UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

**Tesis para Optar
el Título Profesional de
LICENCIADO en MATEMÁTICA**

Martingalas, Integración Estocástica y Algunas Aplicaciones en Finanzas

por

Yerson Elvis Salcedo Terreros

Prof. William Carlos Echegaray Castillo
Asesor

Lima-Peru
2012

Digitalizado por:

Consorcio Digital del
Conocimiento MebLatam,
Hemisferio y Dalse

CIP - CATÁLOGO DE PUBLICACIÓN

Yerson Elvis Salcedo Terreros
Martingalas, Integración Estocástica y Algunas Aplicaciones en Finanzas / Yerson Elvis Salcedo Terreros. – EPM - FC - UNI, 2012.
p.: il.
Tesis (Licenciatura)—Universidad Nacional de Ingeniería, Facultad de Ciencias, Escuela Profesional de Matemática, Lima, 2012. Asesor: William Carlos Echegaray Castillo.

A mi madre y familia por el apoyo
constante que me brindaron.

Agradezco al Profesor William Carlos Echegaray Castillo por la orientación y sus sabios consejos para la culminación del presente trabajo.

Índice general

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN

1.1. Resumen

Siendo $\Upsilon = [0, +\infty[$ y un espacio de probabilidad dado (Ω, F, P), se define a un proceso estocástico indexado por Υ como a una familia de variables aleatorias $(X_t)_{t\in\Upsilon}$, al cual se le llama simplemente proceso estocástico o proceso, denotado como $(X_t)_{t\in\Upsilon}$.
En la presente investigación se desarrollará propiedades y características de los procesos estocásticos, particularmente para martingalas, el cual es un proceso estocástico denotado como $(M_t)_{t\in\Upsilon}$, proceso estocástico de variación acotada $(A_t)_{t\in\Upsilon}$, proceso estocástico semimartingala continua $(X_t)_{t\in\Upsilon}$ (llamada semimartingala continua), estableciendo la integración estocástica bien definida entre dos procesos estocásticos, dando una aplicación a finanzas referidas a mercados sobre seguros.
Se comienza estableciendo características de los procesos estocásticos tales como, trayectoria de un proceso, proceso estocástico continuo, tiempo opcional (T), último elemento, muestra opcional, con ello se define el proceso estocástico martingala local $(M_t)_{t\in\Upsilon}$, proceso de variación acotada $(A_t)_{t\in\Upsilon}$, indicando propiedades de estas definiciones.
Luego, se establece la integral estocástica para un proceso de variación acotada $(A_t)_{t\in\Upsilon}$ con un proceso estocástico $(H_t)_{t\in\Upsilon}$ particular, denotandolo como: $I_t = \int_0^t H_t dA_t = (H \bullet A)_t$, que este bien definido como otro proceso estocástico $I_t = (H \bullet A)_t$, el cual inducirá la integral estocástica para una martingala local continua $(M_t)_{t\in\Upsilon}$, de una propiedad general, estableciendo, finalmente, la integral estocástica para una semimartingala continua $(X_t = M_t + A_t)$ en la cual esta integral este bien definida.
Seguidamente, examinaremos al movimiento Browniano como un proceso estocástico $(W_t)_{t\in\Upsilon}$, que cumplirá algunas características especiales.
Generalizamos la integral estocástica para procesos estocásticos $\mathbb{R}^d$-*valuadas*, donde un proceso $\mathbb{R}^d$-*valuado* es un vector $X = (X_t^1, X_t^2, ..., X_t^d)$ y cada componente es un proceso estocástico X_t^j, así es una martingala $\mathbb{R}^d$-*valuado*, si cada componente es una martingala y similarmente para los otros procesos.
Establecemos la notación diferencial referida a la integral estocástica X teniendo en

cuenta:

$$dZ_t = H_t dX_t \Longleftrightarrow H \in L(X) \quad y \quad Z_t = Z_0 + \int_0^t H_s dX_s, \quad \forall t > 0$$

La integral estocástica para semimartingalas continuas definida y desarrollada en el presente trabajo soluciona las ecuaciones de mercado establecidas por Black-Scholes, que consta de dos ecuaciones dinámicas:

$$\begin{aligned} dB_t &= r(t)B_t dt, \qquad B_0 = 1 \qquad y \\ \frac{dS_t}{S_t} &= \mu(t)dt + \sigma(t)dW_t, \qquad S_0 = x \end{aligned}$$

sobre el comportamiento de los precios de dos seguros, un bono principal B_t y un Stock S_t, siendo W_t un movimiento Browniano y $r, \sigma : [0,T] \to \mathbb{R}_+$ y $\mu : [0,T] \to \mathbb{R}$ funciones continuas.
Definimos una estrategia comercial $\phi_t = (K_t, H_t)$ como un proceso estocástico $\mathbb{R}^2$-*valuado* (proceso bidimensional de valor real) para analizar los bonos (el comportamiento del precio), estableciendo la conveniencia de inversiones.
Mostramos, finalmente, el comportamiento del modelo en mercados arbitrados y no arbitrados. Obteniéndose que no existe una estrategia comercial acotada inferiormente (domada) en un mercado arbitrado sobre el modelo establecido por Black-Scholes.

1.2. Antecedentes

La teoría de los procesos estocásticos se centra en el estudio y modelación de sistemas (fenómenos aleatorios) que evolucionan a lo largo del tiempo, (u otro medio), de acuerdo a leyes no determinísticas, sino de carácter aleatorio (probabilístico).
La forma común de describir la evolución de dichos sistemas, es mediante sucesiones o colección de variables aleatorias. De esta manera se estudia cómo evoluciona una variable aleatoria a lo largo del tiempo.

De acuerdo a la complejidad que se observa en el comportamiento de los precios de bienes o bonos en un mercado comercial actual, es necesario modelar dicho comportamiento, describiendo cómo es que fluctuan los precios de los bienes o bonos en un mercado comercial con cierta incertidumbre.
El no análisis del comportamiento con incertidumbre de los precios de bienes o bonos en un mercado comercial puede acarrear consecuencias que no se podrán solucionar fácilmente, como una pérdida de dinero de parte de inversionistas, una no adecuada inversión con sus correspondientes efectos en la economía.

Una de las primeras aplicaciones de procesos estocásticos fue propuesto por Louis Bachelier, quien alrededor en 1900 escribió un trabajo sobre el modelamiento de los precios de bienes en el mercado de intercambio de París (bolsa de valores de París actualmente).
Bachelier no conocía los trabajos modernos sobre ello, pero el uso una moderna terminología, en esa época, así indicó a $W(t)$ como la fluctuación del mercado, describió las fluctuaciones del mercado afectando el precio de un bien $X(t)$.
Bachelier asumió incrementos crecientes infinitesimales de precios $dX(t)$, proporcional al incremento $dW(t)$ del proceso $W(t)$, así:

$$dX(t) = \sigma dW(t)$$

donde σ es una constante positiva y un bien con precio inicial $X(0) = x$ sería:

$$X(t) = x + \sigma W(t)$$

en el tiempo t.
Esto fue un avance en tiempos de Bachelier, pero tiene errores, así: para cualquier tiempo $t > 0$, el precio $X(t)$ podría ser negativo con probabilidad no cero. Sin embargo, para cortos tiempos la ecuación funciona, ya que la probabilidad es pequeña, pero siendo t creciente, la probabilidad que $X(t) < 0$ se dará y el modelo tendrá un error $(X(t) < 0)$.
Al remediar el error se observó que los inversores trabajan en términos de su potencial ganancia o pérdida $dX(t)$, en proporción a la suma invertida $X(t)$ por lo cual será el precio relativo de un bien quien será afectado y reaccionará a las fluctuaciones del mercado y es de acuerdo a ello que debería ser proporcional a $dW(t)$ y se tendrá lo siguiente:

$$\frac{dX(t)}{X(t)} = \sigma dW(t)$$

$$dX(t) = \sigma X(t) dW(t) \tag{2}$$

donde $W(t)$ será un proceso estocástico (movimiento Browniano).

¿Cómo se entiende esta ecuación matemática? ¿Cuál es la precisión?, formalmente nos da una ecuación diferencial, pero inmediatamente nos guía a una dificultad ya que las trayectorias de $W(t)$ no son diferenciables.
En este contexto una alternativa de solución fue dado por Itô en 1940, quien desarrolló la teoría de integración estocástica y ecuación diferencial estocástica, Itô dio un riguroso instrumento matemático para solucionar la ecuación tomándolo como ecuación integral, que envuelve un nuevo tipo de integral, así la ecuación (2) puede ser escrito como integral y podremos escribir:

$$X(t) = x + \sigma \int_0^t X(t) dW(t)$$

en donde la integral con respecto a $W(t)$ es llamado la integral estocástica de Itô y será definido en este trabajo más adelante. Una primera solución a esta ecuación es $xe^{W(t)}$, pero también podrá ser:

$$X(t) = xe^{W(t)}e^{\frac{-t}{2}}$$

el cual es una martingala exponencial, introducido más adelante. En el cual claramente si $x > 0$, entonces $X(t) > 0$ para tódo $t \geq 0$, como se requería.

El actual, prolongado crecimiento repentino en los Estados Unidos, Europa y resto del mundo en el estudio de los mercados financieros, tiene un creciente interés en matemática, para poder modelar dichos mercados necesitando para ello estudiar a los procesos estocásticos, integración estocástica y ecuación diferencial estocástica.

Existiendo estudios en temas que se distinguirán en varias clases en una tendremos un riguroso estudio en cuentas bancarias el cual desarrolla la teoría en gran profundidad sin particular interes en Finanzas, el cual necesita un alto grado en conocimiento de matemática.
En otro caso, el cual es visto en este trabajo, se tendrá un estudio aplicado a Finanzas, modelando el comportamiento de seguros, bonos, precios de bienes, derivados en el mercado financiero actual, para ello se verá las herramientas matemáticas para modelar comportamientos y obtener una solución de lo establecido.

Así esta investigación empieza con la teoría de martingalas, donde se desarrolla todo lo necesario para la construcción de la integral estocástica con respecto a una semimartingala local continua general.
La restricción a integrandos continuos mayores simplifica y provee un razonable grado de generalidad.

Para poder entender este trabajo se necesita un conocimiento básico de teoría de la medida, teoría de probabilidades, espacio de Hilbert y un poco de análisis funcional.

1.3. Objetivo

- El objetivo principal de esta investigación es modelar situaciones reales que involucran decisiones con riesgo (incertidumbre) utilizando para este fin la teoría de los procesos estocásticos, integración estocástica y ecuación diferencial estocástica con la prioridad de obtener soluciones factibles de los modelos, y así realizar predicciones sobre el comportamiento del modelo, obtener características e indicadores de la situación real modelada.

- Dar un inicio al estudio de las ecuaciones diferenciales estocásticas, las cuales particularmente involucran modelos y ecuaciones del comportamiento económico actual como se puede ver en Finanzas, específicamente el modelo establecido por Black-Scholes.

Capítulo 2

PRELIMINARES

2.0.1. Relación

Dados dos conjuntos X, Y su producto cartesiano $X \times Y$ es el conjunto de todos los pares ordenados formados por un elemento de X seguido de uno de Y, es decir:

$$X \times Y = \{(x, y); x \in X, \ \ y \in Y\}$$

Una relación binaria de X para Y es un subconjunto R de $X \times Y$, en muchos casos se utilizará relaciones definidas en $X \times X$ en este caso nosotros hablamos de una relación definida en X. Si $(x, y) \in R$, nosotros a menudo escribimos xRy o $y \in R(x)$ y decimos que y es una imagen de x, y se entenderá a los x como el dominio.

Definición 2.1. *Sea R una relación binaria definida en X. Se dice que R es:*

1. *Reflexiva.-* $\ \ Si\ \forall x \in X, \ \ xRx,$
2. *Simétrica.-* $\ \ Si\ \forall x, y \in X, \ \ xRy \Longleftrightarrow yRx,$
3. *Antisimétrica.-* $\ \ Si\ \forall x, y \in X, (xRy \ \wedge \ yRx) \Rightarrow x = y,$
4. *Transitiva.-* $\ \ Si\ \forall x, y, z \in X, (xRy \ \wedge \ yRz) \Rightarrow xRz.$

Definición 2.2. (**Preorden**) *Una relación binaria $\geq$ definida en el conjunto X es un preorden parcial o cuasi ordenado si es reflexiva y transitiva, es decir:*

$$\forall x, y, z \in X; \quad x \geq x \quad \wedge \quad [(x \geq y \ \wedge \ y \geq z) \Rightarrow x \geq z]$$

y diremos que X es parcialmente preordenado por $\geq$.

Si adicionalmente para cualquier par de elementos x, y de X son comparables sobre esta relación, es decir:

$$x, y \in X; \quad x \geq y \vee y \geq x \ \ o \ ambos$$

entonces $\geq$ es un preorden total o completo y diremos que X esta preordenado totalmente por $\geq$.

Definición 2.3. *Una relación binaria $\geq$ definida en el conjunto X es parcialmente ordenado si es reflexiva, transitiva, antisimétrica, o también si es, un preorden parcial y además,*

$$\forall x, y \in X, (x \geq y \ \wedge \ y \geq x) \Rightarrow x = y$$

entonces diremos que X es parcialmente ordenado por $\geq$.

Adicionalmente para cualquier par de elementos de X si son comparables sobre esta relación, entonces es completo o orden total X, y diremos que X está totalmente ordenado.

Definición 2.4. *Una familia $\beth$ de subconjuntos de Ω es llamado un λ-sistema en Ω, si esta contiene al conjunto vacío, es cerrado sobre complementos y uniones disjuntas, es decir, si:*

(i) $\phi \in \beth$,

(ii) $A \in \beth$ *entonces* $A^c = \Omega / A \in \beth$,

(iii) Si $(A_n) \subseteq \beth$ *es cualquier sucesión disjunta, entonces* $A = \cup_n A_n \in \beth$.

Donde todo σ-*algebra* en Ω es un λ-*sistema* en Ω. En un espacio de probabilidad (Ω, F, P), un subconjunto $\beth \subseteq F$ es llamado generador para F, si F es el σ-*algebra* generado por $\beth$ $(F = \sigma(\beth))$.

Definición 2.5. *Se llama π-sistema en Ω a cualquier familia de subconjuntos de Ω el cual es cerrado sobre intersección finita*

Teorema 2.0.1. (π-λ-*teorema*)
Sea $\beth$ un π-*sistema* en Ω y L un λ-*sistema* en Ω. Si L contiene $\beth$, entonces L contiene al σ-*algebra* generado por $\beth$.

Prueba: libro [5], pág. 301.

Definición 2.6. *Una familia $\mathcal{C}$ de funciones $\mathcal{F}$-medibles no negativas en Ω es llamada λ-cono en Ω, si esta satisface las siguientes condiciones:*

(α) *$\mathcal{C}$ contiene la función constante* 1.

(β) *Si $f, g \in \mathcal{C}$ acotados y $f \leq g$, entonces $g - f \in \mathcal{C}$.*

(γ) *Si $f_n \in \mathcal{C}$ y $\alpha_n \geq 0$, para todo $n \geq 1$, entonces $f = \sum_n \alpha_n f_n \in \mathcal{C}$.*

Definición 2.7. *Una medida μ sobre un σ-algebra F se dice que es completa si y solamente si:*

$$B \subseteq A, \quad A \in F \ \ y \ \ \mu(A) = 0 \Rightarrow B \in F$$

Ver libro:[8], pág. 31.

Teorema 2.0.2. (Teorema de imagen de medida) Sea (Ω', F') un espacio de medida, donde Ω' es un conjunto, F' un *σ-algebra* en Ω' y $X : (\Omega, F, P) \to (\Omega', F')$ una aplicación medible, entonces la imagen P_X de la medida P sobre X es la medida en F' definida por:

$$P_X(A) = P(X^{-1}(A))$$

$A \in F'$ esta medida es llamada también la distribución de X sobre P.

Sea (Ω, F, P) un espacio de probabilidad, $\overline{R} = [-\infty, +\infty]$ la recta lineal extendida y $B(\overline{R})$, $B(R^n)$ los *σ-algebras* de Borel en $\overline{R}$ y R^n, respectivamente.
Un objeto aleatorio en (Ω, F, P) es una aplicación medible:

$$X : (\Omega, F, P) \to (\Omega_1, F_1)$$

en el espacio medible (Ω_1, F_1).
Siendo P_X la distribución de X, si Q es cualquier probabilidad en (Ω_1, F_1) escribiremos $X \sim Q$ para indicar que $P_X = Q$.
Si $(\Omega_1, F_1) = (R^n, B(R^n))$ o $(\Omega_1, F_1) = (\overline{R}, B(\overline{R}))$, X es llamado vector aleatorio o variable aleatoria, respectivamente.

Para números reales extendidos a, b nosotros escribimos $a \wedge b = \min\{a, b\}$ y $a \vee b = \max\{a, b\}$.
Si X es una variable aleatoria, el conjunto $\{w \in \Omega / X(w) \geq 0\}$ es escrito como $[X \geq 0]$ y la probabilidad denotada por $P([X \geq 0])$ o simplemente $P(X \geq 0)$.
Luego siendo $X^+ = X \vee 0 = 1_{[X>0]}X$ y $X^- = (-X)^+$, por lo cual $X^+, X^- \geq 0$, $X^+X^- = 0$ y $X = X^+ - X^-$.
Para una variable aleatoria X no negativo, sea $E(X) = \int_\Omega X dP$ y $\xi(P)$ denota la familia de todas las variables aleatorias X tal que al menos uno de los siguientes valores $E(X^+)$, $E(X^-)$ es finita.
Tendremos entonces que $E(X) = E(X^+) - E(X^-)$ (valor esperado de X). Esta cantidad también es denotada como $E_P(X)$ si depende de la medida de probabilidad P.
Para facilitar la escritura la expresión *P-casi-seguramente* (casi en todo punto) es abreviada por *P-as*.
Considerando las variables aleatorias X, Y como valores reales extendidos, la suma $X + Y$ no esta definido en general.
Sin embargo, estará definido en casi todo punto (*P-as*) si ambos $E(X^+)$ y $E(Y^+)$ son finitas, desde que $X, Y < +\infty$ P-as, o ambos $E(X^-)$ y $E(Y^-)$ son finitos.
Un evento es un conjunto $A \in F$, que es un subconjunto medible de Ω. Si (A_n) es una sucesión de eventos y se tendrá:

$$[A_n, \quad i.o] = \cap_m \cup_{n \geq m} A_n = \{w \in \Omega / w \in A_n \quad para \quad infinitos \quad n\}$$

Lema 2.0.1. **(Borel canteli)**

(a) Si $\sum_n P(A_n) < \infty$, *entonces* $P(A_n, \quad i.o) = 0$.

(b) Si los eventos A_n *son independientes y* $\sum_n P(A_n) = \infty$, *entonces* $P(A_n, \quad i.o) = 1$.

(c) Si $P(A_n) \geq \delta$, *para todo* $n \geq 1$, *entonces* $P(A_n, \quad i.o) \geq \delta$

Prueba: (a) Sea $m \geq 1$, entonces $0 \leq P(A_n, \quad i.o) \leq \sum_{n \geq m} P(A_n) \to 0$, $m \uparrow \infty$. (b) Sea $A = [A_n, \quad i.o]$, entonces $P(A^c) = \lim_m P(\cap_{n \geq m} A_m^c) = \lim_m \Pi_{n \geq m} P(A_n^c) = \lim_m \Pi_{n \geq m}(1 - P(A_n)) = 0$. (c) puesto que $P(A_n, \quad i.o) = \lim_m P(\cup_{n \geq m} A_n)$.□

2.0.2. Convergencia de variables aleatorias

Formas de convergencia

Definición 2.8. *Sean* X_n, X *con* $n \geq 1$, *variables aleatorias en el espacio de probabilidad* (Ω, F, P) *y* $1 \leq p < \infty$ *nosotros utilizaremos varias nociones de convergencia* $(X_n \to X)$:

1. *(Convergencia de variables aleatorias en* L^p*)* $X_n \to X$ *en* L^p *si* $\|X_n - X\|_p^p = E(|X_n - X|^p) \to 0$, *cuando* $n \to \infty$.

2. *(Convergencia de variables aleatorias en casi todo punto)* $X_n \to X$, *casi en todo punto (casi seguramente), (p-as), si* $X_n(w) \to X(w)$ *en* $\overline{R}$, *para todos los* w *del complemento de algún conjunto de probabilidad nula* $A_0 = \{w \in \Omega / P(w) = 0\}$ *y* $P(A_0) = 0$
   También $X_n \to X$ *casi seguramente si* $P(X_n \to X$, *cuando* $n \to \infty) = 1$ *esto indica que el evento* $A_0 = \{w / X_n(w) \to X(w)\}$ *tiene probabilidad 1.*

3. *(Convergencia de variables aleatorias en probabilidad)* $X_n \to X$ *en probabilidad en el conjunto* $A \in F$, *si* $P([| X_n - X | > \epsilon] \cap A) \to 0$, *cuando* $n \to \infty$, $\forall \epsilon > 0$.
   Equivalentemente X_n *converge a* X *en probabilidad si* $\forall \epsilon > 0$ *se tiene:*

$$P(| X_n - X | \geq \epsilon) \to 0, \quad \textit{cuando} \quad n \to \infty.$$

Aquí las diferencias $X_n - X$ son evaluadas de acuerdo con la regla $(+\infty) - (+\infty) = (-\infty) - (-\infty) = 0$ y $\| Z \|_p$ está permitido asumir el valor $+\infty$.
Observemos que la finitud de la medida de probabilidad P implica que $\|Z\|_p$ creciente con $p \geq 1$ por lo cual $X_n \to X$ en L^r, para todo $1 \leq r \leq p$.
Convergencia en L^1 es simplemente llamado convergencia en norma, por lo cual $X_n \to X$ en norma si solo si $\|X_n - X\|_1 = E(|X_n - X|) \to 0$ cuando $n \uparrow \infty$.
Asumiendo la finitud de la medida P.

Teorema 2.0.3. Luego, se cumplirá lo siguiente:

1. Convergencia de variables aleatorias en casi todo punto P-as, implica convergencia de variables aleatorias en probabilidad.

2. Convergencia de variables aleatorias en norma, implica convergencia de variables aleatorias en probabilidad.

Prueba:

Asumiendo $X_n \nrightarrow X$ (X_n no converge a X) en probabilidad, debemos mostrar que $X_n \nrightarrow X$ en un conjunto de medida positiva. Escogemos $\epsilon > 0$ tal que:

$$P([|X_n - X| \geq \epsilon]) \nrightarrow 0, \quad n \uparrow \infty.$$

Existe entonces una sucesión estrictamente creciente (k_n) de números naturales y un número $\delta > 0$ tal que: $P(|X_{k_n} - X| \geq \epsilon) \geq \delta$ para todo $n \geq 1$, sea $A_n = [|X_{k_n} - X| \geq \epsilon]$ y $A = [A_n, \quad i.o\,]$, como $P(A_n) \geq \delta$, para todo $n \geq 1$, se sigue que $P(A) \geq \delta > 0$, sin embargo, si $w \in A$, entonces $X_{k_n}(w) \nrightarrow X(w)$ y $X_n(w) \nrightarrow X(w)$.□

Proposición 2.0.4. *Convergencia de variables aleatorias en probabilidad, implica convergencia de variables aleatorias casi seguramente de una subsucesión.*

Prueba: Asumiendo $X_n \to X$, (X_n *converge a* X) en probabilidad y escogemos inductivamente una sucesión de números $0 < n_1 < n_2 < ... <$ tal que $P(|X_{n_k} - X| \geq \frac{1}{k}) \leq 2^{-k}$, entonces

$$\sum_k P(|X_{n_k} - X| \geq \frac{1}{k}) < \infty,$$

y el evento $A = [|X_{n_k} - X| \geq \frac{1}{k}, \quad i.o]$ es un conjunto nulo, sin embargo, si $w \in A^c$, entonces $X_{k_n}(w) \to X(w)$, así $X_{k_n} \to X$, P-as. □

Así convergencia de variables aleatorias en norma, implica casi seguramente convergencia de una subsucesión. Se sigue que convergencia en L^p implica casi seguramente convergencia de una subsucesión.

2.0.3. Norma de convergencia y integrabilidad uniforme

Sea X una variable aleatoria y $E(X; A) = E(1_A X) = \int_A X dP$, tendremos que:

Proposición 2.0.5. *X es integrable si y solo si* $\lim_{c\uparrow\infty} E(|X|; [|X| \geq c]) = 0$, *en este caso X satisface* $\lim_{P(A)\to 0} E(|X|1_A) = 0$.

Prueba: Asumiendo que X es integrable, entonces $|X|1_{[|X|<c]} \uparrow |X|$, $c \uparrow \infty$, en el conjunto $[|X| < +\infty]$ y así *P-as.* el teorema de convergencia monótona implica que: $E(|X|, [|X| < c]) \uparrow E(|X|) < \infty$ y, además:

$$E(|X|, [|X| \geq c]) = E(|X|) - E(|X|, [|X| < c]) \to 0, \quad c \uparrow \infty.$$

Sea $\epsilon > 0$ arbitrario y escogemos c tal que $E(|X|, [|X| < c]) < \epsilon$, si $A \in F$ con $P(A) < \frac{\epsilon}{c}$ en cualquier conjunto, tendremos:

$$E(|X|1_A) = E(|X|; A\cap[|X| < c]) + E(|X|; A\cap[|X| \geq c]) \leq cP(A) + E(|X|, [|X| \geq c]) < \epsilon + \epsilon$$

así $\lim_{P(A)\to 0} E(|X|1_A) = 0$. Si $\lim_{c\uparrow\infty} E(|X|, [|X| \geq c]) = 0$, escogemos c tal que $E(|X|, [|X| \geq c]) \leq 1$, entonces $E(|X|) \leq c + 1 < \infty$, por lo tanto X es integrable. □

Luego, una familia $F = \{X_i / i \in I\}$ de variables aleatorias es llamada uniformemente integrable si esta satisface:

$$\lim_{c\uparrow\infty} \sup_{i\in I} E(|X_i|; [|X_i| \geq c]) = 0$$

Es decir, $\lim_{c\uparrow\infty} E(|X_i|; [|X_i| \geq c]) = 0$ uniformemente en $i \in I$. La familia F es llamada uniformemente *P-continua* si esta satisface que:

$$\lim_{P(A)\uparrow 0} \sup_{i\in I} E(1_A |X_i|) = 0,$$

con lo cual, $\lim_{P(A)\uparrow 0} E(1_A|X_i|) = 0$, uniformemente $i \in I$. La familia F es llamada *L^1-acotada* si y solo si $\sup_{i\in I} \|X_i\|_1 < +\infty$, es decir, $F \subseteq L^1(P)$ es un subconjunto acotado.

Condicionamiento

Sea $\xi(P)$ la familia de variables aleatorias de valor real extendido X en (Ω, F, P) tal que $E(X^+)$, $E(X^-) < \infty$, (i.e $E(X)$ existe), donde $\xi(P)$ no es un espacio vectorial puesto que las sumas de elementos en $\xi(P)$ no esta definido en general.

Proposición 2.0.6. *Tendremos que:*

(a) Si $X \in \xi(P)$, entonces $1_A X \in \xi(P)$, para todo $A \in F$.

(b) Si $X \in \xi(P)$ y $\alpha \in R$, entonces $\alpha X \in \xi(P)$.

(c) Si $X_1, X_2 \in \xi(P)$ y $E(X_1) + E(X_2)$ esta definido, entonces $X_1 + X_2 \in \xi(P)$.

Prueba: Mostramos solo (c) Asumiendo $E(X_1) \leq E(X_2)$, si $E(X_1) + E(X_2)$ esta definido, entonces $E(X_1) > -\infty$ o $E(X_2) < \infty$, asumiendo $E(X_1) > -\infty$ y $E(X_2) > -\infty$, entonces $X_1, X_2 > -\infty$, *P-as.* y así mismo $X_1 + X_2$ es definido *P-as.* además $E(X_1^-), E(X_2^-) < \infty$ y, puesto que $(X_1 + X_2)^- \leq X_1^- + X_2^-$, $E((X_1 + X_2)^-) < \infty$, entonces $X_1 + X_2 \in \xi(P)$. $\square$

Proposición 2.0.7. *Sea $G \subset F$ un sub-σ-algebra, $D \in G$ y $X_1, X_2 \in \xi(P)$ G-medible*

1. *Si $E(X_1 1_A) \leq E(X_2 1_A)$, $\forall A \subset D$, $A \in G$, entonces $X_1 \leq X_2$ a.s en D.*
2. *Si $E(X_1 1_A) = E(X_2 1_A), \forall A \subseteq D$, $A \in G$, entonces $X_1 = X_2$ a.s en D.*

Prueba: Libro[5], pág. 8.

Asumiendo el evento A de probabilidad mayor que cero $P(A) > 0$, definimos $\frac{P(B\cap A)}{P(A)}$ como la probabilidad condicional del evento $B \in F$ dado que A tiene que ocurrir, reemplazamos la medida de probabilidad P en F con la probabilidad $Q_A(B) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}$ con $B \in F$, y pasamos al espacio de probabilidad (Ω, F, Q_A), Q_A satisface y

$$E_{Q_A}(X) = P(A)^{-1}E(X1_A), \textit{ para toda variable aleatoria } X \in \xi(P).$$

Sea $X \in \xi(P)$ y $G \subseteq F$ un *sub-σ-algebra*, definimos la esperanza condicional $Z = E(X/G)$ como un medio riguroso para la noción de la mejor suposición probable del valor de X a la luz de la información en el *σ-algebra* G.
De esto, Z es una variable aleatoria y cumplirá con las siguientes propiedades:

(i) Z es *G-medible* (Z no contiene más información que en G).

(ii) $Z \in \xi(P)$ y $E(Z) = E(X)$.

Reescribiendo como $E(Z1_\Omega) = E(X1_\Omega)$ y sea $A \in G$. Asumiendo A el cual ocurre y $P(A) > 0$, sea el espacio de probabilidad (Ω, F, Q_A) y (ii) para este nuevo espacio se convierte en $E_{Q_A}(Z) = E_{Q_A}(X)$, multiplicando por $P(A)$,

$$E(Z1_A) = E(X1_A)$$

La igualdad también es verdadera cuando $P(A) = 0$.

Esperanza Condicional

Sea G un *sub-σ-algebra* de F y $X \in \xi(P)$. Una esperanza condicional de X dado el *sub-σ-algebra* G es una variable aleatoria *G-medible*, $Z \in \xi(P)$ tal que cumplirá con lo siguiente:

$$E(Z1_A) = E(X1_A), \; \forall A \in G$$

Proposición 2.0.8. *La esperanza condicional de X dado G existe casi en todo punto únicamente determinado y es denotado como $E(X/G)$ o $E_G(X)$.*

Capítulo 3

TEORÍA DE MARTINGALAS

En el presente capítulo se definirá a un proceso estocástico como una familia de variables aleatorias $(X_t)_{t\in\Upsilon}$ en un espacio de probabilidad (Ω, F, P) con Υ un conjunto parcialmente ordenado. Cuando $\Upsilon=\mathbb{N}$ se le llamará sucesión estocástica y si $\Upsilon = [0, +\infty[$ se le llamará proceso estocástico, o simplemente proceso X, definimos asimismo una Υ-*filtración* $(F_t)_{t\in\Upsilon}$.
Seguidamente establecemos características y propiedades generales tanto para cuando es una sucesión estocástica, como para un proceso estocástico como: Υ-*filtración*, proceso estocástico adaptado, trayectoria, tiempo opcional, muestra opcional, último elemento, convergencia de variables aleatorias.
Continuando luego, únicamente, con los procesos estocásticos, (llamado el caso continuo), del cual establecemos a los siguientes procesos estocásticos llamados: proceso continuo, martingala local, de variación acotada, variación cuadrática, cuadrada integrable, semimartingala. Examinando la convergencia de las variables aleatorias en cada caso. Obtendremos que el proceso estocástico llamado variación cuadrática, es generado por una martingala, como también por una martingala local.
Establecemos la integral estocástica para procesos estocásticos de variación acotada continua con otro proceso idóneo bien definido siendo la integral estocástica otro proceso, y, finalmente, vemos el movimiento Browniano. Cada nuevo tema abordado necesita de las definiciones y características anteriores.

3.1. Submartingalas

3.1.1. Proceso estocástico adaptado

Siendo Υ un conjunto de índices parcialmente ordenado, el cual es usualmente tomado como, el conjunto de índices $t \in \Upsilon$, indicando el tiempo. Definimos un proceso estocástico X en el espacio de probabilidad (Ω, F, P) indexado por Υ como una familia de variables aleatorias $X = (X_t)_{t\in\Upsilon}$. También la podemos definir como $X(t,w) = X_t(w)$, $t \in \Upsilon$, $w \in \Omega$, donde X la podemos ver como una función $X : \Upsilon \times \Omega \to \overline{R}$

Definición 3.1. *Una Υ-filtración del espacio de probabilidad (Ω, F, P) es definida como una familia $(F_t)_{t\in\Upsilon}$ de σ-algebras $F_t \subseteq F$, indexada por Υ y satisfaciendo:*

$$s \leq t \quad entonces \quad F_s \subseteq F_t, \quad \forall s, t \in \Upsilon.$$

Definición 3.2. *Un proceso estocástico X indexado por Υ es llamado F_t-Adaptado, si X_t es F_t-medible, $\forall t \in \Upsilon$.*

Una Υ-*filtración* $(F_t)_{t\in\Upsilon}$, es llamada aumentada si cada σ-*algebra* F_t, contiene todos los conjuntos de probabilidad nula o vacía.
Luego, tendremos que si X_t es F_t-*medible* $Y_t = X_t$ *P-as* (indica que es en casi todo punto) Y_t es F_t-*medible.*
Si el conjunto de índices parcialmente ordenado Υ es fijado y claramente de contexto, un proceso (F_t)-*adaptado* X es simplemente llamado adaptado, en ocasiones solo (X_t, F_t) para un proceso (F_t)-*adaptado* X_t.

Definición 3.3. *Un proceso estocástico (F_t)-adaptado X es llamado una (F_t)-submartingala si satisface que:*

$$E(X_t^+) < \infty \quad y \quad X_s \leq E(X_t/F_s), \quad p-as \quad para \quad todo \quad s \leq t$$

Equivalentemente, X es una submartingala si $X_t \in \xi(P)$, es $F_t-medible$, $E(X_t) < \infty$ y

$$E(X_s 1_A) \leq E(X_t 1_A), \quad para \quad todo \quad s \leq t \quad y \quad A \in F_s$$

Una submartingala es un proceso en el que su esperanza es creciente en todo t (tiempo).
Ahora si la Υ-*filtración* (G_t) satisface $G_t \subseteq F_t$ $\forall t \in \Upsilon$, si la F_t-*submartingala* X está en (G_t)-*adaptado*, entonces X es una G_t-*submartingala.* Por lo cual, en particular para la Υ-*filtración* $G_t = \sigma(X_s; s \leq t)$, luego si la filtración no es especificada se tomará:

$$F_t = \sigma(X_s; s \leq t)$$

Si X es una submartingala, entonces $X_t < \infty$ *P-as*, pero $X_t = -\infty$ es posible. Si X, Y son submartingalas y α un número no negativo, entonces la suma $X + Y$ y el producto escalar αX son definidos como $(X+Y)_t = X_t + Y_t$ y $(\alpha X)_t = \alpha X_t$ y son submartingalas. Consecuentemente, la familia de (F_t)-*submartigalas* es un cono convexo. En otro caso definimos:

Definición 3.4. *Un proceso X es llamado (F_t)-supermartingala si $(-X)$ es una (F_t)-submartingala, es decir, si es (F_t)-adaptado y satisface:*

$$E(X_t^-) < \infty \quad y \quad X_s \geq E(X_t/F_s), \quad p-as \quad para \quad todo \quad s \leq t$$

Equivalentemente, X es una (F_t)-supermartingala si $X_t \in \xi(P)$, es F_t-medible y

$$E(X_t) > -\infty \quad y \quad E(X_s 1_A) \geq E(X_t 1_A) \quad \forall s \leq t \quad y \quad A \in F_s$$

Se observa que una supermartingala es un proceso en el cual su esperanza es decreciente en todo tiempo.
Luego, con las definiciones anteriores, finalmente, definimos:

Definición 3.5. *Un proceso X es una (F_t)-martingala si es una (F_t)-submartingala y una (F_t)-supermartingala, es decir, si $X_t \in L^1(P)$ es (F_t)-medible y $X_s = E(X_t/F_s)$ p-as, equivalentemente:*

$$E(X_t 1_A) = E(X_s 1_A), \quad \forall s \leq t \;\; y \;\; A \in F_s$$

Se observa que $E(X_t) < \infty$ creciente con $t \in \Upsilon$, si X es una submartingala, $E(X_t) > -\infty$ es decreciente con t, si X es una supermartingala, y $E(X_t)$ es finita y constante, si X es una martingala. Donde la familia de Υ-*martingalas* forman un espacio vectorial, y tendremos que X es una martingala si tanto X y $-X$ son submartingalas.
Luego, asumiendo Υ el conjunto de índices parcialmente ordenado, (F_t) la Υ-*filtración* en (Ω, F, P), entonces:

Teorema 3.1.1. .

1. *Si X_t, Y_t son submartingalas, entonces $Z_t = X_t \vee Y_t$ también lo es.*
2. *Si X_t es una submartingala, entonces también lo es X_t^+.*

Prueba: Sea X_t, Y_t submartingalas y $Z_t = \text{máx}\{X_t, Y_t\}$, entonces Z_t es $F_t - medible$ y $Z_t^+ \leq X_t^+ + Y_t^+$, entonces $E(Z_t^+) \leq E(X_t^+) + E(Y_t^+) < \infty$; si $s, t \in \Upsilon$ con $s \leq t$, entonces $Z_t \geq X_t$ y $E_{F_s}(Z_t) \geq E_{F_s}(X_t) \geq X_s$. Similarmente
$E_{F_s}(Z_t) \geq E_{F_s}(Y_t) \geq Y_s$ y $E_{F_s}(Z_t) \geq X_t \vee Y_t = Z_t$, p-as.
de la misma forma para (2), desde que $X_t^+ = X_t \vee 0$.□

Proposición 3.1.2. *Sea $\phi : R \to R$ convexo y asuma que $E(\phi(X_t)^+) < \infty$, para todo $t \in \Upsilon$*

1. *Si (X_t) es una martingala, entonces el proceso $\phi(X_t)$ es una submartingala.*
2. *Si (X_t) es una submartingala y ϕ no decreciente, entonces el proceso $\phi(X_t)$ es una submartingala.*

Prueba: (a) La función convexa ϕ es continua y medible de Borel. Así, si el proceso (X_t) es (F_t)-*adaptado*, lo mismo es verdad del proceso $\phi(X_t)$. X_t es una martingala y $s \leq t$, entonces $\phi(X_s) = \phi(E_{F_s}(X_t)) \leq E_{F_s}(\phi(X_t))$, por la desigualdad de Jensen para esperanza condicional, consecuentemente $(\phi(X_t))$ es una submartingala.
(b) Si X_t es una submartingala y ϕ no-decreciente y convexa, entonces $\phi(X_s) \leq \phi(E_{F_s}(X_t)) \leq E_{F_s}(\phi(X_t))$, donde la primera desigualdad sigue de la condición submartingala $X_s \leq E_{F_s}(X_t)$ y de la naturaleza no decreciente de ϕ. Así $\phi(X_t)$ es una submartingala. □

En la práctica, solo los siguientes conjuntos de índices parcialmente ordenado Υ, son de significancia (importancia).

(i) $\Upsilon = \{1, 2, 3, ..., N\}$ con el orden parcial usual (se le llama sucesión estocástica finita).

(ii) $\Upsilon = \{1, 2, 3, ...\} = \mathbb{N}$, con el orden parcial usual (se le llama sucesión estocástica) y es denotado por X_n, donde la Υ-*filtración* F_n es creciente en F, en este caso la condición de las submartingalas se reduce a:

$$E(X_n 1_A) \leq E(X_{n+1} 1_A) \quad equivale \quad a:$$

$$E[1_A(X_{n+1} - X_n)] \geq 0 \quad \forall n \geq 1 \quad A \in F_n,$$

con la igualdad en caso de una martingala.

(iii) $\Upsilon = N = \{1, 2, 3, ...\}$ con el orden parcial revertido.

(iv) $\Upsilon = [0, +\infty[= R_+$ con el orden parcial usual, siendo el caso más importante para nosotros. Un Υ-*proceso* X simplemente es llamado proceso estocástico y denotado por (X_t), (simplemente llamado proceso X).

Ejemplo 3.1.1. *Sea $Z \in L^1(P)$, Υ un conjunto de índices parcialmente ordenado y (F_t) una Υ-filtración. Sea $X_t = E_{F_t}(Z)$ entonces (X_t) es una (F_t)-martingala.*

Ejemplo 3.1.2. *Sea (X_n) una sucesión de variables aleatorias independientemente integrables con media cero y*

$$S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n \quad y \quad F_n = \sigma(X_1, X_2, ... X_n), \quad n \geq 1$$

entonces (S_n) es una (F_n)-martingala, así:

$$E(S_{n+1}/F_n) = E(S_n + X_{n+1}/F_n) = E(S_n/F_n) + E(X_{n+1}/F_n) =$$

$$S_n + E(X_{n+1}) = S_n$$

por la F_n-medibilidad de S_n y independencia de X_{n+1} en F_n.

3.1.2. Muestra en tiempo opcional

Sea $\Upsilon = \mathbb{N}$ con el orden parcial usual y (F_n) una Υ-*filtración* fijada en (Ω, F, P), $F_\infty = \vee_n F_n = \sigma(\cup_n F_n)$ el σ-*algebra* generado por $(\cup_n F_n)$ y asumiendo $X = (X_n)$ una sucesión estocástica (F_n)-*adaptada*.

Definición 3.6. *Un tiempo aleatorio T es una función medible tal que:*

$$T : \Omega \to N \cup \{\infty\}$$

(donde ∞ está permitido). Diremos que un tiempo aleatorio T es, llamado F_n-opcional si satisface que:

$$[T \leq n] \in F_n \quad para \quad cada \quad 1 \leq n < \infty$$

Como los σ-$algebras$ F_n son crecientes esto equivale a $[T = n] \in F_n$, $\forall 1 \leq n < \infty$, y implica que $[T = \infty] \in F_\infty$.
T puede ser vista como una estrategia del jugador para parar el juego o cuando para el juego. Ahora, supondremos que T es un tiempo opcional, luego:

Definición 3.7. *Llamaremos a un evento $A \in F$ anterior a T si:*

$$A \cap [T \leq n] \in F_n \quad para \quad todo \quad 1 \leq n < \infty$$

y es denotada por F_T la familia de todos los eventos $A \in F$ los cuales son anteriores a T.

Equivalentemente, $A \in F_T$ si y solo si $A \cap [T = n] \in F_n$ para todo $1 \leq n < \infty$.

Definición 3.8. Muestra X en tiempo T
Asumiendo que X_∞ variable aleatoria F_∞-medible, la variable aleatoria X_T es definido como sigue:

$$X_T : \Omega \to \overline{R}$$

$$X_T(w) = X_{T(w)}(w), \quad w \in \Omega$$

Note que $X_T = X_n$ en $[T = n]$ y $X_T = X_\infty$ en $[T = +\infty]$ en caso que $\lim_n X_n$ exista casi seguramente en todo punto, la variable aleatoria X_∞ es a menudo tomado como:

$$X_\infty = \limsup_n X_n$$

Donde la variable aleatoria X_T representa una muestra de la sucesión estocástica X_n en el tiempo aleatorio T. X_T es ensamblado de piezas disjuntas de X_n.

Si G_n, G, $1 \leq n < \infty$ son σ-$algebras$, decimos que $G_n \uparrow G$, si $G_1 \subseteq G_2 \subseteq G_3 \subseteq ...$ y $G = \vee_n G_n = \sigma(\cup_n G_n)$.

Proposición 3.1.3. *Sean S, T,T_n, $1 \leq n < \infty$, tiempos opcionales, Y una variable aleatoria y $X = (X_n)$ un (F_n)-sucesión estocástica adaptada, entonces:*

(a) F_T es un sub-σ-algebra de F.

(b) Y es $F_T -$ medible $\Leftrightarrow Y1_{[T=n]}$ es $F_n -$ medible, $\forall 1 \leq n \leq \infty$.

(c) T y X_T son $F_T -$ medibles.

(d) $S \leq T$, implica $F_S \subseteq F_T$.

(e) $S \wedge T$, $S \vee T$ tiempos opcionales.

(f) $[S \leq T]$, $[S = T] \in F_{S \wedge T}$.

(g) $A \in F_T$ implica $A \cap [T \leq S]$, $A \cap [T = S] \in F_{S \wedge T}$.

(h) Si $T_n \uparrow T < \infty$, entonces $F_{T_n} \uparrow F_T$.

(i) Si la filtración F_n es aumentada, entonces F_T contiene a todos los conjuntos con probabilidad nula.

Prueba: (a) $\Omega \in F_T$ puesto que T es opcional. Sea $A \in F_T$, entonces $A \cap [T \leq k] \in F_k$ y consecuentemente;

$$A^c \cap [T \leq k] = (\Omega \cap [T \leq k]) \setminus (A \cap [T \leq k]) \in F_k,$$

para cada $k \geq 1$, esto muestra que $A^c \in F_T$
(b) Sea $Y_n = Y1_{[T=n]}$ para todo $1 \leq n < \infty$, si B es un conjunto de Borel no conteniendo cero tendremos $[Y_n \in B] = [Y \in B] \cap [T = n]$ y $[Y \in B] \in F_T$ si y solo si $[Y_n \in B] \in F_n$, para todo $n \geq 1$.
(c) Sea $1 \leq m \leq \infty$, el conjunto $A = [T = m]$ satisface $A \cap [T = n] = \Phi$, si $n \neq m$ y $A \cap [T = n] = [T = n]$, si $n = m$, en cualquier evento $A \cap [T = n] \in F_n$, para todo $n \geq 1$, es decir, $A = [T = m] \in F_T$ y implica que T es F_T*-medible*, siendo X_T, F_T*-medible*, note que $1_{[T=n]}X_T = 1_{[T=n]}X_n \in F_n - medible$, para todo $1 \leq n < \infty$.
(d) Asumiendo $S \leq T$ y $[T \leq k] \leq [S \leq k]$, para todo $k \geq 1$, $A \in F_S$ entonces, para cada $k \geq 1$ tendremos $A \cap [S \leq k] \in F_k$ y consecuentemente $A \cap [T \leq k] = (A \cap [S \leq k]) \cap [T \leq k] \in F_k$. Así $A \in F_T$.
(e), (f) Sea $R = S \wedge T$ y $n \geq 1$. Entonces $[R \leq n] = [S \leq n] \cup [T \leq n] \in F_n$. Así R es opcional. $[S \leq T] \cap [R = n] = [S \leq T] \cap [S = n] = [n \leq T] \cap [S = n] \in F_n$ para todo $n \geq 1$. Así $[S \leq T] \in F_R$. Por simetría $[T \leq S] \in F_R$ y $[S = T] \in F_R$.
(g) Sea $R = S \wedge T$ y $A \in F_T$ y $n \geq 1$. Entonces:

$$A \cap [T \leq S] \cap [R = n] = A \cap [T \leq S] \cap [T = n] = (A \cap [T = n]) \cap [n \leq S] \in F_n,$$

Así $A \cap [T \leq S] \in F_R$.
(h) $G = \bigvee_n F_n$ tenemos que mostrar $F_T = G$ de acuerdo a (d) $F_{T_n} \subseteq F_T$, $\forall n \geq 1$ y $G \subseteq F_T$ y sea $A \in F_T$ y de acuerdo a (c) todos los T_k son G*-medibles* y $\lim_k T_k = T$ así $[T = n] \in G$, $\forall n \geq 1$ y también $A \cap [T_k = T] \in F_{T_k} \subseteq G$, $\forall k \geq 1$ de acuerdo a (g). Como T es finito y T_n valor entero, la convergencia $T_n \uparrow T$ implica que $T_k = T$ para algún $k \geq 1$, así $A = A \cap \cup_k [T_k = T] = \cup_k A \cap [T_k = T] \in G$.$\square$

T es un tiempo opcional acotado, si $T \leq N$ P-as, si $E(X_n^+) < \infty$, $\forall n \geq 1$, entonces $E(X_T^+) < \infty$ también puesto que $X_T^+ = \sum_{k=1}^{n} 1_{[T=k]} X_k^+$ P-as, $E(X_n^-) < \infty$, $\forall n \geq 0$, entonces $E(X_T^-) < \infty$ y $X_T \in \xi(P)$. La acotación de T también elimina la necesidad de especificar X_T en $[T = \infty]$, por lo cual no necesitamos a la variable aleatoria X_∞.

Teorema 3.1.4. **(Teorema de muestra opcional)**
Sea X_n una submartingala y S, T tiempos opcionales acotados con $S \leq T$, entonces, $X_S, X_T \in \xi(P)$ y

$$E(X_S 1_A) \leq E(X_T 1_A), \quad \forall A \in F_S, \quad es \ \ decir,$$

$$X_S \leq E(X_T / F_S) \quad en \ \ particular:$$

$$E(X_S) \leq E(X_T).$$

Prueba: Sea $E(X_n^+) < \infty$, $\forall\ n \geq 1$ y $E(X_S^+)$, $E(X_T^+) < \infty$, así $X_S, X_T \in\ \xi(P)$, de la condición de submartingala para la sucesión estocástica X se puede escribir:

$$E(1_A(X_{k+1} - X_k)) \geq 0, \quad \forall \quad k \geq 1, \quad A \in F_k$$

Asumiendo que $S \leq T \leq N$, P-as, donde N es un número natural, para cada $w \in \Omega$ tal que $T(w) < +\infty$ (y así para P-ae, $w \in \Omega$) tendremos:

$$X_{T(w)}(w) - S_{S_{(w)}}(w) = \sum_{k=S(w)}^{T(w)-1} (X_{k+1}(w) - X_k(w))$$

La acotación de esta suma depende de w. La acotación $P([T \leq N]) = 1$ puede ser usado reescribiendo, con la independecia acotada de w:

$$X_T - X_S = \sum_{k=1}^{N} 1_{[S \leq k < T]}(X_{k+1} - X_k)$$

consecuentemente, si $A \in F_S$, es cualquier conjunto, entonces:

$$1_A(X_T - X_S) = \sum_{k=1}^{N} 1_{A \cap [S \leq k < T]}(X_{k+1} - X_k), \quad P - as$$

como $A \in F_S$, $A \cap [S \leq k] \in F_k$ y el conjunto:

$A \cap [S \leq k < T] = A \cap [S \leq k] \cap [T \leq k]^c$ esta en F_k, por la condición de submartingala:

$$E(1_{A \cap [S \leq k < T]}(X_{k+1} - X_k) \geq 0, \quad \forall k = 1, 2, 3, ..., N$$

tomando la esperanza muestra que $E(1_A(X_T - X_S)) \geq 0$ como deseábamos.□

Tomando para todo $w \in \Omega$ tal que $T(w) < +\infty$ en casi todo w, se dirá que es p-ae, que indicará todos los puntos que cumpla lo anterior, luego p-ae indica que se cumple en casi todo evento $w \in \Omega$ tal que $T(w) < +\infty$.

Corolario 3.1.1. *Sea (X_n, F_n) una submartingala (martingala) y (T_n) sucesión no decreciente de tiempos opcionales acotados, entonces (X_{T_n}, F_{T_n}) es una submartingala (martingala).*

Prueba: La acotación de T_n implica que $E(X_{T_n}^+) < \infty$ y X_{T_n} es F_{T_n}-*medible*, así la sucesión (X_{T_n}) y (F_{T_n})-*adaptada*, para tiempos opcionales acotados $T_n \leq T_{n+1}$, muestra:

$$X_{T_n} \leq E(X_{T_{n+1}}/F_{T_n})$$

por lo tanto, (X_{T_n}, F_{T_n}) es una submartingala. Similarmente para el caso de una martingala. □

3.2. Teoremas de convergencia

Cruce

Siendo (Ω, F, P) un espacio de probabilidad, $(F_n)_{n\geq 1}$ una filtración en (Ω, F, P), (X_n) una (F_n)-*submartingala*, para $w \in \Omega$ la sucesión $n \in \mathbb{N} \to X_n(w)$ es llamada trayectoria simple asociada con w. Estamos interesados en el comportamiento oscilatorio de las trayectorias simples, especialmente en un tiempo tal que la trayectoria cruce fuera de un valor $X_j(w) \leq \alpha$ a un valor $X_k(w) \geq \beta$.

Proposición 3.2.1. *Sea $N \geq 1$, B conjunto de Borel y S tiempo opcional.*

$$T(w) = N \wedge \text{ínf}\{1 \leq k < N/k > S(w) \ \ y \ \ X_k(w) \in B\}$$

entonces T es un tiempo opcional.

Así $\text{ínf}(\Phi) = +\infty$, $T(w) = N$, si no existe k tal que $S(w) < k < N$ y $X_k(w) \in B$ y $T(w)$ es el más pequeño k especialmente $T(w) < N$ si k existe.
Prueba: Sea, X (F_n)-*adaptada*, $[X_k \in B] \in F_k$, $\forall k \geq 1$, si $\forall n \geq N$, $[T \leq n] = \Omega \in F_n$ si $n < N$ entonces $T(w) \leq n$ si y solo si existe k tal que, $S(w) < k \leq n$ y $X_k(w) \in B$ necesariamente entonces: $S(w) \in \{1, 2, 3, ..., n-1\}$ así:

$$[T \leq n] = \cup_{j=1}^{n-1} \cup_{k=j+1}^{n} [S = j] \cap [X_k \in B] \in F_n \square.$$

Fijando $N \geq 1$ y $-\infty < \alpha < \beta < +\infty$ un segmento $(X_j(w), X_{j+1}(w), ...X_k(w))$ de la trayectoria simple $(X_n(w))$ es llamadá cruce del intervalo $]\alpha, \beta[$ si tenemos que $X_j(w) \leq \alpha$,k es el más pequeño índice $n > j$ tal que $X_n(w) \geq \beta$ y la diferencia $k - j$ es máximo. En otras palabras $j < k$ es el más pequeño índice por el cual $X_j(w) \leq \alpha$. El cruce $(X_j(w), X_{j+1}(w), ..., X_k(w))$ se dice que es ocurrido antes de tiempo N, si $k < N$, los tiempos j, k en el comienzo del cruce y termina definida recursivamente y así $w \in \Omega$:

$$S_1(w) = N \wedge \text{ínf}\{1 \leq k < N/X_k(w) \leq \alpha\} \ \ y$$

$$T_1(w) = N \wedge \text{ínf}\{1 \leq k < N/X_k(w) \geq \beta \ \ y \ \ k > S_1(w)\}$$

así

$$S_{n+1}(w) = N \wedge \text{ínf}\{1 \leq k < N/X_k(w) \leq \alpha \ \ y \ \ k > T_n(w)\}$$

$$T_{n+1}(w) = N \wedge \text{ínf}\{1 \leq k < N/X_k(w) \geq \beta \ \ y \ \ k > S_{n+1}(w)\}$$

$$S_1(w) < T_1(w) < S_2(w) < T_2(w) < ... < \{S_j(w) = N = T_j(w) = S_{j+1}(w) = ...$$

$$T_j(w) = N = S_{j+1}(w) = T_{j+1}(w) = ...$$

La sucesión $(S_1, T_1, S_2, T_2, ...,)$ es estrictamente creciente hasta un término de valor N, cuando se estabiliza en N, claramente $S_N(w) = T_N(w) = N$. El cruce del intervalo $]\alpha, \beta[$ el cual ocurre antes del tiempo N son exactamente los segmentos $(X_{S_1(w)}(w), ..., X_{T_1(w)}(w)$,..., $(X_{S_n(w)}(w), ..., X_{T_n(w)}(w))$ con $n \geq 1$ tal que $T_n(w) < N$. Así se tendrá:

$\bigcup_N]\alpha,\beta[(w) = \sup\{n \geq 1 / T_n(w) < N\} \vee 0 \quad (= 0, \quad si \quad no \quad existe \quad tal \quad n \geq 1)$

Proposición 3.2.2. *(a) T_n, S_n $n \geq 1$ son tiempos opcionales acotados.*

(b) $\bigcup_N]\alpha,\beta[: \Omega \longrightarrow \{1,2,3,...\}$ es medible.

(c) $X_{T_j(w)}(w) - X_{S_j(w)}(w) \geq \beta - \alpha$, $\forall j = 1,2,3,..., \cup_N]\alpha,\beta[(w)$.

Prueba: (a) De lo anterior, por inducción, (b) siendo T_n creciente $[\bigcup_N]\alpha,\beta[\leq m] = [T_{m+1} = N] \in F$, $\forall m \geq 0$ y $\bigcup_N]\alpha,\beta[$ toma los valores $\{0,1,2,...\}$, y así $\bigcup_N]\alpha,\beta[$ es medible.
(c) Para $k = 1,2,3,..., \bigcup_N]\alpha,\beta[(w)$, el segmento $(X_{S_k(w)}(w),...,X_{T_k(w)}(w))$ es un cruce de $]\alpha,\beta[$ en particular $X_{S_k(w)}(w) \leq \alpha$ y $X_{T_k(w)}(w) \geq \beta$ $\square$

Lema 3.2.1. *(Lema de cruce)*

$$E(\cup_N]\alpha,\beta[) \leq \frac{E(X_N^+) + |\alpha|}{\beta - \alpha}$$

Proposición 3.2.3. *(Teorema de convergencia de submartingalas)*
Asumiendo la submartingala (X_n) satisfaciendo $K = \sup_n E(X_n^+) < \infty$. Entonces:

(i) $X_\infty = \lim_n X_n \in \overline{\mathbb{R}}$ existe p-as, y satisface $E(X_\infty^+) < \infty$.

(ii) Si $E(X_n) > -\infty$, para algún n, entonces $X_\infty \in L^1(P)$.

(iii) Tendremos $X_n \leq E(X_\infty / F_n)$, para todo $n \geq 1$, si y solo si la familia $\{X_n^+ / n \geq 1\}$ es uniformemente integrable.

(iv) Asuma que $(X_n) \subseteq L^1(P)$, entonces $X_\infty \in L^1(P)$ y $X_n \longrightarrow X_\infty \in L^1(P)$ si y solo si la submartingala (X_n) es uniformemente integrable.

Prueba: (i) Sea $X_* = \liminf_{n\uparrow\infty} X_n$ y $X^* = \limsup_{n\uparrow\infty} X_n$, entonces X_* y X^* son variables aleatorias de valor real extendido, tendremos que mostrar que $P(X_* < X^*) = 0$, y como $[X_* < X^*]$ es una unión contable de conjuntos $A_{]\alpha,\beta[} = [X_* < \alpha < \beta < X^*]$ sobre todos los números racionales α, β con $\alpha < \beta$, es suficiente ver que $P(A_{]\alpha,\beta[}) = 0$ para todo α, β, si $w \in A_{]\alpha,\beta[}$, entonces:

$$\liminf_{n\uparrow\infty} X_n(w) < \alpha < \beta < \limsup_{n\uparrow\infty} X_n(w)$$

y

$$\bigcup(]\alpha,\beta[)(w) := \lim_{N\uparrow\infty} \bigcup_N]\alpha,\beta[(w) = +\infty$$

mostramos que esto sucede solo en un conjunto de probabilidad nula, equivalentemente, $\bigcup_{]\alpha,\beta[} < \infty$, P-as. $\bigcup_{]\alpha,\beta[} = \text{lím}_{N\uparrow\infty} \bigcup_N]\alpha, \beta[$ es medible no negativo es suficiente que $E(\bigcup_{]\alpha,\beta[}) < \infty$ sea:

$$0 \leq \bigcup_N]\alpha, \beta[\uparrow \bigcup]\alpha, \beta[$$

y $E(\bigcup_N]\alpha, \beta[) \uparrow E(\bigcup]\alpha, \beta[)$, $N \uparrow \infty$ y luego se tendrá:

$$E(\bigcup_N]\alpha, \beta[) \leq (\beta - \alpha)^{-1}(K + |\alpha|),$$

para cada $N \geq 1$ y se sigue que $E(\bigcup]\alpha, \beta[) \leq (\beta - \alpha)^{-1}(K + |\alpha|) < \infty$. Así $X_\infty(w) = \text{lím}_{n\uparrow\infty} X_n(w) \in \overline{\mathbb{R}}$ existe casi seguramente casi en todo punto. Extendiendo X_∞ a todo Ω. $X_\infty = \text{lím sup}_n X_n$, X_∞ se convierte en una variable aleatoria (definida y medible en Ω) y usando el lema de Fatou:

$$E(X_\infty^+) = E(\text{lím}_n X_n^+) = E(\text{lím inf } X_n^+) \leq \text{lím inf}_n(E(X_n^+) \leq K < \infty,$$

(ii) Sea $m \geq 1$ y $E(X_n) > -\infty$, $E(X)$ no decreciente si $n \geq m$, entonces: $|X_n| = X_n^+ + X_n^- = 2X_n^+ - X_n$ y $E(|X_n|) = 2E(X_n^+) - E(X_n) \leq 2K - E(X_m)$ por el lema de Fatou:

$$E(|X_\infty|) = E(\text{lím inf}_n |X_n|) \leq \text{lím inf}_n E(|X_n|) \leq 2K - E(X_m) < \infty.\square$$

Corolario 3.2.1. *Una sucesión submartingala $(X_n) \subseteq L^1(P)$ es convergente en norma a una variable aleatoria integrable X_∞ si y solo si es integrable uniformemente.*

Teorema 3.2.4. (Teorema de convergencia de martingalas)
Sea (X_n) una martingala L^1-*acotada*. Entonces $X_\infty = \text{lím}_n X_n$ existe p-as, y es una variable aleatoria integrable, además, las siguientes condiciones son equivalentes:

(i) $X_n = E(X_\infty / F_n)$, $\forall n \geq 1$.

(ii) $X_n \longrightarrow X_\infty$ en L^1-*norma*.

(iii) (X_n) es integrable uniformemente.

3.2.1. Muestra opcional y sucesión de submartingalas cerradas

Integrabilidad uniforme, último elemento, clausura

Un último elemento para el conjunto de índices parcialmente ordenado Υ es un elemento $\infty \in \Upsilon$, satisfaciendo $t \leq \infty$, para todo $t \in \Upsilon$. Tal elemento es únicamente determinado, si existe. Una submartingala $X = (X_t, F_t)_{t\in\Upsilon}$ es llamado cerrado, si el conjunto de índices Υ tiene un último elemento. En este caso la variable aleatoria X_∞ es llamada el último elemento de X y satisface:

$$X_t \leq E(X_\infty/F_t), \quad \forall t \in \Upsilon.$$

Supermartingalas cerradas, y martingalas cerradas son definidas similarmente. El último elemento X_∞ de una martingala cerrada X satisface $X_t = E(X_\infty/F_t)$, para todo $t \in \Upsilon$, luego veremos:

Proposición 3.2.5. .

(i) Si la submartingala $X = (X_t)$ es cerrada, entonces la familia $\{X_t^+/t \in \Upsilon\}$ es uniformemente integrable.

(ii) Si la martingala $X = (X_t)$ es cerrada, entonces X asimismo es uniformemente integrable.

Prueba: (i) $X = X_t$ una submartingala con un último elemento entonces para (X_t^+)

$$0 \leq X_t^+ \leq E(X_\infty^+/F_t), \quad t \in \Upsilon$$

y la integrabilidad uniforme de la familia $\{X_t^+/t \in \Upsilon\}$ sigue de la integrabilidad uniforme de la familia $\{E_{F_t}(X_\infty^+)/t \in \Upsilon\}$. □

Considerando una submartingala $X = (X_t, F_t)_{t \in \Upsilon}$, donde el conjunto de índices Υ no tiene un último elemento, escogemos $\infty \notin \Upsilon$ y tomando que $t \leq \infty$, para todo $t \in \Upsilon$, Υ se agranda a el conjunto de índices parcialmente ordenado $\Upsilon \cup \{\infty\}$ con el último elemento ∞, y la familia (F_t) puede ser extendida por:

$$F_\infty = \sigma(\cup_{t \in \Upsilon} F_t)$$

Nos preguntamos ahora si la submartingala X puede ser extendida también, es decir, si existe una variable X_∞ tal que el proceso $(X_t, F_t)_{t \in \Upsilon \cup \{\infty\}}$ es una submartingala, es decir, tal que X_∞ es F_∞-*medible*, y

$$E(X_\infty^+) < \infty$$

y

$$X_t \leq E(X_\infty/F_t),$$

para todo $t \in \Upsilon$. Donde X_∞ tiene propiedades por lo cual es llamado el último elemento para la submartingala X, luego se puede extender.
La submartingala X es llamado cerrado si existe un último elemento X_∞ para X.
En este caso $(X_t, F_t)_{t \in \Upsilon \cup \{\infty\}}$ es una submartingala cerrada extendida de X. Un último elemento para la supermartingala X no es únicamente determinado, si X_∞ es un último elemento para X y $Z \geq 0$ es F_∞-*medible* con $E(Z)$ finita, entonces $X_\infty + Z$ también es un último elemento para X.
Supermartingalas y martingalas cerradas son definidas similarmente. En el caso de una martinganla X, sería X_∞ el último elemento si y solo si $X_\infty \in L^1(P)$ es F_∞-*medible* y $X_t = E(X_\infty/F_t)$, para todo $t \in \Upsilon$.
Equivalentemente X_∞ es un último elemento para la martingala X si y solo si este es el último elemento para X ambos como una submartingala y como una supermartingala.

3.3. Martingala en tiempo continuo

Filtración, tiempo opcional, muestras

Ahora veremos martingalas indexadas por el conjunto $\Upsilon = [0, +\infty[$, con el orden parcial usual. Una Υ-*filtración* $(F_t)_{t\geq 0}$ en (Ω, F, P) es llamada continua derecha si satisface que:

$$F_t = \cap_{s>t} F_s, \qquad todo \quad t \geq 0;$$

Equivalentemente, si $s_n \downarrow t$ implica que $F_{s_n} \downarrow F_t$, para toda sucesión $(s_n) \subseteq R$ y todo $t \geq 0$. Recordemos también que la filtración (F_t) es llamada aumentada si F_0 (así cada *σ-algebra* F_t) contiene a la familia de conjuntos *P-nulos* (de probabilidad nula), y tomaremos:

$$F_\infty = \sigma(\cup_{t\geq 0} F_t)$$

Asumiendo:

El espacio de probabilidad (Ω, F, P) completo, y la filtración $(F_t)_{t\geq 0}$ en (Ω, F, P) continua derecha y aumentada.

Descartando los problemas de medibilidad en conjuntos nulos. Sea $X = (X_t)$, $Y = (Y_t)$, $X(n) = (X_t(n))$ procesos estocásticos en (Ω, F, P) indexados por $\Upsilon = [0, +\infty[$ y $t \geq 0$. Si X_t es F_t-*medible* y $Y_t = X_t$, *p-as*, entonces Y_t es F_t-*medible.* Si $X_t(n)$ es F_t-*medible*, para todo $n \geq 1$ y $X_t(n) \to X_t$, *P-as.* cuando $n \uparrow \infty$ entonces X_t es F_t-*medible.*

Definición 3.9. *Ahora si $w \in \Omega$ se establece, la función:*

$$t \in [0, +\infty[\to X_t(w) \in \overline{R}$$

llamada la trayectoria de X en el estado w.

Definición 3.10. *El proceso X es llamado continuo (derecho, izquierdo) si X es F_t-adaptado y (para casi todo $w \in \Omega$) P-ae, la trayectoria de X es finitamente valuado y continuo (derecho, izquierdo).*

Luego, llamaremos a los procesos X,Y versiones de cada otro y escribiremos $X = Y$ si satisfacen que:

$$X_t = Y_t, \quad P-as., \quad para \quad todo \quad t \geq 0$$

Puesto que la filtración (F_t) es aumentada, cada versión de un proceso (F_t)-*adaptado* es otra vez (F_t)-*adaptado.*

El conjunto excepcional nulo $[X_t \neq Y_t]$ depende de t, si este conjunto nulo puede ser hecho independiente de $t \geq 0$, es decir, si hay un conjunto *P-nulo* $N \subseteq \Omega$ tal que $X_t(w) = Y_t(w)$, para todo $w \in \Omega \setminus N$ y todo $t \geq 0$, entonces nosotros llamamos al proceso X e Y indistinguibles. Claramente X y Y son indistinguibles si y solo si las trayectorias $t \in [0, +\infty[\to X_t(w)$ y $t \in [0, +\infty[\to Y_t(w)$ son idénticos, por P-ae (para casi todo $w \in \Omega$).

Teorema 3.3.1. Asumiendo procesos continuos derechos X y Y versiones de cada otro. Entonces ellos son indistinguibles.

Prueba: Sea un número real $r \geq 0$, elegimos un conjunto nulo $E_r \subseteq \Omega$ tal que $X_r = Y_r$ en el complemento E_r^c y $\cup_r E_r \subseteq E$ es un conjunto nulo tal que la trayectoria $t \to X_t(w)$, $t \to Y_t(w)$ son continuas derechas, para cada $w \in E^c$. Si $w \in E^c$ entonces las trayectorias $t \to X_t(w)$ y $t \to Y_t(w)$ son continuas derechas y satisfacen $X_r(w) = Y_r(w)$ para todo $r \in [0, \infty[\cap Q$ y $X_t(w) = Y_t(w)$, para todo $t \geq 0$. $\square$

Definición 3.11. *Un tiempo (F_t)-opcional es una función $T : \Omega \to [0, +\infty]$ satisfaciendo:*

$$[T < t] \in F_t, \quad 0 \leq t < \infty \tag{1}$$

El valor $T = \infty$ está permitido. La continuidad derecha de la filtración (F_t) implica la condición (1) que es equivalente con:

$$[T \leq t] \in F_t, \quad 0 \leq t < \infty \tag{2}$$

Asumiendo (1), $[T \leq t] = \cap_{r>s>t}[T < s]$ está en F_r, para cada $r > t$ y por lo cual $[T \leq t] \in F_t$. Asumiendo (2), $[T < t] = \bigcup_{t>s}[T \leq s] \in F_t$.
Siendo T un tiempo opcional, entonces los conjuntos $[T < t]$, $[T > t]$, $[T = t]$ están en F_t, para cada $t \leq 0$, y tendremos:

$$\begin{aligned} F_T &= \{A \in F_\infty / A \cap [T < t] \in F_t, \forall 0 \leq t < \infty\} \quad ...(3) \\ &= \{A \in F_\infty / A \cap [T \leq t] \in F_t, \forall 0 \leq t < \infty\} \\ &= \{A \subseteq \Omega / A \cap [T \leq t] \in F_t, \forall 0 \leq t < \infty\} \end{aligned}$$

Definición 3.12. *F_T es la familia de eventos los cuales son anteriores a T.*

Proposición 3.3.2. *Asumiendo que T_n, $n = 1, 2, 3, ...$ tiempos opcionales, entonces cada uno de los siguientes tiempos también lo son:*

(a) $\sup_n T_n$, $\inf_n T_n$, $T_1 \vee T_2$, $T_1 \wedge T_2$, $T_1 + T_2$.

(b) $\limsup_n T_n$, $\liminf_n T_n$.

Prueba: (a) Sea $T = \sup_n T_n$, para cada $t \geq 0$ tendremos $[T \leq t] = \cap_n [T_n \leq t] \in F_t$, similarmente, si $S = \inf_n T_n$, entonces $[S < T] = \cup_n [T_n < t] \in F_t$, usando las equivalencias (1) y (2), muestra que S y T son tiempos opcionales, la opcionalidad de $T_1 \vee T_2$, $T_1 \wedge T_2$, se sigue como un caso especial, finalmente, para $T = T_1 + T_2$, para cada $t \geq 0$, $[T < t] = \cup_{r,s \in Q, r+s<t}[T_1 < r] \cap [T_2 < s] \in F_t$, por lo cual T es opcional.$\square$

Proposición 3.3.3. *Siendo S, T, T_n, $n \geq 1$, tiempos opcionales, $\widetilde{T} : \Omega \to [0, \infty]$ y Z una variable aleatoria, entonces:*

(a) $S \leq T$ implica $F_S \subseteq F_T$.

(b) F_T es un σ-algebra y T es F_T-medible.

(c) Z es F_T-medible sii es $Z1_{[T<t]}$ es F_t-medible, para cada $t \geq 0$.

(d) $[S < T]$, $[S = T] \in F_{S\wedge T}$.

(e) Si la filtración (F_t) es aumentada, entonces F_T contiene los conjuntos nulos.

(f) Si $T_n \downarrow T$, entonces $F_{T_n} \downarrow F_T$.

(g) Si $T_n \uparrow T$ y $\cup_n [T_n = T] = \Omega$, entonces $F_{T_n} \uparrow F_T$.

(h) F_T contiene los conjuntos $P-nulos$.

(i) Si $\widetilde{T} = T$, p-as, entonces $\widetilde{T}$ es un tiempo opcional y $F_{\widetilde{T}} = F_T$.

(j) Si $A \in F_S$ entonces $A \cap [S \leq T] \in F_{S\wedge T}$.

Prueba: (*a*) Asuma $S \leq T$, entonces $[T < t] \subseteq [S < t]$ y $[T < t] \in F_t$, para cada $t \geq 0$. Sea $A \in F_S$ y $t \geq 0$ entonces $A \cap [S < t] \in F_t$, además,

$$A \cap [T < t] = (A \cap [S < t]) \cap [T < t] \in F_t$$

así $A \in F_T$.
(*b*) Es fácil ver qué; $\emptyset \in F_T$ y que F_T es cerrado sobre uniones contables. Sea $A \in F_T$ y $t \geq 0$. Entonces $A^c \cap [T < t] = [T < t] \setminus (A \cap [T < t]) \in F_t$, por lo tanto, $A^c \in F_T$ y F_T es cerrado sobre complementos. Se verifica que $[T < r] \in F_T$, para cada $r \in R$ y esto muestra que T es $F_T - medible$.
(c) $\Rightarrow$ Siendo Z F_T-*medible*, debemos mostrar que $Z1_{[T<t]}$ es F_t-*medible*, para cada $t \geq 0$, la siguiente extensión procede de funciones indicador. Asumiendo primero que $Z = 1_F$, donde $F \in F_T$ y $t \geq 0$ es arbitrario, entonces $F \cap [T < t] \in F_t$, equivalentemente, $Z1_{[T<t]} = 1_{F\cap[T<t]}$ es F_t-*medible*, por la linealidad se sigue que $Z1_{[T<t]}$ es F_t-*medible*. Sea Z una función no negativa F_T-*medible* y $t \geq 0$, escogemos una sucesión (Z_n) de funciones simples F_T-*medibles* no negativas tal que $Z_n \uparrow Z$. Entonces $Z_n 1_{[T<t]} \uparrow Z1_{[T<t]}$, por los pasos previos $Z_n 1_{[T<t]}$ es F_t-*medible*, para cada $n \geq 1$, y esto sigue que $Z1_{[T<t]}$ es F_t-*medible*. La extensión a F_T-*medible* arbitrario Z es con la descomposición $Z = Z^+ - Z^-$.
$\Leftarrow$ Asumiendo ahora que $Z1_{[T<t]}$ es F_t-*medible*, para cada $t \geq 0$, a ver qué Z es F_T-*medible*, es suficiente mostrar que $[Z \geq r] \in F_T$, para todos los números reales r, equivalentemente $[Z \geq r] \cap [T \leq t] \in F_t$, $\forall t \geq 0$ y $r \in R$. Para tal r y t tendremos:

$$[Z \geq r] \cap [T < t] = [Z1_{[T<t]} \geq r] \cap [T < t] \in F_t$$

donde usamos $[T < t] \in F_t$, por optimalidad del tiempo aleatorio T.
(*d*) $[S < T] \cap [S \wedge T < t] = [S < T] \cap [S < t] = \cup\{[S < q < T] : q \in Q \cap [0, t]\} \in F_t$, para todo $t \geq 0$. Esto muestra que $[S < T] \in F_{S\wedge T}$, por simetría $[T < S] \in F_{S\wedge T}$ y además $[S = T] = ([S < T] \cup [T < S])^c \in F_{S\wedge T}$.
(f) Asumiendo $T_N \downarrow T$, $N \uparrow \infty$ de (*a*) $F_{T_1} \supseteq F_{T_2} \supseteq F_{T_3} \supseteq ...$ y $F_T \subseteq \cap_n T_{T_N}$ así $\cap_N F_{T_N} \subseteq$

F_T. Sea $A \in F_{T_N}$, para todo $N \geq 1$, entonces $A \cap [T_N < t] \in F_t$, para todo $t \geq 0$ y todo $N \geq 1$, $t \geq 0$, $T_N \downarrow T$, $N \uparrow \infty$, tendremos $[T < t] = \cup_N [T_N < t]$ y

$$A \cap [T < t] = \cup_N (A \cap [T_N < t]) \in F_t,$$

así $A \in F_T$, se sigue que $F_T = \cap_N F_{T_N}$.
(g) Sea $G = \sigma(\cup_N F_{T_N})$, de (a) se sigue que $F_{T_1} \subseteq F_{T_2} \subseteq, ..., F_T$ y $G \subseteq F_T$ así muestra que $F_T \subseteq G$, si $A \in F_T$ $A_N = A \cap [T = T_N] \in F_{T_N}$, para todo $N \geq 1$ puesto que $[T = T_N] \in F_{T \wedge T_N} \subseteq F_T$ tendremos $A_N \in F_T$, $t \geq 0$, puesto que $T = T_N$ en el conjunto A_N, $A_N \cap [T_N < t] = A_N \cap [T < t] \in F_t$ se sigue que $A_N \in F_{T_N} \subseteq G$, de $\cup_N [T = T_N] = \Omega$ se sigue que $A = \cup_N A_N \in G$, como se deseaba (h), (i) se sigue.
(j) Sea $A \in F_S$ y $r \geq 0$ al verificar $A \cap [S \leq T] \in F_{S \wedge T}$ mostramos que:

$$A \cap [S \leq T] \cap [S \wedge T \leq r] \in F_r$$

así $A \cap [S \leq r] \in F_r$, los tiempos opcionales $T \wedge r$, $S \wedge r$ son F_r-*medibles* y $[S \wedge r \leq T \wedge r] \in F_r$, consecuentemente:

$$A \cap [S \leq T] \cap [S \wedge T \leq r] = A \cap [S \leq T] \cap [S \leq r] = A \cap [S \leq r] \cap [S \wedge r \leq T \wedge r] \in F_r. \Box$$

La condición $\bigcup_n [T_n = T] = \Omega$ en (g) menciona que el $\lim T = \lim T_n$ es finito en cada $w \in \Omega$.
Medibilidad con respecto a F_T es interpretado como una variable aleatoria Z F_T-*medible*, si el valor $Z(w)$ es conocido por $T(w)$, para cada $w \in \Omega$.

3.3.1. Muestra de un proceso X

Sea $X = X_t(w) = X(t, w)$ cualquier proceso adaptado en el espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, F, (F_t), P)$ y $T : \Omega \to [0, \infty]$ un tiempo aleatorio.

Definición 3.13. *La variable aleatoria X_T, es interpretado como muestra (camino) en el tiempo T y es definido como :*

$$(X_T)(w) = X_{T(w)}(w), \quad w \in \Omega$$

Las previsiones son hechas para el caso $T(w) = \infty$.
$X_T = X_\infty$ en el conjunto $[T = \infty]$ donde X_∞ es alguna variable aleatoria F_∞-*medible* especificada anteriormente (exactamente depende del contexto).
La más común elección para X_∞ es $X_\infty = \lim\sup_n X_n$ en caso $\lim_{t \uparrow \infty} X_t \in \overline{R}$ existe en casi todo punto. Entonces X_∞ está bien definido F_∞-*medible*, y satisface $X_\infty = \lim_{t \uparrow \infty} X_t \in \overline{R}$, p-as. En algunas ocasiones se tomará $X_\infty = 0$

Lema 3.3.1. Lema de discretización
Sea T un tiempo opcional. Para cada $N \geq 1$ se tendrá que:

$$T_N(w) = \frac{([2^N T(w)] + 1)}{2^N} \quad (= \infty, \quad si \quad T(w) = \infty), \quad w \in \Omega$$

Entonces cada T_N es un tiempo opcional y $T_N \downarrow T$, en Ω, cuando $N \uparrow \infty$.

Prueba: Para $N \geq 1$, $D_N := \{k2^{-N}/k = 0,1,2,...\}$, los puntos en D_N son puntos finales del intervalo dyadic $]\frac{k}{2^N}, \frac{k+1}{2^N}[$ de grado N, el cual forma una partición del intervalo $[0,\infty[$, para $t \in [0,\infty]$ sea:

$$b_N(t) = \text{ínf}\{\beta \in D_N/\beta > t\}$$

y $a_N(t) = b_N(t) - 2^{-N}$, Así, si $t < \infty$, $t \in [a_N(t), b_N(t)[$ y $[a_N(t), b_N(t)[$ es el único intervalo dyadic $[\frac{k}{2^N}, \frac{k+1}{2^N}[$ de grado N el cual contiene el punto t. Si $t = \infty$, entonces $b_N(t) = \infty$. Uno verifica que $b_N(t) = \frac{[2^N t]+1}{2^N}$ y

$$T_N(w) = b_N(T(w)) \quad w \in \Omega$$

Note que $t \leq b_N(t) \leq t + 2^{-N}$ y $D_N \subseteq D_{N+1}$ lo cual implica que $b_{N+1}(t) \leq b_N(t)$, consecuentemente $b_N(t) \downarrow t$, $N \uparrow \infty$, para cada $t \in [0,\infty]$ en Ω. Así $T_N \downarrow T$ en Ω, muestra que T_N es opcional, sea $N \geq 1$, $w \in \Omega$, $t \geq 0$, entonces: $T_N(w) = b_N(T(w)) \leq t$ si y solo si el intervalo de Dyadic de grado N contiene al punto t y es equivalente $a_N(t) > T(w)$ así $[T_N \leq t] = [T < a_N(t)] \in F_{a_N(t)} \subseteq F_t$. □

Proposición 3.3.4. *Asumiendo que el proceso $X = (X_t)$ tiene trayectorias continuas derechas casi seguramente, X_∞ es cualquier variable aleatoria F_∞-medible y T un tiempo opcional. Entonces X_T es F_T-medible.*

Prueba: Sea T_N como en el lema anterior, si $w \in \Omega$ tal que la trayectoria $t \to X_t(w)$ es continua derecha, entonces la convergencia $T_N(w) \downarrow T(w)$ implica que:

$$(X_{T_N})(w) = X_{T_N(w)}(w) \to X_{T(w)}(w) = (X_T)(w), \quad N \uparrow \infty$$

así tendremos $X_{T_N} \to X_T$, $N \uparrow \infty$, P-as. además, el tiempo aleatorio T tiene rango contable en el conjunto $D_N = \{k2^{-N}/k = 0,1,2,...\}$, así la variable aleatoria X_{T_N} puede ser vista como una muestra de proceso $(X_{k2^{-N}})_{k\geq 1}$ en tiempo T_N. X_{T_N} es F_{T_N}-*medible*, para cada $N \geq 1$ y $F_{T_N} \downarrow F_T$ y

$$Y = \limsup_n X_{T_n} = \limsup_n X_{T_n} \quad es \quad F_{T_N} - medible$$

para cada $N \geq 1$, puesto que $F_T = \cap_{N\geq 1} F_{T_N}$ se sigue que Y es F_T-*medible*, finalmente $X_T = Y$, p-as, y el σ-*algebra* F_T contiene los conjuntos nulos, X_T es F_T-*medible*.□

Teoremas de convergencia

Teorema 3.3.5. Teorema de convergencia de submartingalas
Asumiendo la submartingala continua derecha (X_t) satisface $K = \sup_t E(X_t^+) < \infty$, entonces:

(i) $X_\infty = \lim_{t\uparrow\infty} X_t \in \overline{\mathbb{R}}$ existe P-as, y satisface $E(X_\infty^+) < \infty$.

(ii) Si $E(X_t) > -\infty$, para algún t, entonces $X_\infty \in L^1(P)$.

(iii) $X_t \leq E(X_\infty/F_t)$, $\forall t \geq 0$ si y solo si la familia $\{X_t^+/t \geq 0\}$ es integrable uniformemente.

(iv) Si (X_t) es integrable uniformemente, entonces $X_\infty \in L^1(P)$ y $X_t \to X_\infty$ en $L^1(P)$, cuando $t \uparrow \infty$.

Prueba:
(i) Sea $S \subseteq [0, +\infty[$ denso contable, para números reales $\alpha < \beta$, $T \leq S$ y

$$\bigcup_S]\alpha, \beta[= \sup\{\bigcup_T]\alpha, \beta[/T \leq S \quad finito\}$$

y como T está contenido en $S \cap [0, m]$, $m \geq 1$, se sigue que $\bigcup_{S\cap[0,m]}]\alpha, \beta[\uparrow U_S]\alpha, \beta[$, $m \uparrow \infty$, en cada punto de Ω por la convergencia monótona:

$$E(\bigcup_S]\alpha, \beta[) = \lim_m E(\bigcup_{S\cap[0,m]}]\alpha, \beta[) \leq \frac{K + |\alpha|}{\beta - \alpha} < \infty$$

En particular $\bigcup_S]\alpha, \beta[< \infty$, P-as. Sea ahora $w \in \Omega$ tal que $f(t) = X_t(w)$ continua derecha pero $\lim_{t\uparrow\infty} X_t(w)$ no existe (*en* $\overline{R}$). Escogemos números reales α, β tal que

$$\liminf_{t\uparrow\infty} < \alpha < \beta < \limsup_{t\uparrow\infty} X_t(w)$$

$f(t)$ cruza entre α y β. Por la continuidad derecha la restricción f/S decrece entre α y β y implica que $\bigcup_S]\alpha, \beta[(w) = \infty$, el cual es imposible para P-ae, $w \in \Omega$ y el límite $X_\infty(w) = \lim_{t\uparrow\infty} X_t(w)$ existe en $\overline{\mathbb{R}}$, P-ae, $w \in \Omega$: Además, por el lema de Fatou:

$$E(X_\infty^+) = E(\liminf_n X_n^+) \leq \liminf_n E(X_n^+) \leq K < \infty$$

(ii) Notemos $E(X_t) \uparrow$ y $X_\infty = \lim_n X_n$, si $E(X_t) > -\infty$ para algún $t \geq 0$ entonces $E(X_n) > -\infty$, para algún $n \geq 1$, y sigue que como en el caso discreto.
(iii) Sea $X_t \leq E(X_\infty/F_t)$, $\forall t \geq 0$ y

$$0 \leq X_t^+ \leq E(X_\infty^+/F_t) \quad t \geq 0$$

La integrabilidad de $\{X_t^+/t \geq 0\}$ sigue de la integrabilidad uniforme de la familia $\{E_{F_t}(X_\infty^+/t \geq 0)\}$, asumiendo que la familia $\{X_t^+/t \geq 0\}$ es integrable uniformemente entonces $E(X_\infty^+) < \infty$, de acuerdo a (i) y mostramos que $X_t \leq E(X_\infty/F_t)$, equivalentemente:

$$E(X_t 1_A) \leq E(X_\infty 1_A), \quad \forall t \geq 0, \quad A \in F_0 \quad (0)$$

Fijando $r \leq 0$, $X_t(r) = X_t \vee r$, entonces $(X_t(r))_t$ es una submartingala. Fijando $t \geq 0$ y $A \in F_t$ y $m \geq t$. Entonces $E(X_t(r)1_A) \leq E(X_m(r)1_A)$, $m \uparrow \infty$ y observando la integrabilidad uniforme de $\{X_m^+/m \geq 1\}$ implica que la integrabilidad uniforme de $\{X_m(r)/m \geq 1\}$, obtenemos:

$$E(X_t(r)1_A) \leq E(X_\infty(r)1_A)$$

$r \downarrow -\infty$ ahora (0) por convergencia decreciente, $\{X_t(r)/r \leq 1\}$ y $\{X_\infty(r)/r \leq 0\}$ son acotados y por la función, X_t^+ y X_∞^+ respectivamente.
(iv) Note que $X_t \to X_\infty$ en $L^1(P)$, $t \uparrow \infty$ si y solo si $X_{t_n} \to X_\infty$ en $L^1(P)$, $n \uparrow \infty$, para cada sucesión $t_n \uparrow \infty$.□

Teorema de convergencia de martingalas

Teorema 3.3.6. Sea $X = (X_t)_{t\geq 0}$ martingala continua derecha L^1-*acotada* entonces $X_\infty = \lim_{t\uparrow\infty} X_t$ existe P-as, y es una variable aleatoria integrable. Además, las siguientes condiciones son equivalentes:

(i) $X_t = E(X_\infty/F_t)$, $\forall t \geq 0$.

(ii) (X_t) es integrable uniformemente.

(iii) $X_t \to X_\infty$ en L^1-*norma*, cuando $t \uparrow \infty$.

Prueba: $(i) \Rightarrow (ii)$.
$(ii) \Rightarrow (iii)$ Sea $X_t \to X_\infty$ en L^1-*norma*, $t \uparrow \infty$ si solo si $X_{t_n} \to X_\infty$ en L^1-*norma* cuando $n \uparrow \infty$, para cada sucesión $t_n \uparrow \infty$
$(iii) \Rightarrow (i)$ Asumiendo que $X_t \to X_\infty$ en L^1-*norma* $t \uparrow \infty$, fijando $t \geq 0$. mostraremos que $X_t = E(X_\infty/F_t)$, o $E(X_t 1_A) = E(X_\infty 1_A)$, $\forall A \in F_t$, así sea el conjunto A, entonces $E(X_t 1_A) = E(X_n 1_A)$ $\forall n \geq t$ por la propiedad de martingala, sea $n \uparrow \infty$ entonces $E(X_n 1_A) \to E(X_\infty 1_A)$, por convergencia de norma $X_n \to X_\infty$ y sigue que $E(X_t 1_A) = E(X_\infty 1_A)$ □

Corolario 3.3.1. *Sea $Z \in L^1(P)$ y $X = (X_t)$ una versión continua derecha de la martingala $E(Z/F_t)$ $t \geq 0$, entonces $X_t \to E(Z/F_\infty)$ $t \uparrow \infty$ casi seguramente y en L^1*

Corolario 3.3.2. *Para una martingala continua derecha $X = (X_t)_{t\geq 0}$, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) X es cerrado.

(ii) X es integrable uniformemente.

(iii) $X_t \to Z$ en L^1-norma, cuando $t \uparrow \infty$, para alguna variable aleatoria integrable Z.

Prueba: $(i) \to (ii)$ Si $X_\infty \in L^1(P)$ es un último elemento para X, entonces $X_t = E(X_\infty/F_t)$, para todo $t \geq 0$, y la integrabilidad uniforme de X es dada.
$(ii) \to (iii)$ Se entiende de los anteriores teoremas.
$(iii) \to (i)$ Asumiendo que $X_t \to Z \in L^1(P)$, en L^1-*norma*,$t\uparrow \infty$, $X_\infty = E(Z/F_\infty)$ es un último elemento para X, puesto que X_∞ es F_∞-*medible* y satisface $E(X_\infty/F_t) = E(Z/F_t)$, $t \geq 0$ y es suficiente mostrar que $X_t = E(Z/F_t)$, $t \geq 0$. □

Teorema 3.3.7. Teorema de muestra opcional
Sea $(X_t)_{0\leq t\leq\infty}$ submartingala cerrada continua derecha. Entonces tendremos $E(X_S^+), E(X_T^+) < \infty$ y

$$X_S \leq E(X_T/F_S)$$

para tiempos opcionales $S \leq T$ (no necesariamente finitamente valuado).

Similarmente para supermartingalas y la igualdad en caso de una martingala.
Prueba:

Sea S, T tiempos opcionales satisfaciendo $S \leq T$,
(i) Sea $E(X_0) > -\infty$ $(X_t \subseteq L^1(P))$ así:

$$S_n, T_n : \Omega \to \{k2^{-n}/k \geq 0\} \cup \{\infty\}$$

y satisfacerá $S_n \leq T_n$, $S_n \downarrow S$ y $T_n \downarrow T$ así X_{S_n}, X_{T_n} pueden ser vistas como muestras de la submartingala $(X_{k2^{-n}})_{0 \leq k \leq \infty}$ así:

$$E(X_{S_n}^+), \quad E(X_{T_n}^+) < \infty$$

y

$$X_{S_n} \leq E(X_{T_n}/F_{S_n}) \quad \forall n \geq 1 \qquad (1)$$

además:

$$F_{S_n} \downarrow F_S \quad y \quad X_{S_n} \to X_S, \quad y \quad X_{T_n} \to X_T$$

por la continuidad derecha de X, cuando $n \uparrow \infty$ en (1) necesitamos la convergencia, así mostramos que (X_{S_n}), (X_{T_n}) son integrables uniformemente, $(X_{k2^{-n}})_{0 \leq \infty}$ con $0 \leq S_n$ implica que $E(X_{S_n}) \geq E(X_0) > -\infty$, además, (F_{S_n}) es no-decreciente y $S_{n+1} \leq S_n$ implica que:

$$X_{S_{n+1}} \leq E(X_{S_n}/F_{S_{n+1}})$$

(X_{S_n}) es una submartingala revertida con:

$$E(X_{S_n}) \geq E(X_0) > -\infty$$

(X_{S_n}) es uniformemente integrable y lo mismo para (X_{T_n}), así $X_{S_n} \to X_S$ y $X_{T_n} \to X_T$ implica $X_S, X_T \in L^1(P)$ y sigue que:

$$E(X_{T_n}/F_{S_n}) \to E(X_T/F_S) \quad en \quad L^1(P)$$

$n \uparrow \infty$ (1) sigue que $X_S \leq E(X_T/F_S)$ como deseábamos.□

Corolario 3.3.3. *Sea $X = (X_t, F_t)_{0 \leq t \leq \infty}$ una submartingala continua derecha cerrada y sea $(T_t)_{0 \leq t \leq \infty}$ una familia no decreciente de tiempos opcionales. Entonces la familia $(X_{T_t}, F_{T_t})_{0 \leq t \leq \infty}$ es una submartingala.*

Prueba: libro[5], pág. 63.

3.3.2. Martingala local

Asumiendo la filtración $(F_t)_{t\geq 0}$ en (Ω, F, P) continua derecha, aumentada y satisfaciendo $F_\infty = \vee_t F_t \subseteq F$. Enseguida veremos el proceso de localización que es descrito líneas abajo, (se dirá parada).

Localización

Proposición 3.3.8. *Sea $X = X_t(w)$ un proceso adaptado y $T : \Omega \to [0, \infty]$ un tiempo opcional (el valor de ∞ está permitido). Definimos el proceso X^T, por $X_t^T := X_{t\wedge T}$, $t \geq 0$, es llamado proceso de parada en tiempo T. Si $w \in \Omega$, entonces:*

$$X_t^T(w) = \begin{cases} X_t(w) & , si \quad t \leq T(w) \\ X_{T(w)}(w) & , si \quad t > T(w) \end{cases}$$

y esto quiere decir que las trayectorias $t \to X_t(w)$ son paradas en $t = T(w)$, cuando cambia constantemente. Esto justifica la terminología y muestra que el proceso X^T adquiere todas las propiedades de continuidad del proceso X. Claramente si la trayectoria $t \to X_t(w)$ es continua(derecha, izquierda) entonces lo mismo es para $t \to X_t^T(w)$ y también:

$$(X^S)^T = X^{S\wedge T}$$

$$y \quad en \quad particular \quad (X^T)^T = X^T$$

Parada X en una constante de tiempo $T = a$ es equivalente a redefinir $X_t := X_a$, para $t \geq a$ equivalentemente, $X_t^a = X_a$, para todo $t \geq a$.

Teorema 3.3.9. La filtración $(F_{t\wedge T})_t$ es continua derecha también. Si X es una submartingala continua derecha, entonces lo mismo es verdad para X^T relativo a la filtración $(F_{t\wedge T})_t$.

Prueba: Primero mostraremos que la filtración $(F_{t\wedge T})_t$ es continua derecha. Para ello se tiene que mostrar que $\cap_{s>t} F_{s\wedge T} \subseteq F_{t\wedge T}$, para todo $t \geq 0$ y $A \in \cap_{s>t} F_{s\wedge T}$. También mostramos que $A \in F_{t\wedge T}$, es decir, $A \cap [t \wedge T < r] \in F_r$ para todo $r \geq 0$. Sea $r \geq 0$, desde que $A \in F_{s\wedge T}$, tenemos $A \cap [s \wedge T < r] \in F_r$, para todo $s > t$. Elegimos una sucesión (s_n) tal que $s_n > t$ y $s_n \downarrow t$, cuando $n \uparrow \infty$. Entonces $s_n \wedge T \downarrow t \wedge T$ y consecuentemente $[s_n \wedge T < r] \uparrow [t \wedge T < r]$, $A \cap [s_n \wedge T < r] \uparrow A \cap [t \wedge T < r]$, cuando $n \uparrow \infty$, por lo tanto $A \cap [s_n \wedge T < r] \in F_r$, para todo $n \geq 1$, se sigue que $A \cap [t \wedge T < r] \in F_r$, esto muestra la continuidad derecha de $(F_{t\wedge T})_t$.
El proceso $X^T = (X_{t\wedge T})_t$ es adaptado para la filtración $(F_{t\wedge T})_t$, la continuidad derecha la adquiere del proceso X.$\square$
Sea $A \in F$ un subconjunto de Ω. Si $X = (X_t)$ proceso estocástico, definimos el proceso estocástico $Y = 1_A X$ como $Y_t(w) = 1_A(w) X_t(w)$, $t \geq 0$, $w \in \Omega$, por lo tanto, la multiplicación de X por 1_A afecta la trayectoria de X en un camino muy simple. Las trayectorias de $t \to Y_t(w)$, están de acuerdo con $t \to X_t(w)$, si $w \in A$, y es cero en otro caso.
Si X es (F_t)*-adaptado* y $A \in F_0$, entonces $Y = 1_A X$ es F_t*-adaptado* también. Siendo ahora T un tiempo opcional, entonces $A = [T > 0] \in F_0$, por lo cual, si X es un proceso adaptado entonces también es el proceso $1_{[T>0]} X$.

Definición 3.14. *Un tiempo opcional T se dice que reduce al proceso X, si el proceso $1_{[T>0]}X_t^T$ es una $F_{t\wedge T}$-martingala. El proceso X es llamado una martingala local si existe una sucesión de tiempos opcionales T_n tal que:*

(a) $T_n \uparrow \infty$,p–as.

(b) T_n reduce X, para cada $n \geq 1$.

en este caso decimos que la sucesión (T_n) reduce X.

Observamos que la definición de martingala local depende de la filtración (F_t) y debería llamarse más propiamente (F_t)-*martingala local*, sin embargo, se le llamará simplemente martingala local.
Si el proceso X es adaptado continuo a la derecha, entonces el proceso $1_{[T>0]}X_t^T$ es adaptado para la filtración $(F_{t\wedge T})$. Asumiendo X continuo derecho y (T_n) sucesión reducida de tiempos opcionales para X. Fijando $t \geq 0$, $1_{[T_n>0]}X_t^{T_n}$ es F_t-*medible*, para cada $n \geq 1$, p-as $n \uparrow \infty$ se sigue que X_t es F_t-*medible*, por lo tanto, una martingala local continua derecha es automáticamente (F_t)-*adaptado*. Ahora, si X es una martingala, entonces $E(|X_t|) < \infty$ y sigue que $|X_t|$ p-as para cada $t \geq 0$. Ahora es fácil de ver que martingala local tiene la misma propiedad. En consecuencia martingalas locales X, Y pueden ser medibles y $(X+Y)_t = X_t + Y_t$.

Proposición 3.3.10. *Sean X_t, Y_t procesos adaptados, continuos derechos y S, T tiempos opcionales entonces:*

(a) Sea $Y_t = X_t^T$ o $Y_t = 1_{[T>0]}X_t^T$. Entonces Y_t es una $(F_{t\wedge T})$-martingala si y solo si es una (F_t)-martingala.

(b) Si X es una (F_t)-martingala, entonces también lo es X_t^T y $1_A X$, para cada conjunto $A \in F_0$. En particular X es una martingala local.

(c) Si X es una martingala local, entonces lo son X^T, $1_A X$ y $Y_t = X_t - X_0$, para cada conjunto $A \in F_0$.

(d) Si X_t^T es una martingala, entonces T reduce X, así X_0 es integrable y T reduce X, entonces X_t^T es una martingala.

(e) Si T reduce X y $S \leq T$, entonces S reduce X.

(f) Sea X una martingala local. Entonces existe una sucesión reducida (T_n) para X tal que $T_n \uparrow \infty$ en cada punto de Ω y $(1_{[T_n>0]}X_t^{T_n})_t$ es una martingala uniformemente integrable, para cada $n \geq 1$.

Observación *X continuo derecho y adaptado, el proceso X_t^T es $(F_{t\wedge T})$-adaptado y así mismo el proceso $Y_t = 1_{[T>0]}X_t^T$.*

Prueba: (a) $\Leftarrow$ La filtración $(F_{t\wedge T})_t$ satisface $F_{t\wedge T} \subseteq F_t$, $\forall t \geq 0$, sin embargo, Y_t es una martingala con respecto a la filtración (F_t), entonces es una martingala con respecto a cualquier filtración (G_t) el cual satisface $G_t \subseteq F_t$, $t \geq 0$ y es adaptado. Para ver esto notemos que para $0 \leq s < t$ la esperanza condicional $E(Y_t/F_t) = Y_s$ es en realidad G_s-*medible* y $Y_s = E(Y_t/F_s) = E(Y_t/G_s)$ como deseábamos.

$\Rightarrow$ Asumiendo que Y_t es una martingala relativo a la filtración $(F_{t\wedge T})_t$, con la filtración (F_t) mostramos que:

$$E(Y_t, A) = E(Y_s, A) \quad 0 \leq s \leq t$$

Para todos los conjuntos $A \in F_{s\wedge T}$, asumiendo que $0 \leq s \leq t$ y $A \in F_s$ y sea $A = (A \cap [T \leq s]) \cup (A \cap [T > s])$, el conjunto $B = A \cap [T > s]$ está en $F_{s\wedge T}$ y

$$E(Y_t; A \cap [T > s]) = E(Y_s; A \cap [T > s]) \quad ...(2)$$

en el conjunto $A \cap [T \leq s]$ tendremos $X_{t\wedge T} = X_T = X_{s\wedge T}$ y $Y_t = Y_s$ así:

$$E(Y_t; A \cap [T \leq s]) = E(Y_s; A \cap [T \leq s]) \quad ... \quad (3)$$

(b) Sea X una (F_t)-*martingala*, entonces X_t^T es una $(F_{t\wedge T})$-*martingala*. De (a) se sigue que es una (F_t)-*martingala*. Sea $A \in F_0$, el proceso $Y = 1_A X$ es definida por $Y_t(w) = 1_A(w)X_t(w)$. Así la integrabilidad de Y_t sigue de la integrabilidad de X_t. Sea $0 \leq s < t$ puesto que la función 1_A es acotado y F_s-*medible*, tendremos que:

$$E(Y_t/F_s) = E(1_A X_t/F_s) = 1_A E(X_t/F_s) = 1_A X_s = Y_s$$

así Y_t es una (F_t)-*martingala*.

(c) Sea (T_n) sucesión reducida de tiempos opcionales para X, fijando $n \geq 1$ usando (a) $1_{[T_n>0]}X^{T_n}$ es una (F_t)-*martingala*, en particular $1_{[T_n>0]}X_0 = 1_{[T_n>0]}X^{T_n} \in L^1(P)$, así $1_{[T_n>0]}Y_t^{T_n} = 1_{[T_n>0]}X_t^{T_n} - 1_{[T_n>0]}X_0$ es una martingala consecuentemente la sucesión (T_n) reduce Y.

$1_{[T_n>0]}(X^T)^{T_n} = (1_{[T_n>0]}X^{T_n})^T$ es una (F_t)-*martingala* asi la sucesión (T_n) reduce X^T. Sea $A \in F_0$ para cada tiempo opcional T se tendrá $(1_A X)^T = 1_A X^T$ y $1_{[T_n>0]}(1_A X)^{T_n} = 1_A(1_{[T_n>0]}X^{T_n})$ el cual es una (F_t)-*martingala*, de acuerdo a (c) la sucesión T_n reduce $1_A X$.

(d) X_t^T es una martingala, entonces es $1_{[T>0]}X_t^T$, es decir, T reduce X, asumiendo X_0 integrable y T reduce X, es decir, $1_{[T>0]}X_t^T$ es una martingala. Entonces:

$$X_t^T = 1_{[T>0]}X_t^T + 1_{[T=0]}X_t^T = 1_{[T>0]}X_t^T + 1_{[T=0]}X_0$$

es una martingala también.

(e) Si T reduce X y $S \leq T$, entonces $M_t = 1_{[T>0]}X_{t\wedge T}$ es una martingala y $[S > 0] \subseteq [T > 0]$ y así $1_{[S>0]} = 1_{[S>0]}1_{[T>0]}$, aplicando tiempos opcionales $T_t = t \wedge S$ y (c) $1_{[S>0]}X_{t\wedge S} = 1_{[S>0]}M_{t\wedge S}$ es una martingala, así S reduce X.

(f) Sea R_n sucesión reducida para X y escogemos $N \subseteq \Omega$ (nulo), tal que $T_n(w) \uparrow \infty$, para todo $w \in N^c$, $S_n = n1_N + R_n 1_{N^c}$ entonces $S_n \uparrow \infty$ en cada punto de Ω y $S_n = R_n$, P-as, (F_t) es aumentada, así S_n es un tiempo opcional. $n \geq 1$, entonces $1_{[S_n>0]}X_t^{S_n} = 1_{[R_n>0]}X_t^{R_n}$, P-as. para cada $t \geq 0$ y sigue que $1_{[S_n>0]}X_t^{S_n}$ es una martingala así (S_n) reduce X. Sea $T_n = S_n \wedge n$ entonces $T_n \uparrow \infty$, de acuerdo a (e), la sucesión (T_n) reduce X, fijando $n \geq 1$ $Y_t = 1_{[S_n>0]}X_t^{S_n}$ es una martingala, podemos escribir $1_{[T_n>0]}X_t^{T_n} = 1_{[T_n>0]}Y_{t\wedge n}$, puesto que $Y_{t\wedge n}$ es una martingala con un último elemento Y_n integrable uniformemente, lo mismo es para $1_{[T_n>0]}X_t^{T_n}$.$\square$

Para cada $a > 0$ sea τ_a la clase de todos los tiempos opcionales $T : \Omega \rightarrow [0, a]$. El proceso continuo derecho y adaptado X se dice que es de clase DL, si la familia de variables aleatorias $(X_T)_{T\in\tau_a}$, es uniformemente integrable para cada $a > 0$.

Proposición 3.3.11. *Una martingala local continua derecha es una martingala si y solo si es de clase DL*

Prueba: libro[5], pág. 68.

Proposición 3.3.12. *Una martingala local continua derecha X es uniformemente acotado o satisface $E(\sup_{t\leq a}|X_t|) < \infty$, para cada $a > 0$, entonces es una martingala.*

Prueba: libro [5], pág. 69.

Lo siguiente muestra que siempre hay una sucesión reducida canónica para una martingala local continua.

Proposición 3.3.13. *Sea X una martingala local continua. Entonces $T_n := \text{ínf}\{t \geq 0/ \mid X_t \mid > n\}$ define una sucesión reducida (T_n) de tiempos opcionales para X. En realidad, cualquier sucesión (S_n) de tiempos opcionales el cual satisface $S_n \uparrow \infty$ y $S_n \leq T_n$ reduce a X y satisface:*

$$|1_{[S_n>0]}X_t^{S_n}| \leq n \quad ...(5)$$

Así la martingala $(1_{[S_n>0]}X_t^{S_n})_t$ es uniformemente acotado y asímismo uniformemente integrable, para cada $n \geq 1$.

Prueba: Mostramos primero que T_n es un tiempo opcional, para cada $n \geq 1$. Sea $t \geq 0$, entonces $T_n(w) < t$ si y solo si $|X_q(w)| > n$, para algún número racional $q < t$. Así:

$$[T_n < t] = \bigcup \{[|X_q| > n]/q \in Q \cap [0,t[\} \in F_t,$$

Sea (S_n) sucesión de tiempos opcionales tal que $S_n \leq T_n$, para todo $n \geq 1$, fijando $n \geq 1$ la continuidad izquierda del proceso X implica que $|X_t^{S_n}| \leq n$, as. en el conjunto $[T_n > 0]$ y es subconjunto $[S_n > 0]$, implica (5) el proceso $(1_{[S_n>0]}X_t^{S_n})_t$ es una martingala local, el cual es uniformemente acotada y asimismo una martingala. Así la sucesión (S_n) reduce X. □

3.3.3. Martingala cuadrada integrable

Una martingala (M_t) es llamada cuadrada integrable si esta satisface que:

$$E(M_t^2) < \infty,$$

es decir, $M_t \in L^2(P)$, para todo $t \geq 0$.
En este caso M_t^2 es una submartingala y así mismo la función $t \to E(M_t^2)$ no decreciente.
La martingala M_t es llamada *L^2-acotada* si esta es cuadrada integrable y satisface

$$\sup_t E(M_t^2) < \infty.$$

En este caso la martingala M_t es uniformemente integrable y consecuentemente tiene un último elemento M_∞ el cual satisface, $M_\infty = \text{lím}_{t\uparrow\infty} M_t$, casi en todo punto(p-as), y por el lema de Fatou se tendrá lo siguiente:

$$E(M_\infty^2) \leq E(\liminf_n M_n^2) \leq \liminf_n E(M_n^2)$$

y usando la desigualdad de Jensen para esperanza condicional se tendrá:

$$M_t^2 = E(M_\infty/F_t)^2 \leq E(M_\infty^2/F_t)$$

Integrando sobre Ω, se obtiene:

$$E(M_t^2) \leq E(M_\infty^2)$$

Combinando con lo anterior vemos que:

$$E(M_\infty^2) = \sup_t E(M_t^2) = \lim_{t\uparrow\infty} E(M_t^2)$$

especialmente $M_\infty \in L^2(\Omega, F_\infty, P)$.
$\mathcal{H}^2$ denota el espacio de todas las martingalas continuas derechas $L^2 - acotadas$ y

$$\|M\|_2 = \sup_t \|M_t\|_{L^2} = \|M_\infty\|_{L^2}$$

$M \in \mathcal{H}^2$ vemos que $\|.\|_2$ es una norma en $\mathcal{H}^2$ y la aplicación

$$M \to M_\infty \in L^2(\Omega, F_\infty, P)$$

que es una isometría. Es también suryectiva, si $f \in L^2(\Omega, F_\infty, P)$, entonces la martingala $M_t = E(f/F_t)$ tiene una versión continua derecha. De la desigualdad de Jensen para esperanza condicional:

$$M_t^2 \leq E(f^2/F_t)$$

Integrando sobre Ω obtenemos $E(M_t^2) \leq E(F^2)$. Tomando el supremo sobre todo $t \geq 0$ se sigue que:

$$\|M\|_2 \leq \|f\|_{L^2} < \infty,$$

por lo tanto, $M \in \mathcal{H}^2$, además, $M_\infty = f$, consecuentemente el espacio $\mathcal{H}^2$ es isométricamente isomorfo al espacio de Hilbert $L^2(\Omega, F_\infty, P)$ y, además, es un espacio de Hilbert el mismo, de esto se sigue:
que el producto interno en $\mathcal{H}^2$ es dado por:

$$(M, N)_{H^2} = (M_\infty, N_\infty)_{L^2} = E[M_\infty N_\infty]$$

$M, N \in \mathcal{H}^2$.
Para $M \in \mathcal{H}^2$, $M^*_\infty = \sup_{t\geq 0} |M_t|$, la continuidad derecha de M implica que M^*_∞ es una variable aleatoria no negativa medible. M^*_∞ es llamada la función maximal del proceso M. Luego:

$$||M||_2 \leq ||M^*_\infty||_{L^2} \leq 2||M||_2$$

Puesto que $M_t^2 \leq (M^*_\infty)^2$, tomando el supremo sobre todo $t \geq 0$. Fijando $n \geq 1$ y $M^*_n = \sup_{t\leq n} |M_t|$ luego, tendremos:

$$E[(M^*_n)^2] \leq 4E[M_n^2] \leq 4||M||_2^2,$$

cuando $n \uparrow \infty$, y siguiendo será:

$$E[(M^*_\infty)^2] \leq 4 \parallel M \parallel_2^2$$

Consecuentemente, para $M \in \mathcal{H}^2$, la función maximal M^*_∞ es cuadrada integrable y $||M|| = ||M^*_\infty||_{L^2}$ define una norma equivalente en $\mathcal{H}^2$. Sin embargo, con respecto a esta norma $\mathcal{H}^2$ no es un espacio de Hibert grande. H^2 denota el espacio de martingalas continuas $L^2 - acotadas$ y $H_0^2 = \{M \in H^2 | M_0 = 0\}$ claramente $H_0^2 \subseteq H^2 \subseteq \mathcal{H}^2$ son subespacios de $\mathcal{H}^2$.

Proposición 3.3.14. *Los subespacios H^2, H_0^2 son cerrados en $\mathcal{H}^2$.*

Una martingala M_t es llamada uniformemente acotada, si esta satisface $|M_t| \leq K < \infty$, P-as, para todo $t \geq 0$ y alguna contante K, claramente tal martingala estará en $\mathcal{H}^2$ con $||M||_2 \leq K$.

3.3.4. Variación cuadrática

Definición 3.15. *Un proceso A es llamado proceso de variación acotada, si la trayectoria (camino) $t \geq 0 \rightarrow A_t(w)$ es de variación acotada en intervalos finitos, para casi todo w, P-ae, $w \in \Omega$.*

Claramente cada proceso creciente A tiene esta propiedad. Considerando una martingala cuadrada integrable continua M, entonces M_t^2 es una submartingala, pero no una martingala si no es constante en el tiempo. Veremos que M_t^2 difiere de una martingala por un único proceso creciente únicamente determinado continuo A_t con $A_0 = 0$, llamado la variación cuadrática de M.

Proposición 3.3.15. *Sea M_t una martingala cuadrada integrable. Entonces:*

$$E[(M_t - M_s)^2 | F_a] = E[M_t^2 - M_s^2 | F_a], \quad 0 \leq a \leq s \leq t$$

Prueba: Sea $0 \leq a \leq s \leq t$, entonces $E[M_s(M_t - M_s)/F_s] = M_s E[M_t - M_s/F_s] = 0$, condicionando en F_a, obtenemos $E[M_s(M_t - M_s)/F_a] = 0$, y observando que $(M_t^2 - M_s^2) - (M_t - M_s)^2 = 2M_s(M_t - M_s)$ y terminamos tomando la esperanza condicional.□

Sea $0 \leq a \leq b \leq s \leq t$, mostramos que $E[M_a(M_t - M_s)/F_a] = 0$ integrando sobre Ω obtenemos $E[M_a(M_t - M_s)] = 0$, i.e, $M_a \perp M_t - M_s$ en el espacio de Hilbert $L^2(P)$ de esto $M_b - M_a \perp M_t - M_s$.

Proposición 3.3.16. *Asumiendo que la martingala local continua M es también un proceso de variación acotada. Entonces M es constante (tiempo), es decir, $M_t = M_0$, P-as, para cada $t \geq 0$.*

Prueba: Reemplazando M_t con la martingala local continua $M_t - M_0$ asumiendo $M_0 = 0$ se prueba que $M_t = 0$, P-as, para cada $t \geq 0$. Sea $V_t(w)$ la variación total de la trayectoria $s \to M_s(w)$ en $[0,t]$, la función creciente $t \to V_t(w)$ es continua siempre que la trayectoria $t \to M_t(w)$ es continua y de variación acotada en intervalos finitos y por $p - ae.\ w \in \Omega$,
(A) Asumimos M una martingala satisfaciendo $|V_t| \leq K$, P-as, para todo $t \geq 0$ y alguna constante K. De $M_0 = 0$ tenemos $|M_t| = |M_t - M_0| \leq V_t \leq K$, P-as, $\forall t \geq 0$ Fijando $t > 0$ sea $\Delta = \{0 = t_0 < t_1 <, ..., < t_n = t\}$ una partición de $[0,t]$ sea $\|\Delta\| = \text{máx}_{j<n} |t_{j+1} - t_j|$ y integrando sobre Ω:

$$E[M_t^2] = E[M_t^2 - M_0^2] = E[\sum_{j=1}^{n}(M_{t_j}^2 - M_{t_{j-1}}^2)] = E[\sum_{j=1}^{n}(M_{t_j} - M_{t_{j-1}})^2]$$

$$\leq E[V_t. \sup_{1\leq j\leq n} |M_{t_j} - M_{t_{j-1}}|]$$

con $\|\Delta\| \to 0$, entonces $V_t \sup_j |M_{t_j} - M_{t_{j-1}}|$ converge a cero en todo $w \in \Omega$ para el cual $V_t(w) < \infty$ y la trayectoria $s \in [0,t] \to M_t(w)$ es continua en el intervalo $[0,t]$ y así mismo P-ae, $w \in \Omega$, este integrando es uniformemente acotado por $2K^2$, por el teorema de convergencia dominada:

$$E[V_t \sup_j |M_{t_j} - M_{t_{j-1}}|] \to 0$$

así $E(M_t^2) = 0$, y $M_t = 0$ P-as, como se quería.
(B) Sea ahora M_t martingala local continua, para cada $n \geq 1$,

$$T_n = \text{ínf}\{t \geq 0/V_t > n\} \quad (= \infty \quad en \quad [V_t \leq n, \forall t \geq 0])$$

T_n es un tiempo opcional, la finitud de V_t implica $T_n \uparrow \infty$, P-as, $n \uparrow \infty$, fijando $n \geq 1$, el proceso $M_t^{T_n}$ es una martingala local con $M_0^{T_n} = 0$ y es un proceso de variación $V_t(M^{T_n})$, y satisface:

$$|M_t^{T_n}| \leq |V_t(M^{T_n})| \leq n$$

Así $M_t^{T_n}$es una martingala local acotada uniformemente y así mismo una martingala y se sigue de (A) que $M_t^{T_n} = 0$, P-as, $\forall t \geq 0$, $n \uparrow \infty$ así $M_t = 0$, P-as, $\forall t \geq 0$.□

Corolario 3.3.4. *Sea X_t cualquier proceso. Entonces hay al menos un proceso de variación acotada continua A_t tal que $A_0 = 0$ y la diferencia $X_t - A_t$ es una martingala local.*

Prueba: Si A_t, B_t son procesos de variación acotada continua tal que $A_0 = B_0 = 0$ y ambos $X_t - A_t$ y $X_t - B_t$ son martingalas locales, entonces $B_t - A_t$ es una martingala local continua el cual es también un proceso de variación acotada por lo anterior así $B_t - A_t = B_0 - A_0 = 0$, P-as, para cada $t \geq 0$. □

3.3.5. El proceso de variación cuadrática

Sea X un proceso y $0 \leq a < b$, para una partición $\triangle = \{a = t_0 < ... < t_n = b\}$ del intervalo $[a, b]$ sea $\|\triangle\| = \max_{j<n} |t_{j+1} - t_j|$ definimos la variable aleatoria:

$$Q_{\triangle}(X) = \sum_{j=1}^{n} (X_{t_j} - X_{t_{j-1}})^2 \qquad (1)$$

Más generalmente, si $\triangle = \{0 = t_0 < ... < t_n < ...\}$ cualquier partición del intervalo $[0, \infty[$, y definimos el proceso $Q_t^{\triangle}(X)$:

$$Q_t^{\triangle}(X) = (X_t - X_{t_k})^2 + \sum_{j=1}^{k(t)} (X_{t_j} - X_{t_{j-1}})^2, \qquad t \geq 0$$

Donde el índice es definido por $k(t) = \max\{k \geq 0 | t_k \leq t\}$, por lo tanto:

$$Q_t^{\triangle}(X) = Q_{\triangle(t)}(X)$$

Donde $\triangle(t)$ es la partición $\triangle(t) = (\triangle \cup \{t\}) \cap [0, t]$ del intervalo $[0, t]$. Si la partición $\triangle$ contiene el punto t, entonces se simplificará lo anterior como:

$$Q_t^{\triangle}(X) = \sum_{j=1}^{n} (X_{t_j} - X_{t_{j-1}})^2$$

Donde el índice n es definido por $t = t_n$. Este es el caso en particular si $\triangle$ es una partición del intervalo $[0, t]$, el cual puede ser considerado como una partición de $[0, \infty[$ conteniendo el punto t. En este caso $Q_t^{\triangle}(X) = Q_{\triangle}(X)$.

Teorema 3.3.17. Sea M una martingala continua uniformemente acotada. Entonces existe un único proceso de variación acotada continua A tal que $A_0 = 0$ y la diferencia $M_t^2 - A_t$ es una martingala. El proceso A es llamado la variación cuadrática de M denotada como $\langle M \rangle$. La variación cuadrática $\langle M \rangle$ es un proceso adaptado creciente y tendremos que $\langle M \rangle_t \in L^2(P)$ y :

$$\langle M \rangle_t = \lim_{\|\triangle\| \to 0} Q_{\triangle}(M) \in L^2(P), \quad para \quad cada \;\; t \geq 0$$

Donde el límite es tomado sobre todas las particiones $\triangle$ del intervalo $[0, t]$.

Prueba:

La unicidad del proceso A ya fue vista anteriormente, así si $M_t^2 - A_t$ es una martingala adaptada, el proceso $A_t = M_t^2 - (M_t^2 - A_t)$ es también adaptada. Escogemos un $K < \infty$ constante tal que:

$$|M_t| \leq K, \quad P - as \quad \forall t \geq 0$$

(a) Motivación.-
Fijando $t > 0$ y considerando cualquier partición $\Delta = \{0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = t\}$ de $[0, t]$. Si el proceso $M_t^2 - A_t$ es una martingala, un reordenamiento de términos en la ecuación martingala muestra que:

$$E[A_r - A_s/F_s] = E[M_r^2 - M_s^2/F_s] = E[(M_r - M_s)^2/F_s]$$

Asumiendo el incremento $r - s$ pequeño. La continuidad del proceso A, M y la continuidad derecha de la filtración (F_t), el incremento $A_r - A_s$ y $M_r - M_s$ son casi F_s-*medibles* y con la esperanza condicional resulta una igualdad aproximada.

$$A_r - A_s \approx (M_r - M_s)^2.$$

Así, si $||\Delta||$ es pequeño, entonces:

$$A_{t_j} - A_{t_{j-1}} \approx (M_{t_j} - M_{t_{j-1}})^2$$

asumiendo sobre $j = 1, 2, 3, ...n$, $A_0 = 0$ y con la propiedad telescópica tendremos:

$$A_t \approx \sum_{j=1}^{n} (M_{t_j} - M_{t_{j-1}})^2 = Q_\Delta(M)$$

$||\Delta|| \to 0$.

(b) Sea $\Delta = \{0 = t_0 < t_1 < t_2 ... < t_n < ...\}$ cualquier partición del intervalo $[0, \infty[$ el cual tiene puntos finitos en cada intervalo finito. Entonces el proceso $M_t^2 - Q_t^\Delta(M)$ es una martingala continua.
Claramente el proceso $H_t = M_t^2 - Q_t^\Delta(M)$ es continua y satisface que $H_t \in L^1(P)$ para todo $t \geq 0$, reordenando se tendrá:

$$E[Q_t^\Delta(M) - Q_s^\Delta(M)/F_s] = E[M_t^2 - M_s^2/F_s]$$

para todo $0 \leq s < t$, considerando a s, t y $m = k(s) = \text{máx}\{k/t_k < s\}$ y $n = k(t)$, y tendremos $m \leq n$,

$$Q_t^\Delta(M) = (M_t - M_{t_n})^2 + \sum_{j=1}^{n} (M_{t_j} - M_{t_{j-1}})^2,$$

$$Q_s^\Delta(M) = (M_s - M_{t_m})^2 + \sum_{j=1}^{m} (M_{t_j} - M_{t_{j-1}})^2,$$

$$Q_t^{\Delta}(M) - Q_s^{\Delta}(M) = -(M_s - M_{t_m})^2 + \sum_{j=m+1}^{n} (M_{t_j} - M_{t_{j-1}})^2 + (M_t - M_{t_n})^2,$$

y con la propiedad telescópica, se tendrá:

$$E[Q_t^{\Delta}(M) - Q_s^{\Delta}(M)/F_s] = E_{F_s}[(M_{t_m}^2 - M_s^2) + \sum_{j=m+1}^{n} (M_{t_j}^2 - M_{t_{j-1}}^2) + (M_t^2 - M_{t_n}^2)] = E[M_t^2 - M_s^2/F_s].$$

como se deseaba.

(c) Para $r > 0$ el límite:

$$\overline{A_r} = \lim_{\|\Delta\| \to 0} Q_r^{\Delta}(M) \quad \textit{existe en} \quad L^2(P),$$

donde una partición Δ de $[0, r]$ puede ser vista como una partición de $[0, \infty[$ conteniendo el punto r. Consecuentemente:

$$Q_r^{\Delta}(X) = Q_{\Delta}(X) = \sum_{j=1}^{n} (X_{t_j} - X_{t_{j-1}})^2,$$

donde $t_n = r$. Fijando $r > 0$, por la completitud de $L^2(P)$ es suficiente mostrar que:

$$\|Q_r^{\Delta_1}(M) - Q_r^{\Delta_2}(M)\|_{L^2} \to 0, \quad \textit{cuando} \quad \|\Delta_1\| + \|\Delta_2\| \to 0$$

Sea ahora Δ_1, Δ_2 cualquiera de las particiones de $[0, r]$ y sea $\Delta = \{0 = s_0 < \ldots < s_m = r\}$ denota el común refinamiento. De acuerdo a (b), el proceso $M_t^2 - M_t^{\Delta_1}(M)$ y $M_t^2 - Q_t^{\Delta_2}(M)$ son ambas martingalas. Tomando la diferencia vemos que el proceso:

$$X_t = Q_t^{\Delta_1}(M) - Q_t^{\Delta_2}(M)$$

es una martingala, también el cual es uniformemente acotada y continua. Aplicando (b) $X_t^2 - Q_t^{\Delta}(X)$ es una martingala y tiene una media constante, puesto que $X_0 = 0$, el proceso termina en cero $(t = 0)$ y la media constante es cero, así:

$$\|Q_r^{\Delta_1}(M) - Q_r^{\Delta_2}(M)\|_{L^2}^2 = E(X_r^2) = E(Q_r^{\Delta}) \quad (9)$$

y sea $Y_t = Q_t^{\Delta_1}(M)$ y $Z_t = Q_t^{\Delta_2}(M)$ entonces $X_t = Y_t - Z_t$ y así $Q_r^{\Delta}(X)$ es una suma de la forma: $[(Y_{s_j} - Y_{s_{j-1}}) + (Z_{s_j} - Z_{s_{j-1}})]^2$, usando $(a - b)^2 \leq 2(a^2 - b^2)$ en cada sumando vemos que $Q_r^{\Delta}(X) \leq 2[Q_r^{\Delta}(Y) + Q_r^{\Delta}(Z)]$ y por simetría es suficiente mostrar que :

$$E(Q_r^{\Delta}(Y)) \to 0 \quad \textit{cuando} \quad \|\Delta_1\| + \|\Delta_2\| \to 0$$

note que:

$$Q_r^{\Delta}(Y) = \sum_{k=1}^{m} (Y_{s_k} - Y_{s_{k-1}})^2$$

y denota los puntos de la partición Δ_1 por t_j con $t_n = r$. Al dar un estimado para $Q_r^{\Delta}(Y)$, $k \leq m$ y la elección del índice j, tal que $t_j \leq s_{k-1} < s_k \leq t_{j+1}$. Esto es posible puesto que Δ refina Δ_1. De la definición anterior se sigue:

$$Y_{s_k} - Y_{s_{k-1}} = Q_{s_k}^{\Delta_1}(M) - Q_{s_{k-1}}^{\Delta_1}(M) = (M_{s_k} - M_{t_j})^2 - (M_{s_{k-1}} - M_{t_j})^2$$

$$= (M_{s_k} - M_{s_{k-1}})(M_{s_k} + M_{s_{k-1}} - 2M_{t_j})$$

y, además:

$$(Y_{s_k} - Y_{s_{k-1}})^2 \leq C(\| \Delta_1 \|)(M_{s_k} - M_{s_{k-1}})^2$$

donde, para $\delta > 0$:

$$C(\delta) = \sup |M_s + M_q - 2M_t|^2$$

y el supremo es tomado sobre todos los números $s, q, t \in [0, r]$ tal que $t \leq q < s$ y $s - t < \delta$. De la continuidad de M podemos restringir nosotros mismos a números racionales t, q, s sigue que $C(\delta)$ es medible y variable aleatoria no negativa.
Observamos que $|M| \leq K$ así $|C(\delta)| \leq 16K^2$. Si $w \in \Omega$ es tal que la trayectoria $t \in [0, r] \to M_t(w)$ es continua y uniformemente continua, tendremos:

$$C(\delta)(w) \to 0, \quad \textit{cuando} \quad \delta \downarrow 0 \quad (12)$$

sumando la desigualdad en lo anterior sobre todos los intervalos de Δ obtendremos:

$$Q_r^\Delta(Y) \leq C(\|\Delta_1\|)Q_r^\Delta(M)$$

La desigualdad de Cauchy-Schwartz ahora implica que:

$$E(Q_r^\Delta(Y) \leq E[C^2(\|\Delta_1\|)]^{\frac{1}{2}} E[Q_r^\Delta(M)^2]^{\frac{1}{2}} \qquad (13)$$

cuando $\|\Delta_1\| \to 0$ tendremos $E[C^2(\|\Delta_1\|)] \to 0$, por acotación, casi seguramente la convergencia del integrando. Al verificar lo anterior es suficiente mostrar que el segundo factor en la derecha de la ecuación anterior permanece acotada por la constante independiente de Δ_1 y Δ, escribiremos: $Q_t^\Delta = Q_t^\Delta(M)$, siendo $r = s_m$ tendremos:

$$Q_r^\Delta = \sum_{k=1}^{m} (M_{s_k} - M_{s_{k-1}})^2$$

y también se puede escribir:

$$\sum_{1 \leq k < j \leq m} (M_{s_k} - M_{s_{k-1}})^2 (M_{s_j} - M_{s_{j-1}})^2$$

$$= \sum_{k=1}^{m} (M_{s_k} - M_{s_{k-1}})^2 \sum_{j=k+1}^{m} (M_{s_j} - M_{s_{j-1}})^2$$

$$= \sum_{k=1}^{m} (M_{s_k} - M_{s_{k-1}})^2 (Q_r^\Delta - Q_{s_k}^\Delta) = \sum_{k=1}^{m} (Q_{s_k}^\Delta - Q_{s_{k-1}}^\Delta)(Q_r^\Delta - Q_{s_k}^\Delta)$$

se sigue que:

$$Q_r^\Delta(M)^2 = 2 \sum_{k=1}^{m} (Q_{s_k}^\Delta - Q_{s_{k-1}}^\Delta)(Q_r^\Delta - Q_{s_k}^\Delta) + \sum_{k=1}^{m} (M_{s_k} - M_{s_{k-1}})^4$$

tomando esperanza, de la propiedad martingala de $M_t^2 - Q_t^\Delta(M)$:

$$E[Q_r^\Delta - Q_{s_k}^\Delta / F_{s_k}] = E[M_r^2 - M_{s_k}^2]/F_{s_k}] = E[(M_r - M_{s_k})^2 / F_{s_k}]$$

Puesto que el factor $Q_{s_k}^\Delta - Q_{s_{k-1}}^\Delta$ es acotado F_{s_k}-*medible*

$$E[(Q_{s_k}^\Delta - Q_{s_{k-1}}^\Delta)(Q_r^\Delta - Q_{s_k}^\Delta)/F_{s_k}] = E[(Q_{s_k}^\Delta - Q_{s_{k-1}}^\Delta)(M_r - M_{s_k})^2 / F_{s_k}]$$

Integrando sobre Ω y observando que $(M_t - M_s)^2 \leq 4K^2$

$$\begin{aligned} E[(Q_{s_k}^\Delta - Q_{s_{k-1}}^\Delta)(Q_r^\Delta - Q_{s_k}^\Delta))] &= E[(Q_{s_k}^\Delta - Q_{s_{k-1}}^\Delta)(M_r - M_{s_k})^2] \\ &\leq E[4K^2(Q_{s_k}^\Delta - Q_{s_{k-1}}^\Delta)], \end{aligned}$$

donde usamos que $Q_{s_k}^\Delta - Q_{s_{k-1}}^\Delta \geq 0$, así tomando esperanza y la propiedad telescópica se tendrá: $Q_{s_k}^\Delta - Q_{s_{k-1}}^\Delta$ a el valor $Q_r^\Delta - Q_0^\Delta = Q_r^\Delta$ y

$$E[Q_r^\Delta(M)^2] \leq E[8K^2 Q_r^\Delta + \sum_{k=1}^{m}(M_{s_k} - M_{s_{k-1}})^4]$$

usando que:

$$(M_{s_k} - M_{s_{k-1}})^4 \leq 4K^2(M_{s_k} - M_{s_{k-1}})^2$$

se convierte:

$$E[Q_r^\Delta(M)^2] \leq E[8K^2 Q_r^\Delta + 4K^2 Q_r^\Delta] = 12K^2 E[Q_r^\Delta(M)]$$

Puesto que el proceso $M_t^2 - Q_t^\Delta(M)$ es una martingala y así tiene una media constante, tendremos que $E[Q_r^\Delta(M)] = E(M_r^2 - M_0^2) \leq E(M_r^2) \leq K^2$, esto sigue que $E[Q_r^\Delta(M)^2] \leq 12K^4$, como deseábamos, esto prueba lo anterior.
Tendremos la existencia del límite $\overline{A}_t = \lim_{\|\Delta\| \to 0} Q_t^\Delta(M) \in L^2(P)$, para cada $t \geq 0$, pero esto no provee todavía al proceso $t \to \overline{A}_t$, las variables aleatorias A_t que puedan ser escogidas consistentemente con la clase de equivalencia $\overline{A}_t$ en L^2 que el proceso resultante $t \to A_t$ tiene las propiedades deseadas, y el proceso A es construido por trayectorias.
Fijando $r > 0$ y Δ_n una sucesión de particiones de $[0, r]$ tal que $\Delta_n \subseteq \Delta_{n+1}$ y $\cup_n \Delta_n$ es denso en $[0, r]$. Necesariamente entonces $\|\Delta_n\| \to 0$, cuando $n \uparrow \infty$, escribimos $Q_t^{\Delta_n} = Q_t^{\Delta_n}(M)$. Entonces la sucesión $Q_r^{\Delta_n}$ converge en $L^2(P)$ y, reemplazando Δ_n con una subsucesión idónea si es necesario asumimos que:

$$\sum_n \|Q_r^{\Delta_{n+1}} - Q_r^{\Delta_n}\|_{L^2} < \infty$$

fijando $n \geq 1$, observamos que $\|f\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^2}$ y aplicando la desigualdad *Doobls* $- L^2$ con $(p = 2)$ a la martingala $Q_t^{\Delta_{n+1}} - Q_t^{\Delta_n}$, obtenemos:

$$E[\sum_n \sup_{t \leq r} |Q_t^{\Delta_{n+1}} - Q_t^{\Delta_n}|] \leq \sum_n \| \sup_{t \leq r} |Q_t^{\Delta_{n+1}} - Q_t^{\Delta_n}| \|_{L^2}$$

$$\leq 2\sum_n \|Q_r^{\Delta_{n+1}} - Q_r^{\Delta_n}\|_{L^2} < \infty$$

y $\sum_n \sup_{t\leq r} |Q_t^{\Delta_{n+1}} - Q_t^{\Delta_n}| < \infty$, P-as.
Sea $w \in \Omega$ donde la suma es finita, cuando $n \uparrow \infty$ la trayectoria continua $t \in [0, r] \to Q_t^{\Delta_n}(w)$ converge uniformemente a alguna trayectoria $t \in [0, r] \to A_t(w)$, el cual es continua. Así, en particular $Q_t^{\Delta_n} \to A_t$, P-as, para cada $t \in [0, r]$, para tal t:

$$E(M_r^2 - Q_r^{\Delta_n}/F_t) = M_t^2 - Q_t^{\Delta_n}, \quad \forall n \geq 1 \quad n \uparrow \infty$$

En la izquierda $Q_r^{\Delta_n} \to A_r$, P-as, puesto que la sucesión $Q_r^{\Delta_n}$ converge en $L^2(P)$, de esto se sigue que $A_r \in L^2(P)$ y $Q_r^{\Delta_n} \to A_r$ en $L^2(P)$ y esta en $L^1(P)$, así

$$E(M_r^2 - Q_r^{\Delta_n}/F_t) \to E(M_r^2 - A_r/F_t)$$

en $L^1(P)$ y P-as, si Δ_n es reemplazado con una subsucesión idónea, en la derecha $Q_t^{\Delta_n} \to A_t$, P-as, así de lo anterior implica:

$$E(M_r^2 - A_r/F_r) = M_t^2 - A_t \quad , P - as.$$

Así mismo el proceso $M_t^2 - A_t$ es una martingala en el intervalo $[0, r]$. Finalmente, establecemos la naturaleza creciente de la trayectoria $t \in [0, r] \to A_t(w)$. El proceso Q_t^{Δ} no es creciente en el último término, sin embargo, si $s, t \in \Delta$ y $s < t$, entonces:

$$Q_s^{\Delta} \leq Q_t^{\Delta}$$

Si ahora $s, t \in D := \cup_n \Delta_n \subseteq [0, r]$ con $s < t$, entonces existe un índice n_0 tal que $s, t \in \Delta_n$, para todo $n \geq n_0$, para tal n tendremos $Q_s^{\Delta_n} \leq Q_t^{\Delta_n}$ y $n \uparrow \infty$, $A_s \leq A_t$, P-as. Aquí el conjunto excepcional puede depender en s y t puesto que el conjunto D es contable, de esto se sigue que:

$$A_s \leq A_t,$$

para todo $s, t \in D$, con $s < t$, P-as, es decir, P-ae, toda trayectoria $t \in [0, r] \to A_t(w)$ es creciente en el subconjunto $D \subseteq [0, r]$, por continuidad y densidad de D es creciente en el intervalo $[0, r]$, y así fijando $t \in [0, r]$, $B = L^2 - \text{lím}_{\|\Delta\| \to 0} Q_\Delta(M)$ existe, si este límite es tomado sobre todas las particiones Δ de $[0, t]$. Para la construcción, $Q_t^{\Delta_n} \to A_t$, P-as, donde $Q_t^{\Delta_n} = Q_{\Delta_n(t)}(M)$, donde $\Delta_n(t) = (\Delta_n \cup \{t\}) \cap [0, t])$ y es una sucesión de particiones de $[0, t]$ con $\| \Delta_n(t) \| \to 0$. De esto sigue que $Q_t^{\Delta_n} \to B$ en L^2. Consecuentemente:

$$A_t = B = L^2 - \lim_{\|\Delta\| \to 0} Q_\Delta(M), \quad P - as$$

Esto nos da el proceso deseado A_t en cada intervalo finito $[0, r]$. De la unicidad en cada intervalo, se puede extender A_t a un único proceso definido en el intervalo $[0, \infty]$ con las propiedades deseadas. □
Esto es extendido a martingala local continua.

Proposición 3.3.18. *Sea (M_t) una martingala uniformemente acotada continua y T un tiempo opcional. Entonces:*

(a) $E[\langle M\rangle_t] = E[(M_t - M_0)^2]$, *para todo* $t \geq 0$.

(b) M^T *es una martingala uniformemente acotada continua y* $\langle M^T\rangle = \langle M\rangle^T$.

Prueba: (a) la martingala $M_t^2 - \langle M\rangle_t$ tiene media constante, así $E(M_t^2 - \langle M\rangle_t) = E[M_0^2 - \langle M\rangle_0] = E[M_0^2]$ y se sigue de lo anterior que $E[\langle M\rangle_t] = E[M_t^2 - M_0^2] = E[(M_t - M_0)^2]$
(b) M^T es (F_t)-martingala uniformemente acotada, así la variación cuadrática $\langle M^T\rangle$ es definida y es el proceso de variación acotada único continuo A tal que $(M^T)^2 - A$ es una martingala parada, $M^2 - \langle M\rangle$ en tiempo T, sea $(M^T)^2 - \langle M\rangle^T$ y puesto que $\langle M\rangle^T$ es variación acotada continuo, se sigue que $\langle M\rangle^T = A = \langle M^T\rangle$. □

Teorema 3.3.19. *Sea X una martingala local continua. Entonces existe un único proceso de variación acotada continua A tal que $A_0 = 0$ y $X^2 - A$ es una martingala local. El proceso A es llamado la variación cuadrática de X denotada como $\langle X\rangle$. La variación cuadrática $\langle X\rangle$ es un proceso adaptado creciente y será de la forma:*

$$\langle X\rangle_t = \lim_{\|\Delta\|\to 0} Q_\Delta(X) \quad \textit{en probabilidad, para} \quad \textit{cada } t \geq 0$$

Donde el límite es tomado sobre todas las particiones Δ del intervalo $[0, t]$.

Prueba: libro[5], pág. 82.

Proposición 3.3.20. *Sea X una martingala local continua y T un tiempo opcional. entonces:*

(a) $\langle X\rangle$ *es un proceso creciente continuo con* $\langle X\rangle_0 = 0$, *especialmente* $\langle X\rangle \geq 0$.

(b) $\langle X^T\rangle = \langle X\rangle^T$.

(c) $\langle X\rangle = 0$ *si y solo si X es constante (en el tiempo).*

(d) Si $A \in F_0$ *entonces* $\langle 1_A X\rangle = 1_A\langle X\rangle$.

Prueba: libro[5], pág. 83.

Definido $\langle X\rangle$, X^2 es otra vez una martingala local si y solo si $\langle X\rangle$, así X^2 es otra vez una martingala local sii X es constante. Introducimos la notación $\langle X\rangle_a^b = \langle X\rangle_b - \langle X\rangle_a$, siempre que $a < b$ se sigue que:

$$\langle X\rangle_a^b = \lim_{\|\Delta\|\to 0} Q_\Delta(X) \quad \textit{en probabilidad,}$$

donde el límite es tomado sobre todas las particiones Δ de $[a, b]$.

Proposición 3.3.21. *Sea X una martingala local continua. Entonces, P-ae $w \in \Omega$ tenemos, que para todo $0 \leq a < b$, $\langle X\rangle_a^b(w) = 0 \Leftrightarrow X_t(w) = X_a(w)$, $\forall t \in [a, b]$.*

Prueba: libro[5], pág. 84.

Si M es una martingala acotada continua uniformemente (asimismo una martingala local), entonces la variación cuadrática de M, como una martingala de acuerdo con la variación cuadrática de M vista como una martingala local, de esto se sigue que:

$$\langle M\rangle_t = \lim_{\|\Delta\|\to 0} Q_t^{\Delta}(M)$$

donde la convergencia en L^2 implica la convergencia en probabilidad única.

Ejemplo 3.3.1. *Hallaremos la variación cuadrática de un movimiento Browniano uno dimensional $B = (B_t)$ con la filtración asociada (F_t), con las siguientes propiedades para el movimiento Browniano:*

(a) B es una martingala cuadrada integrable continua.

(b) El incremento $B_t - B_s$ es independiente de F_s, para todo $0 \leq s < t$.

(c) $B_t - B_s$ es una variable normal con media cero y varianza $t-s$, para todo $0 \leq s < t$.

Necesitamos que el proceso $B_t^2 - t$ sea una martingala, para ello necesitamos que $E[B_t^2 - t/F_s] = B_s^2 - s$, equivalentemente $E[B_t^2 - B_s^2/F_s] = t - s$, para todo $0 \leq s < t$, para s y t tendremos:

$$E[B_t^2 - B_s^2/F_s] = E[(B_t - B_s)^2/F_s] = E[(B_t - B_s)^2] = var(B_t - B_s) = t - s,$$

y $\langle B\rangle_t = t$, $\forall t \geq 0$, así fijando $t \geq 0$, y para cada $n \geq 1$, Δ_n una partición de $[0,t]$,

$$\Delta_n = \{0 < \frac{t}{n} <, ..., < \frac{(j-1)t}{n} < \frac{jt}{n} <, ..., < \frac{(n-1)t}{n} < t\},$$

mostramos que $Q_{\Delta_n}(B) \to t$ en $L^2(P)$, $n \uparrow \infty$, sea $H_j = B_{\frac{jt}{n}} - B_{\frac{(j-1)t}{n}}$ y $Q_{\Delta_n}(B) - t = \sum_{j=1}^n (H_j^2 - \frac{t}{n})$, y así:

$$E[(Q_{\Delta_n}(B) - t)^2] = E[(\sum_{j=1}^n (H_j^2 - \frac{t}{n}))^2] = E[(\sum_{j=1}^n Z_j)^2],$$

donde $Z_j = H_j^2 - \frac{t}{n}$, para todo $j = 1, 2, 3, ..., n$ donde los Z_j son independientes, de media cero y ortogonal en $L^2(P)$ así:

$$E[(Q_{\Delta_n}(B) - t)^2] = E[(\sum_{j=1}^n Z_j)^2] = \sum_{j=1}^n E(Z_j^2),$$

donde:

$$E(Z_j^2) = E[(H_j^2 - \frac{t}{n})^2] = E[H_j^4 - \frac{2t}{n}H_j^2 + \frac{t^2}{n^2}]$$

y el incremento $H_j = B_{\frac{jt}{n}} - B_{\frac{(j-1)t}{n}}$ tiene media cero, variable normal y varianza $\sigma^2 = \frac{t}{n}$, tal que el momento será $M_{H_j}(s) = \exp(\frac{\sigma^2 s^2}{2})$, donde claramente $E(H_j^2) = \sigma^2 = \frac{t}{n}$ y el *momento* $E(H_j^4)$ *puede ser fijado como la derivada* $M_{H_j}^{(4)}(0) = 3\sigma^4 = \frac{3t^2}{n^2}$ *consecuentemente:*

$$E(Z_j^2) = \frac{3t^2}{n^2} - \frac{2t}{n}\frac{t}{n} + \frac{t^2}{n^2} = \frac{2t^2}{n^2}$$

y

$$E[(Q_{\Delta_n}(B) - t)^2] = \sum_{j=1}^{n} E(Z_j^2) = \frac{2t^2}{n} \to 0, \quad n \uparrow \infty$$

y así $\langle B\rangle_t = \lim_{n\uparrow\infty} Q_{\Delta_n}(B) = t$ *p-as, para todo* $t \geq 0$ *es correcta* $(\langle B\rangle_t = t, \ \ P - as)$.
□

3.3.6. El proceso de covariación

Definición y propiedades elementales

Siendo X,Y martingalas locales continuas. Entonces el producto XY en general no es una martingala local. Sin embargo, usando la identidad de polarización:

$$XY = \frac{1}{4}[(X+Y)^2 - (X-Y)^2]$$

vemos que:

$$\langle X,Y\rangle := \frac{1}{4}[\langle X+Y\rangle - \langle X-Y\rangle]$$

Es un proceso de variación acotada continua tal que $\langle X,Y\rangle_0 = 0$ y el proceso $XY - \langle X,Y\rangle$ es una martingala local. Donde $\langle X,Y\rangle$ es el único proceso de variación acotada continua con esta propiedad. Sin embargo, el producto XY es una martingala local si y solo si $\langle X,Y\rangle = 0$. Note que $\langle X,X\rangle = \langle X\rangle$ es el proceso de variación cuadrática de X.

$$Q_\Delta(X,Y) = \sum_{j=1}^{n}(X_{t_j} - X_{t_{j-1}})(Y_{t_j} - Y_{t_{j-1}}),$$

para cada $t > 0$ y cada partición $\Delta = \{0 = t_0 < ... < t_n = t\}$ del intervalo $[0,t]$, la identidad de polarización muestra:

$$Q_\Delta(X,Y) = \frac{1}{4}[Q_\Delta(X+Y) - Q_\Delta(X-Y)],$$

se sigue que:

$$Q_\Delta(X,Y) \to \langle X,Y\rangle_t, \quad \textit{en probabilidad}, \quad \textit{con} \quad \| \Delta \| \to 0$$

El límite es tomado sobre todas las particiones Δ del intervalo $[0,t]$, si X, Y son martingalas uniformemente acotados, entonces la convergencia está también en $L^2(P)$. Esta representación del límite muestra que el proceso de covariación $\langle X,Y\rangle$ no es afectado si la filtración (F_t) es reemplazado con alguna otra filtración G_t con respecto

al cual X, Y son martingalas locales.
$\langle X, Y\rangle$ tiene muchas propiedades de un producto interno: Es simétrico, bilineal no negativo y satisface $\langle X\rangle = 0 \Rightarrow X = 0$, si restringimos a el proceso X con $X_0 = 0$.
La bilinealidad de $\langle X, Y\rangle$ es fácilmente establecida de la propiedad universal.
Puesto que el proceso $\alpha\langle X, Y\rangle$ es un proceso de variación acotada continuo terminando en cero y $\langle \alpha X, Y\rangle$ es un proceso de variación acotado continuo único A terminando en cero tal que $(\alpha X)Y - A$ es una martingala local. Esto sigue que $\alpha\langle X, Y\rangle = \langle \alpha X, Y\rangle$.

Proposición 3.3.22. *Sea X, Y martingalas locales continuas y T un tiempo opcional. Entonces:*

$$\langle X^T, Y^T\rangle = \langle X^T, Y\rangle = \langle X, Y\rangle^T$$

3.3.7. Integración estocástica con respecto a procesos de variación acotada continua

Siendo $(\Omega, F, P, (F_t))$ un espacio de probabilidad filtrado completo. Sea A un proceso de variación acotada continua, el cual es adaptado para la filtración (F_t), para cada $t \geq 0$, sea $|A|_t$ el cual denota la variación total de A en el intervalo $[0, t]$ definido en la trayectoria, es decir, $|A|_t(w)$ es la variación total de la trayectoria $s \in [0, t] \to A_s(w)$, para cada $w \in \Omega$.
Entonces $|A|_t$ es un proceso creciente continuo *F_t-adaptado* y lo mismo ocurre para el proceso $|A|_t - A_t$. Por lo tanto $A_t = |A|_t - (|A|_t - A_t)$ provee una descomposición canónica de A como una diferencia de procesos crecientes continuos *(F_t)-adaptado.*
Sea $w \in \Omega$ y si la trayectoria $A_w : s \in [0, \infty[\to A_s(w)$ es continua y de variación acotada en intervalos finitos, entonces esta induce una única medida signo de Borel μ_w^t en cada intervalo finito $I = [0, t]$ tal que $\mu_w^t([a, b]) = A_w(b) - A_w(a)$, para todo $[a, b] \subseteq I$.
A_w en general no induce una medida de Borel en todo $[0, \infty[$ pero satisface que $\mu_w^r = \mu_w^t|_{[0,r]}$, para todo $0 < r \leq t$.
Tratando de no depender de t denotaremos simplemente μ_w y escribiremos, $\mu_w(ds) = dA_s(w)$, es decir, tendremos:

$$\int_0^t f(s)dA_s(w) = \int_0^t f(s)\mu_w(ds),$$

siempre que la integral exista. Si la trayectoria A_w es *no-decreciente*, entonces induce una única medida de Borel μ_w en $[0, +\infty[$ satisfaciendo $\mu_w([a, b]) = A_w(b) - A_w(a)$, para todo intervalo finito $[a, b] \subseteq [0, +\infty[$.
Este es el caso particular para $P - ae$, $s \in [0, +\infty[\to |A|_s(w)$ del proceso de variación $|A|$. La correspondiente medida es la variación total $|\mu_w|$ de la medida μ_w. Nosotros usamos la notación $|\mu_w|(ds) = |dA_s|(w)$, y escribimos:

$$\int_0^t f(s)|dA_s|(w) = \int_0^t f(s)|\mu_w|(ds)$$

siempre que la integral exista.
Asumiendo ahora que H_s es un proceso con trayectorias medible $s \to H_s(w)$

satisfaciendo:

$$\int_0^t |H_s(w)||dA_s|(w) < \infty, \quad P - as, \quad para \ cada \ t \geq 0 \quad (0)$$

entonces, para cada $t \geq 0$, la integral estocástica $I_t = \int_0^t H_s dA_s$ es definida en la trayectoria como:

$$I_t(w) = \int_0^t H_s(w) dA_s(w),$$

para P-ae, $w \in \Omega$.

Sea B,B_t los σ-*algebras* de Borel en $[0, \infty[$, $[0, t]$ respectivamente. Llamaremos al proceso $H = H(s, w) : R_+ \times \Omega \to \overline{R}$ medible(conjuntamente), si es medible para el producto σ-*algebra* $B \times F$ en $R_+ \times \Omega$.

Llamamos a H progresivamente medible, si la restricción de H para $[0, t] \times \Omega$ es $B_t \times F_t$-*medible*, para todo $t \geq 0$.

Puesto que la medibilidad con respecto al producto σ-*algebra* implica la medibilidad de todas las secciones, de esto se sigue que un proceso medible H tiene trayectoria medible de Borel $s \to H_s(w)$ y que un proceso progresivamente medible H_t es adaptado para la filtración (F_t).

Claramente un proceso progresivamente medible H es medible.

Sea $L^1_{loc}(A)$, denotando la familia de todos los procesos H conjuntamente medibles, de valores reales satisfaciendo lo anterior(0).

Para $H \in L^1_{loc}(A)$, $t \geq 0$, la integral $I_t = \int_0^t H_s dA_s$ es una función definida para casi todo punto en Ω, P-as.

Proposición 3.3.23. *Sea $H \in L^1_{loc}(A)$, entonces $I_t = \int_0^t H_s dA_s$ es una variable aleatoria, es medible en Ω, para cada $t \geq 0$. Si H es progresivamente medible, entonces I_t es F_t-medible para cada $t \geq 0$, es decir, el proceso $I_t = \int_0^t H_s dA_s$ es F_t-adaptado.*

Prueba:

Primero vemos que I_t es medible. Siendo el proceso A escrito como una diferencia de procesos crecientes continuos F_t-*adaptado*, asumimos que A es asimismo creciente y la medida asociada μ_w positiva. Es suficiente la prueba para H no negativa, la linealidad y la usual aproximación de H como el límite creciente de una función simple $B \times F$-*medible* en $R_+ \times \Omega$ muestra que podemos restringir a el caso $H = 1_\Gamma$, donde $\Gamma \subseteq R_+ \times \Omega$ es un conjunto $B \times F$-*medible*. Aplicando el teorema, Π-λ-*teorema* muestra que podemos limitar a rectángulos medibles Γ de la forma $\Gamma = [a, b] \times F$, donde $0 \leq a < b < \infty$ y $F \subseteq F$, sin embargo, si $H = 1_{[a,b] \times F}$, muestra que $I_t = 1_F(A_{t \wedge b} - A_{t \wedge a})$, P-as, para todo $t \geq 0$, el cual es medible en Ω.

Asumiendo que H es progresivamente medible y fijando $t \geq 0$, desarrollando $I_t = \int_0^t H_s dA_s$ asiendo uso de la restricción $H \mid_{[0,t] \times \Omega}$ el cual es $B_t \times F_t$-*medible*. Así, podemos parar la filtración F_s y el proceso A_s en el tiempo t y reemplazar el σ-*algebra* F con F_t-*medible*.□

Asumiendo que $H \in L^1_{loc}(A)$, entonces el proceso $I_t = \int_0^t H_s dA_s$ es también denotado como $H \bullet A$, es decir:

$$(H \bullet A)_t = \int_0^t H_s dA_s, \quad t \geq 0$$

El proceso integral $H \bullet A$ es un proceso de variación acotado continuo.
Si H es progresivamente medible, entonces este proceso es también adaptado. La familia de todos los procesos conjuntamente medibles H satisfaciendo la condición fuerte.

$$\int_0^\infty |H_s(w)||dA_s|(w) < \infty \quad p-as \qquad (1)$$

es denotado por $L^1(A)$. Donde $L^1(A) \subseteq L^1_{loc}(A)$, para $H \in L^1(A)$ la integral estocástica $\int_0^\infty H_s dA_s$ es definido como el límite $\int_0^\infty H_s dA_s = \lim_{t\uparrow\infty} \int_0^t H_s(w)dA_s(w)$ por P-ae, $w \in \Omega$ la existencia del límite es asegurado por (1).
La variable aleatoria $\int_0^\infty H_s dA_s$ es también denotado $(H \bullet A)_\infty$
Para un tiempo opcional T definimos el intervalo estocástico $[[0,T]]$ como:

$$[[0,T]] = \{(t,w) \in R_+ \times \Omega / 0 \leq t \leq T(w)\} \subseteq R_+ \times \Omega.$$

Así $X = 1_{[[0,T]]}$ es un proceso estocástico satisfaciendo $X_t(w) = 1_{[[0,T(w)]]}(t)$. De esto se sigue que el proceso $Z = 1_{[[0,T]]}H$ es dado por $Z_t(w) = 1_{[[0,T(w)]]}(t)H_t(w)$.
Y acontinuación damos unas propiedades del proceso integral.

Proposición 3.3.24. *Sea A un proceso de variación acotada continuo, $H \in L^1_{loc}(A)$ y T un tiempo opcional, entonces:*

(a) $H \bullet A = \int_0^t H_s dA_s$ es un proceso de variación acotada continuo, si H es progresivamente medible, entonces el proceso $H \bullet A$ es adaptado.

(b) $H \bullet A$ es bilineal en H y A.

(c) $H \bullet (A^T) = (1_{[[0,T]]}H) \bullet A = (H \bullet A)^T$.

(d) $L^1_{loc}(A) = L^1_{loc}(A - A_0)$ y $H \bullet A = H \bullet (A - A_0)$, para todo $H \in L^1_{loc}(A)$.

(e) $A^T = A_0 + 1_{[[0,T]]} \bullet A$, especialmente $A = A_0 + 1 \bullet A_0$.

Prueba: (c) Notemos que la correspondiente medida de Lebesgue-Stieltjes, a la trayectoria $s \to A^T_s(w)$ no cambia en el intervalo $]T(w), \infty[\subseteq R$, consecuentemente el proceso $H \bullet A^T$ constante en este intervalo, lo mismo es obviamente igual de el proceso $(1_{[[0,T]]}H) \bullet A$ y $(H \bullet A)^T$, los tres procesos son correctos en el intervalo $[[0,T]]$.
(d) Donde la medida trayectoria probable Lebesgue-Stieltjes correspondiente a A y $A - A_0$ coincide.
(e) Para $t \geq 0$

$$(A_0 + 1_{[[0,T]]} \bullet A)_t(w) = A_0(w) + \int_0^t 1_{[0,T(w)]}(s)dA_s(w)$$

$$= A_0(w) + \int_0^{t\wedge T(w)} 1 dA_s(w) = A_{t\wedge T(w)}(w) \qquad \square$$

acontinuación se verá la siguiente propiedad asociativa:

Proposición 3.3.25. *Si $K \in L^1_{loc}(A)$ y $H \in L^1_{loc}(K \bullet A)$, entonces $HK \in L^1_{loc}(A)$ y tendremos $H \bullet (K \bullet A) = (HK) \bullet A$*

Prueba: La igualdad $(K \bullet A)_t(w) = \int_0^t K_s(w)dA_s(w)$ implica que:

$$d(K \bullet A)_t(w) = K_t(w)dA_t(w) \quad ...(2)$$

Para P-ae $w \in \Omega$, esta igualdad se interpreta como: para P-ae. $w \in \Omega$ la función $t \to K_t(w)$ es la derivada de Radon-Nikodin de la medida de Lebesgue-Stieltjes correspondiente a la trayectoria $t \to (K \bullet A)_t(w)$, así la misma relación $|d(K \bullet A)_t|(w) = |K_t(w)||dA_t|(w)$, por la variación total asociada. Así para $t \geq 0$, tenemos:

$$\int_0^t |H_sK_s| \mid dA_s \mid = \int_0^t \mid H_s \mid\mid d(K \bullet A)_s \mid < \infty, \qquad P-as,$$

Puesto que $H \in L^1_{loc}(K \bullet A)$, se sigue que $HK \in L^1_{loc}(A)$. Además, usando (2)

$$((HK) \bullet A)_t = \int_0^t H_sK_sdA_s = \int_0^t H_sd(K \bullet A)_s = (H \bullet (K \bullet A))_t, \qquad P-as \ \ en \ \Omega. \qquad \square$$

Considerando: si el integrador A es un proceso creciente continuo, y asimismo se le asocia una medida no negativa Lebesgue-Stieltjes, entonces la integral estocástica $\int_0^\infty H_s dA_s$ es definida para cada proceso conjuntamente medible $H \geq 0$ y es una variable aleatoria, es decir, es medible, $H \bullet A$ esta definida.

Desigualdad de Kunita-Watanabe

Sea M, N martingalas locales continuas y $t > 0$, los procesos de variación acotada continua $A = \langle M, N\rangle$, $\langle M\rangle$, $\langle N\rangle$ para $w \in \Omega$, sea μ_w, ν_w, σ_w las medidas de Lebesgue-Stieltjes:

$$\mu_w(ds) = d\langle M, N\rangle_s(w), \quad \nu_w(ds) = d\langle M\rangle_s(w) \quad y \quad \sigma_w(ds) = d\langle N\rangle_s(w)$$

en los subconjuntos de Borel de intervalos finitos $[0, t]$, y veremos la relación

de estas medidas μ_w, ν_w, σ_w, así la trayectoria $s \to A_s(w)$ es continua para todo A. $|\mu_w|$ denota la variación absoluta de la medida signo μ_w.

Proposición 3.3.26. *Para P-ae. $w \in \Omega$ tendremos:*

$$|\mu_w|([a,b]) \leq \nu_w([a,b])^{\frac{1}{2}}\sigma_w([a,b])^{\frac{1}{2}}$$

para todo subintervalo $[a,b] \subseteq [0,t]$.

Prueba: libro[5], pág. 95.

Proposición 3.3.27. *Para P-ae, $w \in \Omega$ tendremos:*

$$|\mu_w|(A) \leq \nu_w(A)^{\frac{1}{2}}\sigma_w(A)^{\frac{1}{2}}$$

para todo conjunto de Borel $A \subset [0,t]$.

Proposición 3.3.28. *Para P-ae $w \in \Omega$ tendremos:*

$$\int_0^t fgd|\mu_w| \leq \{\int_0^t f^2 d\nu_w\}^{\frac{1}{2}}\{\int_0^t g^2 d\sigma_w\}^{\frac{1}{2}}$$

para toda función medible no-negativa de Borel $f, g : [0,t] \to \overline{R}$.

Prueba: libro[5], pág. 96.

Proposición 3.3.29. Desigualdad de Kunita Watanabe
Sea M, N martingalas locales continuas U, V procesos $B \times F$-medibles y $t \geq 0$. Entonces:

$$\int_0^t | U_s V_s || d\langle M, N\rangle_s |\leq \{\int_0^t U_s^2 d\langle M\rangle_s\}^{\frac{1}{2}}\{\int_0^t V_s^2 d\langle N\rangle_s\}^{\frac{1}{2}} \ P-as.$$

Prueba: libro[5], pág. 97.

En un caso particular $U = V = 1$ muestra que:

$$|\langle M, N\rangle_t| \leq \langle M\rangle_t^{\frac{1}{2}}\langle N\rangle_t^{\frac{1}{2}}, \quad P-as, \quad \forall t \geq 0.$$

3.3.8. Semimartingalas

Siendo $(\Omega, F, P, (F_t))$ un espacio de probabilidad filtrado con la filtración (F_t) continua derecha y aumentada. La familia de martingalas locales continuas con respecto al espacio de probabilidad es un espacio vectorial real, pero no es cerrado respecto a la multiplicación. Si X, Y son martingalas locales continuas, entonces el cuadrado X^2 es una martingala local solo si X es una constante $(X_t = X_0)$. Sin embargo, el proceso X^2 y XY difieren de una martingala local solo por un proceso de variación acotada continua. Donde:

$$X^2 = M + A \quad y \quad XY = N + B,$$

donde $M = X^2 - \langle X\rangle$ y $N = XY - \langle X, Y\rangle$ son martingalas locales continuas y $A = \langle X\rangle$, $B = \langle X, Y\rangle$ son procesos de variación acotada continua, definimos entonces:

Definición 3.16. *Un proceso X es llamado semimartingala continua si esta se puede representar como una suma $X_t = M_t + A_t$, $\quad t \geq 0$, donde M es una martingala local continua y A es un proceso (adaptado) de variación acotada continua satisfaciendo $A_0 = 0$.*

Equivalentemente, X es una semimartingala continua si y solo si existe un proceso de variación acotada continua A tal que $X - A$ es una martingala local. La condición $A_0 = 0$ puede siempre ser satisfecha y reemplazar A con $A_t - A_0$.
La condición $A_0 = 0$ asegura que la descomposición $X = M + A$ es única. Donde A es un proceso de variación acotada continua único tal que $A_0 = 0$ y $X - A$ es una martingala local, y $M = X - A$. La descomposición $X = M + A$ es referida como la

semimartingala descomposición de X, el proceso M es llamado martingala local parte de X y el proceso A el compensador de X, denotado:

$$A = u_X$$

Notaremos que cada proceso de variación acotada continua A es una semimartingala con martingala local parte $M_t = A_0$ y el compensador $u_A(t) = A_t - A_0$, más precisamente, una semimartingala continua X es un proceso de variación acotada continua si y solo si el compensador satisface $u_X(t) = X_t - X_0$. Si $X_0 = 0$, entonces X es un proceso de variación acotada si y solo si $u_X = X$ y X es una martingala local si y solo si $u_X = 0$.
S denotará a la familia de todas las semimartingalas continuas con respecto a $(\Omega, F, P, (F_t))$. Es fácil ver que S es un espacio vectorial real. Pero no es claro aún que sea cerrado con la multiplicación.

Variación cuadrática y covariación

Si X, Y son semimartingalas continuas, definimos acontinuación el proceso de covariación $\langle X, Y\rangle$ como:

$$\langle X, Y\rangle = \langle M, N\rangle$$

Donde M y N son martigalas locales partes de X y de Y, respectivamente.
En particular, si A es un proceso de variación acotada continua, entonces A es una semimartingala continua, con martingala constante parte. De esto se sigue fácilmente que $\langle X, A\rangle = 0$, para cada semimartingala continua X.

Si X es una semimartingala continua y $X = M + A$ la descomposición semimartingala de X. Si T es cualquier tiempo opcional, X^T es una semimartingala continua con descomposición semimartingala $X^T = M^T + A^T$.

3.4. Proceso gaussiano

Sea (Ω, F, P) un espacio de probabilidad completo. Los elementos del espacio euclidiano R^k son vistos como vectores columnas y denotamos el producto en R^k como (t, x) o $t.x$, es decir:

$$(t, x) = t.x = \sum_{j=1}^{k} t_j.x_j$$

para todo vector $t = (t_1, t_2, ..., t_k)'$, $x = (x_1, x_2, ..., x_k)' \in R^k$ donde $(')$ denota la transposición.

Variable aleatoria gaussina

La distribución normal $N = N(\mu, \sigma^2)$ en R con media μ y varianza σ^2 es definido por:

$$N(dx) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\Pi}} \exp(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2})dx$$

la función característica (transformada de Fourier) de esta distribución es dada por:

$$N(t) = \int_R e^{itx}.N(dx) = \exp(i\mu t - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2), \quad t \in R.$$

En el caso de una distribución normal media cero $N = N(0, \sigma^2)$ esto se convierte en:

$$N(dx) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\Pi}} e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}} dx,$$

y

$$N(t) = e^{\frac{-\sigma^2 t^2}{2}}, \quad t \in R$$

Y la distribución normal estándar $N(0,1)$ satisface:

$$N(0,1)(dx) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} e^{\frac{-x^2}{2}} dx$$

y

$$N(0,1)(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} \quad t \in R$$

para $\sigma^2 = 0$ la distribución $N(0, \sigma^2) = N(0,0)$ no esta definida, pero es interpretada como $N(0,0) = \varepsilon_0$ concentrado en un punto (0).

Proposición 3.4.1. *Si $X_j : \Omega \to R$, $j = 1, 2, 3, ..., k$ son variables normales independientes, entonces el vector aleatorio $X = (X_1, X_2, ..., X_k)^k$ es Gaussiano.*

Proposición 3.4.2. *(Teorema de Correlación Normal). Sea $X_1, X_2, ...X_k : \Omega \to R$ variables aleatorias. Si la distribución conjunta de los X_j es gaussiana (i.e si $X = (X_1, X_2, ..., X_k)'$) es (una variable aleatoria gaussiana), entonces los X_j son independientes si y solo si ellos son descorrelacionados.*

3.5. Movimiento Browniano uno dimensional

En determinadas ocasiones una gota de agua puede quedar atrapada en un fragmento de roca ígnea durante la solidificación de esta. A principios del siglo XIX, el botánico escoses Robert Brown descubrió una gota de estas en un trozo de cuarzo. El agua pensó Brown, debía haber permanecido inaccesible durante siglos al polen y las esporas transportadas por el viento o la lluvia. Al enfocar dicha gota en un microscopio, observo trazas de minúsculas partículas suspendidas en la misma que oscilaban sin cesar con un movimiento completamente irregular. Este movimiento le resultaba familiar a Brown: había observado antes semejante tipo de oscilaciones en sus estudios de granos de polen en agua. El nuevo experimento, sin embargo, invalidaba la explicación que hasta entonces había propuesto: "la vitalidad se mantiene por largo tiempo después de la muerte". Brown concluyó con razón que la agitación de las partículas atrapadas en el interior del cuarzo debía ser un fenómeno físico y no biológico, pero no pudo llegar a mayores precisiones.
La explicación del movimiento Browniano hoy se encuentra muy bien asentada. Un grano de polen o de polvo suspendido en un fluido se ve sometido al bombardeo continuo de las moléculas de éste.
Una sola molécula difícilmente podría tener suficiente ímpetu para que su efecto sobre la partícula en suspensión lo recogiera el microscopio. Ahora bien, cuando muchas moléculas chocan con la partícula en la misma dirección, y simultáneamente, producen una deflexión observable de su trayectoria.
El movimiento Browniano es, por consiguiente, un efecto doblemente aleatorio: La trayectoria de la partícula en suspensión deviene imprevisible en razón de las fluctuaciones arbitrarias de la velocidad de las moléculas circundantes. Por otro lado, como el microscopio es esencialmente un filtro que solo pone de manifiesto los efectos de fluctuaciones de cierta magnitud en el entorno molecular local, el movimiento observado solo insinúa la complejidad de la trayectoria real. Si el poder de resolución del microscopio se incrementará en un factor de 10, 100,1000 se detectaría los efectos del bombardeo por grupos progresivamente menores de moléculas. A un mayor aumento, partes de la trayectoria de la partícula que inicialmente habían aparecido como rectas se observarían ahora dotadas de una estructura quebrada e irregular.

En fechas recientes, el estudio del movimiento Browniano ha conducido a la invención de importantes técnicas matemáticas para la investigación general de procesos probabilísticos. Dichas técnicas se han aplicado al control de "ruido", electromagnético, la evolución de ecosistemas, y el comportamiento de los precios de mercado.
El aparato matemático desarrollado para abordar las fluctuaciones reflejadas en el movimiento Browniano puede aplicarse, en líneas generales, a cualquier disciplina en la que se pretenda evaluar los efectos de una variable aleatoria. Estas magnitudes suelen presentarse en la descripción de muchos fenómenos naturales, por la razón principal: los valores de sus variables aleatorias no se conocen o son difíciles de determinar.
En economía se han utilizado tales técnicas para justificar el comportamiento de precios de mercado, tasas de inflación, los intereses. En este contexto, el precio de una partida es controlada en parte por opciones de comercio, que son contratos que dan

derechos a comprar o vender la partida en un periodo especificado, se espera que el precio de la partida fluctue según el número y el precio de las opciones negociadas; dicha fluctuación se superpone al precio que presumiblemente determinarían las puras fuerzas de mercado en ausencia de opciones. El objetivo es, como siempre, la predicción del precio futuro de la partida con la mayor fiabilidad posible. Una vez estimados los efectos de una fluctuación aleatoria, lo que se pretendería a continuación sería la posibilidad de controlarlos.

3.5.1. Movimiento Browniano comenzando en cero

Sea (Ω, F, P) un espacio de probabilidad completo y sea $B = (B_t)_{t \in I} : (\Omega, F, P) \to (R^I, B^I)$ es un proceso estocástico *real-valuado* con índice $I = [0, \infty[$. Entonces B es un movimiento Browniano (comenzando en cero) si:

(α) B es un proceso gaussiano.

(β) $B_0 = 0$ casi seguramente.

(γ) $E(B_t) = 0$ y $Cov(B_s, B_t) = E(B_s B_t) = s \wedge t$, para todo $s, t \geq 0$, y

(δ) Para cada $w \in \Omega$ la trayectoria $t \in [0, \infty[\to B_t(w) \in \overline{R}$ es continua.

La condición (β) es redundante. El movimiento Browniano puede ser caracterizado por un conjunto equivalente de condiciones:

Proposición 3.5.1. *El proceso* $B = (B_t)_{t \geq 0}$ *es un movimiento Browniano si y solo si:*

(a) $B_0 = 0$ *casi seguramente.*

(b) *Para* $0 \leq s < t$ *el incremento* $B_t - B_s$ *es normal con medida cero y varianza* $t - s$*;* $B_t - B_s \sim N(0, t - s)$.

(c) *Para todo* $0 \leq t_1 < t_2 <, ..., < t_n$ *las variables* B_{t_1},$B_{t_2} - B_{t_1}$...$B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ *son independientes.*

(d) *Para todo* $w \in \Omega$ *la trayectoria* $t \in [0, \infty[\to B_t(w) \in R$ *es continua.*

Prueba: Asumiendo B un movimiento Browniano comenzando en cero de (β) y (δ) se prueba (a) y (d), faltaría (c) y (b).
Sea $0 \leq s < t$ de acuerdo a γ, $E(B_s) = E(B_t) = 0$

$$E(B_s^2) = E(B_s B_s) = s \wedge s = s,$$

similarmente para $E(B_t^2) = t$ y, finalmente, $E(B_s B_t) = s$, sin embargo, (B_s, B_t) es una variable aleatoria gaussiana 2 dimensional y, además, es imagen lineal $B_t - B_s$ es una variable normal uno dimensional con media $E(B_t) - E(B_s) = 0$ y varianza:

$$var(B_t - B_s) = E[(B_t - B_s)^2]$$

$$= E[B_t^2 - 2B_t B_s + B_s^2] = t - s$$

así $B_t - B_s \sim N(0, t-s)$, muestra (b).
(c) Sea $0 \leq t_1 < t_2 < ... < t_n$, por (α) el vector aleatorio $(B_{t_1}, B_{t_2}, ..., B_{t_n})$ es gaussiano y asimismo $(B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, ..., B_{t_n} - B_{t_{n-1}})$ la independencia de las variables $B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, ..., B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$, si:

$$E[(B_{t_1})(B_{t_j} - B_{t_{j-1}})] = 0$$

y

$$E[(B_{t_j} - B_{t_{j-1}})(B_{t_k} - B_{t_{k-1}})] = 0,$$

para todo $j \neq k$, asumiendo $k < j$ y asi $t_{k-1} < t_k \leq t_{j-1} < t_j$, sigue que:

$$E[B_{t_1}(B_{t_j} - B_{t_{j-1}})] = E(B_{t_1}B_{t_j}) - E(B_{t_1}B_{t_{j-1}})$$

$$= t_1 \wedge t_j - t_1 \wedge t_{j-1} = t_1 - t_1 = 0$$

y similarmente:

$$E[(B_{t_j} - B_{t_{j-1}})(B_{t_k} - B_{t_{k-1}})] = t_k - t_k - t_{k-1} + t_{k-1} = 0$$

$\Leftarrow$ Asumiendo ahora (a)-(d) satisfechas, necesitamos verificar (α) y (δ), notemos primero que $B_t = B_t - B_0$ es una variable normal de acuerdo a (a) y (b), sea ahora $0 \leq t_1 < t_2 < ... < t_n$, de acuerdo a (b) y (c) $B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, ..., B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ son variables aleatorias independientes normales. Se sigue que $(B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, ..., B_{t_n} - B_{t_{n-1}})$ es un vector Gaussiano, y la imagen lineal $(B_{t_1}, B_{t_2}, ..., B_{t_n})$, así B es un proceso gaussiano, esto muestra α.
Para (γ) note que (a) y (b) con $s = 0$ implica que $B_t \sim N(0, t)$ y $E(B_t) = 0$ y $E(B_t^2) = t$, $0 \leq s < t$ entonces $E(B_sB_t) = E[B_s(B_t - B_s)] + E(B_s^2) = E(B_s)E(B_t - B_s) + s = s$ donde usamos la independencia de B_s y $B_t - B_s$ de acuerdo a c.$\square$
La condición (b) implica que el incremento $B_t - B_s$ son estacionarios, es decir, la distribución de este incremento depende de s, t a través de $t - s$.

Capítulo 4

INTEGRACIÓN ESTOCÁSTICA

En el siguiente capítulo estudiaremos la integral estocástica para dos procesos estocásticos llamados integrando (H_t) y integrador (M_t), la integral $(I_t = (H \bullet M)_t)$ será otro proceso, donde M_t es un proceso estocástico martingala local continua o simplemente martingala local continua.
Se comienza dando los espacios donde podrá ser posible esta integral $(I_t = (H \bullet M)_t)$, deduciendo la integral $(I_t = (H \bullet M)_t)$ de una propiedad en la integral estocástica para un proceso de variación acotada continua definida anteriormente.
Enseguida damos los espacios $L^2_{loc}(M)$, $\Lambda^2(M)$, Λ_b de procesos progresivamente medibles H con características diferentes, en donde la integral $(H \bullet M)_t$ este bien definida. De acuerdo a ello se establece la integral estocástica para semimartingala continua $(X = M + A)$ como $(H \bullet X = H \bullet M + H \bullet A)$ ya que la integral para martingala local continua (M) y proceso de variación acotada (A) fue definido anteriormente. Damos la integral general para procesos $\mathbb{R}^d$- *valuado* en este contexto damos la notación diferencial $dZ = HdX$ de los procesos Z, H. Luego, la integral de Itô para procesos $\mathbb{R}^d$-*valuado* y, finalmente, cambio localmente de medida y la martingala local exponencial.

4.1. Propiedades medibles de procesos estocásticos

Siendo $(\Omega, F, (F_t), P)$ un espacio de probabilidad filtrado completo, siendo la filtración
continua derecha y aumentada (F_t), con $F_\infty = \sigma(\cup_t F_t)$ y el conjunto $\Pi = [0, +\infty[\times \Omega$. Donde un proceso estocástico X será como una función $X : \Pi \to \overline{R}$ dado como $X(t, w) = X_t(w)$, para todo $t \in [0, +\infty[$ y $w \in \Omega$.

Asumiendo:

El σ-*algebra* F_0, el trivial (consiste de conjuntos nulos y su complemento).
En consecuencia la variable aleatoria X_0 es constante, P-casi seguramente, para todo proceso adaptado X_t.

4.1.1. Los $\sigma - algebras$ progresivos y predeicibles en Π

Sean B_t, B y $\overline{B}$ los σ-*algebras* de Borel en $[0,t]$, $[0,\infty[$ y $\overline{R}$, respectivamente, para cada $t \geq 0$. El σ-*algebra* producto $B \times F$ es el σ-*algebra* fuerte que es considerado en Π. Entonces el proceso X es llamado conjuntamente medible, si es medible con respecto a $B \times F$.

Al proceso X lo llamaremos progresivamente medible, si la restricción de X al conjunto $[0,t] \times \Omega$ es $B_t \times F_t$-*medible*, para cada $t \geq 0$.

Un subconjunto $\Delta \subseteq \Pi$ es llamado progresivo si 1_Δ es un proceso progresivamente medible. Esto es equivalente con el requerimiento $\Delta \cap ([0,t] \times \Omega) \in B_t \times F_t$, para todo $t \geq 0$.

La familia de todos los subconjuntos progresivos de Π, P_g forman un σ-*algebra*, el σ-*algebra* progresivo en Π.

Si $B \subseteq \overline{R}$ y $t \geq 0$, entonces $(X|_{[0,t]\times\Omega})^{-1}(B) = X^{-1}(B) \cap ([0,t] \times \Omega)$. De esto se sigue que X es progresivamente medible si y solo si X es medible con respecto al σ-*algebra* progresivo.

Cada proceso progresivamente medible X es (F_t)-*adaptado*, esto se sigue del hecho que medibilidad con respecto a un producto σ-*algebra* implica medibilidad de todas las secciones.

Proposición 4.1.1. *Sea X un proceso progresivamente medible y T un tiempo (F_t)-opcional. Entonces el proceso X^T es progresivamente medible y la variable aleatoria X_T es F_T-medible.*

Prueba: Fijando $t \geq 0$, las aplicaciones $(s,w) \in ([0,t] \times \Omega, B_t \times F_t) \rightarrow u = T(w) \wedge s \in ([0,t], B_t)$ y $(s,w) \in ([0,t] \times \Omega, B_t \times F_t) \rightarrow w \in (\Omega, F_t)$ son medibles, y además:

$$(s,w) \in ([0,t] \times \Omega, B_t \times F_t) \rightarrow (u,w) = (T(w) \wedge s, w) \in ([0,t] \times \Omega, B_t \times F_t)$$

La aplicación $(u,w) \in ([0,t] \times \Omega, B_t \times F_t) \rightarrow X(u,w) \in (\overline{R}, \overline{B})$ es medible por la progresividad medible de X y por la composición:

$$(s,w) \in ([0,t] \times \Omega, B_t \times F_t) \rightarrow X(T(w) \wedge s, w) = X_s^T(w) \in (\overline{R}, \overline{B})$$

Esto muestra que el proceso X^T es progresivamente medible y así mismo en particular adaptada, para ver que X_T es F_T-*medible*. $B \subseteq \overline{R}$ es un conjunto de Borel, mostramos que $[X_T \in B] \in F_T$, equivalentemente $[X_T \in B] \cap [T \leq t] \in F_t$, para todo $0 \leq t \leq \infty$. Si $t < \infty$, entonces $[X_T \in B] \cap [T \leq t] = [X_{t\wedge T} \in B] \cap [T \leq t] \in F_t$, como $[T \leq t] \in F_t$ y el proceso X^T es adaptado. Esto implica que:

$$[X_T \in B] \cap [T < \infty] \in F_\infty$$

y, además, puesto que $[X_T \in B] \cap [T = \infty] \in F_\infty$, por F_∞-*medibilidad* de X_∞, sigue que $[X_T \in B] \cap [T \leq t] \in F_t$, para $t = \infty$. □

Un conjunto R de la forma $R = \{0\} \times F$ donde $F \in F_0$, o $R =]s,t] \times F$, $0 \leq s < t < \infty$ y $F \in F_s$, es llamado rectángulo predicible. Entonces el σ-*algebra*

predicible $\mathcal{P}$ es el $\sigma - algebra$ generado por rectángulos predicibles en el conjunto Π. Los conjuntos en $\mathcal{P}$ son llamados conjuntos predicibles.
El proceso X es llamado predicible ($X : \Pi \to \overline{R}$), si es medible relativo al *σ-algebra* predicible $\mathcal{P}$.
Los procesos X son llamados predicibles simples si es una suma finita de procesos de la forma:

$$Z_0(w)1_{\{0\}}(t), Z(w)1_{]a,b]}(t) \qquad (0)$$

Donde $0 \leq a < b$, Z_0 es *F_0-medible* y Z es variable aleatoria *F_a-medible*. Si, por ejemplo, R es un rectángulo predicible, entonces $X = 1_R$ es un proceso predicible simple.

Proposición 4.1.2. .

(a) Un proceso predicible simple X es predicible.

(b) Un proceso continuo izquierdo (adaptado) X es predicible.

Prueba: La suma de funciones medibles es medible, es suficiente considerar X como en (0). Sea $X = Z(w)1_{]a,b]}(t)$, donde Z es *F_a-medible*. Si $B \subseteq \overline{R}$ en un conjunto de Borel con $0 \notin B$, entonces $[X \in B] = \{(t,w)/t \in]a,b] \;\; y \;\; Z(w) \in B\} =]a,b] \times Z^{-1}(B)$. Aquí $Z^{-1}(B) \in F_a$, y $[X \in B]$ es un rectángulo predicible. Así X es predicible, el caso $X = Z_0(w)1_{\{0\}}(t)$ es sostenido similarmente.
(b) Usando (a) es suficiente representar X como un límite puntual del proceso predicible simple X^N. Para cada $N \geq 1$ sea $D_N = \{\frac{k}{2^N}/k \geq 0\}$ y escribimos $r_N(t) = 0,\ si\ t = 0$ y

$$r_N(t) = \text{máx}\{r \in D_N/r < t\}, \quad si \quad t > 0$$

Así $r_N(t) = \frac{k}{2^N}$, para todo $t \in]\frac{k}{2^N}, \frac{k+1}{2^N}]$, puesto que $D_N \subseteq D_{N+1}$, se sigue que $r_N(t) \leq r_{N+1}(t)$, y es fácil ver que $r_N(t) \uparrow t$ cuando $N \uparrow \infty$

$$X_t^N(w) = 1_{[0,N]}(t)X_{r_N(t)}(w), \quad \forall t \in [0,\infty[, \quad w \in \Omega$$

como $r_N(t) \uparrow t$ la continuidad izquierda de X implica que $X^N \to X$ punto probable en cada punto $(t,w) \in \Pi$, cuando $N \uparrow \infty$, además:

$$X_t^N(w) = 1_{\{0\}}(t)X_0(w) + \sum_{k=0}^{N2^N-1} 1_{]\frac{k}{2^N},\frac{k+1}{2^N}]}(t)X_{k2^{-N}}(w)$$

puesto que X es adaptado sigue que X^N es predicible simple.□

Proposición 4.1.3. *Todo proceso predicible X es progresivamente medible.*

Prueba: Sea la familia χ de procesos progresivamente medibles no-negativos $X = X(t,w) : \Pi = [0,\infty[\times\Omega \to \mathbb{R}$ un *λ-cono* en (Π, P_g). χ contendrá a todos los procesos predicibles no-negativos. como los rectángulos predicibles R forman un *Π-sistema* generando el *σ-algebra* predicible, es suficiente ver que χ contiene al proceso $X = 1_R$, para cada rectángulo predicible R.
Sea $X = 1_R$, donde $R =]a,b] \times F$, con $F \in F_a$, si $t \leq a$, entonces $X|_{[0,t]\times\Omega} = 0$ *$B_t \times F_t$-medible*, si $t > a$, entonces $X|_{[0,t]\times\Omega} = 1_{]a,b\wedge t]\times F}$, donde $]a, b\wedge t] \times F \in B_t \times F_t$ y $X|_{[0,t]\times\Omega}$ es *$B_t \times F_t$-medible*. Así X es progresivamente medible para el caso $R = \{0\} \times F$, $F \in F_0$, similarmente.□

4.1.2. Intervalo estocástico y $\sigma - algebra$ opcional

Sean los tiempos opcionales $S, T : \Omega \to [0, \infty]$, definimos el intervalo estocástico $[[S, T]]$, como:

$$[[S,T]] = \{(t, w) \in \Pi / S(w) \leq t \leq T(w)\}$$

Los intervalos estocásticos $]]S,T]]$, $]]S,T[[$ y $[[S,T[[$ son definidos similarmente y son $B\times F$-*medibles*. Un intervalo estocástico es un subconjunto de Π y no contiene un punto de la forma (∞, w), incluso si $T(w) = \infty$. No se asume que $S \leq T$, si $S(w) > T(w)$ entonces las w-*secciones* de cualquiera de los intervalos estocásticos es vacío. También tendremos que:

$$1_{[[S,T]]}(t, w) = 1_{[S(w),T(w)]}(t),$$

y similarmente para los, demás intervalos estocásticos.

Para números reales s, t con $0 \leq s < t$ se puede interpretar como tiempos opcionales constante, entonces el intervalo estocástico $[[s,t]]$ es el conjunto $[s,t] \times \Omega \subseteq \Pi$.

Todo rectángulo predicible R es un intervalo estocástico, para ver esto asumimos primero que R es de la forma $R =]s, t] \times F$ con $F \in F_s$, $0 \leq s < t$, entonces podemos escribir $R =]]S,T]]$, donde $S = s$ y $T = s1_{F^c} + t1_F$. Note que la representación $R =]]S,T[[$, donde $S = s1_F$ y $T = t1_F$ no es trabajado puesto que en general ninguno de los dos es un tiempo opcional. Similarmente un rectángulo R de la forma $R = \{0\} \times F$ con $F \in F_0$, puede ser escrito como $R = [[S,T]]$ con $T = 0$ y $S = 1_{F^c}$. S es opcional donde $F \in F_0$.
El σ-*algebra* opcional $\mathcal{O}$ en Π es el σ-*algebra* generado por la familia de todos los intervalos estocásticos. Los conjuntos en $\mathcal{O}$ son llamados conjuntos opcionales. De esto se sigue que:

$$\mathcal{P} \subseteq \mathcal{O} \subseteq B \times F.$$

Un proceso $X : \Pi \to \overline{R}$ es llamado opcional si es medible relativo al σ-*algebra* opcional $\mathcal{O}$ en Π. Por lo cual, todo proceso predicible es opcional.

Proposición 4.1.4. .

(a) Todo proceso opcional es progresivamente medible.

(b) Todo proceso continuo derecho es opcional.

Proposición 4.1.5. *Sea S,T tiempos opcionales. Entonces los intervalos estocásticos* $[[0,T]]$, $]]S,T]]$ *son conjuntos predicibles.*□

4.1.3. Integración estocástica con respecto a martingala local continua

Sea M una martingala local continua. Para procesos idóneos H y $t \geq 0$ nosotros definimos la integral estocástica $I_t = \int_0^t H_s dM_s$, H es llamado el integrando, y M el integrador.
Puesto que las trayectorias $t \to M_t(w)$ no son todas grandes de variación acotada, una definición probable trayectoria sería:

$$I_t(w) = \int_0^t H_s(w) dM_s(w)$$

no es posible y tenemos que usar una definición global.
En su lugar se define la variable aleatoria I_t, $t \geq 0$ uno por uno, y usamos una definición que introduce el proceso $(I_t)_{t \geq 0}$ a través de una propiedad universal. Para ello, primero, es necesario definir el espacio de integrandos idóneos.

Medidas Doleans μ_M y Espacio $L^2(M)$

Siendo $\Pi = [0, \infty[\times \Omega$ y B el *σ-algebra* de Borel en $[0, \infty[$. Para cada conjunto $\Delta \in B \times F$, la función no-negativa $\int_{s=0}^{s=\infty} 1_\Delta(s, w) d\langle M \rangle_s(w)$ en Ω es medible y así:

$$\mu_M(\Delta) = E_p[\int_0^\infty 1_\Delta(s, w) d\langle M \rangle_s(w)]$$

Claramente μ_M es una medida positiva en $B \times F$. La extensión usual procede de funciones indicadores a funciones simples no negativas, muestra que para cada proceso conjuntamente medible $K \geq 0$, se tendrá:

$$\int_\Pi K.d\mu_M = E_P[\int_0^\infty K(s, w) d\langle M \rangle_s(w)]$$

Aunque μ_M es definido en el *σ-algebra* grande $B \times F$, trabajaremos con la restricción a el *σ-algebra-progresivo* P_g, siendo ahora:

$$L^2(M) = L^2(\Pi, P_g, \mu_M)$$

En vista de ello medibilidad progresiva es equivalente con medibilidad con respecto al *σ-algebra* progresivo, $L^2(M)$ es el espacio de todos los procesos progresivamente medibles H los cuales satisfacen lo siguiente:

$$||H||^2_{L^2(M)} = E_P[\int_0^\infty H_s^2 d\langle M \rangle_s] < \infty$$

Siendo T un tiempo opcional, K un proceso progresivamente medible no-negativo y $t \geq 0$, $t \uparrow \infty$ en la igualdad:

$$(K \bullet \langle M^T \rangle)_t = ((1_{[[0,T]]} K) \bullet \langle M \rangle)_t$$

$$\int_0^\infty K_s d\langle M^T\rangle_s = \int_0^\infty 1_{[[0,T]]}(s) K_s d\langle M\rangle_s = \int_0^T K_s d\langle M\rangle_s,$$

Por lo tanto, para cualquier proceso progresivamente medible H:

$$||H||^2_{L^2(M^T)} = ||1_{[[0,T]]}H||^2_{L^2(M)} = E_P[\int_0^T H_s^2 d\langle M\rangle_s]$$

Proposición 4.1.6. *Sea T un tiempo opcional. Entonces $\mu_{M^T}(\Delta) = \mu_M([[0,T]] \cap \Delta)$, para cada conjunto $\Delta \in B \times F$ y*

$$||H||^2_{L^2(M^T)} = ||1_{[[0,T]]}H||^2_{L^2(M)}$$

y, además, $H \in L^2(M^T) \iff 1_{[[0,T]]}H \in L^2(M)$, para cada proceso medible H.

En particular $L^2(M) \subseteq L^2(M^T)$.

Notamos que $\mu_M(\Pi) = E_P[\int_0^\infty 1 d\langle M\rangle_s] = E_P[\langle M\rangle_\infty]$, sigue que la medida μ_M es finita si y solo si $M \in H^2$, en general μ_M es σ-*finita.*
Para ver esto notamos que M es indistinguible de un proceso para la trayectoria de el cual es continua y asumimos que M tiene esta propiedad, entonces la sucesión reducida T_n de tiempos opcionales satisface $M^{T_n} \in H^2$, $n \geq 1$ y $T_n \uparrow \infty$ para cada punto de Ω, consecuentemente $[[0, T_n]] \uparrow \Pi$ cuando $n \uparrow \infty$. Además:

$$\mu_M([[0,T_n]]) = \mu_{M^{T_n}}(\Pi) < \infty, \quad para \quad cada \quad n \geq 1$$

Donde H^2 denota el espacio de Hilbert de martingalas L^2-*acotadas* continuas N con norma $||N||_2 = ||N_\infty||_{L^2(P)}$ y producto interno $(I, N)_{H^2} = E_P[I_\infty N_\infty]$, donde $N_\infty = \lim_{t\uparrow\infty} N_t$ denota el último elemento de la martingala $N \in H^2$ y $\langle N\rangle_\infty = \lim_{t\uparrow\infty}\langle N\rangle_t$ es integrable.
Siendo $H_0^2 = \{N \in H^2/N_0 = 0\} \subseteq H^2$ y es un subespacio cerrado, espacio de Hilbert sobre sí mismo. En H_0^2 la norma puede ser escrito como:

$$||N||_2 = E_P[\langle N\rangle_\infty]^{\frac{1}{2}}, \quad N \in H_0^2.$$

Proposición 4.1.7. *Sea $H \in L^2(M)$, entonces $H \in L^1(\langle M, N\rangle)$ y así mismo el proceso $H \bullet \langle M, N\rangle$ es definido y es un proceso de variación acotada continua, para todo $N \in H^2$.*

Prueba: Sea $N \in H^2$, entonces $\langle M, N\rangle$ es un proceso de variación acotada continua y el proceso creciente $\langle N\rangle$ es integrable, es decir, $E_P[\langle N\rangle_\infty] < \infty$ en particular tendremos $\langle N\rangle_\infty < \infty$, P-as. similarmente, de $H \in L^2(M)$ sigue que $\int_0^\infty H_s^2 d\langle M\rangle_s < \infty$, P-as, por la desigualdad de Kunita-Watanabe muestra que:

$$\int_0^\infty |H_s||d\langle M, N\rangle_s| \leq (\int_0^\infty H_s^2 d\langle M\rangle_s)^{\frac{1}{2}}(\int_0^\infty 1^2 d\langle N\rangle_s)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \langle N\rangle_\infty^{\frac{1}{2}}(\int_0^\infty H_s^2 d\langle M\rangle_s)^{\frac{1}{2}} < \infty, \quad P-as$$

Así $H \in L^1(\langle M, N\rangle)$. $\square$

Teorema 4.1.8. Sea M una martingala local continua y $H \in L^2(M)$. Entonces existe una única martingala local continua I terminando en cero, el cual satisface :

$$\langle I, N\rangle = H \bullet \langle M, N\rangle, \quad (5)$$

para toda martingala local continua N. El proceso I es llamada la integral de H con respecto a M y es denotado como $I = H \bullet M = \int_0^t H_s dM_s$, donde realmente $I \in H_0^2$ y la aplicación $H \in L^2(M) \to H \bullet M \in H_0^2$ es una isometría lineal.

Así:

$$(H \bullet M)_0 = 0$$

y

$$\langle H \bullet M, N\rangle = H \bullet \langle M, N\rangle \ \ \textit{para toda martingala local continua } N$$

Prueba: **Unicidad**
Asumiendo que I, L, son martingalas locales continuas satisfaciendo (5) y $I_0 = L_0 = 0$, entonces $\langle I - L, N\rangle = \langle I, N\rangle - \langle L, N\rangle = 0$, para toda martingala local continua N. $N = I - L$ vemos que $\langle I - L\rangle = 0$. Así $I - L$ es constante y $I - L = 0$.
Existencia
Sea $N \in H_0^2$ y T un tiempo opcional, entonces $H \in L^1(\langle M, N\rangle)$, y el proceso $H \bullet \langle M, N\rangle$ y la variable aleatoria $(H \bullet \langle M, N\rangle)_\infty = \int_0^\infty H_s d\langle M, N\rangle_s$ son definidas, y tendremos:

$$|(H \bullet \langle M, N\rangle)_T| \leq \int_0^\infty |H_s||d\langle M, N\rangle_s| \leq \langle N\rangle_\infty^{\frac{1}{2}}(\int_0^\infty H_s^2 d\langle M\rangle_s)^{\frac{1}{2}}$$

Por la desigualdad de Cauchy-Schwartz:

$$\|(H \bullet \langle M, N\rangle)_T\|_{L^1(P)} \leq (E_P[\langle N\rangle_\infty])^{\frac{1}{2}}(E_P[\int_0^\infty H_s^2 d\langle M\rangle_s])^{\frac{1}{2}}$$

$$= \|N\|_2 \|H\|_{L^2(M)}$$

la igualdad $\|N\|_2 = (E_P[\langle N\rangle_\infty])^{\frac{1}{2}}$ usa que $N \in H_0^2$ combinando la igualdad $\mid E(f) \mid \leq \| f \|_{L^1}$ para $T = \infty$ muestra:

$$\Phi_H : N \in H_0^2 \to E_P[\int_0^\infty H_s d\langle M, N\rangle_s] = E_P[(H \bullet \langle M, N\rangle)_\infty]$$

define una funcional lineal en el espacio de Hilbert H_0^2, consecuentemente existe un único elemento $I \in H_0^2$ satisfaciendo:

$$\Phi_H(N) = (I, N)_{H^2} = E_P[I_\infty N_\infty], \quad \forall N \in H_0^2$$

El proceso I satisface lo del enunciado del teorema, primero, verificamos para $N \in H_0^2$. $A = H \bullet \langle M, N\rangle$, entonces A es un proceso de variación acotada continuo adaptado terminando en cero. La progresividad medible de H asegura la adaptación del proceso A. Restringimos a proceso de progresividad medible H en la construcción de la integral estocástica. Tenemos que mostrar que $\langle I, N\rangle = A$, por la definición de $\langle I, N\rangle$ es suficiente mostrar que:

$$X = IN - A = IN - H \bullet \langle M, N\rangle$$

es una martingala local. X es una martingala. Es suficiente mostrar que $X_T \in L^1(P)$ y $E_P(X_T) = E_P(X_0) = 0$, equivalentemente:

$$E_P[I_T N_T] = E_P[(H \bullet \langle M, N\rangle)_T],$$

para cada tiempo opcional acotado T. Luego $(H \bullet \langle M, N\rangle)_T \in L^1(P)$ y la integrabilidad cuadrada de la función maximal I^*_∞, N^*_∞, implica que $I_T N_T \in L^1(P)$. Así $X_T \in L^1(P)$. N^T es otra martingala en H^2_0 y consecuentemente tiene un último elemento el cual claramente satisface $N^T_\infty = N_T$, así:

$$E_P[I_T N_T] = E_P[E_P[I_\infty / F_T] N_T] = E_P[I_\infty N_T] = E_P[I_\infty N^T_\infty]$$
$$= \Phi_H(N^T) = E_P[(H \bullet \langle M, N^T\rangle)_\infty] = E_P[(H \bullet \langle M, N\rangle^T)_\infty]$$
$$= E_P[(H \bullet \langle M, N\rangle)^T_\infty] = E_P[(H \bullet \langle M, N\rangle)_T]$$

Donde tenemos que usar la *F_T-medibilidad* de N_T. Así $I \in H^2_0$ satisface (5) para todo $N \in H^2_0$. Sea ahora N cualquier martingala local continua con $N_0 = 0$, según lo visto anteriormente, existe tiempos opcionales $T_n \uparrow \infty$ tal que $N^{T_n} \in H^2_0$, para todo $n \geq 1$. Entonces tendremos:

$$\langle I, N\rangle^{T_n} = \langle I, N^{T_n}\rangle = H \bullet \langle M, N^{T_n}\rangle = (H \bullet \langle M, N\rangle)^{T_n}$$

Para todo $n \geq 1$. $n \uparrow \infty$ obtenemos $\langle I, N\rangle = H \bullet \langle M, N\rangle$. Finalmente, reemplazando N con $N - N_0$ no cambia, esto sigue (5) sostiene para todo martingala local continua N y fija la existencia del proceso I. □

Como $I = H \bullet M \in H^2_0$ es una martingala *L^2-acotada* y tiene un último elemento I_∞:

$$\int_0^\infty H_s dM_s = \lim_{t\uparrow\infty} \int_0^t H_s dM_s = \lim_{t\uparrow\infty} I_t = I_\infty$$

Proposición 4.1.9. *Sean M, N martingalas locales continuas, $H \in L^2(M)$, $K \in L^2(N)$ y T cualquier tiempo opcional. Entonces $H \bullet M$, $K \bullet N \in H^2_0$ y:*

(a) $\| \int_0^\infty H_s dM_s \|_{L^2(P)} = \| H \bullet M \|_2 = \| H \|_{L^2(M)}$.

(b) $H \bullet M$ *es bilineal en* H *y* M.

(c) $M^T = M_0 + 1_{[[0,T]]} \bullet M$, *especialmente* $M = M_0 + 1 \bullet M$.

(d) $H^T \bullet M^T = H \bullet (M^T) = (1_{[[0,T]]} H) \bullet M = (H \bullet M)^T$.

(e) $\langle H \bullet M, N\rangle_t = \int_0^t H_s d\langle M, N\rangle_s, t \geq 0$.

(f) $\langle H \bullet M, K \bullet N\rangle_t = \int_0^t H_s K_s d\langle M, N\rangle_s, t \geq 0$.

(g) $\langle H \bullet M\rangle_t = \int_0^t H_s^2 d\langle M\rangle_s$, $t \geq 0$.

(h) $\| \int_0^T H_s dM_s \|_{L^2(P)} = \| 1_{[[0,T]]} H \|_{L^2(M)}$.

Prueba: (a) El último elemento $I_\infty = \int_0^\infty H_s dM_s$ de I satisface $\|I_\infty\|_{L^2(P)} = \|I\|_2$; (b) De la bilinealidad de la covariación, la unicidad de $I = H \bullet M$;
(c) Claramente $1_{[[0,T]]} \in L^2(M)$; puesto que $M^T - M_0$ es una martingala local continua el cual termina en cero y necesitamos que $\langle M^T - M_0, N\rangle = 1_{[[0,T]]} \bullet \langle M, N\rangle$, para toda martingala local continua N. Así

$$\langle M^T - M_0, N\rangle = \langle M^T, N\rangle = \langle M, N\rangle^T = 1_{[[0,T]]} \bullet \langle M, N\rangle$$

(d) Muestra que $H \bullet (M^T) = (H \bullet M)^T$ así $I = (H \bullet M)^T \in H_0^2$ y N es una martingala local continua, y de la definición de $H \bullet M$ tendremos:

$$\langle I, N\rangle = \langle (H \bullet M)^T, N\rangle = \langle H \bullet M, N^T\rangle = H \bullet \langle M, N^T\rangle = H \bullet \langle M^T, N\rangle$$

Fijando $I = H \bullet M^T$, la prueba de $H^T \bullet M^T = (H \bullet M)^T$ es similar y la igualdad $(1_{[[0,T]]}H) \bullet M = (H \bullet M)^T$ es reducida a la correspondiente igualdad cuando M es un proceso de variación acotada.
(e) Esta es la propiedad definida $\langle H \bullet M, N\rangle = H \bullet \langle M, N\rangle$, del proceso $(H \bullet M)$. (f) La desigualdad de Kunita-Watanabe implica que $HK \in L^1(\langle M, N\rangle)$, además, de acuerdo a (e) en la forma diferencial,

$$d\langle H \bullet M, N\rangle_t = H_t d\langle M, N\rangle_t$$

así usando (e)

$$\langle H \bullet M, K \bullet N\rangle_t = \int_0^t K_s d\langle H \bullet M, N\rangle_s = \int_0^t H_s K_s d\langle M, N\rangle_s$$

(g) Sea $K = H$ y $N = M$ en (e) (h) reemplazando H con $1_{[[0,T]]}H$ en (a).□

Proposición 4.1.10. *Sea M una martingala local continua, $K \in L^2(M)$ y $H \in L^2(K \bullet M)$ entonces $HK \in L^2(M)$ y tendremos:*

$$H \bullet (K \bullet M) = (HK) \bullet M.$$

Prueba: Tendremos $\langle K \bullet M\rangle = K^2 \bullet \langle M\rangle$ y $d\langle K \bullet M\rangle_s(w) = K_s^2(w) d\langle M\rangle_s(w)$, para P-ae, $w \in \Omega$ Así:

$$\| HK \|^2_{L^2(M)} = E_P[\int_0^\infty H_s^2 K_s^2 d\langle M\rangle_s] = E_P[\int_0^\infty H_s^2 d\langle K \bullet M\rangle_s]$$

$$= \| H \|^2_{L^2(K \bullet M)} < \infty$$

consecuentemente $HK \in L^2(M)$, $I = (HK) \bullet M \in H^2$ es definida, para cada martingala local continua N, tendremos:

$$\langle I, N\rangle = (HK) \bullet \langle M, N\rangle = H \bullet (K \bullet \langle M, N\rangle) = H \bullet \langle K \bullet M, N\rangle$$

y $I = H \bullet (K \bullet M)$, es como deseábamos.□

Definición 4.1. Proceso M-Integrable

Sea M una martingala local continua, definiremos un espacio grande de integrandos H como sigue:
Un proceso H es llamado M-Integrable si existe una sucesión de tiempos opcionales (T_n) tal que $T_n \uparrow \infty$ P-as. (casi en todo punto) y $H \in L^2(M^{T_n})$, para todo $n \geq 1$.

Sea entonces $L^2_{loc}(M)$ el espacio de todos los procesos M-Integrables, H.

OBSERVACIONES

(1) Se cumple que $L^2(M) \subseteq L^2_{loc}(M)$.

(2) La sucesión de tiempos opcionales (T_n), puede ser siempre escogido satisfaciendo $T_n(w) \uparrow \infty$, cuando $n \uparrow \infty$ en cada $w \in \Omega$.
Dado un T_n como se indica anteriormente y un $E \subseteq \Omega$ conjunto nulo tal que $T_n(w) \uparrow \infty$ en cada punto $w \in E^c$, sea $\tau_n = T_n 1_{E^c} + n1_E$, $n \geq 1$, entonces $\tau_n \uparrow \infty$, siendo $n \geq 1$, luego $\tau_n = T_n$, P-as. y la filtración (F_t) es aumentada y τ_n es un tiempo opcional, finalmente, M^{τ_n} es indistinguible de M^{T_n} y $L^2(M^{\tau_n}) = L^2(M^{T_n})$.

(3) Si $H \in L^2_{loc}(M)$ entonces H, es progresivamente medible y $H \in L^2(M^{T_n})$, es decir: $1_{[[0,T_n]]}H \in L^2(M)$, $n \geq 1$ para una sucesión (T_n).

Proposición 4.1.11. *Para un proceso progresivamente medible H, los siguientes enunciados son equivalentes:*

(a) $H \in L^2_{loc}(M)$.

(b) Existen tiempos opcionales $T_n \uparrow \infty$ tal que $1_{[[0,T_n]]}H \in L^2(M)$ $\forall n \geq 1$.

(c) $\int_0^t H_s^2 d\langle M\rangle_s < \infty$, P-as, para cada $t \geq 0$.

Prueba: $(a) \Rightarrow (b)$ Puesto que $H \in L^2(M^T) \Leftrightarrow 1_{[[0,T]]}H \in L^2(M)$
$(b) \Rightarrow (c)$ Sea T_n una sucesión de tiempos opcionales como en (b), entonces:

$$E_P[\int_0^{T_n} H_s^2 d\langle M\rangle_s] < \infty \quad y \quad \int_0^{T_n} H_s^2 d\langle M\rangle_s < \infty, \quad P-as \quad \forall n \geq 1.$$

Sea $t \geq 0$ y $w \in \Omega$ es tal que esta igualdad es simultáneamente para todo $n \geq 1$ tal que $T_n(w) \geq t$. Entonces:

$$\int_0^t H_s^2(w) d\langle M\rangle_s(w) < \infty$$

$(c) \Rightarrow (a)$ Como el proceso $H^2 \bullet \langle M\rangle$ es continuo y terminando en cero el tiempo opcional:

$$T_n = \text{ínf}\{t \geq 0 / \int_0^t H_s^2 d\langle M\rangle_s > n \quad o \quad |M_t| > n\}$$

satisface $T_n \uparrow \infty$ y

$$\int_0^{T_n} H_s^2 d\langle M\rangle_s \leq n \;\; P-as.$$

Para $n > |M_0|$, M^{T_n} es una martingala local continua con $|M^{T_n}| \leq n$ de esto se sigue que M^{T_n} es una martingala y

$$M^{T_n} \in H^2 \ \ y \ \ \int_0^{T_n} H_s^2 d\langle M\rangle_s \leq n,$$

Así

$$\|H\|^2_{L^2(M^{T_n})} = E_P[\int_0^{T_n} H_s^2 d\langle M\rangle_s] \leq n$$

y consecuentemente $H \in L^2(M^{T_n})$ para todo $n \geq 1$, esto muestra que $H \in L^2_{loc}(M)$.$\square$

Proposición 4.1.12. *Sea $X(n)$ una sucesión de martingalas continuas y T_n una sucesión de tiempos opcionales tal que (a) $T_n \uparrow \infty$, $P - as$ y (b) $X(n+1)^{T_n} = X(n)$, $n \geq 1$.*
Entonces existe un único proceso adaptado X tal que $X^{T_n} = X(n)$, para todo $n \geq 1$. X es una martingala local continua.

Prueba: libro[5], pág. 141.

Teorema 4.1.13. Sea M una martingala local continua y $H \in L^2_{loc}(M)$. Entonces $H \in L^1_{loc}(\langle M, N\rangle)$, para cada martingala local continua N, y existe una única martingala local continua $H \bullet M$ terminando en cero tal que $\langle H \bullet M, N\rangle = H \bullet \langle M, N\rangle$, para toda martingala local continua N.

Prueba: libro[5], pág. 142.

Observación
Sea $\int_0^t H_s dM_s = (H \bullet M)_t$, $H \in L^2_{loc}(M)$, $t \geq 0$, como en el caso de integrandos $H \in L^2(M)$, el proceso integral$(H \bullet M)$ es también denotado como $\int_0^t H_s dM_s$.

Propiedades de la integral estocástica con respecto a martingala local continua
Sea M, N martingalas locales continuas, $H \in L^2_{loc}(M)$, $K \in L^2_{loc}(N)$ y T un tiempo opcional entonces:

(a)$H \bullet M = \int_0^t H_s dM_s$ es una martingala local continua con $(H \bullet M)_0 = 0$.

(b) $H \bullet M$ es bilineal en H y M.

(c) $M^T = M_0 + 1_{[[0,T]]} \bullet M$, especialmente $M = M_0 + 1 \bullet M$.

(d) $H^T \bullet M^T = H \bullet (M^T) = (1_{[[0,T]]}H) \bullet M = (H \bullet M)^T$.

(e) $\langle H \bullet M, N\rangle_t = \int_0^t H_s d\langle M, N\rangle_s$, $t \geq 0$.

(f) $\langle H \bullet M, K \bullet N\rangle_t = \int_0^t H_s K_s d\langle M, N\rangle_s$, $t \geq 0$.

(g) $\langle H \bullet M\rangle_t = \int_0^t H_s^2 d\langle M\rangle_s$, $t \geq 0$.

Observación

Sea $H \in L^2_{loc}(M)$ y reescribimos la ecuación $(1_{[[0,T]]}H \bullet M) = (H \bullet M)^T$. Si

$$Y = H \bullet M, \quad Y_t = \int_0^t H_s dM_s, \quad t \geq 0$$

y

$$\int_0^{t\wedge T} H_s dM_s = \int_0^t 1_{[[0,T]]}(s) H_s dM_s, \quad t \geq 0$$

entonces:

$$\int_0^{t\wedge T} H_s dM_s = (1_{[[0,T]]}H \bullet M)_t = Y_t^T = Y_{t\wedge T}.$$

luego:

$$Y_t = \int_0^t H_s dM_s \Rightarrow Y_{t\wedge T} = \int_0^{t\wedge T} H_s dM_s.$$

Proposición 4.1.14. *(Asociatividad) Sea M una martingala local continua. Si $K \in L^2_{loc}(M)$ y $H \in L^2_{loc}(K \bullet M)$, entonces $HK \in L^2_{loc}(M)$ y*

$$H \bullet (K \bullet M) = (HK) \bullet M.$$

Prueba: Sea

$$\langle K \bullet M \rangle = K^2 \bullet \langle M \rangle \quad y \quad d\langle K \bullet M \rangle_s(w) = K_s^2(w) d\langle M \rangle_s(w)$$

para P-ae $w \in \Omega$ y $H \in L^2_{loc}(K \bullet M)$ tendremos:

$$\int_0^t H_s^2 K_s^2 d\langle M \rangle_s = \int_0^t H_s^2 d\langle K \bullet M \rangle_s < \infty, \quad P - as, \quad para \quad cada \quad t \geq 0$$

así $HK \in L^2_{loc}(M)$ y consecuentemente el proceso $I = (HK) \bullet M$ es definido y es una martingala local continua, para cada martingala local continua N tendremos:

$$\langle I, N \rangle = (HK) \bullet \langle M, N \rangle = H \bullet (K \bullet \langle M, N \rangle) = H \bullet \langle K \bullet M, N \rangle$$

y $I = H \bullet (K \bullet M)$ como deseábamos. □

Revisión de espacios de integrandos

Sea M una martingala local continua. El espacio grande de procesos H para el cual el proceso integral $I = H \bullet M$ es definido es el espacio $L^2_{loc}(M)$.
Dos procesos $H, K \in L^2_{loc}(M)$ son identificados si ellos satisfacen $H = K$, $u_M - as$, esto no es equivalente con la usual identificación de procesos los cuales son versiones de cada otro o indistinguibles. Lo cual implica que: $H \bullet M = K \bullet M$ note que $(\langle (H-K) \bullet M \rangle_t = \int_0^t |H_s - K_s|^2 d\langle M \rangle_s)$

Si $H \in L^2_{loc}(M)$, entonces el proceso I es una martingala local continua con variación cuadrática:

$$\langle I \rangle_t = \langle H \bullet M \rangle_t = \int_0^t H_s^2 d\langle M \rangle_s, \quad t \geq 0.$$

Así:

$$\langle I \rangle_\infty = \int_0^\infty H_s^2 d\langle M \rangle_s.$$

si ahora $H \in L^2(M)$, entonces:

$$E_P(\langle I \rangle_\infty) = \|H\|^2_{L^2(M)} < \infty$$

y

$$I = H \bullet M \in H_0^2 \quad con \quad \|I\|_2 = E_P(\langle I \rangle_\infty) = \|H\|^2_{L^2(M)}$$

con la condición $E(\langle I \rangle_t) < \infty$, $0 < t < \infty$ lo cual implica que I es una martingala cuadrada integrable.

Esto sugiere que introduzcamos el espacio intermedio $\Lambda^2(M)$ de todos los procesos progresivamente medibles H satisfaciendo:

$$E_P[\int_0^t H_s^2 d\langle M \rangle_s] < \infty, \quad \forall t \geq 0 \quad , equivalentemente:$$

$$\Pi_n^2(H) = E_P[\int_0^n H_s^2 d\langle M \rangle_s] = \|1_{[[0,n]]}H\|^2_{L^2(M)} < \infty \quad para \quad todo \quad n \geq 1$$

Así, por lo tanto, $\Lambda^2(M)$ es el espacio de todos los procesos progresivamente medibles H tal que:

$$1_{[[0,n]]}H \in L^2(M) \quad para \quad todo \quad n \geq 1$$

Si $H \in \Lambda^2(M)$, entonces $1_{[[0,n]]}H \in L^2(M)$, y además:

$$(H \bullet M)^n = (1_{[[0,n]]}H) \bullet M \in H_0^2, \quad para \quad todo \quad n \geq 1$$

De esto se sigue que $H \bullet M$ es una martingala cuadrada integrable. Dos procesos $H, K \in L^2(M)$ son identificados si ellos satisfacen $\| H - K \|_{L^2(M)} = 0$, equivalentemente $H = K$, $u_M - as$, y dos procesos $H, K \in \Lambda^2(M)$ son idénticos si $\Pi_n(H - K) = 0$ para todo $n \geq 1$ y se cumplirá entonces lo siguiente:

$$L^2(M) \subseteq \Lambda^2(M) \subseteq L^2_{loc}(M).$$

Proposición 4.1.15. *Sea M una martingala local continua*

(a) Si $H \in L^2(M)$, entonces el proceso creciente $\langle H \bullet M \rangle$ es integrable, $H \bullet M$ es una martingala en H_0^2 y la aplicación $H \in L^2(M) \to H \bullet M \in H_0^2$ una isometría:

$$\| \int_0^\infty H_s dM_s \|^2_{L^2(P)} = \|H \bullet M\|_2^2 = \|H\|^2_{L^2(M)} = E_P[\int_0^\infty H_s^2 d\langle M \rangle_s]$$

(b) Si $H \in \Lambda^2(M)$, entonces $H \bullet M$ es una martingala cuadrada integrable satisfaciendo:

$$\| \int_0^t H_s dM_s \|^2_{L^2(P)} = \| 1_{[[0,t]]} H \|^2_{L^2(M)} = E_P[\int_0^t H_s^2 d\langle M \rangle_s], \forall t \geq 0$$

Ejemplo 4.1.1. *Si B es un movimiento Browniano uno dimensional, entonces $\langle B \rangle_s = s$ y consecuentemente el espacio $L^2(B)$ consiste de todos los procesos progresivamente medibles H satisfaciendo $E_P[\int_0^\infty H_s^2 ds] < \infty$.*

Luego, enseguida se verá para semimartingalas:

4.1.4. Integración respecto a semimartingalas continuas

Se desarrollará la integral estocástica a integrandos los cuales son semimartingalas continuas. Así S denota la familia de todas las semimartingalas continuas (de valor real) en $(\Omega, F, (F_t), P)$ y $X \in S$ con descomposición $X = M + A$, donde M es una martingala local continua, A un proceso de variación acotada continua terminando en cero. Definimos el espacio $L(X)$ de procesos $X-$*integrables* como $L(X) = L^2_{loc}(M) \cap L^1_{loc}(A)$. Así $L(X)$ es el espacio de todos los procesos progresivamente medibles H satisfaciendo:

$$\int_0^t H_s^2 d\langle M \rangle_s + \int_0^t |H_s||dA_s| < \infty, \quad p-as\,, \forall t \geq 0$$

Para $H \in L(X)$, $H \bullet X = H \bullet M + H \bullet A$ y $\int_0^t H_s dX_s = (H \bullet X)_t$ con:

$$\int_0^t H_s dX_s = \int_0^t H_s dM_s + \int_0^t H_s dA_s, \quad t \geq 0$$

Así el caso de un integrador general $X \in S$ puede ser reducido al caso $X = M$ a una martingala local y $X = A$ a un proceso de variación acotada.
Puesto que $H \bullet M$ es una martingala local y $H \bullet A$ es un proceso de variación acotada continuo terminando en cero, de esto se sigue que $H \bullet X$ es una semimartingala continua con descomposición $H \bullet X = H \bullet M + H \bullet A$ en particular $\mu_{H \bullet X} = H \bullet A = H \bullet \mu_X$ y $H \bullet X$ es una martingala local si y solo si $H \bullet A = 0$, y similarmente a las propiedades anteriores:

Proposición 4.1.16. *Sea $X, Y \in S$, $H, H' \in L(X)$, $K \in L(Y)$, $S \leq T$, tiempos opcionales, W variable aleatoria F_S-medible, $a \geq 0$ y Z una variable aleatoria F_a-medible entonces:*

(a) $H \bullet X = \int_0^t H_s dX_s$ es una semimartingala continua con $(H \bullet X)_0 = 0$.

(b) $H \bullet X$ es bilineal en H y X.

(c) $X^T = X_0 + 1_{[0,T]} \bullet X$, especialmente $X = X_0 + 1 \bullet X$.

(d) $H^T \bullet X^T = H \bullet (X^T) = (1_{[[0,T]]} H) \bullet X = (H \bullet X)^T$.

(e) $\langle H \bullet X, Y\rangle_t = \int_0^t H_s d\langle X,Y\rangle_s$, $t \geq 0$.

(f) $\langle H \bullet X, K \bullet Y\rangle_t = \int_0^t H_s K_s d\langle X,Y\rangle_s$, $t \geq 0$.

(g) $\langle H \bullet X\rangle_t = \int_0^t H_s^2 d\langle X\rangle_s$, $t \geq 0$.

(h) $H(t,w) = 1_{\{a\}}(t)Z(w) \in L(X)$, *y* $H \bullet X = 0$.

(i) $H = W1_{]]S,T]]} \in L(X)$, *y* $H \bullet X = W(X^T - X^S)$.

(j) *Si* H *y* H' *son indistinguibles, entonces lo son los procesos* $H \bullet X$ *y* $H' \bullet X$.

Prueba: libro[5], pág. 147.

Proposición 4.1.17. *Sea* $X \in S$, *si* $K \in L(X)$ *y* $H \in L(K \bullet X)$, *entonces* $HK \in L(X)$ *y* $H \bullet (K \bullet X) = (HK) \bullet X$.

Proposición 4.1.18. *Sea* $X \in S$ *y* $H \in L(X)$, *entonces para casi todo* $w \in \Omega$ *la trayectoria* $t \to (H \bullet X)_t(w)$ *es constante en cualquier intervalo* $[a,b]$ *en el cual:*

(a) $H_t(w) = 0$, *para todo* $t \in [a,b]$ *ó*

(b) $X_t(w) = X_a(w)$, *para todo* $t \in [a,b]$.

Prueba: libro[5], pág. 148.

El espacio Λ_b de integrandos localmente acotados

El espacio $L(X)$ de procesos *X-integrables* depende de la semimartingala X. Introducimos un espacio Λ_b de integrandos el cual es independiente del integrador X. Llamamos a un proceso H localmente acotado, si existe una sucesión $T_n \uparrow \infty$ de tiempos opcionales tal que $|H^{T_n}| \leq C_n < \infty$ en $\Pi = R_+ \times \Omega$, para todo $n \geq 1$ donde C_n son constantes, Λ_b denota el espacio de todos los procesos progresivamente medibles y localmente acotados H.
Así si toda trayectoria $t \to H_t(w)$ del proceso adaptado H es continua, entonces H es localmente acotado. Así $T_n = \inf\{t \geq 0/|H_t| > n\}$ es una sucesión de tiempos opcionales $T_n \uparrow \infty$ tal que $|H^{T_n}| \leq n$, para todo $n > |H_0|$ donde H_0 es una constante.
Si H es cualquier proceso adaptado continuo, entonces H es indistinguible de un proceso K para el cual la trayectoria es continua. Reemplazando H con K no afectará la integral estocástica $H \bullet X$.

Proposición 4.1.19. $\Lambda_b \subseteq L(X)$, *para cada semimartingala continua* X.

Prueba: libro[5], pág. 149.

Proposición 4.1.20. $X, Y \in S$ *y* $H, K \in \Lambda_b$, *entonces para casi todo* $w \in \Omega$ *(p-ae), la diferencia* $(H \bullet X)_t(w) - (K \bullet Y)_t(w)$ *es constante en cualquier intervalo* $[a,b]$ *satisfaciendo:*

(a) $H_t(w) = K_t(w)$, *para todo* $t \in [a,b]$ *y*

(b) $X_t(w) = Y_t(w)$, *para todo* $t \in [a,b]$

En particular $(H \bullet X)_b(w) = (K \bullet Y)_b(w)$, *p-ae* $w \in \Omega$ *tal que* $H_t(w) = K_t(w)$ *y* $X_t(w) = Y_t(w)$ *para todo* $t \in [0, b]$.□

La integral estocástica como límite de una suma tipo Riemann

Sea $X, Y \in S$ y H un proceso adaptado continuo. $H \in \Lambda_b \subseteq L(X)$, por la continuidad.
Fijando $t > 0$, sea $\Delta = \{0 = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_n = t\}$ una partición del intervalo $[0, t]$, y sea $\|\Delta\| = \text{máx}_{1 \leq j \leq n}(t_j - t_{j-1})$ y:

$$S_\Delta(H, X) = \sum_{j=1}^{n} H_{t_{j-1}}(X_{t_j} - X_{t_{j-1}})$$

Así $S_\Delta(H, X)$ es la suma $\Delta - Riemann$ para la integral $\int_0^t HdX$, el cual evalúa el integrando H siempre como el punto final izquierdo de la partición Δ y también podemos escribirlo como:

$$S_\Delta(H, X) = \int_0^t R_\Delta(H)_s dX_s = (R_\Delta(H) \bullet X)_t$$

donde $R_\Delta(H)$ es el siguiente proceso predicible :

$$R_\Delta(H, X) = 1_{\{0\}} H_0 + \sum_{j=1}^{n} H_{t_{j-1}} 1_{]]t_{j-1}, t_j]]}$$

En lo siguiente se verá que la integral estocástica $\int_0^t H_s dX_s$ es el límite en probabilidad de la suma de Riemann.

Proposición 4.1.21. *Sea* $X \in S$ *y* H *un proceso adaptado continuo. Entonces* $\int_0^t H_s dX_s = \text{lím}_{n \uparrow \infty} S_{\Delta_n}(H, X)$ *en probabilidad, para cada sucesión* Δ_n *de particiones de el intervalo* $[0, t]$ *tal que* $\|\Delta_n\| \to 0$, *cuando* $n \uparrow \infty$.

Prueba: Reemplazando H con una versión idónea del cual H es indistinguible, asumimos que todas las trayectorias de H son continuas.
(a) Asumo primero $|H| \leq C < \infty$, para alguna constante C y sea Δ_n una sucesión de particiones de $[0.t]$. Entonces $R_{\Delta_n}(H) \to H$ punto probable en $\Pi = R_+ \times \Omega$ y $|R_{\Delta_n(H)}| \leq C$, para cada $n \geq 1$. El teorema de convergencia dominada implica que $S_{\Delta_n}(H, X) = (R_{\Delta_n}(H) \bullet X)_t \to (H \bullet X)_t$ en probabilidad, cuando $n \uparrow \infty$.
(b) En general existe una sucesión $T_m \uparrow \infty$ de tiempos opcionales con $|H^{T_m}| \leq m$, para todo $m >| H_0 |$ (recalcamos que H_0 es una constante). Para tal m, acorde a (a)

$$S_{\Delta_n}(H^{T_m}, X) \to (H^{T_m} \bullet X)_t \quad en \ \ probabilidad, \quad cuando \ \ n \uparrow \infty$$

En el conjunto $[T_m \geq t]$ tendremos $S_{\Delta_n}(H^{T_m}, X) = S_{\Delta_n}(H, X)$ y $(H^{T_m} \bullet X)_t = (H \bullet X)_t^{T_m} = (H \bullet X)_t$. Así $S_{\Delta_n}(H, X) \to (H \bullet X)_t$ en probabilidad en el conjunto $[T_m \geq t]$. Puesto que $\cup_m [T_m \geq t] = \Omega$, de esto sigue que $S_{\Delta_n}(H, X) \to (H \bullet X)_t$ en probabilidad en Ω. □

Proposición 4.1.22. *Sea $0 \leq a < b$, Z una variable aleatoria real F_a-medible, H un proceso continuo adaptado y $X \in S$. Entonces $\int_a^b ZH_s dX_s = Z\int_a^b H_s dX_s$.*

Para una partición $\Delta = \{0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = t\}$ del intervalo $[0, t]$ sea:

$$SQ_\Delta(H, X, Y) = \sum_{j=1}^{n} H_{t_{j-1}}(X_{t_j} - X_{t_{j-1}})(Y_{t_j} - Y_{t_{j-1}})$$

Similarmente $SQ_\Delta(H, X) = Q_\Delta(H, X, X)$, es decir:

$$SQ_\Delta(H, X) = \sum_{j=1}^{n} H_{t_{j-1}}(X_{t_j} - X_{t_{j-1}})^2$$

multiplicando la igualdad:

$$\begin{aligned} &4(X_{t_j} - X_{t_{j-1}})(Y_{t_j} - Y_{t_{j-1}}) \\ &= ((X_{t_j} + Y_{t_j}) - (X_{t_{j-1}} + Y_{t_{j-1}}))^2 - ((X_{t_j} - Y_{t_j}) - (X_{t_{j-1}} - Y_{t_{j-1}}))^2, \end{aligned}$$

con $H_{t_{j-1}}$ y sumando para $j = 1, 2, 3, ...n$ muestra:

$$SQ_\Delta(H, X, Y) = \frac{1}{4}[SQ_\Delta(H, X + Y) - SQ_\Delta(H, X - Y)]$$

Proposición 4.1.23. Regla del producto estocástico

Sea $X, Y \in S$. Entonces:

$$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \langle X, Y\rangle_t, \quad para \quad todo \quad t \geq 0.$$

Prueba: Sea $\Delta = \{0 = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_n = t\}$ cualquier partición del intervalo $[0, t]$, sumando las igualdades:

$$\begin{aligned} X_{t_j}Y_{t_j} - X_{t_{j-1}}Y_{t_{j-1}} = (X_{t_j} - X_{t_{j-1}})(Y_{t_j} - Y_{t_{j-1}}) + X_{t_{j-1}}(Y_{t_j} - Y_{t_{j-1}}) \\ + Y_{t_{j-1}}(X_t - X_{t_{j-1}}) \end{aligned}$$

sobre $j = 1, 2, 3..., n$ para obtener:

$$X_t Y_t - X_0 Y_0 = Q_\Delta(X, Y) + S_\Delta(X, Y) + S_\Delta(Y, X))$$

con $Q_\Delta(X, Y)$ como anteriormente, ahora $\|\Delta\| \to 0.\square$

4.1.5. Integración con respecto a vector valuado semimartingala continua

Los vectores en R^d son vistas como vectores columnas y escribimos $x = (x^1, x^2, ..., x^d)'$, $x \in R^d$ donde $'$ (prima) denota la transposición. Sea $x.y = \sum_j x^j.y^j$ denota el producto interno en R^d.
Un proceso R^d*-valuado* $X_t = (X_t^1, X_t^2, ...X_t^d)'$ es llamado continuo, martingala local, semimartingala, si cada proceso componente X_t^j, $j = 1, 2, 3, ..., d$ tiene la respectiva propiedad. Así S^d denotará la familia de todas las semimartingalas continuas R^d*-valuado* en $(\Omega, F, (F_t), P)$.
Para $X \in S^d$ definimos la variación cuadrática $\langle X \rangle$ como, $\langle X \rangle = \sum_{j=1}^d \langle X^j \rangle$. Si X es una martingala local, entonces $\langle X \rangle$ es el único proceso de variación acotada continuo A terminando en cero ($A_0 = 0$) tal que $\|X\|^2 - A$ es una martingala local. En realidad $\langle X \rangle$ es un proceso creciente.
Llamamos al proceso X cuadrado integrable si esta satisface $E(\|X_t\|^2) < \infty$, $\forall t \geq 0$, es decir, si todos los procesos componentes X_t^j, son cuadrados integrables.
Si X es una martingala cuadrada integrable continua, entonces $\|X\|^2 - \langle X \rangle$ es una martingala, en analogía al caso uno dimensional, para $X, Y \in S^d$ difinimos el proceso de covariación $\langle X, Y \rangle$ como:

$$\langle X, Y \rangle = \sum_{j=1}^{d} \langle X^j, Y^j \rangle.$$

Si X, Y son martingalas locales, entonces $\langle X, Y \rangle$ es el único proceso de variación acotada continua A terminando en cero tal que $X.Y - A$ es una martingala local. Si X, Y son martingalas cuadradas integrables, entonces $X.Y - A$ es una martingala.
Sea $X^j = M^j + A^j$, la descomposición de X^j ($A^j = u_{X^j}$), para $j = 1, 2, 3, ..., d$, definimos el compensador u_X de X a el proceso R^d*-valuado* $u_X = (A^1, A^2, ..., A^d)'$, u_X es el único proceso de variación acotado R^d*-valuado* continuo A, terminando en cero tal que $X - A$ es una martingala local.
Si Z es una semimartingala escalar continua, entonces el producto ZX es la semimartingala R^d*-valuado* :

$$ZX = (ZX^1, ZX^2, ..., ZX^d)'$$

y definimos la covariación $\langle Z, X \rangle$ como el proceso R^d*-valuado* :

$$\langle Z, X \rangle = (\langle Z, X^1 \rangle, \langle Z, X^2 \rangle, ..., \langle Z, X^d \rangle)'$$

Si Z, X son martingalas locales, entonces $\langle Z, X \rangle$ es otra vez un único proceso de variación acotado continuo A terminando en cero tal que $ZX - A$ es una martingala local (R^d*-valuado*).
Definimos el espacio $L(X)$ de procesos X*-integrables* como el espacio de todos los procesos progresivamente medibles R^d*-valuado* $H = (H^1, H^2, ...H^d)'$ tal que, $H^j \in L(X^j)$, para $j = 1, 2, ..., d$, es decir, $L(X) = L(X^1) \times ... \times L(X^d)$ $.A_j = u_{X^j}$, $L(X)$ consiste de

todos los procesos progresivamente medibles R^d*-valuado* $H = (H^1, H^2, ...H^d)'$ tal que:

$$\sum_{j=1}^{d}\{\int_0^t (H_s^j)^2 d\langle X^j\rangle_s + \int_0^t |H_s^j||dA_s^j|\} < \infty\,, P-as, \quad \forall t \geq 0$$

Para $H \in L(X)$ $H \bullet X = \sum_{j=1}^{d} H^j \bullet X^j$ y escribimos $(H \bullet X)_t = \int_0^t H_s dX_s$ entonces:

$$\int_0^t H_s dX_s = \sum_{j=1}^{d}\int_0^t H_s^j dX_s^j, \quad t \geq 0$$

Así la diferencial estocástica dX como vector $dX = (dX^1, dX^2, ..., dX^d)'$ y consecuentemente $H.dX = \sum_{j=1}^{d} H^j.dX^j$. Luego, la variación cuadrática $\langle X\rangle$ la covariación $\langle X, Y\rangle$ y el proceso integral $H \bullet X$ son procesos escalares.
Si X es una martingala local, entonces $L(X^j) = L^2_{loc}(X^j)$, $1 \leq j \leq d$ y $L(X) = L^2_{loc}(X^1) \times L^2_{loc}(X^2) \times ... \times L^2_{loc}(X^d)$, el cual es también denotado como $L^2_{loc}(X)$.

Proposición 4.1.24. *Sea $Z \in S$, $X, Y \in S^d$, $H, H' \in L(X)$, $K \in L(Y)$ y T un tiempo opcional, entonces:*

(a) $H \bullet X = \int_0^t H_s.dX_s$ es una semimartingala escalar continua con $(H \bullet X)_0 = 0$.

(b) $H \bullet X$ es bilineal en H y X.

(c) $X^T = X_0 + 1_{[[0,T]]} \bullet X$, especialmente $X = X_0 + 1 \bullet X$.

(d) $H \bullet (X^T) = (1_{[[0,T]]}H) \bullet X = (H \bullet X)^T$.

(e) $\langle Z, H \bullet X\rangle_t = \int_0^t H_s.d\langle Z, X\rangle_s$, $t \geq 0$.

(f) $\langle H \bullet X, K \bullet Y\rangle_t = \sum_{i,j=1}^{d}\int_0^t H_s^i K_s^j d\langle X^i, Y^j\rangle_s$, $t \geq 0$.

(g) Si H y H' son indistinguibles, también lo son los procesos $H \bullet X$ y $H' \bullet X$

Prueba: libro[5], pág. 154.

Proposición 4.1.25. Asociatividad
Sea $X \in S^d$, si $K \in L(X)$ y $H \in L(K \bullet X)$, entonces $HK \in L(X)$ y tendremos:

$$H \bullet (K \bullet X) = (HK) \bullet X$$

Prueba: para cada proceso componente, similarmente a las anteriores demostraciones.□

Los espacios $L^2(M)$ y $\Lambda^2(M)$

Para una martingala local continua R^d*-valuada* $M = (M^1, M^2, ..., M^d)'$ $L^2(M)$ y $\Lambda^2(M)$ denota el espacio de todos los procesos progresivamente medibles R^d*-valuado* $H = (H^1, H^2, ..., H^d)'$ satisfaciendo $H^j \in L^2(M^j)$ y $H^j \in \Lambda^2(M^j)$, para $j = 1, 2, ..., d$, asi $L^2(M)$ es el espacio producto directo $L^2(M) = L^2(M^1) \times L^2(M^2) \times ... \times L^2(M^d)$ y es un espacio de Hilbert con norma:

$$\|H\|^2_{L^2(M)} = \sum_{j=1}^{d} \|H^j\|^2_{L^2(M^j)} = \sum_{j=1}^{d} E_P \int_0^\infty (H^j_s)^2 d\langle M^j \rangle_s$$

Similarmente $\Lambda^2(M)$ es el espacio producto $\Lambda^2(M) = \Lambda^2(M^1) \times \Lambda^2(M^2) \times ... \times \Lambda^2(M^d)$ como en el caso uno dimensional $\Lambda^2(M)$ consiste de todos los procesos R^d*-valuado* H tal que $1_{[[0,t]]}H \in L^2(M)$, para todo $t \geq 0$, que es todo proceso progresivamente medible R^d*-valuado* H tal que:

$$\| 1_{[[0,t]]}H \|^2_{L^2(M)} = \sum_{j=1}^{d} \|1_{[[0,t]]}H^j\|^2_{L^2(M^j)}, \quad para \quad todo \quad t > 0$$

Los subespacios de procesos predicibles H en $L^2(M)$, respectivamente $\Lambda^2(M)$ son cerrados y tendremos la inclución:

$$L^2(M) \subseteq \Lambda^2(M) \subseteq L^2_{loc}(M) = L(M)$$

Donde $H \bullet M = \sum_{j=1}^{d} H^j \bullet M^j$, es decir, $\int_0^t H_s dM_s = \sum_{j=1}^{d} \int_0^t H^j_s dM^j_s$ para todo $H \in L^2_{loc}(M)$ y $t \geq 0$.

4.2. Fórmula de Itô

Sea $X = (X^1, X^2, ...X^d)$ un proceso R^d*-valuado* con trayectorias continuamente diferenciales y consideremos el proceso $Y_j = f(X_j)$, donde $f \in C^2(R^d)$ y escribimos:

$$D_j f = \frac{\partial f}{\partial x_j} \quad y \quad D_{ij} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

El proceso Y tiene trayectorias continuamente diferenciables con:

$$\frac{d}{dt} f(X_t(w)) = \sum_{j=1}^{d} D_j f(X_t(w)) \frac{d}{dt} X^j_t(w)$$

Fijando w y integrando:

$$f(X_t(w)) - f(X_0(w)) = \sum_{j=1}^{d} \int_0^t D_j f(X_s(w)) \frac{d}{ds} X^j_s(w) ds$$

donde la integral es interpretada trayectoria probable. Escribimos como:

$$f(X_t) - f(X_0) = \sum_{j=1}^{d} \int_0^t D_j f(X_s) dX_s^j$$

esta ecuación sigue siendo cierto si X es un proceso de variación acotada continua. La situación se convierte más complicada si el proceso X es una semimartingala continua, y además, no tiene trayectorias las cuales sean de variación acotada en intervalos finitos en general.

Proposición 4.2.1. *Sea $G \subseteq R^d$ un conjunto abierto. $X = (X^1, X^2, ...X^d)$ una semimartingala continua con valores en G y $f \in C^2(G)$. Entonces:*

$$f(X_t) - f(X_0) = \sum_{j=1}^{d} \int_0^t D_j f(X_s) dX_s^j + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{d} \int_0^t D_{ij} f(X_s) d\langle X^i, X^j \rangle_s$$

P-as, para cada $t \geq 0$. Escribiendo $f(X)$ la notación del proceso $f(X_t)$ podemos reescribir como:

$$f(X) - f(X_0) = \sum_{j=1}^{d} D_j f(X) \bullet X^j + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{d} D_{ij} f(X) \bullet \langle X^i, X^j \rangle$$

Prueba: libro [5], pág. 158.

Notación diferencial

Si $X \in S$ escribimos $dZ_t = H_t dX_t$ o $dZ = HdX$ si y solo si $H \in L(X)$ y $Z_t = Z_0 + \int_0^t H_s dX_s$, para todo $t \geq 0$, equivalentemente si $H \in L(X)$ y $Z = Z_0 + H \bullet X$ La ecuación $dZ = 0$ es interpretado como $dZ = 0dX$, para algún $X \in S$, claramente entonces $dZ = 0$ si y solo si $Z_t = Z_0$, $t \geq 0$, es decir, Z es una constante estocástica. Por la ley asociativa:

$$dZ = HdX \quad y \quad dX = KdY \quad \Rightarrow dZ = HKdY$$

con $H \in L(X)$, $K \in L(Y)$, $Z = H \bullet X$ y $W = K \bullet Y$ implica que $HK \in L^1_{loc}(\langle X, Y \rangle)$ y $\langle H \bullet X, K \bullet Y \rangle_t = \int_0^t H_s K_s d\langle X, Y \rangle_s$, $t \geq 0$ en notación diferencial:

$$dZ = HdX, \quad y \quad dW = KdY \quad \Rightarrow d\langle Z, W \rangle = HKd\langle X, Y \rangle$$

Si definimos el producto $dZdW$ de la diferencial estocástica dZ y dW como:

$$dZdW = d\langle Z, W \rangle,$$

entonces se asume que $dZ = HdX$, $dW = KdY \Rightarrow dZdW = HKdXdY$. En particular $dZ = HdX \Rightarrow d\langle Z \rangle = (dZ)^2 = H^2 d\langle X \rangle$.
No es análogo para el producto diferencial $dXdY$ en teoría integral clásica: Si X y Y

son localmente de variación acotada entonces $\langle X, Y\rangle = 0$.
Lo siguiente puede ser generalizado a integrandos vectores valuados X.

Si $X \in S^d$ se puede escribir $dZ = HdX$ si y solo si $H \in L(X)$ y $Z = Z_0 + H \bullet X$, es decir, $Z_t = Z_0 + \sum_{j=1}^{d} \int_0^t H_s^j dX_s^j$, para todo $t \geq 0$, ahora si Z es una semimartingala escalar la ley asociativa ahora asume que:

$$dY = KdZ \quad y \quad dZ = HdX \Rightarrow dY = (KH)dX$$

siempre que $X \in S^d$, $H \in L(X)$, $K \in L(Z) = L(H \bullet X)$ donde X y H son procesos R^d*-valuado* Z, K procesos escalares. Así KH es un proceso R^d*-valuado*

Proposición 4.2.2. *Sea $Z \in S$, $X, Y \in S^d$, $H \in L(X)$, $K \in L(Y)$ y T un tiempo opcional, entonces:*

(a) $d(H \bullet X) = HdX$.

(b) $dX^T = 1_{[[0,T]]}dX$.

(c) $d\langle Z, H \bullet X\rangle = H.d\langle Z, X\rangle$.

(d) $d\langle H \bullet X, K \bullet Y\rangle = \sum_{i,j=1}^{d} H^i K^j d\langle X^i, Y^j\rangle$.

Proposición 4.2.3.

(a) $df(X_t) = \sum_{j=1}^{d} D_j f(X_t) dX_t^j + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d} D_{i,j} f(X_t) d\langle X^i, X^j\rangle_t$

(b) $df(t, X_t) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, X_t)dt + \sum_{j=1}^{d} D_j f(t, X_t) dX_t^j + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d} D_{i,j} f(t, X_t) d\langle X^i, X^j\rangle_t$.□

Un caso especial, donde $X \in S$, es una semimartingala escalar $(d = 1)$.

Proposición 4.2.4. *Será:*

(a) $df(X_t) = f'(X_t)dX_t + \frac{1}{2}f''(X_t)d\langle X\rangle_t$.

(b)$df(t, X_t) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, X_t)dt + (\frac{\partial f}{\partial x})(t, X_t)dX_t + \frac{1}{2}(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2})(t, X_t)d\langle X\rangle_t$.

Ejemplo 4.2.1. *Sea S_t el precio del Stock en un tiempo $t \geq 0$, en un modelo simple vemos S como una semimartingala continua satisfaciendo la dinámica:*

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t \qquad (0)$$

donde B es un movimiento Browniano (uno dimensional), μ y σ son constantes. de acuerdo a nuestra convención consideremos diferencial estocástico, ecuación (0) y es interpretado como:

$$S_t = S_0 + \mu \int_0^t S_s ds + \sigma \int_0^t S_s dB_s,$$

lo describimos más formalmente:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dB_t,$$

sugerimos la siguiente interpretación: μ es la tasa de retorno media instantánea y σ^2 es la tasa de retorno de varianza instantánea del stock S. Tomando una solución S_t de

(0) de la forma $S_t = f(t, B_t)$, *para alguna función* $f = f(t, x) \in C^2(R^2)$ *aquí queremos que* $f(0, B_0) = S_0$, *es decir,* $f(0, 0) = S_0$, *(0) puede ser reescrito como:*

$$df(t, B_t) = \mu f(t, B_t)dt + \sigma f(t, B_t)dB_t \qquad (1)$$

por la fórmula de Itô:

$$df(t, B_t) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, B_t)dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t, B_t)dB_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, B_t)d\langle B\rangle_t$$

puesto que $\langle B\rangle_t = 1$, *es decir:*

$$df(t, B_t) = [\frac{\delta f}{\delta t}(t, B_t) + \frac{1}{2}\frac{\delta^2 f}{\delta x^2}(t, B_t)]dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t, B_t)dB_t.$$

una comparación muestra que la función f *satisface:*

$$(A) \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = \sigma f$$

y

$$(B) \qquad \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \mu f$$

De (A) se sigue que $f(t, x) = C(t)e^{\sigma x}$ *y en (B)*

$$C'(t)e^{\sigma x} + \frac{1}{2}\sigma^2 C(t)e^{\sigma x} = \mu C(t)e^{\sigma x},$$

es decir, $C'(t) = (\mu - \frac{\sigma^2}{2})C(t)$, *con solución:* $C(t) = Ce^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t}$, *asi* $f(t, x) = C(t)e^{\sigma x} = Ce^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma x}$, *de* $f(0, 0) = S_0$ *obtenemos* $C = S_0$:

$$f(t, x) = S_0 \exp\{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma x\}$$

y

$$S_t = f(t, B_t) = S_0 \exp\{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma B_t\}.\square$$

esta prueba produce una solución, pero no investiga la unicidad de la solución.

Caracterización de Levi de un movimiento Browniano

Proposición 4.2.5. *Sea* $B_t = (B_t^1, B_t^2, B_t^3, ...B_t^d)$ *un movimiento Browniano en* $(\Omega, F, (F_t), P)$, *entonces:*

(a) $B_t^i B_t^j$ *es una martingala, para todo* $i \neq j$.

(b) $\langle B^i, B^j\rangle = 0$, *para todo* $i \neq j$.$\square$

Proposición 4.2.6. *Sea $B = (B^1, B^2, ..., B^d)$ una martingala local continua, R^d-valuada. Entonces B es un movimiento Browniano en $(\Omega, F, (F_t), P)$ si y solo si satisface:*

$$\langle B^i \rangle_t = t \quad y \quad \langle B^i, B^j \rangle_t = 0$$

para todo $t \geq 0$ y $i, j \in \{1, ..., d\}$ con $i \neq j$. Prueba: libro[5]. pág. 167.

Cambio de medida

Cambio localmente equivalente de probabilidad

Siendo $(\Omega, F, (F_t), P)$ espacio de probabilidad filtrado con la filtración continua derecha (F_t) y F_0 consiste de todos los conjuntos nulos y sus complementos. Una medida de probabilidad Q en $F_\infty = \sigma(\cup_{t\geq 0} F_t)$ es llamada localmente equivalente a P, si la restricción Q/F_t es equivalente a la restricción P/F_t, para cada $t \geq 0$, esto no implica que P y Q sean equivalentes en F_∞, ellos son mutuamente singulares en este *σ-algebra* grande: Para $f \in L^1(P)$, $g \in L^1(Q)$

$$M_t = \frac{d(Q/F_t)}{d(P/F_t)} \quad E_t^P(f) = E_P(f/F_t) \quad y \quad E_t^Q(g) = E_Q(g/F_t) \quad t \geq 0$$

y con el teorema de Bayes:

(a) M_t es una *P-martingala* estrictamente positiva con $M_0 = 1$.

(b) Para $f \in L^1(Q, F_T)$, tendremos $E_t^Q(f) = E_t^P(M_T f)/M_T = E_t^P(M_T f)/E_t^P(M_T)$ $0 \leq t < T$.

(c) El proceso adaptado (Z_t) es una *Q-martingala* (*Q-martingal local*) si y solo si el proceso $(M_t Z_t)$ es una *P-martingala* (*P-martingala local*).

El proceso M es llamado densidad proceso asociado con la medida P y Q.

Asumiremos a la densidad proceso M continua:

Proposición 4.2.7. *(Teorema de Girsanov) Asumiendo que Q es localmente equivalente a P y X una P-semimartingala continua. Entonces X es también una Q-semimartingala continua y el compensador u_X^Q con respecto a Q es dado por:*

$$u_X^Q = u_X^P + \langle X, \log(M) \rangle$$

Así la integral estocástica es invariante sobre cambio a medida de probabilidad localmente equivalente. Con P, Q y $M_t = \frac{d(Q/F_t)}{d(P/F_t)}$, $t \geq 0$ como anteriormente.

Proposición 4.2.8. *La integral estocástica $I = (H \bullet X)^P$ es la P-semimartingala continua única satisfaciendo:*

(a) $I_0 = 0$, $u_I^P = H \bullet u_X^P$ *y*

(b) $\langle I, Y\rangle = H \bullet \langle X, Y\rangle$, *para cada* P*-semimartingala continua* Y.

Prueba: libro[5], pág. 171.

Proposición 4.2.9. *Sean* P, Q *y* X, *como anteriormente, entonces:*

(a) El espacio $L(X)$ *es el mismo respecto a* P *y* Q.

(b) Para $H \in L(X)$ *tendremos* $(H \bullet X)^P = (H \bullet X)^Q$

Prueba: libro[5], pág. 172.

Proposición 4.2.10. *Sea* $X \in S_+$, *entonces* $U_X^Q = U_X^P \exp(\langle log(X), log(M)\rangle)$

4.2.1. La exponencial martingala local

Sea L una martingala local continua con $L_0 = 0$, la exponencial Doleans $Z = \varepsilon(L)$ de L es definida como:

$$Z_t = \varepsilon_t(L) = \exp(L_t - \frac{1}{2}\langle L\rangle_t)$$

y tendremos una ecuación integral estocástica para Z.

Proposición 4.2.11. *El proceso* $Z = \varepsilon(L)$ *satisface* $Z_t = 1 + \int_0^t Z_s dL_s$ *y* $Z_0 = 1$. *Así* Z *es una martingala local no negativa y asimismo una supermartingala. Consecuentemente* Z *es una martingala si y solo si* $E(Z_t) = 1$, *para todo* $t \geq 1$.

Prueba: Sea $\zeta_t = L_t - \frac{1}{2}\langle L\rangle_t$. Entonces $\zeta_0 = 0$ y ζ es una semimartingala continua con martingala local parte L. Así $\langle\zeta\rangle = \langle L\rangle$. Aplicando la fórmula de Itô a $Z = exp(\zeta)$, implica que:

$$dZ_t = exp(\zeta_s)d\zeta_s + \frac{1}{2}exp(\zeta_s)d\langle\zeta\rangle_s = Z_s d(L_s - \frac{1}{2}\langle L\rangle_s) + \frac{1}{2}Z_s d\langle L\rangle_s = Z_s dL_s.$$

Puesto que $Z_0 = 1$, esto sigue que $Z_t = 1 + \int_0^t Z_s dL_s$, y además, Z es una martingala local. □

En forma diferencial la ecuación para Z se lee $dZ_t = Z_t dL_t$ que es análogo a la ecuación diferencial $dx(t) = x(t)dt$ con solución única $x(t) = x(0)e^t$.

Proposición 4.2.12. *Sea* L *una martingala local continua con* $L_0 = 0$ *y* $E_t = \varepsilon_t(L) = \exp(L_t - \frac{1}{2}\langle L\rangle_t)$. *Entonces cada solución* $X \in S$ *de la ecuación diferencial estocástica exponencial* $dX_s = X_s dL_s$ *tiene la forma* $X_t = X_0 E_t$, *para todo* $t \geq 0$.

Prueba: Asumiendo que $X \in S$ satisfaciendo $dX_s = X_s dL_s$. Entonces $U_t = X_t E_t^{-1}$ una semimartingala continua. Puesto que $E_0 = 1$, tendremos $U_0 = X_0$ y muestra que $U_t = U_0$, $t \geq 0$. Puesto que U es una semimartingala continua, es equivalente con $dU_t = 0$, por la regla del producto estocástico:

$$dU_t = X_t dE_t^{-1} + E_t^{-1}dX_t + d\langle X, E^{-1}\rangle_t$$

De $dE_t = E_t dL_t$ y $dX_t = X_t dL_t$, es decir, $E = 1 + E \bullet L$, $X = X_0 + X \bullet L$ y con lo anterior inferimos que:

$$d\langle E\rangle_t = E_t^2 d\langle L\rangle_t$$

y

$$d\langle X, E^{-1}\rangle_t = -E_t^{-2} d\langle X, E\rangle_t = -E_t^{-2} X_t E_t d\langle L, L\rangle_t = -X_t E_t^{-1} d\langle L\rangle_t$$

usando la fórmula de Itô y $dE_t = E_t dL_t$,

$$dE_t^{-1} = -E_t^{-2} dE_t + E_t^{-3} d\langle E\rangle_t = -E_t^{-1} dL_t + E_t^{-1} d\langle L\rangle_t,$$

consecuentemente el término $X_t dE_t^{-1}$ anteriormente se convierte en $-X_t E_t^{-1} dL_t + X_t E_t^{-1} d\langle L\rangle_t$, ya que de $dX_t = X_t dL_t$, el término $E_t^{-1} dX_t$ se convierte $X_t E_t^{-1} dL_t$ así todos los términos anteriores se cancelan y $dU_t = 0$, como deseábamos. □

Proposición 4.2.13. *Sea V una martingala local continua R^d-valuada y $\gamma \in L(V)$. Entonces la solución general $X \in S$ de la ecuación diferencial estocástica exponencial:*

$$dX_t = X_t \gamma_t dV_t$$

tiene la forma $X_t = X_0 \varepsilon_t(\gamma \bullet V)$.

Prueba: Reescribiendo $dX_t = X_t . d(\gamma \bullet V)_t$ y usando las proposiciones anteriores con $L = \gamma \bullet V$.

Proposición 4.2.14. *Sea L una martingala local continua con $L_0 = 0$, si $\langle L\rangle_t \leq C(t) < \infty$ en Ω, para alguna función no decreciente (determinística) $C : [0, \infty[\to [0, \infty[$, entonces la exponencial Doleans $Z = \varepsilon(L)$ es una martingala con $E_P(Z_t^2) \leq 4e^{C(t)}$ si $\langle L\rangle_t \leq C$, para todo $t \geq 0$, donde la constante C no depende de t, entonces la martingala Z es L^2-acotada*

Prueba: libro[5], pág. 174.

Ejemplo 4.2.2. *Sea W un movimiento Browniano uno dimensional, μ una constante y $L = \mu \bullet W$, es decir, $L_t = \int_0^t \mu dW_s = \mu W_t$, entonces $\langle L\rangle_t = (\mu^2 \bullet \langle W\rangle)_t = \int_0^t \mu^2 ds = \mu^2 t$ y satisface la anterior proposición, consecuentemente:*

$$Z_t = \varepsilon_t(L) = \exp(L_t - \frac{1}{2}\langle L\rangle_t) = \exp(\mu W_t - \frac{1}{2}\mu^2 t),$$

$t \geq 0$ es una martingala.□

Proposición 4.2.15. Condición Novikov
Sea M una martingala local continua con $M_0 = 0$ y asumiendo que $E_P[\exp(\frac{1}{2}\langle M\rangle_t)] < \infty$, $0 \leq t < \infty$, entonces $Z = \varepsilon(M)$ es una martingala.

Teorema De Girsanov's

Sea Q medida de probabilidad localmente equivalente a P y $M_t = \frac{d(Q/F_t)}{d(P/F_t)}$, sea W un movimiento Browniano *d-dimensional* en $(\Omega, F, (F_t), P)$, W no puede esperarse que sea un movimiento Browniano con respecto a Q. Sin embargo, W difiere de un movimiento *Q-Browniano* (un movimiento Browniano en $(\Omega, F, (F_t), Q)$) solo por un proceso de variación acotado. Sea W una *P-semimartingala* (*R^d-valuado*) y consecuentemente es una *Q-semimartingala*. Así:

$$W^Q := W - u_W^Q$$

es una martingala *Q-local* y puesto que el compensador u_W^Q es un proceso de variación acotado (*R^d-valuado*) tenemos que: $\langle (W^i)^Q \rangle_t = \langle W^i \rangle_t = t$ y

$$\langle (W^i)^Q, (W^j)^Q \rangle_t = \langle W^i, W^j \rangle_t = 0$$

$\forall i, j = \{1, 2, ..., d\}$ con $i \neq j$.
de la caracterización de levi *d-dimensional*, se sigue que W^Q es un movimiento Browniano con respecto a Q. Puesto que W es una *P-martingala*, tendremos $u_W^P = 0$ y usando la fórmula de Girsanov's:

$$u_W^Q = u_W^P + \langle W, log(M) \rangle = \langle W, log(M) \rangle$$

M continua:

$$\langle W, log(M) \rangle = (\langle W^1, log(M) \rangle, \langle W^2, log(M) \rangle, ... \langle W^d, log(M) \rangle)$$

El movimiento *Q-Browniano* W^Q asume la forma:

$$W^Q = W - \langle W, log(M) \rangle$$

y asumiendo $M = \varepsilon(\gamma \bullet W)$

$$\frac{dM_t}{M_t} = \gamma(t).dW_t$$

para algún proceso $\gamma \in L(W)$. γ_j, W^j denotan componentes del proceso *R^d-valuado* γ y W. M es continua y $log(M) = \gamma \bullet W - A = \sum_{i=1}^d \gamma_i \bullet W^i - A$, donde A es un proceso de variación acotado continuo $A = \frac{1}{2} \langle \gamma \bullet W \rangle$ así:

$$\langle W^j, log(M) \rangle = \langle W^j, \sum_{i=1}^d \gamma_i \bullet W^i \rangle$$

$$= \sum_{i=1}^d \gamma_i \bullet \langle W^j, W^i \rangle = \int_0^t \gamma_j(s) ds = (\int_0^t \gamma(s) ds)_j$$

se sigue que:

$$\langle W, log(M) \rangle_t = \int_0^t \gamma(s) ds$$

así el movimiento *Q-Browniano* W^Q asume la forma:

$$W_t^Q = W_t - \int_0^t \gamma(s) ds$$

Proposición 4.2.16. *Sea W un movimiento Browniano d-dimensional en $(\Omega, F, (F_t), P)$, Q una medida de probabilidad localmente equivalente a P y asumiendo que $M_t = \frac{d(Q/F_t)}{d(P/F_t)}$ satisfaciendo $M = \varepsilon(\gamma \bullet W)$, es decir:*

$$\frac{dM_t}{M_t} = \gamma(t).dW_t$$

$t \geq 0$, para algún $\gamma \in L(W)$. Entonces el proceso $W_t^Q = W_t - \int_0^t \gamma(s)ds$ es un movimiento Browniano en $(\Omega, F, (F_t), Q)$.

Volatilidad

Sea $T > 0$ y S una semimartingala continua estrictamente positiva en $[0, T]$ sea $Z_t = log(S_t)$ y :

$$V(t,T) = \sqrt{\langle S\rangle_T - \langle S\rangle_t} = \sqrt{\langle S\rangle_t^T}$$

$$\sum(t,T) = \sqrt{\langle Z\rangle_T - \langle Z\rangle_t} = \sqrt{\langle Z\rangle_t^T}, \quad t \in [0,T]$$

representación como límite en probabilidad:

$$\langle S\rangle_t^T = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum (S_{t_k} - S_{t_{k-1}})^2$$

y

$$\langle Z\rangle_t^T = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum (Z_{t_k} - Z_{t_{k-1}})^2 = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum (log(\frac{S_{t_k}}{S_{t_{k-1}}}))^2$$

donde el límite es tomado sobre todas las particiones $\Delta = \{t_k\}$ de $[t,T]$, es claro que $\langle S\rangle_t^T$ y $\langle Z\rangle_t^T = \langle log(Y)\rangle_t^T$ son medidas de la volatilidad porcentual respectiva del proceso S_t sobre el intervalo $[t, T]$.
Esta variación cuadrática no cambia con otra medida de probabilidad equivalente.
Sea (S_t) el precio de un seguro, las trayectorias de S son gobernadas por la probabilidad del mercado P, con la medida de probabilidad equivalente Q. Es usual pensar que la volatilidad de S respecto a la medida coinciden con la volatilidad de S respecto a la probabilidad P, y podemos asi estimar la tasa de mercado. Así S satisface

$$dS_t = \mu(t)dt + \nu(t)dW_t, \quad t \in [0,T]$$

donde $W_t = (W_t^1, W_t^2, ...W_t^d)$ movimiento Browniano d-dimensional en $(\Omega, F, (F_t), P)$ y $\nu \in L(W)$ entonces $d\langle S\rangle_t = \|\nu(t)\|^2$ y

$$V^2(t,T) = \int_t^T \|\nu(t)\|^2 ds$$

y

$$dV^2(0,t) = \|\nu(t)\|^2 dt$$

así $\|\nu(t)\|^2$ es una densidad para $V^2(0,t)$. Se refiere a el proceso $\nu(t)$ como el proceso volatilidad de S.

Capítulo 5

APLICACIÓN A FINANZAS

En este capítulo, con lo desarrollado anteriormente, se soluciona las ecuaciones dinámicas de mercado comercial establecidas por Black-Scholes para un bono principal (B_t) y para un Stock (S_t). Se obtendrá características especiales deducidas de la solución, tanto para el bono principal como para el stock, tales como las tasas de retorno, (r) y (μ) dadas en la ecuación original. Cuando cambiamos la probabilidad (P) por otra localmente equivalente, cambian las ecuaciones dinámicas, buscamos que con la probabilidad nueva Q sean también dinámicas las nuevas ecuaciones tanto para el stock como para el bono.
Luego, definimos una estrategia comercial $\phi_t = (K_t, H_t)$ como un proceso $\mathbb{R}^2$-*valuado* predicible, sin arbitraje y con arbitraje, cuando es llamado financiamiento-asimismo, estrategia comercial acotada inferiormente (o domada).
La estrategia comercial ayuda a dar una interpretación del comportamiento de precios de un bono principal y Stock a semejanza con lo que sucede realmente en un mercado actual, finalmente, damos un ejemplo donde existe una estrategia comercial $\phi_t = (K_t, H_t)$ en un mercado arbitrado, pero este no es acotada inferiormente (o no domada)

5.0.2. El modelo

Considerando un mercado comercial con solo dos seguros un bono principal y un Stock. Identificamos estos seguros con sus procesos de precios B_t y S_t los cuales denotan el precio del bono y stock en el tiempo $t \in [0, T]$, respectivamente. Aquí T denota el horizonte de tiempo finito.
Donde todo el comercio es asumido parado en el tiempo T. Y asumimos varias asunciones sobre el mercado:

(a) Los seguros pueden ser comprados y vendidos en una cantidad ilimitada y son infinitamente divisibles (es decir, cualquier fracción del seguro puede ser comprado o vendido).

(b) No hay transacción de costos.

(c) El bono y el stock satisfacen:

$$dB_t = r(t)B_t dt, \quad B_0 = 1 \quad y$$

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu(t)dt + \sigma(t)dW_t, \qquad S_0 = x$$

donde $r, \sigma : [0,T] \to \mathbb{R}_+$ y $\mu : [0,T] \to \mathbb{R}$ son funciones continuas (procesos determinísticos), W es un movimiento Browniano en el espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, F, (F_t), P)$ y (F_t) la filtración es aumentada generada por W donde esta filtración es continua derecha.
Donde $B_t = exp(\int_0^t r(s)ds)$, en el modelo el bono es no estocástico, B_t es constante para todo $t \in [0,T]$, de la naturaleza no decreciente de B_t, no está sujeta a riesgo.
Una inversión en el bono puede ser liquidada en cualquier tiempo más aún sin incurrir en perdida. Consecuentemente r es llamado tasa de retorno riesgo-libre.
La ecuación para el precio del Stock, puede ser solucionada, con $\sigma(t)dW_t = d(\sigma \bullet W)_t$ y reescribiendo

$$dS_t - \mu(t)S_t dt = S_t d(\sigma \bullet W)_t$$

multiplicando con $m(t) = exp(-\int_0^t \mu(s)ds)$, $X_t = m(t)S_t$ y usando la regla del producto estocástico obtenemos:

$$dX_t = X_t d(\sigma \bullet W)_t$$

con solución única

$$X_t = X_0 \varepsilon_t(\sigma \bullet W),$$

observando que $X_0 = S_0$ y multiplicando con $m(t)^{-1} = exp(\int_0^t \mu(s)ds)$ esto se convierte en:

$$S_t = S_0 exp(\int_0^t \mu(s)ds)\varepsilon_t(\sigma \bullet W)$$

$$= S_0 exp(\int_0^t (\mu(s) - \frac{1}{2}\sigma(s)^2)ds + \int_0^t \sigma(s)dW_s)$$

Puesto que aquí $\varepsilon_t(\sigma \bullet W)$ es una martingala con una media constante, $S_0 = x$ una constante, tomando esperanza tendremos

$$E(S_t) = S_0 exp(\int_0^t \mu(s)ds)$$

y podemos así considerar $\mu(t)$ como la tasa de retorno esperada instantáneamente, en el stock S en el tiempo t, también tendremos la igualdad $d\langle \log(S) \rangle_t = \sigma(t)^2 dt$, viendo $\sigma(t)$ como el volatílidad porcentual instántanea de S en el tiempo t.

Una inversión de $\frac{1}{B_t}$ dólares en el bono en tiempo cero crece a un dólar en tiempo t en riesgo menor y representa el valor en tiempo cero de un dólar a ser recibido en tiempo t.
Así $\frac{1}{B_t}$ es el factor discontinuo, expresando los precios constantes, tiempo cero dólares.

Por ejemplo $S_t^B = \frac{S_t}{B_t}$ es el proceso de precios Stock expresado en dólares constantes. Esta discontinuidad elimina un flujo inflacionario en precios, el cual es consecuencia del hecho que el dinero es guardado por intereses, y es un necesario primer paso hacia transformar el proceso de precios B_t, S_t en martingalas con respecto a alguna otra medida de probabilidad equivalente idóneo P_B en F_T.
La discontinuidad del bono $B_t^B = \frac{B_t}{B_t} = 1$ es ya una martingala en cualquier medida de probabilidad. Un corto desarrollo que envuelve la regla del producto estocástico muestra que:

$$dS_t^B = \sigma(t)S_t^B[\sigma(t)^{-1}(\mu(t) - r(t))dt + dW_t] \quad ...(2)$$

5.0.3. Medida martingala equivalente

Al eliminar el flujo $(\mu - r)S_t^B$ de la ecuación anterior (2), tendríamos:

$$W_t^B = \int_0^t \gamma(s)ds + W_t,$$

donde $\gamma = \frac{\mu - r}{\sigma}$ (σ es asumida estrictamente positiva) entonces:

$$dW_t^B = \sigma(t)^{-1}(\mu(t) - r(t))dt + dW_t$$

y (2) se podrá reescribir:

$$dS_t^B = \sigma(t)S_t^B dW_t^B \quad ...(0)$$

La tasa esperada de retorno μ en el stock desaparece y la ecuación (0) se soluciona con:

$$S_t^B = S_0\varepsilon_t(\sigma \bullet W^B).$$

Luego es deseable fijar una medida de probabilidad P_B en el cual W_t^B sea un movimiento Browniano, para que la ecuación (0) pueda ser considerada como la dinámica del proceso S_t^B, sobre la probabilidad P_B y sea S_t^B una P_B-*martingala*
La probabilidad P_B es fácilmente fijada. Como:

$$W_t^B = W_t + \int_0^t \gamma(s)ds$$

es suficiente determinar P_B, tal que, el proceso de densidad $M_t = \frac{d(P_B/F_t)}{d(P/F_t)}$ satisface: $dM_t = -\gamma(t)M_t dW_t$, equivalentemente $M_t = \varepsilon_t(-\gamma \bullet M)$, para todo $t \in [0, T]$, puesto que M y $\varepsilon(-\gamma \bullet W)$ son ambas martingalas en $[0, T]$ es suficiente tener:

$$\frac{dP_B}{dP} = \varepsilon_T(-\gamma \bullet W) = exp(-\int_0^T \gamma(s)dW_s - \frac{1}{2}\int_0^T \gamma(s)^2 ds)$$

y esto define una medida de probabilidad idónea P_B en F_T. La condición $\gamma \in L(W)$ es satisfecha puesto que γ es continua.

La propiedad crucial es el hecho que $\frac{dP_B}{dP} > 0$ y así la medida de probabilidad P_B es actualmente equivalente a la medida de probabilidad original P.

Proposición 5.0.17. *Los procesos de precios discontinuos $B_t^B = 1$, S_t^B son martingalas con respecto a la probabilidad P_B.*

Por esto P_B es llamado la medida martingala equivalente, y como $S_t = B_t S_t^B$ (0) implica que:

$$\frac{dS_t}{S_t} = r(t)dt + \sigma(t)dW_t^B$$

Puesto que W_t^B es un movimiento Browniano con respecto a P_B, esta ecuación es la dinámica de S_t sobre P_B.
Notamos que con el cambio a la medida de probabilidad martingala equivalente P_B se reemplaza la tasa de retorno esperado μ de S sobre P con la tasa de retorno *riesgo-libre* r en el bono. Con respecto a P_B, cuando al inversor le corresponde riesgo neutral. La posibilidad de mayor ganancia es compensada a un *riesgo-neutral* del inversor que no espera retorno mayor que el retorno *riesgo-libre* demandado de cualquier bien.
En consecuencia P_B es también llamado probabilidad riesgo neutral. Por contraste a la probabilidad original P es ahora llamado la probabilidad mercado.
La naturaleza no estocástica de γ implica que el movimiento Browniano $W_t^B = W_t + \int_0^t \gamma(s)ds$ genera la misma filtración aumentada (F_t) como el movimiento Browniano original W.

5.0.4. Estrategia comercial y ausencia de arbitraje

Una estrategia comercial (dinámica de portafolio) es un proceso *R^2-valuado* predicible:

$$\phi_t = (K_t, H_t),$$

$t \in [0, T]$, satisfaciendo $K \in L(B)$ y $H \in L(S)$. Este requerimiento asegura que la diferencial estocástica KdB y HdS estan definidas. Ya que la naturaleza especial de nuestro proceso B y S es fácilmente vista equivalente con la condición:

$$\int_0^T |K_t|dt + \int_0^T H_t^2 dt < \infty \quad P - as,$$

El proceso ϕ es interpretado como un portafolio cambiando continuamente sostenido sobre K_t unidades del Bono y H_t unidades del Stock en el tiempo t. Los coeficientes K y H son llamados pesos del portafolio, así:

$$V_t(\phi) = K_t B_t + H_t S_t$$

es el precio de este portafolio en el tiempo t.
Tal que un portafolio es llamado domado (acotado inferiormente), si el proceso de precios $V_t(\phi)$ es acotado inferiormente, es decir:

$$V_t(\phi) \geq C > -\infty,$$

para todo $0 \leq t \leq T$ y alguna constante C.
Consideremos un portafolio $\phi_t = (K_t, H_t)$ el cual sostiene un número constante de

acciones (movimientos), del bono (B_t) y el stock (S_t), excepto para un solo rebalanceo del portafolio en el tiempo t_0, en otras palabras asumiremos lo siguiente:

$$K_t = \begin{cases} a_- & \text{, si } t \leq t_0 \\ a_+ & \text{, si } t > t_0 \end{cases}$$

y

$$H_t = \begin{cases} b_- & \text{, si } t \leq t_0 \\ b_+ & \text{, si } t > t_0 \end{cases}$$

donde a_-, a_+, b_-, b_+, son constantes. El reajuste en el tiempo t_0 es llamado *financiamiento-asimismo*, en otras palabras la posición en el tiempo t_0 es vender y proceder a invertir inmediatamente dentro de la nueva posición. Esto es equivalente con el requerimiento $V_{t_0}(\phi) = a_+B_{t_0} + b_+S_{t_0}$ el cual es equivalente con la siguiente igualdad:

$$\triangle V_t\phi) = V_t(\phi) - V_{t_0}(\phi) = a_+(B_t - B_{t_0}) + b_+(S_t - S_{t_0}) = K_t\triangle B_t + H_t\triangle S_t \quad t > t_0$$

y esto nos dará la siguiente definición general.

Definición 5.1. *La estrategia comercial $\phi_t = (K_t, H_t)$ es llamada financiamiento-asimismo si está satisface:*

$$dV_t(\phi) = K_t dB_t + H_t dS_t$$

tal estrategia comercial ϕ es interpretada como un portafolio el cual es continuamente reequilibrado (reajustado), sin inyección o retiro de fondos. Una transferencia de fondos se da en el tiempo de esta inyección. La condición de financiamiento-asimismo puede también ser escrito como:

$$V_t(\phi) = V_0(\phi) + \int_0^t (K_u dB_u + H_u dS_u), \quad t \in [0, T]$$

El proceso de precios discontinuos $V_t^B(\phi) = \frac{V_t(\phi)}{B_t}$ de una estrategia comercial $\phi = (K, H)$, tiene la forma:

$$V_t^B(\phi) = K_t + H_t S_t^B.$$

Proposición 5.0.18. *Sea $\phi_t = (K_t, H_t)$ una estrategia comercial domada (acotada inferiormente). Entonces ϕ es financiamiento-asimismo si y solo si el proceso de precios portafolio discontinuo satisface:*

$$dV_t^B(\phi) = H_t dS_t^B$$

Prueba: Sea $V_t = V_t(\phi)$, $V_t^B = K_t + H_t S_t^B$ y por la regla del producto estocástico, se sigue que:

$$dV_t^B = dK_t + H_t dS_t^B + S_t^B dH_t + d\langle H, S^B\rangle_t \tag{1}$$

Observando que:

$$dS_t^B = -rS_tB_t^{-1}dt + B_t^{-1}dS_t$$

y podemos escribir:

$$S_t^B = S_0 + \int_0^t dS_r^B = A_t + (B^{-1} \bullet S)_t,$$

donde A es un proceso de variación acotada continuo. Consecuentemente:

$$\langle H, S^B \rangle = \langle H, B^{-1} \bullet S \rangle = B^{-1} \bullet \langle H, S \rangle,$$

en otras palabras:

$$d\langle H, S^B \rangle_t = B_t^{-1} d\langle H, S \rangle_t,$$

así (1) se puede reescribir como:

$$dV_t^B = H_t dS_t^B + [dK_t + S_t^B dH_t + B_t^{-1} d\langle H, S \rangle_t] \quad ...(2)$$

Similarmente de $V_t = K_t B_t + H_t S_t$, por la regla del producto estocástico y la propiedad de variación acotada de B:

$$\begin{aligned} dV_t &= K_t dB_t + B_t dK_t + H_t dS_t + S_t dH_t + d\langle H, S \rangle_t \\ &= K_t dB_t + H_t dS_t + [S_t dH_t + B_t dK_t + d\langle H, S \rangle_t] \\ &= K_t dB_t + H_t dS_t + B_t [S_t^B dH_t + dK_t + B_t^{-1} d\langle H, S \rangle_t] \end{aligned}$$

usando (2) se puede reescribir como: $dV_t^B - H_t dS_t^B$, consecuentemente:

$$dV_t = K_t dB_t + H_t dS_t + B_t (dV_t^B - H_t dS_t^B).\square$$

Observación

Llamaremos, a una estrategia comercial ϕ estática si esta es constante, es decir, los coeficientes $K_t = K_0$ y $H_t = H_0$ no depende de t, entonces, obviamente:

$$dV_t(\phi) = d(K_0 B_t + H_0 S_t) = K_0 dB_t + H_0 dS_t$$

es decir, ϕ es *financiamiento-asimismo.*

Proposición 5.0.19. *Sea ϕ una estrategia comercial financiamiento-asimismo entonces:*

(a) $V_t^B(\phi)$ es una P_B-martingala local.

(b) Si ϕ es domada (acotada inferiormente), entonces $V_t^B(\phi)$ es una P_B-supermartingala.

(c) Si $V_t(\phi)$ es un proceso de variación acotada, entonces:

$$dV_t(\phi) = r(t) V_t(\phi) dt.$$

Prueba: (a) De $dV_t^B(\phi) = H_t dS_t^B$, se concluye que $V^B(\phi) = V_0(\phi) + H \bullet S^B$.
(b) Una martingala local, el cual es acotada inferiormente es una supermartingala.
(c) Si $V_t(\phi)$ es un proceso de variación acotada, lo mismo es verdad del proceso $V_t^B(\phi)$, el cual es una P_B-*martingala-local*, y es constante en el tiempo y $dV_t^B = 0$, y sigue que:

$$dV_t = d(B_t V_t^B) = V_t^B dB_t + B_t dV_t^B = r(t) B_t V_t^B dt = r(t) V_t dt. \Box$$

Observaciones

Una estrategia comercial domada ϕ es una estrategia el cual no tolera pérdidas sin una acotación. En otras palabras una máxima pérdida es conocida en adelante.
Si el proceso de precios $V(\phi)$ tiene trayectorias de variación acotada entonces la estrategia ϕ es llamada riesgo menor.
En el modelo $dV_t = K_t dB_t + H_t dS_t = K_t dB_t + \mu(t) H_t S_t dt + \sigma(t) H_t S_t dW_t$ y así mismo la propiedad de *riesgo-libre* puede solo suceder en el caso $\sigma H = 0$.

Estrategia arbitrada

Una estrategia comercial ϕ es llamada estrategia arbitrada si es *financiamiento-asimismo* y satisface:

$$V_0(\phi) = 0, \quad V_T(\phi) \geq 0 \quad y \quad P(V_T(\phi) > 0) > 0$$

tal que una estrategia puede ser originada y mantenida hasta el tiempo T sin fondos, con llevando no riesgo $(V_T(\phi) \geq 0)$ y guía a un juego final positivo con probabilidad positiva.
En general se cree que la estrategia arbitrada no existe en un mercado financiero real. Esta creencia es basada en la convicción que la aparición de una estrategia arbitrada direcciona (guía) el mercado de jugadores a tratar de explotarla en una escala muy grande. Esta estrategia mueve el camino y hace desaparecer la oportunidad.
El siguiente ejemplo mostrará que la estrategia arbitrada existe en nuestro modelo. Sin embargo, también mostraremos que no existe una estrategia arbitrada domada. Este hecho es una consecuencia inmediata de la existencia de la medida martingala equivalente P_B.

Ejemplo 5.0.3. *Incluso cuando vamos en contra, pagar la apuesta, la estrategia ganadora puede ser fijada por crecimiento suficiente al jugarse en cada apuesta. Tomando en el resultado* $X_n = +1$ *de un lanzamiento de una moneda,* $+1/-1$ *con probabilidad* $P(X_n = 1) = p$, $P(X_n = -1) = q$, $n \geq 1$. *Donde* $2^n = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} 2^k$ *apostamos* 2^{n-1} *dólares a través de la moneda en el n-enésimo tiro (jugada). Ganando de a 1 dólar en tiempo* $\tau = \text{ínf}\{n \geq 1 / X_n = 1\}$, *donde:*

$$E(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} nP(\tau = n) = \sum_{n=0}^{\infty} nq^{n-1}p = p\frac{1}{(1-q)^2} = \frac{1}{1-q} < \infty$$

Nuestra ganancia de a 1 es finito, el tiempo de parada τ *no es acotada y tenemos por lo que debemos estar preparados a una apuesta arbitraria larga.*

En una situación continua tal estrategia puede ser implementada en intervalos de tiempo finito $[0, T]$. *Considerando nuestro modelo, (mercado simple de Black-Scholes), con* $r = \mu = 0$ *y* $\sigma = 1$. *En este caso:*

$$B_t = 1,$$

$$dS_t = S_t dW_t$$

y

$$S_t = \exp(W_t - \frac{t}{2}),$$

$t \in [0, T]$. *Donde los bienes* B, S *son martingalas con respecto a la probabilidad mercado (original)* P. *La integral estocástica*

$$I(t) = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{T-s}} dW_s,$$

es una martingala local en $[0, T[$ *con variación cuadrática*

$$\langle I \rangle_t = \int_0^t \frac{1}{T-s} ds = log(\frac{T}{T-t}),$$

donde $s = \log(T/(T-t))$ *si y solo si* $t = t(s) = T(1 - e^{-s})$ *con crecimiento* $t(s) : [0, \infty[\to [0, T[$, *sigue que* $J(s) = I(t(s))$ *es una martingala local continua en* $[0, \infty[$ *con variación cuadrática* $\langle J \rangle_s = \langle I \rangle_{t(s)} = s$ *y así mismo es un movimiento Browniano en* $[0, \infty[$.

En particular $\rho_\alpha = \inf\{s > 0 / J(s) = \alpha\} < \infty$ *casi seguramente, para cada número real* α. *Muestra que:*

$$\tau_\alpha = \inf\{t > 0 / I(t) = \alpha\} < T$$

y $I(T \wedge \tau_\alpha) = \alpha$ *casi seguramente. Y* $\phi = (K, H)$ *es una estrategia comercial satisfaciendo* $K_t = I(t \wedge \tau_\alpha) - H_t S_t$, *entonces:*

$$V_t(\phi) = K_t + H_t S_t = I(t \wedge \tau_\alpha) = \int_0^t (T-s)^{\frac{-1}{2}} 1_{[s \leq \tau_\alpha]} dW_s,$$

especialmente $V_0(\phi) = 0$, $V_T(\phi) = \alpha$ *y*

$$dV_t(\phi) = (T-t)^{\frac{-1}{2}} 1_{[t \leq \tau_\alpha]} dW_t,$$

de $dB_t = 0$ *y* $dS_t = S_t dW_t$ *sigue que la condición* $financiamiento$*-asimismo asume la forma:*

$$H_t S_t dW_t = K_t dB_t + H_t dS_t = dV_t(\phi) = \frac{1}{\sqrt{T-t}} 1_{[t \leq \tau_\alpha]} dW_t$$

y esto puede ser considerado satisfaciendo $H_t = (S_t \sqrt{T-t})^{-1} 1_{[t \leq \tau_\alpha]}$. *Con* K_t *definida,* ϕ *es una estrategia* $financiamiento$*-asimismo que nos alcanza una cantidad arbitraria de* α *dólares en el tiempo* T *casi seguramente con no inversión inicial en el tiempo cero. Esta estrategia no es domada.*

Proposición 5.0.20. *En el modelo (mercado simple de Black-Scholes), la estrategia arbitrada (acotada inferiormente) domada no existe.*

Prueba: Sea ϕ una estrategia comercial *financiamiento-asimismo* domada con $V_T^B(\phi) \geq 0$ y $V_0^B(\phi) = 0$. Entonces $V_t^B(\phi)$ es una P_B-*supermartingala*, en particular $E_{P_B}(V_T^B(\phi)) \leq E_{P_B}(V_0^B(\phi)) = 0$. Por lo tanto, $V_T^B(\phi) = 0$, P_B-*as* y asimismo también P-*as*, consecuentemente ϕ no puede ser una estrategia arbitrada.$\square$

Proposición 5.0.21. *Sea ϕ una estrategia comercial financiamiento-asimismo. Si $V_T(\phi) = 0$ y $|V_t(\phi)| \leq C$, $t \in [0, T]$, para alguna constante C, entonces $V_t(\phi) = 0$, para todo $t \in [0, T]$.*

Prueba: Escribimos $V_t^B = V_t^B(\phi) = \frac{V_t(\phi)}{B_t}$. Entonces V_t^B es una P_B-*martingala local* el cual es uniformemente acotada y así mismo una martingala. De $V_T^B = 0$ y la propiedad de martingala se sigue que $V_t^B = 0$, P_B-*as* y así mismo P-*as*, para todo $t \in [0, T]$. $\square$

Proposición 5.0.22. *Sea ψ, χ estrategias comercial financiamiento-asimismo y asumiendo que $V_T(\psi) = V_T(\chi)$. Si $|V_T(\psi) - V_T(\chi)| \leq C$, $t \in [0, T]$, para alguna constante C, entonces $V_t(\psi) = V_t(\chi)$ para todo $t \in [0, T]$.*$\square$

Capítulo 6

CONCLUSIONES

Las conclusiones del presente trabajo son las siguientes:

- La integral estocástica para semimartingalas continuas definida y desarrollada en el presente trabajo nos ayuda a dar solución, a las ecuaciones del modelo de mercado establecidas por Black-Scholes, que modela en dos ecuaciones dinámicas el comportamiento de dos seguros un bono principal y un stock, en un mercado comercial (como los mercados actuales), en el cual las soluciones nos darán información del comportamiento de las tasas, llamándolas tasas de retorno esperada, riesgo libre y tasa de retorno esperada instantáneamente.

- Cambiando la medida a medida martingala equivalente, variaran las ecuaciones, y se solucionaran similarmente, cambiando las posiciones de las tasas, siendo el nuevo modelo parecido al anterior.

- Siendo el mercado comercial de dos seguros se define una estrategia comercial de los dos como un proceso estocástico R^2-*valuado* predicible, para poder ver la conveniencia de las inversiones en el mercado. Viendo la estrategia comercial en un mercado arbitrado y no arbitrado, definimos la estrategia comercial financiamiento-asimismo, y domada. Concluyendo que no existe una estrategia comercial domada en un mercado arbitrado.

- La teoría de martingalas y de integración estocástica nos dan un valioso medio (instrumento) para poder modelar, interpretar y solucionar, problemas económicos en mercados comerciales, comportamientos financieros de los precios de bienes, bonos, derivados.

Bibliografía

[1] Applebaum, David; *Levy Processes and Stochastic Calculus*, Ed. Board Cambridge University Press, 2004

[2] Barry, James; *Probabilidad: Un curso de Nivel Intermedio*, IMCA 2004

[3] Parzen, Emanuel; *Procesos Estocásticos.* Ed. Holden-Day. Inc., 1972

[4] Ross, Westerfield, Jordan; *Fundamentos de Finanzas Coorporativas.* séptima Edición, Mc Graw Hill, 2006.

[5] Meyer, Michael; *Continuous Stochastic Calculus With Applications to Finance.* Chapman Hall/CrC.

[6] Zdzistaw Brzezniak and Tomasz Zastawniak. *Basic Stochastic Processes.* Springer.

[7] Rudin, Walter. *Análisis Real y Complejo.* Mc Graw-Hill Tercera Edición, 1988.

[8] Fernadez, Pedro j. *Medida e Integração.* IMPA 1976.