

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA



INFORME DE SUFICIENCIA
PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE:
LICENCIADO EN MATEMÁTICA

Titulado:
**El cono de Bouligand y algunas
aplicaciones**

presentado por:
Juan Aurelio Cribillero Aching

Asesor:
Prof. William Carlos Eche garay Castillo

LIMA-PERÚ

2011

El cono de Bouligand y algunas aplicaciones

Juan Aurelio Cribillero Aching

mayo–2011

Resumen

Comenzamos definiendo el cono contingente y desarrollamos sus propiedades elementales.

Luego definimos el cono tangente de Clarke y el cono adyacente y vemos algunas propiedades y bajo ellos se demuestra el cono tangente de Clarke es un cono convexo cerrado.

La principal motivación para la introducción de subconjuntos lisos (y/o conos tangentes de Clarke) es que juegan un papel importante en las condiciones de transversalidad que necesitamos para afirmar que el cono tangente para la imagen inversa (respectivamente una intersección) es igual a la imagen inversa (respectivamente la intersección) de los conos tangentes.

Índice general

1. Cono Tangente de un Subconjunto	2
1.1. Conos Contingente	2
1.1.1. Propiedades de Conos Contingentes	4
1.2. Propiedades Elementales de Conos Contingentes	5
1.3. Conos Adyacente y Tangente Clarke	6
1.3.1. Propiedades de los Conos Tangentes Adyacentes	8
1.4. Subconjuntos Suaves	9
1.5. Límites de Conos Contingentes - Caso de Dimensión Finita	10
1.6. Límites de Conos Contingentes: Caso de Dimensión Infinita	12
2. Conos Tangentes para Conjuntos Convexos	18
2.0.1. Propiedades de Conos Tangentes para Conjuntos Convexos	20
3. Cálculo de Conos Tangentes	27
3.1. Intersección e Imagen Inversa	27
3.2. Ejemplo: Conos Tangentes para subconjuntos definidos por restricciones de igualdad y desigualdad	31

3.2.1. Propiedades de Conos Contingentes para Conjuntos	
Derivables en Espacios de Dimensión Finita	33
3.3. Imagen Directa	34
Bibliografía	38

Introducción

En los años 30 Bouligand introdujo el concepto de conos tangentes que tomo fuerza en la teoría de control. El problema de la definición y uso de los conos tangentes para subconjuntos arbitrarios tiene un nuevo comienzo cuando Clarke introduce un cono tangente $C_K(x)$ para un conjunto K en $x \in K$ el cual demostró que es un cono convexo cerrado.

El precio de esta propiedad interesante sin embargo era muy alto ya que este cono tangente a menudo puede ser demasiado pequeño o incluso reducirse a cero.

Otras investigaciones tanto en la teoría de la viabilidad y la teoría de control sugiere sin embargo que por el momento al menos, el cono tangente que era la más adecuada, era a menudo el cono contingente establecido por Bouligand: esto es el límite superior del cociente diferencial $\frac{K-x}{h}$ cuando $h \rightarrow 0^+$.

Sucede sin embargo que si la aplicación multivaluada $y \rightsquigarrow T_K(y)$ es semicontinua inferior en x entonces el cono contingente en $T_K(x)$ coincide con el cono de Clarke $C_K(x)$ y por lo tanto convexo.

Capítulo 1

Cono Tangente de un Subconjunto

1.1. Conos Contingente

Definición 1.1. Sea $K \subset X$ un subconjunto de un espacio vectorial normado X y $x \in \overline{K}$. El cono contingente $T_K(x)$ se define por:

$$T_K(x) = \left\{ v / \liminf_{h \rightarrow 0^+} \frac{d_K(x + vh)}{h} = 0 \right\}$$

Veamos que cono contingente $T_K(x)$ es el límite superior de los subconjuntos $(K - x/h)$ y que $T_K(x)$ es un cono cerrado.

Denotemos por:

$$S_K(x) = \bigcup_{h>0} \frac{K - x}{h}$$

el cono expandido por $K - x$. Por lo tanto el cono contingente $T_K(x)$ está contenido en $\overline{S_K(x)}$.

Es conveniente tener la siguiente caracterización de este cono en términos de sucesiones

$$v \in T_K(x) \Leftrightarrow \exists h_n \rightarrow 0^+ \wedge \exists v_n \rightarrow v / \forall n \in \mathbb{N}, x + h_n v_n \in K$$

También observamos que: Si $x \in \text{Int}(K)$ entonces $T_K(x) = X$. Esta situación también puede ocurrir cuando no pertenece al interior de K .

Desafortunadamente el gráfico de la aplicación multivaluada

$$x \in K \mapsto T_K(x) \subset X$$

no necesariamente es cerrado, ejemplo $K = [a, b]$.

Veremos en un momento que ésta multifunción es cerrada cuando K es descrito por restricciones de igualdad y que es semicontinua inferior cuando K es convexo.

Ejemplo 1.1. Sea X un espacio normado y una aplicación continua

$$g = (g_1, g_2, \dots, g_p) : X \rightarrow \mathbb{R}^p$$

y el subconjunto $K \subset X$ definido por restricciones de desigualdad

$$K = \{x \in X / g_i(x) \geq 0, i = 1, \dots, p\}$$

Fijo $x \in K$. Denotamos por:

$$I(x) = \{i = 1, \dots, p / g_i(x) = 0\}$$

el subconjunto de restricciones activas.

Observamos que $T_K(x) = X$ siempre que $I(x) = \emptyset$, y que de lo contrario, la inclusión:

$$T_K(x) \subset \{u \in X / \forall i \in I(x), \langle g'_i(x), v_0 \rangle \geq 0\}$$

es verdadera cuando g es Fréchet diferenciable en x . Si nos plantean además, las condiciones de calificación de la restricción:

$$\exists v_0 \in X \text{ tal que } \forall i \in I(x), \langle g'_i(x), v_0 \rangle > 0$$

entonces el cono contingente:

$$T_X(x) = \{u \in X / \forall i \in I(x), \langle g'_i(x), u \rangle \geq 0\}$$

En efecto, sea u que satisface $\langle g'_i(x), u \rangle \geq 0$ para cualquier $i \in I(x)$. Para $i \notin I(x)$, la desigualdad estricta $g_i(x) > 0$ implica que para algún $\alpha > 0$ tenemos

$$\forall h \in [0, \alpha], \forall i \notin I(x), g_i(x + hu) \geq 0.$$

Consideremos primero el caso cuando $\langle g'_i(x), u \rangle > 0$ para cualquier $i \in I(x)$. Entonces

$$\forall i \in I(x), g_i(x + hu) = g_i(x + hu) - g_i(x) = \langle g'_i(x), u \rangle + h\varepsilon_i(h)$$

cuando $\varepsilon_i(h)$ converge a 0 con h . Esto implica que $g_i(x + hu) \geq 0$ para h pequeño y todo $i \in I(x)$ y por lo tanto para todo $i = 1, \dots, p$. Entonces tal elemento u pertenece al cono contingente $T_K(x)$.

Consideremos ahora el caso general. Por supuesto deduciremos que para cualquier $\beta \in [0, 1]$; $u_\beta = (1 - \beta)u + \beta v_0$ satisface la desigualdad estricta $\langle g'_i(x), u_\beta \rangle > 0$ para cualquier $i \in I(x)$ y por lo que precede pertenece también al cono contingente $T_K(x)$. Dejar que β converja a 0, se requiere que el límite u de los u_β pertenece también al cono contingente $T_K(x)$. \square

1.1.1. Propiedades de Conos Contingentes

1. Si $K \subset L$ y $x \in \overline{K}$ entonces $T_K(x) \subset T_L(x)$.

2. Si $K_i \subset X, (i = 1, \dots, n)$ y $x \in \overline{\bigcup_i K_i}$ entonces

$$T_{\bigcup_{i=1}^n K_i}(x) = \bigcup_{i \in I(x)} T_{K_i}(x)$$

3. Si $K_i \subset X_i (i = 1, \dots, n)$ y $x_i \in \overline{K_i}$, entonces

$$T_{\prod_{i=1}^n K_i}(x) = \prod_{i=1}^n T_{K_i}(x_i)$$

4. Si $g \in C'(X, Y)$, $K \subset X$, $x \in \overline{K}$ y $M \subset Y$ entonces

$$\begin{aligned} \overline{g'(x)(T_K(x))} &\subset T_{g(x)}(g(x)) \\ T_{g^{-1}(M)}(x) &\subset [g'(x)]^{-1}T_M(g(x)) \end{aligned}$$

5. Si $K_i \subset X (i = 1, \dots, n)$ y $x \in \overline{\bigcap_{i=1}^n K_i}$ entonces

$$T_{\bigcap_{i=1}^n K_i}(x) = \bigcap_{i=1}^n T_{K_i}(x)$$

1.2. Propiedades Elementales de Conos Contingentes

Proposición 1.1. Supongamos que X es un espacio de Banach suave, i.e. que la norma de X es Gâteaux diferenciable fuera del origen y denotamos por $J(x)$ su gradiente en x . Sea K un subconjunto cerrado de X . Nuestro conjunto

$$\Pi_K(y) = \{z \in K / \|z - y\| = d_K(y)\}$$

Sea $y \notin K$ tal que $\Pi_K(y)$ es no vacío. Entonces

$$\forall z \in \Pi_K(y), \forall r \in \overline{\text{co}}(T_K(z)), \langle J(y - z), v \rangle \leq 0$$

Demostración. Fijamos $v \in T_K(x) : \exists h_n > 0$ y $\exists v_n \in X, h_n \rightarrow 0 \wedge v_n \rightarrow v$ tal que $z + h_n v_n \in K \forall n \geq 0$. Desde que la función $\|\cdot\|$ es convexa y Gâteaux diferenciable fuera del origen, la siguiente desigualdad es verdadera.

Para cada $y_1 \neq 0$ y y_2 , $\langle J(y_1), y_2 - y_1 \rangle \leq \|y_2\| - \|y_1\|$ deducimos que

$$\begin{aligned} \langle J(y - z - h_n v_n), v_n \rangle &= \langle J(y - z - h_n v_n), y - z - (y - z - h_n v_n) \rangle \frac{1}{h_n} \\ &\leq \frac{\|y - z\| - \|y - z - h_n v_n\|}{h_n} \leq 0 \end{aligned}$$

Desde que $J : X \rightarrow X^*$ es continua provista con una topología débil, inferimos que $J(y - z - h_n v_n)$ converge débilmente a $J(y - z)$. Por lo tanto

$$\langle J(y - z - h_n v_n), v_n \rangle \rightarrow \langle J(y - z), v \rangle$$

porque v_n converge fuertemente a v . Luego

$$\forall v \in T_K(z); \langle J(y-z), v \rangle \leq 0$$

□

Definición 1.2. El cono tangente “Dubovitskij-Miljutin” $D_K(x)$ para K con $x \in \overline{K}$ se define:

$$v \in D_K(x) \text{ si y sólo si } \exists \varepsilon > 0 \text{ tal que } x + \langle 0; \varepsilon \rangle (v + \varepsilon B) \subset K$$

Este cono es el complemento al cono contingente.

Lema 1.1. Sea x que pertenece a la vecindad de K y \tilde{K} que denota el complemento de K . Entonces el complemento del cono contingente $T_{\tilde{K}}(x)$ para \tilde{K} es el cono Dubovitskij-Miljutin $D_K(x)$ para K en x .

Observación 1.1. El ejemplo anterior muestra que cuando:

$$K = \{x/g_j(x) \geq 0, j = 1, \dots, p\}$$

entonces el conjunto abierto $\{v/\langle g'_j(x), v \rangle > 0, j \in I(x)\}$ está contenido en $D_K(x)$.

1.3. Conos Adyacente y Tangente Clarke

Definición 1.3. Sea $K \subset X$ un subconjunto de un espacio vectorial normado X y $x \in \overline{K}$.

1. El cono intermedio o adyacente $T_K^b(x)$ se define por:

$$T_K^b(x) = \{v/\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{d_K(x + hv)}{h}\}.$$

2. El cono tangente de Clarke $C_K(x)$ se define por:

$$C_K(x) = \{v/\lim_{\substack{h \rightarrow 0^+ \\ x' \rightarrow_K x}} \frac{d_K(x' + hv)}{h} = 0\}$$

donde \rightarrow_K denota la convergencia en K .

Decimos que un subconjunto $K \subset X$ es derivable en $x \in \overline{K}$ si y sólo si $T_K^b(x) = T_K(x)$ y tangencialmente regular en x si $T_K(x) = C_K(x)$.

Vemos a la vez que estos conos tangentes son límites inferiores

$$T_K^b(x) = \liminf_{h \rightarrow 0^+} \frac{K - x}{h}$$

$$C_K(x) = \liminf_{h \rightarrow 0^+, K \in x'} \frac{K - x'}{h}$$

por lo que son conos cerrados que

$$C_K(x) \subset T_K^b(x) \subset T_K(x) \subset \overline{S_K(x)}$$

estos conos tangentes en K y la cerradura \overline{K} coinciden y que

$$\text{si } x \in \text{int}(K), \text{ entonces } C_K(x) = X.$$

Veremos más adelante que lo contrario es cierto cuando la dimensión de X es finito.

Es más conveniente utilizar la siguiente caracterización de estos conos en términos de sucesiones

$$v \in T_K^b(x) \text{ si y sólo si } \forall h \rightarrow 0^+ \exists v_n \rightarrow v \text{ tal que } \forall n, x + h_n v_n \in K$$

y

$$v \in C_K(x) \text{ si y sólo si } \forall h \rightarrow 0^+, \forall x_n \rightarrow x \exists v_n \rightarrow v \text{ tal que } \forall n, x + h_n v_n \in K$$

Ellos no necesariamente son iguales.

Vamos a destacar algo importante: El cono tangente $C_K(x)$ es siempre un cono convexo cerrado.

Proposición 1.2. El cono tangente $C_K(x)$ es un cono convexo cerrado satisfaciendo las siguientes propiedades:

$$C_K(x) + T_K(x) \subset T_K(x) \text{ y } C_K(x) + T_K^b(x)(x) \subset T_K^b(x)$$

Demostración. Sean $v_1, v_2 \in C_K(x)$. Para probar $v_1 + v_2$ pertenece a este cono, elijamos cualquier sucesión $h_n > 0, h_n \rightarrow 0$ y cualquier sucesión de elementos $x_n \in K, x_n \rightarrow x$. Existe una sucesión de elementos $v_{1_n} \rightarrow v$ tal que $x_{1_n} = x_n + h_n v_{1_n} \in K$ para todo n . Pero desde que la sucesión x_{1_n} converge a x en K , existe una sucesión de elementos $v_{2_n} \rightarrow v_2$ tal que

$$\forall n, x_{1_n} + h_n v_{2_n} = x_n + h_n (v_{1_n} + v_{2_n}) \in K$$

Esto implica que $v_1 + v_2 \in C_K(x)$ porque la sucesión de elementos $v_{1_n} + v_{2_n} \rightarrow v_1 + v_2$. \square

Desafortunadamente esta propiedad de convexidad de los conos tangente Clarke es que a menudo se puede reducirse al cono trivial $\{0\}$.

A modo de ejemplo, consideremos el subconjunto

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / |x| = |y|\}.$$

Vemos que

$$T_K(0) = T_K^b(0) = K \text{ y } C_K(0) = \{0\}$$

Pero vamos a mostrar en un momento que el cono tangente y el cono contingente coincide en los puntos x donde K es suave, i.e. donde la multifunción $x \rightsquigarrow T_K(x)$ es semicontinua inferior. Así el cono $C_K(x)$ se puede ver como una “regularización” del cono contingente de $T_K(x)$.

Las propiedades elementales de los conos adyacentes que de los conos contingentes, excepto la fórmula del cono tangente intermedio para el producto, el cual es el producto de los conos tangentes intermedios, y la fórmula para la unión.

1.3.1. Propiedades de los Conos Tangentes Adyacentes

1. Si $K \subset L$ y $x \in \bar{K}$ entonces $T_K^b(x) \subset T_L^b(x)$.

2. Si $K_i \subset X, (i = 1, \dots, n)$ y $x \in \overline{\bigcup_i K_i}$ entonces

$$T_{\bigcup_{i=1}^n K_i}^b(x) \supset \bigcup_{i \in I(x)} T_{K_i}^b(x), \text{ donde } I(x) = \{i/x \in \overline{K_i}\}$$

3. Si $K_i \subset X_i (i = 1, \dots, n)$ y $x_i \in \overline{K_i}$, entonces

$$T_{\prod_{i=1}^n K_i}^b(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n T_{K_i}^b(x_i)$$

4. Si $g \in C'(X, Y), K \subset X, x \in \overline{K}$ y $M \subset Y$ entonces

$$\begin{aligned} \overline{g'(x)(T_K^b(x))} &\subset T_{g(K)}^b(g(x)) \\ T_{g^{-1}(M)}^b(x) &\subset [g'(x)]^{-1} T_M^b(g(x)) \end{aligned}$$

5. Si $K_i \subset X (i = 1, \dots, n)$ y $x \in \bigcap_{i=1}^n K_i$ entonces

$$T_{\bigcap_{i=1}^n K_i}^b(x) \subset \bigcap_{i=1}^n T_{K_i}^b(x)$$

1.4. Subconjuntos Suaves

Definición 1.4. Se dice que un subconjunto cerrado K es suave en $x_0 \in K$ si el cono multivaluado

$$K \ni x \rightsquigarrow T_K(x)$$

es semicontinua inferior en x_0 y que es suave si es suave en cada punto de K

Teorema 1.1 (Conos Tangentes para Subconjuntos Suaves). Sea K un subconjunto cerrado de un espacio de Banach. Si K es suave en $x \in K$, entonces los conos tangentes de Clarke y contingentes para K en x coinciden y consecuentemente son convexos.

Teorema 1.2. Sea K un subconjunto cerrado no vacío de un espacio de Banach X y $x_0 \in K$. Entonces

$$\liminf_{x \rightarrow_K x_0} T_K(x) \subset C_K(x_0)$$

porque si K es suave en x_0 entonces

$$T_K(x_0) \subset \liminf_{x \rightarrow_K x_0} T_K(x) \subset C_K(x_0) \subset T_K(x_0)$$

Después probaremos en toda su generalidad, vamos a probar las versiones más fuertes en el caso de dimensión finita en espacios vectoriales y a continuación en el caso de espacios de Hilbert y más generalmente en el caso de los espacios de Banach X uniformemente suaves tal que la norma de su dual X^* es Fréchet diferenciable fuera de cero.

1.5. Límites de Conos Contingentes - Caso de Dimensión Finita

Teorema 1.3. Sea X un espacio vectorial de dimensión finita y K un subconjunto cerrado de X . Entonces para cada $x \in K$

$$\liminf_{y \rightarrow_K x} T_K(y) = \liminf_{y \rightarrow_K x} \overline{\text{co}}(T_K(y)) = C_K(x)$$

Consecuentemente, K es suave en x si y sólo si es tangencialmente regular en x .

Demostración.

1° Tomemos $v \neq 0$ en el límite inferior de la envolvente convexa cerrada de los conos contingentes $T_K(z)$ cuando z converge a $x \in K$; esto significa que para cualquier $\varepsilon > 0$, $\exists \eta > 0$ tal que

$$\forall z \in B(x; \eta) \cap K, B(v, \varepsilon) \cap \overline{\text{co}}T_K(z) \neq \emptyset$$

Para demostrar que $v \in C_K(x)$, tomamos cualquier $y \in B(x, \frac{\eta}{4}) \cap K$, $t \leq \frac{\eta}{4\|v\|}$, $z \in \Pi_K(y + tv)$ e introducimos la función g definido por $g(t) = d_K(y + tv)$, que al ser Lipschitziana es casi en todas partes diferenciable.

Sea $t \in [0, \frac{\eta}{4\|v\|}]$ cualquier punto donde g es diferenciable.

Afirmamos que $g'(t) \leq \varepsilon$ siempre que $g(t) > 0$, i.e. siempre que $y + tv \notin K$.

Sea $h > 0$ lo suficientemente pequeño. Desde que:

$$d_K(y + (t + h)v) - d_K(y + tv) \leq \|y - z + hv\| - \|y - z\|$$

y puesto que la norma euclidea es convexa y diferenciable en 0, deducimos que:

$$\begin{aligned} g(t + h) - g(t) &\leq \|y - z + hv\| - \|y - z\| \leq h \left\langle \frac{y - z + hv}{\|y - z + hv\|}; v \right\rangle \\ &\leq h \left\langle \frac{y - z + hv}{\|y - z + hv\|} - \frac{y - z}{\|y - z\|}; v \right\rangle + h \left\langle \frac{y - z}{\|y - z\|}; v \right\rangle \end{aligned}$$

Comprobamos luego que $z \in B(x, \eta) \cap K$ porque

$$\|z - x\| \leq \|z - y - tv\| + \|y - x + tv\| \leq 2\|y - x + tv\| \leq \eta$$

cada vez que $y \in B(x; \frac{\eta}{4})$ y $t \leq \frac{\eta}{4\|v\|}$. Por lo tanto existe $w \in \overline{\text{co}}(T_K(z))$ tal que $\|v - w\| \leq \varepsilon$ de manera que por Proposición 1.1

$$\begin{aligned} \frac{g(t + h) - g(t)}{h} &\leq \left\langle \frac{y - z}{\|y - z\|}, w \right\rangle + \|v - w\| + \left\langle \frac{y - z + hv}{\|y - z + hv\|} - \frac{y - z}{\|y - z\|}, v \right\rangle \\ &\leq \varepsilon + \left\langle \frac{y - z + hv}{\|y - z + hv\|} - \frac{y - z}{\|y - z\|}; v \right\rangle \end{aligned}$$

tomando el límite cuando $h \rightarrow 0^+$ deducimos que $g'(t) \leq \varepsilon$ siempre que $g(t) > 0$. Lo cual prueba la afirmación.

Probaremos a continuación que $g(t) \leq \varepsilon t$. Esto es obviamente verdadero cuando $g(t) = 0$. Supongamos que $g(t) > 0$

Sea $t_0 = \sup\{\tau \in [0, t] / g(\tau) = 0\}$.

Desde que g es continua, $g(t_0) = 0$, así que podemos escribir

$$g(t) = \int_{t_0}^t g'(\tau) d(\tau) \leq \varepsilon(t - t_0) \leq \varepsilon t$$

porque $g'(\tau) \leq \varepsilon$ para cualquier $\tau \in]t_0, t]$. Esto muestra que $v \in C_K(x)$.

2° Vamos a probar que $C_K(x) \subset \liminf_{y \rightarrow_K x} T_K(y)$.

En efecto, sea $v \in C_K(x)$ y sea $x_n \in K, x_n \rightarrow x$ entonces, $\forall \varepsilon > 0 \exists N$ y $\beta > 0$ tal que $0 < h \leq \beta, n \geq N$

$$d_K(x_n + hv) \leq h\varepsilon$$

vamos a asociar a tales x_n elementos $y_n^h \in K$ satisfaciendo:

$$\|y_n^h - x_n - hv\| \leq h\varepsilon$$

Fijamos $v_n^h = (y_n^h - x_n)/h$; desde que $\|v_n^h - v\| < \varepsilon$ y desde que la dimensión del espacio X es finita, existe un punto de clausura $v_n \in v + \varepsilon B$ de la sucesión $(v_n^h)_{h>0}$. Tal v_n pertenece al cono contingente $T_K(x_n)$. Por lo tanto v es el límite de los elementos v_n .

□

1.6. Límites de Conos Contingentes: Caso de Dimensión Infinita

La prueba de la primera parte del teorema anterior puede fácilmente extenderse al caso de espacios de Hilbert cuando K es débilmente cerrado. Esto es una afirmación fuerte; ya que tenemos que utilizar tales resultados para subconjuntos cerrados. Podemos superar esta dificultad y extender el teorema anterior para espacios de Banach uniformemente suave mediante el siguiente teorema de Edelstein, que establece que en los espacios de Hilbert y algunos espacios de Banach, podemos aproximar cualquier punto por otro que tiene una proyección única de mejor aproximación en un subconjunto cerrado K .

Teorema 1.4. Supongamos que X es reflexivo y que la norma de X y X^* son Fréchet diferenciable fuera del origen. Sea K un subconjunto cerrado de X . Entonces existe un subconjunto denso D de X de puntos con una única proyección en K .

En espacios de dimensión infinita, tenemos que reemplazar el cono contingente $T_K(x)$ por el cono contingente débil $T_K^o(x)$ definido por:

$v \in T_K^\sigma(x) \Leftrightarrow v$ es un punto de clausura débil de $\frac{y_h - x}{h}$ cuando $h \rightarrow 0^+$, $y_h \in K$.

Proposición 1.3. Supongamos que la norma del espacio de Banach X es Fréchet diferenciable fuera del origen y denotamos por $J(x)$ su gradiente en x . Sea K un subconjunto cerrado de X e $y \notin K$ tal que $\Pi_K(y)$ es no vacío. Entonces

$$\forall z \in \Pi_K(y), \forall v \in \overline{\text{co}}(T_K^\sigma(z)), \langle J(y - z), v \rangle \leq 0$$

Demostración. Desde que la norma es Fréchet diferenciable en $y - z \neq 0$ sabemos que para cualquier $\varepsilon > 0$, existe $\eta > 0$ tal que siempre $\|w\| \leq \eta$

$$\left| \|y - z + w\| - \|y - z\| - \langle J(y - z), w \rangle \right| \leq \varepsilon \|w\|$$

Sea $v \in T_K^\sigma(z)$, entonces existe una sucesión $h_n > 0$ convergiendo a 0 y $v_n \in X$ convergiendo débilmente a v tal que $z + h_n v_n \in K, \forall n \geq 0$ de manera que

$$\|y - z\| \leq \|y - z - h_n v_n\|$$

Para n suficientemente grande la norma de $w = h_n v_n$ es menor que o igual a η desde que v_n es acotada por una constante c y h_n converge a 0. La desigualdad anterior implica

$$\begin{aligned} \langle J(y - z), v_n \rangle &\leq \frac{\|y - z - h_n v_n\| - \|y - z\| + h_n \langle J(y - z), v_n \rangle}{h_n} \\ &\leq \varepsilon \|v_n\| \leq \varepsilon c \end{aligned}$$

y por lo tanto dejando que v_n converge débilmente a v , se tiene que $\langle J(y - z), v \rangle \leq \varepsilon c$ para cualquier $\varepsilon > 0$. Por lo tanto $\langle J(y - z), v \rangle \leq 0$ para cada $v \in T_K^\sigma(z)$, y por lo tanto, para cualquier v en su casco convexo cerrado. \square

Teorema 1.5. Supongamos que X es uniformemente suave y que la norma de X^* es Fréchet diferenciable fuera del origen. Sea K un subconjunto cerrado de X . Entonces

$$\liminf_{y \rightarrow_K x} T_K^\sigma(x) = \liminf_{y \rightarrow_K x} \overline{\text{co}}(T_K^\sigma(y)) = C_K(x)$$

Demostración. La prueba es similar a la parte (1) del teorema anterior.

1. Para probar la primera inclusión, tomemos $v \neq 0$ en el límite inferior del casco convexo cerrado del cono contingente débil $T_K^\sigma(z)$ cuando $z \in K$ converge a $x \in K$. Esto significa que para cualquier $\varepsilon > 0$, existe $\eta > 0$ tal que:

$$\forall z \in B(x; \eta) \cap K, B(v, \varepsilon) \cap \overline{\text{co}}(T_K(z)) \neq \emptyset$$

tenemos que probar que v pertenece a $C_K(x)$. Para tal efecto, tomemos $y \in B(x, \frac{\eta}{6}) \cap K, t \leq \eta \leq \frac{6}{\|v\|}$ e introducimos la función:

$$g(t) = d_K(y + tv)$$

que al ser Lipschitz, es casi en todas partes diferenciable. Sea $t \in [0, \frac{\eta}{6\|v\|}]$ cualquier punto donde g es diferenciable. Afirmamos que $g'(t) \leq \varepsilon$ siempre que $g(t) > 0$.

Sea $h > 0$ suficientemente pequeño. Por Teorema de Edelstein podemos asociar con cualquier $h > 0$ un elemento $y_h \in B(y + tv, h^2)$ el cual tiene una única proyección $z_h \in K$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} d_K(y + (t+h)v) - d_K(y + tv) &\leq d_K(y_h + hv) - d_K(y_h) + 2h^2 \\ &\leq \|y_h - z_h + hv\| - \|y_h - z_h\| + 2h^2 \end{aligned}$$

Sea $J : X \rightarrow B_*$ el gradiente de la norma de X . Desde que X es uniformemente suave, inferimos que existe $\varepsilon(h)$ convergiendo a 0 con h tal que

$$\|y_h - z_h + hv\| - \|y_h - z_h\| \leq h \langle J(y_h - z_h), v \rangle + h\varepsilon(h)$$

Finalmente, comprobamos que $z_h \in B(x, \eta)$ porque

$$\begin{aligned} \|z_h - x\| &\leq \|z_h - y_h\| + \|y_h - y - tv\| + \|y - x + tv\| \\ &\leq d_K(y + tv) + 2h^2 + \|y - x + tv\| \\ &\leq 2(\|y - x + tv\| + h^2) \leq \eta \end{aligned}$$

siempre que $h \leq \sqrt{\frac{\eta}{6}}, y \in B(x, \frac{\eta}{6})$ y $t \leq \frac{\eta}{6\|v\|}$.

Por lo tanto existe $v_h \in \overline{\text{co}}(T_K^\sigma(z_h))$ tal que $\|v - v_h\| \leq \varepsilon$, de manera que, por la proposición anterior:

$$\begin{aligned} g(t+h) - g(t) &= d_K(y + tv + hv) - d_K(y + tv) \\ &\leq h\langle J(y_h - z_h), v_h \rangle + h(\|v - v_h\| + \varepsilon(h) + 2h) \\ &\leq h(\varepsilon + \varepsilon(h) + 2h) \end{aligned}$$

de manera que $g'(t) \leq \varepsilon$ siempre que $g(t) > 0$. Esto nos da $g'(t) \leq \varepsilon t$ de la misma manera como en la prueba del teorema anterior y muestra que $v \in C_K(x)$.

□

La segunda inclusión es una consecuencia del siguiente lema.

Lema 1.2. Sea X un espacio reflexivo de Banach, $K \subset X$ un subconjunto cerrado y $x_0 \in K$. Entonces

$$C_K(x_0) \subset \liminf_{x \rightarrow_K x_0} T_K^\sigma(x)$$

Demostración. Sea $v \in C_K(x_0)$ y una sucesión de elementos $x_n \in K$ convergiendo a x_0 . Sea $\varepsilon > 0$ fijo y sea N y $\beta > 0$ tal que para todo $0 < h \leq \beta, n \geq N$

$$d_K(x_n + hv) \leq h\varepsilon$$

Vamos a asociar tales x_n elementos $y_n^h \in K$ satisfaciendo

$$\|y_n^h - x_n - hv\| \leq 2h\varepsilon$$

Tomamos $v_n^h = \frac{y_n^h - x_n}{h}$. Desde $\|v_n^h - v\| \leq 2\varepsilon$ y desde que el espacio es reflexivo, existe un punto débil de clausura $v_n \in v + 2\varepsilon B$ de la sucesión $(v_n^h)_{h>0}$. Tal v_n pertenece al cono contingente $T_K^\sigma(x_n)$. Por lo tanto v es el límite (fuerte) de los elementos v_n . □

Prueba del Teorema 1.2

Desde que el límite de los conos contingentes $T_K(x)$ cuando $x \in K$ converge a x_0 en K es un cono, es suficiente probar que cualquier $v \in \liminf_{x \rightarrow_K x_0} T_K(x)$ con norma igual a 1

pertenece a $C_K(x_0)$.

Fijamos tal v . Entonces para cualquier $\varepsilon > 0, \exists N \geq 1$ tal que

$$\forall n \geq N, \forall z \in B_K(x_0, \frac{1}{n}), B(v, \frac{\varepsilon}{2}) \cap T_K(z) \neq \emptyset \quad (1.1)$$

Supongamos por un momento que $v \notin C_K(x_0)$. Esto significa que $\exists \varepsilon \in (0, \frac{1}{4})$ y sucesiones $x_n \in B_K(x_0, \frac{1}{2n}), h_n \in (0, \frac{1}{4n})$ con

$$(x_n + h_n B(v, \varepsilon)) \cap K = \emptyset \quad (1.2)$$

Fijamos N tal que (1.1) sea verdad, $n \geq N$ y sea $\delta = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$.

Usamos el Principio Variacional de Ekeland con el subconjunto cerrado

$$Q = K \cap (x_n + [0, h_n]B(v, \varepsilon)) \ni x_n$$

y la función continua V definida sobre Q por $V(x) = -\|x - x_n\|$ lo cual es acotada por debajo de Q . Existe entonces una solución $z \in Q$ para el problema δ -minimización:

$$\forall x \in Q, \|x - x_n\| \leq \|z - x_n\| + \delta \|z - x\| \quad (1.3)$$

Vamos a mostrar un elemento $x \in Q$ el cual está conectado en la desigualdad anterior produce una contradicción.

Para tal propósito, observamos que z se puede escribir

$$z = x_n + (1 - \alpha)h_n w_n$$

con $\alpha \in [0, 1]$ y $\|w_n - v\| \leq \varepsilon$. Primero inferimos de (1.2) que $\alpha \neq 0$.

Comprobamos que el próximo

$$z + [0, \alpha h_n]B(v, \varepsilon) \subset x_n + [0, h_n]B(v, \varepsilon) \quad (1.4)$$

En efecto, el subconjunto $x_n + [0, h_n]B(v, \varepsilon)$ es convexo

$$z + [0, \alpha h_n]B(v, \varepsilon) = (1 - \alpha)(x_n + h_n w_n) + \alpha(x_n + [0, h_n]B(v, \varepsilon)) \subset x_n + [0, h_n]B(v, \varepsilon)$$

Finalmente $z \in B_K(x_0, \frac{1}{h})$. En efecto,

$$\|z - x_n\| \leq (1 - \alpha)h(\|v\| + \varepsilon)$$

y por lo tanto, la norma es igual a 1

$$\|z - x_0\| \leq \|z - x_n\| + \|x_n - x_0\| \leq h_n(1 + \varepsilon) + \frac{1}{2n} < \frac{1}{n}$$

La propiedad (1.1) implica la existencia de $u \in T_K(z) \cap B(v, \frac{\varepsilon}{2})$; por lo tanto existe sucesiones u_p convergiendo a u y $k_p > 0$ convergiendo a 0 tal que $z + k_p u_p \in K$. Por (1.4) también pertenece a $x_n + [0, h_n]B(v, \varepsilon)$ para suficientemente grande. Por lo tanto existe p tal que $z + k_p u_p \in Q$ y $u_p \in B(v, \varepsilon)$. Tomando $x = z + k_p u_p$ en (1.3) tenemos

$$\begin{cases} ((1 - \alpha)h_n + k_p)\|w_n\| - k_p\|u_p - w_n\| \leq \|((1 - \alpha)h_n + k_p)w_n + k_p(u_p - w_n)\| \\ = \|(1 - \alpha)h_n w_n + k_p u_p\| = \|x - x_n\| \leq (1 - \alpha)h_n\|w_n\| + \delta k_p\|u_p\| \end{cases}$$

y así, usando el hecho que $\|u_p - w_n\| \leq 2\varepsilon$

$$k_p\|w_n\| \leq \delta k_p\|u_p\| + k_p\|u_p - w_n\| \leq k_p(\delta(1 + \varepsilon) + 2\varepsilon)$$

Dividiendo por $k_p > 0$, obtenemos

$$1 - \varepsilon \leq \|w_n\| \leq \delta(1 + \varepsilon) + 2\varepsilon \leq 3\varepsilon$$

Por lo tanto $\varepsilon \geq \frac{1}{4}$ lo cual contradice la elección de ε . □

Capítulo 2

Conos Tangentes para Conjuntos Convexos

Para subconjuntos convexos K , la situación es dramáticamente simplificada por el hecho que el cono tangente de Clarke y el cono contingente coinciden con el cono cerrado extendido por $K - x$.

Proposición 2.1. Supongamos que K es convexo. Entonces el cono contingente $T_K(x)$ para K en x es convexo y

$$C_K(x) = T_K^b(x) = T_K(x) = \overline{S_K(x)}$$

Denotaremos por $T_K(x)$ el valor común de estos conos y llamamos a esto el cono tangente para el subconjunto convexo K en x .

Demostración. Comenzamos enunciando las siguientes consecuencias de convexidad:

$$\forall v \in S_K(x), \exists h > 0, \text{ tal que } \forall t \in [0, h], x + tv \in K$$

ya que podemos escribir para cualquier $t \in [0, h]$

$$x + tv = \left(1 - \frac{t}{h}\right)x + \frac{t}{h}(x + hv)$$

es una combinación convexa de elementos de K . Esto es suficiente para probar que $S_K(x) \subset C_K(x)$. Sea $v = \frac{y-x}{h} \in S_K(x)$ (donde $y \in K$ y $h > 0$) y consideremos una

sucesión de elementos $h_n > 0$ y $x_n \in K$ convergiendo a 0 y x respectivamente. Vemos que $v_n = \frac{y-x_n}{h}$ converge a v y que:

$$x_n + h_n v_n = \left(1 + \frac{h_n}{h}\right) x_n + \frac{h_n}{h} y \in K$$

ya que es una combinación de elementos de K . □

El cono polar negativo del cono tangente $T_K(x)$ para un subconjunto convexo, es llamado el cono normal para K en x y se denota por

$$N_K(x) := T_K(x)^- = S(x)^-$$

Esto puede ser fácilmente caracterizado por

$$N_K(x) = \{p \in X^* / \max_{y \in K} \langle p, y \rangle = \langle p, x \rangle\}$$

Observamos que:

i) $N_K(x) \subset b(K)$

ii) el “cono asintótico” $b(K)^- \subset T_K(x)$

Teorema 2.1. Cualquier subconjunto convexo cerrado de un espacio de Banach es suave

Demostración. Sea K un subconjunto cerrado de un espacio de Banach X . Comenzamos probando que el gráfico de la aplicación multivaluada

$$K \ni x \rightsquigarrow N_K(x)$$

es cerrado en $X \times X^*$, cuando X es provisto con la norma topológica y X^* con la topología débil-*.

Consideramos sucesiones de elementos $x_n \in K$ convergiendo a x y $p_n \in N_K(x_n)$ convergiendo débilmente a p . Entonces las desigualdades

$$\forall y \in K, \langle p_n, y \rangle \leq \langle p_n, x_n \rangle$$

al pasar a las desigualdades al límite

$$\forall y \in K, \langle p, y \rangle \leq \langle p, x \rangle$$

lo cual establece que $p \in N_K(x)$. Por lo tanto el gráfico es cerrado, así que la aplicación multivaluada $T_K(\cdot)$ es semicontinua inferior. \square

Proposición 2.2 (Interior de un Cono Tangente). Supongamos que el interior de un subconjunto convexo $K \subset X$ es no vacío. Entonces

$$\forall x \in K, \text{Int}(T_K(x)) = \bigcup_{h>0} \left(\frac{\text{Int}(K) - x}{h} \right)$$

Por otra parte, el gráfico de la aplicación multivaluada

$$K \ni x \rightsquigarrow \text{Int}(T_K(x))$$

es abierto.

2.0.1. Propiedades de Conos Tangentes para Conjuntos Convexos

Supongamos que K, K_i, L, M, \dots son subconjuntos convexos, los espacios X, Y son espacios de Banach y $\mathcal{L}(X, Y)$ denota el espacio de operadores lineales continuos.

1. Si $x \in K \subset L \subset X$ entonces $T_K(x) \subset T_L(x)$ y $N_L(x) \subset N_K(x)$.
2. Si $x_i \in K_i \subset X_i, (i = 1, \dots, n)$ entonces

$$\begin{aligned} T_{\prod_{i=1}^n K_i}(x_1, \dots, x_n) &= \prod_{i=1}^n T_{K_i}(x_i) \\ N_{\prod_{i=1}^n K_i}(x_1, \dots, x_n) &= \prod_{i=1}^n N_{K_i}(x_i) \end{aligned}$$

3. a) Si $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ y $x \in K \subset X$ entonces

$$T_{A(K)}(Ax) = \overline{A(T_K(x))} \wedge N_{A(K)}(Ax) = A^{*-1}N_K(x)$$

b) Si $K_1, K_2 \subset X, x_i \in K_i, i = 1, 2$, entonces

$$\begin{aligned} T_{K_1+K_2}(x_1+x_2) &= \overline{T_{K_1}(x_1) + T_{K_2}(x_2)} \\ N_{K_1+K_2}(x_1+x_2) &= N_{K_1}(x_1) \cap N_{K_2}(x_2) \end{aligned}$$

en particular, si $x_1 \in K$ y x_2 pertenece a un subespacio P de X entonces

$$\begin{aligned} T_{K+P}(x_1+x_2) &= \overline{T_{K_1}(x_1) + P} \\ N_{K+P}(x_1+x_2) &= N_K(x_1) \cap P^\perp \end{aligned}$$

4. Si $L \subset X, M \subset Y$ son subconjuntos convexos cerrados y $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ satisface la condición de calificación de la restricción $0 \in \text{Int}(M - A(L))$, entonces para cada $x \in L \cap A^{-1}(M)$

$$\begin{aligned} T_{L \cap A^{-1}(M)} &= T_L(x) \cap A^{-1}T_M(Ax) \\ N_{L \cap A^{-1}(M)} &= N_L(x) + A^*N_M(Ax) \end{aligned}$$

a) Si $M \subset Y$ es convexo cerrado y si $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ satisface $0 \in \text{Int}(\text{Im}(A) - M)$, entonces para $x \in A^{-1}(M)$

$$\begin{aligned} T_{A^{-1}(M)}(x) &= A^{-1}T_M(Ax) \\ N_{A^{-1}(M)}(x) &= A^*N_M(Ax) \end{aligned}$$

b) Si $K_1, K_2 \subset X$ son convexos cerrados y satisface $0 \in \text{Int}(K_1 - K_2)$ entonces para cualquier $x \in K_1 \cap K_2$

$$\begin{aligned} T_{K_1 \cap K_2}(x) &= T_{K_1}(x) \cap T_{K_2}(x) \\ N_{K_1 \cap K_2}(x) &= N_{K_1}(x) + N_{K_2}(x) \end{aligned}$$

c) Si $K_i \subset X, (i = 1, \dots, n)$, son cerrados y convexos, $x \in \bigcap_{i=1}^n K_i$ y si existe

$\gamma > 0$ satisfaciendo $\forall x_i$ tal que $\|x_i\| \leq \gamma, \bigcap_{i=1}^n (K_i - x_i) \neq \emptyset$ entonces

$$\begin{aligned} T_{\bigcap_{i=1}^n K_i}(x) &= \bigcap_{i=1}^n T_{K_i}(x) \\ N_{\bigcap_{i=1}^n K_i}(x) &= \sum_{i=1}^n N_{K_i}(x) \end{aligned}$$

Observación 2.1. La propiedad: $T_{K_1}(x) \cap T_{K_2}(x)$ es falso cuando asumimos $0 \in \text{Int}(K_1 - K_2)$ no es satisfecha. Tomamos por ejemplo dos bolas K_1 y K_2 tangentes en un punto x . El cono tangente para la intersección $\{x\}$ es reducido a $\{0\}$, mientras que la intersección de los conos tangentes es un hiperplano. Esto muestra que no podemos prescindir de las condiciones de restricción de calificación en el cálculo de conos tangentes para imágenes inversa e intersecciones

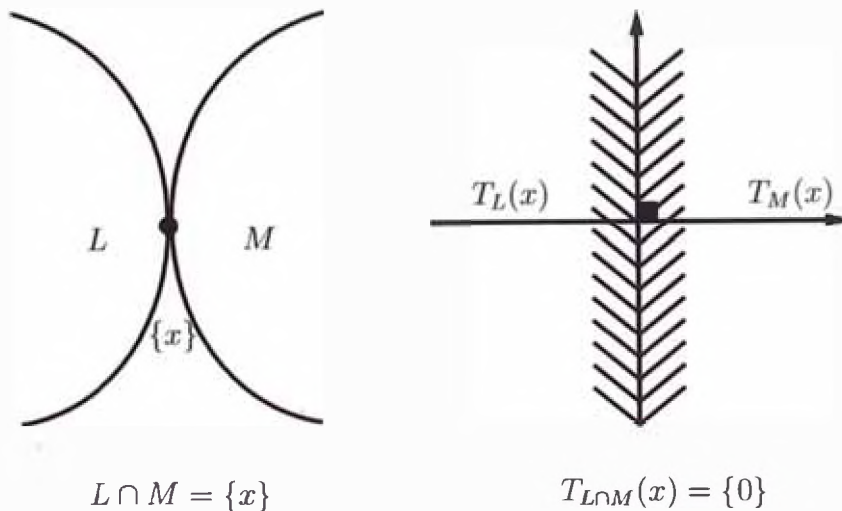
Contraejemplo: Cono tangente para la intersección

Ejemplo 2.1.

1. Observamos primero que un elemento $v \in T_{\mathbb{R}_+^n}(x)$ si y sólo si $v_i \geq 0$ siempre que $x_i = 0$.
2. Denotamos por

$$S^n = \{x \in \mathbb{R}_+^n / \sum x_i = 1\}$$

la probabilidad simple.



Lema 2.1. El cono contingente $T_{S^n}(x)$ para S^n en $x \in S^n$ es el cono de elementos $v \in \mathbb{R}^n$ satisfaciendo $\sum_{i=1}^n v_i = 0$ y $v_i \geq 0$ siempre que $x_i = 0$.

Demostración. Tomamos $v \in T_{S^n}(x)$. Entonces existe sucesiones $h_p > 0$ convergiendo a 0 y v_p convergiendo a v tal que $y_p = x + h_p v_p \in S^n$ para cualquier $p \geq 0$. Entonces

$$\sum_{i=1}^n v_{p_i} = \frac{1}{h_p} \left(\sum_{i=1}^n y_{p_i} - \sum_{i=1}^n x_{p_i} \right) = 0 \quad (2.1)$$

de manera que $\sum_{i=1}^n v_i = 0$. Por otro lado si $x_i = 0$ entonces

$$v_{p_i} = \frac{y_{p_i}}{h_p} \geq 0$$

tal que $v_i \geq 0$.

Por lo contrario, tomemos v satisfaciendo (2.1) y se deduce que

$$y = x + hv$$

perteneciendo al simplex para h suficientemente pequeño. Primero, la suma de los y_i es igual a 1. Segundo, $y_i \geq 0$ cuando $x_i = 0$ porque en este caso v_i es no negativo, y cuando $x_i > 0$, es suficiente tomar $h < \frac{x_i}{|v_i|}$ por tener $y_i \geq 0$. Por lo tanto y pertenece al simplex □

En el caso de conos convexos en general tenemos:

Lema 2.2. Sea $K \subset X$ un cono convexo de un espacio normado X y $x \in K$. Entonces $T_K(x) = \overline{K + \mathbb{R}x}$.

Por otra parte:

$$p \in N_K(x) \Leftrightarrow x \in K, p \in K^- \text{ y } \langle p, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x \in N_{K^-}(p)$$

donde: $N_{K^-}(p) = \{x \in K / \forall q \in K^-, \langle q, x \rangle \leq 0\}$.

Supongamos que $p_0 \in \text{Int}(K^+)$ y el conjunto

$$S = \{x \in K / \langle p_0, x \rangle = 1\}$$

entonces:

$$T_S(x) = \{v \in T_K(x) / \langle p_0, v \rangle = 0\} \quad (2.2)$$

Demostración. En efecto, $K + \mathbb{R}x = K - \mathbb{R}_+x \subset T_K(x)$ porque para cualquier $z \in K, \lambda > 0$,

$$\forall h < \frac{1}{\lambda}, x + h(z - \lambda x) = (1 - h\lambda)x + hz \in K$$

Por el contrario, $v \in T_K(x)$, siendo el límite de v_n tal que $x + h_n v_n \in K$ pertenece a $K + \mathbb{R}x$ para todo n , porque

$$v_n \in K - \frac{x}{h_n} \subset K - \mathbb{R}_+x$$

Para decir que $p \in N_K(x)$ significa que $\langle p, x \rangle = \sigma_K(p)$, lo cual es igual a 0 si y sólo si $p \in K^\circ$, de manera que se tiene la segunda afirmación del lema.

Observe que S puede escribir en la forma $K \cap p_0^{-1}(1)$ y las condiciones de restricción de calificación $0 \in \text{Int}(p_0(K) - 1)$ es satisfecha porque $p_0(K)$ es un cono de \mathbb{R} conteniendo a 1. Entonces deducimos que

$$T_S(x) = T_K(x) \cap p_0^{-1}T_{\{1\}}(1)$$

i.e. la expresión (2.2). □

Observación 2.2. Si asumimos que $K^\circ + \{x\}^\circ = X^*$ y que X es reflexivo, entonces $T_K(x) = K + \mathbb{R}x$ gracias al teorema del rango cerrado.

El siguiente resultado juega un papel importante en la teoría de control para proveer la controlabilidad y observabilidad para procesos convexos cerrados son conceptos duales.

Teorema 2.2. Sea X un espacio reflexivo de Banach, $F : X \rightsquigarrow X$ un proceso convexo cerrado cuyo dominio es todo el espacio y K un cono convexo cerrado. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.

i) $\forall x \in K, F(x) \subset T_K(x)$.

$$ii) \forall q \in K^+, F^*(q) \cap T_{K^+}(q) \neq \emptyset$$

donde $K^+ = -K^- = \{p \in X^* / \forall x \in K, \langle p, x \rangle \geq 0\}$

Demostración. La primera condición es equivalente a

$$\forall x \in K, \forall q \in -(T_K(x))^- , \sup_{y \in F(x)} \langle -q, y \rangle \leq 0 \quad (2.3)$$

Pero sabemos del lema anterior que

$$q \in -(T_K(x))^- = -N_K(x)$$

si y sólo si

$$x \in N_{K^-}(-q) = (K^- + \mathbb{R}q)^- = (K^+ + \mathbb{R}q)^+ = (T_{K^+}(q))^+$$

Por otro lado desde que el dominio de F es todo el espacio X , por la función soporte de transposición implica que

$$\sup_{y \in F(x)} \langle -q, y \rangle + \sup_{p \in F^*(q)} \langle p, x \rangle = 0$$

Por lo tanto, la condición (2.3) es equivalente a

$$\forall q \in K^+, \forall x \in (T_{K^+}(q))^+, \sup_{p \in F^*(q)} \langle p, x \rangle \geq 0 \quad (2.4)$$

Ahora desde que la imagen de $F^*(q)$ es débilmente compacta, el teorema de separación implica que la intersección de $F^*(q)$ y $T_{K^+}(q)$ es no vacío (i.e. que 0 pertenece al subconjunto convexo cerrado $F^*(q) - T_{K^+}(q)$) si y sólo si

$$\forall x \in X, 0 \leq \sigma(F^*(q) - T_{K^+}(q), x)$$

Esto es suficiente para observar que esta afirmación es equivalente a (2.4) porque

$$\sigma(F^*(q) - T_{K^+}(q), x) = \begin{cases} \sigma(F^*(q), x), & \text{si } x \in (T_{K^+}(q))^+ \\ +\infty, & \text{si } x \notin (T_{K^+}(q))^+ \end{cases}$$

□

Definición 2.1 (Pseudo Convexos y Conjuntos Forma Estrella). Un conjunto K de un espacio normado X se llama en forma estrella alrededor de $x \in K$ si

$$\forall y \in K, \forall \lambda \in [0, 1], x + \lambda(y - x) \in K$$

y pseudo convexo en $x \in K$ si y sólo si cualquiera de las dos propiedades equivalentes

$$i) T_K(x) = \overline{S_K(x)} = \bigcup_{h>0} \frac{K - x}{h}$$

$$ii) K \subset x + T_K(x)$$

son verdaderas

Lema 2.3. Si $K \subset X$ es forma-estrella alrededor de $x \in K$, entonces es pseudo convexo en este punto.

Los subconjuntos convexos son forma-estrella alrededor de cada uno de sus elementos y comparten con ellos algunas de sus propiedades por ejemplo.

Proposición 2.3. Si X, Y son espacios normados, $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ es un operador lineal continua y si $K \subset X$ es pseudo convexo en algún punto $x \in K$, entonces

$$\overline{AT_K(x)} = T_{A(K)}(Ax)$$

En particular, cuando K es convexo, tenemos para cada $y \in A(K)$

$$\bigcap_{x \in K \cap A^{-1}(y)} \overline{A(T_K(x))} = T_{A(x)}(y)$$

Demostración. Tomamos $v \in T_{A(K)}(Ax)$ y sea $h_n > 0$ y $v_n \in Y$ sucesiones convergiendo a 0 y v respectivamente tal que

$$Ax + h_n v_n \in A(K) \subset Ax + A(T_K(x))$$

Por lo tanto $v_n \in A(T_K(x))$ y por lo que su límite pertenece a la clausura de este cono. \square

Capítulo 3

Cálculo de Conos Tangentes

Teorema 3.1 (Teorema de la Función Inversa Punto a Punto). Sea X un espacio de Banach, K un subconjunto cerrado de X , Y un espacio vectorial finito dimensional, $f : X \rightarrow Y$ continuamente diferenciable alrededor de un elemento $x_0 \in K$. Si

$$f'(x_0)(C_K(x_0)) = Y$$

Entonces la aplicación multivaluada $y \rightsquigarrow f^{-1}(y) \cap K$ es pseudo-Lipschitz alrededor $(f(x_0), x_0)$.

En particular, trataremos especialmente las siguientes consecuencias.

Corolario 3.1. Si K es un subconjunto cerrado de espacio vectorial finito dimensional X , entonces $x_0 \in \text{Int}(K)$ si y sólo si $C_K(x_0) = X$. Si X es un espacio de Banach, $x_0 \in \text{Int}(K)$ si y sólo si existe constantes $\alpha \in [0, 1], \eta > 0$ tal que:

$$\forall x \in B_K(x_0, \eta), B_X \subset T_K(x) + \alpha B_X \quad \square$$

3.1. Intersección e Imagen Inversa

Teorema 3.2. Sea X e Y espacios de Banach, $L \subset X$ y $M \subset Y$ subconjuntos cerrados, $f : X \rightarrow Y$ continuamente diferenciable alrededor de un elemento $x_0 \in L \cap f^{-1}(M)$.

Si Y es de dimensión finita, postulamos las condiciones de transversalidad punto a punto

$$f'(x_0)(C_L(x_0)) - C_M(f(x_0)) = Y$$

Entonces

$$T_L^b(x_0) \cap f'(x_0)^{-1}(T_M(f(x_0))) \subset T_{L \cap f^{-1}(M)}(x_0)$$

$$T_L^b(x_0) \cap f'(x_0)^{-1}(T_M^b(f(x_0))) = T_{L \cap f^{-1}(M)}^b(x_0)$$

y

$$C_L(x_0) \cap f'(x_0)^{-1}(C_M(f(x_0))) \subset C_{L \cap f^{-1}(M)}(x_0)$$

De otro modo para obtener el mismo resultado en el caso de cualquier espacio de Banach, tenemos que reemplazar las condiciones de transversalidad punto a punto con la condición de transversalidad local:

Existe constantes $c > 0$, $\alpha \in [0, 1)$ y $\eta > 0$ tal que:

$$\forall x \in L \cap B(x_0, \eta), \forall y \in M \cap B(f(x_0), \eta), B_Y \subset f'(x)(T_L^b(x) \cap cB_X) - T_M(y) - \alpha B_Y$$

Por otra parte las hipótesis de rendimiento para el conjunto $L \cap f^{-1}(M)$ es liso (respectivamente derivable) siempre que L y M sean lisos (respectivamente derivables).

Demostración. Probemos por ejemplo la inclusión para el cono tangente Clarke. Consideremos el subconjunto cerrado

$$K = L \cap f^{-1}(M)$$

y tomemos cualquier sucesión de elementos $x_n \in K$ el cual converge a x . Vamos a elegir cualquier $u \in C_L(x_0)$ tal que $f'(x_0)u \in C_M(f(x_0))$. Por lo tanto cualquier sucesión $h_n > 0$ y $x_n \in K$ convergiendo a 0 y x_0 respectivamente, existe sucesiones u_n y v_n convergiendo a u y $f'(x_0)u$ respectivamente tal que para todo $n \geq 0$

$$x_n + h_n u_n \in L \text{ y } f(x_n) + h_n v_n \in M$$

Ahora aplicando el Teorema 3.1 al conjunto $L \times M$ de $X \times Y$ y la aplicación continua $f \oplus 1$ asociado para cualquier (x, y) el elemento $f(x) - y$. Es obvio que la condición de

transversalidad

$$f'(x_0)(C_L(x_0)) - C_M(f(x_0)) = Y$$

implica las suposiciones de sobreyectividad del Teorema 3.1.

El par $(x_n + h_n u_n, f(x_n) + h_n v_n) \in L \times M$ y

$$(f \ominus 1)(x_n + h_n u_n, f(x_n) + h_n v_n) \rightarrow 0$$

porque f es continua en x .

Por lo tanto, por Teorema 3.1 existe $l > 0$ y una solución $(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n) \in L \times M$ para la ecuación

$$(f \ominus 1)(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n) = 0$$

(i.e. $\tilde{y}_n = f(\tilde{x}_n)$) tal que

$$\begin{aligned} & \|x_n + h_n u_n - \tilde{x}_n\| + \|f(x_n) + h_n v_n - \tilde{y}_n\| \\ & \leq l h_n \left\| \frac{f(x_n + h_n u_n) - f(x_n)}{h_n} - v_n \right\| \end{aligned}$$

Por lo tanto $\tilde{u} = \frac{(\tilde{x}_n) - x_n}{h_n} \rightarrow u$ y para todo $n \geq 0$ sabemos que $x_n + h_n \tilde{u}_n \in L \cap f^{-1}(M)$ por que $x_n + h_n \tilde{u}_n = \tilde{x}_n$ y $f(x_n + h_n \tilde{u}_n) = \tilde{y}_n$.

Cuando Y es un espacio de Banach arbitrario aplicamos el Teorema de la función inversa limitada en exactamente el mismo camino. \square

Corolario 3.2. Supongamos que X, Y son espacios de Banach, $M \subset Y$ es un subconjunto cerrado y que $f : X \rightarrow Y$ es una aplicación diferencialmente continua alrededor de un elemento $x_0 \in f^{-1}(M)$.

Cuando la dimensión de Y es finita, supongamos que:

$$\text{Im}(f'(x_0)) + C_M(f(x_0)) = Y$$

entonces

$$T_{f^{-1}(M)}(x_0) = f'(x_0)^{-1}(T_M(f(x_0)))$$

Además

$$T_{f^{-1}(M)}^b(x_0) = f'(x_0)^{-1}(T_M^b(f(x_0)))$$

y

$$C_{f^{-1}(M)}(x_0) \supset f'(x_0)^{-1}(C_M(f(x_0)))$$

De lo contrario, para obtener el mismo resultado en el caso de un espacio de Banach Y tenemos que suponer que existe constante $c < 0, \alpha \in [0, 1]$ y $\eta > 0$ tal que

$$\forall x \in B(x_0, \eta), \forall y \in B(f(x_0), \eta) \cap M, B_Y \subset cf'(x)(B_X) + T_M(y) + \alpha B_Y$$

Corolario 3.3. Sea K_1 y K_2 subconjuntos cerrados de un espacio de Banach X y $x \in K_1 \cap K_2$. Si la dimensión de X es finito, supongamos que

$$C_{K_1}(x) - C_{K_2}(x) = X$$

Entonces

$$T_{K_1}^b(x) \cap T_{K_2}^b(x) \subset T_{K_1 \cap K_2}^b(x) \text{ y } T_{K_1}^b(x) \cap T_{K_2}^b(x) = T_{K_1 \cap K_2}^b(x)$$

y

$$C_{K_1}(x) \cap C_{K_2}(x) \subset C_{K_1 \cap K_2}(x)$$

De lo contrario, el mismo resultado es verdadero cuando X es un espacio de Banach si suponemos que existe constantes $c > 0, \alpha \in [0, 1]$ y $\eta > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \forall x \in K_1 \cap B(x_0, \eta), \forall y \in K_2 \cap B(x_0, \eta) \\ B_Y \subset (T_{K_1}^b(x) \cap B_X) - T_{K_2}(y) + \alpha B_Y \end{aligned}$$

Finalmente para una intersección finita podemos afirmar

Corolario 3.4. Consideremos n subconjuntos cerrados K_i de un espacio de Banach X y $x_0 \in \bigcap_{i=1}^n K_i$. Cuando la dimensión de X es finita, supongamos que

$$\forall v_1, \dots, v_n \in X, \bigcap_{i=1}^n (C_{K_i}(x_0) - v_i) \neq \emptyset$$

Entonces

$$\bigcap_{i=1}^n T_{K_i}^b(x_0) = T_{\bigcap_{i=1}^n K_i}^b(x_0)$$

y

$$\bigcap_{i=1}^n C_{K_i}(x_0) \subset C_{\bigcap_{i=1}^n K_i}(x_0)$$

Si la dimensión de X es infinita, supongamos que existe constantes $c > 0, \alpha \in [0, 1)$ y $\eta > 0$ tal que:

$$\begin{cases} \forall x_i \in K_i \cap B(x_0, \eta), \forall v_i \in X \\ \exists w_i \in X, \exists u \in \bigcap_{i=1}^n (T_{K_i}(x_i) - v_i - w_i) \text{ tal que} \\ \|u\| \leq c \max_{i=1, \dots, n} \|v_i\| \wedge \|w_i\| \leq \alpha \max_{i=1, \dots, n} \|v_i\| \end{cases}$$

Para obtener las mismas conclusiones.

Demostración. Es suficiente aplicar el Teorema 3.2 para $M = \{0\}$, el subconjunto $\prod_{i=1}^n K_i \times D$, donde $D = \{x, \dots, x\}_{x \in X}$ y la aplicación f definido sobre este conjunto por $f(x, y) = x - y$. \square

3.2. Ejemplo: Conos Tangentes para subconjuntos definidos por restricciones de igualdad y desigualdad

Consideremos un subconjunto cerrado L de un espacio de Banach X y dos aplicaciones continuamente diferenciable:

$$g = (g_1, \dots, g_p) : X \rightarrow \mathbb{R}^p \text{ y } h = (h_1, \dots, h_q) : X \rightarrow \mathbb{R}^q$$

definido en una vecindad abierta de L .

Sea K el subconjunto de L definido por las restricciones

$$K = \{x \in L / g_i(x) \geq 0, i = 1, \dots, p \wedge h_j(x) = 0, j = 1, \dots, q\}$$

Denotamos por $I(x) = \{i = 1, \dots, p/g_i(x) = 0\}$ el subconjunto de restricciones activas.

Proposición 3.1. Vamos a plantear las siguientes condiciones de transversalidad en un determinado $x \in K$:

$$i) \quad h'(x)C_L(x) = \mathbb{R}^q$$

$$ii) \quad \exists v_0 \in C_L(x) \text{ tal que } h'(x)v_0 = 0 \text{ y } \forall i \in I(x), \langle g'_i(x), v_0 \rangle > 0$$

Entonces u pertenece al cono contingente para K en x si y sólo si u pertenece al cono contingente para L en x y satisface las restricciones

$$\forall i \in I(x), \langle g'_i(x), u \rangle \geq 0 \text{ y } \forall j = 1, \dots, q, \quad h'_j(x)u = 0$$

Demostración. Es claro que para cada $v \in T_K(x) \subset T_L(x)$ las ecuaciones $h'_j(x)v = 0$, $j = 1, \dots, q$ son satisfechas y las desigualdades $\langle g'_i(x), v \rangle \geq 0$ son satisfechas para todas las restricciones activas $i \in I(x)$.

La inclusión inversa es una consecuencia directa del Teorema 3.2 con

$$Y = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q, \quad f = g \times h, \quad M = \mathbb{R}^q \times \{0\}$$

Es suficiente comprobar que las hipótesis implican la condición de transversalidad

$$(g'(x) \times h'(x))(C_L(x)) - T_{\mathbb{R}^p \times \{0\}}(g(x), 0) = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$$

En efecto, tomamos $(y, z) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$. Existe una solución $v \in C_L(x)$ para la ecuación $h'(x)v = z$ para la primera hipótesis. Sea

$$\alpha = \min_{i \in I(x)} \langle g'_i(x), v_0 \rangle$$

y

$$\lambda = \frac{1}{\alpha} \max(0, y_1 - \langle g'_1(x), v \rangle, \dots, y_p - \langle g'_p(x), v \rangle)$$

Fijamos: $a_i = \langle g'_i(x), v + \lambda v_0 \rangle - y_i$.

Por construcción: $a_i \geq 0$ para cualquier $i \in I(x)$ tal que $a = (a_1, \dots, a_p)$ pertenezca al cono contingente para \mathbb{R}_+^p en $g(x)$. Por lo tanto $w = \lambda v_0 + v$ pertenece al cono convexo $C_L(x)$ y es una solución para la ecuación:

$$g'(x)w - a = y \wedge h'(x)w = z$$

tal que

$$(y, z) \in \left((g'(x) \times h'(x))u - T_{\mathbb{R}_+^p \times \{0\}}(g(x), h(x)) \right)$$

□

Observación 3.1. Se observa que la prueba anterior implica que si $L = X$ en la Proposición 3.1 entonces un elemento $u \in C_K(x)$ si y sólo si

$$\forall i \in I(x), \langle g'_i(x), u \rangle \geq 0 \wedge \forall j = 1, \dots, q, h'_j(x)u = 0$$

3.2.1. Propiedades de Conos Contingentes para Conjuntos Derivables en Espacios de Dimensión Finita

4) Si $L \subset X$ y $M \subset Y$ son subconjuntos derivables cerrados, $f \in C^1(X, Y)$ es una aplicación continuamente diferenciable y $x \in L \cap f^{-1}(M)$ satisface la condición de transversalidad $f'(x)C_L(x) - C_M(f(x)) = Y$, entonces

$$T_{L \cap f^{-1}(M)}(x) = T_L(x) \cap f'(x)^{-1}T_M(f(x))$$

4a) Si $M \subset Y$ es un subconjunto cerrado derivable $f \in C^1(X, Y)$ es una aplicación continuamente diferenciable y $x \in f^{-1}(M)$ satisface $\text{Im}(f'(x)) - C_M(f(x)) = Y$ entonces

$$T_{f^{-1}(M)}(x) = f'(x)^{-1}T_M(f(x))$$

b) Si $K_1, K_2 \subset X$ son subconjuntos derivables cerrados, $x \in K_1 \cap K_2$ satisface $C_{K_1}(x) - C_{K_2}(x) = X$, entonces

$$T_{K_1 \cap K_2}(x) = T_{K_1}(x) \cap T_{K_2}(x)$$

c) Si $K_i \subset X, (i = 1, \dots, n)$ son subconjuntos derivables cerrados y $x \in \bigcap_i K_i$ satisface $\forall v_i = 1, \dots, n, \bigcap_{i=1}^n (C_{K_i}(x) - v_i) \neq \emptyset$ entonces

$$T_{\bigcap_{i=1}^n K_i}(x) = \bigcap_{i=1}^n T_{K_i}(x)$$

3.3. Imagen Directa

Consideremos ahora dos espacios vectoriales normados X e Y , un subconjunto $K \subset X$ y una aplicación univaluable y diferenciable f de X a Y .

Vimos que para cualquier $y \in f(K)$, tenemos

$$\overline{\bigcup_{x \in K \cap f^{-1}(y)} f'(x)(T_K(x))} \subset T_{f(K)}(y)$$

y

$$\overline{\bigcup_{x \in K \cap f^{-1}(y)} f'(x)(T_K^b(x))} \subset T_{f(K)}^b(y)$$

No es fácil encontrar condiciones elegantes suficientes que impliquen la igualdad.

$$\overline{\bigcup_{x \in K \cap f^{-1}(y)} f'(x)(T_K(x))} = T_{f(K)}(y)$$

Teorema 3.3. Sea X un espacio vectorial de dimensión finita, Y un espacio normado, $\Omega \subset X$ un subconjunto abierto que contiene a K y $f : \Omega \rightarrow Y$ una aplicación univaluable satisfaciendo

$$f(K) \ni y \rightsquigarrow f^{-1}(y) \cap K$$

es pseudolipschitz en $(f(x_0), x_0)$: existe una constante $l > 0$ tal que para cualquier $y \in f(K)$ cerrado en $f(x_0)$

$$d(x_0, f^{-1}(y) \cap K) \leq l \|y - f(x_0)\|$$

Entonces si f es Fréchet diferenciable en x_0 , obtenemos la igualdad

$$\overline{f'(x_0)T_K(x_0)} = T_{f(K)}(f(x_0))$$

Demostración. Sea $v \in T_{f(K)}(f(x_0))$, entonces existe sucesiones de elementos $h_n > 0$ y v_n convergiendo a 0 y v respectivamente tal que

$$f(x_0) + h_n v_n = f(x_n) \in f(K)$$

El punto es elegir soluciones $x_n \in K$ para la ecuación anterior tal que una subsucesión $u_n = \frac{(x_n - x_0)}{h_n}$ converge a algún u . Tal elemento u pertenece al cono contingente $T_K(x_0)$ y es una solución para la ecuación $f'(x_0)u = v$.

Desde que la aplicación univaluada

$$f(K) \ni y \rightsquigarrow f^{-1}(y) \cap K$$

es pseudo-Lipschitz en $(f(x_0), x_0)$ por hipótesis existe una constante l y soluciones $x_n \in K$ para la ecuación tal que:

$$\|x_0 - x_n\| \leq l \|f(x_0) - f(x_0) - h_n v_n\| = l h_n \|v_n\|$$

Por lo tanto la sucesión de elementos u_n es acotada de manera que una subsucesión u_n converge a algún u . □

Observación 3.2. Por lo tanto, cualquier condición suficiente lo que implica que algún $x_0 \in K$, la aplicación multivaluada

$$f(K) \ni y \rightsquigarrow K \cap f^{-1}(y)$$

es pseudo-Lipschitz en $(f(x_0), x_0)$ implica automáticamente la igualdad entre el cono contingente para la imagen y la cerradura de la imagen del cono contingente.

Proposición 3.2. Sean X, Y espacios normados $K \subset X, A \in \mathcal{L}(X, Y)$ un operador lineal continuo e $y_0 \in Y$. Si la dimensión de X es finita y si para algún $x_0 \in K \cap A^{-1}(y_0)$

$$\ker(A) \cap T_K(x_0) = \{0\}$$

entonces

$$\overline{A(T_K(x_0))} = T_{A(K)}(A(x_0))$$

Demostración. Sea $v \in T_{A(K)}(A(x_0))$ existe $h_n \rightarrow 0, v_n \in Y, v_n \rightarrow v$ y $x_n \in K$ tal que

$$A(x_0) + h_n v_n = A(x_n) = A(x_0 + h_n u_n)$$

donde fijamos $u_n = \frac{x_n - x_0}{h_n}$.

Si la sucesión u_n es acotada, por estar en un espacio de dimensión finita, una subsucesión converge a algún u , el cual pertenece a $T_K(x_0)$, y satisface $Au = v$. Sino, una subsucesión $\|u_n\|$ iría al ∞ . Entonces una subsucesión de elementos $\hat{u}_n = \frac{u_n}{\|u_n\|}$ satisfacen las ecuaciones $A\hat{u}_n = \frac{v_n}{\|u_n\|}$ converge a un u en la esfera unitaria el cual es una solución para la ecuación $Au = 0$ y el cual pertenece al cono contingente $T_K(x_0)$ lo cual es una contradicción. \square

Proposición 3.3. Sea K un subconjunto de un espacio vectorial de dimensión finita X, Y espacios normados, $f : X \rightarrow Y$ una función Fréchet diferenciable e $y_0 \in K, x_0 \in K \cap f^{-1}(y_0)$.

Supongamos que para algún $\varepsilon > 0$, el subconjunto $f^{-1}(B(y_0, \varepsilon) \cap K)$ es acotado. Entonces la condición

$$\forall x \in f^{-1}(y_0) \cap \overline{K}, \ker(f'(x)) \cap T_K(x) = \{0\}$$

implica

$$\bigcup_{x \in K \cap f^{-1}(y_0)} f'(x)(T_K(x)) = T_{f(K)}(y_0)$$

Demostración. Sea $v \in T_{f(K)}(y_0), v \neq 0$. Existe $h_n > 0, h_n \rightarrow 0, v_n \in Y, v_n \rightarrow v$ y $x_n \in K$ tal que $y_0 + h_n v_n = f(x_n)$ las cuales son acotadas por hipótesis.

Entonces una subsucesión x_n converge a algún $x \in \overline{K}$ satisfaciendo $f(x) = y_0$.

Fijemos $\alpha_n = \|x_n - x_0\|$ y $u_n = \frac{x_n - x_0}{\alpha_n}$. Entonces $\alpha_n \rightarrow 0$ y la sucesión u_n siendo acotada en un espacio vectorial de dimensión finita, tiene una subsucesión convergiendo

a algún u , el cual pertenece a $T_K(x)$. Por otro lado:

$$f(x + \alpha_n u_n) = f(x) + \alpha_n f'(x)u + \alpha_n \varepsilon(\alpha_n) = y_0 + h_n v_n$$

Por lo tanto:

$$f'(x)u + \varepsilon(\alpha_n) = h_n v_n / \alpha_n$$

la mano izquierda está acotada y $v_n \rightarrow v \neq 0$ deducimos que la sucesión $\frac{h_n}{\alpha_n}$ es acotada tal que una subsucesión converge a algún λ . Por lo tanto $f'(x)u = \lambda v$. Por hipótesis λ debe ser diferente de 0. Consecuentemente

$$v = \frac{f'(x)u}{\lambda} \in f'(x)(T_K(x)).$$

Bibliografía

- [1] Aubin, J-P. y Frankowska, H.; *Set-Valued Analysis*. Birkhäuser, 1990.
- [2] Crouzeix, J-P.; Sosa, W. y Ocaña E.; *Análisis Convexo*. Monografías de l IMCA, 2003.
- [3] Izmailov, A. y Solodov, M.; *Optimização-Volume 1*. IMPA, 2009.
- [4] Rockafellar, T.; *Convex Analysis*. Princeton Landmarks in Mathematics, 1997.