aligned}$$

De ésto la parte superior se convierte

$$\begin{aligned} &\leq -X_k W X_k - X_k DX_k + \hat{X} W \hat{X} - \hat{X} D \hat{X} + X_k D \hat{X} + \hat{X} DX_k \\ &= -(X_k W X_k - \hat{X} W \hat{X}) - (X_k - \hat{X}) D (X_k - \hat{X}) \leq 0 \\ 0 &\leq (A - DX_k)^*(X_{k+1} - \hat{X}) + (X_{k+1} - \hat{X})(A - DX_k) \end{aligned} \quad (3.40)$$

Así $X_{k+1} \geq \hat{X}$ por lema 3.4.2. Para mostrar que $A - DX_{k+1}$ es Hurwitz, se ve $A - DX_{k+1} = A - DX_k + D(X_k - X_{k+1}),$

$$\begin{aligned} & (A - DX_{k+1})^*(X_{k+1} - \hat{X}) + (X_{k+1} - \hat{X})(A - DX_{k+1}) \\ &\leq -(X_k W X_k - \hat{X} W \hat{X}) - (X_k - \hat{X}) D (X_k - \hat{X}) + (X_k - X_{k+1}) D (X_{k+1} - \hat{X}) \\ &+ (X_{k+1} - \hat{X}) D (X_k - X_{k+1}) \\ &\leq -(X_k W X_k - \hat{X} W \hat{X}) - X_{k+1} - \hat{X}) D (X_{k+1} - \hat{X}) - (X_k - X_{k+1}) D (X_k - X_{k+1}) \end{aligned}$$

3. Ecuación Algebraica de Riccati

De ésto, entonces

$$(A - DX_{k+1})^*(X_{k+1} - \hat{X}) + (X_{k+1} - \hat{X})(A - DX_{k+1}) \leq -(X_k - X_{k+1})D(X_k - X_{k+1}) \quad (3.41)$$

Si $(A - DX_{k+1})$ no es Hurwitz, dado λ un autovalor de $A - DX_{k+1}$ con $Re(\lambda) \geq 0$ y $(A - DX_{k+1})x = \lambda x$, para algún $x \neq 0$, por (3.41). Para este $x \neq 0$ se tiene,

$$2Re(\lambda)x^*(X_{k+1} - \hat{X})x \leq -x^*(X_k - X_{k+1})D(X_k - X_{k+1})x \quad (3.42)$$

entonces,

$$\begin{aligned} 0 &\leq -x^*(X_k - X_{k+1})D(X_k - X_{k+1})x \leq 0 \\ -x^*(X_k - X_{k+1})D(X_k - X_{k+1})x &= 0 \\ D(X_k - X_{k+1})x &= 0 \end{aligned}$$

Ahora, $(A - DX_k)x = (A - DX_{k+1})x = \lambda x$, luego $\lambda \in \sigma(A - DX_k)$ que es una contradicción ya que $\sigma(A - DX_k) \subset \mathbb{C}_{<}$; por lo tanto $(A - DX_{k+1})$ es Hurwitz i.e. $\sigma(A - DX_{k+1}) \subset \mathbb{C}_{<}$. Entonces, X_{k+2} está únicamente determinado y

$$\begin{aligned} &(A - DX_{k+1})^*(X_{k+1} - X_{k+2}) + (X_{k+1} - X_{k+2})(A - DX_{k+1}) \quad (3.43) \\ &= (A - DX_k + D(X_k - X_{k+1}))^*X_{k+1} + X_{k+1}(A - DX_k + D(X_k - X_{k+1})) \\ &+ X_{k+1}WX_{k+1} + X_{k+1}DX_{k+1} + Q \\ &= -(X_kWX_k - X_{k+1}WX_{k+1}) - X_kDX_k + X_{k+1}DX_{k+1} + (X_k - X_{k+1})DX_{k+1} \\ &+ X_{k+1}D(X_k - X_{k+1}) \\ &= -(X_kWX_k - X_{k+1}WX_{k+1}) - (X_k - X_{k+1})D(X_k - X_{k+1}) \leq 0 \\ 0 &\leq (A - DX_{k+1})^*(X_{k+1} - X_{k+2}) + (X_{k+1} - X_{k+2})(A - DX_{k+1}) \quad (3.44) \end{aligned}$$

Así, $X_{k+1} \geq X_{k+2}$. Desde

$$(A - DX_{k+1})^*(X_{k+1} - X_{k+2}) + (X_{k+1} - X_{k+2})(A - DX_{k+1}) = \mathcal{R}(X_{k+1}) \quad (3.45)$$

Tenemos que $\mathcal{R}(X_{k+1}) \leq 0$.

El proceso de inducción es ahora completo. Así la sucesión $(X_i)_{i \geq 0}$ está bien definida, monótona decreciente y acotada inferiormente por \hat{X} . Por lo tanto, la sucesión $(X_i)_{i \geq 0}$ posee límite $\lim_{i \rightarrow \infty} X_i = \bar{X}$ y como $X_i \geq \hat{X}$, $\forall i \geq 0$ entonces

$$\lim_{i \rightarrow \infty} X_i \geq \hat{X} \text{ entonces } \bar{X} \geq \hat{X}$$

Tomando límites es (3.35) se tiene

$$\begin{aligned} \lim_{i \rightarrow \infty} ((A - DX_i)^*X_{i+1} + X_{i+1}(A - DX_i)) &= \lim_{i \rightarrow \infty} (-Q - X_iDX_i - X_iWX_i) \\ (A - D\bar{X})^*\bar{X} + \bar{X}(A - D\bar{X}) &= -Q - \bar{X}D\bar{X} - \bar{X}W\bar{X} \\ A^*\bar{X} - \bar{X}D\bar{X} + \bar{X}A - \bar{X}S\bar{X} &= -Q - \bar{X}D\bar{X} - \bar{X}W\bar{X} \\ A^*\bar{X} + \bar{X}A + Q + \bar{X}(W - D)\bar{X} &= 0 \\ A^*\bar{X} + \bar{X}A + Q - \bar{X}S\bar{X} &= 0 \\ \mathcal{R}(\bar{X}) &= 0 \end{aligned}$$

Así \bar{X} es una solución de (3.31). Desde que $\sigma(A - DX_i) \subset \mathbb{C}_{<}$, para cada $i \geq 0$, $\sigma(A - D\bar{X})$.
□

3.4. Método iterativo para la Ecuación Algebraica de Riccati

Corolario 3.4.1. *Asumimos que X_0 es una cota superior para el conjunto solución de (3.31) (i.e $X_0 \geq X$ para toda solución X de (3.31)), entonces \bar{X} es la solución maximal de (3.31).*

Demostración: De manera directa usando el teorema 3.4.1. □

Capítulo 4

Ecuación Algebraica de Riccati en espacios de Hilbert

En el capítulo 3 tratamos la *Ecuación Algebraica de Riccati* en el espacio $\mathbb{C}^{n \times n}$, en el presente capítulo lo haremos en espacios de Hilbert. Para tal propósito usaremos los conceptos y propiedades de base de Riesz vistas en el capítulo 1 para la obtención de una solución de dicha ecuación, para luego clasificar el conjunto solución de la Ecuación Algebraica de Riccati en espacios de Hilbert. Veremos como usar la función signo matricial vista en el capítulo 2 en la solución de la ecuación de Riccati, Sylvester y Lyapunov. Por último estudiaremos la ecuación del calor vista como una *Ecuación Algebraica de Riccati* dando sus respectivas soluciones.

4.1. Clasificación de las soluciones de la EAR

4.1.1. Forma General de las Soluciones

Lema 4.1.1. *Suponemos que la hipótesis 1.2.1 se mantiene. Para $\lambda \in R(A)$ las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. Para todo $z_1, z_2 \in D(A)$

$$\langle Az_1, Xz_2 \rangle + \langle X^*z_1, Az_2 \rangle + \langle Q_2z_1, z_2 \rangle - \langle Q_1X^*z_1, Xz_2 \rangle = 0 \quad (4.1)$$

2. $Im(X|_{D(A)}) \subset D(A^*)$ y

$$A^*X + XA + Q_2 - XQ_1X = 0 \quad (4.2)$$

3.

$$A^*(\bar{\lambda}I - A^*)^{-1}X(\lambda I - A)^{-1} + (\bar{\lambda}I - A^*)^{-1}\{XA + Q_2 - XQ_1X\}(\lambda I - A)^{-1} = 0 \quad (4.3)$$

Demostración: De inmediato con la definición de operador adjunto y propiedades respectivas. \square

Demostraremos el siguiente lema que nos servirá para demostraciones de lemas y teoremas posteriores.

4. Ecuación Algebraica de Riccati en espacios de Hilbert

Lema 4.1.2. *Suponemos que se tienen las hipótesis 1.2.1 y 1.2.2. Si el conjunto índice $J \subset \mathbb{Z}_0$ es tal que $\{\eta_n, n \in J\}$ es una base de Riesz para Z y el operador lineal X es definido por*

$$X\eta_n = \xi_n, \text{ para } n \in J$$

entonces,

1. $X \in L(Z)$.
2. $\sigma_p(A - Q_1X) = \{\lambda_n, n \in J\}$, y el autovector correspondiente a λ_n es η_n .

Demostración:

1. Desde $\{\eta_n, n \in J\}$ es una base de Riesz para Z , tenemos que cada combinación finita de los η_n 's es linealmente independiente. Por tanto X está bien definida en $\underset{n \in J}{\text{span}}\{\eta_n\}$.

Para mostrar que $X \in L(Z)$, es suficiente mostrar que X es un operador acotado en el espacio denso $\underset{n \in J}{\text{span}}\{\eta_n\}$. Notar que el conjunto índice $J \subset \mathbb{Z}_0$ es isomórfico a \mathbb{N} . Luego sin pérdida de generalidad, asumiremos que $J = \mathbb{N}$. Para arbitrario $N \in \mathbb{N}$ tenemos

$$\begin{aligned} \|X \sum_{n=1}^N \alpha_n \eta_n\|^2 &= \left\| \sum_{n=1}^N \alpha_n \xi_n \right\|^2 \leq \left\| \sum_{n=1}^N \alpha_n \xi_n \right\|^2 + \left\| \sum_{n=1}^N \alpha_n \eta_n \right\|^2 \\ &= \left\| \sum_{n=1}^N \alpha_n \Phi_n \right\|^2 \leq M \left\| \sum_{n=1}^N \alpha_n \right\|^2 \\ &\text{desde que } \Phi_n \text{ es una base de Riesz para } Z \oplus Z \\ &\leq \frac{M}{c} \left\| \sum_{n=1}^N \alpha_n \eta_n \right\|^2 \end{aligned}$$

desde que $\{\eta_n\}$ es una base de Riesz para Z . Usando ésto una vez más, da que $X \in L(Z)$.

2. Mostraremos que λ_n es un autovalor de $A - Q_1X$ con autovector correspondiente η_n . Por hipótesis

$$\begin{aligned} H\Phi_n &= \lambda_n \Phi_n \\ \begin{pmatrix} A & -Q_1 \\ -Q_2 & -A^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_n \\ \xi_n \end{pmatrix} &= \lambda_n \begin{pmatrix} \eta_n \\ \xi_n \end{pmatrix} \\ \Rightarrow A\eta_n - Q_1\xi_n &= \lambda_n \eta_n \end{aligned}$$

usando el hecho de que $X\eta_n = \xi_n$ obtenemos que

$$(A - Q_1X)\eta_n = \lambda_n \eta_n \text{ para todo } n \in J \quad (4.4)$$

así $\{\lambda_n, n \in J\} \subset \sigma_p(A - Q_1X)$. Por demostrar que $\sigma_p(A - Q_1X) \subset \{\lambda_n, n \in J\}$.

Supongamos que λ es un autovalor de $A - Q_1X$ con autovector correspondiente z ; i.e.

$$(A - Q_1X)z = \lambda z \quad (4.5)$$

Asumimos ahora que $(A - Q_1X)$ es inversible, de otro modo podemos reemplazar $(A - Q_1X)$ por $(\mu I - (A - Q_1X))$ con $\mu \in R(A - Q_1X)$. Desde que $X \in L(Z)$ se tiene que

4.1. Clasificación de las soluciones de la EAR

$A - Q_1X$ genera un C_0 -semigrupo en Z y por tanto $R(A - Q_1X) \neq 0$. Ahora (4.5) se convierte

$$z = (A - Q_1X)^{-1}\lambda z \quad (4.6)$$

dada $\{\eta_n, \psi_n\}$ una sucesión biortogonal. Tenemos que para cada $z \in Z$

$$z = \sum_{n \in J} \langle z, \psi_n \rangle \eta_n$$

Así

$$\begin{aligned} (A - Q_1X)^{-1}\lambda z &= \sum_{n \in J} \lambda \langle z, \psi_n \rangle (A - Q_1X)^{-1}\eta_n \\ &= \sum_{n \in J} \frac{\lambda}{\lambda_n} \langle z, \psi_n \rangle \eta_n \text{ por (4.4)} \end{aligned} \quad (4.7)$$

Notamos desde que $(A - Q_1X)$ es inversible, $\lambda_n \neq 0$ para $n \in J$. Usando (4.6) y (4.7) tenemos que

$$\langle z, \psi_n \rangle = \langle \lambda (A - Q_1X)^{-1}z, \psi_n \rangle = \frac{\lambda}{\lambda_n} \langle z, \psi_n \rangle, \quad \forall n \in J$$

caso 1: $\lambda \neq \lambda_n$ para todo $n \in J$. Desde que $\{\psi_n, n \in J\}$ es una base de Riesz para Z (lema 1.2.1), tendremos que $z = 0$ y por tanto no es un autovector.

caso 2: existe un $n_0 \in J$ tal que $\lambda = \lambda_{n_0}$. Ésto implica que para todo $n \neq n_0 \in J$ $\langle z, \psi_n \rangle = 0$. Así $z = \alpha \eta_{n_0}$ y por lo tanto no es un nuevo autovector. Se concluye que

$$\sigma_p(A - Q_1X) = \{\lambda_n, n \in J\}$$

y el autovector correspondiente a λ_n es η_n . □

Observamos que bajo las condiciones del lema 4.1.2 $A - Q_1X$ es un operador Riesz-espectral con $D(A - Q_1X) = D(A)$.

Lema 4.1.3. *Suponemos que se tienen las hipótesis 1.2.1 y 1.2.2. Si el conjunto índice $J \subset \mathbb{Z}_0$ es tal que $\{\eta_n, n \in J\}$ es una base de Riesz para Z y el operador X es definido por:*

$$X\eta_n = \xi_n, \text{ para } n \in J$$

entonces

$$\overline{\text{span}\{\eta_n\}_{n \in J}} = D(A)$$

donde la clausura es tomada en $D(A)$ con producto interno

$$\langle z_1, z_2 \rangle_{D(A)} = \langle z_1, z_2 \rangle_Z + \langle Az_1, Az_2 \rangle_Z$$

Demostración: Desde que J es isomórfico a \mathbb{N} tenemos que probar este lema sólo para $J = \mathbb{N}$. Por el lema 4.1.2, sabemos que el operador $A - Q_1X$ es un operador Riesz-espectral

4. Ecuación Algebraica de Riccati en espacios de Hilbert

con autovalores λ_n y autovectores $\eta_n (n \in \mathbb{N})$, y $D(A - Q_1 X) = D(A)$. Dada $\{\eta_n, \psi_n\}$ una sucesión biortogonal. Por el teorema 1.2.2 parte 2, tenemos que

$$(A - Q_1 X)x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, \psi_n \rangle \eta_n$$

para $x \in D(A - Q_1 X)$, y

$$D(A - Q_1 X) = \left\{ x \in Z / \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2 |\langle x, \psi_n \rangle|^2 < \infty \right\} \quad (4.8)$$

elegimos un $x \in D(A) = D(A - Q_1 X)$, entonces se sigue de (4.8) que

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, \psi_n \rangle \eta_n \quad \text{con} \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2 |\langle x, \psi_n \rangle|^2 < \infty$$

Así escogemos $\epsilon > 0$, N y N' tal que

$$\left\| \sum_{n=N+1}^{\infty} \langle x, \psi_n \rangle \eta_n \right\|^2 < \frac{\epsilon}{2}$$

y

$$\left\| \sum_{n=N'+1}^{\infty} \lambda_n \langle x, \psi_n \rangle \eta_n \right\|^2 < \frac{\epsilon}{2}$$

Si definimos $m = \max\{N, N'\}$, entonces podemos deducir

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n=1}^m \langle x, \psi_n \rangle \eta_n - x \right\|_{D(A)}^2 &= \left\| \sum_{n=1}^m \langle x, \psi_n \rangle \eta_n - \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, \psi_n \rangle \eta_n \right\|_{D(A)}^2 \\ &= \left\| \sum_{n=m+1}^{\infty} \langle x, \psi_n \rangle \eta_n \right\|^2 + \left\| A \sum_{n=m+1}^{\infty} \langle x, \psi_n \rangle \eta_n \right\|^2 \\ &\leq \left\| \sum_{n=m+1}^{\infty} \langle x, \psi_n \rangle \eta_n \right\|^2 \\ &\quad + 3 \left\| (A - Q_1 X) \sum_{n=m+1}^{\infty} \langle x, \psi_n \rangle \eta_n \right\|^2 \\ &\quad + 3 \|Q_1 x\|^2 \left\| \sum_{n=m+1}^{\infty} \langle x, \psi_n \rangle \eta_n \right\|^2, \text{ desde } Q_1 x \in L(Z) \\ &\leq 4 \max\{1, \|Q_1 x\|^2\} \left[\left\| \sum_{n=m+1}^{\infty} \langle x, \psi_n \rangle \eta_n \right\|^2 \right. \\ &\quad \left. + \left\| (A - Q_1 X) \sum_{n=m+1}^{\infty} \langle x, \psi_n \rangle \eta_n \right\|^2 \right] \\ &= 4 \max\{1, \|Q_1 x\|^2\} \left[\left\| \sum_{n=m+1}^{\infty} \langle x, \psi_n \rangle \eta_n \right\|^2 \right. \\ &\quad \left. + \left\| \sum_{n=m+1}^{\infty} \lambda_n \langle x, \psi_n \rangle \eta_n \right\|^2 \right] \end{aligned}$$

4.1. Clasificación de las soluciones de la EAR.

$$\left\| \sum_{n=1}^m \langle x, \psi_n \rangle \eta_n - x \right\|_{D(A)}^2 < 4 \max\{1, \|Q_1 x\|^2\} \left[\frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \right] = 4 \max\{1, \|Q_1 x\|^2\} \epsilon$$

Así para todo $x \in D(A)$ y todo $\epsilon > 0$, existe $m, \alpha_n(\epsilon)$ tal que

$$\left\| \sum_{n=1}^m \alpha_n(\epsilon) \eta_n - x \right\|_{D(A)}^2 < 4 \max\{1, \|Q_1 x\|^2\} \epsilon$$

En otras palabras

$$\overline{\text{span}\{\eta_n\}_{n \in J}} = D(A)$$

□

El siguiente lema caracteriza todos los subespacios invariantes de la resolvente para operadores Riesz-espectral en una simple manera.

Lema 4.1.4. *Dado T un operador Riesz-espectral en el espacio de Hilbert Z con autovalores $\{\lambda_n, n \geq 1\}$ y la base de Riesz de autovectores $\{\phi_n, n \geq 1\}$. $R_\infty(T)$ denota la componente (maximal) del conjunto resolvente $R(T)$ de T que contiene un intervalo $[r, \infty)$. Entonces:*

1. $R_\infty(T)$ es todo el conjunto resolvente $R(T)$.
2. Si V es un subespacio cerrado de Z , que es $(\lambda I - T)^{-1}$ -invariante para un $\lambda \in R_\infty(T)$, entonces V es $(\lambda I - T)^{-1}$ -invariante para todo $\lambda \in R_\infty(T)$. Más aún,

$$V = \overline{\text{span}\{\phi_n\}_{n \in J}}$$

donde el subconjunto J de \mathbb{N} contiene estos $n \geq 1$ para que $\phi_n \in V$.

Demostración: Ver los lemas 2.5.6 y 2.5.8 de [9] □

El siguiente lema da un operador identidad, que aclara la estructura del espectro (puntual) del Hamiltoniano H

Lema 4.1.5. *Suponemos que se tiene la hipótesis 1.2.1. Dado el Hamiltoniano H dado por (1.13), i.e.*

$$H = \begin{pmatrix} A & -Q_1 \\ -Q_2 & -A^* \end{pmatrix}$$

y defino el operador $\tilde{H} : D(\tilde{H}) \subset Z \oplus Z \rightarrow Z \oplus Z$ por

$$\tilde{H} = \begin{pmatrix} A - Q_1 X & -Q_1 \\ 0 & -(A - Q_1 X^*)^* \end{pmatrix}$$

Si $X \in L(Z)$ es una solución de la EAR, entonces se tiene las siguientes relaciones entre H y \tilde{H}

1. En $D(A) \oplus D(A^*)$ se tiene la siguiente identidad

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ X & I \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & -B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & X \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A - Q_1 X & -Q_1 \\ 0 & -(A - Q_1 X^*)^* \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

4. Ecuación Algebraica de Riccati en espacios de Hilbert

2. $\sigma_p(H) = \sigma_p(\tilde{H})$ y $\sigma(H) = \sigma(\tilde{H})$.
3. $\sigma_p(H) \subset \sigma_p(A - Q_1X) \cup \sigma_p(-(A - Q_1X^*)^*)$ y $\sigma_p(A - Q_1X) \subset \sigma_p(H)$.
4. $\sigma(H) \subset \sigma(A - Q_1X) \cup \sigma(-(A - Q_1X^*)^*)$
5. Si H es un operador Riesz-espectral, entonces

$$\sigma(H) = \sigma(A - Q_1X) \cup \sigma(-(A - Q_1X^*)^*)$$

Demostración:

1. Del lema 4.1.1 si $X \in L(Z)$ es una solución de la EAR, entonces $Im(X|_{D(A)}) \subset D(A^*)$. Así tenemos en $D(A) \oplus D(A^*)$

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ X & I \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & -B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & X \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A - Q_1X & -Q_1 \\ 0 & -(A - Q_1X^*)^* \end{pmatrix}$$

Desde que X es una solución de la EAR.

2. Como $\begin{pmatrix} I & 0 \\ X & I \end{pmatrix}$ es una biyección, el resultado se sigue inmediatamente de la parte 1.
3. Dado λ un autovalor de \tilde{H} con autovector correspondiente $\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}$, luego

$$\begin{aligned} (A - Q_1X)v - Q_1w &= \lambda v \\ -(A - Q_1X^*)^*w &= \lambda w \end{aligned}$$

ahora tenemos que puede ocurrir dos cosas que $\lambda \in \sigma_p(-(A - Q_1X^*)^*)$ y $\lambda \notin \sigma_p(-(A - Q_1X^*)^*)$.

Si $\lambda \notin \sigma_p(-(A - Q_1X^*)^*)$, entonces la ecuación de arriba implica que $w = 0$ y así $\lambda \in \sigma_p(A - Q_1X)$. Usando $\sigma_p(H) = \sigma_p(\tilde{H})$, concluimos que

$$\sigma_p(H) \subset \sigma_p(A - Q_1X) \cup \sigma_p(-(A - Q_1X^*)^*)$$

Asumimos ahora que λ es un autovalor de $A - Q_1X$ con autovector v . Entonces vemos que

$$\begin{pmatrix} A - Q_1X & -Q_1 \\ 0 & -(A - Q_1X^*)^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda v \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix}$$

entonces λ es un autovalor de \tilde{H} con autovector $\begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix}$. Por tanto

$$\sigma_p(A - Q_1X) \subset \sigma_p(\tilde{H}) = \sigma_p(H)$$

4. Si $\lambda \in R(A - Q_1X) \cap R(-(A - Q_1X^*)^*)$, entonces

$$\begin{pmatrix} [\lambda I - (A - Q_1X)]^{-1} & -[\lambda I - (A - Q_1X)]^{-1}Q_1[\lambda I + (A - Q_1X^*)^*]^{-1} \\ 0 & [\lambda I + (A - Q_1X^*)^*]^{-1} \end{pmatrix}$$

4.1. Clasificación de las soluciones de la EAR

es un operador lineal acotado y es inversa de $(\lambda I - H)$. Por tanto, $\lambda \in R(\tilde{H})$ combinando ésto con la igualdad entre $R(H)$ y $R(\tilde{H})$, se obtiene que

$$R(A - Q_1 X) \cap R(-(A - Q_1 X^*)^*) \subset R(H)$$

o equivalentemente

$$\sigma(H) \subset \sigma(A - Q_1 X) \cup \sigma(-(A - Q_1 X^*)^*)$$

5. Desde que H es un operador Riesz-espectral por la parte 1 y definición 1.2.6, \tilde{H} es también un operador Riesz-espectral. Más aún, desde que $X \in L(Z)$, tenemos que $(A - Q_1 X)$ es el generador infinitesimal de un C_0 -semigrupo. Usando este hecho y el teorema de Hille-Yosida, obtenemos que existe

$$\tilde{\lambda} \in R(\tilde{H}) \cap R_\infty(A - Q_1 X) \quad (4.10)$$

denotamos $(\tilde{\lambda} I - \tilde{H})^{-1}$ con $\begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix}$, y luego

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\lambda} I - (A - Q_1 X) & -Q_1 \\ 0 & \tilde{\lambda} I + (A - Q_1 X^*)^* \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} P_{11}[\tilde{\lambda} I - (A - Q_1 X)] & -P_{11}Q_1 + P_{12}[\tilde{\lambda} I + (A - Q_1 X^*)^*] \\ P_{21}[\tilde{\lambda} I - (A - Q_1 X)] & -P_{21}Q_1 + P_{22}[\tilde{\lambda} I + (A - Q_1 X^*)^*] \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.11)$$

ésto nos da que

$$0 = P_{21}[\tilde{\lambda} I - (A - Q_1 X)]$$

se sigue de (4.10) que podemos multiplicar la ecuación de arriba con $[\tilde{\lambda} I - (A - Q_1 X)]^{-1}$, y así:

$$P_{21} = 0$$

Así concluimos que para $\tilde{\lambda} \in R(\tilde{H}) \cap R_\infty(A - Q_1 X)$, $(\tilde{\lambda} I - \tilde{H})^{-1}$ es de la forma $\begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ 0 & P_{22} \end{pmatrix}$. Defino el subespacio lineal cerrado de $Z \oplus Z$ por $V = \begin{pmatrix} Z \\ 0 \end{pmatrix}$. Claramente la fórmula de arriba para $(\tilde{\lambda} I - \tilde{H})^{-1}$ implica que $(\tilde{\lambda} I - \tilde{H})^{-1}V \subset V$. Aplicando lema 4.1.4 parte 2 da que $(\tilde{\lambda} I - \tilde{H})^{-1}V \subset V$ para todo $\lambda \in R(\tilde{H})$. De la forma de V , se concluye que $(\tilde{\lambda} I - \tilde{H})^{-1}$ es de la forma $\begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ 0 & P_{22} \end{pmatrix}$ para cada $\lambda \in R(H)$; i.e. $P_{21} = 0$.

Sustituyendo $P_{21} = 0$ en (4.11), reemplazando $\tilde{\lambda}$ con λ tenemos que

$$P_{11} = [\lambda I - (A - Q_1 X)]^{-1} \quad \text{y} \quad P_{22} = [\lambda I + (A - Q_1 X^*)^*]^{-1}$$

para todo $\lambda \in R(H)$. Usando la igualdad entre $R(H)$ y $R(\tilde{H})$, se concluye que

$$R(H) \subset R(A - Q_1 X) \quad \text{y} \quad R(H) \subset R(-(A - Q_1 X^*)^*)$$

equivalentemente

$$\sigma(A - Q_1 X) \subset \sigma(H) \quad \text{y} \quad \sigma(-(A - Q_1 X^*)^*) \subset \sigma(H)$$

ésto junto con la parte 4 nos da que

$$\sigma(H) = \sigma(A - Q_1 X) \cup \sigma(-(A - Q_1 X^*)^*)$$

4. Ecuación Algebraica de Riccati en espacios de Hilbert

□

Teorema 4.1.1. *Supongamos que se tengan las hipótesis 1.2.1 y 1.2.2. Entonces tenemos los siguientes resultados:*

1. *Existe un conjunto índice $J \subset \mathbb{Z}_0$ tal que $\{\eta_n, n \in J\}$ es una base de Riesz para Z si y sólo si existe una solución acotada lineal X de la EAR.*
2. *Si el conjunto índice $J \subset \mathbb{Z}_0$ es tal que $\{\eta_n, n \in J\}$ es una base de Riesz para Z , entonces el operador lineal definido por*

$$X\eta_n = \xi_n, \text{ para } n \in J$$

es un elemento de $L(Z)$ y es una solución de la EAR.

3. *Si $X \in L(Z)$ es una solución de la EAR, entonces el conjunto índice $J \subset \mathbb{Z}_0$ definido por*

$$J = \{n \in \mathbb{Z}_0 / \lambda_n \in \sigma_p(H) \text{ y } \lambda_n \text{ es un autovalor de } A - Q_1X\} \quad (4.12)$$

es tal que $\{\eta_n, n \in J\}$ es una base de Riesz para Z . J es también igual a

$$\{n \in \mathbb{Z}_0 / X\eta_n = \xi_n\}$$

Demostración: La parte 1 se demuestra de manera sencilla con los teoremas de la sección 1.3, nos enfocamos en demostrar la parte 2 y 3.

2. Se sigue del lema 4.1.2 parte 1 que $X \in L(Z)$. Para $\lambda \in \rho(A)$, probaremos que X satisface (4.3). Dado λ_n el autovalor de H correspondiente al autovector Φ_n , entonces tenemos que

$$\begin{aligned} A\eta_n - Q_1\xi_n &= \lambda_n\eta_n, \\ -Q_2\eta_n - A^*\xi_n &= \lambda_n\xi_n \end{aligned}$$

usando la igualdad $X\eta_n = \xi_n$ y restando $(\bar{\lambda}I - A^*)^{-1}$ veces la segunda ecuación de $(\bar{\lambda}I - A^*)^{-1}X$ veces el primero nos da

$$[(\bar{\lambda}I - A^*)^{-1}\{XA + A^*X + Q_2 - XQ_1X\}]\eta_n = 0, \text{ para todo } n \in J$$

desde que $(\bar{\lambda}I - A^*)^{-1}A^* = A^*(\bar{\lambda}I - A^*)^{-1}$ en $D(A^*)$, se tiene que

$$Q\eta_n = 0, \text{ para todo } n \in J \quad (4.13)$$

donde el operador Q es dado por

$$Q = A^*(\bar{\lambda}I - A^*)^{-1}X + (\bar{\lambda}I - A^*)^{-1}\{XA + Q_2 - XQ_1X\}, \text{ con } D(Q) = D(A)$$

por lema 1.4.2, tenemos que $\overline{\text{span}\{\eta_n\}_{n \in J}} = D(A)$. Más aún, Q es un operador lineal y acotado de $D(A)$ a Z . Combinando este resultado con (4.13) implica que $Q = 0$ y así $Q(\lambda I - A)^{-1} = 0$. Sustituyendo la expresión por Q , da

$$A^*(\bar{\lambda}I - A^*)^{-1}X(\lambda I - A)^{-1} + (\bar{\lambda}I - A^*)^{-1}\{XA + Q_2 - XQ_1X\}(\lambda I - A)^{-1} = 0$$

del lema 4.1.2 se sigue que X satisface la EAR.

4.1. Clasificación de las soluciones de la EAR

3. Dado $X \in L(Z)$ una solución de la EAR. Por hipótesis 1.2.2 el Hamiltoniano H es un operador Riesz-espectral con autovalores $\{\lambda_n, n \in \mathbb{Z}_0\}$ y autovectores $\left\{ \Phi_n = \begin{pmatrix} \eta_n \\ \xi_n \end{pmatrix}, n \in \mathbb{Z}_0 \right\}$. Dados S que denota el operador $\begin{pmatrix} I & 0 \\ X & I \end{pmatrix}$ en $Z \oplus Z$ y \tilde{H} que denota el operador del lema 4.1.5 definido por

$$\tilde{H} = S^{-1}HS$$

con $D(\tilde{H}) = D(H) = D(A) \oplus D(A^*)$. Desde que S es una biyección, se tiene que \tilde{H} también tiene los autovalores $\{\lambda_n, n \in \mathbb{Z}_0\}$ y los correspondientes autovectores son $\left\{ S^{-1}\Phi_n = \begin{pmatrix} I & 0 \\ -X & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_n \\ \xi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_n \\ -X\eta_n + \xi_n \end{pmatrix}, n \in \mathbb{Z}_0 \right\}$. Claramente de la definición 1.5.5, \tilde{H} es también un operador Riesz-espectral. Por el lema 4.1.5 se tiene que

$$\begin{aligned} \tilde{H} &= \begin{pmatrix} A - Q_1X & -Q_1 \\ 0 & -(A - Q_1X^*)^* \end{pmatrix} \\ \sigma_p(\tilde{H}) &= \sigma_p(A - Q_1X) \cup \sigma_p(-(A - Q_1X^*)^*) \end{aligned}$$

y

$$\sigma_p(A - Q_1X) \subset \sigma_p(\tilde{H})$$

desde que todos los autovalores $\{\lambda_n, n \in \mathbb{Z}_0\}$ son simples. Se puede reenumerarlos tal que $\sigma_p(A - Q_1X) = \{\lambda_n, n \in \mathbb{Z}^-\}$ y los autovalores restantes de \tilde{H} como $\{\lambda_n, n \in \mathbb{Z}^+\}$, donde $\mathbb{Z}^- = \{\dots, -3, -2, -1, \}$ y $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, \dots\}$.

Así el conjunto índice $J \subset \mathbb{Z}_0$, definido por (4.12), es ahora por definición igual a \mathbb{Z}^- . Primero probaremos que

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}^- = J &= \{n \in \mathbb{Z}_0 / \lambda_n \in \sigma_p(H) \text{ y } \lambda_n \text{ es un autovalor de } A - Q_1X\} \\ &= \{n \in \mathbb{Z}_0 / X\eta_n = \xi_n\} \end{aligned} \quad (4.14)$$

Dado λ_i un autovalor de $A - Q_1X$ con autovector e_i . Luego

$$\begin{aligned} (A - Q_1X)e_i &= \lambda_i e_i \\ (XA - XQ_1X)e_i &= \lambda_i X e_i \end{aligned}$$

usando el hecho que X es una solución de la EAR, tenemos que

$$(XA + A^*X + Q_2 - XQ_1X)e_i = 0$$

luego

$$\begin{pmatrix} A & -Q_1 \\ -Q_2 & -A^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_i \\ X e_i \end{pmatrix} = \lambda_i \begin{pmatrix} e_i \\ X e_i \end{pmatrix}$$

así $\begin{pmatrix} e_i \\ X e_i \end{pmatrix}$ es un autovector de H , y deberá ser igual a Φ_n para algún $n \in \mathbb{Z}_0$. De la definición de η_n y ξ_n , se concluye que $\xi_n = X\eta_n$. Así

$$\mathbb{Z}^- \subset \{n \in \mathbb{Z}_0 / X\eta_n = \xi_n\}$$

4. Ecuación Algebraica de Riccati en espacios de Hilbert

Ahora probaremos la otra inclusión. Asumimos que $X\eta_i = \xi_i$ para $i \in \mathbb{Z}_0$. Sustituyendo esto en la fórmula derivada para $S^{-1}\Phi_i = \begin{pmatrix} \eta_i \\ 0 \end{pmatrix}$. Es desde que

$$\tilde{H} \begin{pmatrix} \eta_i \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_i \begin{pmatrix} \eta_i \\ 0 \end{pmatrix}$$

usando la definición de \tilde{H} , esto implica que

$$(A - Q_1X)\eta_i = \lambda_i\eta_i$$

Así λ_i es un autovalor de $(A - Q_1X)$ con correspondiente autovector η_i , i.e. $\{n \in \mathbb{Z}_0 / X\eta_n = \xi_n\} \subset \mathbb{Z}^-$. Por tanto hemos probado (4.14). Queda por demostrar que $\{\eta_n, n \in \mathbb{Z}^-\}$ es una base de Riesz para Z . Debido a que \tilde{H} es un operador Riesz-espectral, se tiene que $\left\{ S^{-1}\Phi_n = \begin{pmatrix} \eta_n \\ -X\eta_n + \xi_n \end{pmatrix}, n \in \mathbb{Z}_0 \right\}$ es una base de Riesz para $Z \oplus Z$ por tanto,

$$\overline{\text{span}_{n \in \mathbb{Z}_0} \begin{pmatrix} \eta_n \\ -X\eta_n + \xi_n \end{pmatrix}} = Z \oplus Z$$

mostraremos que $\overline{\text{span}_{n \in \mathbb{Z}_0} \{\eta_n\}} = Z$

Se define $V = \begin{pmatrix} Z \\ 0 \end{pmatrix}$ i.e. un subespacio lineal cerrado de $Z \oplus Z$. Por la prueba del lema 4.1.5 parte 5, se tiene que

$$(\lambda I - \tilde{H})^{-1}V \subset V \text{ para un } \lambda \in \rho_\infty(H)$$

ahora aplicando lema 4.1.4, nos da que

$$V = \begin{pmatrix} Z \\ 0 \end{pmatrix} = \overline{\text{span}_{n \in K} \begin{pmatrix} \eta_n \\ -X\eta_n + \xi_n \end{pmatrix}}$$

donde K contiene estos $n \in \mathbb{Z}_0$ para que $\begin{pmatrix} \eta_n \\ -X\eta_n + \xi_n \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} Z \\ 0 \end{pmatrix}$. Equivalentemente, K contiene estos $n \in \mathbb{Z}_0$ para que $-X\eta_n + \xi_n = 0$ usando (4.14), se sigue que $K = \mathbb{Z}^-$. Se concluye que

$$\begin{pmatrix} Z \\ 0 \end{pmatrix} = \overline{\text{span}_{n \in \mathbb{Z}^-} \begin{pmatrix} \eta_n \\ 0 \end{pmatrix}}$$

esto implica que

$$Z = \overline{\text{span}_{n \in \mathbb{Z}^-} \{\eta_n\}}$$

finalmente por el teorema 1.3.1 da que $\{\eta_n, n \in \mathbb{Z}^-\}$ es una base de Riesz para Z . □

El teorema anterior muestra que a cada solución acotada lineal X de la EAR le corresponde exactamente un conjunto índice $J \subset \mathbb{Z}_0$ tal que $\{\eta_n, n \in J\}$ es una base de Riesz para Z .

4.1.2. Soluciones Autoadjuntas y no Negativas

- En la teoría de la EAR, uno está interesado en soluciones autoadjuntas y especialmente en soluciones no negativas y estables. Estas soluciones pueden ser caracterizadas en términos de autovectores y autovalores del Hamiltoniano H también. Daremos esta caracterización para soluciones autoadjuntas en el siguiente teorema y para soluciones no negativas en el teorema 4.1.3.
- En la sección anterior, dimos una construcción de soluciones lineales acotadas de la EAR, en el caso cuando Q_1 y Q_2 son operadores autoadjuntos. Para soluciones no negativas necesitaremos una hipótesis extra que Q_1 y Q_2 son no negativas.

Teorema 4.1.2. *Suponemos que las hipótesis 1.2.1 y 1.2.2 se mantienen. Dado el conjunto índice $J \subset \mathbb{Z}_0$ tal que $\lambda_i \in \sigma_p(H)$ y $\lambda_i \neq -\bar{\lambda}_j$, para todo $i, j \in J$, donde la barra denota la conjugada compleja. Si $\{\eta_n, n \in J\}$ es una base de Riesz para Z , entonces el operador lineal X definido por*

$$X\eta_n = \xi_n, \text{ para } n \in J$$

es una solución autoadjunta de la EAR.

Demostración: Este X es una solución de la EAR, esto se sigue del teorema 4.1.1 parte 2. Nos queda por demostrar que X es autoadjunta. Dado J el operador en $Z \oplus Z$ definido por

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$$

se ve que

$$H^*J + JH = 0 \text{ en } D(H) \quad (4.15)$$

Mostraremos que $\langle X\eta_m, \eta_m \rangle - \langle \eta_n, X\eta_m \rangle = 0$, para todo $m \in J$. Desde que $\{\eta_n, n \in J\}$ es una base de Riesz para Z y $X \in L(Z)$, entonces concluiremos que X es autoadjunta.

$$\begin{aligned} \langle X\eta_m, \eta_m \rangle - \langle \eta_n, X\eta_m \rangle &= \langle \xi_n, \eta_m \rangle - \langle \eta_n, \xi_m \rangle \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} \xi_n \\ -\eta_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \eta_m \\ \xi_m \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \langle J\Phi_n, \Phi_m \rangle \\ &= \frac{1}{\lambda_n + \bar{\lambda}_m} [\langle \lambda_n J\Phi_n, \Phi_m \rangle + \langle J\Phi_n, \lambda_m \Phi_m \rangle] \\ &= \frac{1}{\lambda_n + \bar{\lambda}_m} [\langle JH\Phi_n, \Phi_m \rangle + \langle J\Phi_n, H\Phi_m \rangle] \\ &= \frac{1}{\lambda_n + \bar{\lambda}_m} \langle [JH + H^*J]\Phi_n, \Phi_m \rangle = 0 \text{ (por 4.15)} \end{aligned}$$

entonces, $\langle X\eta_m, \eta_m \rangle - \langle \eta_n, X\eta_m \rangle = 0$, para todo $n, m \in J$. Por lo tanto, X es solución autoadjunta de la EAR. \square

Teorema 4.1.3. *Suponemos que las hipótesis 1.2.1 y 1.2.2 se mantienen. Asumimos también que Q_1 y Q_2 son no negativas. Denotamos por $J_- = \{n \in \mathbb{Z}_0 / \lambda_n \in \sigma_p(H) \text{ y } \operatorname{Re}(\lambda_n) < 0\}$. Si $\{\eta_n, n \in J_-\}$ es una base de Riesz para Z , entonces el operador lineal X definido por*

$$X\eta_n = \xi_n, \text{ para } n \in J_-$$

es una solución autoadjunta no negativa de la EAR.

4. Ecuación Algebraica de Riccati en espacios de Hilbert

Demostración: De la misma manera como en la sección anterior, se puede asumir sin pérdida de generalidad que $J_- = \mathbb{N}$. Se sigue del teorema 4.1.2 que X es una solución autoadjunta de la EAR, se probará solamente que X es no negativa. Del lema 4.1.2 y su prueba se tiene que $X \in L(Z)$ y $A - Q_1X$ es un operador Riesz-espectral en el espacio de Hilbert Z con autovalores $\{\lambda_n, n \in \mathbb{N}\}$ y correspondientes autovectores $\{\eta_n, n \in \mathbb{N}\}$. Desde que $X \in L(Z)$, se tiene que $A - Q_1X$ es un generador infinitesimal del C_0 -semigrupo $S(t)$. Usando el hecho que $X \in L(Z)$ es una solución autoadjunta de la EAR, se tiene por (1.14) que

$$\langle A\tilde{z}_1, X\tilde{z}_2 \rangle + \langle X\tilde{z}_1, A\tilde{z}_2 \rangle + \langle \tilde{z}_1, Q_2\tilde{z}_2 \rangle - \langle \tilde{z}_1, XQ_1X\tilde{z}_2 \rangle = 0 \quad (4.16)$$

para todo $\tilde{z}_1, \tilde{z}_2 \in D(A)$. Reescribimos la ecuación (4.16) como

$$\langle (A - Q_1X)\tilde{z}_1, X\tilde{z}_2 \rangle + \langle X\tilde{z}_1, (A - Q_1X)\tilde{z}_2 \rangle = -\langle \tilde{z}_1, (Q_2 + XQ_1X)\tilde{z}_2 \rangle \quad (4.17)$$

Dado $z \in D(A)$, entonces $S(t)z \in D(A)$ y

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle S(t)z, XS(t)z \rangle &= \left\langle \frac{d}{dt} S(t)z, XS(t)z \right\rangle + \langle S(t)z, \frac{d}{dt} XS(t)z \rangle \\ \text{(por el teorema 1.5.4)} &= \langle (A - Q_1X)S(t)z, XS(t)z \rangle \\ &\quad + \langle S(t)z, X(A - Q_1X)S(t)z \rangle \\ &= -\langle S(t)z, (Q_2 + XQ_1X)S(t)z \rangle \quad \text{por (4.17)} \\ &\leq 0 \quad \text{desde } Q_2 + XQ_1X \geq 0 \end{aligned} \quad (4.18)$$

integrando (4.18) con respecto a t se tiene

$$\int_0^\tau \frac{d}{dt} \langle S(t)z, XS(t)z \rangle dt \leq 0 \quad (4.19)$$

por otro lado, también se tiene que

$$\int_0^\tau \frac{d}{dt} \langle S(t)z, XS(t)z \rangle dt = \langle S(\tau)z, XS(\tau)z \rangle - \langle z, Xz \rangle \quad (4.20)$$

combinando (4.19) y (4.20), nos da

$$\langle S(\tau)z, XS(\tau)z \rangle - \langle z, Xz \rangle \leq 0, \quad \text{para todo } z \in D(A) \quad (4.21)$$

Recordar que $A - Q_1X$ tiene autovalores λ_n con $Re(\lambda_n) < 0$. Desde que $Re(\lambda_n)$ puede converger a 0 cuando $n \rightarrow \infty$, no se puede concluir que el C_0 -semigrupo $S(t)$ es exponencialmente estable. Así que, no podemos concluir directamente que $\langle S(\tau)z, XS(\tau)z \rangle$ converge a 0 para $\tau \rightarrow \infty$ y luego la no negatividad de X .

Para probar ésta no negatividad, se introduce los subespacios dimensionales finitos $\tilde{Z}(n)$ del espacio de Hilbert Z . $\tilde{Z}(n) = \text{span}_{i \in \{1, 2, \dots, n\}} \{\eta_i\}$, con producto interno

$$\langle \tilde{z}_1, \tilde{z}_2 \rangle_{\tilde{Z}(n)} = \langle \tilde{z}_1, \tilde{z}_2 \rangle_Z$$

y $\tilde{A}(n) = A - Q_1X|_{\tilde{Z}(n)}$. $\tilde{A}(n)$ es una matriz con autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ y $Re(\lambda_i) < 0$ para $i = 1, 2, \dots, n$. Por tanto, $\tilde{A}(n)$ es asintóticamente estable.

Dado $\tilde{z}_n \in \tilde{Z}(n)$. Usando el hecho que $S(t)|_{\tilde{Z}(n)} = e^{\tilde{A}(n)t}$, (4.21) da

$$\langle e^{\tilde{A}(n)\tau} \tilde{z}_n, X e^{\tilde{A}(n)\tau} \tilde{z}_n \rangle - \langle \tilde{z}_n, X \tilde{z}_n \rangle \leq 0 \quad (4.22)$$

4.1. Clasificación de las soluciones de la EAR

se sigue de la asintoticidad estable de $\tilde{A}(n)$ que

$$\langle e^{\tilde{A}(n)\tau} \tilde{z}_n, X e^{\tilde{A}(n)\tau} \tilde{z}_n \rangle \rightarrow 0 \quad \text{para } \tau \rightarrow \infty$$

por tanto de (4.22) se tiene que $\langle \tilde{z}_n, X \tilde{z}_n \rangle \geq 0$ para todo $\tilde{z}_n \in \tilde{Z}(n)$. Desde que $X \in L(Z)$ y $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \tilde{Z}(n)$ es denso en Z , esta desigualdad extendida a todo $z \in Z$ i.e.

$$\langle z, Xz \rangle \geq 0, \quad \text{para todo } z \in Z$$

equivalentemente, X es no negativa. □

Teorema 4.1.4. *Suponemos que las hipótesis 1.2.1 y 1.2.2 se mantienen. Asumimos también que Q_1 y Q_2 son no negativas. Denotamos por $J_0 = \{n \in \mathbb{Z}_0 / \lambda_n \in \sigma_p(H) \text{ y } \operatorname{Re}(\lambda_n) \neq 0\}$, y dado $J \subset J_0$. Si $\{\eta_n, n \in J\}$ es una base de Riesz para Z , y si el operador lineal X definido por*

$$X\eta_n = \xi_n, \quad \text{para } n \in J$$

es autoadjunto y satisface $\langle \eta_n, X\eta_n \rangle > 0$ para $n \in J$, entonces $\operatorname{Re}(\lambda_n) < 0$ para $n \in J$.

Demostración: Del teorema 4.1.1 parte 2 se tiene que $X \in L(Z)$ y es una solución de la EAR. Desde que X es autoadjunto se sigue que

$$\langle Az_1, Xz_2 \rangle + \langle Xz_1, Az_2 \rangle + \langle z_1, Q_2 z_2 \rangle - \langle z_1, XQ_1 Xz_2 \rangle = 0$$

para todo $z_1, z_2 \in D(A)$.

Se define el operador Q como $Q = A - Q_1 X$ y M como $M = Q_2 + XQ_1 X$ usando estas definiciones, se sigue que

$$\langle Qz_1, Xz_2 \rangle + \langle Xz_1, Qz_2 \rangle = -\langle z_1, Mz_2 \rangle \quad (4.23)$$

para todo $z_1, z_2 \in D(A)$, por el lema 4.1.2

$$\sigma_p(Q) = \{\lambda_n / n \in J\}$$

y el autovector correspondiente a λ_n es η_n . Dado $n \in J$. Sustituyendo $z_1 = z_2 = \eta_n$ en (4.23), obtenemos

$$\begin{aligned} -\langle \eta_n, M\eta_n \rangle &= \langle Q\eta_n, X\eta_n \rangle + \langle X\eta_n, Q\eta_n \rangle \\ &= \lambda_n \langle \eta_n, X\eta_n \rangle + \overline{\lambda_n} \langle X\eta_n, \eta_n \rangle \\ &= 2\operatorname{Re}(\lambda_n) \langle \eta_n, X\eta_n \rangle \end{aligned}$$

desde $\langle \eta_n, X\eta_n \rangle > 0$ y M es no negativa, se sigue que $\operatorname{Re}(\lambda_n) \leq 0$ de la definición de J se concluye que $\operatorname{Re}(\lambda_n) < 0$ para $n \in J$.

4.1.3. Soluciones Estables

- En esta sección, estudiaremos soluciones estables de la EAR. Por una solución estable X se entiende que $A - Q_1 X$ genera un C_0 -semigrupo exponencialmente estable.

4. Ecuación Algebraica de Riccati en espacios de Hilbert

- Primero, mostraremos que si existe una solución estable de la EAR, entonces ésta es única y autoadjunta. Usando el hecho que para cada solución lineal, acotada de la EAR le corresponde exactamente un conjunto índice $J \subset \mathbb{Z}_0$ tal que $\{\eta_n/n \in J\}$ es un base de Riesz para Z , daremos un método para construir la solución estable. Entonces, el siguiente paso será encontrar condiciones necesarias y suficientes para su existencia.

Teorema 4.1.5. *Suponemos que se tienen las hipótesis 1.2.1 y 1.2.2. Si $X \in L(Z)$ es una solución estable de la EAR, entonces se tiene que*

1. X es autoadjunto.
2. Si Q_1 y Q_2 son no negativas, entonces X es autoadjunto y no negativa.
3. X es única.

Demostración:

1. Dado $X \in L(Z)$ una solución estable de la EAR i.e. $A - Q_1X$ genera un C_0 -semigrupo exponencialmente estable en Z . De esto se sigue que

$$\sigma(A - Q_1X) \subset \mathbb{C}^- \quad (4.24)$$

donde \mathbb{C}^- denota el semiplano izquierdo abierto.

Del teorema 4.1.1, se tiene que a la solución X le corresponde exactamente un conjunto índice $J_- \subset \mathbb{Z}_0$ tal que $\{\eta_n/n \in J\}$ es una base de Riesz para Z . Usando la parte 3 del teorema 4.1.1 se obtiene que

$$\begin{aligned} J_- &= \{n \in \mathbb{Z}_0 / \lambda_n \in \sigma_p(H) \text{ y } \lambda_n \text{ es un autovalor de } A - Q_1X\} \\ &= \{n \in \mathbb{Z}_0 / X\eta_n = \xi_n\} \end{aligned}$$

Ahora dado $\lambda_i \in \sigma_p(H)$ un autovalor de $A - Q_1X$. Se sigue inmediatamente de (4.24) que $Re(\lambda_i) < 0$. Así $J_- \subset \{n \in \mathbb{Z}_0 / \lambda_n \in \sigma_p(H) \text{ y } Re(\lambda_n) < 0\}$. Aplicando el teorema 4.1.2 da que X es autoadjunto.

2. Similar como la prueba de la parte 1, pero ahora aplicamos el teorema 4.1.3.
3. De la parte 1 se tiene que a la solución estable X le corresponde exactamente un conjunto índice $J_- \subset \mathbb{Z}_0$ tal que $\{\eta_n/n \in J\}$ es un base de Riesz para Z y

$$J_- = \{n \in \mathbb{Z}_0 / \lambda_n \in \sigma_p(H) \text{ y } \lambda_n \text{ es un autovalor de } A - Q_1X\} \quad (4.25)$$

Probaremos que J_- definido en (4.25) es igual al conjunto

$$\{n \in \mathbb{Z}_0 / \lambda_n \in \sigma_p(H) \text{ y } Re(\lambda_n) < 0\}$$

En la parte 1 se tiene probado que $J_- \subset \{n \in \mathbb{Z}_0 / \lambda_n \in \sigma_p(H) \text{ y } Re(\lambda_n) < 0\}$, probaremos la otra inclusión por contradicción. Suponemos que $\lambda_i \in \sigma_p(H)$ con $Re(\lambda_i) < 0$ no es un autovalor de $A - Q_1X$. Por el lema 4.1.5 parte 3 y el hecho que $X = X^*$, se tiene que

$$\sigma_p(H) \subset \sigma_p(A - Q_1X) \cup \sigma_p(-(A - Q_1X)^*)$$

4.1. Clasificación de las soluciones de la EAR

Por tanto, λ_i deberá ser un autovalor de $-(A - Q_1X)^*$. Desde que $\sigma(-(A - Q_1X)^*) = -\overline{\sigma(A - Q_1X)}$, donde la barra denota la conjugada compleja, se concluye de (4.24) que

$$\sigma(-(A - Q_1X)^*) \subset \mathbb{C}^+$$

donde \mathbb{C}^+ denota el semiplano derecho abierto.

Así $Re(\lambda_i) > 0$ que da la contradicción. Por lo tanto, se concluye que

$$\begin{aligned} J_- &= \{n \in \mathbb{Z}_0 / \lambda_n \in \sigma_p(H) \text{ y } \lambda_n \text{ es un autovalor de } A - Q_1X\} \\ &= \{n \in \mathbb{Z}_0 / X\eta_n = \xi_n\} \\ &= \{n \in \mathbb{Z}_0 / \lambda_n \in \sigma_p(H) \text{ y } Re(\lambda_n) < 0\} \end{aligned} \quad (4.26)$$

y $\{\eta_n / n \in J\}$ es un base de Riesz para Z .

La última expresión para J_- muestra que este conjunto índice es el mismo para cada solución X y así único. Usando la biyección entre una solución X de la EAR y el conjunto índice J_- , da la unicidad de la solución estable X .

□

En la prueba de la parte 3 se deriva un método para construir la única solución estable.

Corolario 4.1.1. *Suponemos que se tienen las hipótesis 1.2.1 y 1.2.2. Asumimos también que existe una solución estable X de la EAR, entonces X es dado por*

$$X\eta_n = \xi_n, \text{ para } n \in J_-$$

donde

$$J_- = \{n \in \mathbb{Z}_0 / \lambda_n \in \sigma_p(H) \text{ y } Re(\lambda_n) < 0\}$$

es una base de Riesz para Z .

Demostración: Usando teorema 4.1.5.

□

Lema 4.1.6. *Suponemos que se tiene la hipótesis 1.2.1 con $Q_1 = BR^{-1}B^*$ y $Q_2 = CC^*$. Si (A, B) es exponencialmente estable, entonces la EAR tiene una única solución autoadjunta no negativa maximal en $L(Z)$.*

Demostración: Ver [8].

□

El siguiente resultado muestra donde la convergencia de una sucesión de operadores cerrados en un espacio de Hilbert Z implica convergencia de su espectro.

Lema 4.1.7. *Dada (T_n) una sucesión de operadores cerrados en un espacio de Hilbert Z y T otro operador cerrado en Z . Si:*

1. T_n converge uniformemente a T para $n \rightarrow \infty$, i.e $\|T_n - T\| \rightarrow 0$ para $n \rightarrow \infty$.
2. $\rho(T) \neq 0$.
3. $\sigma(T)$ totalmente desconexo.

entonces,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(T_n) = \sigma(T)$$

4. Ecuación Algebraica de Riccati en espacios de Hilbert

Demostración: Usando el teorema 11 de [26]. \square

Finalmente, se da una relación entre un C_0 -semigrupo exponencialmente estable y su espectro puntual.

Lema 4.1.8. *Suponemos que A es el generador de un C_0 -semigrupo en el espacio de Hilbert Z y que $B \in L(U, Z)$, donde U es finito dimensional. Dados (A, B) exponencialmente estable y $F \in L(Z, U)$. Entonces el C_0 -semigrupo generado por $A + BF$ es exponencialmente estable si y sólo si $\sigma_p(A + BF) \subset \mathbb{C}^-$.*

Demostración: Ver teorema A.6 de [24] \square

Teorema 4.1.6. *Suponemos que se tienen las hipótesis 1.2.1 y 1.2.2 con $Q_1 = BR^{-1}B^*$ y $Q_2 = CC^*$. Asumimos también que $\dim U < \infty$. Entonces (A, B) es exponencialmente estable y $\sigma_p(H) \cap (\text{Eje imaginario}) = \emptyset$ si y sólo si existe una única solución estable de la EAR en $L(Z)$.*

Demostración:

(\Rightarrow)

Asumimos que (A, B) es exponencialmente estable y $\sigma_p(H) \cap (\text{Eje imaginario}) = \emptyset$. Aplicando el lema 4.1.6 da que la EAR tiene una única solución no negativa autoadjunta maximal en $L(Z)$. Probaremos que ésta es una solución estable. Entonces se sigue del teorema 4.1.5 que ésta es única.

X_{max} denota la única solución no negativa autoadjunta maximal de la EAR en $L(Z)$. Usamos la construcción de X_{max} en la prueba del lema 4.1.6 por [8]. Ahí se define una sucesión no decreciente $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ de operadores monótonos autoadjuntos en $L(Z)$ tal que

- X_n converge fuertemente a X_{max} para $n \rightarrow \infty$ (notación $X_n \rightarrow X_{max}$ para $n \rightarrow \infty$) i.e. para todo $z \in Z$ $\|X_n z - X_{max} z\| \rightarrow 0$ para $n \rightarrow \infty$.
- El operador $A_n = A - BR^{-1}B^*X_n$ genera un C_0 -semigrupo exponencialmente estable $T_n(t)$.
- El operador $A_{max} = A - BR^{-1}B^*X_{max}$ genera un C_0 -semigrupo exponencialmente estable $T_{max}(t)$.

para probar que X_{max} es una solución estable, primero probaremos que

$$\sigma(A_{max}) \subset \overline{\mathbb{C}^-}$$

donde $\overline{\mathbb{C}^-}$ denota la clausura del semiplano izquierdo. De la parte 1 se tiene que

$$X_{max} - X_n \rightarrow 0 \text{ para } n \rightarrow \infty$$

desde que $B \in L(U, Z)$, implica que

$$(X_{max} - X_n)B \rightarrow 0 \text{ para } n \rightarrow \infty$$

de la dimensionalidad finita de U , se sigue $\dim(\text{Rang}((X_{max} - X_n)B)) < \infty$. Así que el operador $(X_{max} - X_n)B$ mapea el espacio finito dimensional U en otro espacio dimensional finito. Ésto implica que la convergencia fuerte es equivalente a la convergencia uniforme para la sucesión de operadores $(X_{max} - X_n)B$ (ver [16]). Luego

$$\|(X_{max} - X_n)B\| \rightarrow 0 \text{ para } n \rightarrow \infty$$

4.1. Clasificación de las soluciones de la EAR

desde que $A_n^* - A_{max}^* = (X_{max} - X_n)BR^{-1}B^*$, la ecuación de arriba implica que

$$\|A_n^* - A_{max}^*\| \rightarrow 0 \text{ para } n \rightarrow \infty$$

En [9], se muestra que si A_{max} genera un C_0 -semigrupo, entonces A_{max}^* genera un C_0 -semigrupo. Así $\rho(A_{max}^*) \neq \emptyset$. Se sigue del lema 4.1.5 parte 5 que

$$\sigma(H) = \sigma(A_{max}) \cup -\sigma(A_{max}^*) \quad (4.27)$$

desde que H es un operador Riesz-espectral, se sabe que $\sigma(H)$ es totalmente desconexo. Combinando ésto con (4.27) da que $\sigma(A_{max}^*)$ es también totalmente desconexo.

De arriba se puede aplicar el lema 4.1.7 a los operadores A^* y A_{max}^* . Así se concluye que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(A_n^*) = \sigma(A_{max}^*) \quad (4.28)$$

ahora

$$\sigma(A_n) = \overline{\sigma(A_n^*)} \text{ y } \sigma(A_{max}) = \overline{\sigma(A_{max}^*)}$$

donde la barra denota la conjugada compleja. Así por (4.28)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(A_n) = \sigma(A_{max}) \quad (4.29)$$

desde que A_n genera un C_0 -semigrupo exponencialmente estable, tenemos que $\sigma(A_n) \subset \mathbb{C}^-$. Ahora se sigue de (4.29) que $\sigma(A_{max}) \subset \mathbb{C}^-$ y así también $\sigma_p(A_{max}) \subset \mathbb{C}^-$ donde \mathbb{C}^- denota la clausura del semiplano izquierdo. Por lema 4.1.5 parte 3 se tiene que $\sigma_p(A_{max}) \subset \sigma_p(H)$. Usando la hipótesis que $\sigma_p(H) \cap (\text{Eje imaginario}) = \emptyset$, se obtiene que $\sigma_p(A_{max}) \subset \mathbb{C}^-$. Del lema 4.1.8 se concluye que A_{max} genera un C_0 -semigrupo exponencialmente estable, i.e. X_{max} es solución estable de la EAR.

(\Leftarrow)

Dado $X \in L(Z)$ una solución estable de la EAR; i.e. $A - BR^{-1}B^*X$ genera un C_0 -semigrupo exponencialmente estable. Por el teorema 4.1.5 parte 1 se sabe que X es autoadjunto. Defino el operador F como $F = -R^{-1}B^*X$. Entonces $F \in L(Z, U)$ y así por definición 1.2.11 (A, B) es exponencialmente estable.

Por el lema 4.1.5 parte 3 se tiene que

$$\begin{aligned} \sigma_p(H) &\subset \sigma_p(A - BR^{-1}B^*X) \cup \sigma_p(-(A - BR^{-1}B^*X)^*) \\ &\subset \sigma(A - BR^{-1}B^*X) \cup \sigma(-(A - BR^{-1}B^*X)^*) \\ &= \sigma(A - BR^{-1}B^*X) \cup \overline{-\sigma(A - BR^{-1}B^*X)} \end{aligned}$$

donde la barra denota la conjugada compleja. Desde que X es solución estable, se tiene que $\sigma(A - BR^{-1}B^*X) \subset \mathbb{C}^-$ y así $-\sigma(A - BR^{-1}B^*X) \subset \mathbb{C}^+$, ésto implica que

$$\sigma_p(H) \cap (\text{Eje imaginario}) = \emptyset$$

□

Recordando que en el corolario 4.1.1 se ha dado un método para construir una solución estable de la EAR, que proporciona su existencia. En el teorema 4.1.6, se ha dado condiciones necesarias y suficientes para la existencia de una solución estable en el caso $Q_1 = BR^{-1}B^*$, $Q_2 = CC^*$ y $\dim U < \infty$. Más aún, se pueden dar condiciones en la elección del conjunto índice $J \subset \mathbb{Z}_0$ tal que la correspondiente solución X de la EAR es una estable.

4. Ecuación Algebraica de Riccati en espacios de Hilbert

Teorema 4.1.7. *Suponemos que se tienen las hipótesis 1.2.1 y 1.2.2. Se denota por $J_- = \{n \in \mathbb{Z}_0 / \lambda_n \in \sigma_p(H) \text{ y } \operatorname{Re}(\lambda_n) < 0\}$. Si $\{\eta_n / n \in J_-\}$ es una base de Riesz para Z y $\sup_{n \in J_-} \operatorname{Re}(\lambda_n) < 0$, entonces el operador X definido por*

$$X\eta_n = \xi_n, \text{ para } n \in J_-$$

es la única solución estable de la EAR.

Demostración: Del lema 4.1.2 y su prueba se tiene que $X \in L(Z)$ y $A - Q_1X$ es un operador Riesz-espectral en el espacio de Hilbert Z con autovalores $\{\lambda_n / n \in J_-\}$ y correspondientes autovectores $\{\eta_n / n \in J_-\}$. Desde que $X \in L(Z)$, se tiene que $A - Q_1X$ es un generador infinitesimal de un C_0 -semigrupo $S(t)$.

Por el teorema 2.3.5 de [9], se tiene que la cota superior ω_0 del C_0 -semigrupo $S(t)$ es dado por

$$\omega_0 = \sup_{n \in J_-} \operatorname{Re}(\lambda_n)$$

Así, usando la hipótesis $\sup_{n \in J_-} \operatorname{Re}(\lambda_n) < 0$, se tiene que $A - Q_1X$ es el generador infinitesimal de un C_0 -semigrupo exponencialmente estable $S(t)$; i.e. X es una solución estable de la EAR. La unicidad se sigue del teorema 4.1.5. \square

4.2. Aplicaciones

4.2.1. Aplicación de la Función Signo Matricial para resolver Ecuaciones Algebraicas de Riccati

En esta sección el teorema 4.2.1 es un resultado que muestra como, usando $\operatorname{sgn}(M)$, la solución estable de la ecuación de Riccati puede ser encontrada (cuando existe), de manera análoga el teorema 4.2.2 muestra como la solución anti-estable puede ser encontrada (cuando existe). Entonces el teorema 4.2.3 da condiciones necesarias y suficientes para la existencia de tales soluciones, formulada en términos de $\operatorname{sgn}(M)$.

Consideramos una Ecuación Algebraica de Riccati de la forma

$$A^T X + XA - XGX + Q = 0 \tag{4.30}$$

donde la matriz $G := BR^{-1}B^T$. Como es usual, definimos la matriz hamiltoniana como

$$M = \begin{bmatrix} A & -G \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$$

y asumiremos que (A, B) es estabilizable y $(Q^{1/2}, A)$ es detectable en caso que M no tenga autovalores en el eje imaginario.

Teorema 4.2.1. ([22]) *Dado*

$$Z = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} = \operatorname{sgn}(M)$$

donde $Z_{ij} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Entonces, la única solución estable simétrica definida no negativa X_P de (4.30), es una solución de

$$\begin{bmatrix} Z_{12} \\ Z_{22} + I \end{bmatrix} X_P = - \begin{bmatrix} Z_{11} + I \\ Z_{21} \end{bmatrix}$$

Demostración: Dado

$$T = \begin{bmatrix} I & Y \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -X & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I - YX & Y \\ -X & I \end{bmatrix}$$

donde

$$\begin{aligned} A^T X + XA - XGX + Q &= 0 \\ (A - GX)Y + Y(A - GX)^T &= -G \end{aligned}$$

La parte de arriba es una construcción estándar. La matriz X es usada para construir una triangularización del bloque de M mientras la matriz Y se utiliza para diagonalizar el bloque de la matriz triangular.

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ X & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -Y \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & -Y \\ X & I - XY \end{bmatrix}$$

luego

$$T \begin{bmatrix} A & -G \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} T^{-1} = TMT^{-1} = \begin{bmatrix} (A - GX) & 0 \\ 0 & -(A - GX)^T \end{bmatrix}$$

usando las proposiciones 2.1.3 y 2.1.4 tenemos

$$\begin{aligned} T \operatorname{sgn}(M) T^{-1} &= \operatorname{sgn} \begin{bmatrix} (A - GX) & 0 \\ 0 & -(A - GX)^T \end{bmatrix} \\ \operatorname{sgn}(M) &= T^{-1} \operatorname{sgn} \begin{bmatrix} (A - GX) & 0 \\ 0 & -(A - GX)^T \end{bmatrix} T \end{aligned}$$

como $\sigma(A - GX) \subset \mathbb{C}^-$ entonces por la proposición 2.1.1 se tiene $\operatorname{sgn}(A - GX) = -I$

$$= T^{-1} \begin{bmatrix} \operatorname{sgn}(A - GX) & 0 \\ 0 & -\operatorname{sgn}((A - GX)^T) \end{bmatrix} T$$

usando el teorema 2.1.1 ítem 6 se tiene

$$\begin{aligned} &= T^{-1} \begin{bmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} T \\ &= \begin{bmatrix} -I + 2YX & -2Y \\ -2X + 2XYX & I - 2XY \end{bmatrix} \end{aligned}$$

luego

$$\operatorname{sgn}(M) + I = \begin{bmatrix} 2YX & -2Y \\ -2X + 2XYX & 2I - 2XY \end{bmatrix}$$

4. Ecuación Algebraica de Riccati en espacios de Hilbert

o

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} Z_{11} + I & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} + I \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2Y \\ 2(XY - I) \end{bmatrix} X, - \begin{bmatrix} 2Y \\ 2(XY - I) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} Z_{12} \\ Z_{22} + I \end{bmatrix} &= - \begin{bmatrix} 2Y \\ 2(XY - I) \end{bmatrix} \\ - \begin{bmatrix} Z_{11} + I \\ Z_{21} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} Z_{12} \\ Z_{22} + I \end{bmatrix} X \end{aligned}$$

□

Teorema 4.2.2. ([22]) *La única solución anti-estable simétrica definida no positiva X_N de (4.30), es una solución de*

$$\begin{bmatrix} Z_{12} \\ Z_{22} - I \end{bmatrix} X_N = - \begin{bmatrix} Z_{11} - I \\ Z_{21} \end{bmatrix}$$

Demostración: Similar al teorema 4.2.1 excepto que ahora, $\text{sgn}(A - GX) = I$, haciendo el mismo procedimiento de la prueba del teorema 4.2.1 obtenemos

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} Z_{11} - I & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} - I \end{bmatrix} &= \text{sgn}(M) - I = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} * \\ * \end{bmatrix} X, - \begin{bmatrix} * \\ * \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} Z_{12} \\ Z_{22} - I \end{bmatrix} X &= - \begin{bmatrix} Z_{11} - I \\ Z_{21} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

□

Teorema 4.2.3. ([22]) *Consideremos la Ecuación Algebraica de Riccati (4.30) y la matriz hamiltoniana M asociada pero asumimos solamente que G y Q son simétricos entonces*

- a) *Existe una única solución estable simétrica de (4.30) si y sólo si M no tiene autovalores imaginarios puros y $\text{rang} \begin{bmatrix} Z_{12} \\ Z_{22} + I \end{bmatrix} = n$.*
- b) *Existe una única solución anti-estable simétrica de (4.30) si y sólo si M no tiene autovalores imaginarios puros y $\text{rang} \begin{bmatrix} Z_{12} \\ Z_{22} - I \end{bmatrix} = n$.*

Demostración: Ver [22] página 442. □

Usando (3.4) y la matriz hamiltoniana M de la Ecuación Algebraica de Riccati (4.30)

$$Z_0 = JM = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & -G \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -Q & -A^T \\ -A & G \end{bmatrix}$$

Dada la siguiente iteración para $k > 0$

$$Z_{k+1} = \frac{1}{2c} (Z_k + c^2 J Z_k^{-1} J)$$

esta iteración es convergente, y converge a $J\text{sgn}(J^{-1}JM) = J\text{sgn}(M)$. Denotaremos por Y la matriz $J\text{sgn}(M)$ donde

$$\text{sgn}(M) = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} = -JY = \begin{bmatrix} -Y_{21} & -Y_{22} \\ Y_{11} & Y_{12} \end{bmatrix}$$

Así las ecuaciones signo matricial estándares

$$\begin{bmatrix} Z_{12} \\ Z_{22} + I \end{bmatrix} X = - \begin{bmatrix} Z_{11} + I \\ Z_{21} \end{bmatrix}$$

son simplemente equivalentes a las ecuaciones signo matricial

$$\begin{bmatrix} Y_{22} \\ Y_{12} + I \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} I - Y_{21} \\ -Y_{11} \end{bmatrix}.$$

4.2.2. Aplicación de la Función Signo Matricial para resolver Ecuaciones de Lyapunov y Sylvester

En esta sección daremos una pequeña noción de ecuación algebraica de Lyapunov y Sylvester definadas en 4.2.1 y 4.2.2 respectivamente. La matriz Q definida en 4.2.3 es una solución de la ecuación algebraica de Lyapunov, pero queremos obtener otras soluciones para estas ecuaciones mencionadas anteriormente. Para ello usaremos la función signo matricial junto con sus propiedades estudiadas en el capítulo 2, concluyendo que la solución de estas ecuaciones se obtiene de calcular la función signo matricial de un bloque triangular.

Definición 4.2.1. La ecuación algebraica de Lyapunov está definida por:

$$A^T X + X A + C^T C = 0 \quad (4.31)$$

Definición 4.2.2. La ecuación algebraica de Sylvester está definida por:

$$AX + XB + C = 0 \quad (4.32)$$

Definición 4.2.3. La matriz $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ la definiremos como

$$Q = \int_0^\infty e^{tA^T} C^T C e^{tA} dt$$

Observación 4.2.1. La matriz Q es simétrica.

Teorema 4.2.4. La matriz Q definida anteriormente satisface la ecuación de Lyapunov (4.32).

Demostración: recordando que $\frac{d(e^{tA})}{dt} = Ae^{tA} = e^{tA}A$

$$\begin{aligned} QA + A^T Q &= \left(\int_0^\infty e^{tA^T} C^T C e^{tA} dt \right) A + A^T \left(\int_0^\infty e^{tA^T} C^T C e^{tA} dt \right) \\ &= \int_0^\infty (e^{tA^T} C^T C e^{tA} A + A^T e^{tA^T} C^T C e^{tA}) dt \\ &= \int_0^\infty (e^{tA^T} C^T C \frac{d(e^{tA})}{dt} + \frac{d(e^{tA^T})}{dt} C^T C e^{tA}) dt \end{aligned}$$

4. Ecuación Algebraica de Riccati en espacios de Hilbert

sabemos que si $\Phi, \Psi : J \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ funciones matriciales diferenciables en J , entonces se tiene:

$$(\Phi(t)\Psi(t))' = \Phi'(t)\Psi(t) + \Phi(t)\Psi'(t)$$

usando ésto tenemos que

$$\begin{aligned} &= \int_0^\infty \frac{d}{dt}(e^{tA^T} C^T C e^{tA}) dt \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} (e^{\tau A^T} C^T C e^{\tau A})|_0 \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} (e^{\tau A^T} C^T C e^{\tau A}) - C^T C \end{aligned}$$

veamos que resultado nos da el $\lim_{\tau \rightarrow \infty} (e^{\tau A^T} C^T C e^{\tau A})$, como A es estable entonces, todos sus autovalores tienen parte real negativa, sabemos que $J_A = P^{-1}AP$, donde $J_A = \text{diag}[J_1, J_2, \dots, J_k]$, luego cada $J_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$, $\forall i = 1, 2, \dots, k$ y $\sum_{i=1}^k n_i = n$

(1) Si $J_i = \lambda_i I$, con $\lambda_i < 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, k$, entonces veamos

$$\begin{aligned} e^{\tau J_i} &= e^{\tau \lambda_i I} = \text{diag}[e^{\tau \lambda_i}, e^{\tau \lambda_i}, \dots, e^{\tau \lambda_i}] \\ \lim_{\tau \rightarrow \infty} e^{\tau J_i} &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \text{diag}[e^{\tau \lambda_i}, e^{\tau \lambda_i}, \dots, e^{\tau \lambda_i}] \\ &= \text{diag}[\lim_{\tau \rightarrow \infty} e^{\tau \lambda_i}, \lim_{\tau \rightarrow \infty} e^{\tau \lambda_i}, \dots, \lim_{\tau \rightarrow \infty} e^{\tau \lambda_i}] \\ \lim_{\tau \rightarrow \infty} e^{\tau J_i} &= 0, \quad \forall i = 1, 2, \dots, k \end{aligned}$$

luego como $PJ_AP^{-1} = A$ se tiene que

$$\begin{aligned} e^{\tau A} &= e^{\tau PJ_AP^{-1}} \\ &= P e^{\tau J_A} P^{-1} \\ &= P \text{diag}[e^{\tau J_1}, e^{\tau J_2}, \dots, e^{\tau J_k}] P^{-1} \\ \lim_{\tau \rightarrow \infty} e^{\tau A} &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} P \text{diag}[e^{\tau J_1}, e^{\tau J_2}, \dots, e^{\tau J_k}] P^{-1} \\ &= P \text{diag}[\lim_{\tau \rightarrow \infty} e^{\tau J_1}, \lim_{\tau \rightarrow \infty} e^{\tau J_2}, \dots, \lim_{\tau \rightarrow \infty} e^{\tau J_k}] P^{-1} \\ \lim_{\tau \rightarrow \infty} e^{\tau A} &= 0 \end{aligned}$$

(2) Si $J_i = \lambda_i I + E_1$, con $\lambda_i < 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, k$, entonces veamos

$$e^{\tau J_i} = e^{\tau(\lambda_i I + E_1)} = e^{\tau \lambda_i I} e^{\tau E_1}$$

luego por lo anterior tenemos que

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow \infty} e^{\tau J_i} &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} e^{\tau \lambda_i} e^{\tau E_1} = 0, \quad \forall i = 1, 2, \dots, k \\ e^{\tau A} &= e^{\tau PJ_AP^{-1}} \\ &= P e^{\tau J_A} P^{-1} \\ &= P \text{diag}[e^{\tau J_1}, e^{\tau J_2}, \dots, e^{\tau J_k}] P^{-1} \\ \lim_{\tau \rightarrow \infty} e^{\tau A} &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} P \text{diag}[e^{\tau J_1}, e^{\tau J_2}, \dots, e^{\tau J_k}] P^{-1} \\ &= P \text{diag}[\lim_{\tau \rightarrow \infty} e^{\tau J_1}, \lim_{\tau \rightarrow \infty} e^{\tau J_2}, \dots, \lim_{\tau \rightarrow \infty} e^{\tau J_k}] P^{-1} \\ \lim_{\tau \rightarrow \infty} e^{\tau A} &= 0 \end{aligned}$$

(3) Si $J_l = \text{diag}[I_{(\alpha_l, \beta_l)}, I_{(\alpha_l, \beta_l)}, \dots, I_{(\alpha_l, \beta_l)}]$, donde $\lambda_l = \alpha_l + i\beta_l$, $\alpha_l < 0$, $\forall l = 1, 2, \dots, k$, entonces veamos que

$$\begin{aligned}
 e^{\tau I_{(\alpha_l, \beta_l)}} &= \begin{bmatrix} e^{\tau \alpha_l} \cos(\tau \beta_l) & e^{\tau \alpha_l} \text{sen}(\tau \beta_l) \\ -e^{\tau \alpha_l} \text{sen}(\tau \beta_l) & e^{\tau \alpha_l} \cos(\tau \beta_l) \end{bmatrix} \\
 \lim_{\tau \rightarrow \infty} e^{\tau I_{(\alpha_l, \beta_l)}} &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} e^{\tau \alpha_l} \cos(\tau \beta_l) & e^{\tau \alpha_l} \text{sen}(\tau \beta_l) \\ -e^{\tau \alpha_l} \text{sen}(\tau \beta_l) & e^{\tau \alpha_l} \cos(\tau \beta_l) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \lim_{\tau \rightarrow \infty} e^{\tau \alpha_l} \cos(\tau \beta_l) & \lim_{\tau \rightarrow \infty} e^{\tau \alpha_l} \text{sen}(\tau \beta_l) \\ -\lim_{\tau \rightarrow \infty} e^{\tau \alpha_l} \text{sen}(\tau \beta_l) & \lim_{\tau \rightarrow \infty} e^{\tau \alpha_l} \cos(\tau \beta_l) \end{bmatrix} \\
 \lim_{\tau \rightarrow \infty} e^{\tau I_{(\alpha_l, \beta_l)}} &= 0 \\
 e^{\tau J_l} &= \text{diag}[e^{\tau I_{(\alpha_l, \beta_l)}}, e^{\tau I_{(\alpha_l, \beta_l)}}, \dots, e^{\tau I_{(\alpha_l, \beta_l)}}] \\
 \lim_{\tau \rightarrow \infty} e^{\tau J_l} &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \text{diag}[e^{\tau I_{(\alpha_l, \beta_l)}}, e^{\tau I_{(\alpha_l, \beta_l)}}, \dots, e^{\tau I_{(\alpha_l, \beta_l)}}] \\
 \lim_{\tau \rightarrow \infty} e^{\tau J_l} &= \text{diag}[\lim_{\tau \rightarrow \infty} e^{\tau I_{(\alpha_l, \beta_l)}}, \lim_{\tau \rightarrow \infty} e^{\tau I_{(\alpha_l, \beta_l)}}, \dots, \lim_{\tau \rightarrow \infty} e^{\tau I_{(\alpha_l, \beta_l)}}] \\
 \lim_{\tau \rightarrow \infty} e^{\tau J_l} &= 0, \quad \forall l = 1, 2, \dots, k \\
 e^{\tau A} &= e^{\tau P J_A P^{-1}} \\
 &= P e^{\tau J_A} P^{-1} \\
 &= P \text{diag}[e^{\tau J_1}, e^{\tau J_2}, \dots, e^{\tau J_k}] P^{-1} \\
 \lim_{\tau \rightarrow \infty} e^{\tau A} &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} P \text{diag}[e^{\tau J_1}, e^{\tau J_2}, \dots, e^{\tau J_k}] P^{-1} \\
 &= P \text{diag}[\lim_{\tau \rightarrow \infty} e^{\tau J_1}, \lim_{\tau \rightarrow \infty} e^{\tau J_2}, \dots, \lim_{\tau \rightarrow \infty} e^{\tau J_k}] P^{-1} \\
 \lim_{\tau \rightarrow \infty} e^{\tau A} &= 0
 \end{aligned}$$

(4) Si $J_l = \text{diag}[I_{(\alpha_l, \beta_l)}, I_{(\alpha_l, \beta_l)}, \dots, I_{(\alpha_l, \beta_l)}] + E_2$, donde $\lambda_l = \alpha_l + i\beta_l$, $\alpha_l < 0$, $\forall l = 1, 2, \dots, k$, entonces veamos que

$$\begin{aligned}
 \lim_{\tau \rightarrow \infty} e^{\tau J_l} &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} e^{\tau \text{diag}[I_{(\alpha_l, \beta_l)}, I_{(\alpha_l, \beta_l)}, \dots, I_{(\alpha_l, \beta_l)}]} e^{\tau E_2} = 0, \quad \forall l = 1, 2, \dots, k \\
 e^{\tau A} &= e^{\tau P J_A P^{-1}} \\
 &= P e^{\tau J_A} P^{-1} \\
 &= P \text{diag}[e^{\tau J_1}, e^{\tau J_2}, \dots, e^{\tau J_k}] P^{-1} \\
 \lim_{\tau \rightarrow \infty} e^{\tau A} &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} P \text{diag}[e^{\tau J_1}, e^{\tau J_2}, \dots, e^{\tau J_k}] P^{-1} \\
 &= P \text{diag}[\lim_{\tau \rightarrow \infty} e^{\tau J_1}, \lim_{\tau \rightarrow \infty} e^{\tau J_2}, \dots, \lim_{\tau \rightarrow \infty} e^{\tau J_k}] P^{-1} \\
 \lim_{\tau \rightarrow \infty} e^{\tau A} &= 0
 \end{aligned}$$

por lo tanto $\lim_{\tau \rightarrow \infty} e^{\tau A} = 0$.

Luego,

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} e^{\tau A^T} C^T C e^{\tau A} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} e^{\tau A^T} C^T C \lim_{\tau \rightarrow \infty} e^{\tau A} = 0$$

por tanto, $QA + A^T Q = -C^T C$ entonces

$$A^T Q + QA + C^T C = 0$$

4. Ecuación Algebraica de Riccati en espacios de Hilbert

por lo tanto Q satisface (4.31) □

La ecuación (4.31) es equivalente a lo siguiente:

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & -A^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ X & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & 0 \\ C^T C & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ X & I \end{bmatrix}^{-1} \quad (4.33)$$

En efecto:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} I & 0 \\ X & I \end{bmatrix}^{-1} &= \begin{bmatrix} I & 0 \\ -X & I \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} I & 0 \\ X & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & 0 \\ C^T C & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -X & I \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A & 0 \\ XA + C^T C & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -X & I \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A & 0 \\ XA + C^T C + A^T X & -A^T \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} I & 0 \\ X & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & 0 \\ C^T C & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -X & I \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & -A^T \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Por lo tanto, se cumple (4.33). Como $\sigma(A) \in \mathbb{C}^-$ entonces, $\sigma(-A^T) \in \mathbb{C}^+$; usando las proposiciones 2.1.1-2.1.5 obtenemos lo siguiente:

$$\operatorname{sgn} \left(\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & -A^T \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \operatorname{sgn}(A) & 0 \\ 0 & \operatorname{sgn}(-A^T) \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

$$\begin{aligned} &\operatorname{sgn} \left(\begin{bmatrix} I & 0 \\ X & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & 0 \\ C^T C & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ X & I \end{bmatrix}^{-1} \right) \\ &= \begin{bmatrix} I & 0 \\ X & I \end{bmatrix} \operatorname{sgn} \left(\begin{bmatrix} A & 0 \\ C^T C & -A^T \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} I & 0 \\ X & I \end{bmatrix}^{-1} \end{aligned} \quad (4.35)$$

(4.34) y (4.35) en (4.33) se tiene que

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} I & 0 \\ X & I \end{bmatrix} \operatorname{sgn} \left(\begin{bmatrix} A & 0 \\ C^T C & -A^T \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} I & 0 \\ X & I \end{bmatrix}^{-1} \\ \begin{bmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ X & I \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} I & 0 \\ X & I \end{bmatrix} \operatorname{sgn} \left(\begin{bmatrix} A & 0 \\ C^T C & -A^T \end{bmatrix} \right) \\ \begin{bmatrix} -I & 0 \\ X & I \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} I & 0 \\ X & I \end{bmatrix} \operatorname{sgn} \left(\begin{bmatrix} A & 0 \\ C^T C & -A^T \end{bmatrix} \right) \\ \begin{bmatrix} I & 0 \\ -X & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -I & 0 \\ X & I \end{bmatrix} &= \operatorname{sgn} \left(\begin{bmatrix} A & 0 \\ C^T C & -A^T \end{bmatrix} \right) \\ \begin{bmatrix} -I & 0 \\ 2X & I \end{bmatrix} &= \operatorname{sgn} \left(\begin{bmatrix} A & 0 \\ C^T C & -A^T \end{bmatrix} \right) \\ \begin{bmatrix} -I & 0 \\ 2X & I \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -I & 0 \\ \Upsilon & I \end{bmatrix} \end{aligned}$$

entonces $2X = \Upsilon$ y por lo tanto, $X = \frac{\Upsilon}{2}$. Luego la matriz solución de (4.31) se obtiene de la calculación de la función signo matricial del bloque triangular

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ C^T C & -A^T \end{bmatrix}$$

El mismo análisis haremos para solucionar mediante la función signo matricial la ecuación (4.32), veamos (4.32) es equivalente a lo siguiente:

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & -B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ X & I \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & -B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & X \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

En efecto:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} I & X \\ 0 & I \end{bmatrix}^{-1} &= \begin{bmatrix} I & -X \\ 0 & I \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} I & -X \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & -B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -X & I \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A & C+XB \\ 0 & -B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & X \\ 0 & I \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A & AX+XB+C \\ 0 & -B \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & -B \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Por lo tanto, se cumple (4.36). Usando las proposiciones 2.1.1-2.1.5 y el teorema 2.1.1 obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & -B \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} I & X \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & -B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -X \\ 0 & I \end{bmatrix} \\ \operatorname{sgn} \left(\begin{bmatrix} A & C \\ 0 & -B \end{bmatrix} \right) &= \begin{bmatrix} I & X \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \operatorname{sgn}(A) & 0 \\ 0 & -\operatorname{sgn}(B) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -X \\ 0 & I \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} I & X \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -X \\ 0 & I \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -I & X \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -X \\ 0 & I \end{bmatrix} \\ \operatorname{sgn} \left(\begin{bmatrix} A^T & 0 \\ C^T & -B^T \end{bmatrix} \right) &= \begin{bmatrix} -I & 2X \\ 0 & I \end{bmatrix} \\ \left(\operatorname{sgn} \left(\begin{bmatrix} A^T & 0 \\ C^T & -B^T \end{bmatrix} \right) \right)^T &= \begin{bmatrix} -I & 2X \\ 0 & I \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -I & 0 \\ \Upsilon & I \end{bmatrix}^T &= \begin{bmatrix} -I & 2X \\ 0 & I \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \begin{bmatrix} -I & \Upsilon^T \\ 0 & I \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -I & 2X \\ 0 & I \end{bmatrix} \end{aligned}$$

4. Ecuación Algebraica de Riccati en espacios de Hilbert

entonces, $2X = \Upsilon^T$ y por lo tanto $X = \frac{\Upsilon^T}{2}$. Luego la matriz solución de (4.32) se obtiene de la calculación de la función signo matricial del bloque triangular

$$\begin{bmatrix} A^T & 0 \\ C^T & -B^T \end{bmatrix}$$

4.2.3. La Ecuación del Calor

En esta sección, aplicaremos los resultados acerca de bases de Riesz estudiados en el capítulo 1, los teoremas 4.1.1 y 4.1.2 a la ecuación del calor. Esta ecuación diferencial parcial es también considerada en [7] y [9]. Ahí se muestra que ésta puede ser formulada como un estado del sistema lineal en un espacio infinito dimensional Hilbert Z . Para este ejemplo clásico, la solución estable de la correspondiente EAR es bien conocida. Pero, para esta solución, se asumirá que es diagonal. Ésto, pero, es difícil ver a priori. Vamos a volver a calcular la solución estable de la EAR sin ningún tipo de hipótesis. Se dará una caracterización de todas las soluciones de la EAR en términos de los autovectores del Hamiltoniano H usando el teorema 4.1.1.

Aplicación 4.2.1. Se considera una barra de longitud 1 que puede ser calentada a lo largo de su longitud de acuerdo a

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial t}(x, t) &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x, t) + u(x, t), \quad z(x, 0) = z_0(x) \\ \frac{\partial z}{\partial x}(0, t) &= 0 = \frac{\partial z}{\partial x}(1, t) \end{aligned}$$

$z(x, t)$ representa la temperatura en la posición x y tiempo t , $z_0(x)$ su temperatura inicial y $u(x, t)$ la adición del calor a lo largo de la barra. Se considera el costo funcional

$$J(z_0; u) = \int_0^\infty \int_0^1 |z(x, t)|^2 + |u(x, t)|^2 dx dt$$

La ecuación del calor puede ser reformulada como una ecuación diferencial abstracta de la forma

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= Az(t) + Bu(t), \quad t \geq 0, \quad z(0) = z_0, \quad (z_0 \in Z) \\ y(t) &= Cz(t) \end{aligned}$$

en un espacio infinito dimensional Z con entrada u y salida y , y costo funcional correspondiente

$$J(z_0; u) = \int_0^\infty \langle y(s), y(s) \rangle + \langle u(s), Ru(s) \rangle ds$$

donde

$$Z = L_2(0, 1), \quad U = L_2(0, 1), \quad Y = L_2(0, 1)$$

$$A = \frac{d^2}{dx^2} \text{ con}$$

$$\begin{aligned} D(A) &= \{h \in L_2(0, 1) / h, \frac{dh}{dx} \text{ son absolutamente continuas} \\ &\quad, \frac{d^2}{dx^2} \in L_2(0, 1) \text{ y } \frac{dh}{dx}(0) = 0 = \frac{dh}{dx}(1)\} \end{aligned}$$

$$B = I, C = I \text{ y } R = I$$

A tiene autovalores $\nu_n = -(n+1)^2\pi^2$, $n = \dots, -2, -1$ y correspondientes autovectores $\varphi_n = \sqrt{2} \cos((n+1)\pi x)$, $n = \dots, -3, -2$, $\varphi_{-1} = 1$, forma una base ortonormal para $L_2(0, 1)$. A es el generador infinitesimal de un C_0 -semigrupo $T(t)$, que es Riesz-espectral (ver [9] página 45). Más aún, el operador A es autoadjunto y tiene resolvente compacta (ver [7] páginas 45 y 46). El Hamiltoniano H tiene la forma ($Q_1 = BR^{-1}B^*$ y $Q_2 = CC^*$)

$$H = \begin{pmatrix} A & -I \\ -I & -A \end{pmatrix} \quad (4.37)$$

ya así $X \in L(Z)$ es una solución de la EAR si y sólo si

$$\langle Az_1, Xz_2 \rangle + \langle X^*z_1, Az_2 \rangle + \langle z_1, z_2 \rangle - \langle X^*z_1, Xz_2 \rangle = 0 \quad (4.38)$$

para todo $z_1, z_2 \in D(A)$.

Ahora revisaremos que el Hamiltoniano H es un operador Riesz-espectral usando el teorema 1.4.1. Desde que el operador Riesz-espectral A tiene resolvente compacta se sigue de la definición 1.4.1 que es discreto. La hipótesis 1 del teorema 1.4.1 es satisfecha.

Dado $\mathbb{Z}^- = \{n \in \mathbb{Z} / n \leq 0\}$ y $\mathbb{Z}^+ = \{n \in \mathbb{Z} / n \geq 0\}$ y defino

$$\begin{aligned} \mu_n = \nu_n &= -(n+1)^2\pi^2 \text{ para } n \in \mathbb{Z}^- \\ & \text{y} \\ \mu_n = -\nu_n &= (n+1)^2\pi^2 \text{ para } n \in \mathbb{Z}^+ \end{aligned} \quad (4.39)$$

entonces se tiene que $\{\mu_n, n \in \mathbb{Z}_0\}$ es una enumeración de $\sigma_p(A) \cup \overline{-\sigma_p(A)}$, donde la barra denota la conjugada compleja. Así sólomente para el autovalor $\mu_{-1} = 0 \in \sigma_p(A)$ se tiene que $-\overline{\mu_{-1}} = 0 \in \sigma_p(A)$, y por tanto la hipótesis 2 del teorema 1.4.1 es satisfecha.

Defino d_n como la distancia de μ_n a $(\sigma_p(A) \cup \overline{-\sigma_p(A)}) - \{\mu_n\}$. Se tiene que probar que

$$\sum_{n=-\infty, n \neq 0}^{\infty} \frac{1}{d_n^2} < \infty \quad (4.40)$$

donde la suma es tomada sobre estos n para que $d_n \neq 0$. Se ve que $d_{-1} = d_1 = 0$. Usando (4.39) se sigue que

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty, n \neq 0, d_n \neq 0}^{\infty} \frac{1}{d_n^2} &= 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{d_n^2} \\ &= 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\pi^4((n-1)^2 - (n-2)^2)^2} \\ &= 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\pi^4(2n-3)^2} < \infty \end{aligned}$$

la hipótesis 3 es satisfecha.

Para ver la hipótesis 4 del teorema 1.4.1, se tiene que conocer $\sigma_p(H)$. Por tanto, primero calcularemos los autovalores y correspondientes autovectores de H , i.e.

$$H \begin{pmatrix} \eta \\ \xi \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \eta \\ \xi \end{pmatrix}$$

4. Ecuación Algebraica de Riccati en espacios de Hilbert

usando (4.37) en la ecuación de arriba, se tiene

$$\begin{aligned}\xi &= -(\lambda I - A)\eta \\ \eta &= -(\lambda I + A)\xi\end{aligned}\tag{4.41}$$

luego

$$((\lambda^2 - 1)I - A^2)\xi = 0$$

recordar que $\{\varphi_n, n \in \mathbb{Z}^-\}$ forma una base ortonormal de $L_2(0, 1)$. Así, la ecuación de arriba es equivalente con

$$\langle ((\lambda^2 - 1)I - A^2)\xi, \varphi_n \rangle = 0, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{Z}^-$$

sustituyendo $A\varphi_n = \nu_n\varphi_n$, da

$$\lambda^2 - 1 - \nu_n^2 = 0 \quad \text{o} \quad \langle \xi, \varphi_n \rangle = 0, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{Z}^-$$

así cualquiera $\xi = 0$ o $\lambda = \pm\sqrt{\nu_n^2 + 1}$ para algún n . Si $\xi = 0$, entonces (4.41) implica que $\eta = 0$ que es una contradicción con el hecho que $\begin{pmatrix} \eta \\ \xi \end{pmatrix}$ es un autovector. Se concluye que $\lambda = \pm\sqrt{\nu_n^2 + 1}$ y $\xi = \varphi_n$ para algún $n \in \mathbb{Z}^-$. Así el Hamiltoniano H tiene autovalores

$$\begin{aligned}\lambda &= -\sqrt{\nu_n^2 + 1} = -\sqrt{(n+1)^4\pi^4 + 1}, \quad n \in \mathbb{Z}^- \\ \lambda &= \sqrt{\nu_{-n}^2 + 1} = \sqrt{(-n+1)^4\pi^4 + 1}, \quad n \in \mathbb{Z}^+\end{aligned}\tag{4.42}$$

de (4.41) se ve que $\begin{pmatrix} (-\nu_n + \sqrt{\nu_n^2 + 1})\varphi_n \\ \varphi_n \end{pmatrix}$ es el autovector del Hamiltoniano H correspondiente al autovector λ_n para $n \in \mathbb{Z}^-$.

Se define

$$a_n = -\nu_n + \sqrt{\nu_n^2 + 1} = (n+1)^2\pi^2 + \sqrt{(n+1)^4\pi^4 + 1}, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{Z}^- \tag{4.43}$$

entonces

$$\Phi_n = \begin{pmatrix} \eta_n \\ \xi_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{a_n^2 + 1}} \begin{pmatrix} a_n\varphi_n \\ \varphi_n \end{pmatrix}, \quad n \in \mathbb{Z}^- \tag{4.44}$$

son los autovectores normalizados del Hamiltoniano H correspondiente a los autovalores λ_n , donde $\varphi_n = \sqrt{2} \cos((n+1)\pi x)$, $n = \dots, -3, -2$, $\varphi_{-1} = 1$.

De manera similar se puede calcular los autovectores del Hamiltoniano H para $n \in \mathbb{Z}^+$. Para ello se define

$$a_n = -\nu_{-n} - \sqrt{\nu_{-n}^2 + 1} = (-n+1)^2\pi^2 - \sqrt{(-n+1)^4\pi^4 + 1}, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{Z}^+ \tag{4.45}$$

entonces

$$\Phi_n = \begin{pmatrix} \eta_n \\ \xi_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{a_n^2 + 1}} \begin{pmatrix} a_n\varphi_{-n} \\ \varphi_{-n} \end{pmatrix}, \quad n \in \mathbb{Z}^+ \tag{4.46}$$

4.2. Aplicaciones

son los autovectores normalizados del Hamiltoniano H correspondiente a los autovalores λ_n , donde $\varphi_{-n} = \sqrt{2} \cos((-n+1)\pi x)$, $n = 2, 3, \dots$, $\varphi_{-1} = 1$.

Se concluye de (4.42) que todos los autovectores del Hamiltoniano H son simples i.e. la hipótesis 4 del teorema 1.4.1 es satisfecha. Así el Hamiltoniano $H = \begin{pmatrix} A & -I \\ -I & -A \end{pmatrix}$ es un operador Riesz-espectral (discreto), con base de Riesz $\{\Phi_n, n \in \mathbb{Z}_0\}$ (ver (4.44) y (4.46)). Ésto implica que nuestro sistema lineal estatal, la ecuación del calor, y el correspondiente Hamiltoniano H satisfacen las hipótesis 1.2.1 y 1.2.2.

Ahora se dará una caracterización para todos las soluciones de la EAR. Empezamos dando una caracterización para la solución estable. Denotamos por

$$J_- = \{n \in \mathbb{Z}_0 / \lambda_n \in \sigma_p(H) \text{ y } \operatorname{Re}(\lambda_n) < 0\}$$

de (4.42) se sigue que J_- es igual a \mathbb{Z}^- . Tenemos que ver que $\{\eta_n, n \in \mathbb{Z}^-\}$ forma una base de Riesz para Z . Usando (4.43), se ve que existe una constante positiva \tilde{m} tal que

$$\tilde{m} \leq \frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + 1}}, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{Z}^- \quad (4.47)$$

claramente

$$\frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + 1}} \leq 1, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{Z}^- \quad (4.48)$$

desde que $\{\varphi_n, ; n \in \mathbb{Z}^-\}$ forma una base ortonormal para $Z = L_2(0, 1)$, se tiene que para arbitrario $N \in \mathbb{N}$ y arbitrarios escalares α_n , $n = -N, \dots, -1$, que

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n=-N}^{-1} \alpha_n \eta_n \right\|^2 &= \left\| \sum_{n=-N}^{-1} \frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + 1}} \alpha_n \varphi_n \right\|^2 \\ &= \sum_{n=-N}^{-1} \frac{a_n^2}{a_n^2 + 1} |\alpha_n|^2 \end{aligned}$$

combinando ésto con (4.47) y (4.48) se tiene que

$$\tilde{m} \sum_{n=-N}^{-1} |\alpha_n|^2 \leq \left\| \sum_{n=-N}^{-1} \alpha_n \eta_n \right\|^2 \leq \sum_{n=-N}^{-1} |\alpha_n|^2 \quad (4.49)$$

así $\{\eta_n, n \in \mathbb{Z}^-\}$ forma una base de Riesz para Z . De (4.42), se conoce que $\sup_{n \in \mathbb{Z}^-} \operatorname{Re}(\lambda_n) = -1 < 0$. Así, aplicamos el teorema 4.1.7, da que la solución estable X_{stab} de la EAR es dada por

$$X_{stab} \eta_n = \xi_n, \quad \text{para } n \in J_- \quad (4.50)$$

sustituyendo estas fórmulas en (4.43) y (4.44) para η_n y ξ_n en (4.50) da

$$X_{stab} \frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + 1}} \varphi_n = \frac{1}{\sqrt{a_n^2 + 1}} \varphi_n, \quad n \in \mathbb{Z}^-$$

y también con (4.43)

$$X_{stab} \varphi_n = (-(n+1)^2 \pi^2 + \sqrt{(n+1)^4 \pi^4 + 1}) \varphi_n$$

4. Ecuación Algebraica de Riccati en espacios de Hilbert

en términos de bases esto se convierte

$$X_{stab} = \sum_{n=-\infty}^{-1} (-(n+1)^2\pi^2 + \sqrt{(n+1)^4\pi^4 + 1}) \langle \cdot, \varphi_n \rangle \varphi_n \quad (4.51)$$

se sigue de (4.51) que X_{stab} es una solución diagonal. Desde que

$$-(n+1)^2\pi^2 + \sqrt{(n+1)^4\pi^4 + 1}$$

es positivo para todo n , X_{stab} es autoadjunto, no negativa y única.

El teorema 4.1.1 parte 1 da una biyección entre la existencia de una solución lineal acotada X de la EAR y la existencia de un conjunto índice $J \subset \mathbb{Z}_0$ tal que $\{\eta_n, n \in J\}$ es una base de Riesz para Z . Así responder a la pregunta de existencia de otra solución lineal acotada X de la EAR es equivalente a preguntar de la existencia de otros conjuntos índices $J \subset \mathbb{Z}_0$ tal que $\{\eta_n, n \in J\}$ es una base de Riesz para Z .

Notar que se sigue de (4.43)-(4.46) que Φ_{-n} y $\Phi_n, n \in \mathbb{Z}^+$, son ambos de la forma $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \times$ (autovector de A), donde c_1 y c_2 son constantes. Esta similitud entre Φ_{-n} y Φ_n junto con el hecho que $\{\eta_n, n \in \mathbb{Z}^-\}$ forma una base de Riesz para Z , nos da la sugerencia que $\{\eta_n, n \in \mathbb{Z}^+\}$ podría formar una base de Riesz para Z . De (4.45) y (4.46), se tiene que

$$\eta_n = \frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + 1}} \varphi_n, \quad n \in \mathbb{Z}^+$$

$a_n \rightarrow 0$ para $n \rightarrow \infty$. Así $\|\eta_n\| \rightarrow 0$ para $n \rightarrow \infty$. Por definición 1.2.4 parte 2, se tiene que $\{\eta_n, n \in \mathbb{Z}^+\}$ no forma una base de Riesz para Z .

Similarmente, si el conjunto $J \subset \mathbb{Z}_0$ contiene infinitos η_n 's con $n \in \mathbb{Z}^+$, todavía se tiene que $\|\eta_n\| \rightarrow 0$ a lo largo de $n \in \mathbb{Z}^+$. Por tanto, estos η_n 's no forman una base de Riesz para Z . Pero se puede encontrar otro conjunto índice $J \subset \mathbb{Z}_0$ tal que $\{\eta_n, n \in J\}$ forma una base de Riesz para Z . Ahora, se toma finitos η_n 's con $n \in \mathbb{Z}^+$, digamos $n_{i_1}, n_{i_2}, \dots, n_{i_k}$. Pero, finitos vectores $\eta_{i_1}, \eta_{i_2}, \dots, \eta_{i_k}$ nunca son suficientes para formar una base de Riesz para Z . Por lo tanto se tiene que adicionar estos vectores con infinitos η_n 's con $n \in \mathbb{Z}^-$. Desde que $\eta_{-n} = c_n \eta_n$, el conjunto $\{\eta_n, n \in (i_1, i_2, \dots, i_k) \text{ y } n \in \mathbb{Z}^-\}$ no puede formar una base de Riesz para Z . Así, se toma

$$\begin{aligned} & \{n_{i_1}, n_{i_2}, \dots, n_{i_k} \text{ (número finito de } \eta_n \text{'s con } n \in \mathbb{Z}^+)\} \\ & \text{y } \eta_n, n \in \mathbb{Z}^-, \text{ excepto } n_{-i_1}, n_{-i_2}, \dots, n_{-i_k} \end{aligned} \quad (4.52)$$

i.e.

$$J = \{n \in \mathbb{Z}_0 / n \in \{i_1, i_2, \dots, i_k\} \text{ y } n \in \mathbb{Z}^- \setminus \{-i_1, -i_2, \dots, -i_k\}\} \quad (4.53)$$

No se puede dejar fuera cualquiera de los η_n 's con $n \in \mathbb{Z}^- \setminus \{-i_1, -i_2, \dots, -i_k\}$, porque entonces $\overline{\text{span}\{\eta_n\}_{n \in J}} \neq Z$. Notar que $\eta_n = c_n \varphi_n$ y $\eta_{-n} = c_{-n} \varphi_n$ para $n \in \mathbb{Z}^-$. Ésto junto con el hecho que $\{\varphi_n, n \in \mathbb{Z}^-\}$ forma una base ortonormal para Z , implica que

$$\overline{\text{span}\{\eta_n\}_{n \in J}} = Z$$

4.2. Aplicaciones

donde J es dado por (4.53). Se sigue de (4.45) que se puede obtener de forma similar cotas para $\frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + 1}}$, $n \in \mathbb{Z}^+$, como en (4.47) y (4.48). Así existe una constante positiva m tal que

$$m \leq \frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + 1}} \leq 1, \quad \text{para todo } n \in J$$

usando estas desigualdades, se puede, similarmente como en (4.49), mostrar que $\{\eta_n, n \in J\}$ forma una base ortonormal para Z . Aplicando el teorema 4.1.1 parte 2 nos da que la correspondiente solución lineal acotada X de la EAR es dada por

$$X\eta_n = \xi_n, \quad \text{para } n \in J$$

usando estas fórmulas para η_n y ξ_n como se dan en (4.43)-(4.46) se puede reescribir la ecuación de arriba como

$$X\varphi_n = b_n\varphi_n, \quad \text{para } n \in \mathbb{Z}^-$$

donde

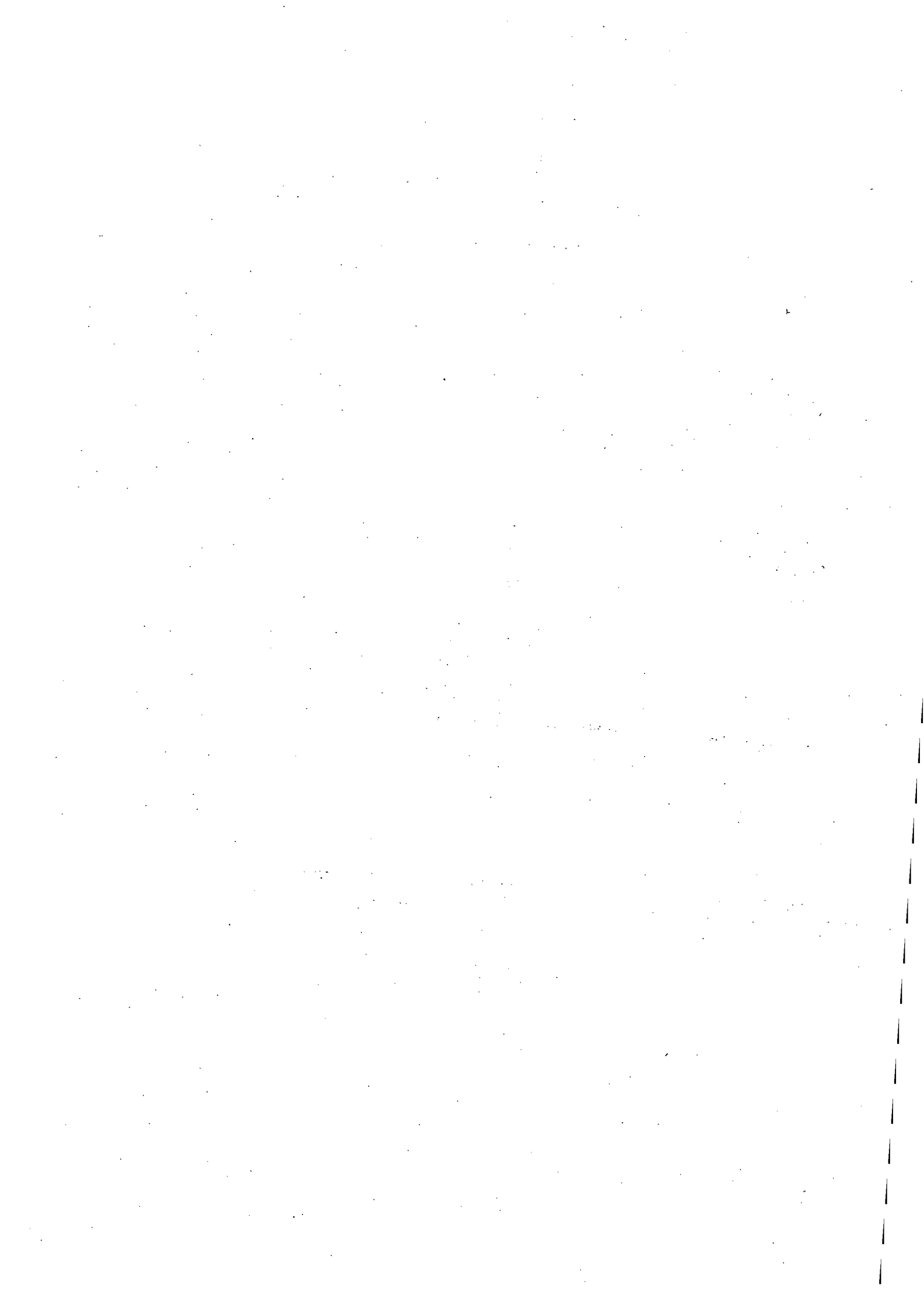
$$\begin{aligned} b_n &= -(n+1)^2\pi^2 - \sqrt{(n+1)^4\pi^4 + 1}, \quad n \in \{-i_1, -i_2, \dots, -i_k\} \\ b_n &= -(n+1)^2\pi^2 + \sqrt{(n+1)^4\pi^4 + 1}, \quad n \in \mathbb{Z}^- \setminus \{-i_1, -i_2, \dots, -i_k\} \\ \varphi_{-1} &= 1 \\ \varphi_n &= \sqrt{2} \cos((n+1)\pi x), \quad n = \dots, -3, -2 \end{aligned}$$

Notar que estas soluciones son diagonales y así autoadjuntas, que corresponde con el teorema 4.1.2. Estas soluciones, excepto la estable, son ni no negativas ni no positivas.

Variando el conjunto $\{i_1, i_2, \dots, i_k\}$, tal definido en (4.52), sobre todos los subconjuntos finitos de \mathbb{Z}^+ , obtenemos conjuntos índices $J \subset \mathbb{Z}_0$ tal que $\{\eta_n/n \in J\}$ es una base de Riesz para Z . Usando la biyección entre la existencia de tal conjunto índice J y la existencia de una solución lineal acotada X de la EAR, ahora se tiene una caracterización para toda solución acotada X de la EAR. Aplicando el teorema 4.1.1 parte 2 se tiene que X es dado por

$$X\eta_n = \xi_n, \quad \text{para } n \in J$$

Así se tiene una expresión explícita para todas las soluciones de la EAR, entre las cuales hay una estable. En todas se tiene un número infinito de soluciones.



Capítulo 5

Conclusiones

En el capítulo 2 la función signo se pudo extender de \mathbb{C} a $\mathbb{C}^{n \times n}$ siendo ésta también una matriz de $\mathbb{C}^{n \times n}$, calculándola con el uso de función de matrices, serie de potencias y propiedades de éstas. Luego obtuvimos la forma integral de cómo hallar la función signo matricial para una matriz cualquiera en $\mathbb{C}^{n \times n}$. Para matrices de mayor tamaño se usarán los procesos iterativos para el cálculo de la función signo matricial, uno de ellos será el proceso iterativo de Newton, el cual usa la inversa de matrices; otro será el proceso iterativo de Schultz, el cual usa sólo multiplicación de matrices; también el proceso iterativo generalizado de Newton que es un caso más general para hallar la función de matrices y que va de la mano con el proceso iterativo de Newton; todos estos procesos convergen bajo ciertas condiciones. Pero no sólo se puede calcular la función signo matricial para matrices cuadradas ésta también puede ser hallada para matrices rectangulares, mediante la definición de una relación, además de la definición de suma y producto de estas relaciones; permite calcular la función signo matricial de las matrices rectangulares como un límite de sucesión de estas relaciones.

En el capítulo 3 se ha llegado a clasificar las soluciones de la Ecuación Algebraica de Riccati en dos conjuntos, el conjunto de las soluciones Hermitianas y de las Definidas, dentro de las cuales existen subconjuntos respectivamente de soluciones Puras y soluciones Extremas. Hemos obtenido, la cardinalidad del conjunto de las soluciones Hermitianas de la Ecuación Algebraica de Riccati es finito o posee una familia continua de soluciones. El concepto de que el par (A, B) es estabilizable ha jugado un papel importante en los resultados de la existencia de soluciones extremas, así como la accesibilidad de (A, B) para la existencia de soluciones hermitianas únicas de las Ecuaciones Algebraicas de Riccati. Se obtuvo que dentro del conjunto de soluciones Definidas existen soluciones estables e anti-estables, las cuales están el conjunto de soluciones definidas no negativas (\mathbf{P}) y en el conjunto de soluciones definidas no positivas (\mathbf{N}) respectivamente siempre y cuando (A, B) es estabilizable y la matriz hamiltoniana H no tenga autovalores imaginarios puros. De los teoremas de clasificación tenemos que existe una correspondencia 1-1 entre el conjunto de soluciones Hermitianas de la Ecuación Algebraica de Riccati y un conjunto de subespacios invariantes donde esta correspondencia nos da una manera de expresar un elemento del conjunto de soluciones Hermitianas. Mediante el uso de la Función Signo Matricial se puede también resolver la Ecuación Algebraica de Riccati y se obtuvo soluciones estables e anti-estables únicas resolviendo otra ecuación que se obtiene de la Función Signo Matricial de la Matriz Hamiltoniana; así como también se ha obtenido solución para las Ecuaciones Algebraicas de Lyapunov y Sylvester mediante el uso de la Función Signo Matricial.

5. Conclusiones

En el capítulo 4 se llegó a obtener condiciones suficientes para que el Hamiltoniano sea un operador Riesz-espectral. Se ha probado que para cada solución lineal acotada X de la EAR le corresponde exactamente un conjunto índice $J \subset \mathbb{Z}_0$ tal que $\{\eta_n, n \in J\}$ forma una base de Riesz para el espacio de Hilbert Z . Se obtuvo un método para construir soluciones de la EAR, también caracterizaciones para soluciones autoadjuntas, no negativas y estables de la EAR; dimos condiciones necesarias y suficientes para la existencia de soluciones estables de la EAR. El concepto de base de Riesz ha jugado un papel importante en los resultados de la existencia de soluciones lineales acotadas, autoadjuntas, no negativas y estables de la Ecuación Algebraica de Riccati, así como también para la unicidad de éstas. Obtuvimos resultados de la Ecuación del Calor analizándola y aplicando las propiedades dadas en las secciones anteriores, de las cuales se obtuvieron las soluciones autoadjuntas de la EAR de la Ecuación del Calor.

Bibliografía

- [1] Abou-Kandil, H., Freiling, G. and Jank, G., *Matrix Riccati Equations in Control and Systems Theory*, Birkhauser Verlag, 2003.
- [2] Barnett, S., *Polynomials and Linear Control Systems*, Dekker-New York, 1983.
- [3] Benner, P. and Byers, R., *An Arithmetic for Matrix Pencils*, in Proc. MTNS98 , Padova, Italy, 1998.
- [4] Benner, P. and Byers, R., *An Arithmetic for Rectangular Matrix Pencils*.
- [5] Bittanti Sergio, Laub Alan J. , Willems Jan C., *The Riccati Equation*, Springer-Verlag, 1991.
- [6] Curtain R.F., Pritchard A.J., *Functional Analysis in Modern Applied Mathematics, Mathematics in Science and Engineering*, New York: Academic Press, 1977.
- [7] Curtain R.F., Pritchard A.J., *Infinite Dimensional Linear Systems Theory, Lectures Notes in Control and Information Sciences*, Berlin: Springer Verlag, 1978.
- [8] Curtain R.F., Rodman L., *Comparison theorems for infinite-dimensional Riccati Equations, Systems and Control Letters*, 1990.
- [9] Curtain R.F., Zwart H.J., *An Introduction to Infinite Dimensional Linear Systems Theory. Texts in Applied Mathematics*, Berlin: Springer, 1995.
- [10] Dunford N., Schwartz J.T., *Linear Operators, Part III: Spectral Operators*, New York: Wiley-Interscience, 1971.
- [11] Frommer, A. and Simoncini, V., *Matrix Functions*, Tech. Rep. Dipartimento di Matematica, Bologna, 2006.
- [12] Gantmacher, F. R., *The theory of Matrices*, Volumen 1, Chelsea Publishing Company, 1959.
- [13] Gantmakher, F.R., *Theory of Matrices*, Moscow: Kauka,1988.
- [14] Highman, Nicholas J., *Functions of Matrices: Theory and Computation*, SIAM, 2007.
- [15] Hoffman, Kenneth y Kunze, Ray, *Algebra Lineal*, Prentice/Hall Internacional, 1993.
- [16] Kato T., *Perturbation Theory for Linear Operators*, Berlin: Springer Verlag, 1966.

BIBLIOGRAFÍA

- [17] Kenney, C. and Laub, A.J., *Rational Iterative Methods for the Matrix Sign Function*, SIAM J. Matrix Anal. Appl., 1991, N^o 12(2), pp. 273-291.
- [18] Kreyszig E., *Introductory Functional Analysis with Applications*, New York: John Wiley and Sons, 1978.
- [19] Kucěra, V., *A review of the matrix Riccati Equation*. Kybernetika, 1973.
- [20] Kuiper C.R., Zwart H.J., *Relations between the algebraic Riccati equation and the Hamiltonian for Riesz-spectral systems*, Research Report University of Twente, Faculty of Applied Mathematics, 1994.
- [21] Lages Lima, Elon, *Algebra Lineal*, IMCA, 1998.
- [22] Lancaster, P. y Rodman L., *Algebraic Riccati Equations*, Oxford University Press, Oxford, 1995.
- [23] Lancaster, P., *Theory of Matrices*, New York: Academic, 1969.
- [24] Logemann H., Zwart H.J., *On robust PI-control of infinite-dimensional systems*, SIAM J. Control Optim., 1992.
- [25] Naylor Arch W., Sell George R., *Linear Operator Theory in Engineering and Science*, Holt, Rinchart and Winston, Inc., 1971.
- [26] Newburgh J.D., *The variation of spectra*, *Duke Math. J.*, 1951..
- [27] Perko, Lawrence, *Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer, 2001.
- [28] Sun, X. and Quintana-Orti, E.S., *The Generalized Newton Iteration for the Matrix Sign Function*, Tech. Rep., PRISM Working Note N^o 366 , 1998.
- [29] Yosida K., *Functional Analysis*, Berlin: Springer Verlag, 1965.