

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE INGENIERÍA CIVIL



FORMULACIÓN VARIACIONAL Y SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE LA ELASTICIDAD LINEAL CON EL MÉTODO RADIAL DE INTERPOLACIÓN DE PUNTOS

TESIS

Para Optar el Título Profesional de:

INGENIERO CIVIL

ROGERS BILL CÓRDOVA HINOJOSA

Lima - Perú

Digitalizado por:

2013

**Consortio Digital del
Conocimiento MebLatam,
Hemisferio y Dalse**

Dedicatoria:

Dedico este trabajo a mis padres y a mi familia quienes son responsables, en principio, de mis ganas de andar sobre el camino del conocimiento, que aunque no siempre sea fácil de transitar, es una de las pocas cosas que posee valor verdadero.

Agradecimientos:

Agradezco a todos aquellos que hicieron posible la realización de este trabajo, principalmente a mi asesor el Ing. L. Flores, gracias a quien pude aprender de una gran variedad de temas ingenieriles y matemáticos; además también debo agradecer al profesor Rolando Astete del Departamento Académico de Ciencias Básicas de la Facultad de Ingeniería Civil quien con su ayuda y consejos facilitó la edición de este trabajo, finalmente agradezco a Erick Atencio, gran amigo y colega de estudios con quien pude discutir y afianzar ideas acerca de los temas que involucran la realización del presente trabajo.

ÍNDICE

Portada	I
ÍNDICE	III
RESUMEN	VI
LISTA DE FIGURAS	VII
LISTA DE TABLAS	IX
LISTA DE SIGLAS Y SÍMBOLOS	X
CAPÍTULO I GENERALIDADES	1
1.1 INTRODUCCIÓN	1
1.2 ESTADO DEL ARTE	2
1.3 MÉTODOS SIN MALLA	3
1.3.1 Métodos sin Malla Estructurados y No Estructurados	3
1.3.2 Técnicas de Aproximación sin Malla	4
1.3.3 Método Derivable de Partículas Hidrodinámicas (SPH)	7
1.3.4 Método de Partículas con Kernel Reproductivo (RKPM)	8
1.3.5 Método de Interpolación Radial de Puntos (RPIM)	8
1.3.6 Método de Mínimos Cuadrados Móviles (MLS)	9
1.3.7 Métodos de Partición a la Unidad (PUM)	11
1.4 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	11
1.5 HIPÓTESIS	12
1.6 OBJETIVOS Y ALCANCES	12
1.7 METODOLOGÍA	13
1.8 ORGANIZACION DE LA TESIS	13
CAPÍTULO II FORMULACIÓN DÉBIL DE LA ECUACIÓN DE LA ELASTOSTÁTICA	15
2.1 DEFINICIONES PRELIMINARES	15
2.1.1 Operaciones y Operadores Tensoriales	15
2.1.2 Mecánica del Medio Continuo y el Problema General de la Elasticidad Lineal	17

2.1.3	Espacios Vectoriales de Dimensión Infinita	19
2.2	ESPACIOS FUNCIONALES	21
2.2.1	Espacios de Hilbert	21
2.2.2	Espacios de Sobolev	25
2.3	PROBLEMAS DE CONTORNO ELÍPTICOS	25
2.3.1	Método de Galerkin	32
2.4	FORMA DÉBIL DEL PROBLEMA GENERAL DE ELASTICIDAD LINEAL . . .	33
2.4.1	Formulación Débil Considerando Condiciones Mixtas	33
2.4.2	Existencia y Unicidad de la Formulación Débil	35
CAPÍTULO III FUNCIONES DE BASE RADIAL		40
3.1	FUNCIONES DE FORMA	40
3.2	FUNCIONES DE BASE RADIAL	41
3.3	INTERPOLACIÓN DE DATOS CON FUNCIONES DE BASE RADIAL	42
3.4	FUNCIONES DEFINIDAS POSITIVAS	44
3.4.1	Funciones y Matrices definidas Positivas	44
3.4.2	Caracterización Integral de Funciones Definidas Positivas	46
3.4.3	Funciones Radiales Definidas Positivas	48
3.5	EJEMPLOS DE FUNCIONES ESTRICTAMENTE DEFINIDAS POSITIVAS . .	48
3.5.1	Función Gaussiana	48
3.5.2	Función Inversa Multicuadrática Generalizada	49
3.6	INTERPOLACIÓN CON PRECISIÓN POLINOMIAL	49
CAPÍTULO IV MÉTODO RADIAL DE INTERPOLACIÓN DE PUNTOS		53
4.1	INTERPOLACIÓN RADIAL DE PUNTOS	53
4.1.1	Construcción Teórica de las Funciones de Forma	53
4.1.2	Construcción Numérica de las Funciones de Forma	57
4.2	FORMULACIÓN GLOBAL DÉBIL	61
4.2.1	Matriz de Rigidez	63
4.2.2	Vector de Fuerzas de Cuerpo	64
4.2.3	Vector de Fuerzas de Superficie	65
4.2.4	Representación Matricial de la Formulación Débil	65
4.2.5	Incorporación de las Condiciones de Frontera	66
4.3	INTEGRACIÓN NUMÉRICA	68
4.4	IMPLEMENTACIÓN COMPUTACIONAL	72

CAPÍTULO V APLICACIÓN DEL MÉTODO RADIAL DE INTERPOLACIÓN DE PUN-	
TOS	74
5.1 VIGA DE TIMOSHENKO	74
5.2 PROBLEMA DE BOUSSINESQ	79
5.3 ESFUERZOS SOBRE UN SUELO CON VARIOS ESTRATOS	85
5.4 SECCIÓN DE TÚNEL	91
5.5 MURO DE CORTE	95
CAPÍTULO VI CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	103
6.1 CONCLUSIONES	103
6.2 RECOMENDACIONES	104
BIBLIOGRAFÍA	106

RESUMEN

En el presente trabajo se plantea la solución del problema del cálculo de esfuerzos y deformaciones en un medio continuo, expresado en la ecuación de Poisson, mediante funciones de interpolación; por esta razón primero se revisarán conceptos relacionados a solución de Ecuaciones en Derivadas Parciales (EDPs) mediante el uso de conceptos del Análisis Funcional, con los cuales se obtendrá la Formulación Débil de la ecuación de Poisson. Llegado a este punto, se procede a encontrar la solución numérica del problema mediante la aproximación de la misma como combinación lineal de funciones de interpolación. Finalmente, se presentará formalmente el Método Radial de Interpolación de Puntos y se aplicará dicho método a la solución de algunos ejemplos prácticos de interés de la ingeniería civil mediante la redacción de pequeños programas en MatLab, comparando los resultados obtenidos con soluciones teóricas y otras obtenidas mediante algún software de ingeniería reconocido.

SUMMARY

This paper raises the solution of the problem of calculation of stresses and strains in a continuum media, summarized in Poisson equation, using interpolation functions, therefore first be reviewed concepts of solution to Partial Differential Equations (PDEs) using concepts of functional analysis, which will be obtained with the weak formulation of the Poisson equation, at this point, proceed to the numerical solution of the problem by approximating the solution as a linear combination of interpolation functions. Finally, the Radial Point Interpolation Method will be formally submitted and apply to the solution of some practical examples of civil engineering interest by writing small programs in MatLab, comparing results obtained with theoretical solutions or other obtained by some recognized engineering software.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1	Soportes compactos	4
Figura 3.1	Dominio de soporte local	41
Figura 3.2	Función radial de soporte compacto para: un punto diferente a los nodos (izquierda), para un nodo (centro), y derivada de la función en un punto diferente a los nodos (derecha)	43
Figura 4.1	Función de forma $\Phi(x, y)$	61
Figura 4.2	Derivada de la función de forma $d\Phi/dx$	61
Figura 4.3	Integración en métodos sin malla basados en Galerkin: Malla de fondo (Izquierda) y fondo con estructura de celdas (Derecha)	69
Figura 4.4	Dominios de soporte de los puntos de Gauss	71
Figura 5.1	Viga de Timoshenko	74
Figura 5.2	Distribución de nodos de la viga de Timoshenko (Derecha), puntos de Gauss en cada celda (Izquierda)	76
Figura 5.3	Desplazamientos de la viga de Timoshenko	76
Figura 5.4	Comparación de la distribución de esfuerzos en la viga de Timoshenko	79
Figura 5.5	Problema de Boussinesq	80
Figura 5.6	Nube de puntos del problema de Boussinesq	81
Figura 5.7	Desplazamiento de nodos	81
Figura 5.8	Comparación de la distribución de esfuerzos verticales: RPIM (izquierda), Teórico (Derecha)	84
Figura 5.9	Comparación de la distribución de esfuerzos horizontales: RPIM (izquierda), Teórico (Derecha)	84
Figura 5.10	Comparación de la distribución de esfuerzos de corte: RPIM (izquierda), Teórico (Derecha)	85
Figura 5.11	Dimensiones del problema planteado	86

Figura 5.12	Nube de puntos del problema	87
Figura 5.13	Desplazamiento de los nodos	88
Figura 5.14	Distribución de esfuerzos verticales $\sigma_{xx}(kg/m^2)$	89
Figura 5.15	Distribución de esfuerzos horizontales $\sigma_{yy}(kg/m^2)$	90
Figura 5.16	Distribución de esfuerzos de corte $\sigma_{xy}(kg/m^2)$	90
Figura 5.17	Dimensiones del túnel	91
Figura 5.18	Nube de puntos del problema	92
Figura 5.19	Deformación de la nube de puntos	92
Figura 5.20	Distribución de esfuerzos verticales $\sigma_{xx}(kg/cm^2)$	94
Figura 5.21	Distribución de esfuerzos horizontales $\sigma_{yy}(kg/cm^2)$	94
Figura 5.22	Distribución de esfuerzos de corte $\sigma_{xy}(kg/cm^2)$	95
Figura 5.23	Dimensiones del muro de corte	95
Figura 5.24	Nube de puntos del problema	96
Figura 5.25	Desplazamiento lateral del muro	96
Figura 5.26	Desplazamientos horizontales $u_x(cm)$	98
Figura 5.27	Distribución de esfuerzos verticales $\sigma_{xx}(kg/cm^2)$	98
Figura 5.28	Distribución de esfuerzos horizontales $\sigma_{yy}(kg/cm^2)$	99
Figura 5.29	Distribución de esfuerzos de corte $\sigma_{xy}(kg/cm^2)$	99
Figura 5.30	Distribución de esfuerzos verticales SAP2000 $\sigma_{xx}(kg/cm^2)$	100
Figura 5.31	Distribución de esfuerzos horizontales SAP2000 $\sigma_{yy}(kg/cm^2)$	100
Figura 5.32	Distribución de esfuerzos de corte SAP2000 $\sigma_{xy}(kg/cm^2)$	101
Figura 5.33	Esfuerzos $\sigma_{yy}(kg/cm^2)$	102

LISTA DE TABLAS

Tabla 1.1	Categorías de técnicas de interpolación sin malla	6
Tabla 4.1	Tipos de funciones de base radial	54
Tabla 4.2	Resultados calculados con el script <i>Mat_Phi.m</i> (sólo se muestran los 20 primeros datos de los 400 disponibles)	60
Tabla 4.3	Resumen de fórmulas nodales	72
Tabla 5.1	Comparación de desplazamientos verticales (m) sobre el eje de la viga	77
Tabla 5.2	Comparación entre los esfuerzos teóricos y calculados con método RPIM y MLS	78
Tabla 5.3	Comparación de desplazamientos verticales a nivel superficial	82
Tabla 5.4	Esfuerzos en los nodos sobre el eje $x = 0$	83
Tabla 5.5	Parámetros elásticos de los estratos del suelo	87
Tabla 5.6	Desplazamientos de nodos sobre el nivel superficial	88
Tabla 5.7	Esfuerzos en los nodos sobre el eje $x = 0$	89
Tabla 5.8	Desplazamientos de nodos sobre el nivel superficial $y = 10$	93
Tabla 5.9	Esfuerzos en los nodos sobre el eje $x = 0$	93
Tabla 5.10	Desplazamientos de nodos sobre el eje $x = 0$	97
Tabla 5.11	Esfuerzos en los nodos sobre el eje $y = 0$	101

LISTA DE SIGLAS Y SÍMBOLOS

$a(,)$	Forma bilineal
\overline{A}	Tensor de orden 2
$C^\infty(V)$	Conjunto de funciones infinitamente derivables sobre V
$C_0(\Omega)$	Espacio de funciones continuas con soporte compacto sobre Ω
$C(\Omega)$	Espacio de funciones continuas sobre Ω
$D(\Omega)$	Espacio de funciones infinitamente diferenciables y con soporte compacto en Ω
$D'(\Omega)$	Espacio de distribuciones sobre Ω
D^p	Derivada distribucional de orden p
E	Matriz del material ó Módulo de Young
H	Espacio de Hilbert
H^m	Espacio de Hilbert cuya derivada hasta de orden m pertenece a L^2
H_0^m	Espacio H^m con soporte compacto
$\overline{H^k}$	Complemento de MR en H^k
J	Funcional lineal de energía ó funcional lineal de aproximación
\overline{J}	Funcional que incluye las condiciones iniciales
$L^2(\Omega)$	Espacio de funciones cuadrado integrable
$L^p(\Omega)$	Espacio de funciones L^p sobre (Ω)
L	Transformación lineal de desplazamientos a deformaciones
$l()$	Forma lineal
$M_n(\mathbb{R})$	Espacio vectorial de matrices cuadradas de orden n
$EFGM$	Método Libre de Galerkin
FDM	Método de Diferencias Finitas
FEM	Método de Elementos Finitos
$GFDM$	Método General de Diferencias Finitas
MLS	Mínimos Cuadrados Móviles

MM	Métodos sin Malla
MR	Núcleo no trivial de la transformación de esfuerzos
NEM	Método de los Elementos Naturales
PUM	Método de Partición a la Unidad
PIM	Método de Interpolación Puntual
RBF	Funciones de Base Radial
$RPIM$	Método Radial de Interpolación de Puntos
SPH	Método de las Partículas Derivables
WBF	Funciones de Base Rectangular
$W^{m,p}$	Espacio de Sobolev cuya derivada hasta de orden m pertenece a L^p
tr	Traza de una representación matricial
$\nabla \cdot$	Divergencia
∇	Gradiente
σ	Tensor de esfuerzos
ϵ	Tensor de deformación
δ_{nm}	Delta de Kronecker
Ω	Dominio del problema
Γ	Frontera del dominio del problema
$\partial\Omega$	frontera de Ω
$\sigma : \epsilon$	Producto escalar de los tensores σ y ϵ
$(,)$	Producto interno
$\ \cdot \ $	Norma de un espacio funcional
$u \otimes v$	Producto de Kronecker, de u y v
\oplus	Suma directa de dos espacios vectoriales
$\bigcup_i \Omega_i$	Unión de las particiones Ω_i de Ω
$\bigcap_i \Omega_i$	Intersección de las particiones Ω_i de Ω
λ	Multiplicadores de Lagrange
μ, λ	Constantes de Lamé
ν	Razon de Poisson

CAPÍTULO I

GENERALIDADES

1.1. INTRODUCCIÓN

Las ecuaciones en derivadas parciales son útiles para resolver problemas relacionados con la ingeniería, por lo tanto su tratamiento y solución son importantes para su aplicación en problemas del ámbito ingenieril. Es así que en el presente trabajo se estudia un procedimiento para resolver la ecuación en derivadas parciales conocida como “Ecuación de la Elastostática”, para su posterior aplicación a problemas de interés.

En general los métodos utilizados para la resolución de estas ecuaciones en derivadas parciales dependen de la discretización del dominio mediante una “malla de puntos”. Teniendo en cuenta la dificultad de generar dicha malla, el tiempo que se dedica a ello y problemas relativos a la convergencia ocasionados por la forma de las mallas, en las últimas décadas se desarrolla una nueva línea de investigación con el fin de evitar finalmente el empleo de mallas en los métodos de solución. Es así que surge una familia de métodos de aproximación denominados métodos sin malla y es precisamente uno de estos métodos el que se presenta en este trabajo.

Los métodos sin malla nacieron con el objetivo de eliminar la dependencia del empleo de mallas en las formulaciones variacionales, con la construcción de aproximaciones basadas en conjuntos de puntos conocidos como nubes de puntos. Algunas de ventajas importantes de estos métodos son:

- Sencillez para implementar necesidades de remallado (h-adaptabilidad).
- Facilidad en tratar problemas con discontinuidades móviles.
- Facilidad al tratar problemas de grandes deformaciones.

Sin embargo los métodos sin malla no están exentos de desventajas, como por ejemplo:

- La necesidad de utilizar esquemas de integración de alto grado de precisión para calcular correctamente las funciones de forma utilizadas por el método.
- La complejidad necesaria para incorporar condiciones de borde en comparación con los métodos enteramente basados en mallas.
- El costo computacional en general es mayor que el requerido por el FEM.

Como se menciona anteriormente, en el presente trabajo se trata de presentar de manera detallada la aplicación de uno de estos métodos sin malla denominado Método Radial de Interpolación de Puntos (RPIM), por esta razón se hace mención a su formulación matemática e implementación numérica, además de algunas características del método relacionadas con la forma de las funciones de aproximación y la certeza de la existencia y unicidad de la solución propuesta por el método, también se presenta la obtención e integración de la forma débil del problema, la imposición de condiciones de frontera esenciales y la forma de calcular las funciones de forma.

1.2. ESTADO DEL ARTE

Actualmente los métodos sin malla se encuentran en la mayoría de los casos en fase de desarrollo, sin embargo algunos trabajos de los últimos años, apoyados en conceptos de soluciones de ecuaciones diferenciales parciales con espacios funcionales, han contribuido de manera muy importante a la comprensión del funcionamiento de los mismos y de los principios que permiten construir espacios de funciones de aproximación de una manera adecuada [11]. Otros métodos han sufrido un desarrollo algo mayor y su estudio se ha extendido a problemas no lineales, como los problemas estudiados por Belytschko en [3].

Históricamente el primer método sin malla se denominó "Smooth Particle Hydrodynamics" y fue desarrollado en 1977 por Lucy y Monaghan; el siguiente fue el "Reproducing Kernel Particle Method" [14] de Liu y Chen en 1995 el cual es una generalización del anterior y prueba la consistencia lineal del método.

Luego se desarrollaría la familia de métodos basados en esquemas de Mínimos Cuadrados Móviles (MLS), dentro de los cuales se encuentran métodos como el "Diffuse Element

Method” de Nayroles [18] en 1992 y las “nubes-hp” de Duarte y Oden [8] en 1996. Posteriormente y casi en paralelo, Duarte y Oden, por un lado, y Babuska y Melenk por otro, observaron que la particularidad fundamental de estos métodos residía en la construcción de una partición de la unidad, con lo cual se estableció el método “Partición de la Unidad” (PUM) a mediados de los 90 por Babuska en [1].

Todos los métodos anteriores presentan en su formulación más general, funciones de forma no estrictamente interpolantes, como consecuencia, los resultados calculados no necesariamente coinciden con los valores nodales, así que, como respuesta a este hecho aparecieron los denominados métodos de interpolación, tales como el “Point Interpolation Method” (PIM) alrededor del 2005, el cual si posee la propiedad de delta de Kronecker, y al cual posteriormente se le adicionaría otro desarrollo matemático, el de las funciones de base radial (RBF). Estas funciones son adecuadamente estudiadas por Fassenhauer en [9], con lo cual se obtiene una variante del método anterior denominado “Radial Point Interpolation Method” (RPIM). Por otro lado, dentro de estos métodos de carácter interpolante aparece también el aporte propuesto por Sukumar [24] en 1998, denominado “Método de los Elementos Naturales” (NEM).

En la siguiente sección se describirá, con un poco más de detalle, algunas de las técnicas de aproximación antes mencionadas.

1.3. MÉTODOS SIN MALLA

1.3.1. Métodos sin Malla Estructurados y No Estructurados

Para resolver problemas en derivadas parciales con condiciones de frontera se discretiza el dominio del problema mediante un conjunto de nodos, los cuales pueden estar estructurados o no. En este caso debe entenderse al conjunto de nodos como estructurado si el conjunto de dichos nodos está uniformemente distribuido y espaciado. Por el contrario el conjunto de nodos no estructurados hace referencia al conjunto en el cual los nudos se encuentran arbitrariamente distribuidos y espaciados en todo el dominio [15].

Generalmente los métodos sin malla estructurados se emplean cuando el tiempo es una variable del problema; sin embargo, un problema dinámico involucra el uso de nubes de puntos estructuradas y no estructuradas. En este caso el tiempo se discretiza en una nube

estructurada de puntos y el espacio en una nube no estructurada [10].

Por otro lado, es necesario mencionar que los métodos sin malla basan sus aproximaciones enteramente en función de la ubicación de los nodos. Estas aproximaciones se denominan funciones de forma (o funciones de aproximación) y son estas funciones las que caracterizan al método o técnica. Una característica de las funciones de forma es que si bien están definidas en todo el dominio general del problema de análisis, su valor difiere de cero sólo en una región local cerrada, alrededor del nodo en el que se desea conocer su valor, a esta región local se le denomina soporte compacto de la función o también dominio de influencia del nodo; generalmente los soportes son discos o rectángulos como los mostrados en la figura (1.1).

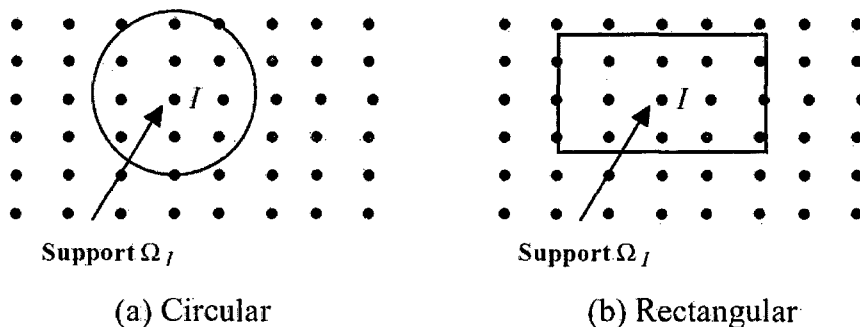


Figura 1.1: Soportes compactos

1.3.2. Técnicas de Aproximación sin Malla

En general un buen método para crear funciones de forma libre de mallas debe cumplir con los siguientes requisitos:

1. *Dar buenos resultados para nodos distribuidos razonable y arbitrariamente (distribución nodal arbitraria).*
2. *Ser numéricamente estable (estabilidad).*
3. *Poseer cierto orden de consistencia (consistencia).*
4. *Producir funciones de forma que poseen soporte compacto.*
5. *La función incógnita aproximada por la función de forma debe ser compatible (compatibilidad) en todo el dominio del problema cuando la formulación es global débil, o debe*

ser compatible dentro de la cuadratura del dominio cuando la formulación es local débil.

6. *Poseer la propiedad delta de Kronecker, es decir que si se evalúa dicha función en su nodo origen debe resultar uno en dicho nodo y cero en los demás nodos del dominio de soporte.*
7. *Ser computacionalmente eficiente (eficiencia).*

El requisito de una distribución nodal arbitraria es esencial para el desarrollo de un método sin malla robusto aplicable a problemas prácticos de ingeniería. La condición de estabilidad se refiere a dos cuestiones, la primera es la estabilidad de interpolación, lo que significa que las funciones de forma construidas deben ser estables con respecto a pequeñas perturbaciones de la localización del nodo en el dominio de soporte, esto requiere que la matriz, creada usando los nodos distribuidos arbitrariamente, esté bien condicionada; la segunda cuestión es la estabilidad de la solución, lo que significa que la solución numérica a través de las funciones de forma en un procedimiento de formulación variacional, no debe presentar oscilaciones numéricas.

La consistencia es importante para una buena aproximación a la función exacta, pues de esta manera el límite de la solución discreta propuesta será la solución exacta, garantizando la convergencia del método sin malla. Se requiere un soporte compacto para producir un sistema discreto de ecuaciones del tipo esparcido que se pueda resolver con eficacia; esto es extremadamente importante para los grandes sistemas de ecuaciones. Cuando se emplea interpolación con funciones monótonas, es recomendable una alta densidad de puntos, de manera que se tengan nubes de puntos próximas y los puntos lejanos no tengan intersección entre sí.

Si bien es cierto la propiedad de función delta de Kronecker no es obligatoria, ya que es posible tomar medidas especiales para imponer condiciones esenciales de borde si la función de forma no tiene esta propiedad, el presente trabajo muestra que es posible obtener esta propiedad sin demasiadas complicaciones y de esta manera garantizar el cumplimiento de las condiciones impuestas.

El desarrollo de métodos para la construcción efectiva de funciones de forma es una de las áreas más importantes en la investigación de estos métodos. Existen varias formulaciones de aproximación, GR Liu en [15] clasifica estas formulaciones en tres grandes categorías sobre la base de los tipos de teorías de la aproximación o representación de la función. Estas son:

la representación integral, la representación en serie, y la representación diferencial. En la tabla (1.1) se enumeran algunas de las técnicas en estas categorías.

Tabla 1.1: Categorías de técnicas de interpolación sin malla

Categorías	Técnicas de aproximación sin malla
Representación Integral	Partícula hidrodinámica Suavizada (SPH)
	Método de Reproducción del Núcleo de Partículas (RKPM)
Representación en Series	Mínimos Cuadrados Móviles (MLS)
	Métodos de Interpolación Puntual (PIM, RPIM)
	Métodos de Partición de la Unidad (PUM)
Representación Diferencial	Método General de Diferencias Finitas (GFDM)

Acercas de la categorización anterior se puede mencionar que en el método de representación integral la función se representa en un dominio local (dominio suavizado o dominio de influencia) a través de una integral ponderada, a menudo se utiliza el método Partícula Hidrodinámica Suavizada (SPH). Los métodos de representación en series tienen una larga historia, ellos están bien desarrollados en los FEM y ahora se utilizan en los métodos sin malla basados en distribuciones arbitrarias de nodos, la aproximación por mínimos cuadrados móviles (MLS), fue el método más utilizado hasta finales de la década de los 90, posteriormente con la invención del método de interpolación puntual (PIM) y la adición de funciones de base radial (RBF), el método RPIM y los métodos basados en RBF son actualmente los de mayor aplicación.

El método de representación en diferencias, que también se ha desarrollado y utilizado durante mucho tiempo, es el método de diferencias finitas (FDM), los métodos de representación en diferencias se utilizan generalmente para el establecimiento de sistema de ecuaciones basadas en formulaciones fuertes, tales como el FDM y el método general de diferencias finitas (GFDM).

A continuación se describe brevemente la manera en la que algunos métodos sin malla construyen sus funciones de forma.

1.3.3. Método Derivable de Partículas Hidrodinámicas (SPH)

Este método es el más antiguo de los métodos sin malla. Fue desarrollado por Gingold y Monaghan en 1977 [7]. En este método se crea una aproximación para una única función $u(x)$ en un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ según:

$$u^h(x) = \int_{\Omega} w(x-y, h)u(y)dy \quad (1.1)$$

Donde $w(x-y, h)$ es una función de ponderación o función kernel, y h una medida del tamaño del soporte.

La forma discreta de la aproximación anterior puede ser obtenida por una cuadratura numérica, ésta forma es:

$$u^h(x) = \sum_i w(x-x_i)u_i\Delta V_i = \sum_i \phi_i(x)u_i \quad (1.2)$$

Donde ΔV_i es el volumen (en 3D), el área (en 2D), o la longitud (en 1D) asociada al nodo i y $\phi_i(x) = w(x-x_i)\Delta V_i$ es la función de forma del método SPH. Una de las dificultades en la aplicación de lo anterior es el desarrollo de una técnica robusta para asignar ΔV_i a cada uno de los nodos.

Ya que fue mencionado, es necesario introducir la idea de función kernel para lograr una mejor idea sobre este método y el siguiente. Así que primero se debe entender que en estos métodos se realizan aproximaciones mediante funciones pertenecientes a espacios de Hilbert (los que se definen en el siguiente capítulo). Entonces, dado un espacio funcional de Hilbert H con un producto interno definido $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ (donde cada punto representa a cualquier elemento de H) una función $K : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es llamada *kernel reproductivo* de H si:

1. $K(\cdot, x) \in H \quad \forall x \in \Omega$
2. $f(x) = \langle f, K(\cdot, x) \rangle_H \quad \forall f \in H \quad y \quad \forall x \in \Omega$

La segunda propiedad mencionada, es conocida como propiedad de reproducción y será referida en el siguiente método.

1.3.4. Método de Partículas con Kernel Reproductivo (RKPM)

Siguiendo la línea de desarrollo del SPH, Liu y sus colaboradores [7] desarrollaron el RKPM y propusieron una función de corrección para las funciones kernel en ambos casos (continuo y discreto). La aproximación en este método está dada por:

$$u^h(x) = \int_{\Omega} C(x, x - y) \Phi_{\alpha}(x - y) u(y) dy \quad (1.3)$$

Donde $C(x, x - y)$ es llamada función de corrección, la cual es obtenida por imposición de condiciones de kernel reproductivo (mencionado anteriormente), e implica que la aproximación obtenida debería reproducir exactamente polinomios y puede ser expresada como una combinación lineal de una base polinomial; α es el parámetro de dilatación de la función kernel $\Phi_{\alpha}(x - y)$; de forma análoga al método anterior la forma discreta de la aproximación resulta:

$$u^h(x) = \sum_i \Phi_{\alpha}(x, x - x_i) u(x_i) \Delta V_i = \sum_i \phi_i(x) u_i \quad (1.4)$$

1.3.5. Método de Interpolación Radial de Puntos (RPIM)

El método de interpolación puntual (PIM) [16] es uno de los métodos cuya función de aproximación se representa en series, y es empleado para la creación de funciones de forma de métodos sin malla. En este método la función de aproximación $u(x)$ en un punto de interés $x \in \mathbb{R}^2$ tiene la forma:

$$u(x) = \sum_{i=1}^m B_i(x) a_i \quad (1.5)$$

Donde $B_i(x)$ son las funciones base definidas en \mathbb{R}^2 a \mathbb{R}^2 , m es el número de funciones base, generalmente en este método se trabaja con una base polinomial; a_i son los coeficientes de cada función base. Para la función de aproximación, primero se forma un dominio de soporte local en el punto de interés x , el cual incluye un total de n nodos.

En el RPIM, generalmente se considera el uso de dos tipos de funciones base, tanto funciones polinomiales como funciones de base radial, así, la función de interpolación se puede expresar como (1.6), donde $a \in \mathbb{R}^n$ y $b \in \mathbb{R}^m$:

$$u(x) = \sum_{i=1}^n R_i(x) a_i + \sum_{i=1}^m p_j(x) b_j = R(x)^T a + p(x)^T b = \begin{bmatrix} R(x)^T & p(x)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

Donde $R_i(x)$ es la función de base radial (RBF), n es el número de RBFs, $p_j(x)$ es la base polinomial en \mathbb{R}^2 a \mathbb{R}^2 , m es el número de funciones base polinomiales.

Para determinar los coeficientes a_i y b_j , se plantea un sistema de ecuaciones lineales basado en el dominio de soporte local formado para el punto de interés x , entonces al evaluar la función de aproximación en cada uno de los n nodos del dominio de soporte local y considerando ciertas restricciones, se obtiene:

$$\begin{aligned} u_s &= R_0 a + P_m b \\ P_m^T a &= 0 \end{aligned}$$

Estas ecuaciones se representan matricialmente como sigue:

$$\tilde{u} = \begin{bmatrix} u_s \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_0 & P_m \\ P_m^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = G a_0$$

Teniendo en cuenta ciertas características, descritas en el capítulo 4, se puede obtener la solución del sistema planteado:

$$u(x) = [R(x)^T p(x)^T] G^{-1} \tilde{u} = \tilde{\Phi}^T(x) \tilde{u}$$

Con este último resultado se obtienen las funciones de forma:

$$\tilde{\Phi}^T(x) = [\phi_1(x) \ \phi_2(x) \ \dots \ \phi_n(x) \ \phi_{n+1}(x) \ \dots \ \phi_{n+m}(x)]$$

Finalmente, la función de forma RPIM correspondiente al vector de desplazamiento nodal $\Phi(x)$ se obtiene de las primeras n componentes del vector $\tilde{\Phi}^T(x)$ y la aproximación del método se podría expresar como sigue:

$$u(x) = \Phi^T(x) u = \sum_{i=1}^n \phi_i u_i \quad (1.7)$$

1.3.6. Método de Mínimos Cuadrados Móviles (MLS)

Este método emplea funciones de interpolación radial (RBF) o funciones de interpolación rectangular (WBF), y consiste en resolver la formulación global de la aproximación mediante

la solución de varios sistemas lineales pequeños ([10] y [11]). A continuación se expone sucintamente la estructura lineal algebraica de MLS.

La aproximación se realiza mediante:

$$u(x) = \sum_{j=1}^m c_j p_j(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (1.8)$$

Donde, $c_j \in \mathbb{R}$, y $p_j(x)$ es un polinomio de aproximación. El problema consiste en encontrar los c_j y para esto se plantea lo siguiente:

$$\min \|f - u\|_{2,w}, \quad f \in \mathbb{R}^n$$

Luego se define el producto interno como:

$$(f, g)_w = \sum_{i=1}^N f(x_i)g(x_i)w(x_i), \quad g \in \mathbb{R}^n$$

Además, es recomendable que la función de ponderación w_i sea definida positiva y monótona decreciente. Luego se debe observar que:

$$\|f\|_{2,w}^2 = \sum_{i=1}^N [f(x_i)]^2 w(x_i)$$

Por otro lado se sabe que la menor distancia entre dos espacios normados es el espacio ortogonal, si $u \in U$, entonces

$$f - u \perp_w U \Leftrightarrow (f - u, p_k)_w = 0 \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

Reemplazando la aproximación de $u = \sum_{i=1}^m c_j p_j$, se obtiene:

$$\sum_{i=1}^m c_j (p_j, p_k)_w = (f, p_k)_w$$

Lo que puede ser expresado de la siguiente manera:

$$Gc = f_p$$

$$\text{donde } G_{ij} = (p_i, p_j)$$

Luego:

$$c = G^{-1} f_p$$

Y finalmente:

$$u = \sum_{i=1}^m G^{-1} f_p p_j \quad (1.9)$$

1.3.7. Métodos de Partición a la Unidad (PUM)

A mediados de los 90, surge el método de Partición de la Unidad [1]. Los autores expresaban que cuando se tiene cierta información acerca de la solución de un problema, parece lógico intentar incluir dicha información en el espacio de funciones de forma del método de Galerkin. Una de las características que los autores destacan del método es la capacidad de incluir este conocimiento previo de la solución del problema en el espacio de aproximación.

La idea básica de este método es comenzar con una partición de un dominio abierto y acotado Ω , tal que $\bigcup_i \Omega_i \supseteq \Omega$ con algún traslape leve de los subdominios es decir $\bigcap_i \Omega_i \neq \emptyset$. Asociado a estos subdominios se elige una *partición de la unidad* es decir una familia de funciones w_i continuas, no negativas y, de soporte compacto en Ω_i tal que para todo punto $x \in \Omega$ se tiene que:

$$\sum_{i=1} w_i(x) = 1 \quad (1.10)$$

Al igual que RPIM o MLS, la función de aproximación se presenta en series. Así, la aproximación sobre el dominio global Ω se construye mediante aproximaciones locales u_i :

$$u^h(x) = \sum_{i=1} u_i(x)w_i(x), \quad x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \quad (1.11)$$

Babuska y Melenek [1] plantearon la siguiente función de forma (considerando $u_i = \phi_i^0$):

$$u^h(x) = \sum_{i=1} \phi_i^0(x)(a_{0i} + a_{1i}x + \dots + a_{ki}x^k + b_{1i} \sinh nx + b_{2i} \cosh nx) \quad (1.12)$$

Donde $\phi_i^0(x)$ es la función de Shepard [7]. Los coeficientes a_{ki} , b_{1i} y b_{2i} son incógnitas de la aproximación que pueden ser determinadas por el método de Galerkin o procedimientos de colocación.

1.4. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

La solución numérica de ecuaciones en derivadas parciales, es un tema de gran relevancia para su aplicación en problemas de ingeniería. Dentro de este campo es conocido y utilizado el Método de los Elementos Finitos (FEM); sin embargo, según lo presentado hasta este punto, este método no es el único, así que resulta de interés conocer y estudiar alguna de las otras alternativas de solución, la cual posea alguna característica especial, como

por ejemplo que el método sea estrictamente interpolante, o que requiera menor cantidad de nodos sobre el dominio para su desarrollo. En este caso particular, el Método Radial de Interpolación de Puntos posee ambas características, por tales motivos se incrementan sus posibilidades de aplicabilidad para resolver ecuaciones en derivadas parciales relativas a problemas de ingeniería.

1.5. HIPÓTESIS

La hipótesis de la presente tesis plantea que la solución al problema de la elasticidad lineal, expresada en la ecuación en derivadas parciales, posee solución única y ésta puede ser obtenida, a partir de una combinación lineal de funciones de forma, dadas por el Método Radial de Interpolación de Puntos (RPIM).

1.6. OBJETIVOS Y ALCANCES

El objetivo general del presente trabajo es analizar de manera rigurosa la formulación variacional del problema de la ecuación de la elasticidad lineal o ecuación de Poisson con condiciones de Neumann y de Dirichlet no homogéneas, y su solución mediante el método RPIM planteado con el mismo carácter formal, para resolver problemas relativos al estado plano de esfuerzos o de deformaciones.

Como objetivos específicos se tienen:

Presentar el Método Radial de Interpolación de Puntos, y desarrollar este método, tanto en su carácter formal como en el aplicativo.

Emplear el Método Radial de Interpolación de Puntos, para la construcción de las funciones de interpolación de la ecuación de la elasticidad lineal.

Presentar algunas aplicaciones del método RPIM en problemas de ingeniería civil, a través de códigos escritos en MatLab.

1.7. METODOLOGÍA

El desarrollo del presente trabajo exigirá principalmente una comparación entre los resultados del método libre de mallas escogido, con soluciones analíticas como las propuestas en el libro de Teoría de la Elasticidad [26] o el libro de Mecánica de Suelos [4]. Para la solución numérica de problemas relativos a métodos sin malla, se escriben pequeños programas desarrollados en MatLab.

Se trabaja con conceptos de análisis funcional, esto en beneficio del planteamiento formal del tema de estudio. A partir de éstos se explica de manera rigurosa la obtención de la formulación variacional de la ecuación de la elastostática; así mismo se estudia la convergencia de la solución obtenida con la formulación variacional y se garantiza que la solución de la ecuación de la elasticidad siempre se puede obtener mediante las funciones desarrolladas con el RPIM.

Además, se presentan ejemplos variados de aplicación a problemas de interés en ingeniería civil. También se presenta, cuando sea necesario, el planteamiento y la demostración de ciertos teoremas, los cuales conducen a un mejor entendimiento de lo que se hace o a la certeza de la factibilidad de lo propuesto.

1.8. ORGANIZACION DE LA TESIS

La presente tesis consta de seis capítulos, los cuales se describen brevemente en los siguientes párrafos.

El primero de ellos corresponde a una introducción al tema general de métodos sin malla, donde se presentan referencias de algunos de estos métodos. Luego se describen los alcances y objetivos finales de la tesis, así como la metodología empleada en la misma.

En el segundo capítulo se presentan definiciones y operaciones relacionadas con tensores desde el punto de vista de formas multilineales. Además se hace una breve referencia a conceptos relacionados con la solución de ecuaciones diferenciales mediante espacios funcionales, se comentan conceptos básicos de los espacios de Hilbert y Sobolev, finalmente en base a estos conceptos se desarrolla la formulación variacional del problema en estudio. El aporte de ese capítulo es una explicación más detallada del espacio solución de la ecua-

ción de elasticidad lineal que la realizada en [10], así como las condiciones de existencia y unicidad relativas a la ecuación en estudio.

El tercer capítulo presenta las definiciones necesarias para la comprensión de las funciones de forma utilizadas por el RPIM, es decir, las funciones de base radial. Además, también se presentan las funciones utilizadas en la solución de los problemas tratados en el capítulo cinco y algunos teoremas que concluyen con la verificación formal de la hipótesis planteada en el presente trabajo.

En el cuarto capítulo se describe la estructura matemática sobre la que está basado el método RPIM; se describe la construcción de las matrices de rigidez local y global para el método, se explica la imposición de las condiciones de frontera y la técnica de integración numérica empleada.

En el quinto capítulo se desarrollan ejemplos relacionados con problemas conocidos del campo de la ingeniería civil, los que se resuelven con la ayuda de pequeños programas desarrollados en MatLab.

Finalmente en el capítulo seis se presentan las principales conclusiones y recomendaciones obtenidas luego de la elaboración del presente trabajo.

CAPÍTULO II

FORMULACIÓN DÉBIL DE LA ECUACIÓN DE LA ELASTOSTÁTICA

2.1. DEFINICIONES PRELIMINARES

Las siguientes definiciones tienen como objetivo presentar los fundamentos del proceso de formulación débil del problema elástico lineal, que es la parte principal del presente capítulo.

2.1.1. Operaciones y Operadores Tensoriales

El presente acápite trata de explicar la definición de un tensor específicamente de orden 2, que es al que en el ámbito de ingeniería se le conoce propiamente como *Tensor*. Pues bien, un tensor viene a ser aquel elemento que representa a una aplicación $F : V \rightarrow U$, donde U y V son espacios vectoriales y dicha aplicación es una función bilineal de variable vectorial. A continuación se define formalmente a un tensor de orden 2, en general es posible obtener funciones lineales de variable vectorial que sean representadas por tensores de orden superior, para esto se puede ver [12].

Definición 2.1.1. (Tensores de Orden 1)

Toda función lineal que haga corresponder a cada vector $v \in \mathbb{R}^n$ un número real (función real de variable vectorial), se puede representar por cierto vector u , es decir sea:

$$f(v) = v \cdot u$$

Donde $f : v \rightarrow v \cdot u$ y $v \cdot u \in \mathbb{R}$.

Ahora para extender la definición anterior a funciones vectoriales de variable vectorial requerimos el conocimiento de cierto tipo de operaciones y funciones las cuales serán presentadas a continuación.

Producto de Kronecker(Conocido también como producto tensorial). Dados 2 vectores a y b se define el producto tensorial $a \otimes b$ de dichos vectores como:

$$a \otimes b = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & \cdots & a_1 b_n \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & \cdots & a_2 b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n b_1 & a_n b_2 & \cdots & a_n b_n \end{bmatrix}$$

Además este producto resulta ser una función bilineal, entonces podemos extender la definición anterior a funciones vectoriales de variable vectorial como sigue:

Definición 2.1.2. (Tensor de Orden 2)

Toda función lineal que haga corresponder a cada vector $v \in \mathbb{R}^n$ otro vector de \mathbb{R}^n , se puede representar mediante el producto de Kronecker, de la siguiente manera:

$$f(v) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ji} e_j e_i \cdot \sum_{j=1}^n (\lambda_j e_j)$$

Donde se puede definir $\bar{A} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ji} e_j e_i = a_{ji} e_j \otimes e_i$ y ahora se puede plantear lo siguiente:

$$f(v) = \bar{A} \cdot v$$

De aquí que \bar{A} representa a la función bilineal y recibe el nombre de tensor de orden 2.

A continuación se indican algunas transformaciones lineales aplicables a tensores en los diversos espacios vectoriales empleados (estas transformaciones lineales son útiles sobre todo en el acápite 2.4). Existe la necesidad de definir la transformación *gradiente* y la transformación *divergencia* para cada espacio vectorial, ya que de un espacio a otro estas transformaciones presentan diferencias. A continuación se las define:

- El **gradiente de una función escalar** $\nabla : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ y su ortogonal, como:

$$\nabla p = \begin{bmatrix} \frac{\partial p}{\partial x_1} \\ \frac{\partial p}{\partial x_2} \end{bmatrix}; \quad (\nabla p)^\perp = \begin{bmatrix} \frac{\partial p}{\partial x_2} \\ -\frac{\partial p}{\partial x_1} \end{bmatrix};$$

- El **gradiente de una función vectorial** $\nabla : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, como:

$$\nabla v = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

- La **divergencia de una función vectorial** $\nabla : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, como:

$$\nabla \cdot v = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2}$$

- El **gradiente de un tensor** $\nabla : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, como:

$$\nabla_T = \begin{bmatrix} \frac{\partial \tau_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \tau_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{22}}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

Además, se define el *producto escalar* de tensores de orden 2, como:

$$\sigma : \epsilon = tr(\sigma^T \cdot \epsilon) = tr(\sigma \cdot \epsilon^T) = \sigma_{ij} \epsilon_{ij}$$

Este producto es utilizado en el planteamiento de la formulación débil del problema de la elastostática.

2.1.2. Mecánica del Medio Continuo y el Problema General de la Elasticidad Lineal

La mecánica del medio continuo es la ciencia que estudia el comportamiento mecánico de los sólidos y los fluidos en una escala macroscópica, ignorando la naturaleza discontinua del material. En esta mecánica, cada partícula del material está asociada a un punto del espacio ocupado por el cuerpo en estudio (dominio), al cual además se le pueden atribuir cantidades de campo como la densidad, desplazamiento, velocidad a través de funciones continuas en términos de la posición. En la mecánica de medios continuos se describe la interacción entre el esfuerzo y el desplazamiento que actúan sobre determinado medio continuo, esta interacción es modelada con ayuda de formas bilineales, en el caso de la elasticidad lineal estas formas bilineales, son el tensor de esfuerzos (σ) y el tensor de deformaciones (ϵ), dados por:

$$\sigma = \sigma_{ij} e_i \otimes e_j \tag{2.1}$$

$$\epsilon(v) = \frac{1}{2} (\nabla \otimes v + (\nabla \otimes v)^T) \tag{2.2}$$

Para el tratamiento de problemas de mecánica del medio continuo generalmente se utilizan dos tipos de ecuaciones; la primera representa el estado de equilibrio según las leyes de la física y la segunda que se denomina relación constitutiva, describe el comportamiento

mecánico (naturaleza) de los materiales mediante alguna función $\sigma = f(\epsilon)$, así en el caso tratado por el presente trabajo, se considera una relación esfuerzo deformación lineal e isotrópica, apropiada para la formulación de la elasticidad lineal, dada por:

$$\sigma(u) = \lambda \text{Tr}(\epsilon(u))\delta + 2\mu\epsilon(u) \quad (2.3)$$

Donde:

$$\delta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

y λ, μ son las *constantes de Lamé*, y tienen una relación directa con el *módulo de Young* E y la *razón de Poisson* ν , típicos en la caracterización de un material elástico, según:

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Con estas definiciones preliminares se puede presentar las ecuaciones de equilibrio de fuerzas que regirán el movimiento de sólidos elásticos, para ello, considerando $u(x, t)$ como la función que caracteriza el movimiento, tenemos que:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \nabla \cdot \sigma + b \quad (2.5)$$

Con ρ la densidad del material y b una fuerza externa por unidad de volumen. La ecuación anterior es de segundo orden en el tiempo, con lo cual se requiere de dos condiciones iniciales:

$$u(x, 0) = u_o(x)$$

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = v_o(x) = \text{constante}$$

Así el miembro izquierdo de (2.5) es cero.

Respecto a las condiciones de borde se tienen por lo menos dos posibilidades, una condición que especifica el desplazamiento de un punto de la frontera o una condición que especifica la fuerza por unidad de área en la frontera. Este par de condiciones se conocen como *condiciones de Dirichlet y Neumann* y se describen en el acápite 2.4.1.

2.1.3. Espacios Vectoriales de Dimensión Infinita

Cuando se trata de solucionar un problema definido por una ecuación en derivadas parciales, generalmente no es posible encontrar una solución explícita para la función incógnita. Más aún, generalmente no se necesita conocer esta forma explícita, pues resulta más factible calcular su valor como combinación de otras funciones (funciones base). De la misma manera en que se puede representar a un vector de dimensión finita como la combinación lineal de los vectores correspondientes a una base del espacio vectorial al cual pertenece dicho vector, esta representación es también posible para funciones, ya que los conjuntos de estas funciones forman espacios vectoriales, pero a diferencia de los espacios vectoriales de dimensión finita los espacios de funciones (espacios funcionales) poseen dimensión infinita. Es decir, cualquier base de este espacio vectorial tiene infinitos elementos. A continuación se revisan conceptos de los espacios de dimensión infinita útiles para buscar y encontrar características de las funciones base mencionadas en la definición 2.2.7.

Un punto importante es la definición de producto interno, que posteriormente induce la definición de la norma euclidiana, la cual proporciona una métrica para los espacios funcionales.

Definición 2.1.3. Sea H un espacio funcional vectorial sobre \mathbb{R} . Una forma bilineal

$$H \times H \rightarrow \mathbb{R}$$

$$u, v \mapsto (u, v)$$

Se denomina producto interno si es simétrica y definida positiva, es decir, si cumple que

$$(u, v) = (v, u) \quad \forall \quad u, v \in H$$

$$(v, u) \geq 0 \quad \forall \quad u \in H$$

$$(u, u) = 0 \iff u = 0$$

En tal caso

$$\|u\| := \sqrt{(u, u)} \quad u \in H \tag{2.6}$$

Define una norma sobre H . Un espacio vectorial dotado de un producto interno se dice pre-Hilbert.

Las ideas anteriores se pueden extender a tensores, pues como se mencionó al iniciar el presente capítulo, los tensores son también funciones multilineales. Entonces sean dos tensores σ, τ cuyas componentes pertenecen a H , el producto interno se define como sigue:

$$(\sigma, \tau) = \int_{\Omega} \sigma : \tau d\Omega \quad (2.7)$$

y naturalmente la norma inducida resulta:

$$\|\sigma\| = \left(\int_{\Omega} \sigma : \sigma d\Omega \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.8)$$

Este concepto es muy importante, ya que la función norma es en general continua, por lo que también es acotada en cualquier dominio cerrado. A continuación se define un espacio funcional de manera explícita.

Definición 2.1.4. *El espacio de funciones continuas con soporte compacto se denomina $C_0(\Omega)$.*

$$C_0(\Omega) = \{f \in C(\Omega) / f(x) = 0, \forall x \in \Omega \setminus K, K \text{ compacto} \subseteq \Omega\}$$

Donde $C(\Omega)$ es el espacio de las funciones continuas sobre Ω .

Para consolidar ideas sobre el empleo de espacios funcionales, a continuación se definen algunos conceptos adicionales.

Definición 2.1.5. *(Compacto) Un espacio métrico A se dice compacto si toda cobertura abierta de A posee una cobertura finita.*

La definición anterior es la versión genérica de compacidad. Ya que el entorno sobre el que trabajan las funciones requeridas es \mathbb{R}^n , es posible obtener una consecuencia de la definición que resulta más comprensible y directamente aplicable.

Teorema 2.1.1. *$K \in \mathbb{R}^n$ es compacto si y sólo si K es cerrado y acotado.*

Demostración. La demostración de este teorema se puede consultar en [2]. □

Ahora se presenta una herramienta útil para demostrar ciertas convergencias de sucesiones de funciones, y dota de una característica importante a ciertos espacios funcionales.

Definición 2.1.6. *Dada una sucesión de funciones de un espacio funcional, se dice que es de Cauchy si cumple que*

$$\lim_{\min\{n,m\} \rightarrow \infty} \|u_n - u_m\| = 0 \quad \forall m, n \in \mathbb{N}$$

Definición 2.1.7. *Un espacio métrico E se dice completo si toda sucesión de Cauchy converge a un punto de E .*

Además, de las definiciones anteriores, se considera necesario entender los siguientes conceptos.

Definición 2.1.8. *Un subespacio vectorial $Y \subset X$ se dice denso en X si este último es igual a la clausura del primero $\bar{Y} = X$, es decir si contiene a todos sus puntos de acumulación.*

Definición 2.1.9. *Un espacio vectorial es de Banach si es normado (en el está definida una norma) y completo con la norma definida previamente.*

A continuación se describen diversos espacios funcionales que poseen características apropiadas para la búsqueda eficaz de las funciones base, las que pueden aproximar funciones solución de ecuaciones en derivadas parciales.

2.2. ESPACIOS FUNCIONALES

2.2.1. Espacios de Hilbert

En este sub capítulo se definen y describen algunas características de los espacios de Hilbert, las cuales son importantes ya que sobre estos se desarrolla la formulación variacional del problema en derivadas parciales que se desea resolver. Esto en virtud de que las bases del espacio funcional en mención son las que hacen posible la solución de la ecuación en su forma débil. Por esta razón es importante el estudio de la separabilidad, densidad, numerabilidad y completitud de estos espacios, ya que gracias a estas propiedades este tipo de espacios resulta útil para la construcción de la forma débil de la ecuación de Poisson.

Definición 2.2.1. *Un espacio vectorial H dotado de un producto escalar se dice espacio de Hilbert si es completo para la norma asociada, es decir, si toda sucesión de Cauchy del espacio es convergente.*

Definición 2.2.2. *Dado un abierto Ω de \mathbb{R}^n , se define el espacio $L^1(\Omega)$ como el espacio de las funciones integrables en (Ω) . A su vez, se define*

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} / |f|^p \in L^1(\Omega)\} \quad (2.9)$$

Con $(p < \infty)$, $L^p(\Omega)$ es un espacio vectorial cuya norma euclidiana viene dada por

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (2.10)$$

Notar que los espacios $L^p(\Omega)$ son espacios de Banach, es decir, espacios vectoriales normados y completos.

De lo anterior $L^2(\Omega)$ es conocido como el espacio de las funciones cuadrado integrables sobre el conjunto abierto Ω de \mathbb{R}^n .

$$L^2(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ medible} / \int_{\Omega} (f)^2 dx < \infty\} \quad (2.11)$$

Con el producto escalar

$$(f, g) = \int_{\Omega} f(x)g(x)dx \quad (2.12)$$

$L^2(\Omega)$ es un espacio de Hilbert [19]; la mayor parte de las integrales del presente trabajo se desarrollan en este espacio.

Definición 2.2.3. Dado un espacio de Hilbert, se denomina convergencia fuerte a la convergencia en la norma asociada al producto escalar, es decir $(f_n) \subset H$ converge (fuertemente) a $f \in H$ si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| = 0$$

se denota por

$$f_n \rightarrow f$$

Definición 2.2.4. Dado el conjunto abierto Ω de \mathbb{R}^n , definimos

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} / \exists c \geq 0 \text{ tal que } \|f(x)\| \text{ c.t.p. } x \in \Omega\}$$

Así, L^∞ es un espacio vectorial y tiene inducida la norma

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf \{c / \|f(x)\| \leq c \text{ c.t.p. } x \in \Omega\}$$

Por lo tanto L^∞ es un espacio vectorial normado. Se debe notar que c.t.p., significa "en casi todos los puntos" del dominio.

Definición 2.2.5. Sea H un espacio de Hilbert, $(f_n) \subset H$ converge débilmente a $f \in H$ y se denota por

$$f_n \rightharpoonup f$$

si

$$(f_n, g) \rightarrow (f, g), \quad \forall g \in H.$$

A continuación se presentan algunos resultados que se derivan directamente de las definiciones anteriores. Muchas de las demostraciones de dichos resultados se omiten pues son resultados conocidos que se pueden encontrar en textos clásicos de análisis funcional y FEM como [5], [6], [22].

Proposición 2.2.1. *Si $f_n \rightarrow f$, entonces $f_n \rightharpoonup f$, es decir, la convergencia fuerte implica la convergencia débil.*

El recíproco de este resultado no es cierto en general y la demostración es inmediata.

Proposición 2.2.2. *Si H es un espacio de Hilbert de dimensión finita, la convergencia fuerte y débil son equivalentes.*

Demostración. Basta con tomar una base ortonormal y demostrar que las componentes convergen. Sea e_1, \dots, e_m base ortonormal de H , $f_n \rightharpoonup f$.

Se tiene que

$$f = \sum_{j=1}^m (f, e_j) e_j \quad \forall f \in H$$

Al considerar que, converge débilmente,

$$(f_n, e_j) \rightarrow (f, e_j) \quad \forall j$$

Entonces, $(f_n, e_j) e_j \rightarrow (f, e_j) e_j$ en H , por lo tanto:

$$\sum_{j=1}^m (f_n, e_j) e_j \rightarrow \sum_{j=1}^m (f, e_j) e_j$$

Esta última expresión indica que $f_n \rightarrow f$, dado que las coordenadas son únicas. \square

Teorema 2.2.1. *En un espacio de Hilbert, toda sucesión débilmente convergente es acotada.*

Demostración. Véase [2]. \square

Definición 2.2.6. *Un subespacio V de un espacio de Hilbert H , $V \subset H$ se denomina denso en H si para toda función u en H se puede encontrar una sucesión de funciones $u_n \in V$ que converge a u en H .*

Lema 2.2.1. *Sea H un espacio de Hilbert y $V \subset H$ denso en H . Sea una sucesión $(f_n) \subset H$. Entonces si (f_n) es acotada, es decir, existe M tal que:*

$$\|f_n\| \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

y además

$$(f_n, g) \rightarrow (f, g), \quad \forall g \in V$$

Entonces

$$f_n \rightarrow f.$$

Demostración. Sean $u \in H$ y $v \in V$ funciones cualesquiera, entonces:

$$\|(f_n - f, u)\| \leq \|(f_n, u - v)\| + \|(f_n - f, v)\| + \|(f, u - v)\|$$

De donde se deduce el resultado, ya que los términos del lado derecho de la inecuación son convergentes y se podría acotar cada uno por un $\varepsilon/3$. □

Definición 2.2.7. Sea H un espacio de Hilbert. Una sucesión $(e_n)_{n \geq 1} \subset H$ se dice base Hilbertiana (numerable) de H si:

$$(e_n, e_m) = \delta_{nm}, \quad \forall n, m$$

y $\mathbb{R}\langle e_n : n \geq 1 \rangle$, el conjunto de las combinaciones lineales (finitas) generado por $(e_n)_{n \geq 1} \subset H$, es denso en H .

Teorema 2.2.2. Sea $u \in H$. Entonces:

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} (u, e_n) e_n$$

Es decir, la serie anterior converge en H a u . Además se tiene la llamada igualdad de Bessel-Parseval:

$$\|u\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(u, e_n)|^2.$$

Demostración. Puede consultarse en [2]. □

Teorema 2.2.3. Sea (e_n) una base Hilbertiana de un espacio de Hilbert H . Entonces la sucesión (e_n) converge débilmente a 0, pero no fuertemente.

Demostración. Sea $g \in \mathbb{R}\langle e_n, n \geq 1 \rangle$, entonces

$$(e_n, g) = (e_n, \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i) \rightarrow 0 = (0, g)$$

Suponer que $\forall n \in \mathbb{N}, e_n \rightarrow 0$, entonces $\|e_n\| < 1$, pero $\|e_n\| = 1$ por la definición 2.2.7, entonces $e_n \rightarrow 0$. □

2.2.2. Espacios de Sobolev

En este acápite se definen conceptos relativos a los espacios de Sobolev, paso previo para un estudio posterior de los problemas variacionales ya que son necesarias funciones de clase 1 ($\in C^1(\Omega)$) que satisfagan la condición de Poisson, lo que implica que estas funciones y sus derivadas sean medibles en espacios de Hilbert (elementos de L^2). Además, con ayuda de estos espacios se definen las formas variacionales abstractas.

Definición 2.2.8. Se denota por $D(\Omega)$ el espacio de funciones indefinidamente diferenciable sobre Ω ($C^\infty(\Omega)$) y con soporte compacto en Ω .

Definición 2.2.9. Sea Ω un abierto de \mathbb{R}^n . Se denomina Espacio de Sobolev al espacio definido por:

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) / \partial^\alpha u \in L^p(\Omega), |\alpha| \leq m\}. \quad (2.13)$$

La norma asociada a $W^{m,p}(\Omega)$ es:

$$\|u\|_{m,p,\Omega} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (2.14)$$

En el caso que $p = 2$, se denota por $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$, con norma asociada:

$$\|u\|_{m,2,\Omega} = \|u\|_{m,\Omega} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.15)$$

Definición 2.2.10. Un espacio vectorial se dice que es separable, si posee un subconjunto denso y numerable.

Teorema 2.2.4. El espacio $H^m(\Omega)$ es un espacio de Hilbert separable.

Lema 2.2.2. $D(\mathbb{R}^n)$ es denso en $H^m(\mathbb{R}^n)$, es decir, $H_0^m(\mathbb{R}^n) = H^m(\mathbb{R}^n)$

Para ver la demostración del teorema y el lema anteriores, se puede revisar [22].

2.3. PROBLEMAS DE CONTORNO ELÍPTICOS

En esta sección se presenta de manera introductoria la formulación del problema variacional abstracto correspondiente al problema en estudio presentado en el acápite 2.1.2, es

decir, la formulación variacional de la ecuación elíptica de Poisson, con condiciones no homogéneas de Dirichlet y condiciones de Neumann:

$$\nabla \cdot \sigma(u) + b = 0 \quad (2.16)$$

$$\sigma(u) \cdot \nu = t$$

$$u|_{\Gamma_1} = \bar{u}$$

Donde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ y $u \in \Omega$.

Antes de plantear el problema abstracto, se comentan algunos aspectos relacionados a este problema, como el hecho de que para obtener la ecuación anterior se emplea el cálculo variacional, a partir del cual se obtienen las ecuaciones de Euler-Lagrange de cierto funcional relacionado con la energía de deformación elástica. Sin embargo, resolver la ecuación anterior en su forma diferencial para diversas condiciones de frontera no es tarea fácil, por lo que es conveniente llevarla a su forma variacional.

Como primera aproximación al tema se puede analizar el problema de Dirichlet homogéneo, es decir se emplea la ecuación anterior con las condiciones esenciales

$$u|_{\Gamma_1} = 0$$

Ahora, si se identifica el espacio funcional al que pertenecen las soluciones de la ecuación (2.16), se puede multiplicar la misma por alguna función que forme parte de la base del espacio funcional, y obtener la medida de la misma de la siguiente manera

$$\int_{\Omega} [v \cdot \nabla \cdot \sigma(u) + b \cdot v] d\Omega = 0 \quad (2.17)$$

Si a esta última expresión se le aplica el teorema de Gauss, se emplea el tensor de deformación y se utilizan las condiciones de frontera, se obtiene

$$\int_{\Omega} \sigma(u) : \epsilon(v) d\Omega = \int_{\Omega} b \cdot v d\Omega$$

Esta última expresión se puede representar de la siguiente manera

$$a(u, v) = l(v) \quad (2.18)$$

Donde a, l son aplicaciones bilineal y lineal respectivamente, de esta manera el término izquierdo de la ecuación y el término derecho de la misma vienen representados así

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \sigma(u) : \epsilon(v) d\Omega \quad (2.19)$$

$$l(v) = \int_{\Omega} b \cdot v d\Omega \quad (2.20)$$

Se debe notar que $a(u, v)$ es una aplicación simétrica construida a partir de la teoría de elasticidad. Esto último se estudia en la sección 2.4 para relacionar la solución de la formulación variacional y la solución de la ecuación original.

Ya que se dispone de un entendimiento inicial del proceso de formulación variacional, se define el problema variacional abstracto sin pérdida de generalidad, de la siguiente manera.

Definición 2.3.1. Sea V espacio de Hilbert, con producto escalar (\cdot, \cdot) y norma asociada $\|\cdot\|$. Sea $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal continua y sea $l : V \rightarrow \mathbb{R}$ una forma lineal continua, entonces el problema

$$(P) \begin{cases} \text{Calcular } u \in V \text{ tal que,} \\ a(u, v) = l(v), \quad \forall v \in V \end{cases}$$

(P) se denomina **Problema Variacional Abstracto**.

Como dato histórico se puede ver que el punto de partida de la solución de la primera ecuación del presente acápite es el funcional de energía potencial y elástica, el que se puede representar en términos de a y l como se indica a continuación

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - l(v) \quad (2.21)$$

Dicho funcional representa la diferencia entre la energía elástica y el trabajo virtual de fuerzas externas. Se puede ver rápidamente que la solución del funcional anterior es un problema de extremos. Así tenemos

$$\dot{J}(v) = J(u + v - u) = \frac{1}{2}a(u + v - u, u + v - u) - l(u + v - u)$$

Considerando la simetría de $a(u, v)$, la expresión anterior se puede escribir así

$$J(v) = J(u) + a(u, v - u) - l(v - u) + \frac{1}{2}a(v - u, v - u)$$

Si u es solución de $a(u, v) = l(v)$ entonces se cumple que $a(u, u - v) = l(u - v)$; además, por la elipticidad de $a(u, v)$ se tiene que

$$\frac{1}{2}a(v - u, v - u) \geq \alpha \|v - u\|^2$$

Por tanto considerando $u \neq v$ se puede ver que

$$J(v) \geq J(u) + \frac{\alpha}{2} \|v - u\|^2$$

De esto se concluye que $J(v) > J(u)$, lo que indica que la solución del problema variacional débil es un problema de extremos. Si u es un mínimo de $J(v)$, se puede apreciar que para todo $s \in \mathbb{R}$ se cumple que:

$$\begin{aligned} \frac{J(u + sv) - J(u)}{s} &\geq 0 \\ \frac{a(u + sv, u + sv) - a(u, u) + 2l(u) - 2l(u + sv)}{s} &\geq 0 \\ 2(a(u, v) - l(v)) + sa(v, v) &\geq 0 \end{aligned}$$

Si se toma el límite cuando $s \rightarrow 0$ se tiene que:

$$a(u, v) \geq l(v)$$

Si hacemos el cambio de v por $-v$ obtenemos:

$$a(u, v) \leq l(v)$$

Estos dos últimos resultados indican que $a(u, v) = l(v)$, es decir el problema de extremos que conduce a las ecuaciones de elasticidad es un problema de mínimos estrictos. Lo que podría ser enunciado de la siguiente manera:

Si $a(u, v)$ es simétrico y elíptico, entonces u es solución del problema (P) si y sólo si es un mínimo de $J(v) = \frac{1}{2}a(u, v) - l(v)$.

Como se ve hasta este punto, se utiliza con frecuencia la propiedad de elipticidad de ciertas funcionales bilineales; entonces es necesario definir esta propiedad.

Definición 2.3.2. Dada una forma bilineal $a(\cdot, \cdot)$ en un espacio lineal normado H , se dice que la forma bilineal es acotada (o continua) si $\exists c_1 < \infty$ tal que:

$$|a(v, w)| \leq c_1 \|v\|_H \|w\|_H \quad \forall v, w \in H$$

Y se dice que es elíptica (o coercitiva) en $V \subset H$ si \exists una constante $c_2 > 0$ tal que

$$a(v, v) \geq c_2 \|v\|_H^2, \quad \forall v \in V$$

En general, un problema variacional simétrico se plantea de la forma presentada anteriormente mientras se cumplen las siguientes condiciones:

- a) $(H, (\cdot, \cdot))$ es un espacio de Hilbert.
- b) V es un subespacio cerrado de H .
- c) $a(\cdot, \cdot)$ es una forma bilineal acotada, simétrica y coercitiva en V .

Los conceptos e ideas previas, a continuación se establece el tratamiento de la existencia y unicidad de la solución del problema variacional abstracto (P), para esto es importante el siguiente teorema.

Teorema 2.3.1. (Lax-Milgram). *Suponer que en el problema variacional (P) la forma bilineal es V-elíptica. Entonces existe solución única y la aplicación que lleva de la forma bilineal a la solución u es continua.*

Demostración. Para una lectura de su demostración se puede consultar la mayoría de los textos clásicos, como por ejemplo [5] o [6]. □

La solución del problema variacional abstracto (P) en dimensión infinita se realiza a través de aproximaciones en espacios funcionales de dimensión finita, según el esquema de aproximación "Ritz-Galerkin", es decir dado el problema (P):

$$(P) \begin{cases} \text{Calcular } u \in V \text{ tal que,} \\ a(u, v) = l(v), \quad \forall v \in V \end{cases}$$

Se considera ahora $\{V_h\}_{h>0}$ ($h \rightarrow 0$) con V_h sub espacio de dimensión finita de V . Por lo tanto podemos definir para cada índice h el problema (que también será variacional).

$$(P_h) \begin{cases} \text{Calcular } u_h \in V_h \text{ tal que,} \\ a(u_h, v_h) = l(v_h), \quad \forall v_h \in V_h \end{cases}$$

V_h también será espacio de Hilbert por ser subespacio de dimensión finita de un espacio de Hilbert V , con su correspondiente norma inducida de V . Si la forma bilineal a es *elíptica* en V , es decir, si

$$\exists \alpha > 0 \text{ tal que } a(u, u) \geq \alpha \|u\|^2, \forall u \in V,$$

Entonces también la forma bilineal a es V_h -elíptica es decir

$$\exists \alpha > 0 \text{ tal que } a(u_h, u_h) \geq \alpha \|u\|^2, \forall u_h \in V_h \subseteq V.$$

De acuerdo al teorema de Lax, los problemas abstractos P y P_h tienen solamente una solución, razón por la cual si se encuentra una solución en el espacio de dimensión finita, ésta debe ser la misma en el de dimensión infinita, esto gracias al hecho de que el problema P_h está definido en un espacio de dimensión finita denso en el espacio solución de P . A continuación se formalizan estas ideas.

Lema 2.3.1. (Lema de Céa). Si se cumplen las condiciones del teorema de Lax se tiene

$$\|u - u_h\| \leq \frac{M}{\alpha} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|$$

Donde M es la constante de continuidad de la forma bilineal, y α es la constante de coercitividad de la misma.

Demostración.

$$\begin{aligned} a(u - u_h, u - u_h) &= a(u - u_h, u - u_h + v_h - v_h) \\ a(u - u_h, u - u_h) &= a(u - u_h, u - v_h) - a(u - u_h, u_h - v_h) \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la bilinealidad y el hecho de que la solución de P_h está en el espacio solución de P , con $w_h = u_h - v_h$, se tiene:

$$\begin{aligned} a(u, u_h - v_h) &= l(u_h - v_h) \\ a(u_h, u_h - v_h) &= l(u_h - v_h) \end{aligned}$$

Por lo que al restar las expresiones anteriores se obtiene:

$$\begin{aligned} a(u, u_h - v_h) - a(u_h, u_h - v_h) &= 0 \\ a(u - u_h, u_h - v_h) &= 0 \end{aligned}$$

Entonces, al reemplazar la última expresión obtenida, en la segunda expresión de esta demostración, se tiene:

$$a(u - u_h, u - u_h) = a(u - u_h, u - v_h)$$

Ahora, por coercitividad y según la identidad de Schwartz:

$$\alpha \|u - u_h\|^2 \leq a(u - u_h, u - u_h) = a(u - u_h, u - v_h) \leq M \|u - u_h\| \|u - v_h\|$$

De donde:

$$\|u - u_h\| \leq \frac{M}{\alpha} \|u - v_h\|, \forall v_h \in V_h,$$

□

Se puede observar que a medida que la dimensión de V_h aumenta $V_h \rightarrow V$, entonces la norma:

$$\inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\| \rightarrow 0$$

Lo que significa que se obtiene la solución del problema P , a través de la de P_h .

Teorema 2.3.2. (Teorema General de Convergencia)

Suponer que existe \mathcal{V} subespacio denso de V y $v_h : \mathcal{V} \rightarrow V_h$, tales que se cumple que $\lim_{h \rightarrow 0} \|v - v_h(v)\| = 0$, $v \in \mathcal{V}$. Entonces el método de aproximación variacional converge, es decir:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u - u_h\| = 0, \quad u \in V$$

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$, con \mathcal{V} subespacio denso en V , entonces $\exists v \in \mathcal{V}$, tal que:

$$\|u - v\| \leq \frac{\varepsilon}{2c}$$

Con $c = \frac{M}{\alpha}$. Por la hipótesis del teorema:

$$\exists h_0 \text{ tal que } \|v - v_h(v)\| < \frac{\varepsilon}{2c}, \quad \forall h \leq h_0$$

Finalmente, en virtud del Lema de Céa:

$$\|u - u_h(v)\| \leq c \|u - v_h(v)\| \leq c (\|u - v\| + \|v - v_h(v)\|) \leq \varepsilon$$

ya que $v_h(v) \in V_h$.

□

Teorema 2.3.3. Si la forma bilineal continua $a(u, v)$ es V -elíptica (coercitiva), entonces $\exists u_m \in V_m$, solución única del problema (P_m) y el $\lim_{m \rightarrow \infty} u_m = u$, en V (converge fuertemente), donde u es la solución del problema (P) .

Demostración. Para una lectura de su demostración ver [10].

□

Notar que el teorema 2.3.3 prueba la consistencia de las aproximaciones.

2.3.1. Método de Galerkin

Por lo mencionado en las secciones 2.2 y 2.3, se está en condiciones de describir el método de Galerkin.

Dada:

$$Au = f \quad (2.22)$$

Una ecuación diferencial en el espacio H , el problema consiste en encontrar un elemento $u_0 \in D_A$ (Dominio de A) que cumpla:

$$(Au_0 - f, \varphi_k) = 0 \quad \forall k = 1, 2, \dots \quad (2.23)$$

Entonces, $\forall \varphi_k \in H$ base de H , se tiene que:

$$Au_0 - f = 0 \quad \text{en } H$$

Esta expresión indica que u_0 es la solución del problema.

Este razonamiento constituye la base del método de Galerkin, que es la base fundamental de la mayoría de los métodos sin malla y del método de los elementos finitos. A continuación, consideremos de nuevo la base $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ del subespacio H , se puede construir una solución aproximada u_n a partir de esta base, en la forma:

$$u_n = \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k \quad (2.24)$$

Siendo n un número arbitrario, pero fijo; a partir de este momento, los coeficientes a_k son las incógnitas. En el método de Galerkin, estas constantes se calculan imponiendo la siguiente igualdad:

$$(Au_n - f, \varphi_k) = 0 \quad \forall k = 1, \dots, n$$

La ecuación anterior representa un sistema de n ecuaciones con n incógnitas (los coeficientes a_k). Dado que el operador diferencial A es lineal, las ecuaciones anteriores se podrán transformar en:

$$(a_1 A\varphi_1 + \dots + a_n A\varphi_n - f, \varphi_k) = 0 \quad \forall k = 1, \dots, n \quad (2.25)$$

O bien,

$$(A\varphi_1, \varphi_1)a_1 + (A\varphi_2, \varphi_1)a_2 + \dots + (A\varphi_n, \varphi_1)a_n = (f, \varphi_1)$$

$$(A\varphi_1, \varphi_2)a_1 + (A\varphi_2, \varphi_2)a_2 + \dots + (A\varphi_n, \varphi_2)a_n = (f, \varphi_2)$$

...

$$(A\varphi_1, \varphi_n)a_1 + (A\varphi_2, \varphi_n)a_2 + \dots + (A\varphi_n, \varphi_n)a_n = (f, \varphi_n)$$

Los resultados anteriores se pueden resumir en el siguiente teorema:

Teorema 2.3.4. *Sea A un operador definido positivo sobre un conjunto D_A , denso en un espacio separable de Hilbert H y $f \in H$, considerar que los elementos $\varphi_1, \varphi_2, \dots \in D_A$, constituyen una base de D_A . Entonces, la sucesión de Galerkin, presentada en un principio con las constantes a_1, a_2, \dots , determinadas unívocamente por las condiciones mostradas, esto es, por el sistema de ecuaciones (2.25), converge a la solución de la ecuación $Au = f$.*

2.4. FORMA DÉBIL DEL PROBLEMA GENERAL DE ELASTICIDAD LINEAL

2.4.1. Formulación Débil Considerando Condiciones Mixtas

En la mayoría de las aplicaciones físicas, las magnitudes relativas a funcionales multilineales están relacionadas por sistemas de ecuaciones diferenciales parciales. Así por ejemplo, debe considerarse que un sistema de ecuaciones de este tipo procede de la mecánica de medios continuos aplicada a sólidos, la cual se denomina “ecuación de equilibrio”. Así que para tratar este problema se aplica la teoría desarrollada anteriormente. Gran parte del trabajo consiste en el establecimiento de la coercitividad de la formulación variacional, la cual garantiza el cumplimiento del teorema de Lax-Milgram; una vez hecho esto, la aplicación de la teoría es inmediata para el caso general.

Entonces, considérese un material elástico e isotrópico definido sobre $\Omega \in \mathbb{R}^n$. Además sea $u(x)$ el vector de desplazamiento y $b(x)$ el vector de fuerzas de cuerpo en Ω . Entonces según la teoría de elasticidad lineal vista en el acápite 2.1.2, $u(x)$ debe satisfacer la ecuación:

$$\nabla \cdot \sigma(u) + b = 0 \quad \text{en } \Omega, \quad (2.26)$$

Si se considera $\epsilon(u)$ como en (2.2) se tiene:

$$\epsilon(v) = \nabla \otimes v + \frac{1}{2}(\nabla \times v)\chi \quad (2.27)$$

Donde:

$$\chi = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

Para un medio estático el tensor de esfuerzos está definido por la ecuación constitutiva (2.3).

Sean Γ_1 y Γ_2 dos subconjuntos abiertos de $\partial\Omega$, tal que $\partial\Omega = \overline{\Gamma_1} \cup \overline{\Gamma_2}$ y $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$. Con condiciones de Dirichlet no homogéneas (desplazamiento) sobre Γ_1 , como:

$$u|_{\Gamma_1} = \bar{u} \quad (2.29)$$

Y condiciones de Neumann (tensión) sobre Γ_2 , como:

$$(\sigma(u) \cdot \nu)|_{\Gamma_2} = t \quad (2.30)$$

Donde ν es el vector unitario normal. Nótese que, si $\Gamma_1 = \emptyset$ o $\Gamma_2 = \emptyset$, el problema de contorno es llamado de Neumann o Dirichlet (tracción o desplazamiento) puro, respectivamente. Además, también se debe notar que $\epsilon(u)$ posee un núcleo no trivial, dado por:

$$MR := \{v : v = c + d(x_2, -x_1)^T, c \in \Omega, d \in R\}$$

el cual representa el espacio de los movimientos infinitesimales de cuerpo rígido, ya que al ser núcleo (es decir $\epsilon(v) = 0$) las deformaciones siempre son nulas. Ahora, se sabe que $u \in H^2(\Omega)$ satisface la ecuación de equilibrio. Entonces para cualquier $v \in H^1(\Omega)$ y $v|_{\Gamma_1} = 0$, se obtiene lo siguiente:

$$\int_{\Omega} b \cdot v d\Omega = - \int_{\Omega} \nabla \cdot \sigma(u) \cdot v d\Omega$$

Al usar la identidad de Green, el teorema de la divergencia [20] y reemplazar la ecuación constitutiva en la expresión anterior, se obtiene:

$$\int_{\Omega} b \cdot v d\Omega = \int_{\Omega} \{2\mu\epsilon(u) + \lambda \text{tr}(\epsilon(u))\delta\} : \nabla v d\Omega - \int_{\Gamma_2} \sigma(u) \cdot \nu \cdot v dS$$

Luego, la formulación débil de la ecuación de equilibrio se escribe como sigue:

Encontrar $u \in H^1(\Omega)$ tal que $u|_{\Gamma_1} = g$ y:

$$a(u, v) = \int_{\Omega} b \cdot v d\Omega + \int_{\Gamma_2} t \cdot v ds \quad (2.31)$$

Para todo $v \in V$, donde:

$$a(u, v) := \int_{\Omega} (2\mu\epsilon(u) : \epsilon(v) + \lambda(\nabla \cdot u)(\nabla \cdot v)) d\Omega$$

$$V := \{v \in H^1(\Omega) : v|_{\Gamma_1} = 0\}$$

Es importante notar que $a(u, v) = \int_{\Omega} \sigma(u) : \epsilon(v) d\Omega$, ya que esta representación será útil en el capítulo cuatro para la representación matricial de la formulación débil.

2.4.2. Existencia y Unicidad de la Formulación Débil

Naturalmente, la pregunta necesaria que se debe hacer, respecto de la ecuación, es “¿Posee solución única?”. Según lo planteado por el teorema de Lax-Milgram para responder afirmativamente a esta pregunta se necesita establecer la coercitividad de la forma bilineal acotada $a(u, v)$, así que esto último se garantiza mediante las desigualdades de Korn presentadas a continuación y cuyas demostraciones se encuentran en la referencia [5].

Sea $\overline{H}^k(\Omega)$ definido por:

$$\overline{H}^k(\Omega) := \{v \in H^k(\Omega) : \int_{\Omega} v \, d\Omega = 0, \int_{\Omega} \nabla \times v \, d\Omega = 0\}$$

Los cuales son subespacios cerrados de $H^k(\Omega)$ para $k \geq 1$.

Además, también es importante notar que para los elementos de $\overline{H}^k(\Omega)$ se tiene que $\epsilon(v) \neq 0 \, \forall v \neq 0$. Entonces el complemento de este conjunto sería aquel conjunto donde $\epsilon(v) = 0 \, \forall v$, el cual se presentó anteriormente con el nombre de MR . Por lo tanto como el elemento $v = 0 \in \overline{H}^k(\Omega) \cap MR$, y como los espacios de Hilbert mencionados (H^k) son densos y numerables, entonces son separables y cumplen con las condiciones necesarias para la existencia de la suma directa, se tiene así que $H^k(\Omega) = \overline{H}^k(\Omega) \oplus MR$.

Teorema 2.4.1. (Primera Desigualdad de Korn)

Existe una constante positiva α tal que:

$$\|\epsilon(v)\|_{L^2(\Omega)} + \|v\|_{L^2(\Omega)} \geq \alpha \|v\|_{H^1(\Omega)} \quad \forall v \in H^1(\Omega)$$

Teorema 2.4.2. (Segunda Desigualdad de Korn)

Existe una constante positiva C tal que:

$$\|\epsilon(v)\|_{L^2(\Omega)} \geq C \|v\|_{H^1(\Omega)} \quad \forall v \in \overline{H}^1(\Omega)$$

Con estos teoremas es posible obtener el siguiente resultado:

Corolario 2.4.1. Sea V definido por: $V := \{v \in H^1(\Omega) : v|_{\Gamma_1} = 0\}$ Donde la medida (Γ_1) es mayor que cero. Existe una constante positiva tal que:

$$\|\epsilon(v)\|_{L^2(\Omega)} \geq C \|v\|_{H^1(\Omega)} \quad \forall v \in V$$

Demostración. Considerando que $v \in V \subset H^1 = MR \oplus \overline{H}^1$, se analizan en primer lugar todos los $v \in MR \cap V$ tal que se cumpla la condición de que $v|_{\Gamma_1} = 0$, como los elementos de

MR son polinomios de primer grado, estos sólo cumplen con la condición si sus coeficientes constantes son idénticamente nulos, es decir si $v \equiv 0$, por lo que, este elemento es el único que pertenece al conjunto mencionado, entonces en virtud de la primera desigualdad de Korn (la cual es válida $\forall v \in H^1$) se tiene que:

$$\|\epsilon(v)\|_{L^2(\Omega)} + \|v\|_{L^2(\Omega)} \geq \alpha \|v\|_{H^1(\Omega)}$$

Pero como se manifestó anteriormente, el único elemento de este conjunto cumple que:

$$\|v\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} v^2 d\Omega = 0$$

Por lo tanto:

$$\|\epsilon(v)\|_{L^2(\Omega)} \geq \alpha \|v\|_{H^1(\Omega)} \quad (2.32)$$

Además, se tiene la condición que $medida(\Gamma_1) > 0$, esto implica la existencia de más elementos que satisfagan la condición $v|_{\Gamma_1} = 0$ y ya que todos los demás elementos son $v \neq 0$, se tiene que $\|v\|_{H^1(\Omega)} \neq 0$, se concluye que los demás elementos de V deben pertenecer a $\overline{H^1}$, para estos elementos se cumple la segunda desigualdad de Korn, es decir:

$$\|\epsilon(v)\|_{L^2(\Omega)} \geq C \|v\|_{H^1(\Omega)} \quad (2.33)$$

Entonces, por (2.32) y (2.33) se concluye que:

$$\|\epsilon(v)\|_{L^2(\Omega)} \geq C_1 \|v\|_{H^1(\Omega)} \quad \forall v \in V \quad (2.34)$$

donde, $C_1 = \max\{C, \alpha\}$. □

Ahora, es momento de explicar cómo este corolario ayuda a probar la coercitividad de la aplicación bilineal $a(u, v)$, la cual obviamente es el motivo del corolario. Se debe notar que:

$$\begin{aligned} a(v, v) &= \int_{\Omega} (2\mu\epsilon(v) : \epsilon(v) + \lambda(\nabla \cdot v)(\nabla \cdot v)) d\Omega \\ a(v, v) &= \int_{\Omega} (2\mu\epsilon(v) : \epsilon(v) + \lambda(\nabla \cdot v)^2) d\Omega \geq 2\mu \int_{\Omega} \epsilon(v) : \epsilon(v) d\Omega = 2\mu \|\epsilon(v)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ a(v, v) &\geq 2\mu \|\epsilon(v)\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq 2\mu C_1 \|v\|_{H^1(\Omega)}^2 \end{aligned} \quad (2.35)$$

A continuación se debe probar la continuidad (acotación) de la forma bilineal $a(u, v)$.
 Entonces tenemos:

$$a(u, v) = \int_{\Omega} (2\mu\epsilon(u) : \epsilon(v) + \lambda(\nabla \cdot u)(\nabla \cdot v)) d\Omega$$

$$\begin{aligned}
|a(u, v)| &\leq 2\mu \left| \int_{\Omega} \epsilon(u) : \epsilon(v) d\Omega \right| + \lambda \left| \int_{\Omega} (\nabla \cdot u)(\nabla \cdot v) d\Omega \right| \\
|a(u, v)| &\leq 2\mu |(\epsilon(u), \epsilon(v))| + \lambda |(\nabla \cdot u, \nabla \cdot v)| \\
|a(u, v)| &\leq 2\mu \|\epsilon(u)\|_{L^2} \|\epsilon(v)\|_{L^2} + \lambda \|\nabla \cdot u\|_{L^2} \|\nabla \cdot v\|_{L^2}
\end{aligned}$$

Con lo cual se concluye que la forma bilineal $a(u, v)$ es acotada, por ser u y v continuas en \mathbb{R}^n .

Entonces, gracias a estas dos últimas ideas, se puede concluir que efectivamente el funcional bilineal $a(u, v)$ es coercitivo en V , acotado y obviamente simétrico, con lo cual se garantiza la solución única del problema abstracto (resultado de la ecuación de equilibrio) como consecuencia del teorema de Lax-Milgram.

Nota 1. *Un hecho importante en este desarrollo es que inicialmente se exigía que exista $\nabla \cdot \sigma(u)$ para u , con lo que la función solución fuerte o clásica del problema, en caso de existir, debe pertenecer al espacio $C^2(\Omega)$, de lo contrario no existiría la expresión. Como consecuencia de la manipulación efectuada en la subsección 2.4.1, la solución débil del problema se busca en el espacio H^1 , es decir, se reducen las exigencias sobre el espacio de búsqueda, a funciones con sólo una derivada continua en casi todos los puntos.*

Si bien es cierto con esto queda resuelto el problema, se debe observar que durante el trabajo de las ecuaciones, las condiciones de Neumann surgieron naturalmente. No ocurrió lo mismo con las condiciones de desplazamiento; más aún, al abordar estas condiciones aparece un nuevo problema, ya que se pierde la linealidad del conjunto de funciones en el que se busca la solución. Para resolver este problema se utiliza un cambio de variable que se plantea de la siguiente manera:

Supongamos las condiciones de deformación como:

$$g = w|_{\Gamma_1}$$

Entonces, sea $u^* = u - w$, además de la ecuación (2.31):

$$\begin{aligned}
a(u, v) &= \int_{\Omega} b \cdot v d\Omega + \int_{\Gamma_2} t \cdot v d\Gamma \\
a(u^* + w, v) &= \int_{\Omega} b \cdot v d\Omega + \int_{\Gamma_2} t \cdot v d\Gamma \\
a(u^*, v) &= \int_{\Omega} b \cdot v d\Omega + \int_{\Gamma_2} t \cdot v d\Gamma - a(w, v)
\end{aligned} \tag{2.36}$$

Así, el problema es equivalente a encontrar $u^* \in V$ tal que para todo $v \in V$, se cumple:

$$a(u^*, v) = \int_{\Omega} b \cdot v d\Omega + \int_{\Gamma_2} t \cdot v d\Gamma - \int_{\Omega} (2\mu\epsilon(w) : \epsilon(v) + \lambda(\nabla \cdot w)(\nabla \cdot v)) d\Omega \quad (2.37)$$

Nótese que en el lado derecho de la ecuación b, t, w son conocidos, así que todo este lado es únicamente una funcional lineal de v . Por lo tanto, al definir el lado derecho de la ecuación como $F(v)$, el problema consiste en encontrar u^* tal que:

$$a(u^*, v) = F(v) \quad (2.38)$$

La ecuación (2.38) vuelve a ser el problema abstracto desarrollado en 2.4.1, para el que se demostró la unicidad de su solución, con ayuda del teorema de Lax. Además, se debe mencionar también que la función que depende de w en el funcional $F(v)$ es formulable por métodos matemáticos conocidos, tal como el "Método de los Multiplicadores de Lagrange". Este método resulta importante, ya que se utiliza en el capítulo cuatro para introducir las condiciones de frontera esenciales.

Ahora, una vez concluida la formulación y demostración de la unicidad del problema planteado, queda por demostrar la existencia de la solución. Para esto se presenta el siguiente teorema.

Teorema 2.4.3. *Supongase $b \in L^2(\Omega)$ y $t \in L^2(\Gamma)$. Entonces el problema variacional:*

Encontrar $u \in H^1(\Omega)$ tal que:

$$a(u, v) = \int_{\Omega} b \cdot v d\Omega + \int_{\Gamma} t \cdot v d\Gamma \quad \forall v \in H^1(\Omega)$$

Posee solución si y sólo si, se cumple la siguiente condición de compatibilidad:

$$\int_{\Omega} b \cdot v d\Omega + \int_{\Gamma} t \cdot v d\Gamma = 0 \quad \forall v \in MR$$

Y cuando el problema variacional posee solución, existe una solución única en $\overline{H^1}(\Omega)$.

Demostración. (Necesidad) Si el problema variacional posee solución, entonces:

$$\int_{\Omega} b \cdot v d\Omega + \int_{\Gamma} t \cdot v d\Gamma = a(u, v)$$

Pero:

$$a(u, v) = \int_{\Omega} (2\mu\epsilon(u) : \epsilon(v) + \lambda(\nabla \cdot u)(\nabla \cdot v)) d\Omega; \quad \epsilon(v) = 0 \text{ y } \nabla \cdot v = 0 \quad \forall v \in MR$$

$$\therefore a(u, v) = 0$$

Por lo tanto:

$$\int_{\Omega} b \cdot v d\Omega + \int_{\Gamma} t \cdot v dS = 0 \quad \forall v \in MR$$

(Suficiencia) Sise supone que se cumple la segunda condición del problema, es decir que:

$$\int_{\Omega} b \cdot v d\Omega + \int_{\Gamma} t \cdot v d\Gamma = 0 \quad \forall v \in MR$$

Según la segunda desigualdad de Korn y el teorema de Lax, se garantiza la coercitividad del funcional bilineal $a(u, v)$ y por lo tanto existe una única solución $u \in \overline{H^1}(\Omega)$ tal que:

$$a(u, v) = \int_{\Omega} b \cdot v d\Omega + \int_{\Gamma} t \cdot v d\Gamma \quad \forall v \in \overline{H^1}(\Omega)$$

Pero por razones análogas a las mencionadas en la primera parte de esta demostración, se tiene que:

$$a(u, v) = \int_{\Omega} b \cdot v d\Omega + \int_{\Gamma} t \cdot v d\Gamma = 0 \quad \forall v \in MR$$

Entonces como $H^1(\Omega) = MR \oplus \overline{H^1}(\Omega)$:

$$a(u, v) = \int_{\Omega} b \cdot v d\Omega + \int_{\Gamma} t \cdot v d\Gamma \quad \forall v \in H^1(\Omega)$$

Y por lo tanto u es la solución única del problema variacional. □

Un aspecto importante del teorema 2.4.3 es que indica categóricamente que el equilibrio de fuerzas volumétricas y de superficie es una condición necesaria y suficiente para la existencia de la solución de (2.26), lo que concuerda con el teorema de Clapeyron presentado en [23].

CAPÍTULO III

FUNCIONES DE BASE RADIAL

3.1. FUNCIONES DE FORMA

En la búsqueda de una solución aproximada a un problema gobernado por ecuaciones en derivadas parciales con condiciones de frontera, primero se necesita aproximar la función de campo desconocida utilizando funciones conocidas las cuales se denominan funciones de forma (funciones correspondientes a espacios de Hilbert), esto antes de establecer cualquier procedimiento de formulación variacional con el cual se pueda formar un sistema de ecuaciones discretas. Estas funciones de forma son localmente definidas, ya que sólo un conjunto de nodos de campo en un pequeño dominio local son utilizados en la construcción, y la función de forma no se utiliza o se considera como cero fuera del dominio local. Como dominio local se entenderá al *dominio de soporte*.

En el método de elementos finitos (FEM) las funciones de forma se crean mediante técnicas de interpolación basadas en elementos formados por un conjunto de nodos fijos. Este tipo de interpolación se denomina interpolación basada en *elementos estacionarios*; en los métodos sin malla dentro de los que se encuentra al RPIM, el dominio del problema suele estar representado por nodos de campo que en general están arbitrariamente distribuidos. Las variables de campo en un punto arbitrario del dominio del problema se aproximan utilizando un grupo de nodos de campo en un dominio de soporte local, por lo tanto es necesario un dominio móvil para construir la función de forma que aproxime dichas variables de campo, utilizando un conjunto de nodos distribuidos arbitrariamente.

Dominio de Soporte

La precisión de la interpolación para cada punto de interés depende de los nodos en el dominio de soporte como se muestra en la figura (3.1), por lo tanto, se debe elegir un dominio

de soporte adecuado para garantizar una aproximación eficaz y precisa. Para un punto de interés $x_Q \in \Omega$, la dimensión del dominio de soporte d_S está determinada por:

$$d_S = \alpha_S d_C \quad (3.1)$$

Donde, α_S es el factor adimensional del dominio de soporte, y d_C es el espaciamento nodal cerca del punto x_Q . Si los nodos están uniformemente distribuidos, d_C es simplemente la distancia entre dos nodos vecinos. Cuando los nodos no están uniformemente distribuidos d_C puede ser definida como un espaciamento nodal promedio en el dominio de soporte de x_Q .

El factor adimensional del dominio soporte α_S controla su medida. Por ejemplo, $\alpha_S = 2,1$ significa un dominio de soporte cuyo radio es de 2,1 veces el espaciamento nodal promedio. El número de nodos n , se puede determinar contando todos los nodos incluidos en el dominio de soporte. De acuerdo a G. R. Liu [16], un valor recomendable para la magnitud adimensional del dominio de soporte es $\alpha_S \in [2; 3]$. Se debe tener en cuenta que el dominio de soporte generalmente se centra en un punto de interés x_Q .

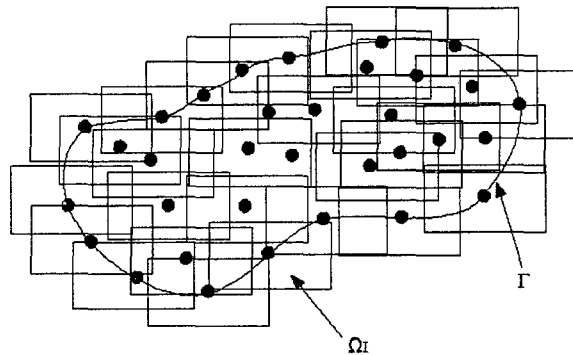


Figura 3.1: Dominio de soporte local

3.2. FUNCIONES DE BASE RADIAL

Si bien es cierto las funciones de forma se pueden construir con el uso de polinomios en \mathbb{R}^n , para que puntos más cercanos tengan mayor influencia entre si, en general se deben construir funciones monótonas decrecientes, las cuales pertenezcan a espacios de Hilbert y conduzcan a la creación de los dominios de soporte local. A continuación se definen funciones monótonas decrecientes empleadas generalmente en métodos sin malla.

Definición 3.2.1. Funciones de Base Radial (RBF).

Una función $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es llamada radial, si existe una función $\varphi : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\Phi(x) = \varphi(r)$, donde $r = \|x\|$. Generalmente se considera como $\|x\|$ la norma euclidiana.

La definición anterior implica que para la función radial $\Phi(x)$, se cumple que:

$$\|x_1\| = \|x_2\| \Rightarrow \Phi(x_1) = \Phi(x_2)$$

Lo cual quiere decir que el valor de Φ para cualquier punto a una distancia fija del centro (o de otro punto fijado como centro) es constante. Debido a esto Φ es radialmente simétrico respecto a su centro; por esta razón tiene sentido denominar a $\varphi(r)$ la “función básica” y a $\Phi_k(x) = \varphi(\|x - x_k\|)$ (centrado en x_k) una “función de base radial”, ya que φ es la función que genera todas las funciones Φ_k que se usan como base para la aproximación de otra función como combinación lineal de dichas funciones.

Las interpolaciones con funciones de base radial poseen la interesante propiedad de ser invariantes bajo todas las traslaciones, rotaciones y reflexiones [9] lo que quiere decir que no importa si primero se calcula el valor de las RBFs de interpolación y luego se aplica la transformación o si primero se transforman los datos y luego se calculan las RBFs.

Además, el uso de funciones de base radial en problemas de interpolación es muy benéfico, pues el problema se torna insensible a la dimensión n del espacio en el que está definido, ya que en lugar de tener que lidiar con funciones de interpolación de varias variables Φ (cuya complejidad se incrementa con la dimensión n), sólo se trabaja con la función de una sola variable φ para cualquier caso de n .

3.3. INTERPOLACIÓN DE DATOS CON FUNCIONES DE BASE RADIAL

Como se mencionó anteriormente, existe la necesidad de aproximar cierta función y la forma más común y conveniente de hacerlo se basa en la suposición de que dicha función $u(x)$ es una combinación lineal de ciertas “funciones base” $v_k(x)$, es decir:

$$u(x) = \sum_{k=1}^N c_k v_k(x) \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (3.2)$$

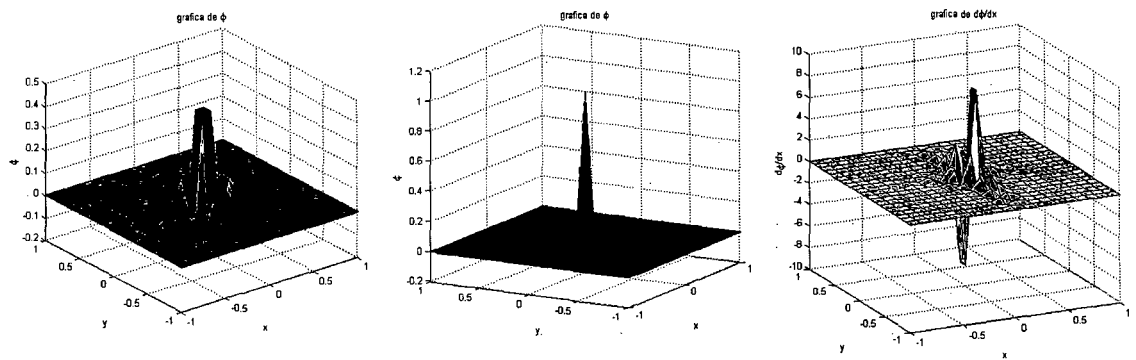


Figura 3.2: Función radial de soporte compacto para: un punto diferente a los nodos (izquierda), para un nodo (centro), y derivada de la función en un punto diferente a los nodos (derecha)

Resolviendo este problema para valores conocidos de $u(x)$ se obtiene un sistema lineal de ecuaciones de la forma:

$$Ac = y \tag{3.3}$$

Donde, la matriz A recibe el nombre de “Matriz de interpolación” y está dada por $A_{jk} = v_k(x_j)$; $j, k = 1, \dots, N$. Los coeficientes de la interpolación estarían dados por el vector $c = [c_1, \dots, c_N]^T$, y el vector $y = [y_1, \dots, y_N]^T$ contiene a aquellos datos conocidos.

Utilizando Funciones de Base Radial para resolver este problema se obtiene la siguiente aproximación:

$$u(x) = \sum_{k=1}^N c_k \varphi(\|x - x_k\|_2) \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{3.4}$$

En este caso los coeficientes de la interpolación se obtienen al resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} \varphi(\|x_1 - x_1\|_2) & \varphi(\|x_1 - x_2\|_2) & \cdots & \varphi(\|x_1 - x_N\|_2) \\ \varphi(\|x_2 - x_1\|_2) & \varphi(\|x_2 - x_2\|_2) & \cdots & \varphi(\|x_2 - x_N\|_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi(\|x_N - x_1\|_2) & \varphi(\|x_N - x_2\|_2) & \cdots & \varphi(\|x_N - x_N\|_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(x_1) \\ y(x_2) \\ \vdots \\ y(x_N) \end{bmatrix}$$

Como la solución del problema depende enteramente de la solución de este sistema de ecuaciones lineales, se debe tener presente que ésta dependerá de cuándo (es decir para

que tipo de funciones base φ) el sistema matricial es *no singular*, así que a continuación se analizará que funciones satisfacen esta necesidad.

3.4. FUNCIONES DEFINIDAS POSITIVAS

La interpolación con funciones de base radial dependerá de la solución de un sistema matricial de ecuaciones, las cuales obviamente tendrán solución siempre que se trabaje con matrices no singulares. Dependiendo del orden en que sean tomados los datos se podrían presentar casos en que la matriz A resulta ser singular (dependiendo también de la función definida φ). Esta situación mejora cuando se trabaja con “*matrices definidas positivas*” así que a continuación se verán algunas definiciones que conducirán a obtener las condiciones necesarias para lograr esta característica en el sistema matricial.

3.4.1. Funciones y Matrices definidas Positivas

Definición 3.4.1. Matriz definida Positiva. Una Matriz simétrica A se denomina “*semi-definida positiva*” si está asociada a una forma cuadrática no negativa, es decir:

$$\sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N c_j c_k A_{jk} \geq 0$$

Para cualquier $c = [c_1, \dots, c_N]^T \in \mathbb{R}^N$. Luego si la forma cuadrática anterior es nula únicamente para $c_j = 0, j = 1, \dots, N$, entonces A es denominada “*definida positiva*”.

Una propiedad importante de las matrices definidas positivas, es que todos sus valores propios son positivos, además una matriz definida positiva siempre es no singular.

Definición 3.4.2. Función definida positiva. Una función $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sera “*definida positiva*” si y sólo si es par y cumple con:

$$\sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N c_j c_k \Phi(x_j - x_k) \geq 0$$

Para cualquiera de los N pares diferentes de puntos $x_1, \dots, x_N \in \mathbb{R}^n$. Luego la función Φ será “*estrictamente definida positiva*” en \mathbb{R}^n si la forma cuadrática anterior es nula únicamente para $c_j = 0, j = 1, \dots, N$.

Entonces, el sistema de ecuaciones lineales propuesto en el acápite 3.3, posee solución única, si la matriz $A = \{A_{jk}\} = \{\varphi(\|x_j - x_k\|)\}$ es definida positiva. Ahora se debe notar que:

$$A = \{A_{jk}\} = \{\varphi(\|x_j - x_k\|)\} = \Phi(x_j - x_k)$$

Y luego A será definida positiva si $\Phi_k(x_j) = \Phi(x_j - x_k)$ es estrictamente definida positiva, entonces se hace necesario poder identificar o construir funciones de este tipo. Para tal fin, se revisan algunas propiedades y teoremas al respecto.

Algunas propiedades de las funciones definidas positivas son [9]:

- La combinación lineal no negativa de funciones definidas positivas es también definida positiva. Es decir si Φ_1, \dots, Φ_n son funciones definidas positivas de \mathbb{R}^n y $c_j \geq 0, j = 1, \dots, n$ entonces :

$$\Phi(x) = \sum_{j=1}^N c_j \Phi_j(x) \quad x \in \mathbb{R}^n$$

Es también definida positiva. Más aun, si al menos un Φ_j es estrictamente definido positivo y su correspondiente $c_j > 0$, entonces Φ es estrictamente definido positivo.

- $\Phi(0) \geq 0$.
- Toda función definida positiva esta acotada, de hecho:

$$|\Phi(x)| \leq \Phi(0)$$

- Si Φ es definido positivo con $\Phi(0) = 0$ entonces $\Phi \equiv 0$.
- El producto de funciones (estrictamente) definidas positivas es también una función (estrictamente) definida positiva.

Para la comprensión de las siguientes definiciones y teoremas, es necesaria la introducción del concepto de medida de un conjunto, pues este concepto ayuda a cuantificar el tamaño de un conjunto o de un subconjunto.

Definición 3.4.3. Medida. Dado un conjunto Ω y una colección de subconjuntos $F \in 2^\Omega$, una medida se define como una función $\mu : F \rightarrow [0, \infty]$ tal que satisface:

- $\mu(\emptyset) = 0$.
- $\mu(A_1) + \mu(A_2) + \dots = \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)$ con $\{A_i\}$ una familia de subconjuntos disjuntos.

A continuación se mencionarán teoremas referidos a casos particulares de medidas, tales como la medida de Borel o la medida de Lebesgue, teniendo en cuenta que la intención del presente capítulo sólo es ilustrar al lector acerca de los avances matemáticos que dieron origen a las funciones de forma que se van a utilizar más adelante. No se demuestran estos temas, pues implicaría la definición apropiada de conceptos matemáticos más abstractos. Es así que a continuación se explica muy brevemente y de manera didáctica los conceptos mencionados.

Por medida de Borel naturalmente se entenderá a la función que mide conjuntos de Borel, los cuales, para no entrar en detalles más complicados, son en general cualquier subconjunto de \mathbb{R}^n .

La medida de Lebesgue es la forma estándar de asignar una longitud, área, o volumen a los subconjuntos del espacio euclídeo y se usa en el análisis matemático, especialmente para definir la integración de Lebesgue y consecuentemente los espacios L^p mencionados en el capítulo 2.

3.4.2. Caracterización Integral de Funciones Definidas Positivas

A continuación se resumirán algunos conceptos referidos a la caracterización integral de funciones definidas positivas, teoría que fue establecida por Brochner y Schoenberg alrededor de 1930. Sin embargo, esta caracterización posee gran importancia en las más recientes extensiones de funciones estrictamente definidas positivas y funciones estrictamente monótonas, que son esenciales para su aplicación en problemas de interpolación, ya que garantizan la solución del sistema mostrado en la sección 3.3.

Teorema de Brochner.

Uno de los resultados más importantes acerca de funciones definidas positivas, es su caracterización en términos de transformadas de Fourier, establecida por Brochner en 1932 (para $n = 1$) y 1933 (para n en general) [9].

Teorema 3.4.1. Brochner. *Una función $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ será "definida positiva" si y sólo si es la transformada de Fourier de una medida, de Borel, μ de \mathbb{R}^n , finita y no negativa, es decir:*

$$\Phi(x) = \hat{\mu}(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x,y)} d\mu(y), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

De la definición anterior se puede observar que la función $\Phi(x) = e^{i(x,y)}$ (función Gaus-

siana) puede ser considerada como la *función definida positiva fundamental* ya que cualquier otra función definida positiva es obtenida como una combinación lineal (infinita) de este tipo de funciones. Además, por lo indicado en la subsección 3.4.1, toda combinación lineal de funciones definidas positivas, es nuevamente definida positiva; entonces la función $\Phi(x)$ es definida positiva, y el teorema de Brochner indicaría que todas las funciones definidas positivas son generadas por $\Phi(x)$.

Extensión a Funciones Estrictamente Definidas Positivas.

Para presentar este resultado es necesaria la noción de *carrier* de una medida de Borel (no negativa) definida sobre algún espacio topológico X . Esta definición está dada por:

$$X \setminus \{O : O \text{ es abierto y } \mu(O) = 0\}$$

Teorema 3.4.2. *Sea μ una medida de Borel no negativa en \mathbb{R}^n cuyo carrier es un conjunto de medida de Lebesgue no nula. Entonces la transformada de Fourier de μ es estrictamente definida positiva en \mathbb{R}^n .*

Demostración. La demostración de este teorema se encuentra en el libro de Fasshauer [9].

□

Como consecuencia de este teorema se puede obtener el siguiente corolario, el cual brinda una forma de construir funciones estrictamente definidas positivas.

Corolario 3.4.1. *Sea f una función continua no negativa en $L_1(\mathbb{R}^n)$ la cual además no es idénticamente nula. Entonces la transformada de Fourier de f es estrictamente definida positiva en \mathbb{R}^n [9].*

Finalmente como consecuencia de este corolario se puede obtener un criterio importante y sencillo para comprobar si una función es estrictamente definida positiva y se presenta a continuación.

Teorema 3.4.3. *Sea Φ una función continua en $L^1(\mathbb{R}^n)$. Φ es estrictamente definida positiva, si y sólo si, Φ es acotada y su transformada de Fourier es no negativa y no es idénticamente nula.*

3.4.3. Funciones Radiales Definidas Positivas

Con las definiciones previas, ahora se trata el caso de las funciones radiales definidas positivas. Se debe notar que la definición de funciones definidas positivas fue establecida en términos de funciones de varias variables Φ ; sin embargo, cuando se trata con funciones radiales, es decir $\Phi(x) = \varphi(\|x\|)$, también se puede establecer la definición en términos de la función de una sola variable φ , con lo cual se obtendrán *funciones de base radial definidas positivas*. Como consecuencia de este hecho, la caracterización integral de funciones definidas positivas presentada en el teorema de Brochner, puede ahora expresarse de manera más sencilla como se indica en el siguiente teorema.

Teorema 3.4.4. Schoenberg. *Una función continua $\varphi : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ es estrictamente definida positiva y radial en \mathbb{R}^n para todo n si y sólo si es de la forma:*

$$\varphi(r) = \int_0^\infty e^{-r^2 t^2} d\mu(t)$$

Donde μ es una medida de Borel no negativa en $[0, \infty)$ no centrada en el origen [9].

Como consecuencia de este resultado podemos presentar algunas funciones explícitas las cuales satisfacen las condiciones requeridas anteriormente y por lo tanto resultan útiles para la aproximación de funciones según lo planteado en la sección 3.3.

3.5. EJEMPLOS DE FUNCIONES ESTRICTAMENTE DEFINIDAS POSITIVAS

En esta sección, se presentan algunas funciones que satisfacen la teoría mencionada anteriormente. Debe tenerse en cuenta que en las funciones presentadas a continuación se incluirá el uso de un “*parámetro de forma*” ε , el cual se aplica sobre la variable x , esto para hacer que las funciones se presenten de la forma más simple posible, sin embargo, se explica en algún caso los efectos de este parámetro.

3.5.1. Función Gaussiana

A continuación se presenta la función Gaussiana, definida según:

$$\Phi(x) = e^{-\varepsilon^2 \|x\|^2}, \quad \varepsilon > 0 \tag{3.5}$$

Esta función es estrictamente definida positiva (y radial) en \mathbb{R}^n para todo n . Esto debido a que su transformada de Fourier es esencialmente otra función Gaussiana, de hecho es de la forma [9]:

$$\widehat{\Phi}(w) = \frac{1}{(\sqrt{2\varepsilon})^n} e^{-\frac{\|w\|^2}{4\varepsilon^2}}$$

y esta función es positiva, independientemente de la dimensión n . En particular, para $\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{2}}$ tenemos que $\Phi = \widehat{\Phi}$. La función Gaussiana es estrictamente definida positiva en virtud del teorema de Schoenberg. Por lo tanto si se plantea el sistema de ecuaciones lineales del acápite 3.3 con estas funciones, queda garantizada su solución única, ya que la matriz A resulta invertible.

3.5.2. Función Inversa Multicuadrática Generalizada

A continuación se presenta la función Multicuadrática, definida según:

$$\Phi(x) = (1 + \|x\|^2)^{-\beta}, \quad \beta > \frac{n}{2} \tag{3.6}$$

Esta función resulta estrictamente definida positiva en \mathbb{R}^n para $n < 2\beta$ gracias al *teorema de inversión de Hankel* [9], el cual manifiesta que cierta función (bajo ciertas condiciones) es estrictamente definida positiva si y sólo si la transformada de Fourier de dicha función es su propia inversa. La versión original de esta función la introdujo Hardy a principios de 1970 y corresponde al valor de $\beta = 1/2$, posteriores resultados ($\beta = 1$) aparecieron en varios trabajos realizados por Fornberg.

Esta función cumple con las cualidades requeridas para la solución del sistema lineal del acápite 3.3, mas no será utilizada en las aplicaciones numéricas presentadas en el capítulo cinco del presente trabajo.

3.6. INTERPOLACIÓN CON PRECISIÓN POLINOMIAL

En el acápite 3.3 se presentó la manera de usar funciones conocidas para aproximar funciones incógnita. Como consecuencia de esto se obtuvieron condiciones para dichas funciones conocidas; ahora se trata otro punto de gran importancia para el método RPIM.

Primero se debe observar que, si bien para aproximar funciones de una sola variable se puede interpolar N datos distintos usando polinomios de grado $N - 1$, para el caso de funciones de varias variables esto no es necesariamente cierto siempre. Más aún, se puede revisar el teorema de *Mairhuber Curtis* del libro de Fasshauer [9] para notar que en numerosos subdominios de \mathbb{R}^n para $n \geq 2$ el sistema mencionado en 3.3 no tiene solución.

El problema mencionado se resuelve utilizando funciones de base radial, pues como se manifestó anteriormente, mientras se trabaja con funciones de base radial definidas positivas, el sistema de ecuaciones en cuestión tendrá solución única. Sin embargo, en ciertos casos es necesario reproducir ciertos tipos de funciones, tal es el caso de las funciones lineales y constantes. Al respecto el método presentado en 3.3 no asegura la reproducción de estas funciones simples. Más aun, el método de solución de EDPs tratado en el presente trabajo necesita esta característica para satisfacer la así llamada *prueba de la parcela* que en ingeniería se traduce en la capacidad de reproducir estados de esfuerzos y deformaciones constantes. Entonces, a continuación se plantea una modificación al método propuesto para los fines mencionados.

La idea fundamental para la modificación del método mencionado es adicionar ciertos polinomios a la expansión en series mostrada en 3.3, es decir:

$$u(x) = \sum_{k=1}^N c_k \varphi(\|x - x_k\|) + \sum_{i=1}^M d_i p_i(x) \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (3.7)$$

Donde p_1, \dots, p_M forman una base del espacio de polinomios de n variables.

Ahora, considerando las funciones de interpolación y los polinomios, el sistema formado según el método mostrado en 3.3 posee $N + M$ incógnitas c_k y d_i , así que para asegurar una única solución, se adicionan M condiciones:

$$\sum_{k=1}^N c_k p_i(x_k) = 0, \quad i = 1, \dots, M. \quad (3.8)$$

Naturalmente esta nueva forma de interpolación conducirá a un sistema de ecuaciones lineales diferente al obtenido en 3.3, pues incorporando dicha condición se obtendrá un sistema de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} A & P_m \\ P_m^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Es decir:

$$Ha = U$$

Donde $A_{jk} = \varphi(\|x_j - x_k\|)$, $P_{jl} = p_l(x_j)$, $u = [u_1, \dots, u_n]^T$.

Se debe recordar que para garantizar la solución única del sistema dado en 3.3, se utilizó el hecho de que la matriz A resultaba definida positiva. En este caso no podemos afirmar lo mismo de la matriz H . Es más, es posible demostrar que la matriz H no es definida positiva. Entonces para asegurar la existencia y unicidad de la solución del sistema, es necesario demostrar que $\det(H) \neq 0$ (H es no singular) lo cual se hace en el siguiente teorema.

Teorema 3.6.1. *Dada una matriz cuadrada $A \in M_n(\mathbb{R})$, simétrica y definida positiva, y otra matriz $B \in M_{n \times m}(\mathbb{R}) - \{0\}$, entonces la matriz H definida por:*

$$H = \begin{bmatrix} A & B \\ B^T & 0 \end{bmatrix}$$

Es invertible.

Demostración. Como ya se mencionó que H no es definida positiva (basta con tomar la familia $v = [0_1, \dots, 0_n, x_1, \dots, x_m]$ y verificar que $v^T H v = 0$), se procede a demostrar que $\det(H) \neq 0$. Para esto se multiplica a H por cierta matriz elemental E (es decir $\det(E)=1$), entonces:

$$\det(EH) = \det(E)\det(H) = \det(H)$$

Además:

$$EH = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -B^T A^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ B^T & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & -B^T A^{-1} B \end{bmatrix}$$

De donde:

$$\det(EH) = \det(A)\det(-B^T A^{-1} B)$$

Notar que A^{-1} es también simétrica y definida positiva, luego la matriz $B^T A^{-1} B$ es definida positiva y por lo tanto $\det(B^T A^{-1} B) \neq 0$.

Entonces:

$$\det(H) = \det(EH) = \det(A)\det(B^T A^{-1} B) \neq 0$$

Con lo cual se concluye que H es invertible.

□

Finalmente, se debe mencionar que este último teorema garantiza la posibilidad de aproximar (de manera única) la función u como combinación lineal de funciones de forma radiales, como las mencionadas en el acápite 3.5.

CAPÍTULO IV

MÉTODO RADIAL DE INTERPOLACIÓN DE PUNTOS

4.1. DESARROLLO DEL MÉTODO

El método radial de interpolación de puntos surge por la necesidad de resolver el problema de singularidad que presentaba el método de interpolación puntual y se comenzó a emplear con éxito en formulaciones globales basadas en formulaciones débiles por Liu y Gu en el 2001 y Wang y Liu en el 2000 y 2002, según lo mencionado en [17], con el llamado método de Galerkin de Elementos Libres (EFGM).

4.1.1. Construcción Teórica de las Funciones de Forma

En el método radial de interpolación de puntos (RPIM), la función que aproxima a la solución del problema de la elastostática, se expresa como:

$$u(x) = \sum_{i=1}^n R_i(x)a_i + \sum_{j=1}^m p_j(x)b_j \quad u(x) = R^T(x)a + P^T(x)b \quad (4.1)$$

Donde $R_i(x)$ es la función de base radial (RBF), n es el número de puntos donde se definen RBFs, $p_j(x)$ es un elemento de la base polinomial en \mathbb{R}^2 o \mathbb{R}^3 , m es el número de funciones base polinomiales, $x \in \mathbb{R}^2$ o \mathbb{R}^3 .

Con respecto a la función de base radial $R_i(x)$, ésta sólo depende de la distancia entre el punto de interés x y un nodo x_i del dominio de soporte compacto definido para x . Es decir, en el caso de problemas bidimensionales se tendrá:

$$r = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}$$

Además, como las funciones de base radial ya fueron definidas con anterioridad, en la tabla (4.1) se presenta de manera explícita algunas de estas funciones y sus características. Así, se presenta la función Multicuadrática y la función Gaussiana con sus respectivos parámetros.

Tabla 4.1: Tipos de funciones de base radial

Nombre	Expresión	Parámetros de Forma
1. Multicuadrática (MQ)	$R_i(x, y) = (r_i^2 + (\alpha_c d_c)^2)^q$	$\alpha \geq 0, q$
2. Gaussiana (EXP)	$R_i(x, y) = e^{-\alpha(\frac{r_i}{d_c})^2}$	α

Las constantes α, q son denominadas parámetros de forma y son valores propuestos por el analista. Estos valores sirven para poder controlar o ajustar de alguna manera los valores que toma la función de base radial; el parámetro d_c representa la longitud característica del dominio de soporte local y puede ser tomado como el espaciamiento promedio entre nodos.

Para determinar los coeficientes a_i y b_j , se plantea un sistema de ecuaciones lineales para cada uno de los puntos del dominio de soporte local del punto de interés x . Entonces al evaluar la función de aproximación en cada uno de los n nodos del dominio de soporte local, se obtiene:

$$u_s = R_0 a + P_m b, \quad a \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^m$$

Donde, se tiene:

$$u_s = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n]^T$$

La matriz R_0 se denomina matriz de momentos de las RBFs y se expresa como:

$$R_0 = \begin{bmatrix} R_1(r_1) & R_2(r_1) & \dots & R_n(r_1) \\ R_1(r_2) & R_2(r_2) & \dots & R_n(r_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ R_1(r_n) & R_2(r_n) & \dots & R_n(r_n) \end{bmatrix}$$

Aquí debe tenerse en cuenta que:

$$r_k = \sqrt{(x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2}$$

La matriz P_m se denomina matriz de momentos polinomiales y se expresa como:

$$P_m = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1^2 & \cdots & p_m(\mathbf{x}_1) \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2^2 & \cdots & p_m(\mathbf{x}_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & y_n & x_n^2 & \cdots & p_m(\mathbf{x}_n) \end{bmatrix}$$

Los vectores de coeficientes para las RBFs y las funciones polinomiales son:

$$a^T = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n]$$

$$b^T = [b_1 \ b_2 \ \dots \ b_m]$$

Sin embargo, en este sistema hay $n + m$ variables y sólo n ecuaciones, así que se incorporan m ecuaciones adicionales:

$$\sum_{i=1}^n p_j(x_i) a_i = P_m^T a = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (4.2)$$

La representación matricial de (4.1) y (4.2) es la siguiente:

$$\tilde{u}_s = \begin{bmatrix} u_s \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_0 & P_m \\ P_m^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = G a_0 \quad (4.3)$$

Donde:

$$a_0^T = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n \ b_1 \ b_2 \ \dots \ b_m]$$

$$\tilde{u}_s^T = [u_1 \ u_2 \ \dots \ a_n \ 0 \ 0 \ \dots \ 0]$$

Ya que la matriz R_0 es simétrica, G también lo es y la solución del sistema planteado será:

$$a_0 = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = G^{-1} \tilde{u}_s \quad (4.4)$$

Entonces la función de interpolación planteada inicialmente se puede escribir como:

$$u(x) = R(x)^T a + P(x)^T b = \left[R(x)^T P(x)^T \right] \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

Reemplazando (4.4) en (4.5), se obtiene:

$$u(x) = \left[R(x)^T P(x)^T \right] G^{-1} \tilde{u}_s \quad (4.6)$$

El resultado anterior también se puede expresar como:

$$u(x) = \tilde{\Phi}^T(x) \tilde{u}_s$$

Donde $\tilde{\Phi}$ denota al vector que contiene los $n + m$ valores de la función de forma de (4.6).

$$\tilde{\Phi}^T(x) = [\phi_1(x) \ \phi_2(x) \ \dots \ \phi_n(x) \ \phi_{n+1}(x) \ \dots \ \phi_{n+m}(x)]$$

El vector de los valores de la función de forma RPIM consta de las primeras n componentes de $\tilde{\Phi}$ y se representa por:

$$\Phi^T(x) = [\phi_1(x) \ \phi_2(x) \ \dots \ \phi_n(x)]$$

La función $u(x)$ se puede expresar como sigue:

$$u(x) = \Phi^T(x) u_s = \sum_{i=1}^n \phi_i u_i$$

Además, si se deriva $u(x)$ se obtiene el vector derivada:

$$u_{,k}(x) = \Phi_{,k}^T(x) u_s$$

Para el cálculo numérico de las funciones de forma se resuelve el sistema:

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}^T(x) G &= [R(x)^T P(x)^T] \\ G^T \tilde{\Phi}(x) &= \begin{bmatrix} R(x) \\ P(x) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.7)$$

Así, el cálculo de las funciones de forma ya no involucra el cálculo de la inversa de la matriz G , y se puede resolver como un sistema de ecuaciones lineales. Análogamente se puede obtener las derivadas de las funciones de forma a partir de (4.7):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} (G^T \tilde{\Phi}(x)) &= \frac{\partial}{\partial x_i} \begin{bmatrix} R(x) \\ P(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial R(x)}{\partial x_i} \\ \frac{\partial P(x)}{\partial x_i} \end{bmatrix} \\ G^T \frac{\partial \tilde{\Phi}(x)}{\partial x_i} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial R(x)}{\partial x_i} \\ \frac{\partial P(x)}{\partial x_i} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.8)$$

La ecuación (4.8) indica que las derivadas también se obtienen a partir de la solución de un sistema de ecuaciones lineales.

4.1.2. Construcción Numérica de las Funciones de Forma

Los pasos a seguir para la construcción de la función de forma son:

1. *Seleccionar la función de base radial (exponencial) y elegir apropiadamente los parámetros α_s y d_c .*
2. *Seleccionar una base polinomial completa que pertenezca a \mathbb{R}^n , en esta tesis $n = 2$.*
3. *Con las funciones R_i y p_i se calculan las matrices R_0 y P_m que dependen enteramente de las posiciones de los nodos del soporte compacto.*
4. *Construir:*

$$G = \begin{bmatrix} R_0 & P_m \\ P_m^T & 0 \end{bmatrix}$$

5. *El vector función de forma $\Phi(x)$ se obtiene al resolver el sistema $G^T \Phi = [R^T P^T]^T$.*
6. *Análogamente se calculan las derivadas a partir del sistema (4.8).*

A continuación se indica el código desarrollado en MatLab para la construcción de la función de forma.

La función principal que crea la matriz Φ se denomina *Mat_Phi.m*, sus columnas son $[phi, dphidx, dphidy]$ y se codifica de la siguiente manera:

```
function [phi, dphidx, dphidy]=Mat_Phi(nRBF,mpol,ac,dc,q,xc,yc,x,y)
[G]=Mat_G(nRBF,mpol,ac,dc,q,x,y);
[R,dRdx,dRdy]=Mat_R(nRBF,ac,dc,q,x,y,xc,yc);
if mpol>0
    [p,dpdx,dpdy]=mat_p(mpol,xc,yc);
    phi=G'\[R';p'];
    dphidx=G'\[dRdx';dpdx'];
    dphidy=G'\[dRdy';dpdy'];
else
    phi=G'\R';
    dphidx=G'\dRdx';
    dphidy=G'\dRdy';
end
```

Ahora se definen las subrutinas para obtener las matrices G , R y las derivadas de R presentadas anteriormente.

```
function [G]=Mat_G(nRBF,mpol,ac,dc,q,x,y)
[R0]=Mat_Ro(nRBF,ac,dc,q,x,y);
if mpol>0
    [pm]=mat_pm(mpol,x,y);
    G=[R0 pm;pm' zeros(min(size(pm)))];
else
    G=[R0];
end
```

```
function [R,dRdx,dRdy]=Mat_R(nRBF,ac,dc,q,x,y,xc,yc)
npts=length(x);
R=zeros(1,npts);dRdx=R;dRdy=R;
for i=1:npts
    dx=xc-x(i);
    dy=yc-y(i);
    t=dfir(nRBF,ac,dc,q,dx,dy);
    R(i)=t(1);
    dRdx(i)=t(2);
    dRdy(i)=t(3);
end
```

La función *mat_p.m* que genera la base polinomial necesaria para completar el sistema (4.8) es:

```
function [pm]=mat_pm(mpol,x,y) %y deben entrar como columnas
npts=length(x);pm=[ones(npts,1) x y];aux=[x y];
for i=2:mpol
    t=aux;
    for j=1:i
        aux(:,j)=aux(:,j).*x;
    end
    aux=[aux t(:,i).*y];
    pm=[pm aux];
end
```

Además, también se presentan las subrutinas necesarias para el funcionamiento de las rutinas mencionadas anteriormente.

```
function [p,dpdx,dpdy]=mat_p(mpol,xc,yc)
p=[1 xc yc];aux=[xc yc];
for i=2:mpol
    t=aux;
    for j=1:i
        aux(1,j)=aux(1,j)*xc;
    end
    aux=[aux t(1,i)*yc];
end
```

```

    p=[p aux];
end
dpx=[0];dpy=dpx;
for i=2:mpol+1
    m=i*(i-1)/2;
    aux2=[p(1,m-i+2:m)];
    dpx=[dpx aux2.*(i-1:-1:1) 0];
    dpy=[dpy 0 aux2.*(1:1:i-1)];
end

```

```

function [Ro]=Mat_Ro(nRBF,ac,dc,q,x,y)
npts=length(x);
Ro=zeros(npts,npts);
for i=1:npts
    for j=1:npts
        dx=x(i)-x(j);
        dy=y(i)-y(j);
        Ro(i,j)=fir(nRBF,ac,dc,q,dx,dy);
    end
end

```

Finalmente se presentan las rutinas, denominadas *fir.m* y *dfir.m*, que evalúan el valor de las funciones de base radial y sus derivadas.

```

function [fr]=fir(nRBF,ac,dc,q,dx,dy)
rr=(dx^2+dy^2)^0.5;
switch nRBF
    case 1
        R=ac*dc;
        fr=(rr^2+R^2)^q;% Multicuadratica
    case 2
        q=ac/dc;% Gauseana
        fr=exp(-q*(rr)^2);
end

```

```

function [fr]=dfir(nRBF,ac,dc,q,dx,dy)
rr=(dx^2+dy^2)^0.5;
switch nRBF
    case 1
        R=ac*dc;
        fr(1)=(rr^2+R^2)^q;% Multicuadratica
        fr(2)=2*q*(rr^2+R^2)^(q-1)*(dx);
        fr(3)=2*q*(rr^2+R^2)^(q-1)*(dy);
    case 2
        q=ac/dc;% Gauseana
        fr(1)=exp(-q*(rr)^2);
        fr(2)=-2*q*exp(-q*(rr)^2)*(dx);

```

```
fr(3)=-2*q*exp(-q*(rr)^2)*(dy);
end
```

Para calcular la función de forma referida a una distribución de nodos uniformemente espaciados (cada 0.1 unidades) sobre una región rectangular centrada en el punto (0, 0) y de lado 2 unidades, se emplean los siguientes datos:

- Tipo de función base: Gaussiana.
- Parámetro de forma $\alpha = 0,8$.

A continuación se presentan los resultados obtenidos en la tabla (4.2), y se muestran estos resultados de manera gráfica en las figuras (4.1, 4.2). Se debe tener en cuenta que todos los cálculos se realizan con el script *Mat_Phi.m* codificado en MatLab.

Tabla 4.2: Resultados calculados con el script *Mat_Phi.m* (sólo se muestran los 20 primeros datos de los 400 disponibles)

Nodo	x	y	Φ	$d\Phi/dx$	$d\Phi/dy$
1	-1	-1.0000	0.0001	-0.0002	-0.0002
2	-1	-0.8947	-0.0001	0.0002	0.0002
3	-1	-0.7895	0.0002	-0.0003	-0.0003
4	-1	-0.6842	-0.0001	0.0002	0.0003
5	-1	-0.5789	0.0002	-0.0004	-0.0004
6	-1	-0.4737	-0.0002	0.0004	0.0005
7	-1	-0.3684	0.0002	-0.0006	-0.0007
8	-1	-0.2632	-0.0003	0.0007	0.0012
9	-1	-0.1579	0.0005	-0.0013	-0.0032
10	-1	-0.0526	-0.0014	0.0038	0.0278
11	-1	0.0526	-0.0014	0.0038	-0.0278
12	-1	0.1579	0.0005	-0.0013	0.0032
13	-1	0.2632	-0.0003	0.0007	-0.0012
14	-1	0.3684	0.0002	-0.0006	0.0007
15	-1	0.4737	-0.0002	0.0004	-0.0005
16	-1	0.5789	0.0002	-0.0004	0.0004
17	-1	0.6842	-0.0001	0.0002	-0.0003
18	-1	0.7895	0.0002	-0.0003	0.0003
19	-1	0.8947	-0.0001	0.0002	-0.0002
20	-1	1.0000	0.0001	-0.0002	0.0002

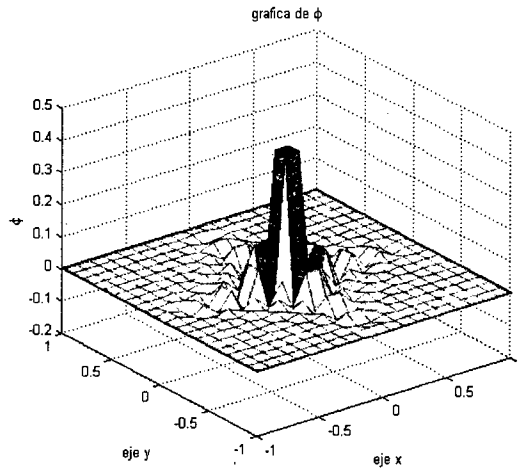


Figura 4.1: Función de forma $\Phi(x, y)$

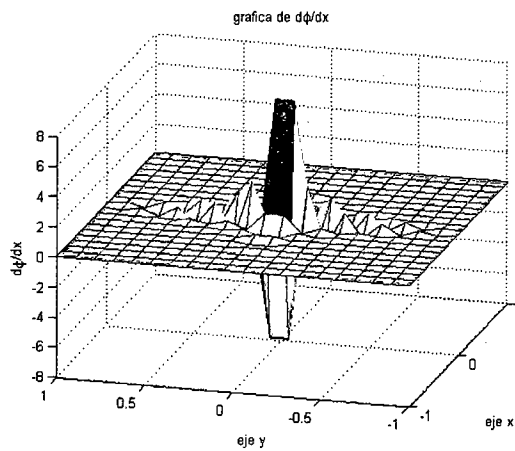


Figura 4.2: Derivada de la función de forma $d\Phi/dx$

4.2. FORMULACIÓN GLOBAL DÉBIL

La formulación que se detalla a continuación corresponde al Método de Galerkin. De acuerdo a la formulación desarrollada en el capítulo 2 y a los conceptos allí expuestos, se puede decir que la solución del problema se obtiene al resolver la siguiente ecuación:

$$\int_{\Omega} \sigma : \epsilon d\Omega - \int_{\Omega} b d\Omega - \int_{\Gamma_t} t d\Gamma = 0 \quad (4.9)$$

En forma resumida:

$$a(u, v) - l(v) = 0$$

Para trabajar matricialmente la formulación expuesta, se define la transformación lineal: $L : u \rightarrow \epsilon(u)$, que transforma el espacio vectorial de desplazamientos en el espacio vectorial de deformación, los cuales están incluidos en \mathbb{R}^n , $n = 1, 2$ ó 3 . La transformación mencionada se representa matricialmente como:

$$L := \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}$$

Ahora notar que:

$$\sigma = E\epsilon$$

$$\sigma : \epsilon = \epsilon^T E^T \epsilon$$

Donde, E es conocida como matriz del material y además $E = E^T$ para el caso isotrópico.

$$\sigma : \epsilon = (Lv)^T E(Lu)$$

Así, la ecuación planteada inicialmente se puede expresar como:

$$\int_{\Omega} (Lv)^T (ELu) d\Omega - \int_{\Omega} v^T b d\Omega - \int_{\Gamma_t} v^T t d\Gamma = 0 \quad (4.10)$$

Para aproximar u , se utiliza la función de forma presentada en la sección 4.1, la que se debe calcular para cualquier punto de interés sobre un conjunto de nodos en un dominio de soporte local del punto. La función de forma se escribe como una sumatoria nodal de la siguiente manera:

$$u^h = \sum_i^n \begin{bmatrix} \phi_i & 0 \\ 0 & \phi_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix} = \sum_i^n \Phi_i u_i \quad (4.11)$$

Donde Φ_i es la matriz de funciones de forma del nodo i y u_i representa el desplazamiento nodal; u^h es la función de aproximación de dimensión finita para el punto de interés, el cual puede ser un punto de muestreo o un punto de cuadratura.

De la misma manera también se plantea lo siguiente:

$$v^h = \Phi v = \sum_i^n \Phi_i v_i$$

Aplicando el tensor de deformación al vector u del espacio de desplazamientos se tiene:

$$\epsilon(u) = Lu^h = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial x} & 0 & \dots & \frac{\partial \phi_n}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \phi_1}{\partial y} & \dots & 0 & \frac{\partial \phi_n}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial y} & \frac{\partial \phi_1}{\partial x} & \dots & \frac{\partial \phi_n}{\partial y} & \frac{\partial \phi_n}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \vdots \\ u_n \\ v_n \end{bmatrix} = Bu$$

$$\epsilon(u) = \sum_i^n B_i u_i \quad (4.12)$$

Donde B es la matriz que asocia deformaciones y desplazamientos globales, B_i representa el papel de B en el dominio local del nodo i . De igual modo:

$$Lv^h = L\Phi v = Bv = \sum_i^n B_i v_i$$

4.2.1. Matriz de Rigidez

Se se reemplaza el resultado anterior en el primer término de la ecuación (4.10), se obtiene:

$$\int_{\Omega} (Lv)^T (ELu) d\Omega = \int_{\Omega} \sum_i^n \sum_j^n v_i^T [B_i^T E B_j] u_j d\Omega \quad (4.13)$$

Se debe observar que hasta este punto, i y j están basados en un sistema de numeración local para nodos dentro del dominio de soporte local. Es posible cambiar este sistema de numeración de uno local a uno global en el cual se tengan almacenados todos los nodos del dominio completo de manera única desde el 1 hasta el N , por lo tanto, ambos índices i y j pueden variar de 1 a N . Considerando el hecho de que cuando los nodos i y j no están en el mismo dominio de soporte local, el integrando se anula y consecuentemente la integral, con esta operación la expresión anterior se puede expresar como:

$$\int_{\Omega} (Lv)^T (ELu) d\Omega = \sum_i^N \sum_j^N v_i^T \underbrace{\left(\int_{\Omega} B_i^T E B_j d\Omega \right)}_{K_{ij}} u_j \quad (4.14)$$

Donde K_{ij} , es llamada matriz de rigidez nodal o también **Matriz de Rigidez Local** y naturalmente se define como:

$$K_{ij} = \int_{\Omega} (B_i^T) E (B_j) d\Omega \quad (4.15)$$

Donde B_i es:

$$B_i = \begin{bmatrix} \phi_{i,x} & 0 \\ 0 & \phi_{i,y} \\ \phi_{i,y} & \phi_{i,x} \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

Notar que cuando los nodos i y j no están en el dominio de soporte del mismo punto, K_{ij} se anula.

La ecuación (4.14) puede entonces ser expresada como:

$$\int_{\Omega} (Lv)^T (ELu) d\Omega = \sum_i^N \sum_j^N v_i^T K_{ij} u_j = V^T K U \quad (4.17)$$

La sumatoria de la ecuación (4.17) es de hecho un proceso de ensamblaje. Aquí, K se denomina **Matriz de Rigidez Global** y posee la siguiente forma:

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdots & K_{1N} \\ K_{21} & K_{22} & \cdots & K_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{N1} & K_{N2} & \cdots & K_{NN} \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

La dimensión de la matriz K es de $(2N) \times (2N)$ en dimensión \mathbb{R}^2 , análogamente en \mathbb{R}^3 será de $(3N) \times (3N)$. En ambos casos el número total de puntos del dominio del problema es N ; análogamente el vector de desplazamientos globales en \mathbb{R}^2 es:

$$U_{(2N \times 1)}^T = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_N] = [u_1, v_1, \dots, u_N, v_N]$$

4.2.2. Vector de Fuerzas de Cuerpo

El segundo término de la ecuación (4.10) correspondiente a las fuerzas de cuerpo se trabaja de la siguiente manera:

$$\int_{\Omega} v^T b d\Omega = \int_{\Omega} \left(\sum_i^n \Phi_i v_i \right)^T b d\Omega$$

y argumentando el cambio de índices de manera análoga a lo referido acerca de la numeración local y global se obtiene:

$$\int_{\Omega} v^T b d\Omega = \int_{\Omega} \left(\sum_i^N \Phi_i v_i \right)^T b d\Omega = \sum_i^N v_i^T \underbrace{\int_{\Omega} \Phi_i^T b d\Omega}_{F_i^b} \quad (4.19)$$

Donde se define a $F_i^{(b)}$ como el vector de fuerzas de cuerpo nodales, es decir:

$$F_i^b = \int_{\Omega} \Phi_i^T b d\Omega \quad (4.20)$$

La ecuación (4.19) puede ser expandida y reagrupada de la siguiente manera:

$$\sum_i^N v_i^T \underbrace{\int_{\Omega} \Phi_i^T b d\Omega}_{F_i^b} = \begin{bmatrix} v_1^T & \dots & v_N^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1^b \\ \vdots \\ F_N^b \end{bmatrix} = V^T F^b \quad (4.21)$$

Donde $F^{(b)}$ es el vector de fuerzas de cuerpo global.

4.2.3. Vector de Fuerzas de Superficie

El último término de la ecuación (4.10) se trata de la misma manera que el caso del vector de fuerzas de cuerpo, con la salvedad de que la región de integración es la frontera de fuerzas de tensión. De esta manera se tiene:

$$\int_{\Gamma_t} v^T t d\Gamma = \sum_i^N v_i^T \underbrace{\int_{\Gamma_i} \Phi_i^T t d\Gamma}_{F_i^{(t)}} = V^T F^{(t)} \quad (4.22)$$

Donde se define a $F^{(t)}$ como el vector de fuerzas de tensión global.

$$(F_i^{(t)}) = \int_{\Gamma_i} \Phi_i^T t d\Gamma \quad (4.23)$$

4.2.4. Representación Matricial de la Formulación Débil

Reemplazando (4.17), (4.21) y (4.22) en la formulación (ecuación 4.10), se obtiene:

$$\begin{aligned} V^T K U - V^T F^{(b)} - V^T F^{(t)} &= 0 \\ V^T [K U - F^{(b)} - F^{(t)}] &= 0 \end{aligned}$$

Como V es un vector arbitrario, la expresión que hace idénticamente nula la representación matricial de la formulación débil es:

$$K U - F^{(b)} - F^{(t)} = 0$$

La que se puede reescribir de la siguiente manera:

$$KU = F \quad (4.24)$$

Donde:

$$F = F^{(b)} + F^{(t)}$$

De esta manera se termina de plantear la formulación débil considerando las condiciones de frontera tipo Neumann.

4.2.5. Incorporación de las Condiciones de Frontera

A continuación se procede a incorporar las condiciones de frontera de tipo Dirichlet no homogéneas, las cuales no fueron consideradas en acápite anteriores, para esto se utiliza el método de multiplicadores de Lagrange en la formulación variacional del capítulo 2 (Nota 1). Según este método, las condiciones deseadas (\bar{u}) se incorporan por la adición a (4.10) de la siguiente integral:

$$\int_{\Gamma_u} \lambda^T (u - \bar{u}) d\Gamma$$

Entonces, si se emplea el funcional J (2.21) y se incorporan las condiciones de frontera a través de los multiplicadores de Lagrange se obtiene:

$$\bar{J}(u, \lambda) = J(u) + \lambda^T \int_{\Gamma_u} (u - \bar{u}) d\Gamma \quad (4.25)$$

Ahora, si se derivada (4.25) en el sentido distribucional, se tiene:

$$D\bar{J} = DJ(u) + D\lambda^T \int_{\Gamma_u} (u - \bar{u}) d\Gamma + \lambda^T \int_{\Gamma_u} D(u - \bar{u}) d\Gamma \quad (4.26)$$

El resultado anterior se puede expresar como:

$$\int_{\Omega} (Lv)^T (ELu) d\Omega - \int_{\Omega} v^T b d\Omega - \int_{\Gamma_1} v^T t d\Gamma - D\lambda^T \int_{\Gamma_u} (u - \bar{u}) d\Gamma - \lambda^T \int_{\Gamma_u} Du d\Gamma = 0$$

En este punto, se debe recordar que en virtud del teorema de Lax-Milgram presentado en el capítulo 2, la solución débil buscada u es también solución fuerte del problema (por ser única), entonces se puede concluir que si $u \in H^1$ también $Du \in H^1$ ya que las funciones de prueba (v) pertenecen a H^1 y son elegidas arbitrariamente, por lo tanto Du puede ser expresada efectivamente como v ; así se puede escribir:

$$\int_{\Omega} (Lv)^T (ELu) d\Omega - \int_{\Omega} v^T b d\Omega - \int_{\Gamma_1} v^T t d\Gamma - D\lambda^T \int_{\Gamma_u} (u - \bar{u}) d\Gamma - \lambda^T \int_{\Gamma_u} v d\Gamma = 0 \quad (4.27)$$

Para expresar matricialmente los dos últimos términos de esta funcional, se debe notar que el vector de multiplicadores de Lagrange se expresa de la siguiente manera:

$$\lambda = \sum_i^{n_\lambda} \begin{bmatrix} p_i & 0 \\ 0 & p_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_{u_i} \\ \lambda_{v_i} \end{bmatrix} = \sum_i^{n_\lambda} N_i \lambda_i \quad (4.28)$$

Donde n_λ denota el número de nodos empleados en la incorporación de condiciones, p_i es la función de forma referida a las condiciones esenciales del i -ésimo nodo; N_i es la matriz de funciones de forma referida a las condiciones esenciales del i -ésimo nodo, las cuales representan una base del espacio vectorial de polinomios de grado n y s es la longitud de arco a lo largo del borde en el que se consideran las condiciones esenciales.

Si se quiere una función de interpolación lineal en el nodo i , las bases antes referidas serán de primer grado. Estas bases polinomiales en dimensión 2 se pueden expresar de la siguiente manera:

$$p_k^n = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \frac{s - s_i}{s_k - s_i}$$

A continuación expresaremos el penúltimo término de la ecuación (4.27) en función de las bases polinomiales N_i :

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_u} D\lambda^T(u - \bar{u})d\Gamma &= \int_{\Gamma_u} D \left(\sum_i^{n_\lambda} N_i \lambda_i \right)^T \sum_{j=1}^n \Phi_j u_j d\Gamma - \int_{\Gamma_u} D \left(\sum_i^{n_\lambda} N_i \lambda_i \right)^T \bar{u} d\Gamma \\ &= \sum_i^{n_\lambda} \sum_{j=1}^n D\lambda_i^T \underbrace{\int_{\Gamma_u} N_i^T \Phi_j d\Gamma}_{-G_{ij}^T} u_j - \sum_i^{n_\lambda} D\lambda_i^T \underbrace{\int_{\Gamma_u} N_i^T \bar{u} d\Gamma}_{-q_i} \end{aligned}$$

Ahora, si se definen G_{ij} y q_i como se se indica en la expresión anterior, ésta se puede expresar como:

$$\int_{\Gamma_u} D\lambda^T(u - \bar{u})d\Gamma = - \sum_i^{n_{\lambda t}} \sum_{j=1}^n D\lambda_i^T G_{ij}^T u_j + \sum_{i=1}^{n_\lambda} D\lambda_i^T q_i = D\lambda^T (-G^T U + Q) \quad (4.29)$$

Donde λ es el vector de los multiplicadores de Lagrange para todos los nodos sobre las condiciones esenciales de frontera; $n_{\lambda t}$ es el número total de nodos sobre las condiciones esenciales de frontera.

De esta manera quedan definidas las siguientes matrices:

$$G_{ij}^T = - \int_{\Gamma_u} N_i^T \Phi_j d\Gamma \quad (4.30)$$

$$q_i = - \int_{\Gamma_u} N_i^T \bar{u} d\Gamma \quad (4.31)$$

Además, la matriz global generada por el ensamblaje de G_{ij} se denomina G y el vector global generado por el ensamblaje de q_i se denomina Q .

El último término de la formulación débil (4.27) se puede escribir de manera similar al anterior, así se tiene:

$$\int_{\Gamma_u} (\Phi v)^T \lambda d\Gamma = \int_{\Gamma_u} \left(\sum_i^n \Phi_j v_j \right)^T \sum_j^{n_\lambda} N_j \lambda_j d\Gamma = \sum_{i=1}^{n_\lambda} \sum_{j=1}^n v_i^T \underbrace{\int_{\Gamma_u} \Phi_i^T N_j d\Gamma}_{-G_{ij}^T} \lambda_j \quad (4.32)$$

$$\int_{\Gamma_u} (\Phi v)^T \lambda d\Gamma = - \sum_{i=1}^{n_\lambda} \sum_{j=1}^N v_i^T G_{ij} \lambda_j = -V^T G \lambda \quad (4.33)$$

Finalmente, si se reemplazan las ecuaciones (4.17), (4.21), (4.22), (4.29) y (4.33) en la forma débil (4.27), la representación matricial de la formulación considerando condiciones de Dirichlet no homogéneas sería la siguiente:

$$V^T [KU - F] + D\lambda^T (G^T U - Q) + V^T G \lambda = 0$$

$$V^T [KU + G\lambda - F] + D\lambda^T (G^T U - Q) = 0$$

Y dado que el vector $[V^T \ D\lambda]$ es un vector arbitrario, se tiene que:

$$\begin{aligned} KU + G\lambda - F &= 0 \\ G^T U - Q &= 0 \end{aligned} \quad (4.34)$$

Esta última ecuación puede ser expresada matricialmente de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} K & G \\ G^T & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ \lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ Q \end{Bmatrix} \quad (4.35)$$

(4.35) representa el sistema de ecuaciones final que se debe resolver para encontrar los desplazamientos de cada nodo, es decir la solución a nuestro problema.

4.3. INTEGRACIÓN NUMÉRICA

Hasta este punto se ha definido el sistema de ecuaciones que resuelve el problema en estudio mediante matrices y vectores que dependen de integrales. Al respecto se debe notar

que estas integrales fueron planteadas desde el punto de vista de la teoría de medida, es decir las integrales correspondientes a la formulación débil son integrales de Lebesgue en el sentido general, pero en virtud de que el problema generalmente está planteado para funciones de desplazamiento pertenecientes a \mathbb{R}^n donde la integral de Lebesgue y la de Riemman coinciden, el cálculo numérico de los valores de las integrales se realiza con métodos conocidos para integrales de Riemman. La mayor desventaja de los métodos sin malla que usan un esquema como el planteado, es la integración numérica, esto debido a la forma complicada de las funciones de forma. Generalmente, son empleados dos tipos de aproximaciones que a continuación se describen:

Integración nodal directa. Las integrales son evaluadas en los nodos más cercanos al punto de integración. En este tipo de integración se corre el riesgo de obtener incompatibilidades en los resultados.

Malla de fondo o estructura de celdas. El dominio es dividido en celdas de integración sobre las cuales se encuentran los puntos de Gauss. En el caso de la malla de fondo, los nodos coinciden con los nodos de la malla. En el caso de la estructura de celdas, generalmente los nodos no son coincidentes con los nodos de la malla de fondo.

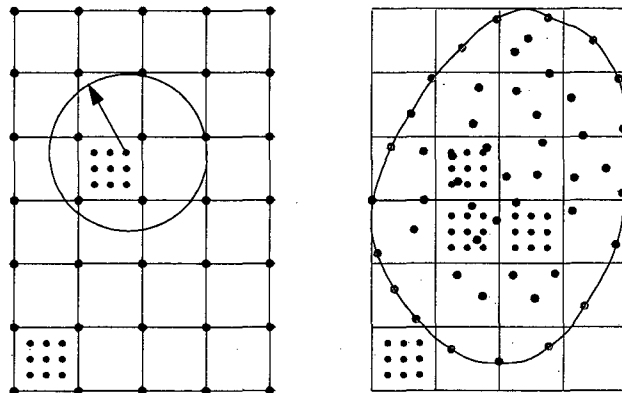


Figura 4.3: Integración en métodos sin malla basados en Galerkin: Malla de fondo (Izquierda) y fondo con estructura de celdas (Derecha)

En el presente trabajo, para evaluar integrales implicadas en el proceso de ensamblaje de matrices se utiliza el siguiente esquema de cuadratura:

$$\int_{\Omega} \psi d\Omega = \sum_k^{n_c} \int_{\Omega_k} \psi d\Omega = \sum_k^{n_c} \sum_{i=1}^{n_g} w_i \psi(x_{gi}) |J_{ik}^D|$$

Donde ψ representa la función que se desea integrar, w_i es el factor de ponderación para el i -ésimo punto x_{gi} , y $|J_{ik}^D|$ es la matriz Jacobiana para el área de integración de la celda k , en el cual se ubica el punto de Gauss x_{gi} , n_c es el número de celdas y n_g es el número de puntos de Gauss; de manera similar se puede integrar sobre la frontera.

Con respecto al ensamblaje de la matriz de rigidez, el integrando tiene la siguiente forma:

$$\psi(x_{gi}) = B_i^T(x_{gi}) E B_J(x_{gi})$$

Consecuentemente, el valor de la integral será obtenido según:

$$K_{IJ} = \sum_k^{n_c} \sum_{i=1}^{n_g} w_i B_I^T(x_{gi}) E B_J(x_{gi}) |J_{ik}^D| = \sum_k^{n_c} \sum_{i=1}^{n_g} K_{IJ}^{ik} \quad (4.36)$$

Donde, K_{IJ}^{ik} se define como:

$$K_{IJ}^{ik} = w_i B_I^T(x_{gi}) E B_J(x_{gi}) |J_{ik}^D| \quad (4.37)$$

Se debe notar que la matriz de rigidez nodal K_{IJ} se obtiene numéricamente por contribución de todos los puntos de cuadratura cuyo dominio de soporte local incluye a los puntos I y J conjuntamente, es decir que si el nodo I y el nodo J no se encuentran en el dominio de soporte local del punto x_{gi} , la matriz K_{IJ}^{ik} se anula.

De manera similar se puede obtener el vector de fuerzas de cuerpo nodales y el vector de tensiones nodales.

Así, se tiene el vector de fuerzas de cuerpo nodales:

$$F_I^{(b)} = \sum_k^{n_c} \sum_{i=1}^{n_g} w_i \Phi_I^T(x_{gi}) b(x_{gi}) |J_{ik}^D| = \sum_k^{n_c} \sum_{i=1}^{n_g} F_I^{ik(b)} \quad (4.38)$$

Donde, $F_I^{ik(b)}$ se define como:

$$F_I^{ik(b)} = w_i \Phi_I^T(x_{gi}) b(x_{gi}) |J_{ik}^D| \quad (4.39)$$

Y el vector de fuerzas de tensión como:

$$F_I^{(t)} = \sum_l^{n_{ct}} \sum_{i=1}^{n_{gt}} w_i \Phi_I^T(x_{gi}) t(x_{gi}) |J_{il}^B| = \sum_l^{n_{ct}} \sum_{i=1}^{n_{gt}} F_I^{il(t)} \quad (4.40)$$

Donde, $F_I^{il(t)}$ se define como:

$$F_I^{il(t)} = w_i \Phi_I^T(x_{gi}) t(x_{gi}) |J_{il}^B| \quad (4.41)$$

Cabe resaltar que en el ensamblaje de las matrices se considera la contribución de cada punto de Gauss x_{gi} en cuyo dominio de soporte local se encuentren los nodos I y J , es decir que no se discrimina entre la contribución de puntos de Gauss que se encuentren en celdas diferentes o en celdas no vecinas a dicho punto, pues se consideran todas las celdas; esta forma de integrar es diferente a la del FEM, donde para cada elemento sólo se consideran los puntos de Gauss internos.

Puntos de Gauss, el valor numérico de los puntos de Gauss de cada celda son las raíces del polinomio de Legendre de grado n , las cuales se encuentran en el intervalo $[-1, 1]$ y los factores de ponderación se obtienen utilizando procesos de cuadratura.

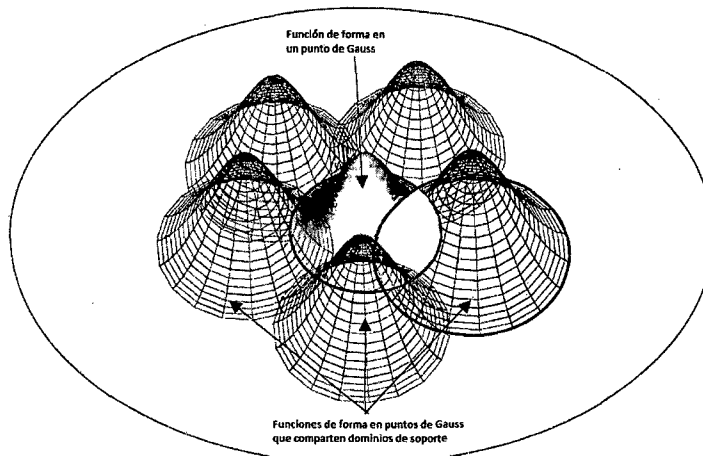


Figura 4.4: Dominios de soporte de los puntos de Gauss

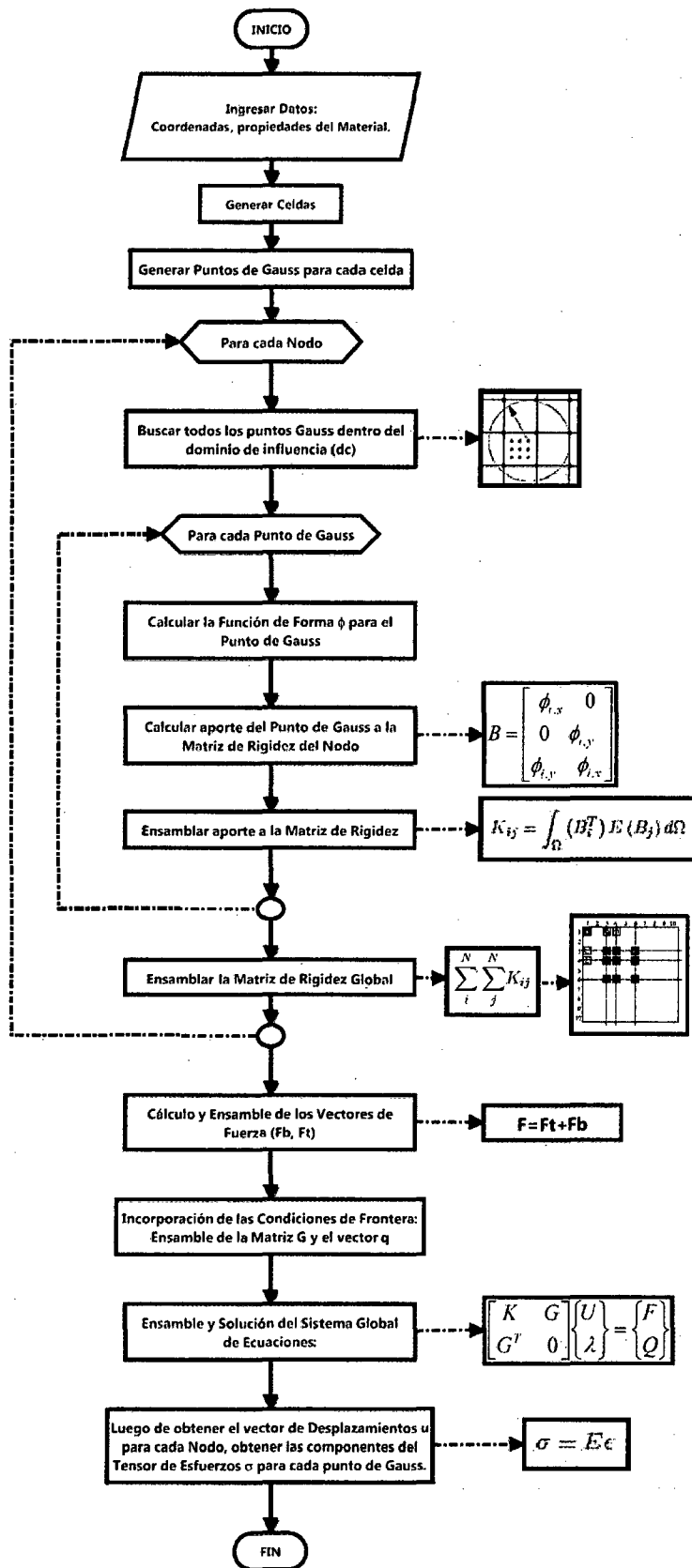
A continuación se presenta un resumen de las fórmulas usadas para la solución numérica del problema de Poisson.

Tabla 4.3: Resumen de fórmulas nodales

Término	Forma Integral	Forma Discreta
Matriz de Rigidez	$K_{ij} = \int_{\Omega} (B_i^T) E (B_j) d\Omega$	$\sum_k^{nc} \sum_{i=1}^{ng} w_i B_I^T(xg_i) E B_J(xg_i) J_{ik}^D $
Vector de Fuerzas de Cuerpo	$F_i^b = \int_{\Omega} (\phi_i^T) b d\Omega$	$\sum_k^{nc} \sum_{i=1}^{ng} w_i \phi_I^T(xg_i) b(xg_i) J_{ik}^D $
Vector de Fuerzas de Superficie	$F_i^t = \int_{\Gamma} (\phi_i^T) t d\Gamma$	$\sum_k^{nc} \sum_{i=1}^{ng} w_i \phi_I^T(xg_i) t(xg_i) J_{ik}^B $
Matriz G de Incorporación de Condiciones de Frontera	$G_{ij}^T = - \int_{\Gamma_u} (N_i^T) \phi_j d\Gamma$	$- \sum_k^{nc} \sum_{i=1}^{ng} w_i N_I^T(xg_i) \phi_J(xg_i) J_{ik}^B $
Vector q de Incorporación de Condiciones de Frontera	$q_i = - \int_{\Gamma_u} (N_i^T) \bar{u} d\Gamma$	$- \sum_k^{nc} \sum_{i=1}^{ng} w_i N_I^T(xg_i) \bar{u}(xg_i) J_{ik}^B $

4.4. IMPLEMENTACIÓN COMPUTACIONAL

A continuación se presenta de manera genérica el proceso que se debe seguir para escribir una rutina que siga el esquema planteado:



CAPÍTULO V

APLICACIÓN DEL MÉTODO RADIAL DE INTERPOLACIÓN DE PUNTOS

5.1. VIGA DE TIMOSHENKO

A continuación se presenta una aplicación relativa a los temas expuestos en los capítulos anteriores. Se trata un ejemplo numérico de elasticidad lineal, conocido como la viga de Timoshenko, ejemplo que es adecuado para la exposición de un problema con condiciones de frontera mixtas en el cual es posible comparar los resultados obtenidos a través de la formulación débil con propuestas teóricas como [13] y [26]. La aplicación se desarrolla con la ayuda de un programa escrito en MatLab para tal efecto.

Considere una viga de dimensiones L por D , supeditada a la acción de una fuerza con distribución parabólica en el extremo libre como se muestra en la figura (5.1). Para efectos prácticos se considera que la viga es de profundidad unitaria y predomina el estado plano de esfuerzos.

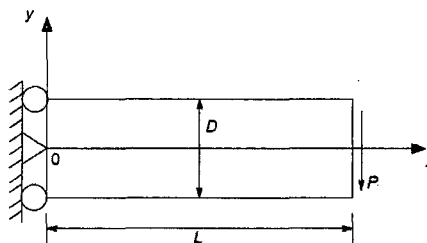


Figura 5.1: Viga de Timoshenko

La fuerza parabólica está dada por:

$$t_y = -\frac{P}{2I} \left(\frac{D^2}{4} - y^2 \right) \quad (5.1)$$

Donde el momento de inercia está dado por

$$I = \frac{D^3}{12}$$

Los desplazamientos de este problema están dados por las siguientes fórmulas:

$$u_x = -\frac{Py}{6EI} \left[(6L - 3x)x + (2 + \nu) \left(y^2 - \frac{D^2}{4} \right) \right] \quad (5.2)$$

$$u_y = \frac{P}{6EI} \left[3\nu y^2(L - x) + (4 + 5\nu) \frac{D^2 x}{4} + (3L - x)x^2 \right] \quad (5.3)$$

Y los esfuerzos teóricos por:

$$\sigma_x = -\frac{P(L - x)y}{I} \quad (5.4)$$

$$\sigma_y = 0 \quad (5.5)$$

$$\sigma_{xy} = -\frac{P}{2I} \left(\frac{D^2}{4} - y^2 \right) \quad (5.6)$$

Se considera las siguientes propiedades para los materiales: $E = 3,0 \times 10^7 \text{ psi}$, la razón de Poisson $\nu = 0,3$ y las dimensiones de la viga $D = 12 \text{ pulgadas}$, $L = 48 \text{ pulgadas}$. La fuerza debida al esfuerzo de corte es $P = 1000 \text{ libras}$.

La distribución de los nodos conjuntamente con la malla de fondo para la integración numérica de la forma débil se muestran en la figura (5.2). En cada celda de integración, se usa la cuadratura de Gauss de 4×4 . La base polinomial es de segundo grado y la función base es una función Gaussiana como la mencionada en el capítulo tres para funciones de base radial. Se considera un radio de soporte igual a 3,5 veces la mayor dimensión del dominio nodal.

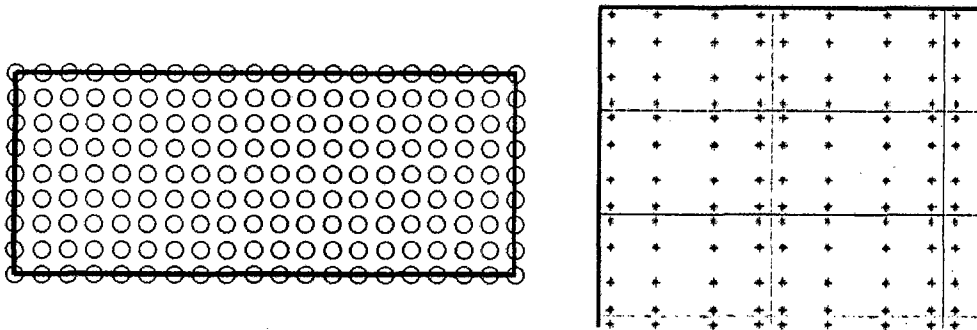


Figura 5.2: Distribución de nodos de la viga de Timoshenko (Derecha), puntos de Gauss en cada celda (Izquierda)

Luego de ejecutar el algoritmo RPIM mostrado en el capítulo cuatro, se obtienen los desplazamientos en todos los puntos antes mencionados, los cuales se muestran gráficamente en la figura (5.3). Además, en la tabla (5.1) se muestra el desplazamiento vertical de los puntos sobre el eje $y = 0$; estos resultados son comparados con la solución teórica (ver referencia [26]) y con la obtenida con los scripts del método de Mínimos Cuadrados Móviles desarrollados en [10] (el cual considera como radio del dominio de influencia 6,5 veces el espaciamiento nodal), este cuadro muestra la excelente concordancia entre la solución *RPIM* y la analítica.

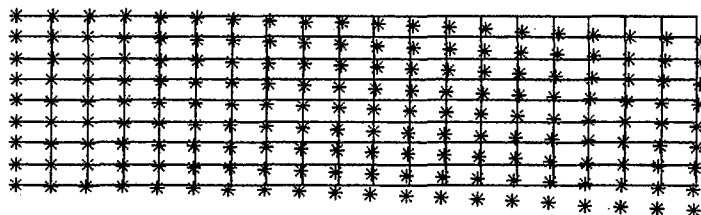


Figura 5.3: Desplazamientos de la viga de Timoshenko

Tabla 5.1: Comparación de desplazamientos verticales (m) sobre el eje de la viga

x (m)	u_y Teórico	u_y RPIM	u_y MLS
0.000	0.0000	0.0000	0.0000
2.526	-0.0001	-0.0001	-0.0001
5.053	-0.0002	-0.0002	-0.0002
7.579	-0.0004	-0.0004	-0.0004
10.105	-0.0006	-0.0006	-0.0006
12.632	-0.0009	-0.0009	-0.0009
15.158	-0.0013	-0.0013	-0.0013
17.684	-0.0017	-0.0017	-0.0017
20.211	-0.0021	-0.0021	-0.0021
22.737	-0.0026	-0.0026	-0.0026
25.263	-0.0031	-0.0031	-0.0031
27.790	-0.0037	-0.0037	-0.0037
30.316	-0.0043	-0.0043	-0.0043
32.842	-0.0049	-0.0049	-0.0049
35.368	-0.0055	-0.0055	-0.0055
37.895	-0.0062	-0.0062	-0.0062
40.421	-0.0068	-0.0068	-0.0068
42.947	-0.0075	-0.0075	-0.0075
45.474	-0.0082	-0.0082	-0.0082
48.000	-0.0089	-0.0089	-0.0089

Para aproximar mejor las respuestas en los esfuerzos de corte se trabaja con una nube de veinte por nueve nodos y regiones de cuatro por cuatro puntos para la integración numérica. La tabla (5.2) contiene valores de los esfuerzos obtenidos en algunos nodos.

Tabla 5.2: Comparación entre los esfuerzos teóricos y calculados con método RPIM y MLS

x (m)	y (m)	σ_{xx} Teórico	σ_{yy} Teórico	σ_{xy} Teórico	σ_{xx} RPIM	σ_{yy} RPIM	σ_{xy} RPIM	σ_{xx} MLS	σ_{yy} MLS	σ_{xy} MLS
0.175	-5.896	-1958.102	0.000	-4.302	-1875.310	12.563	-22.642	-1949.457	-5.716	0.714
0.175	-5.505	-1828.290	0.000	-19.775	-1751.468	17.029	-29.778	-1822.539	-1.292	-17.186
0.175	-4.995	-1658.920	0.000	-38.368	-1587.596	21.438	-35.925	-1656.990	0.763	-38.577
0.175	-4.604	-1529.108	0.000	-51.395	-1455.844	24.416	-45.167	-1529.529	1.033	-53.327
0.175	-4.396	-1459.929	0.000	-57.905	-1389.579	23.836	-50.396	-1460.995	0.960	-60.540
0.175	-4.005	-1330.117	0.000	-69.306	-1258.858	24.583	-60.539	-1331.122	0.437	-72.099
0.175	-3.495	-1160.747	0.000	-82.586	-1098.649	19.611	-76.310	-1161.308	-0.224	-83.955
0.175	-3.104	-1030.935	0.000	-91.543	-971.648	17.294	-86.750	-1031.398	-0.412	-91.853
0.175	-2.896	-961.756	0.000	-95.882	-907.036	15.614	-91.391	-962.271	-0.366	-95.920
0.175	-2.505	-831.944	0.000	-103.212	-776.712	16.523	-98.811	-833.009	-0.328	-103.323
0.175	-1.995	-662.575	0.000	-111.180	-618.885	13.452	-104.712	-664.998	-0.512	-111.822
0.175	-1.604	-532.762	0.000	-116.065	-493.129	12.387	-109.298	-535.961	-0.780	-117.014
0.175	-1.396	-463.583	0.000	-118.235	-429.502	10.519	-111.122	-466.986	-0.939	-119.223
0.175	-1.005	-333.771	0.000	-121.493	-305.357	8.548	-113.854	-336.877	-0.921	-122.224
0.175	-0.495	-164.402	0.000	-124.149	-151.217	3.739	-117.584	-166.074	-0.392	-124.420
0.175	-0.104	-34.590	0.000	-124.962	-31.559	0.848	-119.655	-34.870	-0.032	-124.989
0.175	0.104	34.590	0.000	-124.962	31.026	-0.960	-119.883	35.021	0.060	-124.916
0.175	0.495	164.402	0.000	-124.149	150.782	-3.837	-118.499	166.105	0.395	-124.151
0.175	1.005	333.771	0.000	-121.493	305.156	-8.615	-114.802	336.712	0.890	-121.934
0.175	1.396	463.583	0.000	-118.235	429.427	-10.579	-111.420	466.729	0.893	-119.110
0.175	1.604	532.762	0.000	-116.065	493.046	-12.460	-109.151	535.730	0.740	-117.051
0.175	1.995	662.575	0.000	-111.180	618.647	-13.573	-103.878	664.953	0.505	-112.072
0.175	2.505	831.944	0.000	-103.212	776.202	-16.686	-97.910	833.253	0.364	-103.607
0.175	2.896	961.756	0.000	-95.882	906.588	-15.714	-91.157	962.656	0.438	-96.016
0.175	3.104	1030.935	0.000	-91.543	971.183	-17.378	-86.966	1031.771	0.499	-91.784
0.175	3.495	1160.747	0.000	-82.586	1098.220	-19.664	-77.257	1161.494	0.323	-83.646
0.175	4.005	1330.117	0.000	-69.306	1258.637	-24.610	-61.659	1330.970	-0.341	-71.734
0.175	4.396	1459.929	0.000	-57.905	1389.361	-23.925	-50.924	1460.642	-0.925	-60.353
0.175	4.604	1529.108	0.000	-51.395	1455.601	-24.558	-45.220	1529.156	-1.044	-53.299
0.175	4.995	1658.920	0.000	-38.368	1587.100	-21.742	-35.050	1656.782	-0.863	-38.786
0.175	5.505	1828.290	0.000	-19.775	1750.500	-17.541	-28.108	1822.793	1.056	-17.519
0.175	5.896	1958.102	0.000	-4.302	1874.013	-13.189	-20.935	1950.197	5.392	0.378

Para comparar los resultados de los esfuerzos calculados con el RPIM y las fórmulas de Timoshenko, se presenta en la figura (5.4), la distribución de esfuerzos a lo largo de toda la viga. Se debe notar que los esfuerzos se obtienen de manera directa gracias a la contribución de los puntos de Gauss, no se requiere de otro proceso adicional.

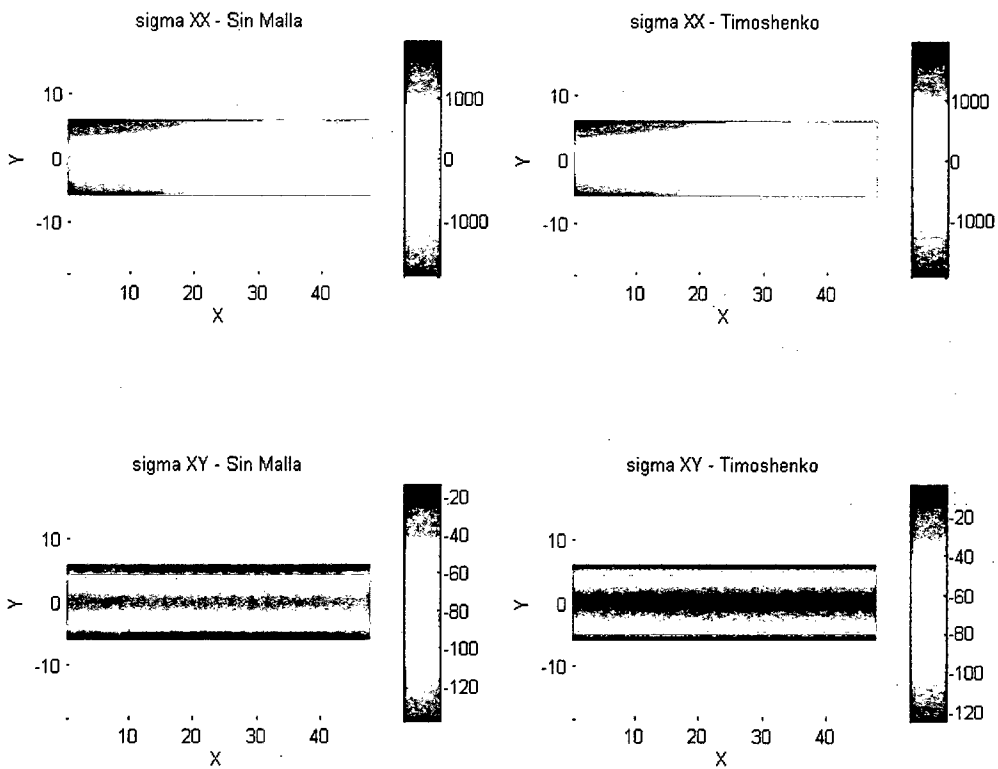


Figura 5.4: Comparación de la distribución de esfuerzos en la viga de Timoshenko

5.2. PROBLEMA DE BOUSSINESQ

Considérese el problema del cálculo de esfuerzos en una partícula de suelo producto de cargas en la superficie, de importancia en ingeniería geotécnica; dependiendo de la forma geométrica de la distribución de la carga superficial, existen soluciones teóricas a este problema, como las dadas por Boussinesq en 1883, quien supuso la masa de suelo como un medio continuo homogéneo, elástico, isotrópico y semi-infinito, con estas suposiciones se resuelve numéricamente este problema para el caso en el que la carga superficial es de ancho fijo y longitud infinita. Se analiza sólo un plano del medio continuo el cual es perpendicular a la mayor dimensión de la carga superficial. Luego se calculan los desplazamientos de los puntos pertenecientes al medio y posteriormente se calculan las componentes del tensor de esfuerzos en cada punto.

Entonces, considerar una carga superficial constante q de ancho B como la mostrada en la figura (5.5).

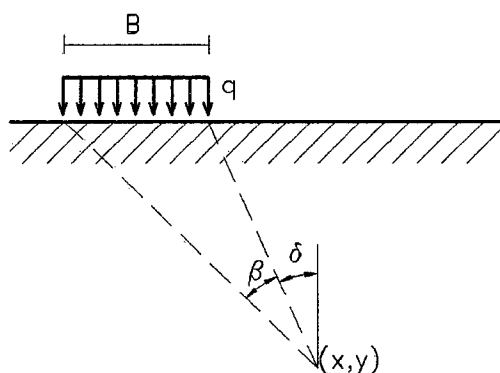


Figura 5.5: Problema de Boussinesq

Como solución a este problema A. Flamant y Boussinesq plantearon las siguientes expresiones, las cuales dependen sólo de los parámetros geométricos δ y β mas no de los parámetros E y ν (como se puede observar):

$$\delta = \arctan\left(\frac{x - B/2}{y}\right) \quad (5.7)$$

$$\beta = \arctan\left(\frac{x + B/2}{y}\right) - \delta \quad (5.8)$$

$$\sigma_{xx} = \frac{-q}{\pi} (\beta - \sin(\beta) \cos(\beta + 2\delta)) \quad (5.9)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{-q}{\pi} (\beta + \sin(\beta) \cos(\beta + 2\delta)) \quad (5.10)$$

$$\sigma_{xy} = \frac{q}{\pi} (\sin(\beta) \sin(\beta + 2\delta)) \quad (5.11)$$

Para la solución numérica de este problema se supone un estado plano de deformaciones, además sólo se considera la mitad derecha del plano semi-infinito, por consideraciones de simetría. Ahora, considerar los siguientes datos: $B = 10m$, $q = 10kg/m^2$, además como no se puede calcular con dimensiones infinitas para el medio, se considera al semiplano infinito como una región rectangular de $Lx = 50m$ por $Ly = 25m$, suponiendo que a esta distancia el valor de los esfuerzos es mínimo; con respecto a las condiciones de borde, se considerara que los lados derecho e inferior están con restricción de movimiento total ($u_x = u_y = 0$), mientras que el lado izquierdo sólo podrá desplazarse verticalmente ($u_x = 0, u_y \neq 0$), finalmente se consideran los parámetros elásticos $E = 10000kg/m^2$ y $\nu = 0,3$.

La distribución de los nodos conjuntamente con la malla de fondo utilizada para la integración numérica se muestran en la figura (5.6). En cada celda de integración se usa una cuadratura de Gauss de 4×4 . La base polinomial utilizada es de segundo grado y la RBF es Gaussiana, el radio de soporte es el triple de la mayor dimensión del dominio local.

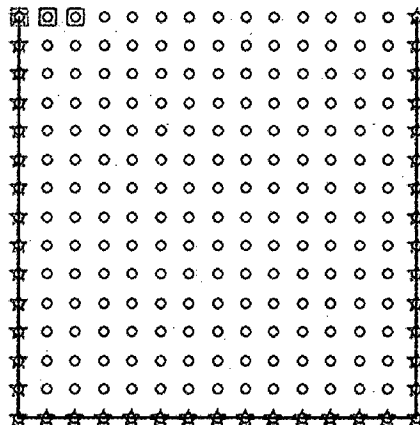


Figura 5.6: Nube de puntos del problema de Boussinesq

Las deformaciones obtenidas luego del cálculo se muestran en la figura (5.7).

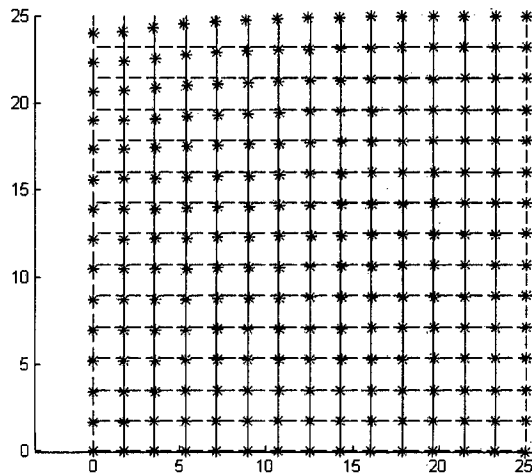


Figura 5.7: Desplazamiento de nodos

Ahora, en la tabla (5.3) se muestran algunos valores obtenidos sobre el nivel superficial ($y = 25$) y se comparan con los valores de deformación superficial obtenidos mediante la siguiente expresión:

$$u_y(x, 0) - u_y(0, 0) = \frac{2q(1 - \nu^2)}{\pi E} \{ (x - B/2) \ln(|x - B/2|) - (x + B/2) \ln(|x + B/2|) + B \ln(B/2) \} \quad (5.12)$$

la cual brinda los desplazamientos verticales como función del desplazamiento máximo. Para mayor detalle se puede revisar [21].

Tabla 5.3: Comparación de desplazamientos verticales a nivel superficial

x (m)	u_y teórico (m)	u_y RPIM (m)
0.00	-0.0098	-0.0098
1.79	-0.0093	-0.0095
3.57	-0.0071	-0.0084
5.36	-0.0046	-0.0057
7.14	-0.0033	-0.0038
8.93	-0.0024	-0.0025
10.71	-0.0017	-0.0016
12.50	-0.0013	-0.0008
14.29	-0.0009	-0.0001
16.07	-0.0006	0.0005
17.86	-0.0004	0.0010
19.64	-0.0002	0.0015
21.43	-0.0001	0.0019
23.21	0.0000	0.0023
25.00	0.0000	0.0026

Los esfuerzos calculados teóricamente y con el RPIM, son mostrados en la tabla (5.4) y las siguientes figuras (5.8, 5.9 y 5.10).

Tabla 5.4: Esfuerzos en los nodos sobre el eje $x = 0$

y (m)	σ_{xx} <i>RPIM</i>	σ_{yy} <i>RPIM</i>	σ_{xy} <i>RPIM</i>	σ_{xx} <i>Teórico</i>	σ_{yy} <i>Teórico</i>	σ_{xy} <i>Teórico</i>
0.1240	-0.9449	-2.3065	0.0177	-0.0329	-2.4925	0.0118
1.1964	-0.8054	-2.3793	0.0175	-0.0374	-2.5987	0.0128
1.9097	-0.7216	-2.4508	0.0321	-0.0409	-2.6742	0.0135
2.9821	-0.6085	-2.5516	0.0375	-0.0469	-2.7962	0.0147
3.6954	-0.5346	-2.5732	0.0457	-0.0515	-2.8835	0.0156
4.7678	-0.4021	-2.6075	0.0366	-0.0597	-3.0249	0.0171
5.4811	-0.3327	-2.6502	0.0485	-0.0662	-3.1266	0.0182
6.5536	-0.2320	-2.7219	0.0438	-0.0777	-3.2923	0.0201
7.2668	-0.1832	-2.8061	0.0523	-0.0869	-3.4121	0.0215
8.3393	-0.0958	-2.9186	0.0480	-0.1036	-3.6085	0.0239
9.0526	-0.0556	-3.0178	0.0653	-0.1170	-3.7512	0.0257
10.1250	0.0240	-3.1519	0.0642	-0.1419	-3.9866	0.0288
10.8383	0.0532	-3.2819	0.0837	-0.1624	-4.1588	0.0311
11.9107	0.1331	-3.4538	0.0833	-0.2010	-4.4445	0.0351
12.6240	0.1504	-3.6288	0.1179	-0.2335	-4.6548	0.0381
13.6964	0.2173	-3.8605	0.1246	-0.2964	-5.0057	0.0432
14.4097	0.2129	-4.0939	0.1700	-0.3507	-5.2651	0.0471
15.4821	0.2449	-4.4161	0.1720	-0.4587	-5.6993	0.0535
16.1954	0.1930	-4.7601	0.2442	-0.5547	-6.0204	0.0582
17.2678	0.1546	-5.1987	0.2463	-0.7519	-6.5557	0.0656
17.9811	0.0095	-5.5848	0.3511	-0.9325	-6.9473	0.0705
19.0536	-0.4069	-6.2529	0.3081	-1.3153	-7.5849	0.0766
19.7668	-0.7213	-6.8840	0.4229	-1.6753	-8.0328	0.0788
20.8393	-1.9536	-8.0925	0.2781	-2.4511	-8.7099	0.0763
21.5526	-2.7451	-9.0288	0.4298	-3.1812	-9.1306	0.0690
22.6250	-3.9100	-9.7329	0.3202	-4.7081	-9.6433	0.0475
23.3383	-4.4048	-9.0916	0.4121	-6.0503	-9.8622	0.0283
24.4107	-6.6544	-9.4034	-0.2282	-8.5122	-9.9931	0.0043
24.8760	-7.8737	-10.3653	-0.5999	-9.6842	-9.9999	0.0002

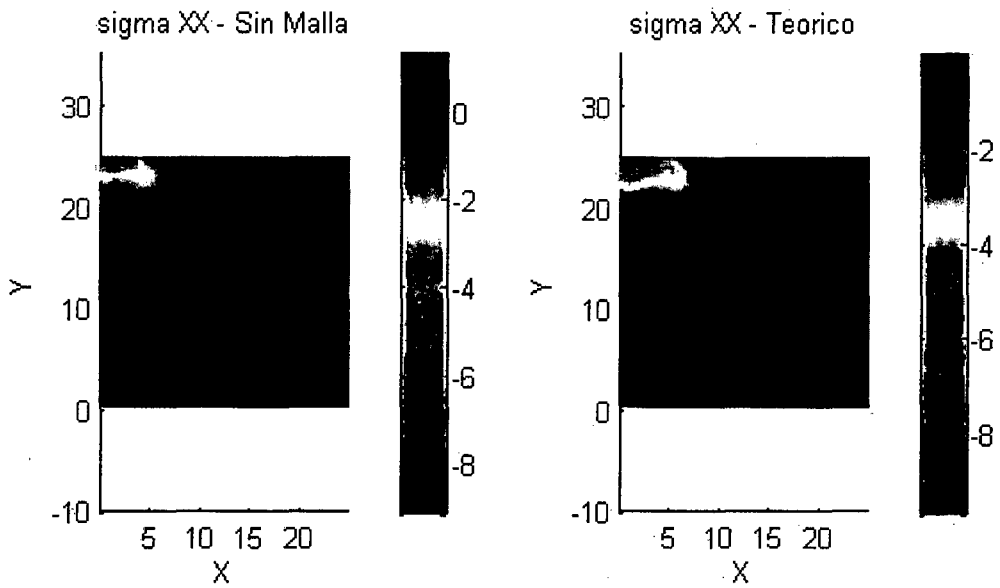


Figura 5.8: Comparación de la distribución de esfuerzos verticales: RPIM (izquierda), Teórico (Derecha)

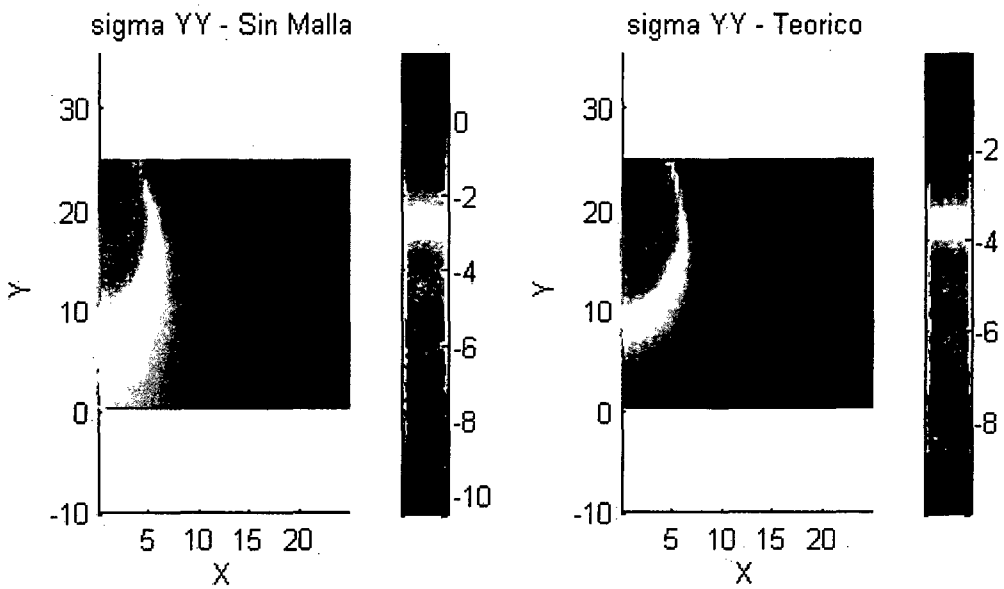


Figura 5.9: Comparación de la distribución de esfuerzos horizontales: RPIM (izquierda), Teórico (Derecha)

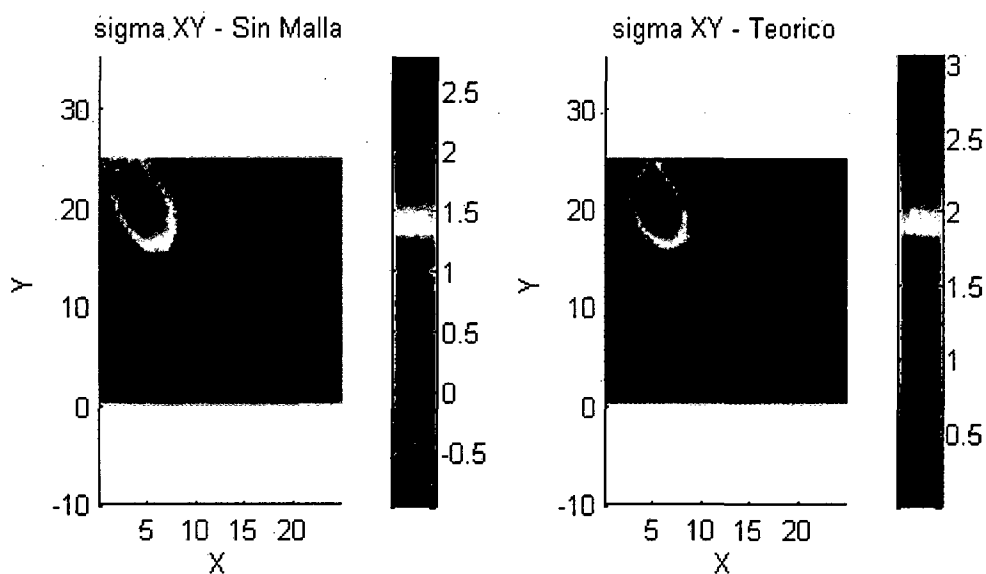


Figura 5.10: Comparación de la distribución de esfuerzos de corte: RPIM (izquierda), Teórico (Derecha)

5.3. ESFUERZOS SOBRE UN SUELO CON VARIOS ESTRATOS

Los ejemplos anteriores muestran la capacidad y versatilidad del método RPIM para resolver problemas de cálculo de esfuerzos o deformaciones. Además de esto muestran también una gran aproximación a los resultados propuestos como soluciones teóricas de cada problema. Ahora se aplica este método a problemas de mayor interés para la ingeniería civil, los cuales no tienen solución teórica, como el problema del cálculo de esfuerzos y el asentamiento elástico producidos por un terraplén sobre en una masa de suelo de varios estratos. Para la solución del problema planteado supondremos el terraplén de longitud infinita, así, sólo es necesario analizar una sección plana del suelo y suponer un estado plano de deformaciones, además de esto también suponer que la carga superficial q , aplicada sobre el suelo, es constante y de ancho fijo B ; con respecto a la estratificación del suelo, suponer estratos paralelos y horizontales, con profundidades, espesores y propiedades elásticas (E y ν) como se muestra en la figura (5.11).

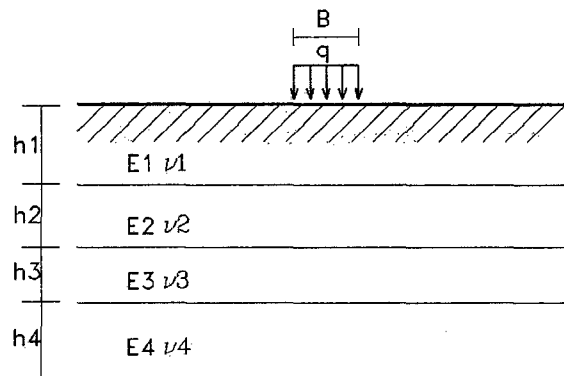


Figura 5.11: Dimensiones del problema planteado

Existe un punto importante a tratar para el desarrollo de este problema. Como se explicó en el capítulo anterior, al ensamblar las matrices de rigidez locales se necesita la interacción de dos nodos, además obviamente la matriz de rigidez resultante para la interacción de esos nodos depende de las propiedades elásticas (E, ν); hasta este momento eso no implicaba ningún problema, ya que se tenía la suposición de que dichas propiedades eran constantes en todo el dominio, mas en este problema se da el caso en el que existen nodos muy próximos con propiedades diferentes, entonces existe la necesidad de definir qué valor se debe considerar para calcular la matriz de rigidez local. Es así que de acuerdo a lo planteado por Sukumar y otros en [25] se definen los parámetros elásticos ($\bar{E}, \bar{\nu}$) para la interacción de los nodos i y j de diferentes materiales como sigue:

$$\frac{2}{\bar{E}} = \frac{1}{E_i} + \frac{1}{E_j} \quad (5.13)$$

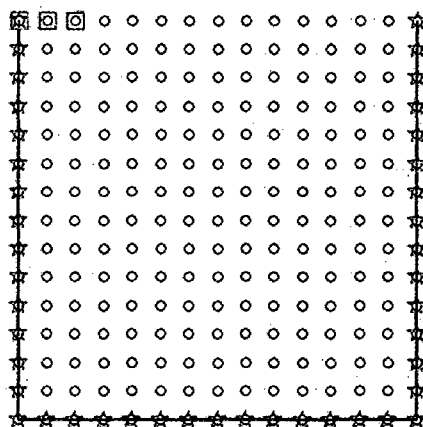
$$\bar{\nu} = \frac{\nu_i + \nu_j}{2} \quad (5.14)$$

Con respecto a la solución numérica de este problema, sólo se considera la mitad derecha del plano semi-infinito y además los siguientes datos: $B = 10m$, $q = 10kg/m^2$, como no se puede calcular con dimensiones infinitas para el medio, se aproxima el semiplano infinito como una región rectangular de $L_x = 50m$ por $L_y = 25m$, suponiendo que a esta distancia el valor de los esfuerzos es mínimo. Con respecto a las condiciones de borde, se considera que los lados derecho e inferior están con restricción de movimiento total ($u_x = u_y = 0$), mientras que el lado izquierdo solo podrá desplazarse verticalmente ($u_x = 0, u_y \neq 0$); finalmente se consideran los parámetros elásticos dados por la tabla (5.5), para cada estrato :

Tabla 5.5: Parámetros elásticos de los estratos del suelo

Estrato	$E(kg/m^2)$	ν	$h(m)$
1	10000	0,3	6,25
2	9000	0,3	6,25
3	8000	0,3	6,25
4	7000	0,3	6,25

La distribución de los nodos y la malla de fondo que se utiliza para la integración numérica se muestran en la figura (5.12). En cada celda de integración se emplea el mismo criterio del acápite 5.2.

**Figura 5.12:** Nube de puntos del problema

Las deformaciones obtenidas luego del cálculo se muestran en la figura (5.13). Además, se muestran algunos valores obtenidos sobre el eje horizontal ($y = 25$) en la tabla (5.6).

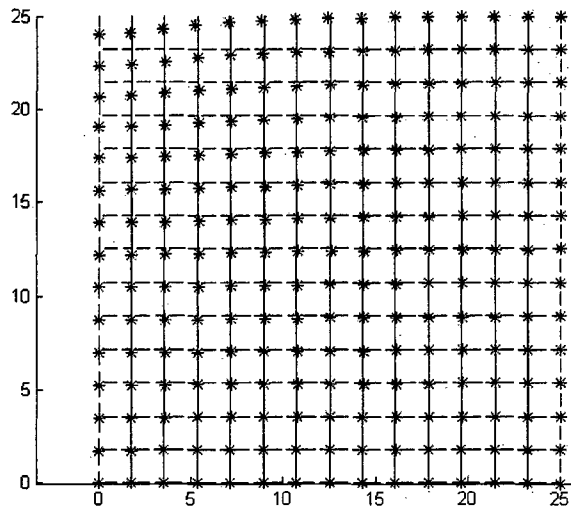


Figura 5.13: Desplazamiento de los nodos

Tabla 5.6: Desplazamientos de nodos sobre el nivel superficial

$x(m)$	$u_x(m)$ RPIM	$u_y(m)$ RPIM
0.00	-0.0001	-0.0326
1.79	-0.0016	-0.0319
3.57	-0.0031	-0.0291
5.36	-0.0041	-0.0227
7.14	-0.0043	-0.0159
8.93	-0.0040	-0.0119
10.71	-0.0037	-0.0087
12.50	-0.0032	-0.0063
14.29	-0.0028	-0.0045
16.07	-0.0023	-0.0030
17.86	-0.0018	-0.0019
19.64	-0.0013	-0.0010
21.43	-0.0008	-0.0005
23.21	-0.0004	-0.0002
25.00	0.0000	0.0000

Los esfuerzos calculados con el RPIM son mostrados en la tabla (5.7) y en las figuras (5.14, 5.15 y 5.16).

Tabla 5.7: Esfuerzos en los nodos sobre el eje $x = 0$

y (m)	σ_{xx} RPIM	σ_{yy} RPIM	σ_{xy} RPIM	y (m)	σ_{xx} RPIM	σ_{yy} RPIM	σ_{xy} RPIM
0.1240	-3.9405	-7.4993	0.0164	12.6240	-5.2855	-36.9666	1.0641
1.1964	-4.5424	-10.1227	0.0929	13.6964	-12.4655	-52.3261	1.0391
1.9097	-4.8013	-11.5569	0.1508	14.4097	-11.5967	-52.3558	0.6683
2.9821	-6.9841	-17.7138	0.2554	15.4821	-13.3544	-59.0809	0.9462
3.6954	-8.1059	-20.7586	0.2800	16.1954	-17.9243	-68.3959	1.5455
4.7678	-7.2764	-20.9101	0.0601	17.2678	-17.7458	-68.3053	0.7663
5.4811	-3.9828	-17.0044	0.2120	17.9811	-7.8571	-51.6282	1.2116
6.5536	-1.4941	-14.1246	0.2808	19.0536	-7.5706	-45.2619	0.8218
7.2668	-4.9109	-21.5391	0.2745	19.7668	-22.2190	-69.7930	0.9466
8.3393	-9.2945	-32.8402	0.4115	20.8393	-45.6932	-104.0011	0.0986
9.0526	-10.5448	-36.4307	0.4723	21.5526	-54.4804	-112.2268	-0.6325
10.1250	-8.8025	-36.8715	0.2229	22.6250	-64.3879	-111.8225	-3.0418
10.8383	-2.3916	-26.0214	0.4315	23.3383	-57.0245	-85.6944	-1.9489
11.9107	1.6289	-20.7520	0.5780	24.4107	-53.4274	-61.7733	-4.7806
12.6240	-5.2855	-36.9666	1.0641	24.8760	-59.0697	-63.1484	-6.2128

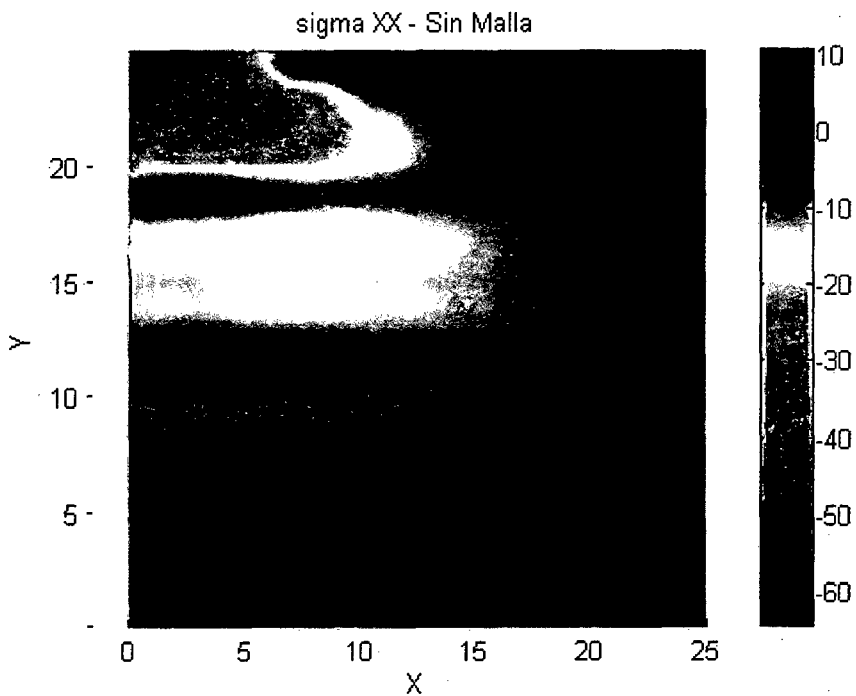


Figura 5.14: Distribución de esfuerzos verticales σ_{xx} (kg/m^2)

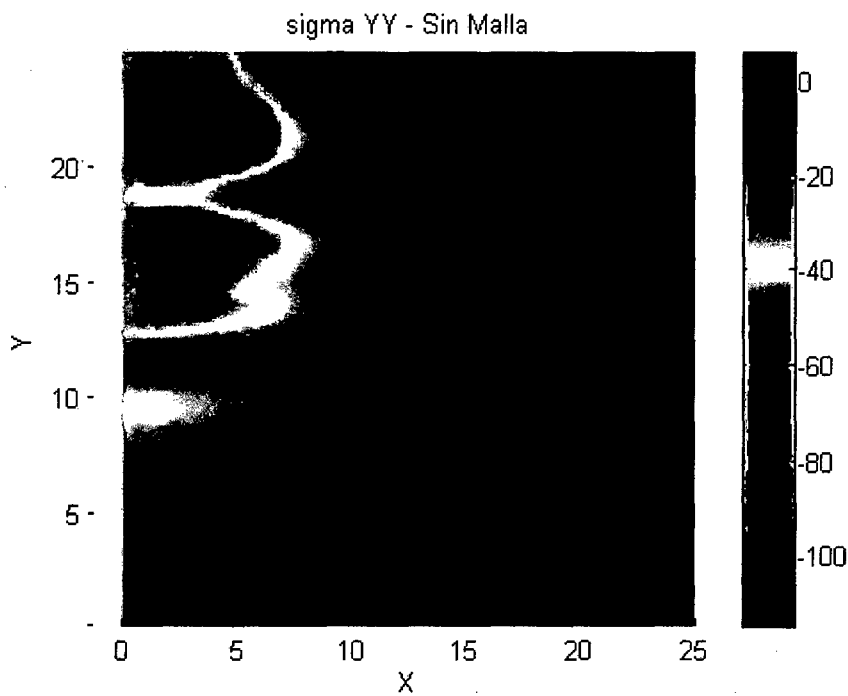


Figura 5.15: Distribución de esfuerzos horizontales $\sigma_{yy}(kg/m^2)$

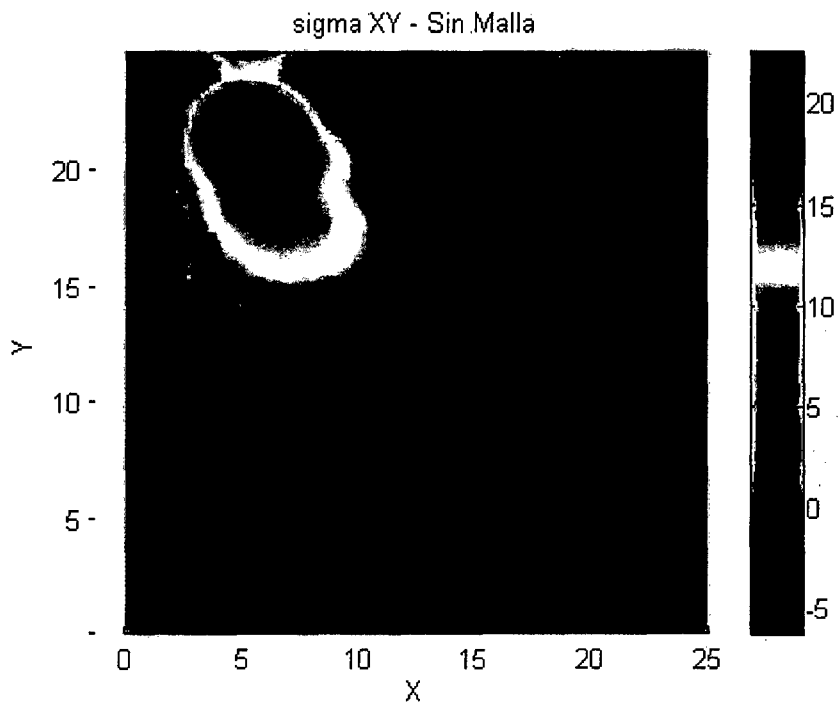


Figura 5.16: Distribución de esfuerzos de corte $\sigma_{xy}(kg/m^2)$

5.4. SECCIÓN DE TÚNEL

Suponer una sección de suelo, a través de la cual pasa un túnel. El problema consiste en calcular el incremento de esfuerzos en el suelo producidos por una carga superficial de magnitud constante q y de ancho uniforme B , como se muestra en la figura (5.17).

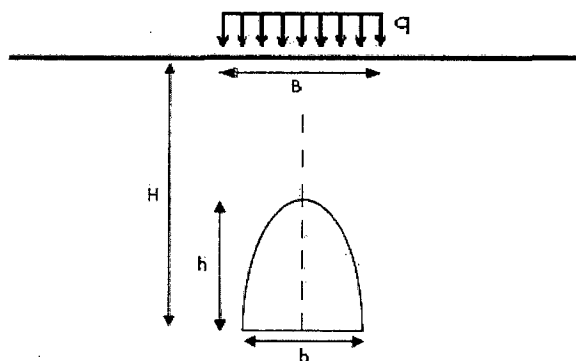


Figura 5.17: Dimensiones del túnel

Para la solución numérica del problema planteado considerar los siguientes datos: $B = 2m$, $q = 10kg/m^2$ para la carga, $b = 4m$, $h = 5m$ y $H = 15m$ para las dimensiones del túnel; además de esto como no se puede calcular con dimensiones infinitas para el medio, considerar al semiplano infinito como una región rectangular de $Lx = 20m$ por $Ly = 20m$. Además se supone un estado plano de deformaciones, para el problema, con respecto a las condiciones de borde, se considera que los lados derecho, izquierdo e inferior están con restricción de movimiento total ($u_x = u_y = 0$), finalmente considerar como parámetros elásticos $E = 18000kg/m^2$ y $\nu = 0,3$.

La distribución de los nodos y la malla de fondo que se utiliza en la integración numérica se muestran en la figura (5.18). En cada celda de integración se usa una cuadratura de Gauss de 4×4 con las mismas características que las empleadas en el acápite 5.3.

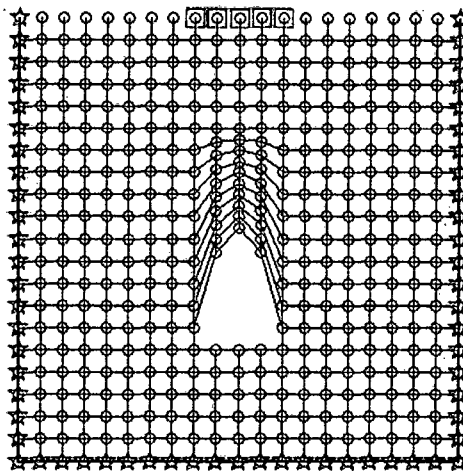


Figura 5.18: Nube de puntos del problema

Las deformaciones que se obtienen luego del cálculo se muestran en la figura (5.19), además en la tabla (5.8) se muestran algunos valores obtenidos sobre el eje horizontal ($y = 10$).

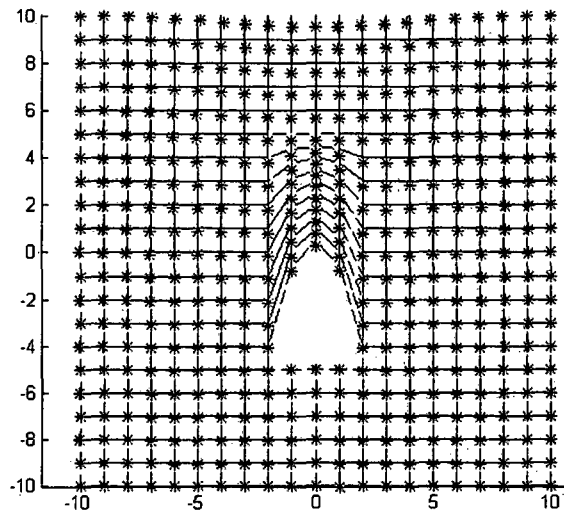


Figura 5.19: Deformación de la nube de puntos

Tabla 5.8: Desplazamientos de nodos sobre el nivel superficial $y = 10$

$x(m)$	$u_x(m)$ RPIM	$u_y(m)$ RPIM	$x(m)$	$u_x(m)$ RPIM	$u_y(m)$ RPIM
-10.00	0.0000	0.0000	0.00	0.0000	-0.0050
-9.00	0.0003	-0.0003	1.00	-0.0003	-0.0049
-8.00	0.0005	-0.0006	2.00	-0.0005	-0.0046
-7.00	0.0007	-0.0009	3.00	-0.0007	-0.0041
-6.00	0.0008	-0.0014	4.00	-0.0009	-0.0031
-5.00	0.0009	-0.0021	5.00	-0.0009	-0.0021
-4.00	0.0009	-0.0031	6.00	-0.0008	-0.0014
-3.00	0.0007	-0.0041	7.00	-0.0007	-0.0009
-2.00	0.0005	-0.0046	8.00	-0.0005	-0.0006
-1.00	0.0003	-0.0049	9.00	-0.0003	-0.0003
0.00	0.0000	-0.0050	10.00	0.0000	0.0000

Los esfuerzos calculados con el RPIM son mostrados en la tabla (5.9) y en las figuras (5.20, 5.21 y 5.22).

Tabla 5.9: Esfuerzos en los nodos sobre el eje $x = 0$

y	σ_{xx}	σ_{yy}	σ_{xy}	y	σ_{xx}	σ_{yy}	σ_{xy}
(m)	RPIM	RPIM	RPIM	(m)	RPIM	RPIM	RPIM
-9.9306	-0.6456	-1.6531	0.0099	2.7974	0.0151	-2.9869	0.0530
-9.3300	-0.6933	-1.3966	0.0116	3.0006	-0.4152	-4.4753	0.0321
-8.9306	-0.7812	-1.3387	-0.0207	3.3061	-1.1882	-6.8957	0.0248
-8.3300	-0.8699	-1.3563	-0.0399	3.5093	-1.1584	-7.0858	0.0298
-7.9306	-0.7788	-1.0948	-0.0282	3.8148	-0.5190	-5.6701	0.0517
-7.3300	-0.6840	-0.9041	-0.0094	4.0180	-0.2840	-5.1008	0.0598
-6.9306	-0.8763	-1.1987	-0.0297	4.3235	-0.5261	-5.6414	0.0541
-6.3300	-0.7287	-0.8527	-0.0353	4.5266	-0.7507	-6.1898	0.0513
-5.9306	-0.1198	0.1966	-0.0137	4.8321	-0.7713	-6.3980	0.0554
-5.3300	0.0228	-0.9454	0.0461	5.0694	-0.7763	-6.5494	0.0724
0.4572	0.1628	-0.5539	0.1726	5.6700	-1.1159	-7.6251	0.0699
0.7627	-0.3925	-1.4904	0.1459	6.0694	-1.2570	-7.8263	0.0606
0.9659	-0.7946	-2.5294	0.1383	6.6700	-1.7125	-8.5302	0.0738
1.2714	-0.8110	-3.0779	0.1293	7.0694	-2.0749	-8.8736	0.0710
1.4746	-0.6173	-3.0354	0.1102	7.6700	-3.1001	-9.6531	0.0635
1.7801	-0.7721	-3.7968	0.1027	8.0694	-3.7277	-9.9583	0.0535
1.9832	-1.0437	-4.5347	0.1032	8.6700	-4.9960	-9.9091	0.0374
2.2887	-0.8412	-4.1879	0.0997	9.0694	-5.8157	-9.4979	0.0435
2.4919	-0.3227	-3.1939	0.0911	9.9306	-9.2540	-10.0489	-0.1563

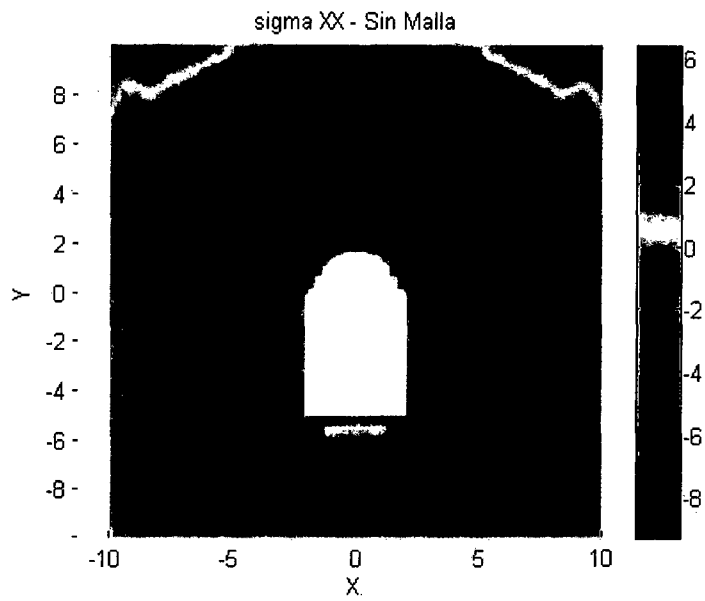


Figura 5.20: Distribución de esfuerzos verticales σ_{xx} (kg/cm²)

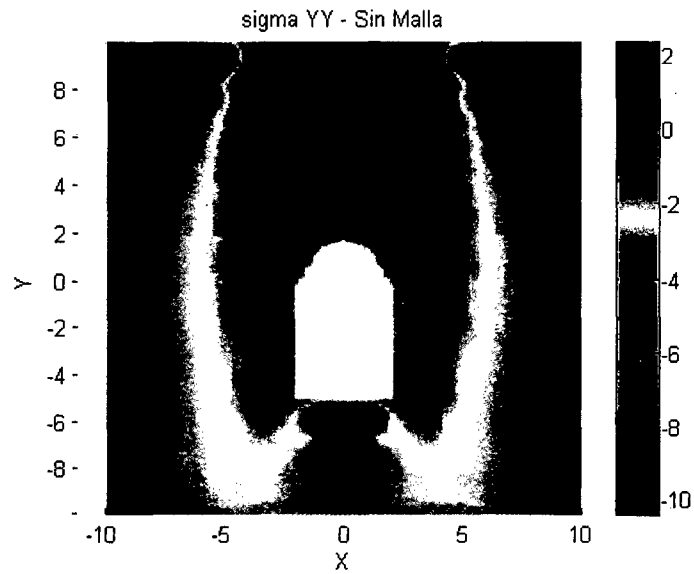


Figura 5.21: Distribución de esfuerzos horizontales σ_{yy} (kg/cm²)

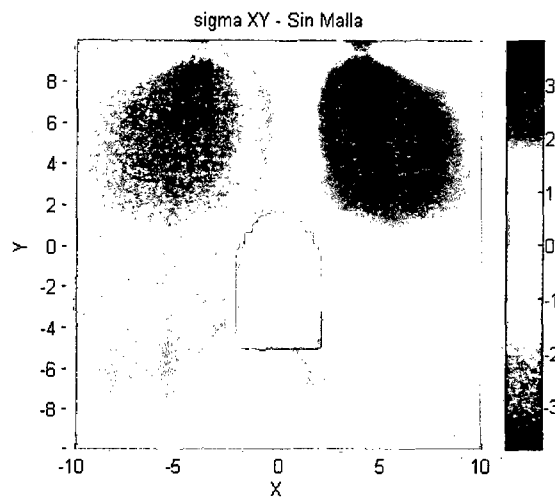


Figura 5.22: Distribución de esfuerzos de corte σ_{xy} (kg/cm^2)

5.5. MURO DE CORTE

A continuación se trata el problema de cálculo de esfuerzos y desplazamientos de un muro de corte sujeto a cargas laterales y empotrado en la base, tal como se muestra en la figura (5.23).

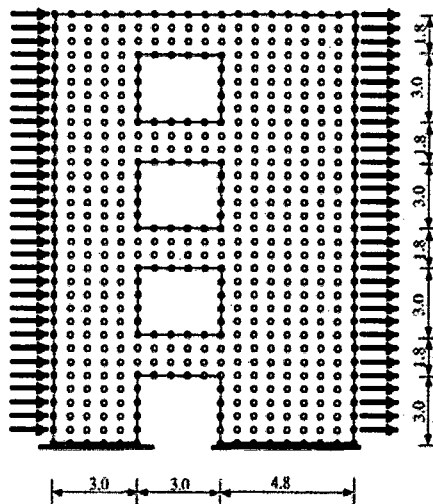


Figura 5.23: Dimensiones del muro de corte

Para la solución del problema planteado se supone una sección plana del muro en estado plano de esfuerzos; además, se consideran las siguientes propiedades elásticas para el

material: $E = 280000 \text{ kg/cm}^2$, la razón de Poisson $\nu = 0,15$; la fuerza lateral tiene magnitud $P = 10 \text{ kg/cm}^2$, dirección $x+$ y está aplicada uniformemente en altura a ambos lados del muro.

La distribución de los nodos y la malla de fondo que se utiliza en la integración numérica se muestran en la figura (5.24); en cada celda de integración se usa una cuadratura de Gauss de 4×4 , con las mismas características que la sección 5.4.

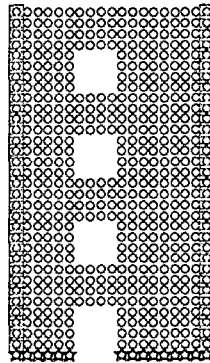


Figura 5.24: Nube de puntos del problema

Las deformaciones obtenidas luego del cálculo se muestran en la figura (5.25), en la tabla (5.10) se muestran algunos valores obtenidos sobre el eje vertical ($x = 0$).

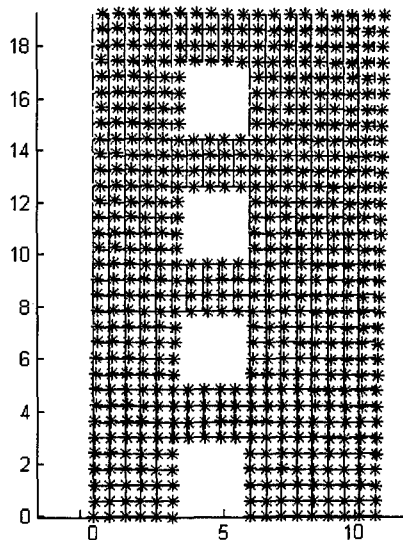


Figura 5.25: Desplazamiento lateral del muro

Tabla 5.10: Desplazamientos de nodos sobre el eje $x = 0$

y(m)	$u_x(cm)$		$u_y(m)$		$\Delta_x(\%)$	$\Delta_y(\%)$
	RPIM	RPIM	SAP2000	SAP2000		
0.0	0.0000	0.0100	0.0000	0.0000	0.00	0.00
0.6	0.0700	0.1200	0.0686	0.1250	2.00	4.18
1.2	0.1600	0.2100	0.1483	0.2176	7.30	3.61
1.8	0.2600	0.3000	0.2421	0.2940	6.90	1.99
2.4	0.3600	0.3600	0.3442	0.3580	4.38	0.55
3.0	0.4700	0.4000	0.4511	0.4134	4.03	3.34
3.6	0.5700	0.4500	0.5613	0.4647	1.52	3.28
4.2	0.6800	0.5000	0.6774	0.5154	0.38	3.09
4.8	0.8000	0.5400	0.8032	0.5657	0.40	4.75
5.4	0.9300	0.5900	0.9410	0.6125	1.19	3.82
6.0	1.0600	0.6300	1.0891	0.6521	2.75	3.50
6.6	1.2100	0.6500	1.2420	0.6817	2.65	4.88
7.2	1.3500	0.6700	1.3931	0.7022	3.19	4.81
7.8	1.4800	0.6800	1.5376	0.7173	3.89	5.49
8.4	1.6000	0.7000	1.6754	0.7319	4.71	4.56
9.0	1.7200	0.7200	1.8101	0.7492	5.24	4.06
9.6	1.8500	0.7400	1.9471	0.7694	5.25	3.97
10.2	1.9800	0.7600	2.0897	0.7893	5.54	3.85
10.8	2.1100	0.7700	2.2374	0.8049	6.04	4.54
11.4	2.2500	0.7800	2.3862	0.8137	6.05	4.32
12.0	2.3800	0.7800	2.5309	0.8158	6.34	4.59
12.6	2.5000	0.7800	2.6678	0.8139	6.71	4.35
13.2	2.6200	0.7800	2.7965	0.8118	6.74	4.08
13.8	2.7300	0.7800	2.9199	0.8120	6.95	4.10
14.4	2.8400	0.7800	3.0416	0.8146	7.10	4.44
15.0	2.9500	0.7800	3.1644	0.8179	7.27	4.86
15.6	3.0700	0.7800	3.2882	0.8191	7.11	5.02
16.2	3.1800	0.7800	3.4107	0.8168	7.26	4.72
16.8	3.2800	0.7700	3.5289	0.8111	7.59	5.34
17.4	3.3800	0.7700	3.6409	0.8043	7.72	4.45
18.0	3.4700	0.7600	3.7474	0.7990	7.99	5.13
18.6	3.5700	0.7600	3.8517	0.7974	7.89	4.92
19.2	3.6600	0.7600	3.9611	0.7981	8.23	5.01

Estos desplazamientos se pueden apreciar en la figura (5.26).

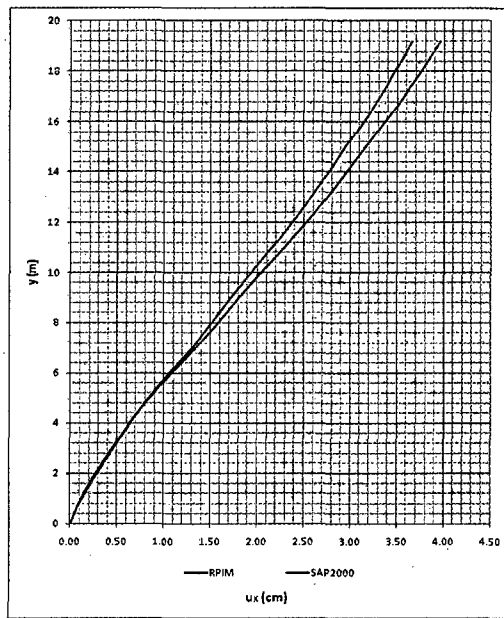


Figura 5.26: Desplazamientos horizontales u_x (cm)

Los esfuerzos calculados con el RPIM son mostrados en las figuras (5.27, 5.28 y 5.29).

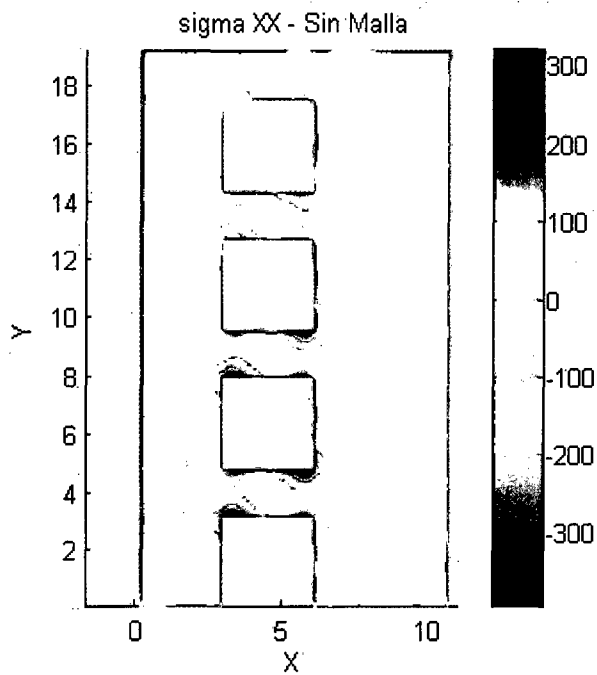


Figura 5.27: Distribución de esfuerzos verticales σ_{xx} (kg/cm²)

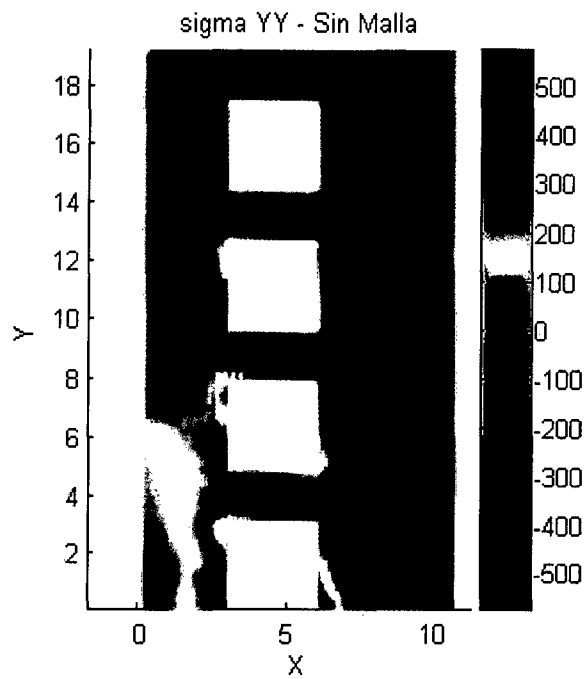


Figura 5.28: Distribución de esfuerzos horizontales σ_{yy} (kg/cm^2)

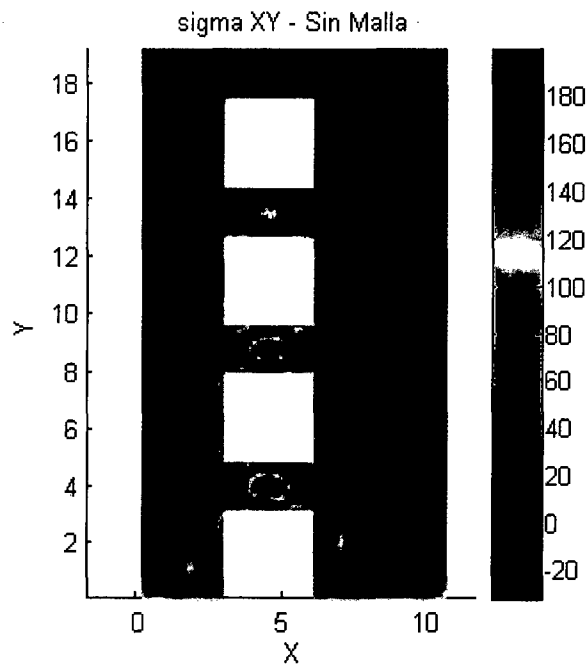


Figura 5.29: Distribución de esfuerzos de corte σ_{xy} (kg/cm^2)

A continuación se muestran los esfuerzos calculados con el programa SAP2000 v14.0.0

en las figuras (5.30, 5.31 y 5.32).

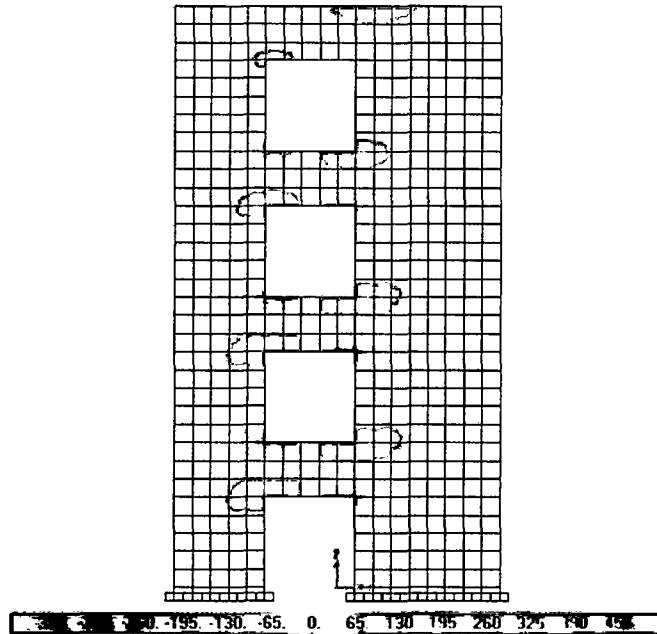


Figura 5.30: Distribución de esfuerzos verticales SAP2000 σ_{xx} (kg/cm^2)

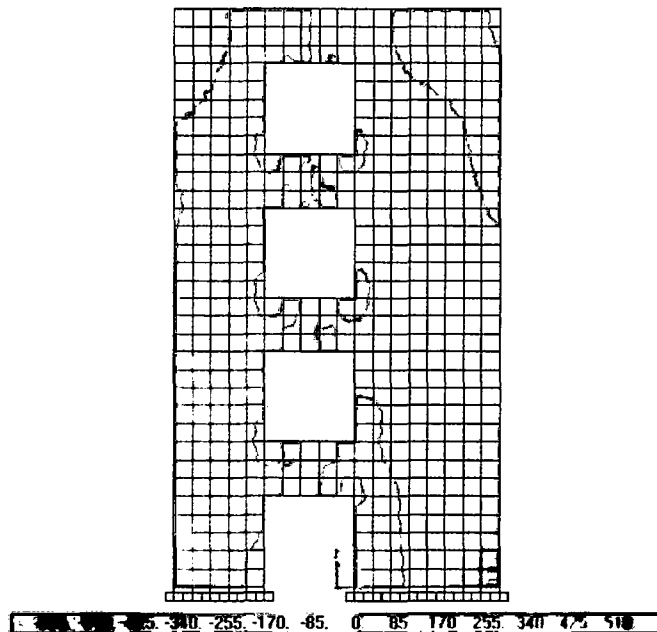


Figura 5.31: Distribución de esfuerzos horizontales SAP2000 σ_{yy} (kg/cm^2)

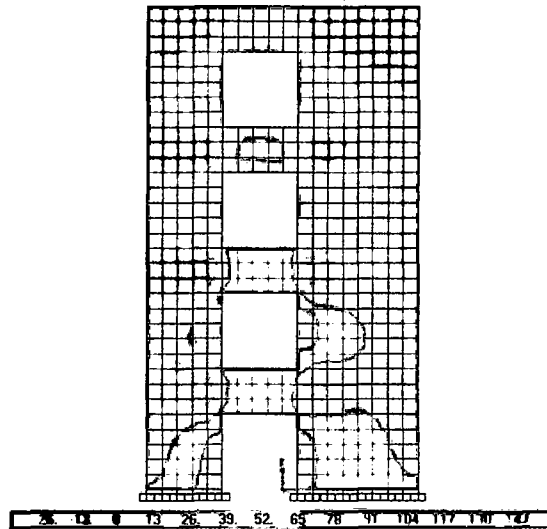


Figura 5.32: Distribución de esfuerzos de corte SAP2000 σ_{xy} (kg/cm^2)

A continuación, en la tabla (5.11), se muestran los esfuerzos en puntos de la base del muro.

Tabla 5.11: Esfuerzos en los nodos sobre el eje $y = 0$

x (m)	σ_{xx} RPIM	σ_{yy} RPIM	σ_{xy} RPIM	σ_{xx} SAP2000	σ_{yy} SAP2000	σ_{xy} SAP2000	Δ_{xx} (%)	Δ_{yy} (%)	Δ_{xy} (%)
0.0	43.0	575.3	60.2	69.7	588.6	70.0	38.4	2.3	14.0
0.6	63.1	414.4	111.5	55.9	340.5	73.9	12.9	21.7	50.7
1.2	17.5	155.6	70.4	33.3	219.3	75.1	47.3	29.1	6.1
1.8	12.5	115.6	86.5	15.6	107.7	67.4	19.6	7.3	28.4
2.4	4.6	-30.5	81.5	-6.1	-18.1	52.6	174.8	68.0	54.9
3.0	-110.6	-356.3	41.6	-18.9	-233.2	42.7	484.5	52.8	2.4
3.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
6.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
6.0	-25.3	295.6	30.5	43.1	398.5	55.1	158.7	25.8	44.6
6.6	39.5	206.2	81.9	30.5	175.9	63.7	29.3	17.2	28.6
7.2	-3.5	2.7	50.9	10.4	62.9	76.3	133.5	95.7	33.3
7.8	-0.9	2.7	78.1	-3.3	-24.8	82.8	74.0	110.9	5.6
8.4	-16.2	-109.1	74.9	-15.2	-101.4	86.3	6.4	7.6	13.2
9.0	-30.4	-215.0	81.9	-27.2	-178.4	87.2	11.9	20.5	6.1
9.6	-25.3	-204.2	57.3	-40.9	-267.0	88.0	38.1	23.5	34.8
10.2	-72.7	-429.0	82.2	-62.1	-378.6	83.6	17.2	13.3	1.7
10.8	-5.9	-574.4	117.3	-75.7	-629.8	78.5	92.2	8.8	49.4

Estos esfuerzos se aprecian mejor en la figura (5.33):

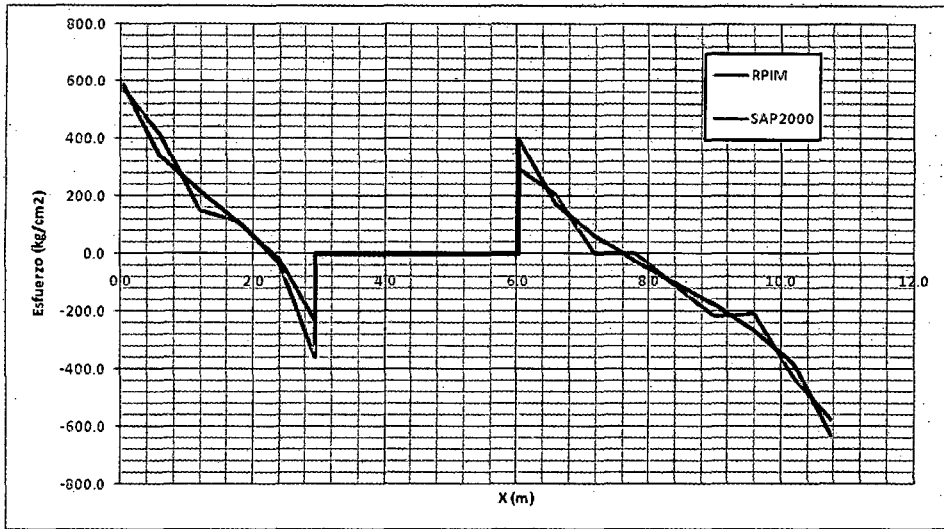


Figura 5.33: Esfuerzos σ_{yy} (kg/cm²)

CAPÍTULO VI

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

6.1. CONCLUSIONES

Del capítulo dos, referido al tratamiento matemático de la ecuación de la elastostática, se puede concluir que es posible formalizar matemáticamente la idea física, muy conocida, de representar todo movimiento (espacio de desplazamiento) como la suma directa entre movimientos de cuerpo rígido y deformaciones infinitesimales. Esta suma está dada por el núcleo de la transformación multilineal (o tensor) de deformaciones y el sub-espacio $\overline{H^k}(\Omega)$. Además, esta idea resulta importante para la definición del espacio de búsqueda de funciones de prueba necesarias para la solución de la ecuación en derivadas parciales.

La formulación débil del capítulo dos garantiza la existencia y unicidad de la solución, por tanto garantiza la factibilidad de aproximar la solución teórica del problema mediante una familia de funciones, que en el caso particular del Método Radial de Interpolación de Puntos (RPIM) son funciones interpolantes, además dicha aproximación de la solución sólo necesita tener primera derivada y ser cuadrado integrable, así se reduce el orden de la ecuación diferencial original.

Del capítulo tres, referido a las funciones de base radial, se puede concluir que para que el sistema de ecuaciones (3.9) sea resoluble, es suficiente que las funciones de interpolación elegidas para construir la matriz de las funciones de forma, sea una familia linealmente independiente de funciones definidas positivas, con esto se prueba la hipótesis de la presente tesis.

En el ejemplo uno del capítulo cinco, la diferencia de los valores de los desplazamientos calculados con las fórmulas de Timoshenko y el RPIM son menores que $10^{-4}m$, los valores correspondientes a los esfuerzos también evidencian una diferencia pequeña (al rededor del

5 %), además en el ejemplo cinco del mismo capítulo se observa una gran similitud (variación promedio 6 %) entre los resultados obtenidos con el programa escrito para este trabajo y un software comercial (SAP2000), se debe resaltar que a diferencia del programa SAP2000, el RPIM representa los esfuerzos normales y de corte en puntos interiores con mayor detalle sin necesidad de incrementar el número de nodos, así, los resultados anteriores prueban la eficacia de la aplicabilidad del RPIM en la formulación variacional del capítulo dos y su implementación numérica en el capítulo cuatro.

En el ejemplo dos del capítulo cinco se puede observar una diferencia considerable (alrededor de 14 %) entre los valores obtenidos para los esfuerzos calculados con el RPIM y los obtenidos por la bibliografía [4]; esto se debe principalmente a que las ecuaciones teóricas deducidas para este problema están basadas en suposiciones como $\nu = 0,5$ [21], por esta razón dichas ecuaciones sólo dependen de la geometría del problema, lo cual obviamente no es cierto en el problema planteado. Aun así los resultados muestran la coherencia esperada en cuanto a su magnitud y distribución.

El número de nodos necesarios con el método RPIM, es menor que el requerido por otros métodos sin malla tales como MLS, pero a diferencia de este último, requiere una buena distribución de los nodos, además de una buena elección del tamaño del dominio de influencia como se muestra en el primer ejemplo del capítulo cinco.

Del tercer ejemplo del capítulo cinco se puede concluir que es muy importante proponer un adecuado modelamiento de la interfaz existente entre diferentes materiales, pues de lo observado en el acápite 5.2, si se considera un único material, los bulbos de presión resultantes poseen forma elíptica, sin embargo, cuando se consideran las diferentes propiedades de cada estrato, los bulbos resultantes poseen zonas de transición irregulares, las cuales se presentan precisamente en la interfaz o zona de cambio de material.

6.2. RECOMENDACIONES

Estudiar otros métodos de integración, tal vez como el propuesto en el método de elementos naturales [24], ya que el método de integración propuesto en el presente trabajo (cuadratura de Gauss) hace que el método de solución requiera una malla de fondo para la ubicación de los puntos de Gauss.

Estudiar la imposición de las condiciones de frontera mediante alguna técnica alternativa

a la de multiplicadores de Lagrange, pues ésta resulta muy trabajosa, sin embargo, se debe analizar apropiadamente las implicancias de la técnica elegida en la convergencia del método, ya que el sistema de ecuaciones cambia; por ejemplo se debería revisar la implementación del método de penalización para problemas con condiciones de frontera esenciales, ya que es de fácil programación.

Desarrollar técnicas para el modelamiento de la interfaz entre materiales diferentes, las que podrían formularse como elementos unidimensionales desarrollados con RPIM.

Desarrollar una técnica apropiada de distribución de puntos para dominios de forma irregular, ya que el RPIM resulta sensible a la distribución de los nodos.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] Babuska I., Melenk J. M., "The partition of unity finite element method", Institute for Physical Science and Technology, University of Maryland, Estados Unidos, 1995.
- [2] Bachman G., Narici L., "Análisis Funcional", Editorial Tecnos, Madrid, España, 1981.
- [3] Belytschko T., Krongauz Y., Organ D., Flemming M., Krysl P., "Meshless Methods an Overview and Recent Developments", Northwestern University, Illinois, Estados Unidos, 1996.
- [4] Braja M., "Fundamentos de Ingeniería Geotécnica", Thomson Editores, México D. F., México, 2001.
- [5] Brenner S. C., Scott L. R., "The Mathematical Theory of Finite Element Methods", Springer, New York Inc., Estados Unidos, 1994.
- [6] Brézis H., "Análisis Funcional Teoría y Aplicaciones", Alianza Editorial, Madrid, España, 1984.
- [7] Chen Y., Lee J. D., Eskandarian A., "Meshless Methods in Solid Mechanics", Springer, New York, Estados Unidos, 2006.
- [8] Duarte C., Oden J., "H-p clouds and h-p meshless method", John Wiley & Sons, 1996.
- [9] Fasshauer G. E., "Meshfree Approximation Methods with MatLab", World Scientific, Illinois, Estados Unidos, 2008.
- [10] Flores L., "Métodos sin Malla como Alternativa al Método de Elementos Finitos", Tesis de Maestría, Universidad Nacional de Ingeniería, Lima, Perú, 2011.
- [11] Lancaster P., Salkauskas K., "Surface generated by moving least square method", American Mathematical Society, 1981.

- [12] Lima E. L., "Cálculo Tensorial", Instituto de Matemática Pura y Aplicada, Rio de Janeiro, Brasil, 1965.
- [13] Linero D. L., Garzón D. A., "Elementos de la mecánica del medio continuo para cuerpos sólidos", Editorial Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia, 2010.
- [14] Liu W.K., Chen Y., Uras R.A., "Enrichment of the finite element method whit reproducing kernel particle method", Northwestern University, Illinois, Estados Unidos, 1995.
- [15] Liu G. R., "Mesh Free Methods: Moving Beyond the Finite Element Method", CRC Press, New York, Estados Unidos, 2009.
- [16] Liu G. R., Gu Y. T. "An Introduction to Meshfree Methods and Their Programming", Springer, New York, Estados Unidos, 2005.
- [17] Liu G.R., Zhang G.Y., Wang Y.Y., Zhong Z.H., Li G.Y., Han X., "A nodal integration technique for meshfree radial point interpolation method", International Journal of Solids and Structures, Elsevier, 2006.
- [18] Nayroles B., Touzot G., Villon P., "Generalizing the finite element method: diffuse approximation and diffuse elements", Computational Mechanics, Springer, 1992.
- [19] Nieto J., "Introducción a los Espacios de Hilbert", Editorial Organización de los Estados Americanos, Washinton D. C., Estados Unidos, 1978.
- [20] Pflaumann E., Unger H., "Análisis Funcional I", Editorial Alhambra S. A., Madrid, España, 1974.
- [21] Poulos H. G., Davis E. H., "Elastic Solutions for Soil and Rock Mechanics", John Wiley & Sons Inc., Sydney, Australia, 1991.
- [22] Rektorys K., "Variational Methods in Mathematics, Science and Engineering", D. Reidel Publisher Company Inc., Praga, República Checa, 1980.
- [23] Sokolnikoff I. S., Specht E. D., "Mathematical Theory of Elasticity", McGraw-Hill, New York, Estados Unidos, 1946.
- [24] Sukumar N., "The Natural Element Method in Solid Mechanics", Tesis Doctoral Northwestern University Evanston, Illinois, Estados Unidos, 1998.

- [25] Sukumar N., Huang Z., Prévost J., Suo Z., "Partition of unity enrichment for bimaterial interface cracks", International Journal for Numerical Methods in Engineering, John Wiley & Sons Inc., Estados Unidos, 2004.
- [26] Timoshenko S. P., Goodier J. N., "Theory of Elasticity", Editorial McGraw Hill, New York, Estados Unidos, 1951.