UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Tesis para Optar
el Título Profesional de
LICENCIADO en MATEMÁTICA

Titulada:

Estudio del modelo de Ramsey usando control óptimo

Presentada por:

César Toribio Madueño Sulca

Asesor

Mag. Fidel Jara Huanca

UNI, diciembre 2014

CIP - CATALOGO DE PUBLICACIÓN

Madueño Sulca, César Toribio

Estudio del modelo de Ramsey usando control óptimo / César Toribio Madueño Sulca. – EPM - FC - UNI, 2014.

76 p.: il.

Tesis (Licenciatura)—Universidad Nacional de Ingeniería, Facultad de Ciencias, Escuela Profesional de Matemática, Lima, 2014. Asesor: Mag. Fidel Jara Huanca.

Este trabajo esta dedicado con todo cariño
a mis padres Hilda Sulca Rodriguez y Toribio
Madueño Mendoza, a mi esposa Consuelo,
mis hijos Miguel, Fresia y Raúl. Y
finalmente a mis hermanos y sobrinos.

Agradezco al profesor Magíster Fidel Jara Huanca por su apoyo y estímulo en la elaboración del presente trabajo, también al profesor Magíster William Echegaray Castillo, a Daniel Muñoz Ramos, al Sr. Jhimy Borbor Perea y al Magíster José Flores Salinas por su motivación en el tema. De la misma manera a todos los profesores de la Facultad de Ciencias de la UNI que me apoyaron en todo momento. Y finalmente a todas aquella personas que influenciaron en la elaboración del trabajo.

Resumen

El presente trabajo realiza un estudio del modelo de Ramsey en el contexto macroeconómico. Este modelo es una extensión del modelo de Solow, que a comparación de éste se hace necesario un estudio más profundo de sistemas dinámicos y teoría de control.

El trabajo se realiza de la siguiente manera: Estudiamos las ecuaciones diferenciales, que es una base para interpretar el modelo de Ramsey. También estudiamos teoría de control en tiempo continuo para realizar la optimización de funciones que están inmersos en este modelo. A continuación presentamos el model de Ramsey, en ella aplicaremos todo lo estudiado y articulamos todos los conceptos en el contexto macroeconómico. Finalmente presentamos una aplicación de este modelo y damos algunas conclusiones del trabajo de tesis.

Indice general

Introducción VII

1. Ecuaciones diferenciales y retratos de fase 1

1.1. Sistemas planos 1

1.1.1. Formas canónicas 1

1.2. Retrato de fase de dos variables 5

1.2.1. Espacio de fase 5

1.2.2. Curvas de demarcación 6

1.2.3. Líneas de trayectoria 8

1.2.4. Tipos de equilibrio 10

2. Teoría de Control 14

2.1. El Problema de Control Óptimo en Tiempo Continuo 14

2.2. El Principio del Máximo de Pontryagin . 20

2.3. Demostración del Principio del Máximo . 26

2.4. Condiciones Suficientes 29

2.4.1. Condiciones suficientes de Mangasarian 30

2.4.2. Condiciones Suficientes de Arrow 35

2.5. Hamiltoniano de Valor Presente 41

2.6. Horizonte temporal infinito . . . 46

2.6.1. Condiciones de primer y segundo orden . 47

2.6.2. Diagrama de fases . 50

3. El modelo de Ramsey **59**

3.1. Hogares 60

3.2. Empresas 65

3.3. Equilibrio 67

3.4. El estado estacionario 68

3.5. Dinámica de transición 70

3.5.1. El retrato de fase 70

3.5.2. El tramo estable 71

4. Aplicación del modelo de Ramsey usando el método de eliminación del tiempo **72**

Conclusiones **75**

Bibliografía **76**

Introducción

Para presentar una imagen del proceso de crecimiento económico tenemos que permitir que el consumo y en consecuencia, la tasa de ahorro sean determinadas por hogares y empresas optimizadores que actúan en mercados competitivos. Hablamos de una cantidad inmensa de hogares que eligen su consumo y su ahorro de forma que maximizan su utilidad familiar sujetos a una restricción presupuestaria intertemporal. Este tipo de comportamiento del consumidor es un elemento clave del modelo de crecimiento económico de Ramsey.

Las empresas alquilan trabajo a cambio de un salario, alquilan capital a cambio de una tasa de alquiler y venden su producto a cambio de un precio. Al final las familias y las empresas se encuentran en el mercado y los precios del capital del trabajo y del producto son tales que los tres mercados se equilibran, este modelo de equilibrio general se debe a Ramsey (1928).

Capítulo 1

Ecuaciones diferenciales y retratos de fase

Hoy en día es necesario tener conocimientos de ecuaciones diferenciales y sistemas dinámicos para hacer una correcta interpretación de las variables que se encuentran en la economía. El siguiente capítulo esta basado en [6].

1.1. Sistemas planos

1.1.1. Formas canónicas

Consideremos el sistema lineal de dos dimensiones de la forma

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} &= a_{11}x + a_{12}y, \\ \dfrac{dy}{dt} &= a_{21}x + a_{22}y \end{cases} \tag{1.1}$$

donde los a_{ij} son constantes.

El sistema es lineal cuando los términos $x, y, \dot{x}$ e $\dot{y}$ son lineales. El sistema (1.1) se puede escribir en forma matricial como

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial t} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

donde $(x, y)^T \in \mathbb{R}^2$ y $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

Definición 1.1. Toda solución de (1.1) y (1.2), digamos, $\phi(t) = (x(t), y(t))$, representa una curva en el plano. Las curvas solución son llamadas *trayectorias* u *órbitas*.

Definición 1.2. El *retrato de fase* es la gráfica en el plano $\mathbb{R}^2$ mostrando como el sistema (1.1) es determinado cuando x e y varían con respecto a t.

Definición 1.3. El *campo direccional* o *campo vectorial* están dados por los gradientes $\frac{dy}{dx}$ y los vectores direccionales de las trayectorias en el plano de fase.

La pendiente de las trayectorias se puede determinar usando la regla de la cadena

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$$

y la dirección del campo vectorial es dado por $\dot{x}$ e $\dot{y}$ en cada punto en el plano XY.

Definición 1.4. El sistema lineal (1.2) es *no simple* si la matriz A es singular.

Clasificación de los puntos extremos

El sistema (1.2) es *simple* si $\det(A) \neq 0$, y el origen es el único punto crítico. Los puntos críticos pueden ser clasificados dependiendo del tipo de autovalores de la matriz A.

1. **Autovalores reales distintos.** Suponiendo que el sistema (1.2) puede ser diagonalizado, obtenemos

$$\dot{x} = \lambda_1 x, \qquad \dot{y} = \lambda_2 y.$$

Las soluciones de este sistema son $x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t}$ y $y(t) = C_2 e^{\lambda_2 t}$, donde C_1 y C_2 son constantes. Luego las curvas solución son dadas por $|y|^{\lambda_1} = K|x|^{\lambda_2}$. El tipo de retrato de fase depende de los valores λ_1 y λ_2, esto es

- Si los autovalores son distintos, reales y positivos, entonces el punto crítico se denomina *nodo inestable*.

- Si los autovalores son distintos, reales y negativos, entonces el punto crítico se denomina *nodo estable.*
- Si un autovalor es positivo y el otro negativo, entonces el punto crítico se denomina *punto silla.*

Los posibles retratos de fase para estos sistemas canónicos se muestran en la Figura 1.1

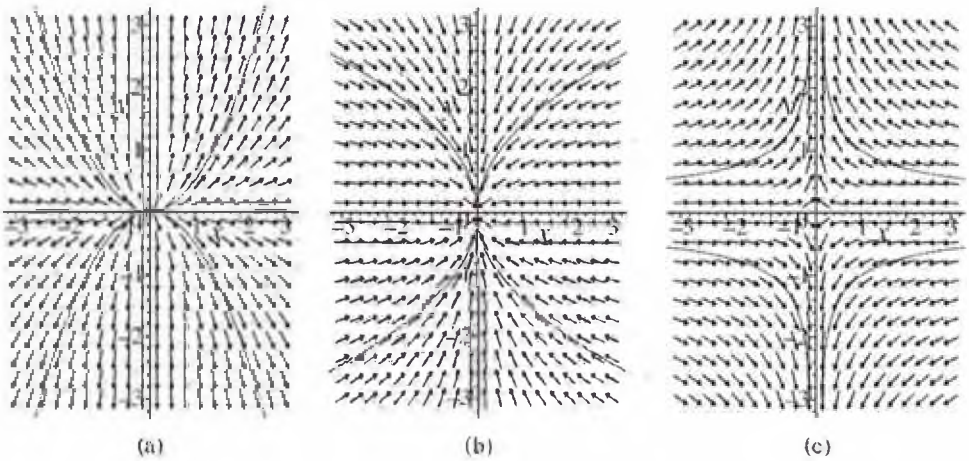

Figura 1.1: Retratos de fase. (a) nodo inestable; (b) nodo estable; (c) punto silla.

2. **Autovalores complejos** ($\lambda = \alpha \pm i\beta$). Consideremos un sistema canónico de la forma

$$\dot{x} = \alpha x + \beta y, \qquad \dot{y} = -\beta x + \alpha y. \tag{1.3}$$

Transformando a coordenadas polares en el que $x = r\cos\theta$ e $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$, tenemos:

$$r\dot{r} = x\dot{x} + y\dot{y}, \qquad r^2\dot{\theta} = x\dot{y} - y\dot{x}.$$

Entonces el sistema (1.3) equivalente tiene la forma:

$$\dot{r} = \alpha r, \qquad \dot{\theta} = -\beta.$$

Luego el tipo de retrato de fase depende de los valores de α y β:

- Si $\alpha > 0$, entonces el punto crítico se denomina foco inestable.

- Si $\alpha = 0$, el punto crítico se denomina centro.
- Si $\alpha < 0$, el punto crítico se denomina foco estable.
- Si $\dot{\theta} > 0$, entonces las trayectorias son espirales antihorarias alrededor del origen.
- Si $\dot{\theta} < 0$, entonces las trayectorias son espirales horarias alrededor del origen.

Estos retratos de fase son mostrados en la Figura 1.2

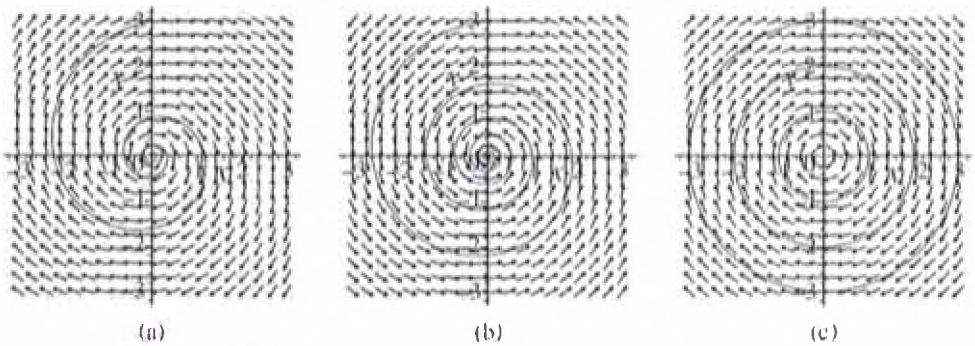

Figura 1.2: Retratos de fase para sistemas con autovalores complejos: (a)foco inestable; (b) foco estable; (c) centro.

3. **Autovalores reales iguales.** Suponiendo que las matrices canónicas son de la forma

$$J_3 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} \text{ o } \begin{pmatrix} \lambda_1 & \mu \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}.$$

Entonces los tipos de retratos de fase es determinado como sigue:

- Si existe dos autovectores linealmente independientes, entonces el punto crítico es llamado *nodo singular*.
- Si existe un autovector linealmente independiente, el punto crítico es llamado *nodo degenerado*.

Vea la Figura 1.3

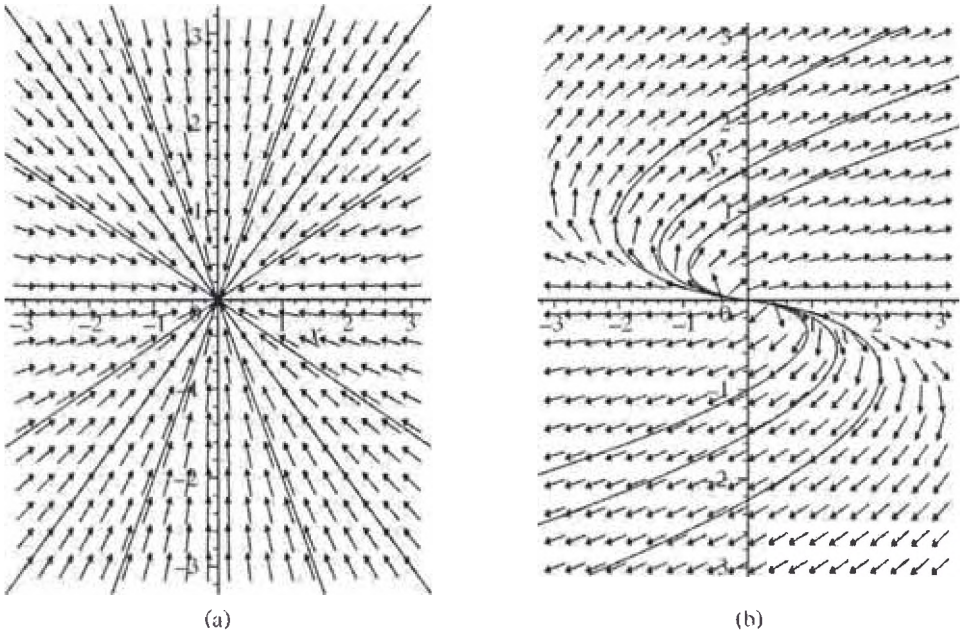

Figura 1.3: Retratos de fase para sistemas con autovalores iguales: (a) nodo singular estable; (b) nodo degenerado inestable.

1.2. Retrato de fase de dos variables

En esta parte estudiaremos el análisis de retrato de fase de un sistema de ecuaciones y nos centraremos en un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden con dos variables, tal que:

$$\begin{aligned} x'(t) &= f(x,y) \\ y'(t) &= g(x,y) \end{aligned} \tag{1.4}$$

Debemos observar que la variable t no interviene en las funciones f y g como un argumento separado (sistema autónomo)

1.2.1. Espacio de fase

Para la construcción de un retrato de fase se determina la dirección del movimiento de las variables respecto al tiempo. Esta información es lo que nos permite obtener las inferencias cualitativas finales. Para graficar sólo requerimos lo siguiente:

1. una línea de demarcación ($dy/dt = 0$) que proporcione cualquier posible equilibrio que separe el espacio de fase en dos regiones $dy/dt > 0$ y $dy/dt < 0$ y

2. una línea real sobre la cual pueda indicarse el incremento y el decremento de y implicados por cualquier valor de dy/dt diferente de cero

1.2.2. Curvas de demarcación

Dado el siguiente sistema autónomo de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} x' &= f(x,y) \\ y' &= g(x,y) \end{aligned} \tag{1.5}$$

donde x' e y' son abreviaturas de las derivadas respecto al tiempo $x'(t)$ e $y'(t)$, las dos curvas de demarcación (denotadas por $x' = 0$ e $y' = 0$) representan las gráficas de las dos ecuaciones

$$f(x,y) = 0 \quad (\text{curva } x' = 0) \tag{1.6}$$

$$g(x,y) = 0 \quad (\text{curva } y' = 0) \tag{1.7}$$

Si conocemos la forma específica de la función f, podemos despejar y de (1.6) en términos de x y la solución podemos graficarla en el plano XY como la curva $x' = 0$. Sin embargo, aún si no fuera así, se usa la regla de la función implícita y evaluar la pendiente de la curva $x' = 0$ como

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x'=0} = -\frac{\partial f/\partial x}{\partial f/\partial y} = -\frac{f_x}{f_y} \tag{1.8}$$

Siempre que conozcamos el signo de las derivadas parciales f_x y f_y ($\neq 0$), disponemos de (1.8) de una idea cualitativa de la pendiente de la curva $x' = 0$. Por la misma razón, la pendiente de la curva $y' = 0$ puede inferirse a partir de la derivada

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{y'=0} = -\frac{g_x}{g_y} \quad (g_y \neq 0) \tag{1.9}$$

Como un ejemplo más concreto, supongamos que

$$f_x < 0 \qquad f_y > 0 \qquad g_x > 0 \qquad y \qquad g_x < 0 \tag{1.10}$$

Entonces, ambas curvas $x' \quad 0$ e $y' \quad 0$ tendrán pendiente positiva. Si suponemos además que

$$\frac{f_x}{f_y} > \frac{g_x}{g_y} \qquad \text{(la curva } x' = 0 \text{ tiene mayor pendiente que la curva } y' = 0)$$

entonces podemos encontrar una situación tal como la que se muestra en la Figura 1.4. Observe que las líneas de demarcación posiblemente son curvas. Observe también que ya no se requiere que coincidan con los ejes.

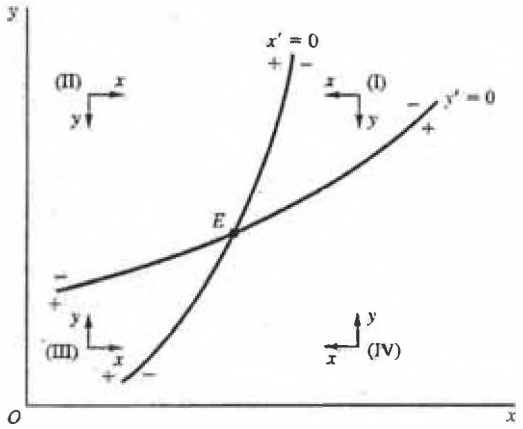

Figura 1.4:

Definición 1.5 (Equilibrio intertemporal)**.** Contiene mercados a plazo para todas las mercancías en todas las fechas. No existe mercado en ninguna fecha futura

Las dos curvas de demarcación, que se intersectan en el punto E, dividen al espacio de fase en cuatro regiones diferentes, rotuladas de I a IV. El punto E, donde x e y son estacionarios ($x' = y' = 0$), representa el equilibrio intertemporal del sistema. Sin embargo, para cualquier otro punto, ya sea x o y (o ambos) estarían cambiando respecto al tiempo, en direcciones determinadas por el signo de las derivadas respecto al tiempo x' e y' para ese punto. En este ejemplo, tenemos $x' > 0 (x' < 0)$ a la izquierda (derecha) de la curva $x' = 0$; de ahí el signo más (menos) a la izquierda (derecha) de esa curva. Estos signos se basan en el hecho de que

$$\frac{\partial x'}{\partial x} = f_x < 0 \quad \text{(por 1.4 y (1.10))}$$

lo que implica que, a medida que nos movemos continuamente de izquierda a derecha en el espacio de fase (a medida que x se incrementa), x' experimenta un decremento uniforme, de modo que el signo de x' debe pasar por tres etapas, en el orden +,0,-. En forma análoga, la derivada

$$\frac{\partial y'}{\partial y} = g_y < 0 \quad \text{(por 1.4 y (1.10))}$$

implica que, a medida que nos movemos continuamente de abajo hacia arriba (a medida que y se incrementa), y' disminuye uniformemente, de modo que el signo de y' debe pasar por tres etapas, en el orden +,0,-. Esto nos lleva a asignar el signo más, debajo de la curva $y' = 0$ y el signo menos arriba de ésta en la Figura 1.4.

Basándose en estos signos, ahora puede dibujarse un conjunto de flechas direccionales para indicar el movimiento intertemporal de x y de y. Para cualquier punto de la región I, x' e y' son ambos negativos. Entonces x e y deben disminuir respecto al tiempo, produciendo un movimiento hacia el oeste para x, y un movimiento hacia el sur para y. Como lo indican las dos flechas de la región I, dado un punto inicial ubicado en la región I, el movimiento intertemporal de ir en la dirección general hacia el suroeste. El opuesto exacto es verdad en la región III, donde x' e y' son positivos, de modo que ambas variables x e y deben incrementarse respecto al tiempo. En contraste, x' e y' tienen signos diferentes en la región II. Con x' positivo e y' negativo, x debe moverse hacia el este e y hacia el sur. Y la región IV exhibe una tendencia exactamente opuesta en la región II.

1.2.3. Líneas de trayectoria

Para una mejor comprensión de las implicaciones de las flechas direccionales, podemos esbozar una serie de *líneas de trayectoria* en el retrato de fase, estas líneas sirven para dibujar el movimiento dinámico del sistema desde cualquier punto inicial que pueda concebirse. Algunas de estas se ilustran en la Figura 1.5, la cual reproduce las curvas $x' = 0$ e $y' = 0$ de la Figura 1.4. Dado que cada punto en el espacio de fase

debe ubicarse en una u otra línea de trayectoria, ha de existir un número infinito de líneas de trayectoria, todas las cuales se conforman con los requerimientos direccionales impuestos por las flechas xy de cada región. Sin embargo, para describir el carácter cualitativo general del diagrama de fase, normalmente deben ser suficientes unas cuantas líneas de trayectoria representativas.

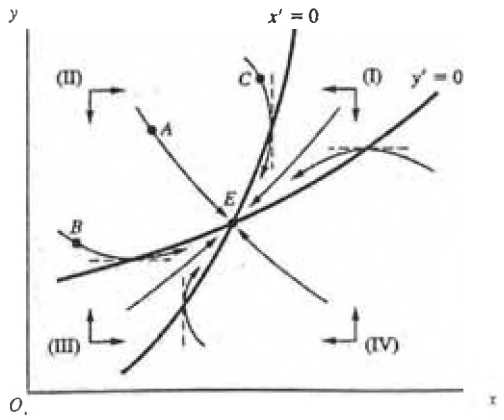

Figura 1.5:

En la Figura 1.5 pueden observarse varios aspectos acercas de las líneas de trayectoria:

1. Todas conducen hasta el punto E. Esto hace de E un equilibrio intertemporal estable (aquí, globalmente estable). Posteriormente vamos a encontrar otros tipos de configuraciones de líneas de trayectoria.

2. Mientras que algunas líneas de trayectoria nunca se aventuran más allá de una sola región (tal como lo que pasa por el punto A), otras pueden cruzar de una región a otra (tales como las que pasan por B y C).

3. En los puntos de cruce de una línea de trayectoria, ésta debe tener ya sea una pendiente infinita (al cruzar a la curva $x' = 0$) o una pendiente cero (al cruzar la curva $y' = 0$). Esto se debe al hecho de que, a lo largo de la curva $x' = 0 \quad (y' = 0)$,

$x(y)$ es estacionaria respecto al tiempo, de modo que la línea de trayectoria no debe tener ningún movimiento horizontal (vertical) al cruzar aquella curva. Para asegurar que estos requerimientos de pendiente se cumplen consistentemente, sería aconsejable, tan pronto como las curvas de demarcación se coloquen en su lugar, añadir unas cuantas barras cortas verticales que crucen la curva $x' = 0$ y unas cuantas horizontales que crucen la curva $y' = 0$, como lineamientos para dibujar las líneas de trayectoria[1].

4. Aunque las líneas de trayectoria señalan en forma explícita la dirección de movimiento de x e y respecto al tiempo, no suministran información específica respecto a la velocidad y la aceleración, ya que el retrato de fase no contempla un eje para t (tiempo). Por supuesto que es por esta razón por la que las líneas de trayectoria llevan el nombre alternativo de trayectorias de fase, en contraposición a trayectorias de tiempo. La única observación que podemos hacer acerca de la velocidad es de naturaleza cualitativa: a medida que nos movemos a lo largo de la línea de trayectoria cada vez más cerca de la curva $x' = 0 \quad (y' = 0)$, la velocidad de aproximación en la dirección horizontal (vertical) debe disminuir en forma progresiva. Esto se debe al decremento uniforme del valor absoluto de la derivada $x' = dx/dt \quad (y' = dy/dt)$ que se presenta a medida que nos movemos hacia la línea de demarcación sobre la cual $x'(y')$ adopta valor cero.

1.2.4. Tipos de equilibrio

Dependiendo de la configuración de las líneas de trayectoria que circundan a un equilibrio intertemporal específico, ese equilibrio debe situarse en una de cuatro categorías:

1. nodos,

[1]observar que las barras que atraviesan la curva $x' = 0$ deben ser perpendiculares al eje X. En forma similar, las barras que atraviesan la curva $y' = 0$ deben ser perpendiculares al eje Y

2. puntos de silla,

3. focos y

4. vórtices.

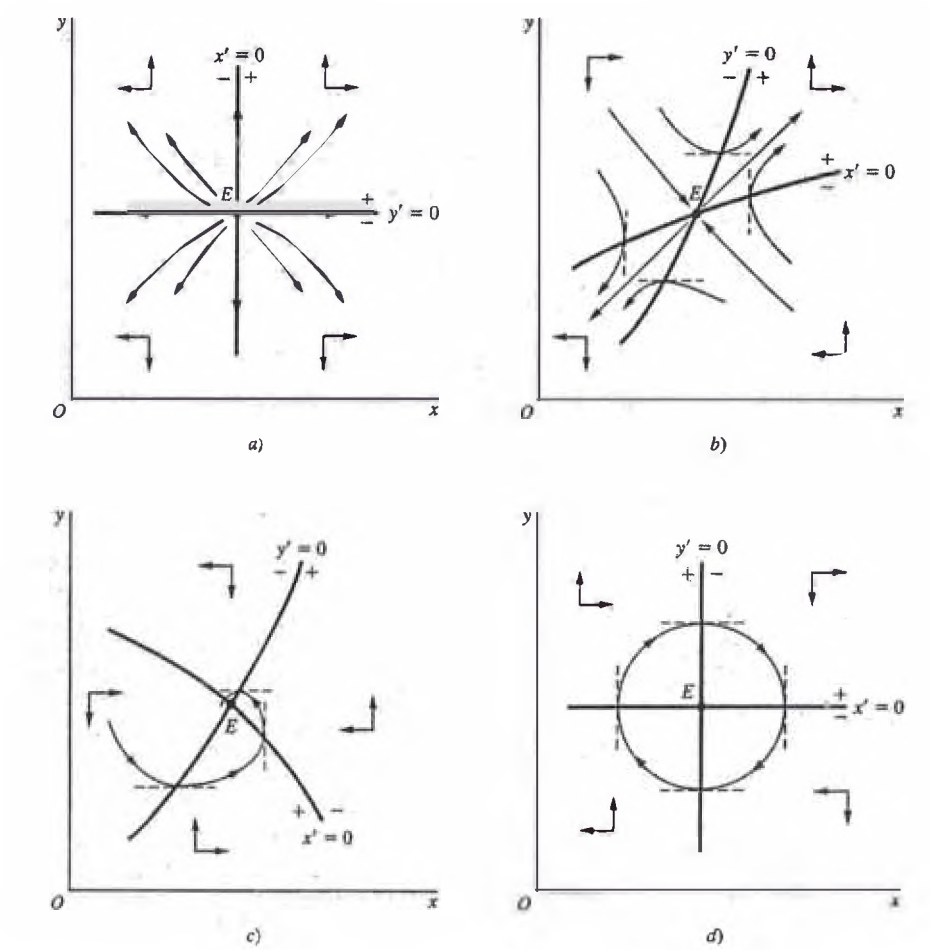

Figura 1.6:

Un *nodo* es un equilibrio tal que todas las líneas de trayectoria asociadas con éste fluyen en forma no cíclica hacia él (*nodo estable*) o fluyen en forma no cíclica alejándose de él (*nodo inestable*). Ya hemos encontrado un nodo estable en la Figura 1.5. En la Figura 1.6a se muestra un nodo inestable. Observe que en esta ilustración específica ocurre que las líneas de trayectoria nunca cruzan de una región a otra. También, las curvas

$x' = 0$ e $y' = 0$ son lineales y, de hecho, ellas mismas sirven como líneas de trayectoria.

Un *punto silla* es un equilibrio estable en algunas direcciones pero inestable en otras. Con más exactitud, en referencia a la ilustración de la Figura 1.6b, un punto de silla tiene exactamente un par de líneas de trayectoria, llamadas las *ramas estables* del punto de silla, que fluyen de manera directa y consistente hacia el equilibrio y exactamente un par de líneas de trayectoria, las *ramas inestables*, que fluyen de modo directo y consistente alejándose de él. Todas las otras trayectorias apuntan inicialmente hacia el punto de silla pero tarde o temprano se desvían de él. Como la estabilidad se observa sólo en las ramas estables, que de hecho no son alcanzables, un punto de silla se clasifica genéricamente como un equilibrio *inestable*.

El tercer tipo de equilibrio, el *foco*, se caracteriza por presentar trayectorias giratorias, las cuales fluyen en forma cíclica hacia él (*foco estable*) o fluyen en forma cíclica alejándose de él (*foco inestable*). La Figura 1.6c ilustra el foco estable, con sólo una línea de trayectoria que se dibuja explícitamente. ¿Qué causa la ocurrencia del movimiento giratorio? La respuesta radica en la manera en que se posicionan las curvas $x' = 0$ e $y' = 0$. En la Figura 1.6c, las dos curvas de demarcación presentan su pendiente de una manera tal que se turnan para bloquear la línea de trayectoria que fluye en una dirección prescrita por un conjunto particular de flechas xy. Como resultado, con frecuencia la línea de trayectoria cruza de una región a otra, describiendo una espiral. El que obtengamos un foco estable (como es el caso aquí) o uno inestable depende de la colocación relativa de las dos curvas de demarcación. Pero en cualquiera de los dos casos, la pendiente de la línea de trayectoria en los puntos de cruce debe ser ya sea infinita (cuando cruza a $x' = 0$) o cero (cuando cruza a $y' = 0$).

Por último, podemos tener un *vórtice* (o *centro*). Esto es nuevamente un equilibrio con las líneas de trayectoria giratorias, pero ahora estas líneas de trayectoria forman una familia de bucles (círculos concéntricos u óvalos) que orbitan alrededor del equi-

librio en un movimiento constante. Un ejemplo de esto está dado en la Figura 1.6d, donde nuevamente, sólo se muestra una línea de trayectoria individual. Puesto que este tipo de equilibrio es inalcanzable a partir de cualquier posición inicial alejada del punto E, un vórtice se clasifica automáticamente como un equilibrio inestable.

Todas las ilustraciones de la Figura 1.6 exhiben un equilibrio único. Sin embargo, cuando no existe linealidad, las dos curvas de demarcación pueden intersecarse más de una vez, produciendo con ello equilibrios múltiples. En ese caso, puede haber en el mismo retrato de fase una combinación de los tipos de equilibrio intertemporal previamente citados. Aunque entonces habrá más de cuatro regiones con las cuales se comparan, el principio subyacente del análisis del retrato de fase va a permanecer prácticamente igual.

Capítulo 2

Teoría de Control

La teoría de control juega un papel importante en temas macroeconómicos, el siguiente capítulo esta basado en [2], [3] y [4].

2.1. El Problema de Control Optimo en Tiempo Continuo

Consideremos un sistema dinámico, formulado en tiempo continuo, en el intervalo $[t_0, t_1]$, con punto inicial x_0 n-dimensional, y que evoluciona en el tiempo. Dicha evolución depende del valor que se de a ciertas variables, llamadas variables de control, que permiten influir en el sistema. Sea $u(t)$ el vector m-dimensional de variables de control en el instante t. Representamos por $x(t)$, para cada $t \in [t_0, t_1]$, el vector n-dimensional llamado vector de variables de estado, que nos indica la situación del sistema en el instante t.

Se llama ecuación de estado al siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t), t), \ t \in [t_0, t_1] \\ x(t_0) &= x_0, \end{aligned}$$

donde $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t)) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) = (u_1(t), \ldots, u_m(t)) \in \mathbb{R}^m$,

$$\begin{array}{rcl} f \ : \ D \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ (x, u, t) & \longmapsto & \begin{pmatrix} f_1(x, u, t) \\ \vdots \\ f_n(x, u, t) \end{pmatrix}, \end{array}$$

y $\dfrac{\partial f_k}{\partial x_i}, \dfrac{\partial f_k}{\partial u_j}, \dfrac{\partial f_k}{\partial t}$ existen y son continuas para todo i, $k = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$.

La ecuación de estado también se puede expresar como:

$$\dot{x}_i(t) = f_i(x_1(t), \ldots, x_n(t), u_1(t), \ldots, u_m(t), t), \quad i = 1, \ldots, n, \ t \in [t_0, t_1]$$

con $\quad x_1(t_0) = x_{10}, x_2(t_0) = x_{20}, \ldots, x_n(t_0) = x_{n0}$.

Cuando no haya confusión suprimiremos la notación (t). Así $x(t)$ se escribirá simplemente como x, $u(t)$ como u.

Definición 2.1. Definimos un *control admisible*, como aquella trayectoria de control $u(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, que es continua a trozos (lo que quiere decir que es continua en todos los puntos, excepto, quizá en un número finito de ellos y que los límites laterales en aquellos puntos existen) y que, además, cumple la condición de que $u(t) \in \Omega(t) \subset \mathbb{R}^m$, para cada $t \in [t_0, t_1]$. El conjunto $\Omega(t)$ representa restricciones físicas al valor de las variables de control en el tiempo t.

Supondremos que el vector de variables de estado $x(t)$ es una función de t, continua en $[t_0, t_1]$, y con derivada continua a trozos, verificando que

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t),$$

en todos los puntos de continuidad de u.

Definición 2.2. La *funcional objetivo* da una medida cuantitativa del comportamiento del sistema en el tiempo. Se consideran funcionales del tipo:

$$J = \int_{t_0}^{t_1} F\Big(x(t), u(t), t\Big) dt + S[x(t_1)]$$

donde:

$$\begin{array}{rcl} F \;:\; D' \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ (x, u, t) & \longmapsto & F(x, u, t) \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} S \;:\; D'' \subset \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & S(x). \end{array}$$

F y S poseen derivadas parciales de primer orden continuas. El primer sumando del funcional J es una integral que depende de los valores que van tomando $x(t)$ y $u(t)$ a lo largo del horizonte temporal y, por tanto, valora el comportamiento del sistema a través del tiempo. El segundo sumando $S[x(t_1)]$, valora el estado en que queda el sistema al final del intervalo de tiempo que constituye el horizonte temporal del problema.

Definición 2.3. Un *control óptimo* es definido como un control admisible que maximiza el funcional objetivo.

El problema que nos ocupa es el siguiente:

> Dado un sistema dinámico con condición inicial x_0, que evoluciona en el tiempo de acuerdo con la ecuación de estado $\dot{x} = f(x, u, t)$, se trata de encontrar el vector de control que sea admisible y haga que el funcional objetivo alcance el valor máximo, es decir:

$$\begin{array}{rcl} \text{máx}_{u(t)}\, J & = & \displaystyle\int_{t_0}^{t_1} F(x, u, t) dt + S[x(t_1)], \\ \text{sujeto a} & : & \dot{x} = f(x, u, t), \\ \text{con} & : & x(t_0) = x_0, \\ & & u(t) \in \Omega(t) \end{array}$$

También se puede expresar el problema anterior de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\max_{u_1(t),\ldots,u_m(t)} J &= \int_{t_0}^{t_1} F(x_1(t),\ldots,x_n(t),u_1(t),\ldots,u_m(t),t)dt + S[x_1(t_1),\ldots,x_n(t_1)], \\
\text{sujeto a} \quad : & \qquad \dot{x}_1(t) = f_1(x_1(t),\ldots,x_n(t),u_1(t),\ldots,u_m(t),t), \\
& \qquad \dot{x}_2(t) = f_2(x_1(t),\ldots,x_n(t),u_1(t),\ldots,u_m(t),t), \\
& \qquad \vdots \\
& \qquad \dot{x}_n(t) = f_n(x_1(t),\ldots,x_n(t),u_1(t),\ldots,u_m(t),t), \\
\text{con} \quad : & \qquad x_1(t_0) = x_{10},\ x_2(t_0) = x_{20},\ \ldots, x_n(t_0) = x_{n0}, \\
& \qquad (u_1(t),\ldots,u_m(t))' \in \Omega(t).
\end{aligned}$$

Definición 2.4. El control $u^*(t) = (u_1(t),\ldots,u_m(t))$ que resuelve el problema se llama control óptimo y el vector $x^*(t) = (x_1(t),\ldots,x_n(t))$, determinado por la ecuación de estado a partir de $u^*(t)$, se llama *trayectoria de estado óptima* o *camino óptimo.*

Veamos un ejemplo de formulación de problemas de control óptimo en tiempo continuo.

Ejemplo 2.1 (Modelo neoclásico de crecimiento económico.). Se considera una economía muy simplificada, en la cual la tasa de salida en el tiempo t, $Y(t)$ depende de las tasas de capital $K(t)$ y de trabajo $L(t)$ en el tiempo t. Sea por tanto en cada instante:

$$Y = F(K, L),$$

donde F es una función de producción homogénea de grado uno.

Sean y la producción por trabajador y k el capital por trabajador. Se verifica que:

$$y = \frac{Y}{L} = \frac{F(K,L)}{L} = F(\frac{K}{L}, 1) = f(k)$$

donde se ha tenido en cuenta que F es homogénea de grado uno.

La forma típica de la función f será la siguiente:

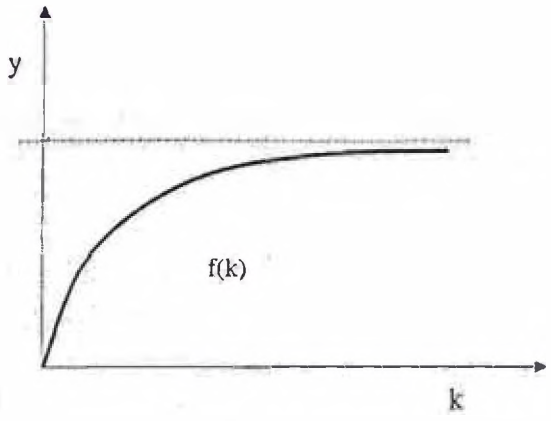

Figura 2.1: Función de producción per cápita

con $f'(k) > 0$ y $f''(k) < 0$.

Sean $C(t)$, $I(t)$ las tasas respectivas de consumo e inversión en t. Sea

$$Y(t) = C(t) + I(t).$$

La inversión se utiliza en incrementar el stock de capital o en reemplazar la maquinaria. Llamando μ a la tasa de depreciación se tiene que:

$$I = \frac{dK}{dt} + \mu K$$

Sea

$$c = \frac{C}{L},$$

la tasa de consumo por trabajador.

Se verifica que:

$$y = f(k) = c + \frac{1}{L}\frac{dK}{dt} + \mu k$$

Utilizando que:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{K}{L}\right) = \frac{L\frac{dK}{dt} - K\frac{dL}{dt}}{L^2} = \frac{1}{L}\frac{dK}{dt} - \frac{1}{L}\frac{dL}{dt}k,$$

se obtiene:

$$f(k) = c + \frac{dk}{dt} + \frac{\dot{L}}{L}k + \mu k$$

Suponiendo que el trabajo crece de manera exponencial:

$$L = L_0 e^{\lambda t},$$

su derivada con respecto al tiempo es $\dot{L} = \lambda L$, de donde, $\frac{\dot{L}}{L} = \lambda$.*

Queda:

$$\frac{dk}{dt} = f(k) - (\lambda + \mu)k - c$$

Se supone que se conoce $k(0) = k_0$.

Tenemos, por tanto, un sistema dinámico con condición inicial dada y que evoluciona en el tiempo de acuerdo con una ecuación diferencial conocida. Para completar el problema de control óptimo necesitamos un funcional objetivo, que se introduce a continuación:

Introduzcamos una función de utilidad $U = U(c)$, que es una medida del valor atribuido al consumo (por trabajador). Esta función U se supone que verifica las condiciones siguientes:

1. $U'(c) > 0$ (a mayor consumo por trabajador, mayor utilidad).

2. $U''(c) < 0$ (cuando más se consume, menor incremento de utilidad proporciona un incremento dado en el consumo).

3. $\lim_{c \to 0} U'(c) = \infty$ (si no se consume nada, la utilidad que proporciona una cantidad infinitamente pequeña de consumo es infinita).

4. $\lim_{c \to \infty} U'(c) = 0$ (si se consume una cantidad infinitamente grande, un incremento en el consumo no aumenta la utilidad).

Sea δ la tasa de descuento, que da una medida de la preferencia de un consumo anterior frente a un consumo posterior. Así, si $\delta = 0$, un consumo c en el presente se valora igual que un consumo c dentro de t unidades de tiempo. Para un $\delta > 0$ cualquiera, un consumo c en el presente se valora igual que un consumo $e^{\delta t}c$ dentro de t unidades de tiempo. Por tanto, a mayor δ se exige mayor cantidad de consumo futuro a cambio de consumo presente.

Fijado el horizonte temporal $[0, T]$, el funcional objetivo será

$$W = \int_0^T e^{-\delta t} U(c) dt,$$

que representa la utilidad descontada acumulada en el intervalo $[0, T]$.

El problema, por tanto, es:

$$\begin{aligned} \max_{c(t)\geq 0} W &= \int_0^T e^{-\delta t} U(c) dt, \\ \textit{sujeto a} &: \dot{k}(t) = f(k) - (\lambda + \mu)k - c(t), \\ \textit{con} &: k(0) = k_0. \end{aligned}$$

donde $c(t)$ es la variable de control y $k(t)$ es la variable de estado.

2.2. El Principio del Máximo de Pontryagin

El principio del máximo da condiciones necesarias que debe cumplir el control óptimo del problema que estamos considerando.

Se trata, por tanto, de resolver el problema:

$$\begin{aligned} \max_{u} J &= \int_{t_0}^{t_1} F(x, u, t) dt + S[x(t_1)], \\ \text{sujeto a} &: \dot{x} = f(x, u, t), \\ \text{con} &: x(t_0) = x_0, \\ & u \in \Omega. \end{aligned}$$

donde $x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m$. Utilizando notación escalar:

$$\begin{array}{lcl} \max\limits_{u_1,\ldots,u_m} J & = & \displaystyle\int_{t_0}^{t_1} F(x_1,\ldots,x_n,u_1,\ldots,u_m,t)dt + S[x_1(t_1),\ldots,x_n(t_1)], \\ \text{sujeto a} & : & \dot{x}_i = f_i(x_1,\ldots,x_n,u_1,\ldots,u_m,t), \quad para \quad i=1,\ldots,n, \\ \text{con} & : & x_1(t_0) = x_{10},\ldots,x_n(t_0) = x_{n0}, \\ \text{también} & & (u_1,\ldots,u_m)' \in \Omega. \end{array}$$

Se define el Hamiltoniano asociado al problema anterior, de la siguiente forma:

$$H(x,u,\lambda,t) = F(x,u,t) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(x,u,t) = F(x,u,t) + \lambda f(x,u,t),$$

donde para cada $t \in [t_0,t_1]$, $\lambda(t) = (\lambda_1(t),\lambda_2(t),\ldots,\lambda_n(t))$ es un vector fila n-dimensional que se llama vector de variables adjuntas o variables de coestado. Por tanto, el Hamiltoniano tiene dominio contenido en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, y toma valores en $\mathbb{R}^n$.

El siguiente teorema constituye el resultado fundamental de este capítulo y establece condiciones necesarias de optimalidad para el problema que nos ocupa.

Teorema 2.1. [3, Cerdá](Principio del máximo de Pontryagin) Sean: $u^*(t)$ la trayectoria óptima de control, continua a trozos, y $x^*(t)$ la trayectoria de estado óptima asociada, definidas en el intervalo $[t_0,t_1]$. Entonces existe una función vectorial $\lambda^*(t) = (\lambda_1^*(t),\ldots,\lambda_n^*(t))$ continua que posee derivadas primeras continuas a trozos, tal que para cada $t \in [t_0,t_1]$ verifica:

1.
$$\dot{\lambda}_i^*(t) = -\frac{\partial H(x^*(t),u^*(t),\lambda^*(t),t)}{\partial x_i}, \quad para\ cada\ i=1,\ldots,n$$

en todos los puntos de continuidad de $u^*(t)$,

$$con\ : \dot{\lambda}_1^*(t_1) = \frac{\partial S[x^*(t_1)]}{\partial x_1},\ldots,\dot{\lambda}_n^*(t_1) = \frac{\partial S[x^*(t_1)]}{\partial x_n},$$

2.
$$H[x^*(t),u^*(t),\lambda^*(t),t] \geq H[x^*(t),u(t),\lambda^*(t),t], \quad para\ todo\ u(t) \in \Omega(t).$$

3.

$$\dot{x}_i^* = f_i(x^*(t), u^*(t), t), \quad \textit{para cada } i = 1, \ldots, n,$$

en todos los puntos de continuidad de $u^*(t)$,

$$\textit{con} \ : \quad x_1^*(t_0) = x_{10}, \ldots, x_n^*(t_0) = x_{n0}.$$

Posteriormente se dará una demostración del teorema, para una determinada formulación del problema.

Observación 2.1. Si se trata de minimizar el funcional objetivo, el teorema es análogo, con la excepción de que cambia el sentido de la desigualdad de la última expresión.

A continuación se presentan dos ejemplos en los que se aplica el principio del máximo de Pontryagin.

Ejemplo 2.2.

$$\begin{aligned} \max_u J &= \int_1^5 \left(ux - u^2 - x^2\right) dt, \\ \text{sujeto a} &: \dot{x} = x + u, \\ \text{con} &: x(1) = 2. \end{aligned}$$

Solución. El Hamiltoniano será en este caso:

$$H(x, u, \lambda, t) = ux - u^2 - x^2 + \lambda(x + u).$$

Aplicando el principio del máximo,

1.

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -u + 2x - \lambda,$$

$$\textit{con} : \quad \lambda(5) = \frac{dS[x^*(5)]}{dx} = 0, \text{ ya que } S[x(5)] = 0.$$

2. Hay que resolver

$$\max_u H(x, u, \lambda, t) = ux - u^2 - x^2 + \lambda(x + u)$$

Aplicamos las condiciones de optimalidad para este problema:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 = x - 2u + \lambda \Rightarrow u = \frac{x+\lambda}{2},$$
$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = -2 < 0,$$

que corresponde a un máximo.

3.

$$\dot{x} = x + u, \quad con \quad x(1) = 2.$$

Sustituyendo el valor de u obtenido en 2. en las condiciones 1. y 3., queda que λ y x tienen que verificar:

$$\begin{aligned} \dot{\lambda} &= -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\lambda + 2x - \lambda, \quad con \quad \lambda(5) = 0, \\ \dot{x} &= x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\lambda, \quad con \quad x(1) = 2. \end{aligned}$$

Es decir:

a) $\dot{\lambda} = \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}\lambda, \quad con \quad \lambda(5) = 0.$

b) $\dot{x} = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}\lambda, \quad con \quad x(1) = 2.$

Despejando λ en $b)$, se obtiene:

$$\lambda = 2\dot{x} - 3x.$$

Derivando en los dos miembros con respecto a t, se obtiene:

$$\dot{\lambda} = 2\ddot{x} - 3\dot{x}.$$

Sustituyendo en $a)$ queda:

$$2\ddot{x} - 3\dot{x} = \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}(2\dot{x} - 3x) = \frac{3}{2}x - 3\dot{x} + \frac{9}{2}x,$$

de donde

$$\ddot{x} - 3x = 0$$

que es una ecuación diferencial lineal de segundo orden, homogénea, con coeficientes constantes. Aplicando el método de solución de dicha ecuación diferencial se obtiene:

$$x^*(t) = Ae^{\sqrt{3}t} + Be^{-\sqrt{3}t}.$$

Derivando los dos miembros con respecto a t, se tiene que:

$$\dot{x}^*(t) = A\sqrt{3}e^{\sqrt{3}t} - B\sqrt{3}e^{-\sqrt{3}t}$$

por lo que, sustituyendo en la expresión de λ, queda:

$$\begin{aligned}\lambda^*(t) &= 2A\sqrt{3}e^{\sqrt{3}t} - 2B\sqrt{3}e^{-\sqrt{3}t} - 3Ae^{\sqrt{3}t} - 3Be^{-\sqrt{3}t} \\ &= \left(2\sqrt{3} - 3\right) Ae^{\sqrt{3}t} - \left(2\sqrt{3} + 3\right) Be^{-\sqrt{3}t}.\end{aligned}$$

Las constantes A y B se obtienen utilizando las condiciones:

$$x^*(1) = 2, \qquad y \qquad \lambda^*(5) = 0.$$

El control óptimo es:

$$\begin{aligned}u^*(t) &= \frac{1}{2}\left[x^*(t) + \lambda^*(t)\right] \\ &= \left(\sqrt{3} - 1\right) Ae^{\sqrt{3}t} - \left(\sqrt{3} + 1\right) Be^{-\sqrt{3}t}.\end{aligned}$$

Ejemplo 2.3.

$$\begin{aligned}\max_u J &= \int_0^1 \frac{1}{2}u^2 dt + 3x_1(1) + x_2(1), \\ \text{sujeto a} &: \dot{x}_1 = u, \\ &\quad\ \dot{x}_2 = x_1, \\ \text{con} &: x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 0.\end{aligned}$$

Solución. Se tiene que

$$\begin{aligned}F(x_1, x_2, u, t) &= \frac{1}{2}u^2, \\ S[x_1, x_2] &= 3x_1 + x_2.\end{aligned}$$

En este caso hay dos variables de estado x_1 y x_2, y una variable de control u. La ecuación de estado, consta de un sistema de dos ecuaciones diferenciales, por lo que hay

que introducir dos variables adjuntas, λ_1 y λ_2.

El Hamiltoniano será en este caso:

$$H(x_1, x_2, u, \lambda_1, \lambda_2, t) = \frac{1}{2}u^2 + \lambda_1 u + \lambda_2 x_1.$$

Aplicamos el principio del máximo:

1. Sea

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_1 = -\dfrac{\partial H}{\partial x_1}, & con \quad \lambda_1(1) = \dfrac{\partial S}{\partial x_1} = 3 \\ \\ \dot{\lambda}_2 = -\dfrac{\partial H}{\partial x_2}, & con \quad \lambda_2(1) = \dfrac{\partial S}{\partial x_2} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_1 = -\lambda_2, & con \quad \lambda_1(1) = 3, \\ \dot{\lambda}_2 = 0, & con \quad \lambda_2(1) = 1, \end{cases}$$

Resolviendo dicho sistema, se obtiene que:

$$\begin{aligned} \lambda_1^*(t) &= -t + 4, \quad para \quad 0 \leq t \leq 1, \\ \lambda_2^*(t) &= 1, \quad para \quad 0 \leq t \leq 1. \end{aligned}$$

2.

$$\min_u H(x_1^*, x_2^*, u, \lambda_1^*, \lambda_2^*, t)$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 = u + \lambda_1^* \Rightarrow u^*(t) = -\lambda_1^*(t) = t - 4, \quad para \quad 0 \leq t \leq 1.$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} = 1 > 0,$$

luego se trata efectivamente de un mínimo.

3. Ahora, calculamos las trayectorias de estado óptimas, con la ecuación de estado.

$$\dot{x}_1^* = u^* = t - 4, \quad con \quad x_1^*(0) = 1.$$

de donde se deduce que

$$\begin{aligned} x_1^*(t) &= \frac{t^2}{2} - 4t + 1, \quad para \quad 0 \leq t \leq 1, \\ x_2^*(t) &= x_1^* = \frac{t^2}{2} - 4t + 1, \quad con \quad x_2^*(0) = 0. \end{aligned}$$

de donde se deduce que

$$x_2^*(t) = \frac{t^3}{6} - 2t^2 + t, \quad para \quad 0 \leq t \leq 1.$$

2.3. Demostración del Principio del Máximo

Se considera el siguiente problema de control óptimo:

$$\begin{aligned} \max_{u(t)} J &= \int_{t_0}^{t_1} F(x(t), u(t), t)dt + S[x(t_1)], \\ \text{sujeto a} &: \dot{x} = f[x(t), u(t), t], \\ \text{con} &: x(t_0) = x_0, \end{aligned}$$

en donde para hacer más simple la deducción que sigue se considera que la variable de control u no está sujeta a restricciones conjuntistas, por lo que $u(t) \in \Omega(t) = \mathbb{R}$, y tanto la variable de estado como la variable de control son escalares (es decir, unidimensionales). Para esta formulación del problema de control óptimo vamos a deducir a continuación las condiciones necesarias de optimalidad que nos proporciona el principio del máximo de Pontryagin.

El Hamiltoniano asociado al problema es:

$$H(x, u, \lambda, t) = F(x, u, t) + \lambda(t) f(x, u, t)$$

Por verificarse que

$$\dot{x} = f(x, u, t)$$

será

$$f(x, u, t) - \dot{x} = 0, \quad \forall t \in [t_0, t_1],$$

de donde :

$$\int_{t_0}^{t_1} \lambda(t) \left[f(x, u, t) - \dot{x} \right] dt = 0,$$

para cualquier función $\lambda(t)$ continua, con derivada continua a trozos.

Sumando el valor de esta integral al funcional objetivo, se obtiene que:

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \{F(x,u,t) + \lambda(t)\,[f(x,u,t) - \dot{x}]\}\,dt + S[x(t_1)]$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} H(x,u,\lambda,t)dt - \int_{t_0}^{t_1} \lambda(t)\dot{x}dt + S[x(t_1)].$$

Resolvemos por partes la integral

$$\int_{t_0}^{t_1} \lambda(t)\dot{x}dt = \lambda(t)x(t)\,|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} x\dot{\lambda}(t)dt = \lambda(t_1)x(t_1) - \lambda(t_0)x_0 - \int_{t_0}^{t_1} x\dot{\lambda}(t)dt.$$

Queda

$$J = \int_{t_0}^{t_1} [H(x,u,\lambda,t) + x\dot{\lambda}(t)]dt - \lambda(t_1)x(t_1) + \lambda(t_0)x_0 + S[x(t_1)].$$

para cualquier trayectoria de control $u(t)$, con trayectoria de estado asociada $x(t)$. Verificando, por tanto, que $\dot{x} = f(x,u,t)$, con $x(t_0) = x_0$.

Sea $u^*(t)$ la trayectoria de control óptimo. Se perturba ahora dicha trayectoria con una función $\alpha(t)$ continua a trozos, arbitraria. Sea:

$$u_\varepsilon(t) = u^*(t) + \varepsilon\alpha(t), \quad \textit{para cada} \quad t \in [t_0, t_1],$$

siendo $\alpha(t)$ fija y ε un parámetro. Es claro que $u_0(t) = u^*(t)$, para cada $t \in [t_0, t_1]$.

Sea $x^*(t)$ la trayectoria de estado óptima asociada al control $u^*(t)$. Sea $x(t,\varepsilon)$ la trayectoria de estado asociada al control $u_\varepsilon(t)$. Se supone que $x(t,\varepsilon)$ es una función continua, con derivada parcial con respecto a ε continua. Es claro que $x(t,0) = x^*(t)$, para cada $t \in [t_0, t_1]$.

Si se toman como dados $u^*(t)$ y $\alpha(t)$, entonces el valor del funcional objetivo asociado a $u_\varepsilon(t)$ y $x(t,\varepsilon)$ depende exclusivamente de ε y su valor es:

$$J(\varepsilon) = \int_{t_0}^{t_1} \Big[H(x(t,\varepsilon), u^*(t) + \varepsilon\alpha(t), \lambda(t), t) + x(t,\varepsilon)\dot{\lambda}(t)\Big]\,dt$$

$$-\lambda(t_1)x(t_1,\varepsilon) + \lambda(t_0)x_0 + S[x(t_1,\varepsilon)].$$

Como $u^*(t)$ es el control óptimo y $x^*(t)$ es la trayectoria óptima de estado, $J(\varepsilon)$ alcanzará el máximo valor $\varepsilon = 0$, por lo que se cumplirá la condición necesaria de optimalidad: $J'(0) = 0$.

Derivando $J(\varepsilon)$, con respecto a ε se obtiene:

$$J'(\varepsilon) = \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial H}{\partial u}\alpha(t) + \frac{\partial x}{\partial \varepsilon}\dot{\lambda}\right] dt - \lambda(t_1)\frac{\partial x(t_1,\varepsilon)}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial S[x(t_1,\varepsilon)]}{\partial \varepsilon}$$

donde $\dfrac{\partial H}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial H}{\partial u}$ están definidos en $(x(t,\varepsilon), u^*(t) + \varepsilon\alpha(t), \lambda(t), t)$.

En particular, en $\varepsilon = 0$, e igualando a cero, queda:

$$J'(0) = \int_{t_0}^{t_1} \left[\left(\frac{\partial H^*}{\partial x} + \dot{\lambda}\right)\frac{\partial x}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial H^*}{\partial u}\alpha(t)\right] dt - \lambda(t_1)\frac{\partial x(t_1,0)}{\partial \varepsilon} + S'[x(t_1)]\frac{\partial x(t_1,0)}{\partial \varepsilon},$$

donde,

$$\frac{\partial H^*}{\partial x} = \frac{\partial H(x^*,u^*,\lambda,t)}{\partial x}, \quad \frac{\partial H^*}{\partial u} = \frac{\partial H(x^*,u^*,\lambda,t)}{\partial u}.$$

Como el impacto exacto que produce en la variable de estado una modificación de la variable de control, es decir $\dfrac{\partial x}{\partial \varepsilon}$, es difícil de determinar, se selecciona $\lambda(t)$ de manera que no haya necesidad de calcularlo, por lo que $\lambda^*(t)$ se toma de manera que verifique:

$$\dot{\lambda}^*(t) = -\frac{\partial H(x^*,u^*,\lambda^*,t)}{\partial x}, \quad con \quad \lambda^*(t_1) = \frac{dS[x^*(t_1)]}{dx},$$

con lo que queda:

$$J'(0) = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial H(x^*,u^*,\lambda^*,t)}{\partial u}\alpha(t)dt = 0,$$

que tiene que ser cierto para cualquier función $\alpha(t)$ continua a trozos. En particular, tomando:

$$\alpha(t) = \frac{\partial H(x^*,u^*,\lambda^*,t)}{\partial u}$$

tendrá que cumplirse que:

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial H(x^*,u^*,\lambda^*,t)}{\partial u}\right]^2 dt = 0,$$

de donde se deduce que:

$$\frac{\partial H(x^*, u^*, \lambda^*, t)}{\partial u} = 0, \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

Por lo tanto hemos deducido que existe una función $\lambda^*(t)$ continua con derivada continua a trozos, tal que para cada $t \in [t_0, t_1]$ se verifica que :

1.
$$\dot{\lambda}^*(t) = -\frac{\partial H(x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t), t)}{\partial x},$$

en todos los puntos de continuidad de $u^*(t)$,

$$con \quad \lambda^*(t_1) = \frac{dS[x^*(t_1)]}{dx}$$

2.
$$\frac{\partial H(x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t), t)}{\partial u}$$

que es una condición necesaria para que $H(x^*, u^*, \lambda^*, t) \geq H(x^*, u, \lambda^*, t)$, para todo $u \in \mathbb{R}$.

3.
$$\dot{x}^*(t) = f(x^*(t), u^*(t), t),$$

en todos los puntos de continuidad de $u^*(t)$, con $x^*(t_0) = x_0$.

Por lo tanto, se han obtenido las condiciones que constituyen el principio del máximo de Pontryagin.

□

2.4. Condiciones Suficientes

El principio del máximo de Pontryagin proporciona condiciones necesarias de optimalidad. Ahora veamos las condiciones suficientes, cuyo cumplimiento garantiza que las condiciones necesarias que proporciona el principio del máximo son también suficientes de optimalidad global. Como es habitual en teoría de la optimización, estas

condiciones suficientes requerirán algún tipo de concavidad de las funciones que definen el problema (para el caso de maximizar, convexidad si se trata de minimizar).

A continuación, como es habitual en teoría de control, vamos a estudiar dos tipos de condiciones suficientes: las de Mangasarian y las de Arrow. Las condiciones suficientes que se obtienen en el teorema de Arrow son más generales, aunque tienen el conveniente de de que es más difícil comprobar si se cumplen.

2.4.1. Condiciones suficientes de Mangasarian

Se considera el siguiente problema de control óptimo:

$$\begin{aligned} \max_{u(t)} J &= \int_{t_0}^{t_1} F(x,u,t)dt + S[x(t_1)], \\ \text{sujeto a} &: \dot{x} = f(x,u,t), \\ \text{con} &: x(t_0) = x_0, \end{aligned}$$

que corresponde al problema básico de control óptimo, con $\Omega(t) = \mathbb{R}^m$, para todo $t \in [t_0, t_1]$.

Supongamos que $x^*(t)$, $u^*(t)$, $\lambda^*(t)$ verifican las condiciones necesarias de optimalidad que proporciona el principio máximo. Es decir, se verifica que:

1. $\dot{\lambda}^* = -\nabla_x F(x^*,u^*,t) - \lambda^* \nabla_x f(x^*,u^*,t), \quad con \quad \lambda^*(t_1) = \nabla_x S[x^*(t_1)],$
2. $\nabla_u F(x^*,u^*,t) + \lambda^* \nabla_u f(x^*,u^*,t) = 0,$
3. $\dot{x}^* = f(x^*,u^*,t), \quad con \quad x^*(t_0) = x_0,$

donde se ha utilizado la siguiente notación:

$$\begin{aligned} \nabla_x F &= \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial F}{\partial x_n}\right) \quad ; \quad \nabla_x f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right); \\ \nabla_u F &= \left(\frac{\partial F}{\partial u_1}, \ldots, \frac{\partial F}{\partial u_n}\right) \quad ; \quad \nabla_u f = \left(\frac{\partial f}{\partial u_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial u_m}\right), \end{aligned}$$

que en las condiciones 1) y 2) anteriores, están particularizadas en (x^*, u^*, t), y

$$\nabla_x S = \left(\frac{\partial S}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial S}{\partial x_n}\right),$$

que en 1) está particularizada en $x^*(t_1)$.

A continuación se enuncia y demuestra el teorema que asegura que si se verifican ciertas condiciones adicionales, $u^*(t)$ es el control óptimo del problema.

Teorema 2.2. [3, Cerdá](Mangasarian) Sean $u^*(t)$, $x^*(t)$, $\lambda^*(t)$ los resultados que se obtienen al aplicar el principio del máximo de Pontryagin, $\forall t \in [t_0, t_1]$, al problema de control óptimo.

Si se verifica que:

a) F y f son cóncavas en x, u para cada $t \in [t_0, t_1]$,

b) S es cóncava en x,

c) $\lambda^*(t) \geq 0$, para cada $t \in [t_0, t_1]$,

si $f(x, u, t)$ es no lineal en x, u, entonces:
u^* es el control óptimo del problema, con x^* trayectoria de estado óptima y λ^*, trayectoria óptima de las variables adjuntas.

Prueba. Al plantear el problema básico de control óptimo en tiempo continuo se ha partido de que las funciones F, f y S poseen derivadas parciales primeras continuas. Aplicando una importante caracterización de las funciones cóncavas diferenciables, se verificará que, para cada $t \in [t_0, t_1]$:

$$\begin{aligned} F(x^*, u^*, t) - F(x, u, t) &> \nabla_x F(x^*, u^*, t)(x^* - x) + \nabla_u F(x^*, u^*, t)(u^* - u), \\ f(x^*, u^*, t) - f(x, u, t) &> \nabla_x f(x^*, u^*, t)(x^* - x) + \nabla_u f(x^*, u^*, t)(u^* - u), \\ S[x^*(t_1)] - S[x(t_1)] &> \nabla_x S[x^*(t_1)][x^*(t_1) - x(t_1)]. \end{aligned}$$

Sea $u(t)$ cualquier control admisible, es decir, cualquier función de $[t_0, t_1]$ en $\mathbb{R}^m$, que sea continua a trozos, y sea $x(t)$ la trayectoria de estado asociada, es decir, que verifica que

$$\dot{x}(t) = f(x, u, t), \quad con \quad x(t_0) = x_0$$

Veamos que:

$$\int_{t_0}^{t_1} F(x^*, u^*, t)dt + S[x^*(t_1)] \geq \int_{t_0}^{t_1} F(x, u, t)dt + S[x(t_1)],$$

con lo que quedará demostrado el teorema.

Aplicando las caracterizaciones de funciones cóncavas diferenciables, e integrando, se obtiene que:

$$\begin{aligned} J^* - J &= \int_{t_0}^{t_1} [F(x^*, u^*, t) - F(x, u, t)]dt + S[x^*(t_1)] - S[x(t_1)] \\ &\geq \int_{t_0}^{t_1} [\nabla_x F(x^*, u^*, t)(x^* - x) + \nabla_u F(x^*, u^*, t)(u^* - u)]dt \\ &\quad + \nabla_x S[x^*(t_1)][x^*(t_1) - x(t_1)]. \end{aligned}$$

Aplicando las condiciones 1) y 2) del principio del máximo, la expresión del lado derecho de la desigualdad anterior es igual a:

$$\int_{t_0}^{t_1} \left\{ \left[-\dot{\lambda}^* - \lambda^* \nabla_x f(x^*, u^*, t) \right] (x^* - x) + \left[-\lambda^* \nabla_u f(x^*, u^*, t) \right] (u^* - u) \right\} dt$$
$$+ \lambda^*(t_1) \left[x^*(t_1) - x(t_1) \right]$$

Resolviendo, por partes, la integral siguiente:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \dot{\lambda}^*(x^* - x)dt &= \lambda^* \left[x^*(t) - x(t) \right] \Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \lambda^*(t)(\dot{x}^* - \dot{x})dt \\ &= \lambda^*(t_1) \left[x^*(t_1) - x(t_1) \right] - \int_{t_0}^{t_1} \lambda^*(t) \left[f(x^*, u^*, t) - f(x, u, t) \right] dt, \end{aligned}$$

y sustituyendo, queda finalmente que:

$$\begin{aligned} J^* - J &= \int_{t_0}^{t_1} \lambda^*(t) \left[f(x^*, u^*, t) - f(x, u, t) - \nabla_x f(x^*, u^*, t)(x^* - x) \right. \\ &\quad \left. - \nabla_u f(x^*, u^*, t)(u^* - u) \right] dt. \end{aligned}$$

Analicemos el integrando de esta expresión. Se pueden dar dos posibilidades:

1. Que f sea no lineal en x, u. En ese caso, por hipótesis es $\lambda^*(t) \geq 0$, y la expresión del integrando entre corchetes es también ≥ 0, por la propiedad de concavidad de f. Así que el integrando es mayor o igual que cero, para todo t, por lo que la integral es mayor o igual que cero. Por tanto $J^* - J \geq 0$.

2. Que f sea lineal en x, u. Sean:

$$\begin{aligned} f(x,u,t) &= ax + bu + g(t), \\ f(x^*,u^*,t) &= ax^* + bu^* + g(t). \end{aligned}$$

Entonces

$$\nabla_x f(x^*,u^*,t) = a, \qquad y \qquad \nabla_u f(x^*,u^*,t) = b,$$

por lo que:

$$f(x^*,u^*,t) - f(x,u,t) - \nabla_x f(x^*,u^*,t)(x^* - x) - \nabla_u f(x^*,u^*,t)(u^* - u) = 0.$$

En este caso $\lambda^*(t)$ puede tomar cualquier valor positivo, negativo o nulo, y la integral es cero. Por tanto, también en este caso, $J^* - J \geq 0$, y el teorema queda demostrado.

□

A continuación vamos a estudiar las condiciones suficientes de Mangasarian, para los ejemplos vistos como aplicación del principio del máximo en que la variable de control no está sujeta a restricciones.

Eje

$$\begin{aligned} \max_u J &= \int_1^5 \left(ux - u^2 - x^2\right) dt, \\ \text{sujeto a} &: \dot{x} = x + u, \\ \text{con} &: x(1) = 2. \end{aligned}$$

Solución. Veamos si se cumplen las hipótesis del Teorema 2.2:

$$F(x,u,t) = ux - u^2 - x^2$$

Su matriz hessiana con respecto a x, u es la siguiente:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Aplicando el criterio de los menores principales, se obtiene que dicha matriz es definida negativa, por lo que se puede asegurar que F es cóncava en x, u.

$$f(x, u, t) = x + u,$$

es lineal en x, u, por lo que también es cóncava. Por otra parte, al ser f lineal en x, u, no hace falta exigir que λ^* sea mayor o igual que cero.

Por lo tanto, se cumple la condición suficiente, y los resultados obtenidos al aplicar el principio del máximo son los óptimos.

Ejemplo 2.5.

$$\begin{aligned} \max_u J &= \int_0^1 \frac{1}{2}u^2 dt + 3x_1(1) + x_2(1), \\ \text{sujeto a} &: \dot{x}_1 = u, \\ &\quad \dot{x}_2 = x_1, \\ \text{con} &: x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 0. \end{aligned}$$

Solución. En este caso:

$$F(x_1, x_2, u, t) = \frac{1}{2}u^2.$$

Su matriz hessiana, con respecto a x_1, x_2 es:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

que es semidefinida positiva, por lo que se puede asegurar que F es función convexa en x_1, x_2, u.

$$f(x_1, x_2, u, t) = \begin{pmatrix} u \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u,$$

es lineal en x_1, x_2, u luego es convexa en x_1, x_2, u. Además, no hay que exigir que $\lambda^*(t)$ sea mayor o igual que cero.

Por último:

$$S(x_1, x_2) = 3x_1 + x_2,$$

es lineal en x_1, x_2, luego es convexa.

Se cumplen las hipótesis del teorema y, por lo tanto, la condición suficiente.

2.4.2. Condiciones Suficientes de Arrow

Se considera el problema básico de control óptimo:

$$\begin{array}{rcl} \max\limits_{u(t)} J & = & \displaystyle\int_{t_0}^{t_1} F(x,u,t)dt + S[x(t_1)], \\ \text{sujeto a} & : & \dot{x} = f(x,u,t), \\ \text{con} & : & x(t_0) = x_0, \end{array}$$

El Hamiltoniano es:

$$H(x,u,\lambda,t) = F(x,u,t) + \lambda f(x,u,t).$$

Antes de enunciar el Teorema de Arrow, sobre condiciones suficiente de optimalidad para el problema de control, se necesita una definición y una proposición previas.

Definición 2.5. Se define una función, llamada Hamiltoniano derivado, de la siguiente forma:

$$\begin{array}{rcccl} H^0 & : & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times [t_0, t_1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x, \lambda, t) & \longmapsto & H^0(x,\lambda,t) = \max\limits_{u \in \Omega(t)} H(x,u,\lambda,t) \end{array}$$

Supongamos que al resolver el problema:

$$\max_{u \in \Omega(t)} H(x, u, \lambda, t),$$

se obtiene una función:

$$u = u^0(x, \lambda, t)$$

Entonces, será

$$H^0(x, \lambda, t) = H(x, u^0, \lambda, t)$$

La siguiente proposición se utilizará posteriormente en la demostración del teorema.

Proposición 2.1. [3, Cerdá] Si u^0 es diferenciable, se verifica que:

$$\nabla_x H^0(x, \lambda, t) = \nabla_x H(x, u^0, \lambda, t), \quad \textit{para todo} u \in \Omega(t).$$

Prueba. Como se ha visto anteriormente,

$$H^0(x, \lambda, t) = H(x, u^0, \lambda, t)$$

pero u^0 es una función que depende de (x, λ, t).

Se verificará que, para cada $i = 1, 2, \ldots, n$,

$$\frac{\partial H^0(x, \lambda, t)}{\partial x_i} = \frac{\partial H(x, u^0, \lambda, t)}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial H(x, u^0, \lambda, t)}{\partial u_j} \frac{\partial u_j^0}{\partial x_i},$$

que en notación vectorial queda:

$$\nabla_x H^0(x, \lambda, t) = \nabla_x H(x, u^0, \lambda, t) \nabla_u H(x, u^0 \lambda, t) J_x u^0,$$

en donde ∇_x representa gradiente, con respecto a las variables x, ∇_u gradiente con respecto a u y J_x, matriz jacobiana con respecto a x.

Veamos que se verifica que:

$$\nabla_u H(x, u^0, \lambda, t) J_x u^0 = 0, \quad \forall x.$$

En efecto, distinguimos dos casos:

1. El programa:

$$\max_u H(x, u, \lambda, t), \quad \textit{no está sujeto a restricciones}$$

alcanza el óptimo en el conjunto $\Omega(t)$. En tal caso, se cumple que:

$$\nabla_u H(x, u^0, \lambda, t) = 0,$$

por lo tanto,

$$\nabla_u H(x, u^0, \lambda, t) J_x u^0 = 0, \quad \forall x$$

2. El programa

$$\max_u H(x, u, \lambda, t),$$

alcanza el óptimo en un punto que no pertenece al conjunto $\Omega(t)$. En ese caso, $J_x u^0 = 0$, ya que cambiando x no se modifica el valor óptimo de u. Por tanto, la proposición queda demostrada.

Observación 2.2. La proposición anterior se ha enunciado y demostrado, suponiendo que u^0 es diferenciable. Imponiendo ciertas condiciones al conjunto $\Omega(t)$, el resultado se sigue verificando para funciones no diferenciables.

A continuación se enuncia y demuestra el teorema que asegura que, si se verifican ciertas condiciones adicionales, $u^*(t)$ es el control óptimo del problema.

Teorema 2.3. [3, Cerdá](Arrow) Sean $u^*(t)$, $x^*(t)$, $\lambda^*(t)$ los resultados que se obtienen al aplicar el principio del máximo de Pontryagin, $\forall t \in [t_0, t_1]$.

Si la función $H^0(x, \lambda^*, t)$ es cóncava en x, para cada $t \in [t_0, t_1]$ y $S(x)$ es cóncava en x, entonces u^* es el control óptimo del problema, con x^* trayectoria de estado óptima y λ^* trayectoria óptima de las variables adjuntas.

Prueba. Sea $u(t)$ cualquier control admisible, y sea $x(t)$ la trayectoria de estado asociada, es decir, verificando que

$$\dot{x}(t) = f(x, u, t), \quad con \quad x(t_0) = x_0$$

Veamos que

$$\int_{t_0}^{t_1} F(x^*, u^*, t)dt + S\left[x^*(t_1)\right] \geq \int_{t_0}^{t_1} F(x, u, t)dt + S\left[x(t_1)\right],$$

con lo que quedará demostrado el teorema.

Por definición del Hamiltoniano derivado, se tiene que para cada $t \in [t_0, t_1]$:

$$H(x, u, \lambda^*, t) \leq H^0(x, \lambda^*, t)$$

Por ser H^0 cóncava en x, se verifica que:

$$H^0(x, \lambda^*, t) \leq H^0(x^*, \lambda^*, t) + \nabla_x H^0(x^*, \lambda^*, t)(x - x^*).$$

Pero se tiene que:

$$H^0(x^*, \lambda^*, t) = H(x^*, u^*, \lambda^*, t)$$

y también por la Proposición 2.1:

$$\nabla_x H^0(x^*, \lambda^*, t) = \nabla_x H(x^*, u^*, \lambda^*, t)$$

Queda que:

$$H(x, u, \lambda^*, t) \leq H(x^*, u^*, \lambda^*, t) + \nabla_x H(x^*, u^*, \lambda^*, t)(x - x^*).$$

Por definición de H y utilizando la condición 1. del principio del máximo, la desigualdad anterior se puede expresar como:

$$F(x, u, t) + \lambda^* f(x, u, t) \leq F(x^*, u^*, t) + \lambda^* f(x^*, u^*, t) + \left[-\dot{\lambda}^*\right](x - x^*),$$

de donde se deduce que:

$$F(x^*, u^*, t) - F(x, u, t) \geq \dot{\lambda}^*(x - x^*) + \lambda^*(\dot{x} - \dot{x}^*), \quad \forall t \in [t_0, t_1]$$

Integrando ambos miembros de la desigualdad, desde t_0 a t_1, se obtiene:

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{t_1} F(x^*,u^*,t)dt - \int_{t_0}^{t_1} F(x,u,t)dt &\geq \lambda^* \left[(x(t_1) - x^*(t))\right]_{t=t_0}^{t=t_1} \\ &= \lambda^*(t_1)\left[x(t_1) - x^*(t_1)\right] - \lambda^*(t_0)\left[x(t_0) - x^*(t_0)\right] \\ &= \nabla_x S\left[x^*(t_1)\right]\left[x(t_1) - x^*(t_1)\right],\end{aligned}$$

ya que $x(t_0) = x^*(t_0) = x_0$ y $\lambda^*(t_1) = \nabla_x S\left[x^*(t_1)\right]$. Por tanto, se tiene que:

$$\int_{t_0}^{t_1} F(x^*,u^*,t)dt - \int_{t_0}^{t_1} F(x,u,t)dt - \nabla_x S\left[x^*(t_1)\right]\left[x(t_1) - x^*(t_1)\right] \geq 0 \tag{2.1}$$

Por otra parte, por ser $S\left[x(t_1)\right]$ función cóncava, se tiene que:

$$S\left[x^*(t_1)\right] - S\left[x(t_1)\right] + \nabla_x S\left[x^*(t_1)\right]\left[x(t_1) - x^*(t_1)\right] \geq 0 \tag{2.2}$$

Sumando las ecuaciones (2.1) y (2.2) se tiene que:

$$\int_{t_0}^{t_1} F(x^*,u^*,t)dt + S\left[x^*(t_1)\right] \geq \int_{t_0}^{t_1} F(x,u,t)dt + S\left[x(t_1)\right]$$

Con lo que $u^*(t)$ es el control óptimo, siendo $x^*(t)$ y $\lambda^*(t)$ los valores óptimos para las variables de estado y variables adjuntas, respectivamente, y el teorema queda demostrado.

□

Observación 2.3. Si se trata de minimizar el funcional objetivo, el teorema es análogo, con la excepción de que $H^0(x,\lambda^*,t)$ debe ser convexa en x, para cada $t \in [t_0,t_1]$, y $S(x)$ debe ser convexa en x. En ese caso,

$$H^0(x,\lambda^*,t) = \min_{u\in\Omega(t)} H(x,u,\lambda^*,t)$$

A continuación se ilustran las condiciones suficientes de Arrow con algunos de los ejemplos vistos en este capítulo, como aplicación del principio del máximo.

Ejemplo 2.6.

$$\begin{aligned}\text{máx}_u\, J &: \int_1^5 (ux - u^2 - x^2)dt, \\ \text{sujeto a} &: \dot{x} = x + u, \\ \text{con} &: x(1) = 2.\end{aligned}$$

Prueba. En este caso, el Hamiltoniano es:

$$H(x,u,\lambda,t) = ux - u^2 - x^2 + \lambda(x+u).$$

Se resuelve el programa:

$$\operatorname*{máx}_u H(x,u,\lambda,t)$$

obteniendo que

$$u = \frac{x+\lambda}{2}$$

por lo que:

$$\begin{aligned} H^0(x,\lambda,t) &= \frac{1}{2}(x+\lambda)x - \frac{1}{4}(x+\lambda)^2 - x^2 + \lambda x + \frac{1}{2}\lambda(x+\lambda) \\ &= -\frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x\lambda + \frac{1}{4}\lambda^2. \\ H^0 &= -\frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}\lambda^* x + \frac{1}{4}\lambda^{*2} = \phi(x). \end{aligned}$$

Veamos que $\phi(x)$ es función cóncava, para ello calculemos su derivada segunda:

$$\begin{aligned} \phi'(x) &= -\frac{6}{4}x + \frac{3}{2}\lambda^*, \\ \phi''(x) &= -\frac{6}{4} < 0, \end{aligned}$$

luego es función cóncava.

Por lo tanto, se cumple la condición suficiente de Arrow.

Ejemplo 2.7.

$$\begin{aligned} \text{máx}_u\, J &: \int_0^1 \frac{1}{2}u^2 dt + 3x_1(1) + x_2(1), \\ \text{sujeto a} &: \dot{x}_1 = u, \\ &\ \dot{x}_2 = x_1, \\ \text{con} &: x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 0. \end{aligned}$$

Prueba. El Hamiltoniano será en este caso

$$H(x_1,x_2,u,\lambda_1,\lambda_2,t) = \frac{1}{2}u^2 + \lambda_1 u + \lambda_2 x_1$$

por lo que

$$H(x_1,x_2,u,\lambda_1^*,\lambda_2^*,t) = \frac{1}{2}u^2 + \lambda_1^* u + \lambda_2^* x_1$$

Se resuelve el programa:

$$\min_u H(x_1, x_2, u, \lambda_1^*, \lambda_2^*, t),$$

obteniendo que:

$$u = -\lambda_1^*.$$

Por tanto:

$$H^0(x_1, x_2, \lambda_1^*, \lambda_2^*, t) = \frac{\lambda_1^{*2}}{2} - \lambda_1^{*2} + \lambda_2^* x_1 = -\frac{1}{2}\lambda_1^{*2} + \lambda_2^* x_1.$$

Pero, en el Ejemplo 2.3, al aplicar el principio del máximo se había obtenido que:

$$\lambda_1^*(t) = -t + 4, \quad y \quad \lambda_2^*(t) = 1, \textit{para todo } t \in [0, 1].$$

Por lo tanto,

$$H^0(x_1, x_2, \lambda_1^*, \lambda_2^*, t) = x_1 - \frac{1}{2}(4 - t)^2,$$

que es función convexa en x_1, x_2 para cada $t \in [0, 1]$, por lo que se cumple la condición suficiente de Arrow.

2.5. Hamiltoniano de Valor Presente

En muchos problemas de control óptimo que se estudian, aparecen en el objetivo un factor de descuento $e^{-\delta t}$, que a veces complica las operaciones encaminadas a la obtención de la solución óptima. Para facilitar el estudio de estos problemas, se utiliza en ocasiones otro Hamiltoniano, llamado *Hamiltoniano de Valor Presente*, que se introduce en esta sección.

Consideremos el siguiente problema:

$$\begin{aligned} \max_u J &= \int_o^T G(x, u, t)e^{\delta t}, \\ \text{sujeto a} &: \dot{x} = f(x, u, t) \\ \text{con} &: x(0) = x_0 \\ & \quad u(t) \in \Omega(t) \end{aligned}$$

Apliquemos el principio del máximo, como lo hemos hecho hasta ahora. El Hamiltoniano será:

$$H(x,u,\lambda,t) = G(x,u,t)e^{\delta t} + \lambda f(x,u,t)$$

Las condiciones del principio del máximo son:

1.
$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\partial G}{\partial x}e^{\delta t} - \lambda\frac{\partial f}{\partial x}, \quad con \quad \lambda(T) = 0,$$

2.
$$\max_{u\in\Omega} H,$$

3.
$$\dot{x} = f(x,u,t) \quad con \quad x(0) = x_0.$$

Además, si fuera T libre, habría que añadir $(H)_{t=T} = 0$.

Definición 2.6. Se define el *Hamiltoniano de Valor Presente*, representado por $\mathfrak{H}$, de la siguiente forma:

$$\mathfrak{H} = He^{\delta t} = G(x,u,\lambda,t) + \lambda e^{\delta t} f(x,u,t)$$

Sea $m(t) = \lambda(t)e^{\delta t}$. Será $\lambda(t) = e^{-\delta t}m(t)$, por lo tanto

$$\dot{\lambda} = -\delta e^{-\delta t}m(t) + e^{-\delta t}\dot{m}(t).$$

Sea:

$$\mathfrak{H}(x,u,m,t) = G(x,u,t) + m(t)f(x,u,t).$$

Vamos a reformular el principio del máximo, utilizando el **Hamiltoniano de Valor Presente** $\mathfrak{H}$ y la variable asociada m.

En la condición 1., expresada anteriormente, se sustituye λ y $\dot{\lambda}$ en términos de m y $\dot{m}$, obteniéndose:

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial G}{\partial x}e^{-\delta t} - \lambda\frac{\partial f}{\partial x},$$

que es equivalente a:

$$-\delta e^{-\delta t} m + e^{-\delta t} \dot{m} = -\frac{\partial G}{\partial x} e^{-\delta t} - e^{-\delta t} m \frac{\partial f}{\partial x},$$

y pueden expresar como:

$$\dot{m} = -\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial x} + \delta m.$$

La condición de transversalidad $\lambda(T) = 0$ es equivalente a $e^{-\delta t} m(T) = 0$, y como $e^{-\delta T} \neq 0$, se puede expresar como:

$$m(T) = 0.$$

La condición 2.:

$$\max_{u \in \Omega} H,$$

se puede expresar como $\max_{u \in \Omega} e^{-\delta t} \mathfrak{H}$.

Por último, la condición

$$(H)_{t=T} = 0$$

se puede expresar como: $e^{-\delta T} (\mathfrak{H})_{t=T} = 0$, pero como $e^{-\delta T} \neq 0$, resulta qu es equivalente a

$$(\mathfrak{H})_{t=T} = 0.$$

Por lo tanto, se ha obtenido una formulación alternativa del principio del máximo, para el problema considerado en esta sección.

Se parte del *Hamiltoniano de Valor Presente*, que se define como:

$$\mathfrak{H}(x, u, m, t) = G(x, u, t) + m f(x, u, t).$$

Las condiciones del principio del máximo son:

1.

$$\dot{m} = -\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial x} + \delta m, \quad con \quad m(T) = 0,$$

2.

$$\max_{u \in \Omega} \mathfrak{H}$$

3.

$$\dot{x} = f(x, u, t), \quad con \quad x(0) = x_0.$$

Además, si T fuera libre, habría que añadir $(\mathfrak{H})_{t=T} = 0$.

Ejemplo 2.8. Resolver el siguiente problema, utilizando el *Hamiltoniano de Valor Presente*:

$$\begin{aligned} \max_{u} J &= \int_0^2 e^{-0{,}05t} \left[(x-1)^2 + u^2\right] dt, \\ \text{sujeto a} &: \dot{x} = 2x - 3u, \\ \text{con} &: x(0) = 5. \end{aligned}$$

Solución. El Hamiltoniano de valor presente es:

$$\mathfrak{H}(x, u, m, t) = (x-1)^2 + u^2 + m(2x - 3u)$$

Aplicamos las condiciones del principio del máximo para el Hamiltoniano de valor presente:

1.

$$\dot{m} = -\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial x} + \delta m = -2(x-1) - 2m + 0{,}05m, \tag{2.3}$$

con $m(2) = 0$.

2. Hay que resolver el siguiente problema matemático:

$$\min_{u} \mathfrak{H},$$

por lo que se tiene que verificar:

$$0 = \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial u} = 2u - 3m \Rightarrow u = \frac{3m}{2}.$$

Además, como

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial u^2} = 2 > 0,$$

se cumple la condición suficiente de mínimo para el problema matemático a resolver.

3.

$$\dot{x} - 2x = 3u, \quad con \quad x(0) = 5.$$

Sustituyendo u por el valor obtenido al aplicar la condición 2., queda:

$$\dot{x} - 2x = -\frac{9}{2}m,$$

o lo que es lo mismo:

$$m = -\frac{2}{9}\dot{x} + \frac{4}{9}x, \tag{2.4}$$

de donde:

$$\dot{m} = -\frac{2}{9}\ddot{x} + \frac{4}{9}\dot{x}.$$

Sustituyendo estas expresiones para m y $\dot{m}$ en 2.3, queda:

$$-\frac{2}{9}\ddot{x} + \frac{4}{9}\dot{x} = -2x + 2 - 1{,}95\left(-\frac{2}{9}\dot{x} + \frac{4}{9}x\right),$$

es decir:

$$\ddot{x} - 0{,}05\dot{x} - 12{,}90x = -9,$$

cuya solución es:

$$x(t) = Ae^{3{,}61t} + Be^{-3{,}56t} + 0{,}70.$$

Imponiendo la condición inicial, se obtiene:

$$5 = x(0) = A + B + 0{,}70 \Rightarrow B = 4{,}30 - A,$$

por lo que:

$$x(t) = Ae^{3{,}61t} + (4{,}30 - A)e^{-3{,}56t} + 0{,}70.$$

Sustituyendo en (2.4), se llega a que:

$$m(t) = 0{,}36Ae^{3{,}61t} + (5{,}13 - 1{,}24A)e^{-3{,}56t} + 0{,}31.$$

Imponiendo la condición final para $m(t)$, queda:

$$0 = m(2) = 0{,}36Ae^{7{,}22} + (5{,}13 - 1{,}24A)e^{-7{,}12} + 0{,}31.$$

de donde se deduce que:

$$A = -0{,}06.$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} m^*(t) &= 0{,}02e^{3{,}61t} + 5{,}20e^{-3{,}56t} + 0{,}31 \\ x^*(t) &= -0{,}06e^{3{,}61t} + 4{,}36e^{-3{,}56t} + 0{,}70 \\ u^*(t) &= 0{,}03e^{3{,}61t} + 7{,}80e^{-3{,}56t} + 0{,}47, \quad para \quad 0 \leq t \leq 2. \end{aligned}$$

Se comprueba de manera sencilla, que se verifica las condiciones suficientes de Mangasarian, por lo que la solución obtenida al aplicar el principio del máximo es mínimo global.

2.6. Horizonte temporal infinito

Veamos problemas en los que el instante final t_1 no es finito. Consideremos el siguiente problema

$$\begin{aligned} \max_u J &= \int_o^\infty F(x, u, t), \\ \text{sujeto a} &: \dot{x} = f(x, u, t) \\ \text{con} &: x(0) = x_0 \\ & \quad u(t) \in \Omega(t) \end{aligned}$$

En teoría del crecimiento económico es habitual considerar esta formulación. Ello es debido a que, en caso de suponer horizonte finito, habría que imponer una condición final para el stock de capital, y ésta en general no se conoce. Además el proceso de acumulación de capital sigue de manera natural en el tiempo, y no existe un instante

en el que termine. El estudio de problemas con horizonte temporal infinito, permite la utilización de ciertos instrumentos matemáticos que no son válidos para el caso finito. A continuación se va a desarrollar las condiciones de primer y segundo orden necesarias para resolver el problema anterior. Luego usaremos la técnica del diagrama de fase para obtener una solución cualitativa al problema con horizonte temporal infinito.

2.6.1. Condiciones de primer y segundo orden

Las condiciones del principio del máximo se siguen cumpliendo para el horizonte temporal infinito a excepción de la condición de transversalidad, la cual debe ser modificada. En el problema con horizonte temporal infinito se debe cumplir:

$$\lim_{T\to\infty} [H]_{t=T}\Delta T - \lambda(T)\Delta x_T = 0$$

Como el horizonte temporal T tiende a infinito, la diferencia ΔT es distinta de cero, por lo que necesariamente debe cumplirse

$$\lim_{t\to\infty} H = 0.$$

Si la variable de estado se encuentra libre, entonces Δx_T es distinto de cero y, por lo tanto, adicionalmente debe satisfacerse la condición:

$$\lim_{t\to\infty} \lambda(t) = 0.$$

Por el contrario, si el valor terminal de la variable de estado se encuentra determinado, en lugar de la condición anterior, basta con emplear una meta asintótica:

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = x_\infty,$$

donde x_∞ es una constante que pertenece a los números reales.

A continuación desarrollaremos un ejemplo, empleando los conceptos vistos.

Ejemplo 2.9. Halle las trayectorias $x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t)$ que resuelvan el problema

$$\begin{aligned} \text{máx}\, V &= \int_0^{\infty} e^{-3t}(-\frac{u^2}{2} + yu - \frac{y^2}{2})dt, \\ \text{sujeto a} &: \dot{x} = u \\ \text{con} &: x(0) = 1. \end{aligned}$$

La función Hamiltoniana del problema es el siguiente

$$H = e^{-3t}(-\frac{u^2}{2} + xu - \frac{x^2}{2}) + \lambda u.$$

La primera condición del principio del máximo establece que el Hamiltonianao debe ser maximizado con respecto a la variable de control. Como nos encontramos ante una función no lineal, se plantean las condiciones clásicas de optimización

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial u} &= e^{-3t}(-u + x) + \lambda \\ \frac{\partial^2 H}{\partial u^2} &= -e^{-3t}; \end{aligned}$$

simplificando la condición de primer orden obtenemos la siguiente relación:

$$\lambda = e^{-3t}(u - x). \tag{2.5}$$

Por otra parte, las ecuaciones de movimiento de las variables de estado y coestado son las siguientes:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{\partial H}{\partial \lambda} = u \\ \lambda' &= -\frac{\partial H}{\partial y} = -e^{-3t}(u - x) \end{aligned} \tag{2.6}$$

al reemplazar la Ecuación (2.5) en la ecuación de movimiento de la variable de coestado, llegamos a la siguiente ecuación diferencial

$$\lambda' + \lambda = 0$$

Cuya solución es

$$\lambda^*(t) = H_1 e^{-t} \tag{2.7}$$

donde H_1 es una constante desconocida por el momento. Para hallar la trayectoria de la variable de estado reemplazamos las ecuaciones (2.7) y (2.6) en la ecuación (2.5), con lo cual obtenemos la ecuación diferencial

$$x' - x = H_1 e^{2t}$$

que presenta la siguiente solución

$$y^*(t) = H_2 e^t + H_1 e^{2t} \tag{2.8}$$

donde H_2 constituye una nueva constante. A partir de la Ecuación (2.8) y la ecuación de movimiento (2.6), obtenemos la senda óptima de la variable de control

$$u^*(t) = H_2 e^t + 2H_1 e^{2t}.$$

Para obtener el valor de las constantes H_1 y H_2, en primer lugar, necesitamos la condición inicial $x(0) = 1$, con lo cual

$$y^*(0) = H_2 + H_1 = 1.$$

Además necesitamos contar con las condiciones de transversalidad para el caso de horizonte temporal infinito. La condición asociada al valor terminal libre es la siguiente

$$\lim_{t\to\infty} \lambda(t) = H_1 e^{-t} = 0;$$

como en esta expresión el exponente es negativo, la variable de coestado converge a cero, con lo cual la condición se satisface automáticamente independientemente del valor que tome la constante H_1. En este sentido, necesitamos la otra condición de transversalidad para hallar el valor de las constantes:

$$\lim_{t\to\infty} H = e^{-3t}(-\frac{u^2}{w} + ux - \frac{x^2}{2}) + \lambda u.$$

Simplificando el límite anterior obtenemos

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} H &= -e^{-3t}\frac{1}{2}(u-x)^2 + \lambda u \\
&= -e^{-3t}\frac{1}{2}(H_1 e^{2t})^2 + H_1 e^{-t}(H_2 e^t + 2H_1 e^{2t}) \\
&= -\frac{1}{2}H_1^2 e^t + H_1 H_2 + 2H_1^2 e^t.
\end{aligned}$$

Para qu la ant rior xpr sión ov rja a r , se debe cumplir qu $H_1 = 0$. st modo, la otra nstant tom ría l val r $H_2 = 1$ y l l i´n al pr bl ma estaría d la por las tray ctorias:

$$\begin{aligned} x^*(t) &= e^t \\ u^t &= e^t \\ \lambda^*(t) &= 0. \end{aligned}$$

Para verificar la condición d segundo orden evaluamos la matriz l d rivadas ruzada y s gundas d rivadas d la función Hamiltoniana:

$$\Delta = \begin{bmatrix} -e^{-3t} & e^{-3t} \\ e^{-3t} & -e^{-3t} \end{bmatrix}$$

Como la matriz s s mid finida negativa ($\Delta_1 < 0, \Delta_2 = 0$), l prin ipi d l n áxim y l condiciones d transv rsali lad constituy n ondi iones sufi i nt s para la m ximiza ión del funcional obj tivo.

2.6.2. Diagrama de fases

Con ci rta fr cu ncia, al studiar pr bl mas o ómi s dinámi s, al pli r l principio del máximo aparec n pud n r s lv r analíticamente. En tal caso, a veces es posible realizar un estudio u litativ d la solución óptima. El análisis por diagrama d fas s s un m´t d geométri habitualmente utilizado, para sistemas dinámi ut´nom s d dim nsi n d .

A continuación vamos a studiar l m d l n o lási de r imi nto económico, de gran inter´s n economía. Apr ve hamos st jemplo para ilustrar la utiliza ción del diagrama de fas s n mod los d ptimizaci n dinám i a, n l riz nt t mp r l infinito.

Ejemplo 2.10 (Modelo n oclási de recimi nto c on´mi o). C nsid r m s l

siguiente problema

$$\begin{aligned} \max_c W &= \int_0^\infty e^{-\delta t} U(c) dt, \\ \text{sujeto a} &: \dot{k} = f(k) - (\lambda + \mu)k - c, \\ \text{con} &: k(0) = k_0. \\ & \quad 0 \leq c \leq f(k) \end{aligned}$$

El Hamiltoniano asociado al problema será

$$H(k, c, \alpha, t) = e^{-\delta t} U(c) + \alpha[f(k) - (\lambda + \mu)k - c],$$

en donde, para cada t, $\alpha(t)$ es la variable de coestado (se ha cambiado la notación habitual de dicha variable porque, en este caso λ es una constante dada en el problema, que representa la variación relativa del factor trabajo: $L = L_0 e^\lambda$, por lo que $\lambda = \frac{\dot{L}}{L}$).

Apliquemos el principio del máximo:

1.
$$\dot{\alpha} = -\frac{\partial H}{\partial k} = -\alpha[f'(k) - (\lambda + \mu)], \text{ con } \lim_{t \to \infty} \alpha(t) = 0.$$

2.
$$\max_{0 \leq c \leq f(k)} H = e^{-\delta t} U(c) + \alpha[f(k) - (\lambda + \mu)k - c]$$

Veamos que la solución óptima a este problema se alcanza en un punto interior del conjunto factible. En efecto, en la Figura 2.2 representamos los dos sumandos de H y la propia función H, en función de c, para α y k fijados. Suponemos que $\alpha > 0$, ya que el α óptimo representa el precio sombra de una unidad de capital.

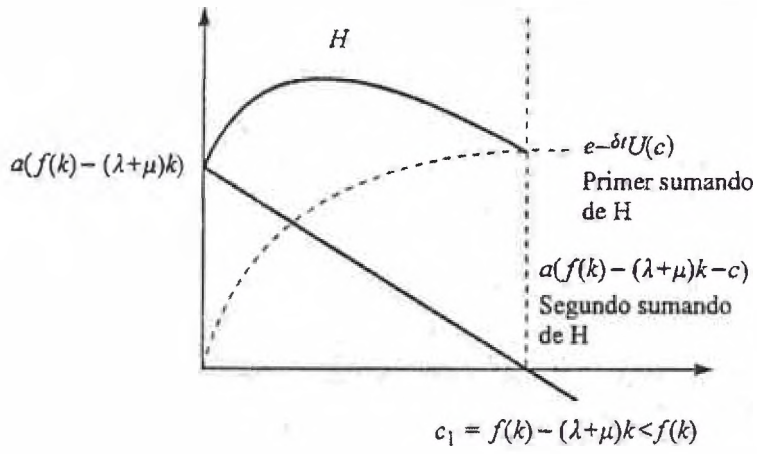

Figura 2.2: El Hamiltoniano

En el gráfico anterior se han representado los dos sumandos de H por separado y a continuación H, haciendo corresponder a cada valor de c la suma de las ordenadas correspondientes a los dos sumandos. La forma del Hamiltoniano garantiza que el problema a resolver en la condición 2) tiene solución interior, es decir, existe $c^* \in (0, f(k))$, que resuelva el problema. Por tanto se verificará que

$$\frac{\partial H}{\partial c} = 0 = e^{-\delta t}U'(c) - \alpha,$$

por lo que

$$\alpha = e^{-\delta t}U'(c) \Longleftrightarrow U'(c) = e^{\delta t}\alpha.$$

Además

$$\frac{\partial^2 H}{\partial c^2} = e^{-\delta t}U''(c) < 0,$$

por lo que se cumple la condición suficiente de máximo.

3.

$$\dot{k} = f(k) - (\lambda + \mu)k - c \text{ con } k(0) = k_0.$$

En este modelo, en el que se utiliza una forma general para las funciones f y U no es posible obtener una expresión analítica para la solución. Con vistas a efectuar un análisis cualitativo, es conveniente utilizar el Hamiltoniano "valor presente":

$$\mathfrak{H}(k, c, m, t) = U(c) + m[f(k) - (\lambda + \mu)k - c],$$

en donde

$$\mathfrak{H} = e^{\delta t} H, \; m = e^{\delta t} \alpha.$$

Las condiciones del principio del máximo referidas a $\mathfrak{H}$ son:

1.

$$\begin{aligned} \dot{m} &= -\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial k} + \delta m = -m[f'(k) - (\lambda + \mu)] + \delta m \\ &= -m[f'(k) - (\lambda + \mu + \delta)], \\ con &: \lim_{t \to \infty} e^{-\delta t} m(t) = 0 (\text{ya que } \alpha(t) = e^{-\delta t} m(t)) \end{aligned}$$

2.

$$\max_{0 \leq c \leq f(k)} \mathfrak{H}$$

Siguiendo el razonamiento hecho para H, aquí también se comprueba de manera análoga que existe $c^* \in (0, f(k))$, que resuelve el problema, por lo que se verificará que:

$$\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial c} = 0 = U'(c) - m, \text{ por lo que } m = U'(c).$$

Además se cumple que

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial c^2} = U''(c) < 0,$$

por lo que corresponde a un máximo.

3.

$$\dot{k} = f(k) - (\lambda + \mu)k - c, \text{ con } k(0) = k_0.$$

Se tienen, por tanto, dos ecuaciones diferenciales en 1) y 3), y una condición que se obtiene al maximizar $\mathfrak{H}$ en 2):

$$m = U'(c).$$

Vamos a utilizar esta condición para eliminar la variable m.

Tenemos que

$$m(t) = U'(c(t)),$$

por lo que

$$\dot{m}(t) = U''(c(t))\dot{c}(t).$$

Sustituyendo en 1), queda:

$$U''(c)\dot{c} = -U'(c)[f'(k) - (\lambda + \mu + \delta)].$$

Se tiene, por tanto, el siguiente sistema autónomo de ecuaciones diferenciales:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{k} & = & f(k) - (\lambda + \mu)k - c \\ \dot{c} & = & -\frac{U'(c)}{U''(c)}[f'(k) - (\lambda + \mu + \delta)], \end{array} \right. \qquad (\psi)$$

para el que vamos a construir el diagrama de fases. Para ello comenzamos por representar en el plano las curvas $k = 0$ y $\dot{c} = 0$. Además

$$k = 0 \iff c = f(k) - (\lambda + \mu)k,$$

$$\dot{c} \quad 0 \iff f'(k) = \lambda + \mu + \delta.$$

Las curvas $\dot{k} = 0$ y $\dot{c} = 0$ están representados en la parte inferior (B) de la Figura 2.3. Expliquemos cómo se han obtenido, utilizando el gráfico auxiliar superior (A).

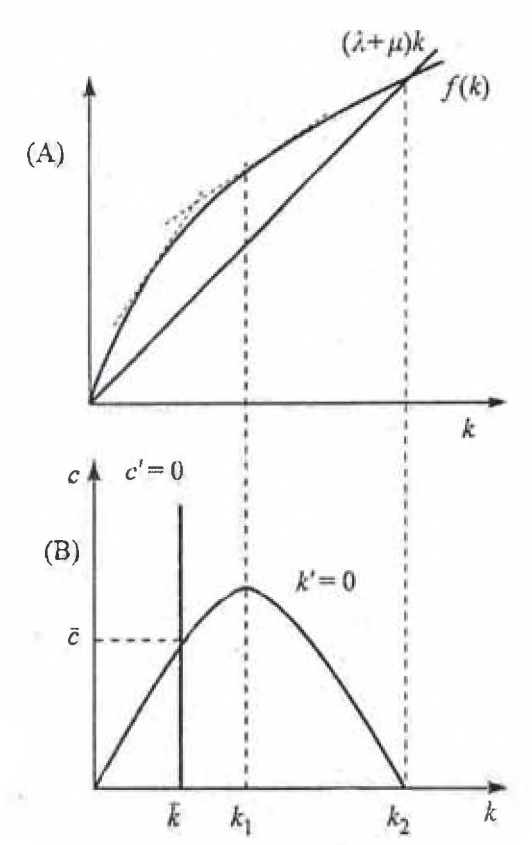

Figura 2.3: Obtención de las curvas

Como se ha visto anteriormente, la curva $k = 0$ viene determinada por la ecuación

$$c = f(k) - (\lambda + \mu)k.$$

En el gráfico (A) se representan las funciones $f(k)$ y $(\lambda + \mu)k$, por lo que, si a cada k, representado en abscisas, se le hace corresponder la diferencia entre $f(k)$ y $(\lambda + \mu)k$, se obtiene la curva $\dot{k} = 0$, en el gráfico (B). Es claro que en los puntos en que $f(k)$ y $(\lambda + \mu)k$ se cortan, $c = 0$, y que en los puntos intermedios c toma valores positivos, creciendo desde 0 hasta alcanzar el máximo valor en k_1 que se obtiene para

$$f'(k) - (\lambda + \mu)k = 0,$$

es decir, en el punto en que la tangente a $f(k)$ es paralela a la recta $c = (\lambda + \mu)k$, y decreciendo hasta valer cero en k_2.

La curva $\dot{c} = 0$ es una recta paralela al eje de coordenadas. En efecto: $\dot{c} = 0$ viene determinada por la ecuación:

$$f'(k) = \lambda + \mu + \delta.$$

Como $\delta > 0$, será:

$$f'(k) = \lambda + \mu + \delta > \lambda + \mu.$$

Como se ve en el gráfico (A), y por ser la función f estrictamente convexa, la pendiente de la tangente a $f(k)$ es estrictamente decreciente, por lo que existe un único k, comprendido entre 0 y k_1, para el cual la pendiente de la tangente a $f(k)$ es igual a $\lambda + \mu + \delta$.

El punto de corte de las curvas $\dot{c} = 0$ y $\dot{k} = 0$, es $(\bar{k}, \bar{c})$ que es el punto de equilibrio del sistema.

A partir de la primera de las ecuaciones del sistema, se obtiene, derivando con respecto a c, que:

$$\frac{d\dot{k}}{dc} = -1 < 0,$$

lo cual quiere decir que al aumentar el valor de c disminuye el valor de $\dot{k}$ y al disminuir el valor de c aumenta el valor de $\dot{k}$. Ello implica que por encima de la curva $\dot{k} = 0$ será $\dot{k} < 0$ y por debajo de la curva $\dot{k} = 0$, será $\dot{k} > 0$.

Procediendo de manera análoga con la segunda ecuación diferencial, se obtiene que:

$$\frac{d\dot{c}}{dk} = -\frac{U'(c)}{U''(c)} f''(k) < 0,$$

lo cual implica que a la derecha de la curva $\dot{c} = 0$ será $\dot{c} < 0$, y a la izquierda de la curva $\dot{c} = 0$, será $\dot{c} > 0$.

Las dos curvas $\dot{c} = 0$ y $\dot{k} = 0$ dividen el primer cuadrante (que es el que interesa) en cuatro regiones, en cada una de las cuales representamos un par de flechas que indican

el sentido de las trayectorias óptimas en el tiempo

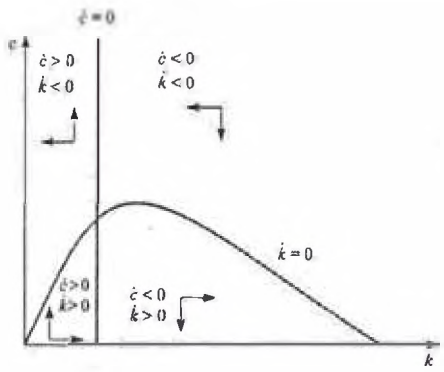

Figura 2.4: Diagrama de fases

Así, por encima de $k > 0$ y a la derecha de $\dot{c} = 0$, es decir en la región noreste, al avanzar el tiempo disminuye c (por ser $\dot{c} < 0$), de ahí la flecha $\downarrow$ y al avanzar el tiempo disminuye k (por ser $\dot{k} < 0$), de ahí la flecha $\leftarrow$. Siguiendo un razonamiento análogo para las demás regiones se obtienen los sentidos de las flechas que aparecen en la Figura 2.4.

A partir del gráfico anterior ya es muy fácil representar posibles trayectorias del sistema, como aparecen en la Figura 2.5

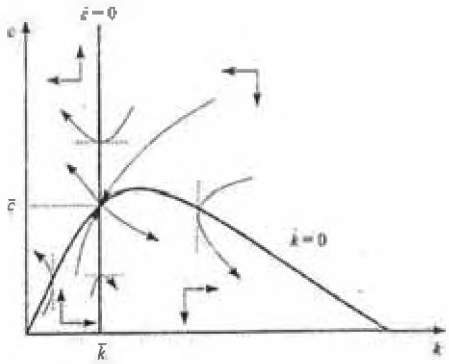

Figura 2.5: Posibles trayectorias

Como se aprecia en el gráfico, el sistema sólo tiene posibilidad de tender hacia el punto de equilibrio a través de una trayectoria a cada lado de $\bar{k}$. Hay estabilidad punto de silla. Si no tiende hacia el punto de equilibrio, la economía tenderá hacia una situación en la que el consumo es cada vez mayor, y el stock de capital es cada vez menor hasta que finalmente $k = 0$ (lo cual no tiene futuro) o bien hacia una situación en la que el stock de capital es cada vez mayor, y el consumo es cada vez menor, hasta que finalmente $c = 0$ (lo cual tampoco tiene futuro). Por lo tanto, dado k_0, hay que encontrar un c_0, único, de manera que (k_0, c_0) esté en la única trayectoria que conduce al equilibrio. Entonces el sistema de ecuaciones diferenciales formulado, con la condición inicial (k_0, c_0) conducirá el sistema hacia el punto de equilibrio y su solución será la solución óptima del problema de control planteado.

La solución óptima obtenida verifica la condición de transversalidad:

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\delta t} m^*(t) = 0,$$

ya que

$$m^*(t) = U'(c^*(t)) \text{ y } \lim_{t\to\infty} e^{-\delta t} U'(c^*(t)) = 0,$$

pues al no tender a cero $c^*(t)$, se cumple que

$$\lim_{t\to\infty} U'(c^*(t)), \quad \text{es finito y } \lim_{t\to\infty} e^{-\delta t} = 0,$$

por lo que se cumple la condición de transversalidad.

Se puede comprobar formalmente que el punto de equilibrio, $(\bar{k}, \bar{c})$ presenta estabilidad punto de silla. Para ello se aproximan las funciones que constituyen el segundo miembro del sistema de ecuaciones diferenciales, por un polinomio de grado uno, utilizando la fórmula de Taylor, alrededor del punto $(\bar{k}, \bar{c})$, por lo que el sistema se aproxima por un sistema lineal. Entonces se comprueba que la matriz de coeficientes obtenida tiene un autovalor positivo y otro negativo.

Capítulo 3

El modelo de Ramsey

A continuación hacemos un estudio breve del modelo de Ramsey, este capítulo esta basado en [1].

Una debilidad del modelo de Solow en Macroeconomía, descrita en [8] radica en que la tasa de ahorro y, en consecuencia, el ratio de consumo con respecto a la renta son exógenos y constantes. Este modelo no nos permite analizar de qué manera afectan los incentivos al comportamiento de la economía, es decir, no podemos analizar la reacción de la economía ante variaciones de los tipos de interés, los tipos impositivos u otras variables.

Para presentar el proceso de crecimiento económico de una manera más completa tenemos que permitir que el consumo, y, en consecuencia, la tasa de ahorro sean determinados por hogares y empresas optimizadores que actúan en mercados competitivos. La tasa de ahorro no es constante sino función del stock de capital per cápita k. Así pues, modificamos el modelo de Solow de dos maneras:

- Mantenemos constante el nivel medio de la tasa de ahorro, y
- determinamos si dicha tasa de ahorro aumenta o disminuye al desarrollarse la economía

Analizamos también como las tasas de ahorro dependen de los tipos de interés y la riqueza.

La tendencia de las tasas de ahorro a aumentar o disminuir con el desarrollo económico afecta a la dinámica de transición, por ejemplo, a la velocidad de convergencia hacia el estado estacionario. Aunque la tasa de ahorro aumente en el modelo de Ramsey, la propiedad de convergencia se sigue cumpliendo con las condiciones generales. Es decir, una economía tiende a crecer más deprisa en términos per cápita cuanto más lejos esté de su propio estado estacionario.

3.1. Hogares

Los hogares ofrecen trabajo a cambio de salarios, reciben ingresos en forma de intereses por sus activos, adquieren bienes para su consumo y ahorran acumulando activos. Vamos a suponer que todos los hogares son idénticos, esto es, todos tienen las mismas preferencias, el mismo salario, comienzan con la misma cantidad de activos por persona y tienen la misma tasa de crecimiento demográfico.

Cada hogar está formado por uno o más trabajadores adultos de la generación actual. Cuando hacen planes, estos adultos tienen en cuenta el bienestar y los recursos de sus futuros descendientes. La generación actual maximiza su utilidad e incorpora una restricción presupuestaria en un horizonte infinito. Es decir, aunque los individuos tienen vidas finitas, consideramos una familia ampliada con un horizonte vital infinito. La familia con horizonte infinito corresponde a un conjunto de individuos mortales que están vinculados mediante una red de transferencias intergeneracionales basadas en el altruismo.

Los adultos actuales prevén que el tamaño de la familia crecerá a la tasa n, debido a la influencia neta de la fertilidad y la mortalidad (n es una tasa exógena y constante). Si normalizamos a la unidad el número de adultos en el momento cero, el número de adultos de la familia en el momento t es

$$L(t) = e^{nt}.$$

Si $C(t)$ es el consumo total en el momento t, entonces

$$c(t) = \frac{C(t)}{L(t)}$$

es el consumo por persona adulta.

Cada hogar desea maximizar su utilidad total U que viene dada por

$$U = \int_0^\infty u[c(t)]e^{nt}e^{-\rho t}dt \tag{3.1}$$

Estamos considerando que la utilidad de un hogar en el momento 0 es la suma ponderada de todos los flujos de utilidad futuros $u(c)$. La función $u(c)$, asocia el flujo de utilidad por persona a la cantidad de consumo por persona c. Suponemos que $u(c)$ es creciente con respecto a c y cóncava, $u'(c) > 0, u''(c) < 0$. También aceptamos el supuesto de que $u(c)$ cumple las siguientes condiciones de Inada:

$$u'(c) \to \infty \text{ cuando } c \to 0$$

$$u'(c) \to 0 \text{ cuando } c \to \infty$$

La multiplicación de $u(c)$ por el tamaño de la familia $L = e^{nt}$, representa la suma de las utilidades de todos los miembros vivos de la familia en el momento t. El otro factor $e^{-\rho t}$, implica la tasa de preferencia temporal, $\rho > 0$. Suponemos que $\rho > n$, de manera que U en (3.1) tiene un límite si c es constante en el tiempo.

La Ecuación (3.1) establece que la tasa de descuento en la vida de una persona es la misma que entre generaciones.

Los hogares poseen activos en forma de derechos de propiedad sobre el capital o en forma de préstamos concedidos. Los préstamos obtenidos representan deuda. Mantenemos el supuesto de economía cerrada, que no contempla intercambio de activos con el extranjero. Dado que se supone que los dos tipos de activos, el capital y los préstamos, son sustitutivos perfectos como depósitos de valor, tiene que generar la misma tasa de rendimiento real $r(t)$. Denominamos a los activos netos del hogar por persona $a(t)$, medidos en términos reales, es decir, en unidades de bienes de consumo.

Los hogares actúan en condiciones de competencia en el sentido de que cada uno de ellos considera como dados el tipo de interés $r(t)$ y el salario pagado por cada unidad de trabajo $w(t)$. En equilibrio, el mercado de trabajo se vacía y el hogar obtiene la cantidad de empleo deseada.

La renta salarial de un adulto es igual a $w(t)$. Luego tenemos que la renta total que recibe el total de hogares es la suma de la renta salarial $w(t)L(t)$ y la renta de los activos $r(t)\cdot$(activos). Los hogares utilizan la renta que no consumen para acumular más activos

$$\frac{d(\text{Activos})}{dt} = r \cdot (\text{Activos}) + wL - C \tag{3.2}$$

Como a representa los activos per cápita tenemos

$$\dot{a} = \left(\frac{1}{L}\right) \cdot \left[\frac{d(\text{Activos})}{dt}\right] - na$$

Si dividimos la ecuación (3.2) entre L, obtenemos la restricción presupuestaria en términos per cápita

$$\dot{a} = w + ra - c - na \tag{3.3}$$

Además suponemos que el mercado de crédito restringe las sumas prestadas. La restricción adecuada es que el valor actual de los activos debe ser asintóticamente no negativo, es decir:

$$\lim_{t\to\infty} \left\{ a(t) \cdot \exp\left[-\int_0^t [r(\nu) - n] d\nu \right] \right\} \geq 0 \tag{3.4}$$

Esta restricción significa que, a largo plazo, la deuda por persona del hogar ($a(t)$ con valor negativo) no puede crecer tanto como $r(t) - n$, con lo que el nivel de la deuda tiene que crecer más despacio que $r(t)$.

El problema de optimización del hogar es maximizar U en la Ecuación (3.1), sujeta a la restricción presupuestaria de la Ecuación (3.3), el stock de activos iniciales $a(0)$ y el límite de obtención de préstamos de la ecuación (3.4).

Tenemos la función de Hamilton del valor actual

$$J = u[c(t)] \cdot e^{-(\rho-n)t} + v(t) \cdot [w(t) + [r(t) - n] \cdot a(t) - c(t)] \tag{3.5}$$

donde la expresión entre llaves es igual a $\dot{a}$ de la ecuación (3.3). La variable $v(t)$ es el valor actual del precio sombra de la renta. Representa el valor de un incremento de la renta recibido en el momento t en unidades de utilidad del momento cero. Las condiciones de primer orden de máximo de U son:

$$\frac{\partial J}{\partial c} = 0 \Longrightarrow v = u'(c)e^{-(\rho-n)t} \tag{3.6}$$

$$\dot{v} = -\partial J/\partial a \Longrightarrow \dot{v} = -(r-n)\cdot v \tag{3.7}$$

La condición de transversalidad es

$$\lim_{t\to\infty}[v(t)\cdot a(t)] = 0 \tag{3.8}$$

Derivando la ecuación (3.6) y sustituyendo v en dicha ecuación y $\dot{v}$ en la ecuación (3.7) obtenemos la condición básica de elección del consumo en el transcurso del tiempo dado por

$$r = \rho - \left(\frac{du'/dt}{u'}\right) = \rho - \left[\frac{u''(c)\cdot c}{u'(c)}\right]\cdot(\dot{c}/c) \tag{3.9}$$

donde r es la tasa de rendimiento del ahorro. El segundo término del segundo miembro puede considerarse como la tasa de rendimiento de consumo. Los agentes prefieren consumir hoy en vez de mañana por dos razones. En primer lugar, dado que los hogares descuentan la utilidad futura a la tasa ρ, esta tasa es parte de la tasa de rendimiento del consumo actual. En segundo lugar, si $\dot{c}/c > 0$, c es bajo hoy con respecto a mañana. Si los agentes optimizan su comportamiento, la ecuación (3.9) establece que igualan las dos tasas de rendimiento, y en consecuencia, son indiferentes a variaciones marginales del consumo o del ahorro.

La ecuación (3.9) establece que para encontrar un estado estacionario en el que r y $\dot{c}/c$ sean constantes, esta elasticidad tiene que ser asintóticamente constante. Supondremos como es habitual la forma funcional siguiente:

$$u(c) = \frac{c^{(1-\theta)} - 1}{(1-\theta)} \tag{3.10}$$

donde $\theta > 0$, de manera que la elasticidad de la utilidad marginal es igual a la constante $-\theta$.

La expresión de $u(c)$ de la ecuación (3.10) implica que la condición de óptimo de la ecuación (3.9) se simplifica, quedando

$$\dot{c}/c = (1/\theta)(r - \rho) \tag{3.11}$$

La condición de transversalidad de la ecuación (3.8) establece que el valor de los activos per cápita del hogar, es decir, la cantidad resultante de multiplicar $a(t)$ por el precio sombra $v(t)$, debe tender a cero cuando el tiempo tiende a infinito.

El precio sombra v evoluciona el el tiempo de acuerdo a la ecuación (3.7), integrando tenemos:

$$v(t) = v(0) \cdot \exp\Big\{ - \int_0^t [r(v) - n]dv \Big\}$$

El término $v(0)$ es igual a $u'[c(0)]$, que es positivo porque $c(0)$ es finito (Si U es finita) y $u'(c)$ se supone positiva siempre y cuando c sea finita. Si sustituimos la expresión de $v(t)$ en la ecuación (3.8), la condición de transversalidad queda como

$$\lim_{t\to\infty} \Big\{ a(t) \cdot \exp\Big[- \int_0^t [r(v) - n]dv \Big] \Big\} = 0 \tag{3.12}$$

Esta ecuación implica que los activos por persona a no crecen asintóticamente a una tasa tan elevada como $r - n$, o, lo que es lo mismo, que los activos no crecen a una tasa tan elevada como r.

El término:

$$e^{-\int_0^t r(v)dv},$$

que aparece en la ecuación (3.12), es el factor de actualización que convierte una unidad de renta en el momento t en una equivalente unidad de renta en el momento cero. De forma más general podemos considerarlo como un tipo de interés promedio entre 0 y t, definido así:

$$\overline{r}(t) = (1/t) \cdot \int_0^t r(v)dv \tag{3.13}$$

Podemos resolver la ecuación (3.3) como una ecuación diferencial lineal de primer orden en a, para obtener una restricción presupuestaria intertemporal que se cumpla

para cualquier momento $T \geq 0$:

$$a(T) \cdot e^{-[\overline{r}(T)-n]T} + \int_0^T c(t)e^{-[\overline{r}(t)-n]t}dt = a(0) + \int_0^T w(t)e^{-[\overline{r}(t)-n]t}dt$$

donde utilizamos la definición de $\overline{r}(t)$ de la ecuación (3.13). Si calculamos su límite cuando $T \to \infty$, el primer término del primer miembro de la ecuación desaparece (debido a la condición de transversalidad de la ecuación (3.12)) y la restricción presupuestaria intertemporal se transforma en:

$$\int_0^\infty c(t)e^{-[\overline{r}t-n]t}dt = a(0) + \int_0^\infty w(t)e^{-[\overline{r}t-n]t}dt = a(0) + \tilde{w}(0) \tag{3.14}$$

Así pues, el valor actual del consumo es igual a la riqueza de toda la vida, definida como la suma de los activos iniciales $a(0)$ más el valor actual de la renta del trabajo, representada por $\tilde{w}(0)$.

Si integramos la ecuación (3.11) entre 0 y t, y utilizamos la definición de $\overline{r}(t)$ de la ecuación (3.13), obtenemos que el consumos viene dado por:

$$c(t) = c(0) \cdot e^{(1/\theta)\cdot[\overline{r}(t)-\rho]t}$$

3.2. Empresas

Todas las empresas tiene acceso a la tecnología de producción, dado por la fórmula

$$Y(t) = F[K(t), L(t), T(t)]$$

donde Y es el flujo de producción, K es el factor capital (en unidades de bienes), L es el factor trabajo (en horas por persona al año) y $T(t)$ es el nivel tecnológico, que se supone crece a una tasa constante $x \geq 0$.

Si definimos "trabajo efectivo" como el producto de la cantidad de trabajo por el nivel de tecnología, $\widehat{L} \quad L \cdot T(t)$, la función de producción puede expresarse de la siguiente manera:

$$Y = F(K, \widehat{L}) \tag{3.15}$$

Si además tenemos las unidades de trabajo efectivo:

$$\widehat{y} \equiv Y/\widehat{L} \text{ y } \widehat{k} \equiv K/\widehat{L}$$

La función de producción puede entonces expresarse en su forma intensiva:

$$\widehat{y} = f(\widehat{k}) \tag{3.16}$$

donde $f(0) = 0$. Los productos marginales de los factores vienen dados por:

$$\frac{\partial Y}{\partial K} = f'(\widehat{k})$$

$$\frac{\partial Y}{\partial L} = [f(\widehat{k}) - \widehat{k} \cdot f'(\widehat{k})] \cdot e^{xt}$$

Las condiciones de Inada implican:

$$f'(\widehat{k}) \to \infty \text{ cuando } \widehat{k} \to 0$$

$$f'(\widehat{k}) \to 0 \text{ cuando } \widehat{k} \to \infty$$

Si denominamos $R(t)$ a la renta de una unidad de capital, el coste total del capital de una empresa será RK, que es un múltiplo de K.

Puesto que el stock de capital se deprecia a la tasa constante $\delta \geq 0$, la tasa neta de rendimiento de un hogar que posea una unidad de capital es $R - \delta$.

El flujo de ingresos netos o beneficio de una empresa representativa en cualquier momento del tiempo se expresa como:

$$\pi = F(K, \widehat{L}) - (r + \delta) \cdot K - wL. \tag{3.17}$$

El beneficio puede expresarse así:

$$\pi = \widehat{L} \cdot [f(\widehat{k}) - (r + \delta) \cdot \widehat{k} - we^{-xt}] \tag{3.18}$$

Una empresa competitiva, que considera r y w como dados, maximiza su beneficio para un $\widehat{L}$ dado cuando:

$$f'(\widehat{k}) = r + \delta \tag{3.19}$$

En el equilibrio de mercado, w es igual al producto marginal del trabajo correspondiente al valor de $\widehat{k}$ que cumple la ecuación (3.19):

$$[f(\widehat{k}) - \widehat{k} \cdot f'(\widehat{k})]e^{xt} = w \tag{3.20}$$

Esta condición garantiza que el beneficio es igual a cero para cualquier valor de $\widehat{L}$.

3.3. Equilibrio

Puesto que estamos en una economía cerrada, la deuda neta del conjunto de la economía es nula. Así pues, los activos por persona adulta a equivalen al capital por trabajador k.

Utilizando $a = k, \widehat{k} = ke^{-xt}$ y las expresiones de r y w de las ecuaciones (3.19) y (3.20) se obtiene:

$$\dot{\widehat{k}} = f(\widehat{k}) - \widehat{c} - (x + n + \delta) \cdot \widehat{k} \tag{3.21}$$

donde $\widehat{c} \equiv C/\widehat{L} = ce^{-xt}$ y $\widehat{k}(0)$ vienen dados. La ecuación (3.21) representa la restricción de recursos del conjunto de la economía.

La ecuación diferencial (3.21) es la relación básica que determina la evolución de $\widehat{k}$ y, en consecuencia, de $\widehat{y} = f(\widehat{k})$ en el trascurso del tiempo. Sin embargo, el elemento que falta es la determinación de $\widehat{c}$. Si conociéramos la relación que existe entre $\widehat{c}$ y $\widehat{k}$ (o $\widehat{y}$), o si tuviéramos otra ecuación diferencial que fijara la evolución de $\widehat{c}$, podríamos estudiar la dinámica completa de la economía.

Gracias a la conducta optimizadora de los hogares sabemos que c crece de acuerdo a la ecuación (3.11). Si utilizamos las condiciones $r = f'(\widehat{k}) - \delta$ y $\widehat{c} = ce^{-xt}$, obtenemos:

$$\frac{\dot{\widehat{c}}}{\widehat{c}} = \frac{\dot{c}}{c} - x = \frac{1}{\theta} \cdot [f'(\widehat{k}) - \delta - \rho - \theta x] \tag{3.22}$$

Esta ecuación y la ecuación (3.21) constituyen un sistema de dos ecuaciones diferenciales en $\widehat{c}$ y $\widehat{k}$. Este sistema, junto con la condición inicial $\widehat{k}(0)$ y la condición de transversalidad, establecen la trayectoria temporal de $\widehat{c}$ y $\widehat{k}$.

Sustituyendo en la ecuación (3.12) $a = k$ y $\widehat{k} = ke^{-xt}$, podemos expresar la condición de transversalidad en términos de $\widehat{k}$, obteniendo así

$$\lim_{t\to\infty} \left\{ \widehat{k} \cdot \exp\left(-\int_0^t [f'(\widehat{k}) - \delta - x - n] dv \right) \right\} = 0 \tag{3.23}$$

3.4. El estado estacionario

Demostramos primero que las tasas de crecimiento de estado estacionario de $\widehat{k}$ y $\widehat{c}$ tiene que ser iguales a cero.

Llamemos $(\gamma_{\widehat{k}})^*$ a la tasa de crecimiento de estado estacionario de $\widehat{k}$ y $(\gamma_{\widehat{c}})^*$ a la tasa de crecimiento de estado estacionario de $\widehat{c}$. En el estado estacionario, la ecuación (3.22) implica

$$\widehat{c} = f(\widehat{k}) - (x + n + \delta)\widehat{k} - \widehat{k} \cdot (\gamma_{\widehat{k}})^* \tag{3.24}$$

Si derivamos con respecto al tiempo esta condición obtendremos que en el estado estacionario debe cumplirse:

$$\dot{\widehat{c}} = \widehat{k} \cdot \{f'(\widehat{k}) - [x + n + \delta + (\gamma_{\widehat{k}})^*]\} \tag{3.25}$$

La expresión entre llaves es positiva a partir de la condición de transversalidad mostrada en la ecuación (3.23). En consecuencia, $(\gamma_{\widehat{k}})^*$ y $(\gamma_{\widehat{c}})^*$ son del mismo signo.

Si $(\gamma_{\widehat{k}})^* > 0, \widehat{k} \to \infty$ y $f'(\widehat{k}) \to 0$, entonces la ecuación (3.22) implica que $(\gamma_{\widehat{c}}) < 0$, una consecuencia que contradice el resultado anterior de que $(\gamma_{\widehat{k}})^*$ y $(\gamma_{\widehat{c}})^*$ son del mismo signo. Si $(\gamma_{\widehat{k}})^* < 0, \widehat{k} \to 0$ y $f'(\widehat{k}) \to \infty$, entonces la ecuación (3.22) implica que $(\gamma_{\widehat{c}})^* > 0$, una consecuencia que de nuevo contradice el resultado de que $(\gamma_{\widehat{k}})^*$ y $(\gamma_{\widehat{c}})^*$ son del mismo signo. En consecuencia, la única posibilidad que queda es que $(\gamma_{\widehat{k}})^* = (\gamma_{\widehat{c}})^* = 0$. El resultado $(\gamma_{\widehat{k}})^* = 0$ implica que $(\gamma_{\widehat{y}})^* = 0$. Por lo tanto, las variables por unidad de trabajo efectivo, $\widehat{k}, \widehat{c}$ y $\widehat{y}$, son constantes en el estado estacionario. Este comportamiento implica que las variables per cápita, k, c e y, crecen en el estado estacionario a la tasa x, y que las variables K, C e Y crecen en el estado estacionario a la tasa $x + n$.

Los valores de estado estacionario de $\widehat{c}$ y $\widehat{k}$ se determinan igualando a cero las expresiones de las ecuaciones (3.21) y (3.22). La curva de la figura 3.1 que corresponde a $\widehat{c} = f(\widehat{k}) - (x + n + \delta) \cdot \widehat{k}$ muestra pares de valores $(\widehat{k}, \widehat{c})$ que cumplen la condición $\dot{\widehat{k}} = 0$ de la ecuación (3.21). Además observamos que la curva alcanza su máximo en $f'(\widehat{k}) = \delta + x + n$, de manera que el tipo de interés, $f'(\widehat{k}) - \delta$, es igual a la tasa de crecimiento de la producción en el estado estacionario, $x + n$. Esta igualdad entre el tipo de interés y la tasa de crecimiento corresponde al nivel de $\widehat{k}$ de la regla de oro, ya que conduce a un máximo de $\widehat{c}$ en el estado estacionario. El valor de $\widehat{k}$ que corresponde a la regla de oro se denomina k_{oro}.

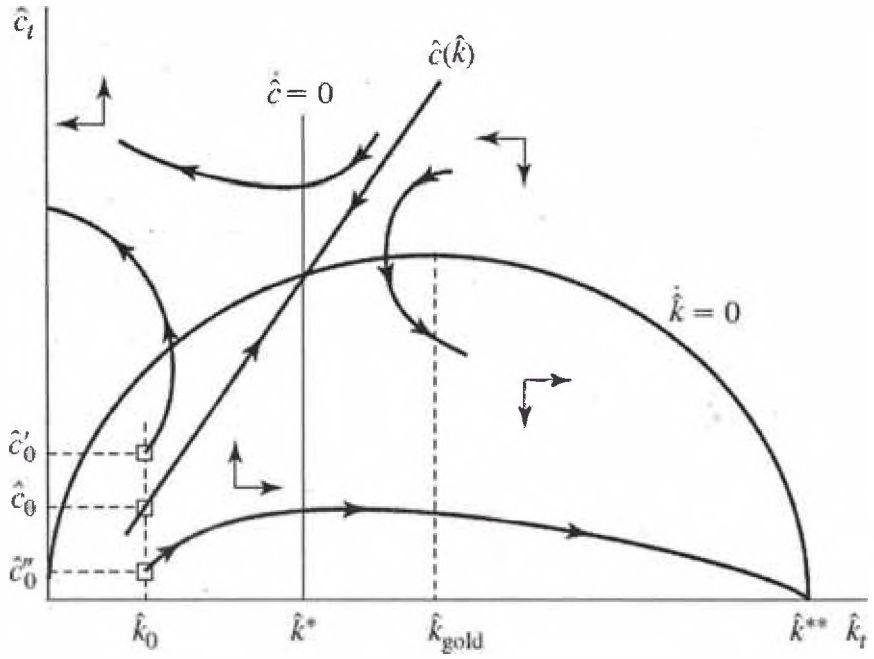

Figura 3.1: El diagrama de fase del modelo de Ramsey.

3.5. Dinámica de transición

3.5.1. El retrato de fase

El modelo de Ramsey es interesante por sus predicciones sobre el comportamiento de las tasas de crecimiento y otras variables durante la transición desde un ratio inicial entre factores $\widehat{k}(0)$ hasta un ratio de estado estacionario $\widehat{k}^*$.

Localizamos el lugar geométrico $\dot{\widehat{c}} = 0$. Luego como

$$\dot{\widehat{c}} = \widehat{c}(1/\theta)[f'(\widehat{k}) - \delta - \rho - \theta x],$$

hay dos situaciones en las que $\dot{\widehat{c}}$ puede ser igual a cero: $\widehat{c} = 0$, que corresponde al eje de abscisas de la figura 3.1, y $f'(\widehat{k}) = \delta + \rho + \theta x$, que es una recta vertical en $\widehat{k}^*$. Tenemos que $\widehat{c}$ aumenta para $\widehat{k} < \widehat{k}^*$ (las flechas apuntan hacia arriba) y disminuye para $\widehat{k} > \widehat{k}^*$ (las flechas apuntan hacia abajo).

La ecuación (3.21) implica que $\widehat{k}$ disminuye para los valores de $\widehat{c}$ situados por encima de la curva continua (con lo que las flechas apuntan hacia la izquierda en esta región) y aumenta para los valores de $\widehat{c}$ situados bajo la curva (las flechas apuntan hacia la derecha).

Como $\dot{\widehat{c}} = 0$ y $\widehat{k} = 0$ se cortan en tres ocasiones, existen tres estados estacionarios:

- En el origen $\widehat{c} = \widehat{k} = 0$,
- el correspondiente a $\widehat{k}^*$ y $\widehat{c}^*$
- cuando tenemos $\widehat{k}^{**} > 0$, pero un consumo cero.

El primero no tiene interés. El segundo estado estacionario es estable con trayectoria de punto silla, lo cual se demuestra linealizando el sistema de ecuaciones dinámicas en torno al estado estacionario y viendo que el determinante de la matriz característica es negativo, implicando que los dos autovalores tienen signos contrarios, por lo que el sistema es localmente estable con trayectoria de punto silla.

3.5.2. El tramo estable

El tramo estable representado en la figura 3.1 representa el equilibrio de $\widehat{c}$ en función de $\widehat{k}$. Esta relación se conoce en programación dinámica por el nombre de *policy function*: indica el valor óptimo de una variable de control $\widehat{c}$ con respecto a una variable dada k. Esta función es una curva de pendiente positiva que atraviesa el origen y la posición de estado estacionario. Su forma exacta depende de los parámetros del modelo. Por ejemplo si el parámetro θ es alto el tramo estable estará próximo a la curva $\widehat{k} = 0$. Pero si el valor de θ es bajo, tenemos que para valores bajos de k el tramo estable tiene poca pendiente y está próximo al eje de las abscisas. Para el ejemplo más específico de una tecnología tipo Cobb-Douglas $\widehat{y} = A\widehat{k}^{\alpha}$, el tramo estable es convexo, lineal o cóncavo dependiendo si θ es menor, igual o mayor que α. Si $\theta = \alpha$, de manera que $\widehat{c}/\widehat{k}$ es constante durante la transición, la *policy function* tiene una solución en forma cerrada, $\widehat{c}$ =constante $\cdot\widehat{k}$, donde la constante resulta ser $(\delta + \rho)/\theta - (\delta + n)$.

Capítulo 4

Aplicación del modelo de Ramsey usando el método de eliminación del tiempo

El siguiente ejemplo se hizo usando el algoritmo dado en [7], el cual esta divido en los dos siguientes subprogramas.

```
% RAMSEY.M
% Finds the policy function for the Ramsey model for k<steady state.
% c = per capita consumption
% k = per capita capital

% Initialize parameters


n = .014;  % population growth rate
d = .10;   % depreciation rate of aggregate capital
delta = n + d;   % depreciation rate of k
p = .065;        % rate of time preference
```

```
theta = 2;        % (inverse of) intertemporal elas. of substitution
a = .5;           % capital share (production per capita is k^a)
rho = p - n;      % exponent in dynastic utility function


% Calculate steady state values
ks = (a/(rho + delta))^(1/(1-a));
cs = (ks^a - delta*ks);

% Find the policy function
k0 = ks/80;
kf = ks;

%Matlab needs initial conditions, so run backwards from steady-state
%define ssd = ks - k
ssd0 = ks - k0;
ssdf = ks - kf;
global theta rho delta a ks cs
[ssd,c] = ode45('cprime',ssdf,ssd0,cs,.00001)
k = ks - ssd;

%Calculate some interesting functions of k
y = k.^a;                 % Output
s = (y - c)./y;           % saving rate
ys = ks.^a;               % steady state output
ss = (ys - cs)/ys;        % steady state saving rate
kdotis0 = y - delta*k;    % those (c,k) for which kdot = 0
gk = k.^(a - 1) - c./k - delta;  % capital growth rate
plot(k,c,k,kdotis0)              % plots policy function c(k) & kdot = 0 schedule
```

```
function cdot = cprime(ssd,c)
global theta rho delta a ks cs
%global ks rho
k = ks - ssd;
if k==ks
    cdot = -.5*(rho + sqrt(rho*rho + 4*cs*(1 - a)*a*(ks^(a - 2))/theta));
else
    cdot = c.*(rho + delta - a*(k.^(a - 1)))/(theta*((k.^a) - c - delta*k));
end
% if k== ks
```

El gráfico que nos resulta es

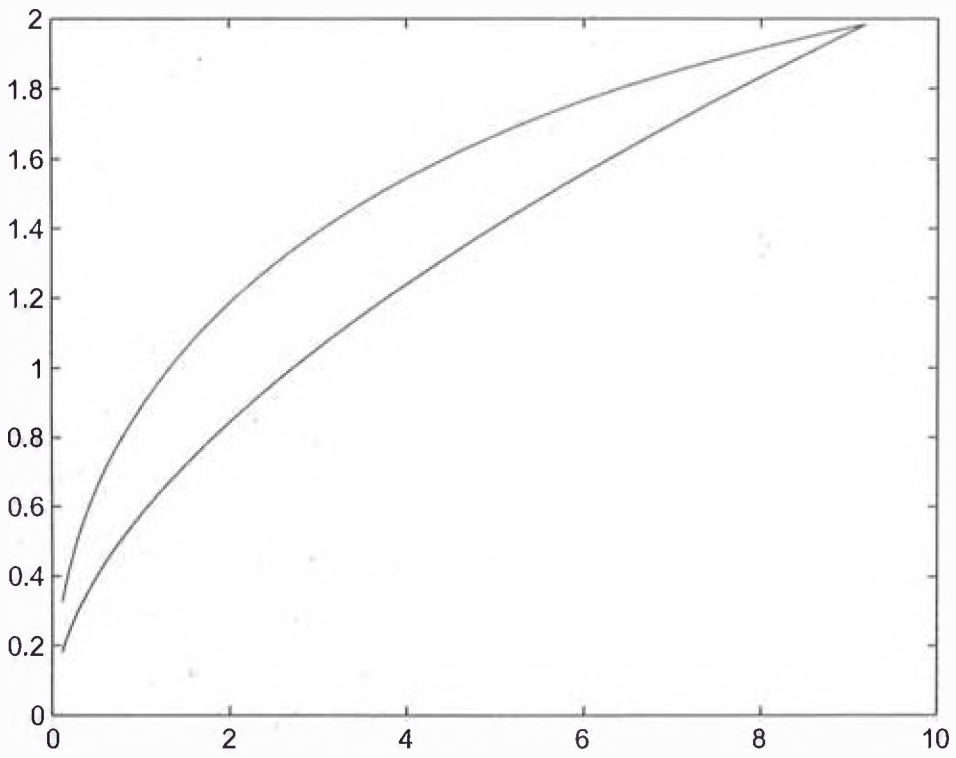

Figura 4.1: Modelo de Ramsey con los siguientes parámetros: $n = ,014$; $d = ,10$; $p = ,065$; $\theta = 2$; $a = ,5$

Conclusiones

- Para entender un modelo macroeconómico, en este caso el modelo de Ramsey, hacemos uso de sistemas dinámicos, con todo lo que ello implica, esto es debido a como los autovalores influyen en el diagrama de fase.
- Hoy en día, es básico saber sistemas dinámicos para poder conocer e interpretar los modelos que se encuentran en la macroeconomía.
- Podemos anticipar lo que ocurrirá en un momento futuro, en macroeconomía, cuando hacemos una correcta interpretación de la dinámica envuelta en dichos modelos.
- La tasa de ahorro no es constante sino función del stock de capital por cápita k.
- Modificamos el modelo de Solow-Swan del dos manera en primer lugar mantenemos constante el nivel medio de la tasa de ahorro y segundo lugar determinamos si dicha tasa de ahorro aumenta o disminuye al desarrollarse la economía.
- El nivel promedio de la tasa de ahorro es particularmente importante en la determinación del nivel de las variables en el estado estacionario. Las condiciones de optimización del modelo de Ramsey descartan el caso de exceso ineficiente de ahorro que era posible en el modelo de Solow-Swan.
- La tasa de ahorro al aumentar o disminuir con el desarrollo económico afecta a la dinámica de transición por ejemplo la velocidad de convergencia hacia el estado estacionario.

Bibliografía

[1] Barro, R., Sala-i-Martin, X., *Economic Growth.* Mc Graw-Hill. New York, 1995.

[2] Bonifaz F., José Luis y Lama C. Ruy, *Optimización Dinámica y Teoría Económica.* Centro de Investigación de la Universidad del Pacífico, 1999.

[3] Cerdá, Emilio, *Optimización Dinámica.* Pearson Educación S.A., 2001.

[4] Chiang, C. A., *Elements of Dynamic Optimization* Mc Graw Hill. New York, 1992.

[5] Chiang, C. A., y Wainwright K. *Métodos Fundamentales de Economía Matemática.* 4ta edición, Mc Graw Hill, 2006.

[6] Lynch, S., *Dynamical Systems with Aplications using Mathematica.* Birkhäuser, 2007.

[7] Mulligan, C., Sala-i-Martin, X., *A Note on the Time-Elimination Method For Solving Recursive Dynamic Economic Models.* NBER Technical Working Paper no. 116, November 1991.

[8] Socualaya Acosta, Juan Alberto; *Ecuaciones en diferencias y el modelo de Solow.* Universidad Nacional de Ingeniería, Facultad de Ciencias, 2011.