

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA

FACULTAD DE INGENIERIA CIVIL



"ANALISIS DE LOSAS CONTINUAS"

TESIS PARA OPTAR EL TITULO PROFESIONAL DE INGENIERO CIVIL

PRESENTADO POR:

ELMER HUMBERTO CHAVEZ MAURICIO

PROMOCION 1996-I

LIMA - PERU

RESUMEN

Esta tesis trata sobre el análisis estático de losas rectangulares de un paño y de losas continuas en una y/o dos direcciones; para condiciones de bordes arbitrarias y cualquier tipo de carga, pudiendo ser éstas: puntuales, hidrostáticas distribuidas en toda la losa, hidrostáticas en áreas parciales o cualquier combinación posible.

Para el desarrollo de esta tesis cuyo título es "*Análisis de Losas Continuas*", se efectuó un programa de cómputo en lenguaje de programación Microsoft C++. El cual utiliza el método de las series de Fourier para realizar el análisis de las losas en mención, para distintas condiciones de carga y de borde.

Se presentan comparaciones de resultados entre distintos métodos de solución, entre los que se tiene: el método de las series, el método de los elementos finitos y algunos métodos prácticos.

Además, se desarrollan ejemplos que se presentan en el diseño estructural como: losas apoyadas en columnas, tanques elevados y muros de contención con contrafuertes.

INDICE

INTRODUCCION

1.0	Antecedentes	i
2.0	Objetivos	ii
3.0	Organización de la tesis	iii

CAPITULO 01

FUNDAMENTO TEORICO

1.1	Hipótesis de Kirchhoff	1-2
1.2	Ecuación de equilibrio	1-3
1.3	Relaciones entre deformación y desplazamiento (Compatibilidad)	1-7
1.4	Relaciones entre esfuerzo y deformación (Constitutivas)	1-8
1.5	Ecuación diferencial de la losa en flexión transversal	1-10
1.6	Métodos de solución	1-11
1.6.1	Método de las diferencias finitas	1-12
1.6.2	Método de los elementos finitos	1-14
1.6.3	Método de las series	1-17

CAPITULO 02

SOLUCIONES EN SERIES PARA LOSAS DE UN SOLO PAÑO

2.1	Losas simplemente apoyadas	2-2
2.1.1	Solución de Navier para losas rectangulares simplemente apoyadas	2-2
2.1.2	Otras aplicaciones de la solución de Navier	2-4
2.1.3	Solución de losas rectangulares por el método de las series simples	2-5
2.2	Condiciones de borde	2-7
2.3	Método general para resolver problemas de flexión de losas elásticas delgadas rectangulares por el método de las series	2-10
2.4	Ecuaciones para losas rectangulares empotradas en uno o mas bordes	2-13
2.5	Precisión del método	2-14
2.5.1	Análisis para una carga puntual y pseudo-puntual	2-14
2.5.2	Análisis para cargas distribuidas y triangulares	2-19
2.5.2.1	Para una carga distribuida sobre una losa empotrada con relación de lados variable	2-19
2.5.2.2	Para una carga triangular sobre una losa empotrada con relación de lados variable	2-26
2.5.3	Conclusión	2-33

CAPITULO 03
LOSAS CONTINUAS

3.1	Métodos de solución	3-2
3.1.1	Método práctico	3-2
3.1.2	Método de las series	3-3
3.1.2.1	Condición de borde	3-3
3.2	Comparación del método de las series si $b \gg a$ con la solución de vigas	3-5
3.3	Comparación de resultados entre métodos	3-7
3.3.1	Losa continua en una sola dirección	3-7
3.3.2	Losa continua en dos direcciones	3-10
3.3.3	Losa continua en el espacio	3-14
3.4	Patrón de cargas que produce los efectos máximos	3-16

CAPITULO 04
APLICACIONES

4.1	Losa empotrada en sus bordes y apoyada en una columna interior	4-2
4.1.1	Efecto del incremento de la rigidez de la columna	4-3
4.1.2	Comparación con el método de los elementos finitos	4-10
4.2	Losa empotrada en sus bordes y apoyada en cuatro columnas interiores	4-14
4.3	Losa empotrada en sus bordes y apoyada en nueve columnas interiores	4-20
4.3.1	Comparación con el método práctico de las franjas de columnas	4-21
4.4	Tanque elevado	4-26
4.4.1	Efecto de la proporción de lados (b/a)	4-27
4.4.2	Efecto del incremento de la altura en comparación con los lados (h/a)	4-28
4.5	Muro de contención con contrafuertes	4-30
4.5.1	Comparación con fórmulas recomendadas	4-31
4.5.2	Efecto del incremento progresivo del ancho de las pantallas	4-34
4.5.3	Comparación de momentos entre pantallas	4-36

CAPITULO 05

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	5-1
Bibliografía	5-3

INTRODUCCION

1.0 Antecedentes

Al revisar la bibliografía que existe en el medio en lo que se refiere al *Análisis de Losas Continuas*, se encuentra una gran variedad de métodos de solución. Siendo éstos en su mayoría métodos prácticos basados en teorías con ciertas consideraciones que no representan el análisis continuo. Algunas de estas simplificaciones que se hacen para resolver la ecuación diferencial de la losa en flexión transversal son por ejemplo: no considerar el módulo de Poisson, considerar el análisis separadamente cada dirección, o analizar separadamente cada paño de losa con otras condiciones de borde para finalmente hacer una superposición.

El uso del método de las series de Fourier para resolver losas de un solo paño y losas continuas presenta gran dificultad en el cálculo (gran esfuerzo en operaciones matemáticas). Por lo tanto, el estudio se ha limitado a los casos de condiciones de apoyo definidas tales como empotrado o simplemente apoyado; prueba de ello son las tablas y gráficos para el cálculo de losas de un solo paño de Pucher; es por esta razón que no se utiliza con regularidad en el diseño estructural de losas continuas.

Marcus en una de sus publicaciones planteó la solución de losas mediante el empleo de las diferencias finitas como un medio para resolver las ecuaciones diferenciales. Resolvió además, ejemplos prácticos para losas de 3 y 9 paños continuos (considerando los apoyos como cuchillos ideales que permiten el giro pero no el desplazamiento vertical). Marcus también propuso un método aproximado de cálculo sustituyendo las losas por dos grupos de vigas cruzadas ortogonales.

B. Losser, H. Bleich, E. Blitter y G. Fischer hicieron sus respectivos análisis para losas continuas; siendo estas soluciones aproximadas.

Para el caso de losas simplemente apoyadas continuas en sola dirección, B.G. Galerkin dedujo una ecuación a la que llamó "ecuación de los tres momentos para losas continuas". Utilizando éste el método de las series simples.

El método de las diferencias finitas y el método de los elementos finitos son métodos de solución que ofrecen resultados aproximados. En el primer caso la aproximación se hace en los operadores diferenciales y, en el segundo caso se aproximan las funciones incógnita. En ambos casos, para obtener resultados con la precisión requerida será necesario que el programa que utilice estos métodos realice un esfuerzo de cómputo considerable, especialmente cuando existen cargas concentradas.

Para resolver problemas de diseño estructural en el que involucra *Losas Continuas*, normalmente, se recurre a los métodos prácticos antes mencionados o al método de los elementos finitos; pero, sin saber exactamente el grado de precisión de los resultados. Por lo cual, es necesario hacer un análisis minucioso con el método de las series de Fourier.

2.0 Objetivos

Presentar comparaciones entre métodos de solución para losas. Entre estos métodos se tiene: el método de las series, el método de los elementos finitos y algunos métodos prácticos; con distintas condiciones de carga y de borde. De esta manera, se podrá observar el grado de precisión de los métodos mencionados.

Se realizará un programa de cómputo para el análisis de *Losas Continuas* considerando condiciones de carga y de borde arbitrarias. Este programa utilizará el método de las series de Fourier, la que finalmente será una herramienta alternativa para la solución de *Losas Continuas*.

Finalmente, se resolverá algunos ejemplos típicos que se presentan en el diseño estructural y que se acondicionan a la solución de *Losas Continuas*.

3.0 Organización de la tesis

En el capítulo 1 se estudian los aspectos teóricos de losas delgadas como son: la hipótesis de Kirchhoff, la ecuación de equilibrio, las relaciones entre deformación y desplazamiento, las relaciones entre esfuerzo y deformación, la ecuación diferencial de la losa en flexión transversal y los métodos de solución como son: el método de las diferencias finitas, el método de los elementos finitos y el método de las series.

En capítulo 2 se desarrolla la solución para losas de un solo paño por el método de las series. Estas soluciones son para losas bajo distintas condiciones de carga y de borde. Además, se presentan las respectivas ecuaciones que gobiernan cada caso. También, se hace un análisis exhaustivo de los resultados que ofrece el método de las series, comparándolas con soluciones que ofrecen algunas referencias bibliográficas que existen el medio.

En el capítulo 3 se desarrolla el estudio de las *Losas Continuas* por el método de las series y mediante algunos métodos prácticos. Se presentan comparaciones de resultados para problemas de losas continuas en una dirección, en dos direcciones y losas en el espacio, entre: el método de las series, el método de los elementos finitos y algunos métodos prácticos. Finalmente, se estudia patrones de carga que producen los máximos efectos en las losas.

En el capítulo 4 se presentan aplicaciones del programa de *Losas Continuas*, tales como: losas apoyadas en columnas, el efecto de la rigidez de la columna en el diagrama de momentos de la losa, y comparación de resultados con otros métodos de solución. También, se resuelve un tanque elevado para distintas proporciones de lados y, se presenta además, el análisis de muros de contención con contrafuertes.

En el capítulo 5 se presentan algunas conclusiones y recomendaciones a las que se llega después de desarrollar este estudio.

CAPITULO 01

FUNDAMENTO TEORICO

Se denomina losa delgada a un cuerpo de forma prismática, en el cual una de las dimensiones (espesor de la losa) es pequeña en comparación con las otras dimensiones.

En losas de espesor constante, se denomina plano medio o plano neutro al plano que es equidistante de ambas caras de la losa y que divide al espesor de ésta en dos partes iguales.

La superficie elástica es la superficie en la cual se convierte el plano medio, como resultado de la deformación de la losa. En lo que sigue, se supone que el plano de los ejes coordenados X e Y coincide con el plano medio de la losa, el eje Z se considera dirigido hacia abajo.

El análisis a realizarse en esta tesis será el de losas delgadas con pequeñas deformaciones.

En el presente capítulo se tratará sobre los aspectos teóricos como son: las hipótesis de Kirchhoff, la ecuación de equilibrio, las relaciones de compatibilidad, las relaciones constitutivas, en los cuales se basa el análisis de losas delgadas. Adicionalmente, se tratará sobre los métodos de solución más conocidos.

1.1 Hipótesis de Kirchhoff

La teoría de Kirchhoff, también llamada teoría de losas delgadas con pequeñas deflexiones o teoría clásica para losas isotrópicas, homogéneas y elásticas, se basa en las siguientes hipótesis que son análogas a las de la teoría de flexión de vigas de Navier-Bernoulli.

- 1.- La deflexión del plano medio es pequeña comparada con el espesor de la losa. Por lo tanto, la pendiente de la superficie deformada es muy pequeña.
- 2.- Los elementos diferenciales del plano medio no se deforman.
- 3.- Los esfuerzos normales al plano medio " σ_z " son pequeños en comparación con las otras componentes de esfuerzo y se pueden despreciar. Con esta hipótesis se puede considerar el problema en cada plano paralelo al plano XY como un estado plano de esfuerzos.
- 4.- Los puntos ubicados en una línea normal al plano medio de la losa permanecen después de la deformación sobre una recta perpendicular a la superficie elástica de la losa deformada y las distancias entre dichos puntos permanecen invariables. Esto implica que las deformaciones por corte vertical " γ_{xz} " y " γ_{yz} " se desprecian. Por lo tanto, la deflexión de la losa está asociada principalmente con las deformaciones flexionantes. La deformación normal " ϵ_z " que se origina debido a la carga transversal no se considerará.

Por lo tanto, los esfuerzos σ_x , σ_y , τ_{xy} se distribuyen proporcionalmente en el espesor de la losa y son iguales a cero en el plano medio.

De acuerdo a las hipótesis precedentes, el problema tridimensional de losa se puede reducir a un problema de dos dimensiones.

Cuando las losas son gruesas, el esfuerzo cortante es importante. Y cuando la deflexión de la losa no es pequeña en comparación con su espesor, la flexión de la losa estará acompañada de deformaciones del plano medio. En ambos casos las hipótesis de Kirchhoff serían inadecuados.

1.2 Ecuación de equilibrio

Tomando en consideración las hipótesis de Kirchhoff se puede considerar que, en el rango elástico, los esfuerzos varían a lo largo del espesor según una ley lineal. Como consecuencia de esto, en lugar de los esfuerzos que actúan en las secciones de la losa como indica la figura.1.1, se puede examinar las fuerzas resultantes de sección, por unidad de longitud, que las reemplazan.

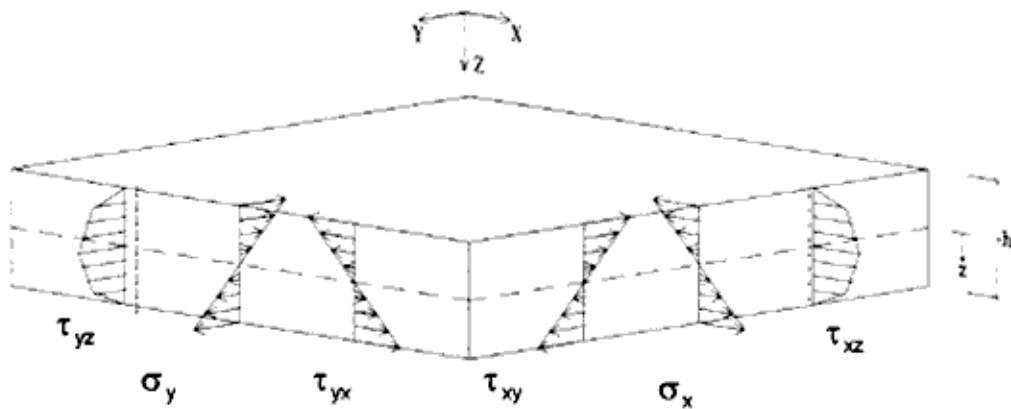


Fig. 1.1

Las fuerzas resultantes de sección por unidad de longitud tomando como referencia la figura 1.1 son:

Momentos flectores :

$$M_x = \int_{-h/2}^{+h/2} z\sigma_x dz \quad \text{Ec. 1.1}$$

$$M_y = \int_{-h/2}^{+h/2} z\sigma_y dz \quad \text{Ec. 1.2}$$

Momento torsor :

$$M_{xy} = \int_{-h/2}^{+h/2} z\tau_{xy} dz \quad \text{Ec. 1.3}$$

Fuerzas cortantes

$$q_x = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{xz} dz \quad \text{Ec. 1.4}$$

$$q_y = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{yz} dz \quad \text{Ec. 1.5}$$

Fuerzas normales y tangenciales, que actúan en la superficie del plano medio:

$$N_x = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_x dz \quad \text{Ec. 1.6}$$

$$N_y = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_y dz \quad \text{Ec. 1.7}$$

$$T_{xy} = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{xy} dz \quad \text{Ec. 1.8}$$

Las fuerzas de sección N_x , N_y , y T_{xy} dadas por las ecuaciones (1.6), (1.7) y (1.8) son iguales a cero, en este caso de losas delgadas con pequeñas deformaciones.

Ahora, considerando que la carga que actúa sobre la losa es normal a su superficie, que las flechas son pequeñas en comparación con el espesor, y respecto al contorno, los bordes tienen libertad para moverse en el plano medio de la losa. Con estas condiciones las reacciones en los bordes son normales al plano medio de la losa, y pueden despreciarse las deformaciones en el plano medio de la losa durante la flexión.

La figura 1.2 muestra el plano medio de un elemento diferencial de la losa con las fuerzas resultantes de sección y las fuerzas que se aplican a ésta.

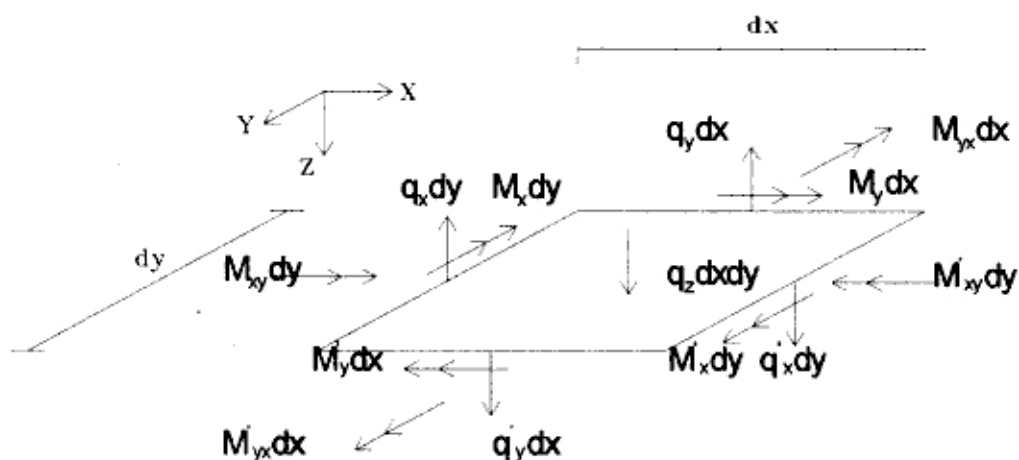


Fig. 1.2

La convención de signos positivos es la indicada en la figura 1.2

$$\begin{aligned}
 M'_y &= M_y + \frac{\partial M_y}{\partial y} dy & M'_x &= M_x + \frac{\partial M_x}{\partial x} dx \\
 M'_{yx} &= M_{yx} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} dy & M'_{xy} &= M_{xy} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dx \\
 q'_y &= q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y} dy & q'_x &= q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx
 \end{aligned}$$

Sumando las fuerzas en el eje Z según la figura 1.2, se obtiene la siguiente ecuación de equilibrio:

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} dx dy + \frac{\partial q_y}{\partial y} dy dx + q_z dx dy = 0$$
$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + q_z = 0 \quad \text{Ec. 1.9}$$

Tomando momento respecto al eje X según la figura 1.2:

$$-\frac{\partial M_y}{\partial y} dy dx - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dx dy + q_y dx dy = 0$$
$$\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - q_y = 0 \quad \text{Ec. 1.10}$$

Tomando momento respecto al eje Y según la figura 1.2:

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} dx dy + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} dy dx - q_x dx dy = 0$$
$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} - q_x = 0 \quad \text{Ec. 1.11}$$

Dada la no existencia de fuerzas en las direcciones X e Y, ni momentos en la dirección Z, las tres ecuaciones (1.9), (1.10) y (1.11) precedentes definen totalmente el equilibrio del elemento. Despejando q_x y q_y de las ecuaciones (1.11) y (1.10) respectivamente y reemplazando en la ecuación (1.9):

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 M_{yx}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + q_z = 0$$

observando que $M_{xy}=M_{yx}$ por ser $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ se escribe finalmente la ecuación de equilibrio:

$$\boxed{\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} = -q_z}$$

Ec. 1.12

Esta expresión es simplemente una ecuación de equilibrio, independiente del estado de elasticidad o plasticidad, de la relación de Poisson o de que la losa sea isotrópica u ortotrópica.

1.3 Relaciones entre deformación y desplazamiento (Compatibilidad)

Considerando las hipótesis de Kirchhoff para la teoría clásica de losas se plantean las relaciones:

$$\epsilon_x = \kappa_{xx} Z \quad \text{Ec. 1.13}$$

$$\epsilon_y = \kappa_{yy} Z \quad \text{Ec. 1.14}$$

$$\gamma_{xy} = \kappa_{xy} Z \quad \text{Ec. 1.15}$$

$$\epsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

donde:

w : Desplazamiento en dirección Z

$\kappa_{xx} \kappa_{yy} \kappa_{xy}$: Son las curvaturas, iguales a:

$$\kappa_{xx} = - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \text{Ec. 1.16}$$

$$\kappa_{yy} = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad \text{Ec. 1.17}$$

$$\kappa_{xy} = -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad \text{Ec. 1.18}$$

1.4 Relaciones entre esfuerzo y deformación (Constitutivas)

Para un material isotrópico, con módulo de elasticidad "E" y un coeficiente de Poisson "μ", las relaciones constitutivas se plantean de la siguiente forma:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_y) \quad \text{Ec. 1.19}$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu\sigma_x) \quad \text{Ec. 1.20}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy} \quad \text{Ec. 1.21}$$

ó

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y) \quad \text{Ec. 1.22}$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x) \quad \text{Ec. 1.23}$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\mu)}\gamma_{xy} = G\gamma_{xy} \quad \text{Ec. 1.24}$$

Las relaciones constitutivas pueden expresarse en función de los desplazamientos, reemplazando las ecuaciones (1.13), (1.14) y (1.15) en las ecuaciones (1.22), (1.23) y (1.24) como sigue:

$$\sigma_x = -\frac{Ez}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad \text{Ec. 1.25}$$

$$\sigma_y = -\frac{Ez}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad \text{Ec. 1.26}$$

$$\gamma_{xy} = -\frac{Ez}{1-\mu} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \quad \text{Ec. 1.27}$$

Reemplazando las ecuaciones (1.25), (1.26) y (1.27) en las ecuaciones (1.1), (1.2), (1.3), (1.4) y (1.5) respectivamente y realizando la correspondiente integral:

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad \text{Ec. 1.28}$$

$$M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad \text{Ec. 1.29}$$

$$M_{xy} = -(1-\mu)D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad \text{Ec. 1.30}$$

$$Q_x = -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) \quad \text{Ec. 1.31}$$

$$Q_y = -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} \right) \quad \text{Ec. 1.32}$$

Donde:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$$

D: Rigidez a la flexión.

μ : Coeficiente de Poisson.

1.5 Ecuación diferencial de la losa en flexión transversal (Ecuación de Lagrange)

Reemplazando las ecuaciones (1.28), (1.29) y (1.30) en la ecuación (1.12) se obtiene la ecuación de equilibrio en términos de desplazamientos:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q_z}{D}$$

Ec. 1.33

6

$$\nabla^2 \nabla^2 w = \frac{q_z}{D}$$

Ec. 1.34

1.6 Métodos de solución

Para resolver problemas de losas se dispone de un conjunto de métodos que van desde los más simples como son los métodos prácticos a los métodos más demandantes desde el punto de vista de cómputo, como es el método de los elementos finitos. Toda esta variedad de métodos producen resultados aproximados.

A continuación se mencionan algunos de los métodos más conocidos y posteriormente se hará un pequeño resumen de algunos de ellos.

Entre los métodos teóricos los más conocidos son: el método de las diferencias finitas, el método de los elementos finitos y el método de las series; y entre los métodos experimentales: el uso de la fotoelasticidad, el uso de la luz reflejada y el método de interferencia.

También se emplean métodos prácticos los cuales son resultados ya sea del uso de los métodos teóricos o de los métodos experimentales. Entre los más conocidos se tiene: el empleo de las superficies de influencia (usando por ejemplo, las gráficas de Pucher), las tablas propuestas por Kalmanok, Timoshenko o los recomendados por algunos reglamentos.

El método que se utilizará en el desarrollo de esta tesis será: **El de las series de Fourier.**

1.6.1 Método de las diferencias finitas

El método de diferencias finitas o ecuaciones de diferencia, fue introducido por Nielse en 1920 como un método alternativo para la solución de losas.

La solución numérica de las ecuaciones diferenciales se basa en su sustitución por otras ecuaciones de diferencias finitas; éstas se obtienen representando las derivadas con expresiones aproximadas.

En la figura 1.3 se muestra la distribución de la malla y los nudos que se tomarán como referencia en el desarrollo de las fórmulas que corresponden a las diferencias finitas.

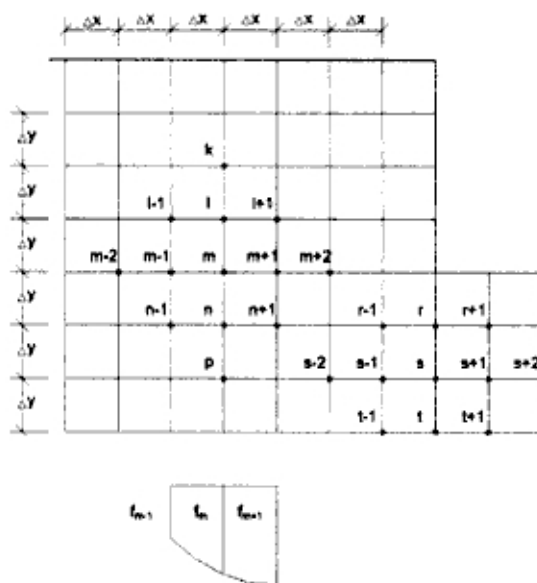


Fig. 1.3

Con respecto a la figura 1.3 pueden plantearse las siguientes aproximaciones:

$$\frac{df}{dx} = \frac{f_{m+1} - f_{m-1}}{2(\Delta x)} \quad \text{Ec. 1.35}$$

$$\frac{d^2f}{dx^2} = \frac{f_{m+1} - 2f_m + f_{m-1}}{(\Delta x)^2} \quad \text{Ec. 1.36}$$

$$\frac{d^3f}{dx^3} = \frac{f_{m+2} - 2(f_{m+1} - f_{m-1}) - f_{m-2}}{2(\Delta x)^3} \quad \text{Ec. 1.37}$$

$$\frac{d^4f}{dx^4} = \frac{f_{m+2} - 4f_{m+1} + 6f_m - 4f_{m-1} + f_{m-2}}{(\Delta x)^4} \quad \text{Ec. 1.38}$$

$$\frac{d^4f}{dx^2 dy^2} = \frac{f_{i-1} + f_{i+1} + f_{n-1} + f_{n+1} - 2(f_{m+1} + f_{m-1} + f_i + f_n) + 4f_m}{(\Delta x)^2 (\Delta y)^2} \quad \text{Ec. 1.39}$$

Y de forma análoga se pueden obtener las aproximaciones a las derivadas en dirección Y.

Sustituyendo estos resultados en la ecuación de la flexión transversal de la losa (1.33), se obtiene una relación entre los valores de la función en diversos(13) puntos de la malla.

$$\text{Suponiendo } \gamma = \frac{\Delta x}{\Delta y} \quad \text{Ec. 1.40}$$

$$\left[8 + 6\left(\gamma^2 + \frac{1}{\gamma^2}\right) \right] f_m - 4\left[\left(1 + \frac{1}{\gamma^2}\right)(f_{m+1} + f_{m-1}) + (1 + \gamma^2)(f_i + f_n) \right] + 2(f_{i-1} + f_{i+1} + f_{n-1} + f_{n+1}) + \gamma^2(f_k + f_p) + \frac{(f_{m+2} + f_{m-1})}{\gamma^2} = \frac{p_z (\Delta x)^2 (\Delta y)^2}{D} \quad \text{Ec. 1.41}$$

Para obtener las fuerzas resultantes de sección se reemplazan los cocientes de diferencias finitas en las ecuaciones (1.1), (1.2), (1.3), (1.4) y (1.5) respectivamente, para obtener finalmente:

$$M_x = -\frac{D}{(\Delta x)^2} [(f_{m-1} - 2f_m + f_{m+1}) + \mu\gamma^2(f_i - 2f_m + f_n)] \quad \text{Ec. 1.42}$$

$$M_y = -\frac{D}{(\Delta y)^2} [(f_i - 2f_m + f_n) + \frac{\mu}{\gamma^2}(f_{m-1} - 2f_m + f_{m+1})] \quad \text{Ec. 1.43}$$

$$M_{xy} = -\frac{(1-\mu)D}{4\Delta x \Delta y} [(f_{i+1} - f_{i-1}) - (f_{n+1} - f_{n-1})] \quad \text{Ec. 1.44}$$

$$Q_x = -\frac{D}{2(\Delta x)^3} [f_{m+2} - 2(f_{m+1} - f_{m-1}) - f_{m-2} + \gamma^2(2f_i - 2f_n + f_{n-1} + f_{n+1} - f_{i-1} - f_{i+1})] \quad \text{Ec. 1.45}$$

$$Q_y = -\frac{D}{2(\Delta y)^3} \left[f_p - 2(f_n - f_i) - f_k + \frac{1}{\gamma^2} (2f_{m-1} - 2f_{m+1} + f_{n+1} + f_{i+1} - f_{n-1} - f_{i-1}) \right] \quad \text{Ec. 1.46}$$

La ecuación (1.40) deberá ser escrita para todos los nudos de la malla que se encuentran dentro del contorno de la losa y también para los nudos ubicados en los lados sin empotramiento que impidan desplazamientos. En algunas de las ecuaciones entrarán también los valores de las ordenadas para nudos de la malla situados fuera del contorno de la losa. Para la determinación de los valores de tales ordenadas es necesario utilizar las ecuaciones de las condiciones de borde.

De este modo, la solución del problema de flexión transversal de la losa, por el método de las diferencias finitas, se reduce a resolver un sistema de ecuaciones algebraicas lineales con tantas incógnitas como ordenadas incógnitas f_m exista.

1.6.2 Método de los elementos finitos

La técnica de los elementos finitos constituye un enfoque numérico muy diferente en los problemas de análisis de losas. En este método, se divide la losa en un número de áreas o elementos triangulares o cuadriláteros. En la Fig 1.4. se muestra un ejemplo típico.

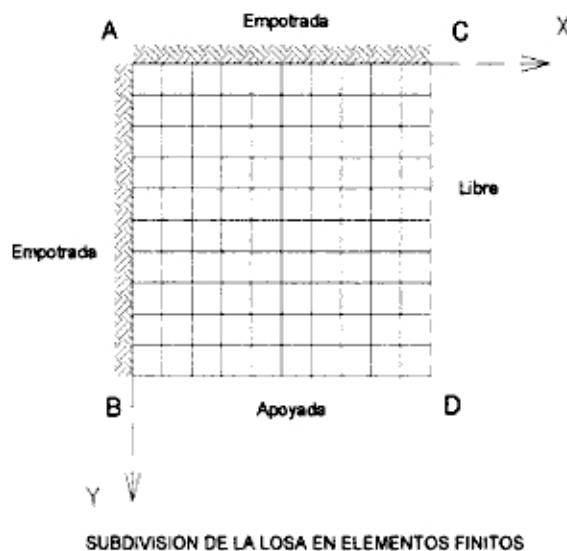


Fig. 1.4

Consideraciones que se hacen en el método:

- 1.- El continuo se divide mediante líneas o superficies imaginarias en un número de sub-regiones o "elementos finitos", como se ve en la figura 1.4.
- 2.- Se supone que los elementos están conectados entre sí en un número finito de puntos, a los que se denominan nudos o nudos, situados en sus contornos. Los desplazamientos de estos nudos serán las incógnitas del problema, tal como ocurre en el análisis simple de estructuras de barras.
- 3.- Se adopta un conjunto de funciones que aproximan los desplazamientos dentro de cada "elemento finito" en función de los desplazamientos nodales de dicho elemento.
- 4.- Estas funciones de desplazamientos definirán entonces, de manera única, el estado de deformación dentro del elemento en función de los desplazamientos nodales. Estas deformaciones, junto con las deformaciones iniciales y las propiedades constitutivas del material, definirán el estado de tensiones en todo el elemento y en su contorno.
- 5.- Se determina un sistema de fuerzas concentradas en los nudos, tal que equilibre las tensiones en el contorno y cualquier carga repartida.

Aproximaciones que se han introducido en este método:

1. No siempre es fácil asegurar que las funciones de desplazamientos escogidas satisfacen las condiciones de continuidad de los desplazamientos entre elementos adyacentes. Por lo tanto la condición de compatibilidad puede no cumplirse en el contorno de los elementos (aunque es evidente que dentro de cada elemento si se cumplirá, a causa de la unicidad de los desplazamientos implicada en el hecho de que los mismos estén representados por funciones continuas).
2. Al concentrar las fuerzas equivalentes en los nudos, las condiciones de equilibrio solo se cumplirán para el conjunto del continuo.

El grado de precisión de la solución que ofrece este método dependerá básicamente de la fineza de la malla con la que se discretizó el problema. Además, otro factor importante es la cantidad de nudos que se utiliza en un elemento finito. Por lo tanto, es de esperar que la solución mediante este método sea aproximada.

El esfuerzo de cómputo que demanda este método para resolver un problema está en función de la cantidad de nudos que se utiliza. Este esfuerzo está representado por el tiempo de ejecución del programa que usa los elementos finitos, es así que, hay una relación no lineal entre la cantidad de nudos y el esfuerzo de cómputo.

En capítulos posteriores se harán comparaciones de resultados de éste método con otros métodos como es el caso de las series que se estudiará a continuación.

Para un estudio más profundo de este método se recomienda la referencia (5) de la bibliografía.

1.6.3 Método de las series

El método de las series consiste en representar la solución mediante una serie infinita doble de los dos sistemas de funciones X_m e Y_n

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} X_m Y_n \quad \text{Ec. 1.47}$$

donde:

C_{mn} son coeficientes a determinar.

o mediante series simples infinitas de los sistemas de funciones X_m e Y_n :

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} f_m(y) X_m \quad \text{Ec. 1.48}$$

ó

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) Y_n \quad \text{Ec. 1.49}$$

donde:

$f_m(y)$ y $f_n(x)$ son funciones a determinar.

Los tipos de sistemas de funciones que se pueden adoptar para el desarrollo en serie pueden ser, por ejemplo, los sistemas de funciones fundamentales de las vigas, polinomios algebraicos, trigonométricos y otros.

Las funciones X_m e Y_n deben satisfacer las condiciones de borde del problema.

Si las condiciones de borde se satisfacen con la elección de las funciones X_m e Y_n , en la solución del problema de series dobles, los coeficientes C_{mn} pueden ser hallados mediante el método de Galerkin:

$$\int_0^a \int_0^b \left(\nabla^2 \nabla^2 w - \frac{p_z}{D} \right) X_m Y_n dx dy = 0 \quad \text{Ec. 1.50}$$

Reemplazando en esta ecuación la expresión de "w" en forma de la serie doble y efectuando la integración, se obtienen, para cada par de valores de los índices m y n, la ecuación algebraica lineal expresada en función de C_{ij} . Limitando el número de miembros de la serie C_{ij} , se pueden hallar sus valores, con lo cual se obtiene la solución aproximada del problema.

Si cualquiera de las funciones X_m e Y_n no satisfacen plenamente las condiciones de borde del problema, lo que ocurre generalmente cuando el borde de la losa está libre de vínculos, no se puede aplicar el método de Galerkin en la forma antes mencionada. Para resolver este problema conviene aplicar el método basado en la utilización de las propiedades de extremos de la energía potencial del sistema elástico, que es igual a la diferencia entre la energía potencial de deformación y el trabajo de fuerzas exteriores.

$$V_{y.c} = \int_0^a \int_0^b \left\{ \frac{D}{2} \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2\mu \left(\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] - p_z w \right\} dx dy$$

Ec. 1.51

Después de sustituir en esta expresión el valor de "w" en forma de serie doble y cumpliendo con la integración, se obtiene la expresión para la energía potencial del sistema elástico en forma de función cuadrática de los coeficientes desconocidos C_{mn} . Para hallar el mínimo de la energía potencial es necesario que los coeficientes C_{mn} satisfagan las condiciones:

$$\frac{\partial V_{y.c}}{\partial C_{mn}} = 0 \quad \text{Ec. 1.52}$$

Cada una de las cuales da una ecuación lineal algebraica relativa a los coeficientes desconocidos C_{mn} , para cada par de índices m y n.

La solución más simple del problema se obtiene en el caso en que se toman, para las expresiones de los sistemas de funciones X_m e Y_n , los senos de los múltiplos de los argumentos (coordenadas relativas), lo que satisface a las condiciones de borde simplemente apoyado en todo el contorno de la losa.

$$C_{mn} = \frac{4\gamma a^2 \int_0^a \int_0^b q_z \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)}{\pi^4 D (m^2 + \gamma^2 n^2)^2} \quad \text{Ec. 1.53}$$

donde:

$$\gamma = \frac{a}{b}$$

Con lo cual la ecuación de la superficie elástica será:

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4a^4 q_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)}{\pi^6 D m n (m^2 + \gamma^2 n^2)^2} \quad \text{Ec. 1.54}$$

donde q_{mn} depende del tipo de carga.

En la solución del problema mediante series simples (1.49), si las condiciones de borde para las funciones Y_n coinciden con las condiciones de borde de la losa, las funciones $f_n(x)$ también pueden hallarse mediante el método de Galerkin:

$$\int_0^b \left(\nabla^2 \nabla^2 w - \frac{q_z}{D} \right) Y_n dy = 0 \quad \text{Ec. 1.55}$$

La que da, para cada índice "n" una ecuación diferencial lineal ordinaria. Estas ecuaciones en conjunto forman un sistema único. Este sistema conviene resolverlo limitándose en el número de términos de la serie (1.49) y por consiguiente, en el número final de funciones $f_n(x)$.

Si las condiciones de borde del problema no coinciden con las condiciones de borde del sistema de funciones Y_n elegido, conviene resolverlo utilizando las propiedades de extremos de la energía potencial del sistema elástico. Sustituyendo la serie (1.49) en la ecuación (1.51), y efectuando la integración respecto a la variable "y", se llega a una cierta función "F", que está bajo el signo de integral. Las condiciones de mínimo de esta función las dan las ecuaciones de Lagrange-Euler:

$$\frac{d}{dx^2} \cdot \frac{\partial F}{\partial f_n''} - \frac{d}{dx} \cdot \frac{\partial F}{\partial f_n'} + \frac{\partial F}{\partial f_n} = 0 \quad \text{Ec. 1.56}$$

La que en conjunto también forman un sistema de ecuaciones diferenciales lineales ordinarias.

Elijiendo como sistemas de funciones Y_n el sistema de los senos de los múltiplos de los argumentos, que corresponde a las condiciones de borde de libre apoyo en dos lados opuestos de la losa, utilizando (1.55) se llega a la ecuación:

$$f_n^{IV}(x) - 2\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 f_n''(x) + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^4 f_n(x) = q_n \quad \text{Ec. 1.57}$$

donde:

q_n : son los coeficientes del desarrollo de las cargas exteriores en series de senos.

Si se designa a Q_n como una solución particular de (1.57), la solución general será de la forma:

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_n^{(1)} \operatorname{sh} \frac{n\pi X}{b} + c_n^{(2)} \operatorname{ch} \frac{n\pi X}{b} + c_n^{(3)} X \operatorname{sh} \frac{n\pi X}{b} + c_n^{(4)} X \operatorname{ch} \frac{n\pi X}{b} + Q_n \right) \sin \frac{n\pi y}{b} \quad \text{Ec. 1.58}$$

Las constantes de integración $c_n^{(i)}$, se determinan por las condiciones de borde de los lados $x=0$ y $x=a$ de la losa.

La solución dada por la ecuación (1.58) se obtuvo de considerar como solución a la ecuación (1.49). De la misma forma, se puede obtener una solución completamente análoga, con la ecuación (1.48) utilizando como funciones X_m sistemas, compuestos por los senos de los múltiplos de los argumentos.

CAPITULO 02

SOLUCIONES EN SERIES PARA LOSAS DE UN SOLO PAÑO

Al usar el método de las series de Fourier para analizar losas rectangulares, se plantean dos interrogantes. La primera sería: ¿Cuál es el grado de exactitud de este método?. Si se pudiera usar los infinitos términos ya sea de la serie simple o doble, seguramente los valores de los resultados de las deflexiones y de las fuerzas de sección de la losa para cualquier condición de borde serían los exactos.

La segunda pregunta obligada es: ¿Cuántos términos de la serie se utilizará?. Dada la característica de las series y su tendencia a converger rápidamente y, además, que el ingeniero no necesita un grado de precisión muy fino. Entonces, se considerará solamente un número limitado de términos de la serie que proporcione resultados confiables y lo suficientemente exactos.

2.1 Losa simplemente apoyada

Para resolver una losa rectangular simplemente apoyada en todo el contorno, se pueden recurrir a soluciones en series dobles o series simples, la primera tiene una explicación más comprensible en comparación con la segunda, siendo ésta última más compleja, aunque es más eficiente.

2.1.1 Solución de Navier para losas rectangulares simplemente apoyadas

Navier obtuvo en 1820 las primeras soluciones de la ecuación de Lagrange, usando series dobles de Fourier para describir las deflexiones y las cargas en losas rectangulares simplemente apoyadas.

La figura 2.1 muestra una losa simplemente apoyada en sus cuatro bordes, la cual se halla bajo una carga cualquiera " q_z ". Los sentidos positivos son los indicados.

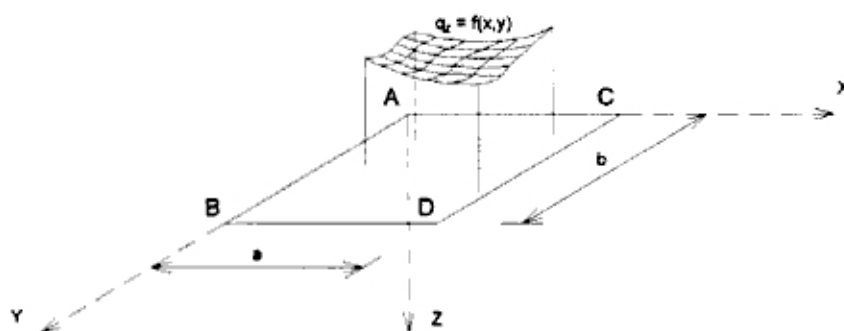


Fig. 2.1

sea la carga:

$$q_z = f(x, y) \qquad \text{Ec. 2.1}$$

Para ello, se presenta la función $f(x, y)$ bajo la forma de una serie geométrica doble:

$$f(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad \text{Ec. 2.2}$$

Donde los coeficientes a_{mn} , están dados por la expresión:

$$a_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b f(x, y) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dx dy \quad \text{Ec. 2.3}$$

y

$$R = \int_0^a \int_0^b f(x, y) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dx dy \quad \text{Ec. 2.4}$$

Por lo tanto, la flecha para cualquier tipo de carga está dada por la siguiente expresión:

$$w(x, y) = \frac{1}{\pi^4 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{mn}}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad \text{Ec. 2.5}$$

ó

$$w(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4abR\delta_0}{\pi^4 Dmn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad \text{Ec. 2.6}$$

donde:

$$\delta_0 = \delta_0(m, n) = \frac{\gamma^2 mn}{(m^2 + \gamma^2 n^2)^2}$$

$$\gamma = \frac{a}{b}$$

2.1.2 Otras aplicaciones de la solución de Navier

No siempre las cargas se aplican en todo el área de la losa. Se aplica ahora una carga "P" uniformemente repartida sobre el área del rectángulo (c x d) y ubicada plenamente en el interior de la losa, pero no necesariamente coincidentes sus centros como indica la figura 2.2.

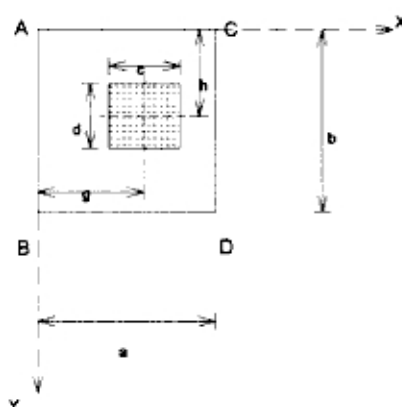


Fig. 2.2

Con esta disposición de la losa y la carga, en la ecuación (2.3) se obtiene:

$$a_{mn} = \frac{4P}{abcd} \int_{g-\frac{c}{2}}^{g+\frac{c}{2}} \int_{h-\frac{d}{2}}^{h+\frac{d}{2}} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dx dy \quad \text{Ec. 2.7}$$

Efectuando la integración correspondiente se obtiene la siguiente expresión:

$$a_{mn} = \frac{16P}{\pi^2 mncd} \sin\left(\frac{m\pi g}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi h}{b}\right) \sin\left(\frac{m\pi c}{2a}\right) \sin\left(\frac{n\pi d}{2b}\right) \quad \text{Ec. 2.8}$$

Al reemplazar (2.8) en (2.5) ó (2.6) se obtiene la solución para una losa bajo una carga distribuida aplicada en un área parcial.

De la misma forma se pueden obtener soluciones de losas para cualquier tipo de carga, pudiendo ser éstas: puntual, hidrostática, o cualquier combinación posible.

2.1.3 Solución de losas rectangulares por el método de las series simples

La ecuación (1.58) en series simples deducida anteriormente, permite resolver losas que tengan solamente un par de lados opuestos con condición de bordes simplemente apoyados, y los otros dos lados con bordes completamente arbitrarios.

La solución (1.58) se expresa en otra forma, mediante transformaciones.

sea:

$$\alpha = \frac{m\pi b}{a} \quad \text{y} \quad \beta = \frac{n\pi a}{b}$$

y las coordenadas adimensionales:

$$\varepsilon = \frac{x}{a} \quad \eta = \frac{y}{b}$$

Una primera forma de representar la solución:

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_n^{(1)} \Omega_0(\beta, \varepsilon) + c_n^{(2)} \Omega_1(\beta, \varepsilon) + c_n^{(3)} \Omega_2(\beta, \varepsilon) + c_n^{(4)} \Omega_3(\beta, \varepsilon) \right) \sin \frac{n\pi y}{b} \quad \text{Ec. 2.9}$$

donde:

$$\Omega_0(\beta, \varepsilon) = \cosh(\beta\varepsilon) - \frac{1}{2} \beta\varepsilon \sinh(\beta\varepsilon)$$

$$\Omega_1(\beta, \varepsilon) = \left(\frac{b}{n\pi}\right) \left(\frac{3}{2} \sinh(\beta\varepsilon) - \frac{1}{2} \beta\varepsilon \cosh(\beta\varepsilon)\right)$$

$$\Omega_2(\beta, \varepsilon) = \left(\frac{b}{n\pi}\right)^2 \frac{1}{2} \beta\varepsilon \sinh(\beta\varepsilon)$$

$$\Omega_3(\beta, \varepsilon) = -\left(\frac{b}{n\pi}\right)^3 \left(\frac{1}{2} \sinh(\beta\varepsilon) - \frac{1}{2} \beta\varepsilon \cosh(\beta\varepsilon)\right)$$

Las constantes de integración $C_n^{(i)}$, se determinan por las condiciones de borde de los lados $x=0$ y $x=a$ de la losa.

Otra forma de presentar la solución es:

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{D} \left(\frac{b}{n\pi}\right)^2 \left[m_n \chi_2(\beta, 1-\varepsilon) + m'_n \chi_2(\beta, \varepsilon) + n_n \bar{\chi}_0(\beta, 1-\varepsilon) + n'_n \bar{\chi}_0(\beta, \varepsilon) + q_n \right] \sin(n\pi\eta)$$

Ec. 2.10

donde la función trascendente $\bar{\chi}_0(\beta, \varepsilon)$ está dada por:

$$\bar{\chi}_0(\beta, \varepsilon) = \frac{(2 + \beta \coth(\beta)) \sinh(\beta\varepsilon) - \beta\varepsilon \cosh(\beta\varepsilon)}{2 \sinh(\beta)}$$

Además:

$$\chi_k(\beta, \varepsilon) = \left(\frac{b}{n\pi}\right)^k \frac{d^k \chi_0(\beta, \varepsilon)}{dx^k}$$

$$\bar{\chi}_0(\beta, \varepsilon) = \chi_0(\beta, \varepsilon) - \mu \chi_2(\beta, \varepsilon)$$

y m_n, m'_n, n_n, n'_n son constantes a determinar.

2.2 Condiciones de borde

En la figura 2.3 los ejes X e Y se toman paralelos a los lados de la losa. Los casos de borde que se pueden presentar en losas rectangulares son: borde simplemente apoyado, borde empotrado y borde libre de vínculos.

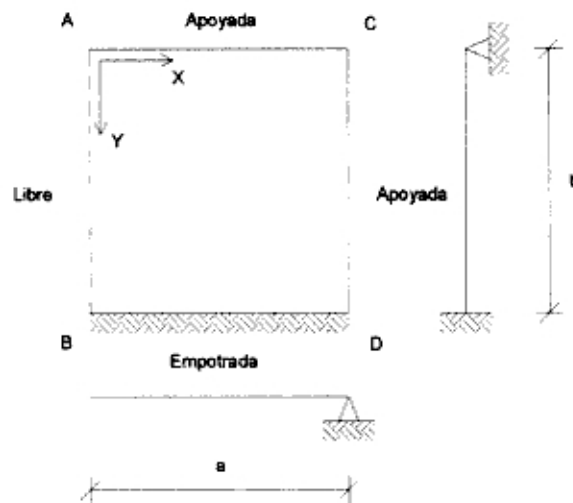


Fig. 2.3

- **Borde apoyado (Apoyo Navier), para $y=0$ y $x=a$:**

En el borde indicado no hay deflexión, pero tiene libertad de rotación, y por consiguiente, no hay momento a flexión perpendicular al borde. Estas condiciones se pueden expresar como:

$$w = 0 \quad , \quad M_y = 0$$

y

$$w = 0 \quad , \quad M_x = 0$$

- **Borde empotrado**, para $y=b$:

El borde es fijo, no hay deflexión ni rotación, matemáticamente se puede expresar como:

$$w = 0 \quad \text{y} \quad \theta_y = 0$$

- **Borde libre**, para $y=0$:

En el borde sin apoyo, no podrá haber ni momento ni reacción, el planteamiento de ésta condición será:

$$M_x = 0 \quad , \quad Q_x = 0 \quad \text{y} \quad M_{xy} = 0$$

Estas condiciones fueron expresadas de esta forma por Poisson, posteriormente Kirchhoff probó que tres condiciones son excesivas, y que bastan dos para la completa determinación de las flechas w que satisfacen la ecuación(1.33). El demostró que las dos condiciones M_{xy} y Q_x deben sustituirse por una sola. La explicación de esta reducción la hicieron Kelvin y Tait, y es la siguiente: La flexión de la losa no varía si las fuerzas horizontales que dan el momento torsor $M_{xy}dy$ (Fig. 2.4) se sustituyen por dos fuerzas verticales de valor M_{xy} y de brazo dy , esta simplificación no cambia el valor de los momentos torsores y produce cambios únicamente en la distribución local de los esfuerzos en el borde de la losa.

Estas nuevas fuerzas sustituidas producen una fuerza neta resultante por unidad de longitud:

$$Q'_x = \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}$$

La reacción total será:

$$Q^*_x = Q_x + Q'_x = Q_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}$$

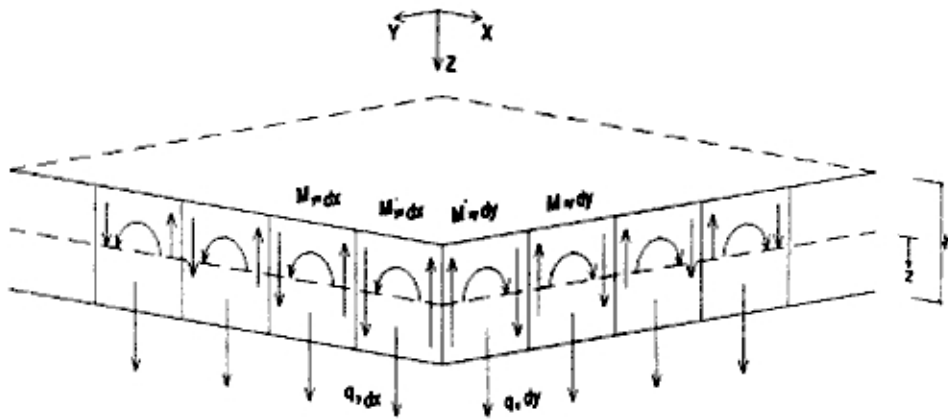


Fig. 2.4

Finalmente las dos condiciones para el borde libre son:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \mu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = 0$$

2.3 Método general para resolver problemas de flexión de losas elásticas delgadas rectangulares por el método de las series

Para resolver problemas de flexión de losas rectangulares, bajo cualquier tipo de carga y con condiciones de borde arbitrarias, se aplica la generalización del método de las series simples.

Usando como referencia el plano medio de la losa, la dirección positiva de los ejes y las longitudes de los lados es como se indica en la figura 2.5

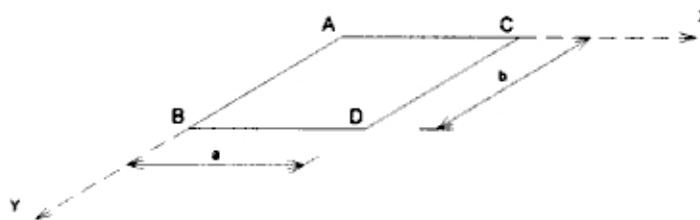


Fig. 2.5

$$w(x, y) = w_1(x, y) + w_2(x, y) + w_3(x, y) \quad \text{Ec. 2.11}$$

Donde:

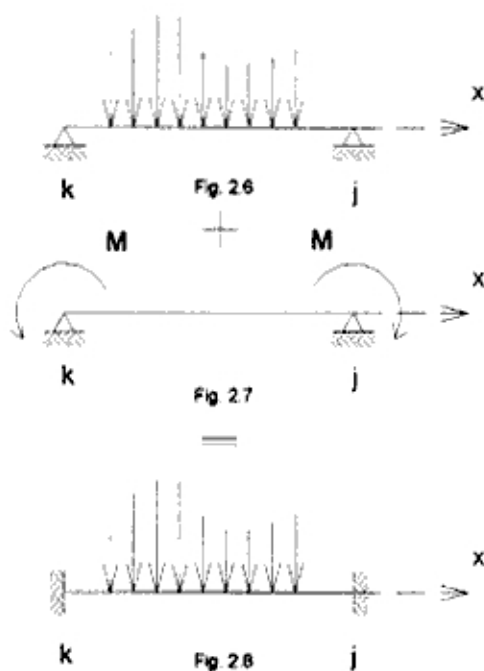
$w_1(x, y)$: Es la ecuación de la superficie elástica de la losa, que tiene la misma forma y carga que la losa examinada pero simplemente apoyada en todo el contorno (Losa Navier)

$w_2(x, y)$: Es la ecuación, que representa la superficie elástica cuando se aplican momentos distribuidos en los bordes.

$w_3(x, y)$: Representa los efectos en la superficie elástica, cuando existen condiciones de borde libres de vínculos o cuando las esquinas tienen desplazamientos.

Como ejemplo práctico para entender mejor el principio de superposición y la generalización del método de las series: sea una losa rectangular cualquiera empotrada en sus bordes, sometida a una carga cualquiera como se indica en la figura 2.8.

Para resolver este caso se plantea la superposición de efectos. Primero se resuelve una losa idéntica, con la misma forma, dimensión y material que la losa estudiada, con las mismas condiciones de carga pero con la única diferencia que los bordes serán simplemente apoyados. Este tipo de solución ya se estudió anteriormente y es conocido como losa Navier.



En una segunda etapa se resuelve también una losa idéntica con bordes simplemente apoyados, pero esta vez se aplican solamente momentos distribuidos a lo largo del borde. Este momento debe tener un valor de tal manera que el giro que origina deberá ser igual al giro obtenido por la losa Navier para un mismo punto, pero en sentido contrario.

Finalmente al superponer se tiene una losa con giros y deflexión igual a cero en los bordes, cumpliendo las condiciones necesarias para que el borde sea empotrado.

Basados en este análisis, se podrá resolver losas rectangulares con cualquier condición de borde que se presente.

Por lo tanto:

$$w(x, y) = w_1(x, y) + \sum_{m=1}^{\infty} Y_m \sin(m\pi\varepsilon) + \sum_{n=1}^{\infty} X_n \sin(n\pi\eta) + P(x, y) \quad \text{Ec. 2.12}$$

donde:

$$w_1(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4abR\delta_0}{\pi^4 Dmn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad \text{Ec. 2.13}$$

$$Y_m = \frac{a^2}{Dm^2\pi^2} \left[(\mu_m \chi_2(\alpha, 1-\eta) + \mu'_m \chi_2(\alpha, \eta) + \nu_m \chi_0(\alpha, 1-\eta) + \nu'_m \chi_0(\alpha, \eta)) \right] \quad \text{Ec. 2.14}$$

$$X_n = \frac{b^2}{Dn^2\pi^2} \left[(m_n \chi_2(\beta, 1-\beta) + m'_n \chi_2(\beta, \varepsilon) + n_n \chi_0(\beta, 1-\beta) + n'_n \chi_0(\beta, \varepsilon)) \right] \quad \text{Ec. 2.15}$$

$$P(x, y) = \frac{1}{D} \left\{ f_A(1-\varepsilon)(1-\eta) + f_B(1-\varepsilon)\eta + f_C\varepsilon(1-\eta) + f_D\varepsilon\eta + \right. \\ \left. + \frac{a^2}{6} \left[(m_A(1-\eta) + m_B\eta)(\varepsilon^3 - 3\varepsilon^2 + 2\varepsilon) + (m_C(1-\eta) + m_D\eta)(\varepsilon - \varepsilon^3) \right] + \right. \\ \left. + \frac{b^2}{6} \left[(\mu_A(1-\varepsilon) + \mu_C\varepsilon)(\eta^3 - 3\eta^2 + 2\eta) + (\mu_B(1-\varepsilon) + \mu_D\varepsilon)(\eta - \eta^3) \right] \right\} \quad \text{Ec. 2.16}$$

Los coeficientes η_n , η'_n , ν_m y ν'_m permiten expresar las deformaciones, y los coeficientes m_n , m'_n , μ_m y μ'_m expresar los momentos flectores normales al contorno correspondientes a los lados $x=0$, $x=a$, $y=0$ e $y=b$, para todos los puntos de la losa. Los coeficientes del polinomio $P(x,y)$ permiten expresar las deformaciones y los momentos normales al contorno en las esquinas. De estos doce coeficientes es necesario introducir: los coeficientes f_A , f_B , f_C , y f_D cuando la esquina correspondiente puede desplazarse verticalmente; los coeficientes m_A , m_B , m_C y m_D ó μ_A , μ_B , μ_C y μ_D en el caso en que la esquina correspondiente y la losa puedan girar en la dirección de los ejes y ó x , conservando la posibilidad de desplazamiento vertical.

2.4 Ecuaciones para losas rectangulares empotradas en uno o más bordes

Considerando el punto (2.2) correspondiente a las condiciones de borde y la ecuación (2.12), se obtienen ecuaciones en series de la forma:

Cuando el borde $x=0$ está empotrado entonces el giro en este borde es igual a cero ($\theta_x=0$)

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b}{n\pi D} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4\delta_0 R}{\pi^2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2an\delta_0}{b\pi} [\mu_m + \mu'_m (-1)^{n+1}] - m_n \chi_3(\beta, 1) + m'_n \chi_3(\beta, 0) \right\} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

Ec. 2.17

Cuando el borde $x=a$ está empotrado entonces el giro en este borde es igual a cero ($\theta_x=0$)

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b}{n\pi D} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4\delta_0 R}{\pi^2} \cos(m\pi) - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2an\delta_0}{b\pi} [\mu_m + \mu'_m (-1)^{n+1}] (-1)^{m+1} - m_n \chi_3(\beta, 0) + m'_n \chi_3(\beta, 1) \right\} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

Ec. 2.18

Cuando el borde $y=0$ está empotrado entonces el giro en este borde es igual a cero ($\theta_y=0$)

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a}{m\pi D} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\delta_0 R}{\pi^2} - \mu_m \chi_3(\alpha, 1) + \mu'_m \chi_3(\alpha, 0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2bm\delta_0}{a\pi} [m_n + m'_n (-1)^{m+1}] \right\} \sin \frac{m\pi x}{a}$$

Ec. 2.19

Cuando el borde $y=b$ está empotrado entonces el giro en este borde es igual a cero ($\theta_y=0$)

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a}{m\pi D} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\delta_0 R}{\pi^2} \cos(n\pi) - \mu_m \chi_3(\alpha, 0) + \mu'_m \chi_3(\alpha, 1) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2bm\delta_0}{a\pi} [m_n + m'_n (-1)^{m+1}] (-1)^{n+1} \right\} \sin \frac{m\pi x}{a}$$

Ec. 2.20

También, tomando en consideración los planteamientos del punto (2.2), se obtienen expresiones para los otros tipos de bordes como son: el borde simplemente apoyado, el borde libre o cuando una de las esquinas presentan desplazamientos en el eje Z. Definiendo de esta manera las expresiones para resolver problemas de losas rectangulares con cualquier condición de borde que pueda presentarse.

2.5 Precisión del método

2.5.1 Análisis para una carga puntual y pseudo-puntual

Se plantea dos tipos de comparaciones para el análisis de una carga puntual: primero, para una carga aplicada en un área decreciente (cuando esta área es muy pequeña se le llama carga pseudo-puntual). Luego, el efecto de una carga puntual en las proximidades del punto de aplicación de ésta. En el primer caso se compara también con resultados obtenidos por Timoshenko.

CASO 1

- Para el análisis de una carga puntual y pseudo puntual se aplica una carga "P" en un área decreciente ($c \times d$) en una losa empotrada en sus cuatro bordes con relación de lados $b/a=1$ y de la carga $c/d=1$, y coeficiente de Poisson ($\mu=0.30$) como se indica en la figura 2.9. La relación entre el lado del rectángulo donde está aplicada la carga y el lado de la losa (c/a) varía desde 0.1 hasta 0.0. Adicionalmente se compara con el valor que obtuvo Timoshenko.

En el cálculo de las flechas (figura 2.10) la diferencia considerando por ejemplo 1 y 2 términos de la serie es de 31% en promedio para cada caso. Esta diferencia decrece rápidamente al considerar más términos. Así, para 10 términos las diferencias varían de 0.09% a 0.15% en cada caso. Por lo tanto, será necesario obtener cierta cantidad de términos "N" de la serie, lo cual proporcionará valores suficientemente precisos.

El Ingeniero, al analizar un proyecto típico, se ve en la necesidad de considerar cargas aplicadas en áreas pequeñas como puntuales (pseudo-puntual). Para una carga rectangular de lado 0.25m aplicada en una losa de 5.00m de lado, por ejemplo, cuya relación (c/a) es de 0.05 normalmente esta carga se consideraría como puntual. Al comparar el resultado obtenido por la carga pseudo-

ANALISIS PARA UNA CARGA PUNTUAL Y PSEUDO-PUNTUAL

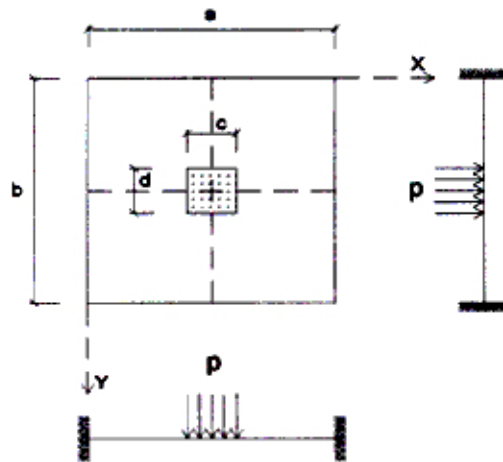


Fig. 2.9

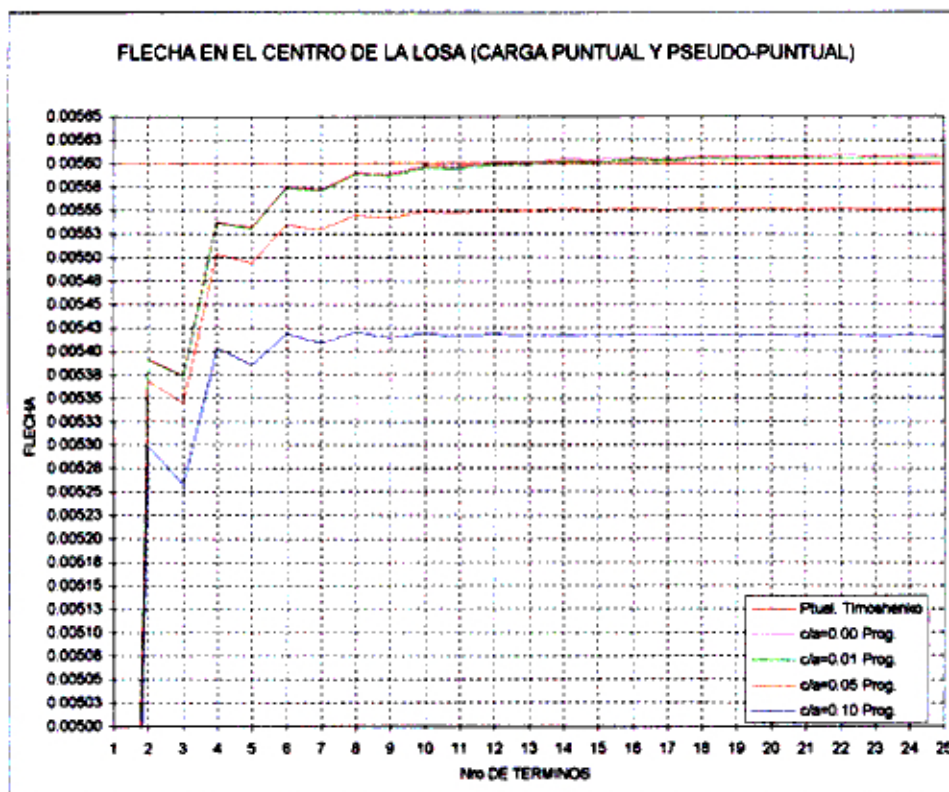


Fig. 2.10

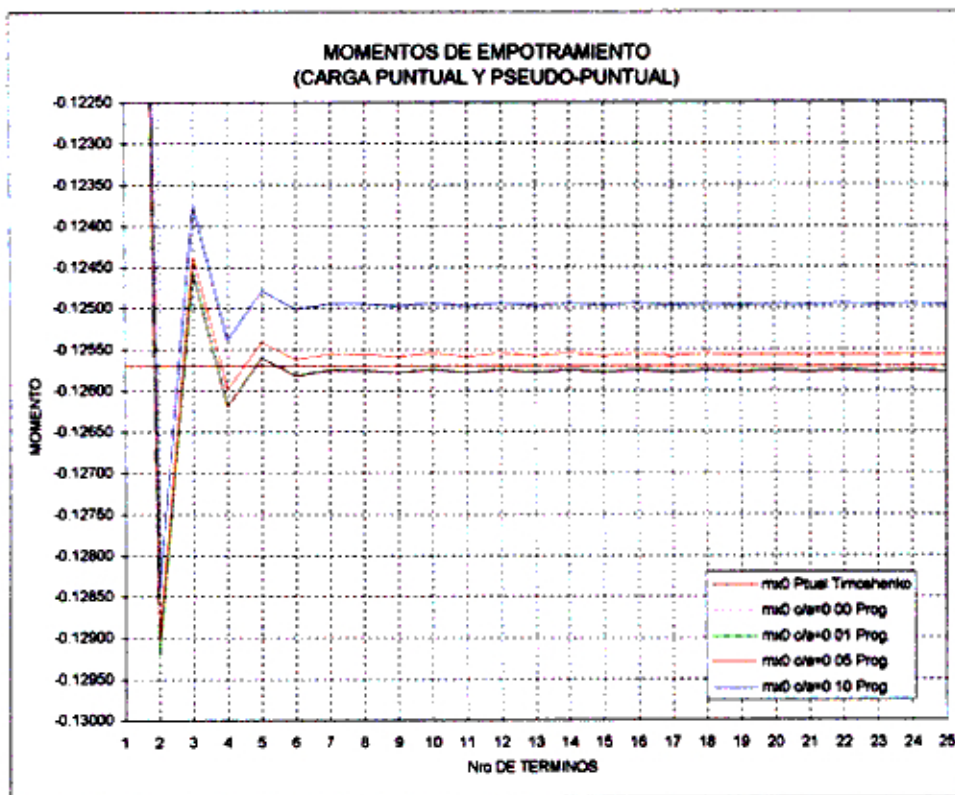


Fig. 2.11

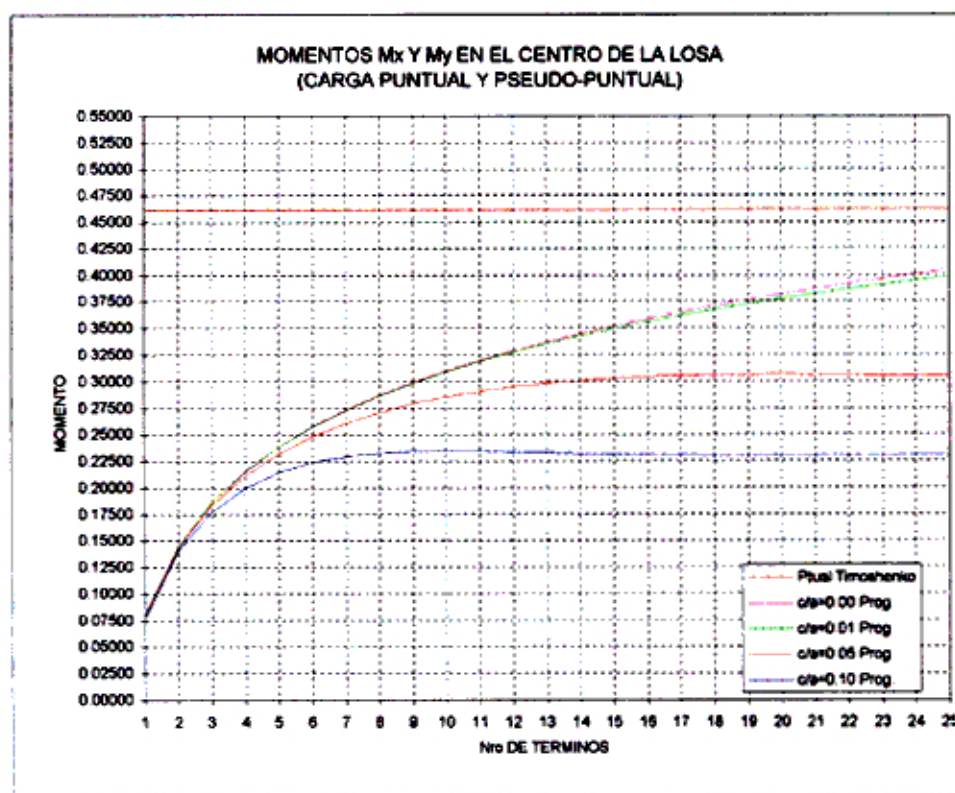


Fig. 2.12

puntual y puntual se tienen diferencias del orden de 1.5%; y para una relación (c/a) de 0.10 diferencias de 4.0%. Por lo tanto, al incrementar esta relación también se incrementan las diferencias.

Al analizar los momentos de empotramiento (Figura 2.11) la diferencia de éstos considerando 1 y 2 términos de la serie es de 22% en promedio para cada caso; para 10 términos se tiene diferencias de 0.03% en cada caso.

Es así que, para una relación de lados (c/a) de 0.05 la diferencia es del orden de 0.2% y para una relación de 0.10 la diferencia es de 0.7%, (referido a la carga puntual respecto de la pseudo-puntual).

Al analizar los momentos que se obtienen donde está aplicada la carga puntual o pseudo-puntual (Figura 2.12) la diferencia considerando 1 y 2 términos de la serie es de 46% en promedio para cada caso; para 10 términos se tienen diferencias entre 0.2% a 4.0% en cada caso.

Para una relación de lados (c/a) de 0.05 la diferencia es 33% y para una relación de 0.10 la diferencia es de 75%, (referido a la carga puntual respecto de la pseudo-puntual)

Los valores ofrecidos por Timoshenko son todavía mas conservadores. La diferencia que se obtiene al calcular el momento bajo la carga pseudo-puntual donde (c/a) es 0.1 y la carga puntual es de 100%; y para una relación de lados (c/a) de 0.01 la diferencia es 16%.

Por lo tanto, para un análisis típico al considerar la carga que está aplicada en un área pequeña como carga puntual, se obtiene resultados muy conservadores especialmente en el punto donde está aplicada la carga.

CASO 2

- Momentos a una distancia "d," del punto de aplicación de una carga puntual "P" en una losa simplemente apoyada en sus cuatro bordes, con relación de lados b/a=1 y coeficiente de Poisson ($\mu=0.30$), según la figura 2.13.

sea:

$$d = \frac{d_1}{a}$$

ANÁLISIS PARA UNA CARGA PUNTUAL

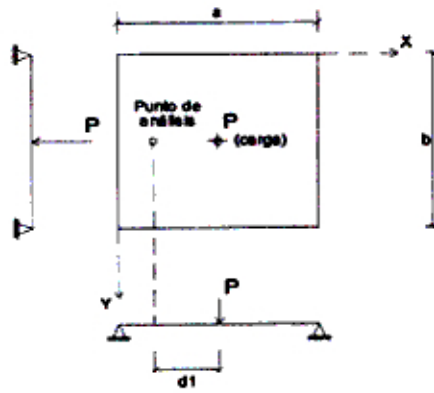


Fig. 2.13

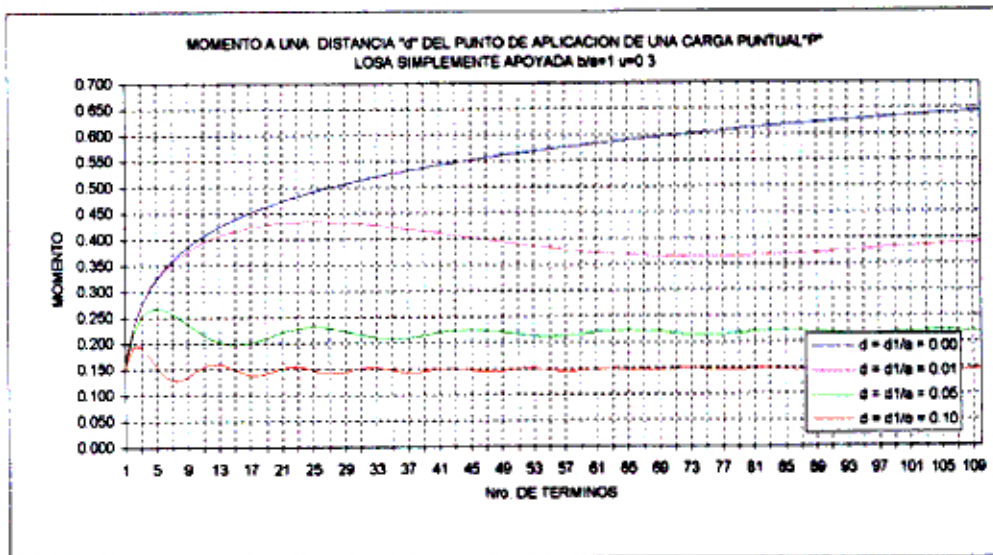


Fig. 2.14

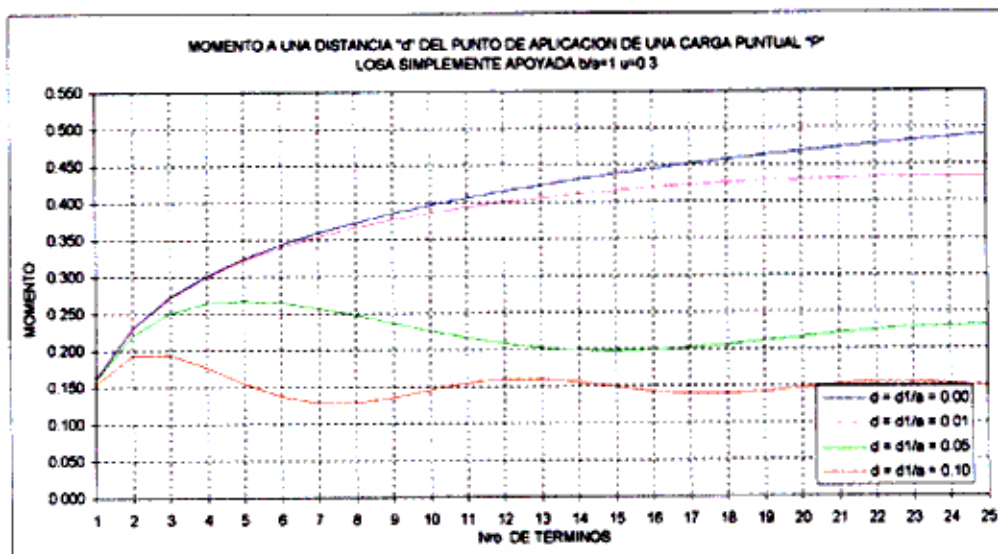


Fig. 2.15

En las figuras 2.14 y 2.15 se representan los valores de los momentos. En la primera se consideró 110 términos de la serie y en la segunda solamente 25 términos.

Considerando que la solución con 110 términos de la serie proporciona un valor muy próximo al exacto.

Así, para obtener un mismo porcentaje de error para cada "d" se necesita mayor cantidad de términos de la serie conforme "d" sea más pequeño.

Los porcentajes de error para los momentos que se obtienen son por ejemplo: para 2 términos 31.6%, 1.3%, 41.1% y 64.2% para valores de "d" de 0.10, 0.05, 0.01 y 0.00 respectivamente; para 10 términos son: 1.5%, 3.4%, 1.3% y 38.5% para cada caso; para 25 términos son: 0.3%, 5.8%, 10.7% y 23.8% para cada caso; y para 100 términos son: 0.7%, 0.4%, 2.1% y 1.4% para cada caso.

Se hace necesario considerar muchos términos de la serie para obtener momentos en las cercanías del punto de aplicación de estas cargas puntuales.

2.5.2 Análisis para cargas distribuidas y triangulares

La precisión del método se analiza ahora para cargas distribuidas y cargas triangulares en una losa empotrada en sus cuatro bordes. Para cada uno de estos casos se hará una comparación con los resultados propuestos por Kalmanok y Timoshenko.

2.5.2.1 Para una carga distribuida sobre una losa empotrada con relación de lados variable

Se estudiarán dos casos: primero, se analiza la convergencia y el porcentaje de error para un incremento del número de términos de la serie. Luego, la convergencia cuando existe una variación en la relación de lados (b/a) en la losa.

Se consideran los resultados obtenidos para 50 términos de la serie como muy cercanos a los valores exactos. Basados en la consideración precedente se analizarán los resultados.

CASO 1

- La figura 2.16 muestra la disposición de la losa donde: los cuatro bordes están empotrados, la carga "q" es uniformemente distribuida en toda la losa, el coeficiente de Poisson es $\mu=0.30$ y la relación de lados b/a es igual a uno.

Las flechas (figura 2.17), los momentos de empotramiento (figura 2.18) y los momentos en el centro de la losa (figura 2.19) tienen errores del 0.5% en promedio al considerar los primeros 5 términos de la serie, y un error menor que 0.1% para 10 términos.

Los valores que muestran Kalmanok y Timoshenko difieren apenas en un 0.5% para las flechas y los momento de empotramiento, y en 0.9% para los momentos en el centro de la losa.

CASO 2

- La figura 2.20 muestra la disposición de la losa donde: los cuatro bordes están empotradas, la carga "q" es uniformemente distribuida en toda la losa, el coeficiente de Poisson es $\mu=0.30$ y la relación de lados b/a es variable tomando valores de 1.0, 1.5, 2.0 y 5.0 respectivamente.

Se muestra para el análisis: las flechas (figura 2.21), los momentos de empotramiento (figura.2.22) y los momentos en el centro de la losa (figuras 2.23 y 2.24).

En este caso se aprecia que: a medida que se incrementa la relación de lados (b/a) la convergencia se hace más lenta. Así, para obtener una misma calidad de resultados para una relación de lados alta, es necesario considerar una mayor cantidad de términos de la serie.

Por ejemplo, para el momento M_y en el centro de la losa: al considerar sólo 5 términos se tienen errores de 0.35%, 0.77%, 1.65% y 10.63% para relaciones de lados (b/a) de 1.0, 1.5, 2.0 y 5.0 respectivamente; al considerar 10 términos se tienen resultados con errores de 0.05%, 0.11%, 0.23% y 1.75%. Sólo se está analizando el momento M_y en el centro de la losa por ser análogos los otros resultados de momentos y flechas.

ANÁLISIS PARA UNA CARGA DISTRIBUIDA ($b/a=1$)

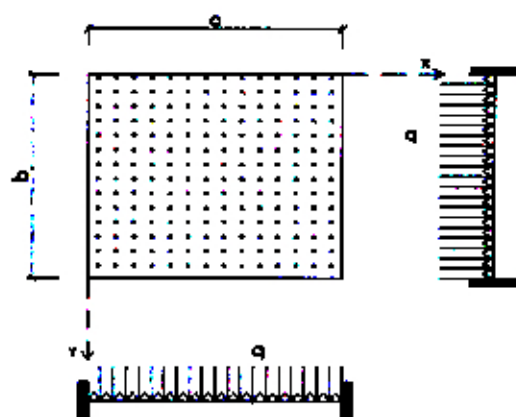


Fig. 2.16

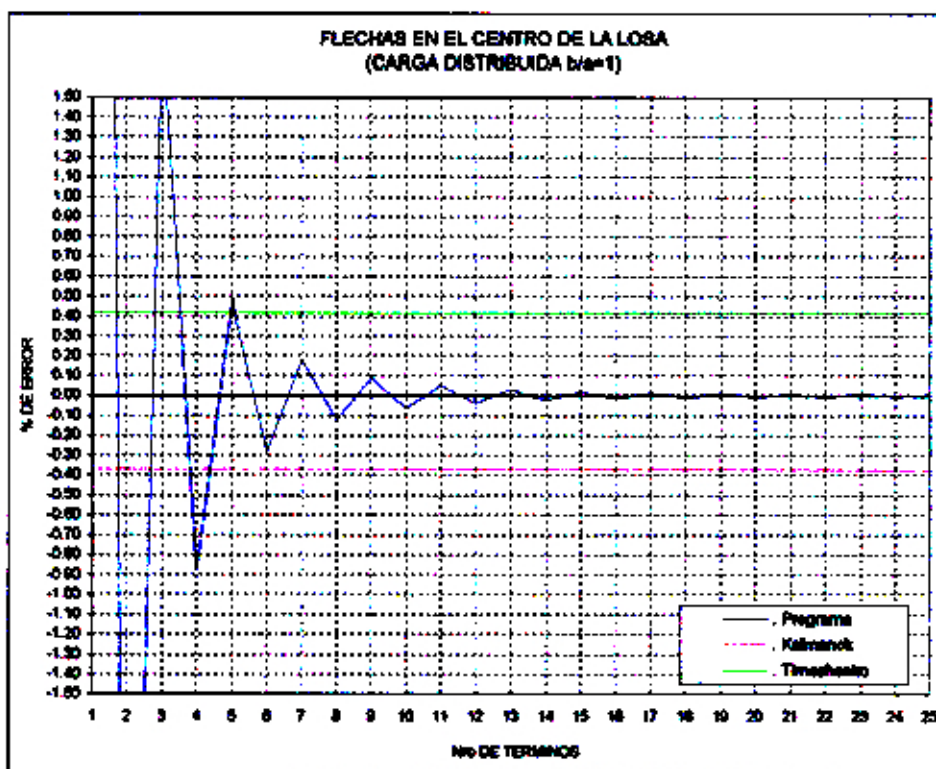


Fig. 2.17

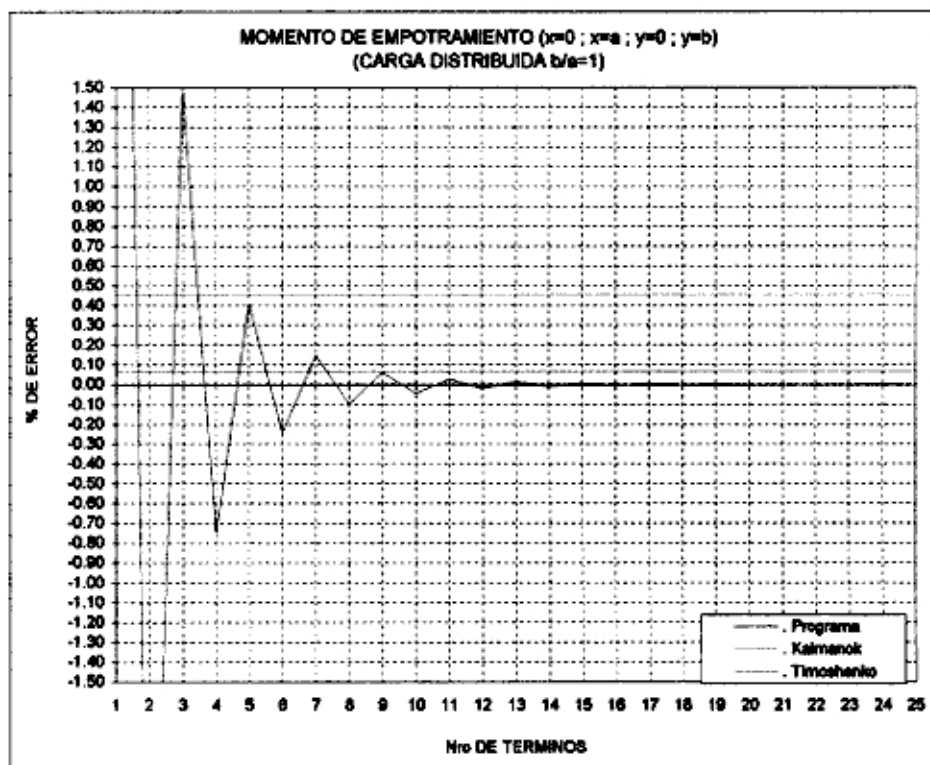


Fig. 2.18

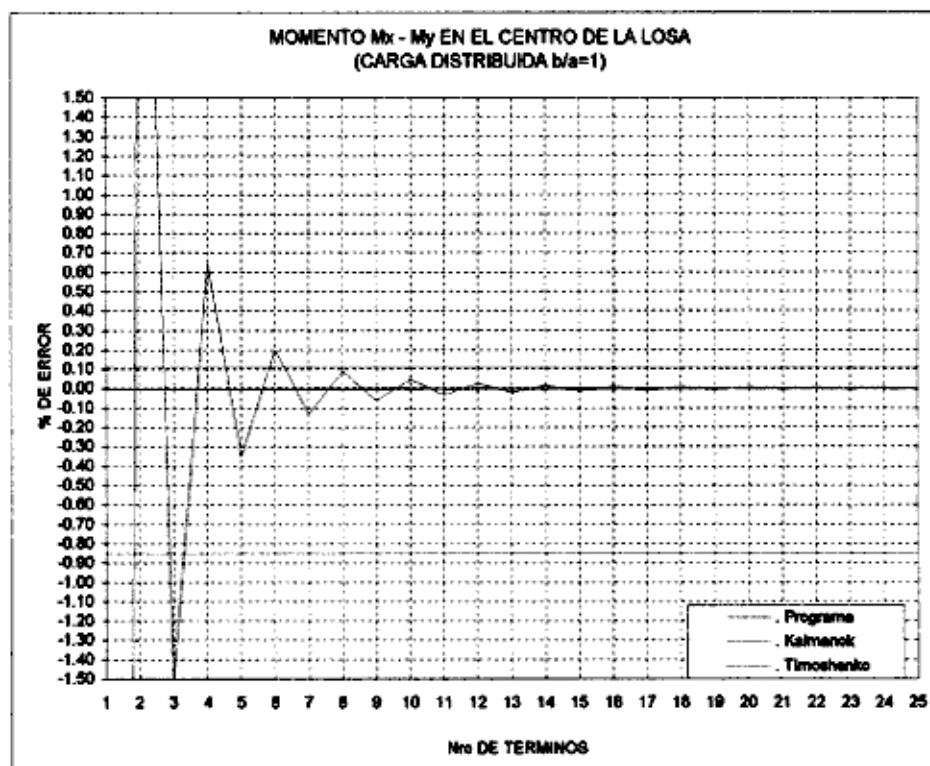


Fig. 2.19

ANÁLISIS PARA UNA CARGA DISTRIBUIDA (b/a =variable)

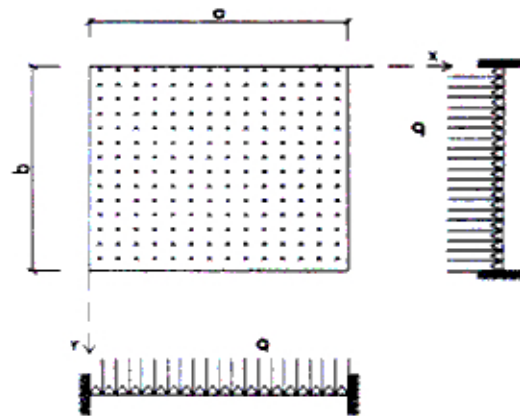


Fig. 2.20

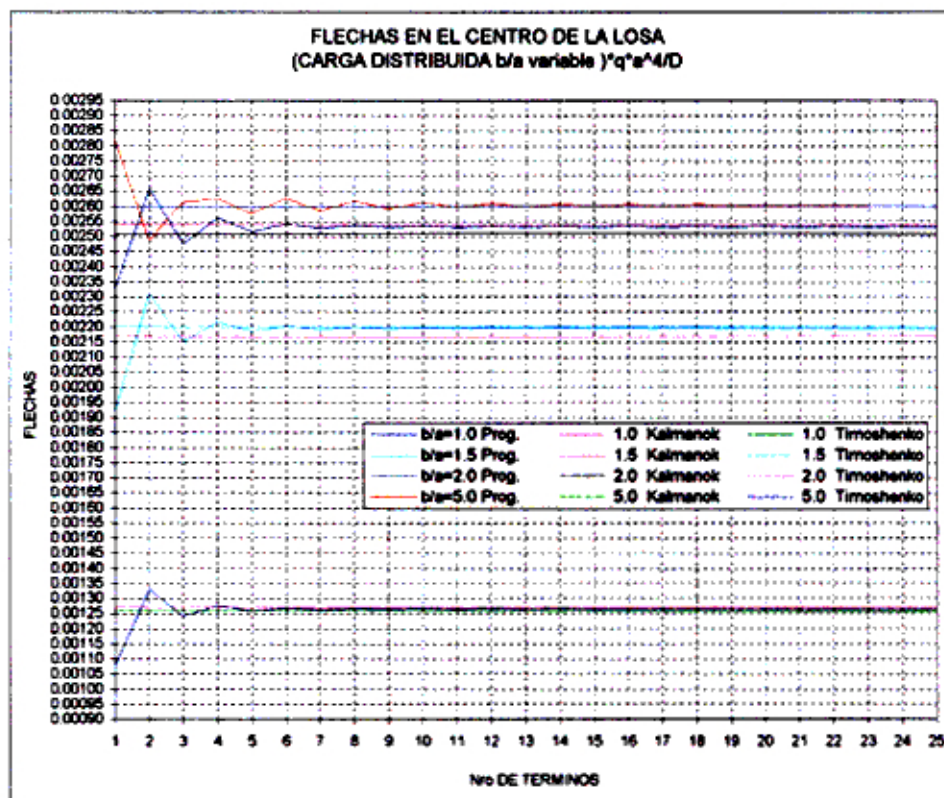


Fig. 2.21

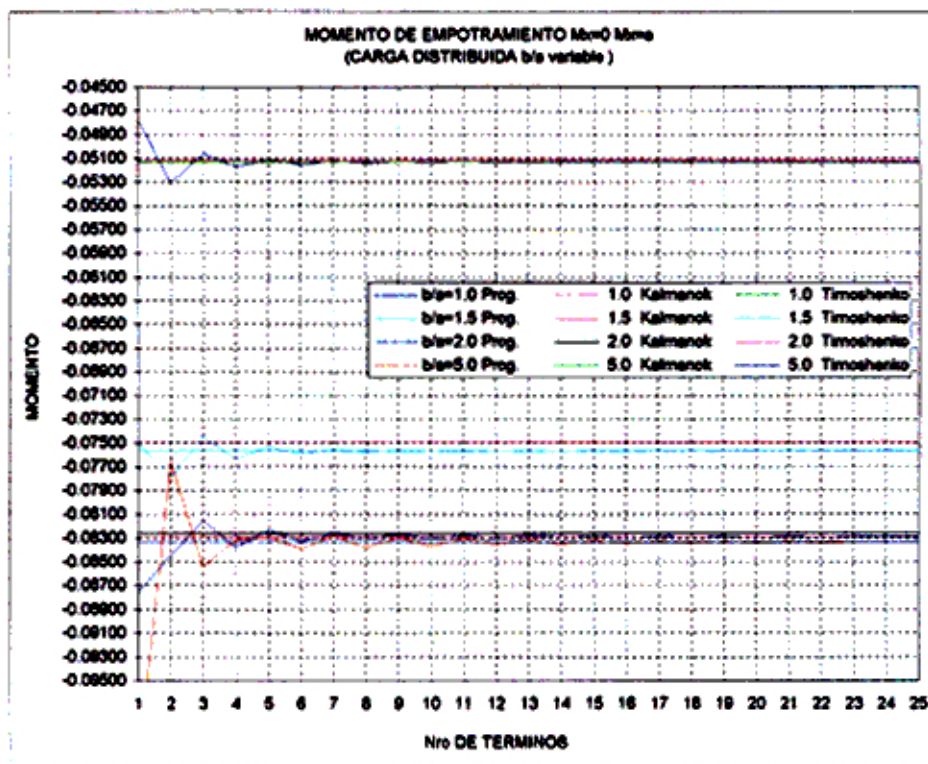


Fig. 2.22

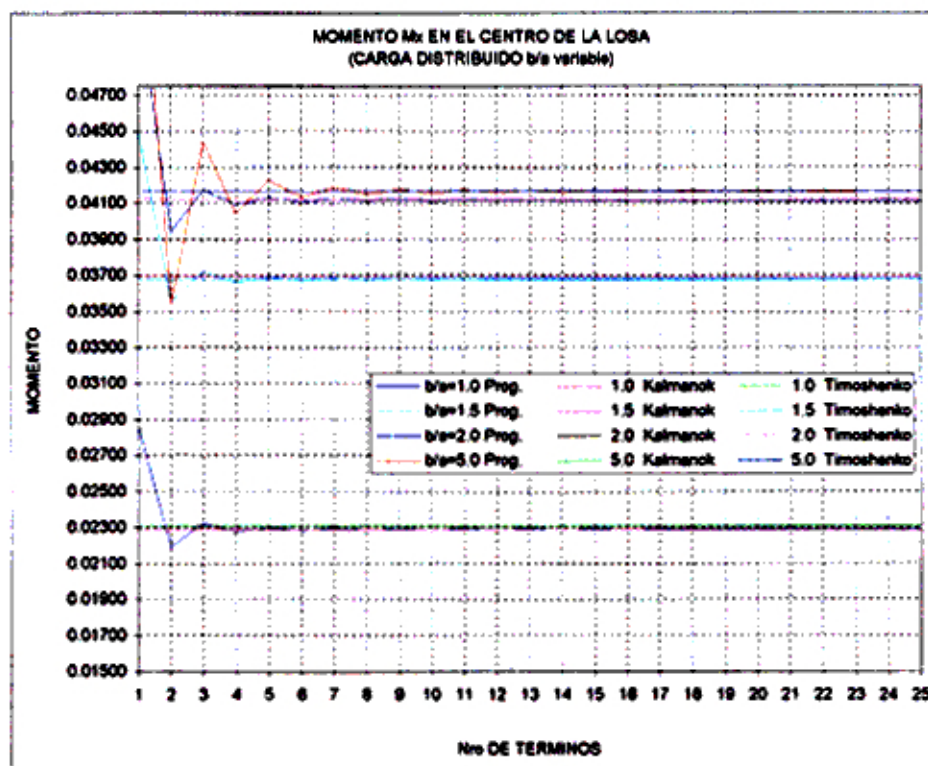


Fig. 2.23

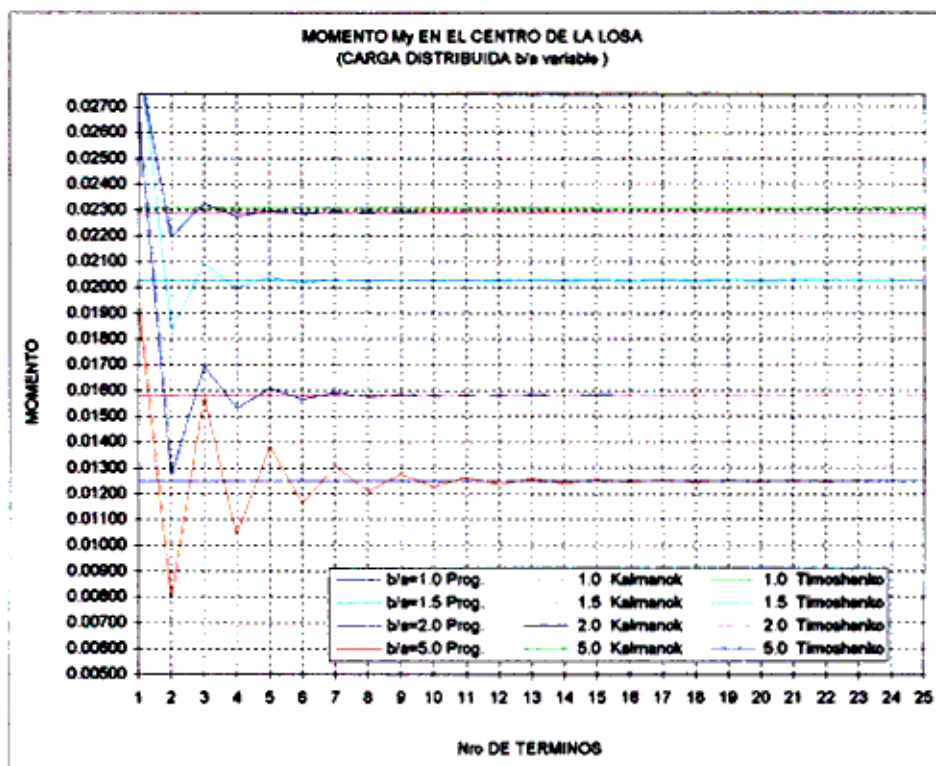


Fig. 2.24

2.5.2.2 Para una carga triangular sobre una losa empotrada con relación de lados variable

De igual forma se estudia dos casos: primero, la convergencia y el porcentaje de error para un incremento del número de términos de la serie. Luego, la convergencia cuando existe una variación en la relación de lados (b/a) en la losa.

Se consideran los resultados obtenidos para 50 términos de la serie como muy cercanos a los valores exactos. Basados en la consideración precedente se analizarán los resultados.

CASO 1

- La figura 2.25 muestra la disposición de la losa donde: los cuatro bordes están empotrados, la carga "q" es triangular, el coeficiente de Poisson $\mu=0.0$ y la relación de lados (b/a) es igual a uno.

Las flechas (figura 2.26), los momentos de empotramiento (figuras 2.27, 2.28 y 2.29), y los momentos en el centro de la losa (figura 2.30) tienen errores que van desde 0.20% hasta 0.75% al considerar los primeros 5 términos de la serie; y un error menor de 0.1% para 10 términos.

Los valores que muestran Kalmanok varían entre 0.10% y 1.75% y los de Timoshenko entre 0.10% y 2.10%.

CASO 2

- La figura 2.31 muestra la disposición de la losa donde: los cuatro bordes están empotrados, la carga "q" es triangular, el coeficiente de Poisson es $\mu=0.30$ y la relación de lados (b/a) es variable y son: 1.0, 1.5 y 5.0 respectivamente.

Se muestra para el análisis: las flechas (figura 2.32), los momentos de empotramiento (figuras 2.33, 2.34 y 2.35) y los momentos en el centro de la losa (figuras 2.36 y 2.37).

ANÁLISIS PARA UNA CARGA TRIANGULAR ($b/a=1$)

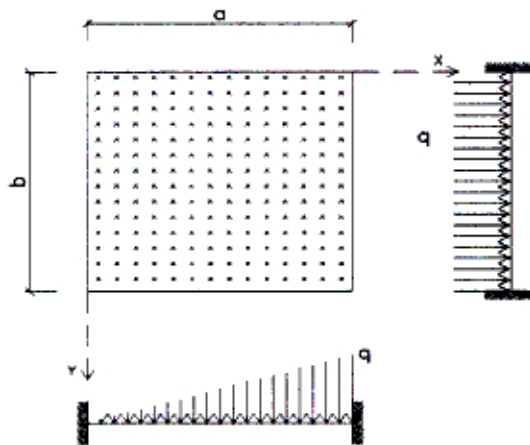


Fig. 2.25

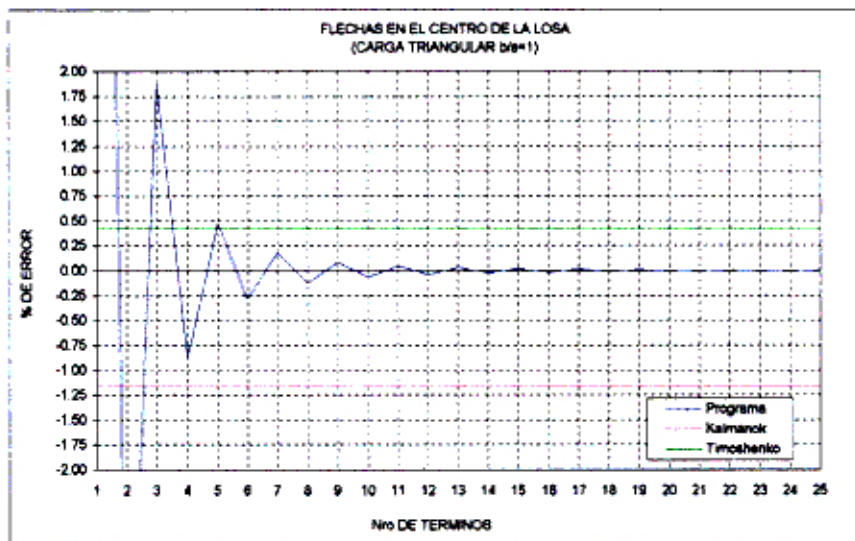


Fig. 2.26

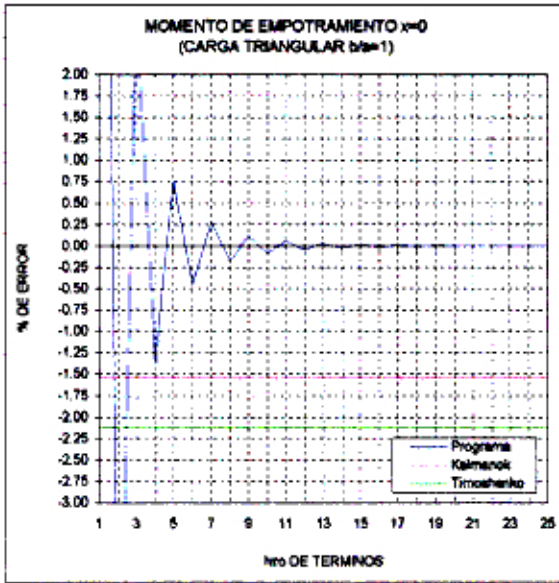


Fig. 2.27

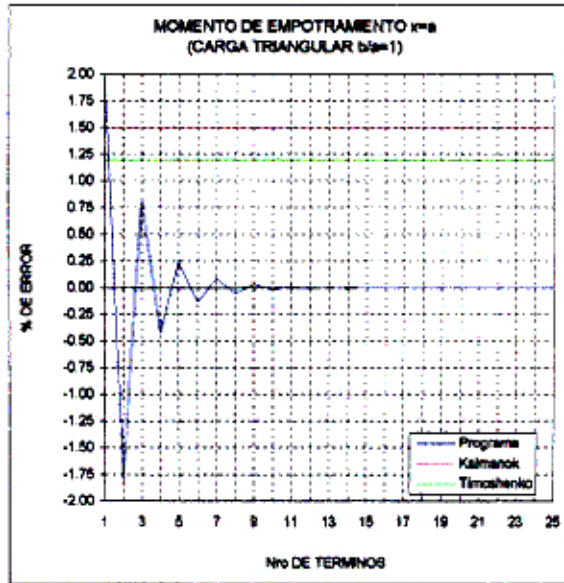


Fig. 2.28

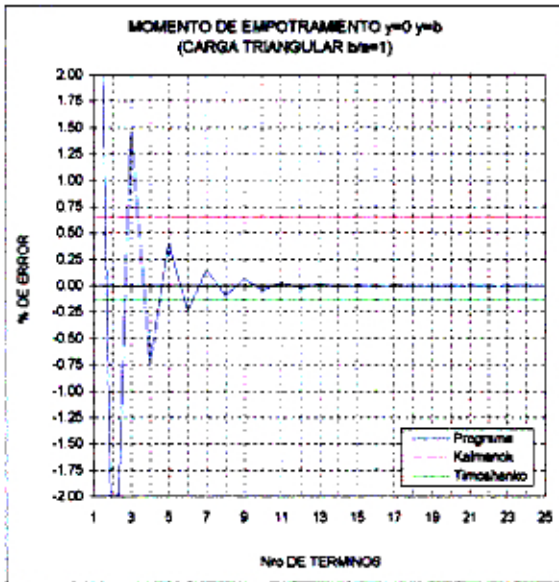


Fig. 2.29

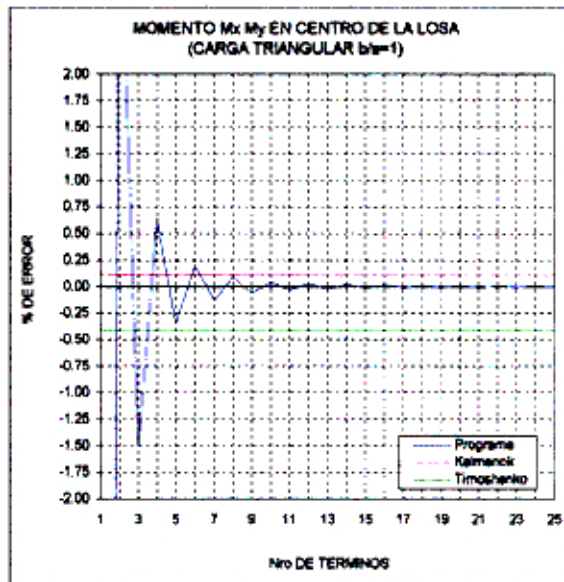


Fig. 2.30

ANÁLISIS PARA UNA CARGA TRIANGULAR (b/a=variable)

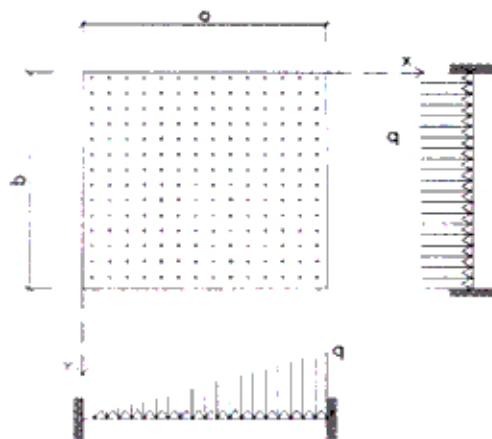


Fig. 2.31

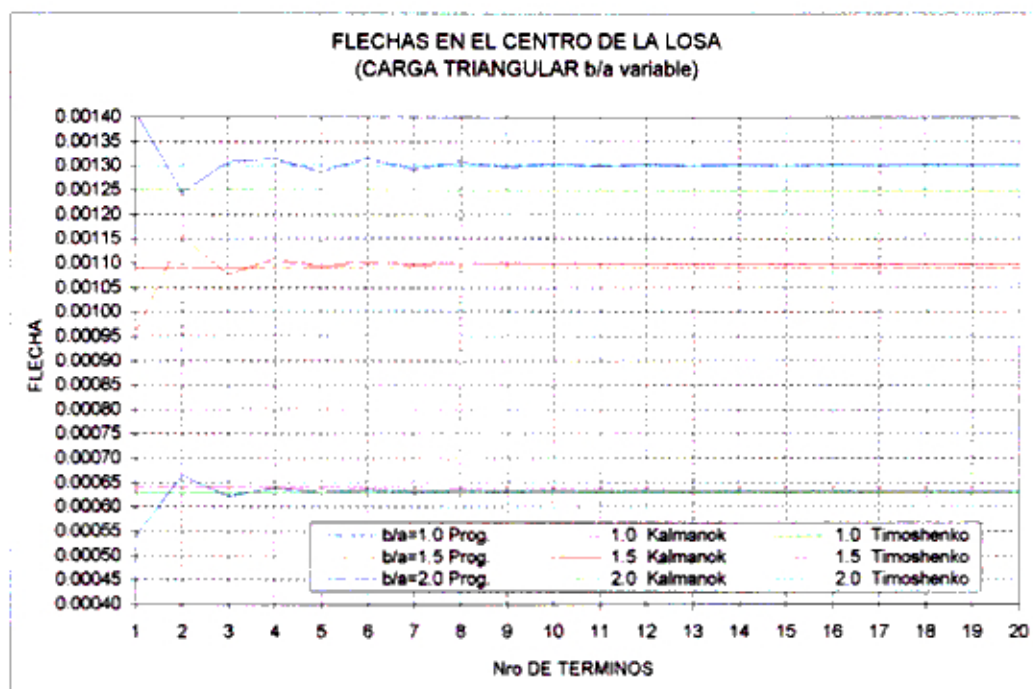


Fig. 2.32

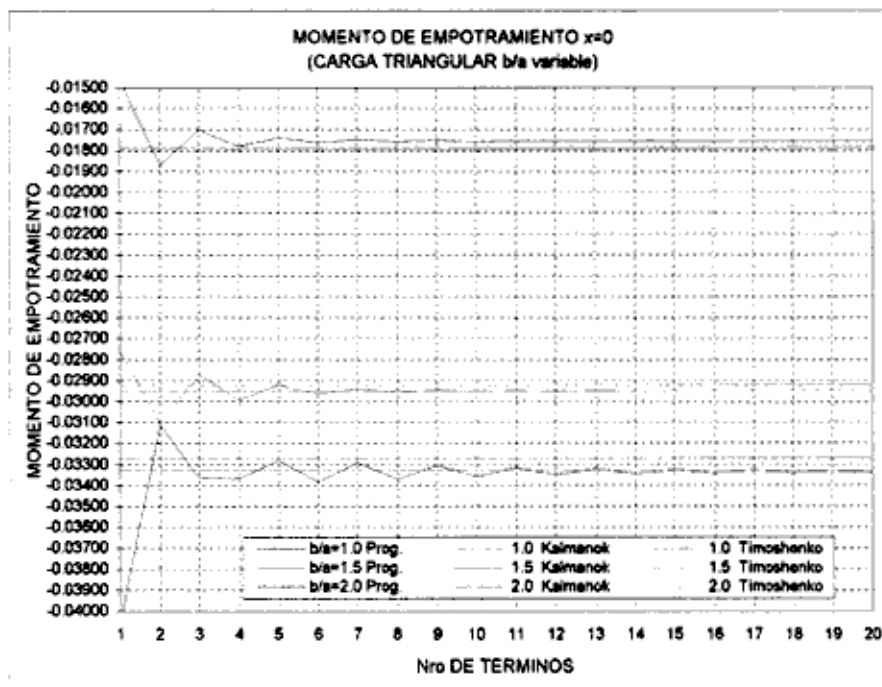


Fig. 2.33

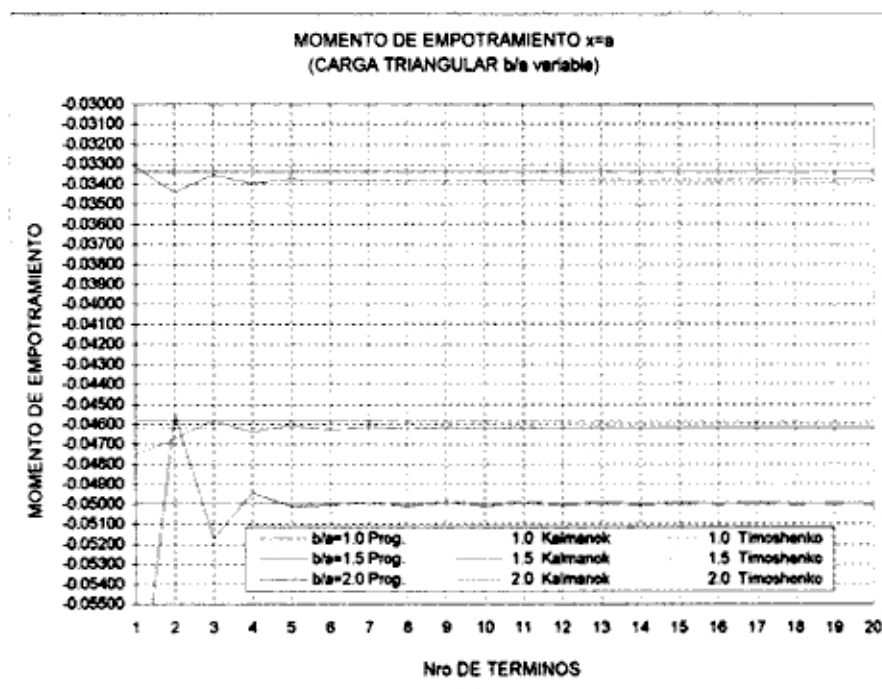


Fig. 2.34

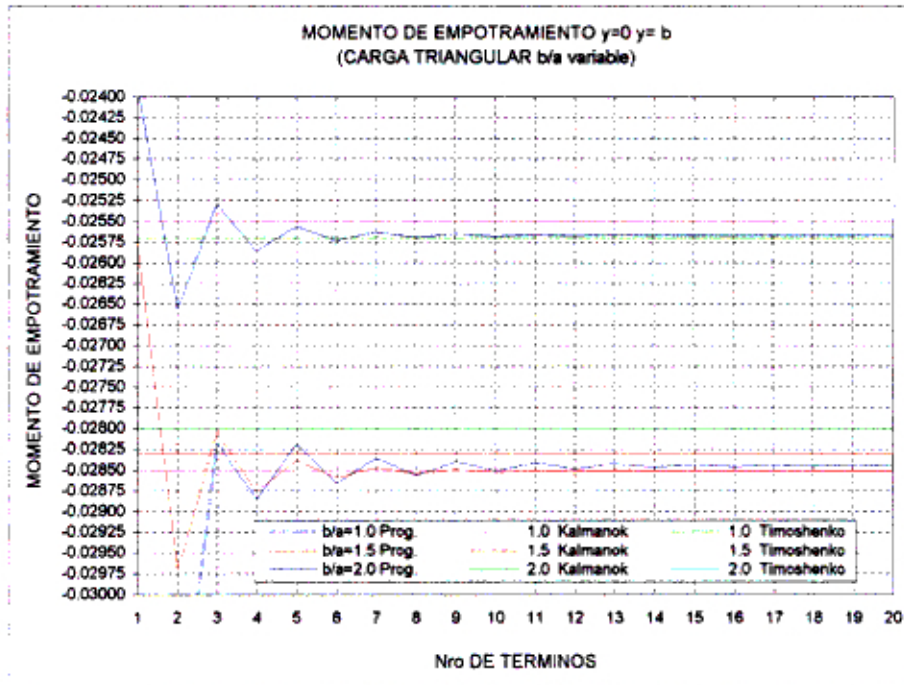


Fig. 2.35

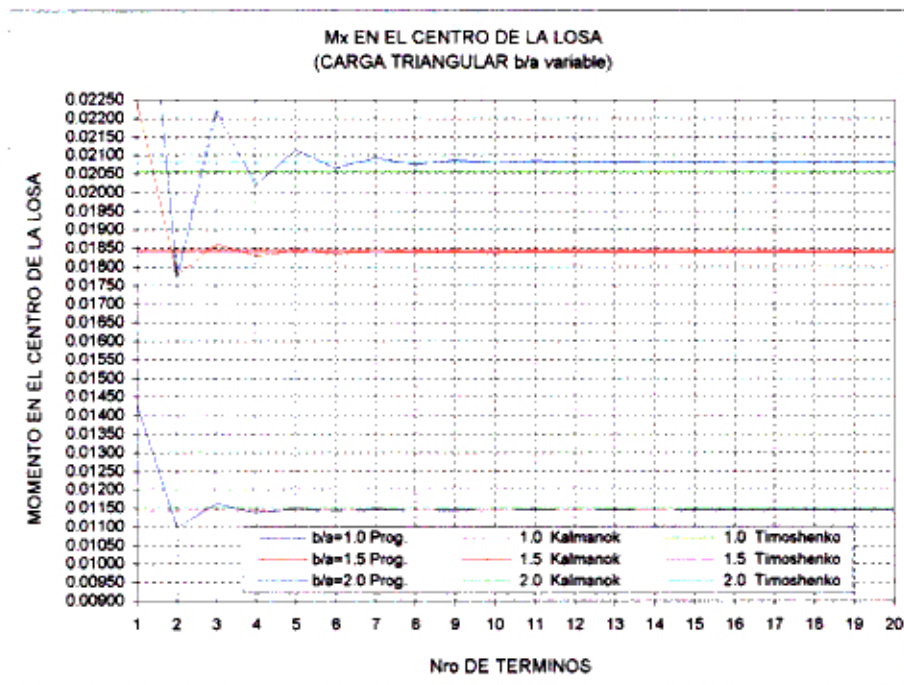


Fig. 2.36

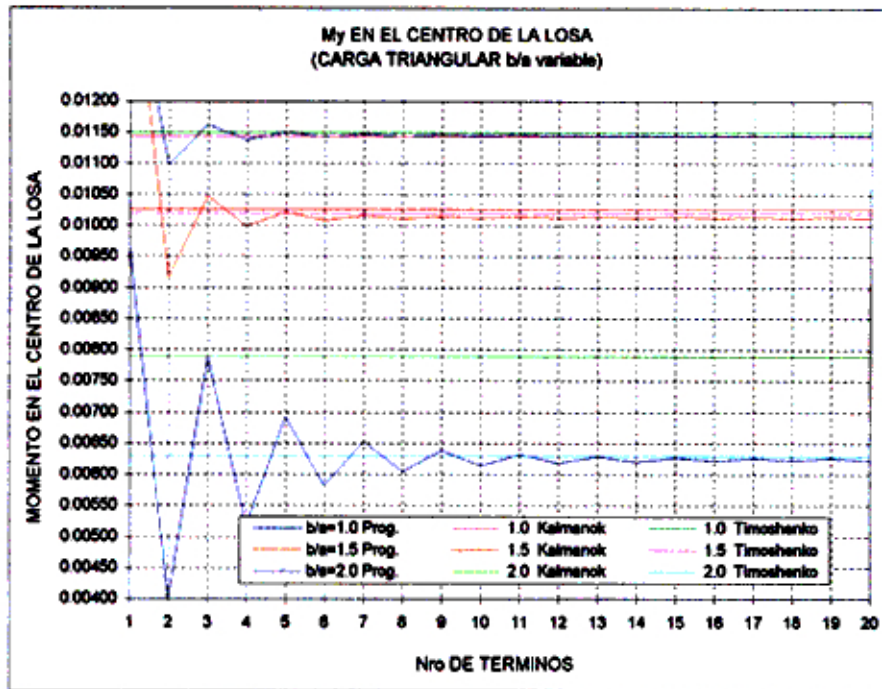


Fig. 2.37

En este caso se aprecia que también a medida que se incrementa la relación de lados (b/a) la convergencia se hace más lenta.

Solo se analiza para el caso del momento M_y en el centro de la losa, los otros resultados son análogos. Al considerar solo 5 términos se tienen errores de 0.36%, 0.79% y 11.00% para relaciones de lados de 1.0, 1.5 y 5.0 respectivamente; al considerar 10 términos se obtienen resultados con errores de 0.04%, 0.09% y 1.41%.

2.5.3 Conclusión

Luego de analizar la convergencia de los resultados para las flechas y los momentos en puntos especiales ya sea para carga puntuales, pseudo-puntuales, distribuidas o triangulares en condiciones de borde arbitrarias, como también, la influencia de la relación de los lados, se obtienen resultados confiables con una buena calidad (con errores del orden de 1.0%) para 10 términos de la serie. Con ésta cantidad de términos se harán las operaciones matemáticas en el programa que se hizo para el desarrollo de esta tesis.

En el análisis se consideran las cargas aplicadas en pequeñas áreas como tal, ya que al considerar estas cargas como puntuales originan una singularidad en el punto de aplicación, obteniéndose valores muy conservadores.

CAPITULO 03

LOSAS CONTINUAS

Los problemas en los que se presentan losas continuas en una dirección, en dos direcciones y en el espacio (como por ejemplo un tanque elevado) son frecuentes en el diseño estructural.

La necesidad de contar con una herramienta alternativa para resolver losas continuas con cualquier condición de borde y que, además, proporcione resultados más precisos, conlleva a desarrollar un programa de cómputo.

Se presentan comparaciones de resultados entre varios métodos como son: el método de las series con el programa desarrollado para esta tesis, el método de los elementos finitos con el programa de cómputo SAP90, el método de los coeficientes del ACI, los resultados propuestos por la referencia (1) de la bibliografía y algunos métodos prácticos.

Finalmente se proponen patrones de cargas para obtener los máximos momentos.

3.1 Métodos de solución

3.1.1 Método práctico

Para determinar los momentos positivos en el interior de cualquiera de las losas (como ejemplo: la losa central del corte (1-1) de la figura 3.1) se parte de la disposición más desfavorable de las cargas sobre los distintos paños de la losa. Para ello se aplica la carga distribuida transitoria P_{tr} sobre la losa estudiada, y en forma de tablero de ajedrez sobre las demás losas como se indica la figura 3.1. Entonces, la carga total: $P = P_p + P_{tr}$ se puede estudiar como la suma de dos cargas convencionales:

$$G_o = P_p + \frac{P_{tr}}{2} \quad \text{y} \quad P_o = \pm \frac{P_{tr}}{2}$$

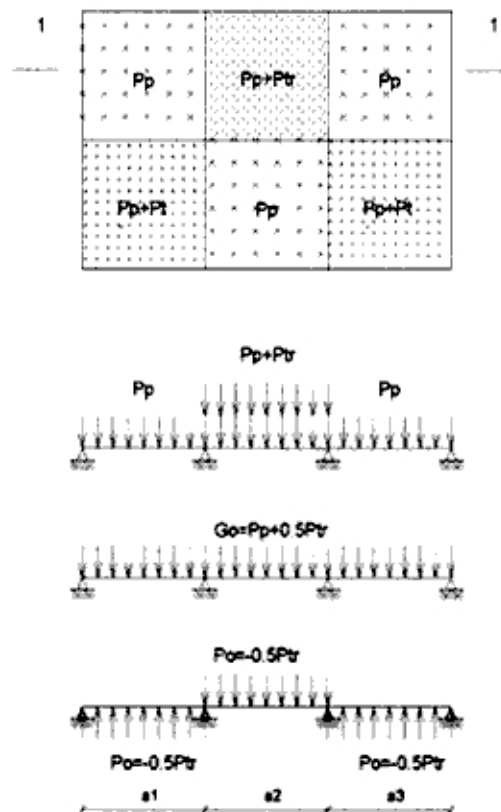


Fig. 3.1

En este caso la carga G_0 actúa en todos los tramos de la losa, para esta carga los lados comunes a dos tramos de la losa se consideran como rígidamente empotrados. La carga P_0 actúa en tramos adyacentes en sentido contrario alternadamente; para esta carga todos los tramos deben estudiarse como libremente apoyados en todo el contorno.

Para determinar los momentos negativos de apoyo, es necesario considerar cargados todos los tramos de la losa. El valor del momento se obtiene como el promedio de los momentos de apoyo en los tramos adyacentes al apoyo estudiado.

Los valores de todos estos momentos pueden ser calculados con el uso de tablas propuestas por: Kalmanok, Timoshenko o cualquier otra solución para losas de un solo paño.

3.1.2 Método de las series

La figura 3.2 muestra la distribución de un conjunto de losas continuas, para los cuales se adopta las siguientes consideraciones: los soportes intermedios no ceden a la presión en la dirección transversal y no presentan ninguna resistencia al giro. Con estas hipótesis la flexión de cada paño se calcula fácilmente combinando las soluciones conocidas para losas rectangulares cargadas transversalmente simplemente apoyadas, con losas rectangulares flexadas por los momentos repartidos a lo largo de los bordes, también, simplemente apoyadas figura 2.8.

3.1.2.1 Condición de borde

El estudio de las condiciones de borde, para los bordes exteriores, se desarrolló en el capítulo 02. La condición de borde para los lados comunes (como por ejemplo el lado 6-10 de la figura 3.2) de dos losas adyacentes ($i-1$ e i) es como sigue: el giro en el borde 6-10 de la losa ($i-1$) será igual al giro en el mismo borde de la losa (i). Además, los desplazamientos en dicho borde son iguales a cero.

$$\theta_{x_{6-10} \text{losa}(i-1)} = \theta_{x_{6-10} \text{losa}(i)} \quad y \quad w=0$$

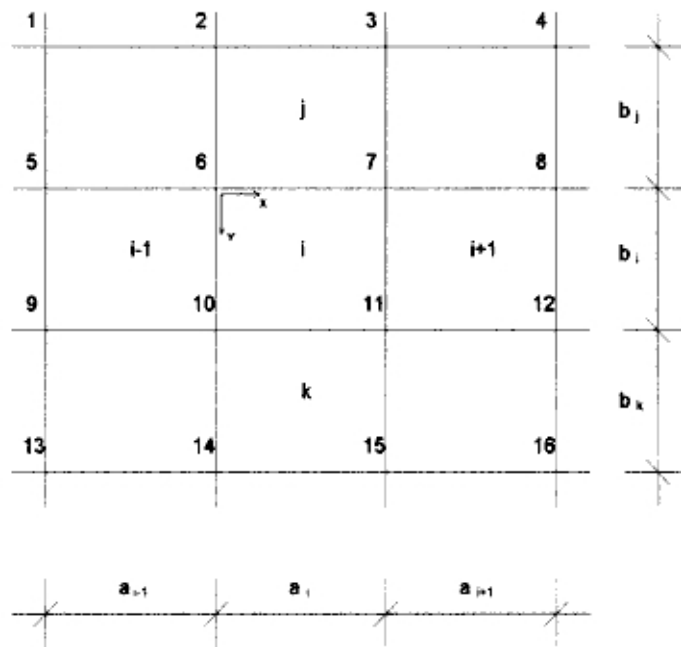


Fig. 3.2

Al igualar los giros en el lado 6-10 se obtiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} & -m_{n_{i-1}} \frac{b_{i-1}}{D_{i-1}} \chi_{3,1}(\beta, 0) + m_{n_i} \left[\frac{b_{i-1}}{D_{i-1}} \chi_{3,1}(\beta, 1) + \frac{b_i}{D_i} \chi_{3,1}(\beta, 1) \right] - m_{n_i} \frac{b_i}{D_i} \chi_{3,1}(\beta, 0) - \\ & - \frac{2n}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{a_{i-1}}{D_{i-1}} \delta_{0,i-1} \left\{ \mu_{m,i-1} + \mu_{m,i-1} (-1)^{n+1} \right\} (-1)^{m+1} + \frac{a_i}{D_i} \delta_{0,i} \left\{ \mu_{m,i} + \mu_{m,i} (-1)^{n+1} \right\} \right] = \\ & = \frac{4}{\pi^2} \left[\sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \delta_{0,i} \frac{R_i b_i}{D_i} - \delta_{0,i-1} \frac{R_{i-1} b_{i-1}}{D_{i-1}} \cos(m\pi) \right\} \right] \end{aligned}$$

Ec. 3.2

Y de forma análoga, se pueden obtener las expresiones para los bordes perpendiculares a la dirección Y.

3.2 Comparación del método de las series si $b \gg a$ con la solución de vigas

Se hace una comparación de los resultados que se obtienen al ejecutar el programa desarrollado para losas continuas, y los resultados del análisis de vigas tratadas como estructuras de barras. Para lo cual se resuelve un conjunto de losas continuas (3) de lados iguales en la dirección X, el lado en la dirección Y comparado con el otro es mucho mayor, para una relación de lados b/a igual a 10 por ejemplo, como indica la figura 3.3.

También se resuelve un conjunto de vigas (3) de la misma longitud que el lado de la losa en la dirección X, del mismo espesor y con las mismas condiciones de borde siendo éstas simplemente apoyadas.

Los sistemas de cargas distribuidas son aplicadas con la misma disposición, tanto para la viga como para la losa. En el primer sistema de cargas solo se aplica la carga distribuida en la losa cuyo lado es "a1", y en la viga de longitud "a1"; en el segundo sistema se aplican las cargas distribuidas en las losas adyacentes de lados "a1" y "a2", y en las vigas de longitud "a1" y "a2" respectivamente.

En la figura 3.4 se muestra el diagrama de momentos flectores M_x , en el eje de las losas indicada en la figura 3.3 y en el eje de las vigas, para el sistema de carga 01. De la misma forma, en la figura 3.5 se muestra el diagrama de momentos flectores M_x , en el eje de las losas indicada en la figura 3.3 y en el eje de las vigas, para el sistema de carga 02.

Para ambos sistemas de carga se obtienen diagramas de momentos flectores de la misma forma, tanto para las losas como para las vigas.

La máxima diferencia que se obtiene al comparar ambos resultados es de 1.15% y el promedio está en el orden del 0.20%.

COMPARACION DE LOS MOMENTOS ENTRE LOSAS Y VIGAS

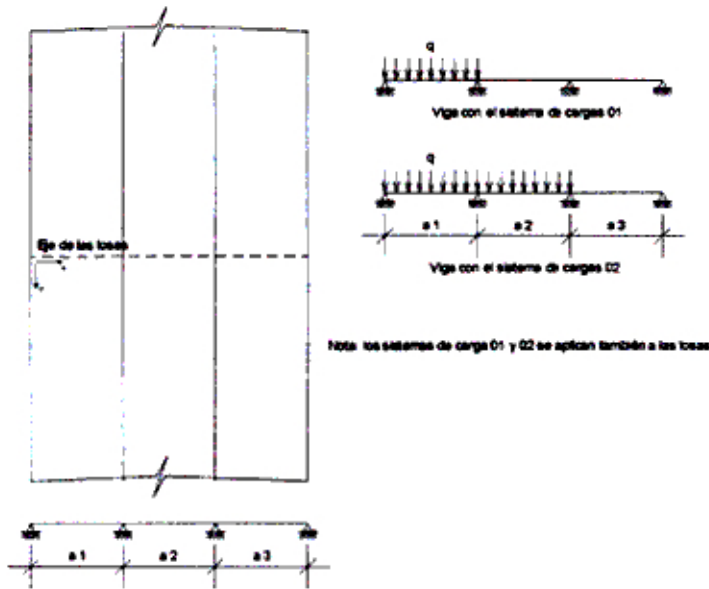


Fig. 3.3

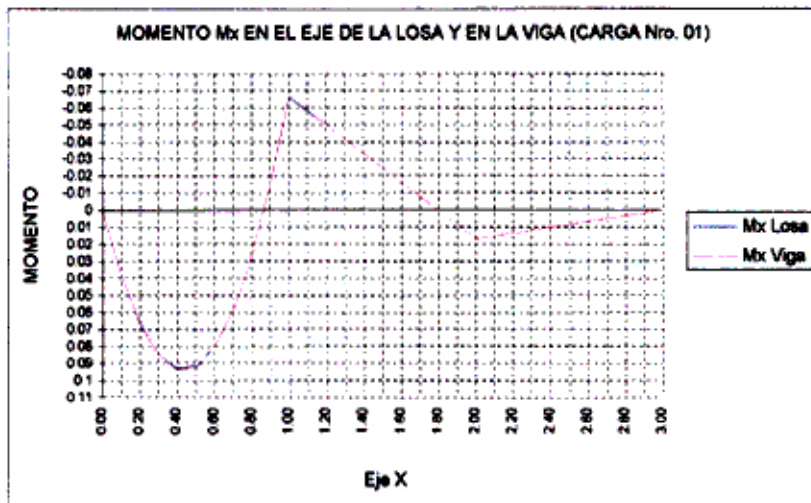


Fig. 3.4

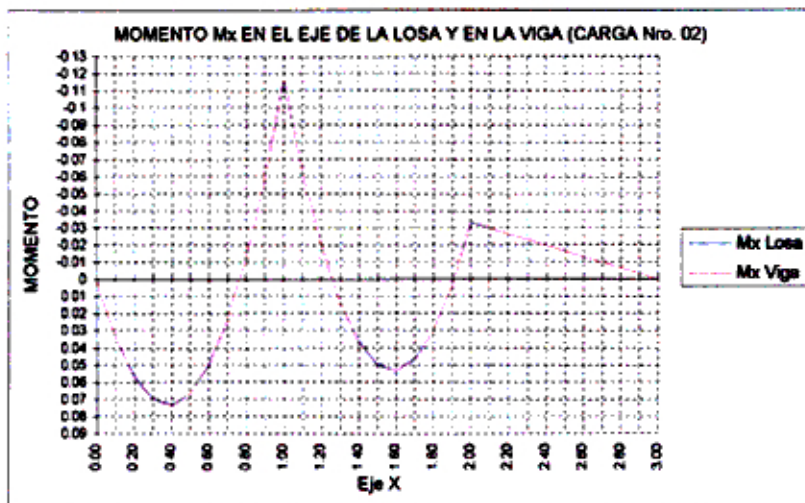


Fig. 3.5

3.3 Comparación de resultados entre métodos

Se presentan comparaciones entre métodos de solución para un grupo de tres ejemplos, los cuales se presentan con frecuencia en el diseño.

Los métodos a utilizar en éstas comparaciones son: el método de las series con la utilización del programa de losas continuas desarrollado para esta tesis, el método de los elementos finitos con el uso del programa SAP90, el método práctico y el método de los coeficientes del ACI.

3.3.1 Losa continua en una sola dirección

Para este caso se comparan los resultados obtenidos mediante la utilización del programa de losas continuas, el método práctico y el método de los coeficientes del ACI solamente.

En la figura 3.6 y 3.7 se muestra la disposición del conjunto de cuatro losas continuas en una sola dirección, siendo ésta la del eje X. Las longitudes de las losas en la dirección X son iguales y tiene como valor 1.0; las longitudes de las losas en la dirección del eje Y son mucho mayores que las antes mencionadas ($b \gg a$). Las condiciones de borde son las indicadas y las cargas son distribuidas en todas las losas.

- La deflexión del eje de las losas que se indica en la figura 3.6, se ha calculado de tres diferentes formas: primero, las cuatro losas con condiciones de borde simplemente apoyadas en la dirección Y; segundo, la primera losa apoyada en un borde y empotrada en la otra, y el resto de las losas empotradas en la misma dirección; y tercero, como losa continua respetando sus condiciones de borde real.

La proporción entre los resultados del análisis de la primera forma respecto a la tercera es: para la primera losa el doble, para la segunda losa once veces, para la tercera losa cinco veces y para la cuarta losa seis veces en promedio.

DEFLEXION DEL EJE EN LAS LOSAS

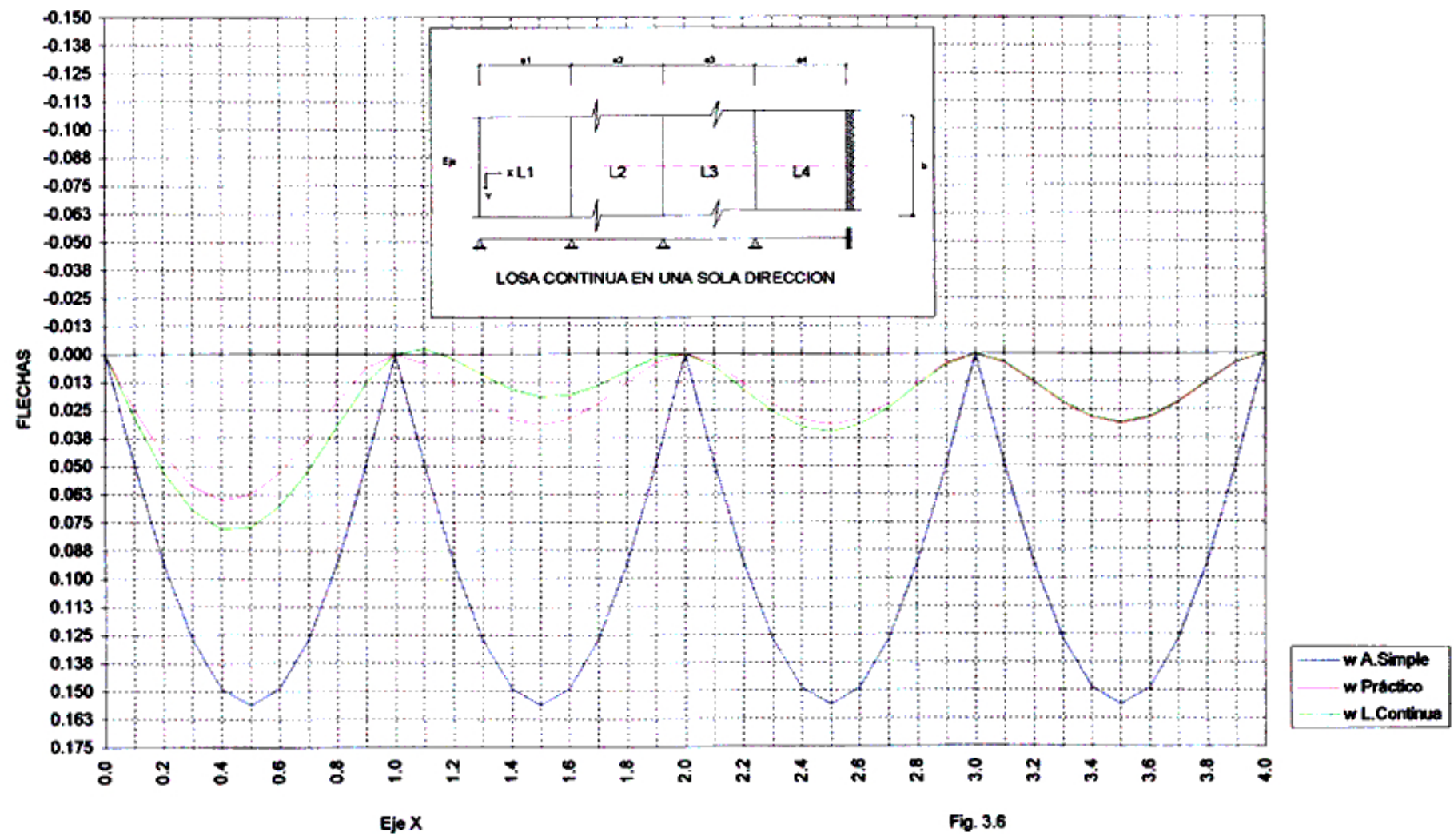


Fig. 3.6

MOMENTO M_x EN EL EJE DE LAS LOSAS

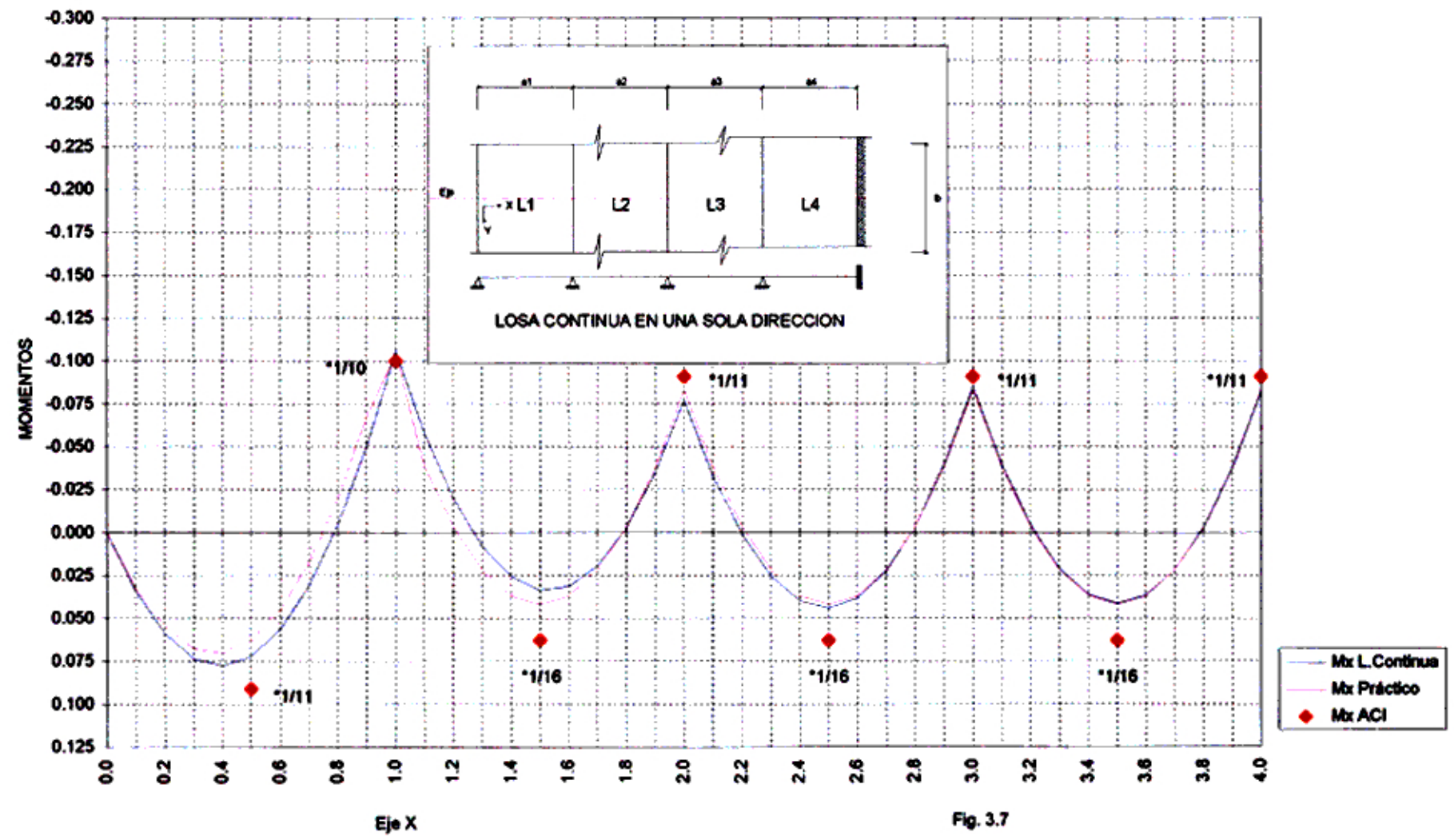


Fig. 3.7

La diferencia entre los resultados del análisis de la segunda forma respecto a la tercera es: para la primera losa de 13% al 51% menos, para la segunda losa de 134% más en promedio, para la tercera losa 13% menos en promedio, para la cuarta losa 3.4% más en promedio.

- En la figura 3.7 se muestra el diagrama de momento flector del eje indicado en la misma. También se ha calculado de tres formas diferentes: primero, por el método de los coeficientes del ACI; segundo, por el método práctico; y tercero, como losa continua.

Las diferencias entre los momentos máximos positivos obtenidos por la primera forma de análisis respecto a la tercera forma son: para la primera losa 17.0% más, para la segunda losa 86.6% más, para la tercera 42.7% más y para la cuarta losa 51.6% más; para los máximos momentos negativos se tienen diferencias: para la primera losa 5.3% menos, para la segunda losa 17.7% más, para la tercera 7.0% más y para la cuarta losa 10.4% más.

De la misma forma se hará la comparación entre la segunda forma de análisis respecto a la tercera forma para el máximo momento positivo: en la primera losa 10.0% menos, en la segunda losa 24.4% más, en la tercera 5.0% menos y en la cuarta losa 1.0% más; para los máximos momentos negativos se tienen diferencias: en la primera losa 1.4% menos, en la segunda losa 7.8% más, en la tercera 2.0% menos y en cuarta losa 1.0% más.

3.3.2 Losa continua en dos direcciones

En este caso se comparan los resultados obtenidos mediante la utilización del programa de losas continuas, el uso del SAP90 y el método práctico.

En la figura 3.8 se muestra la disposición de las losas mostrando las respectivas longitudes de sus lados y la dirección de sus ejes locales.

Con el programa de computo SAP90 se ha desarrollado el problema de las nueve losas con distintas mallas: primero, usando 391 nudos y luego, con 1485 nudos.

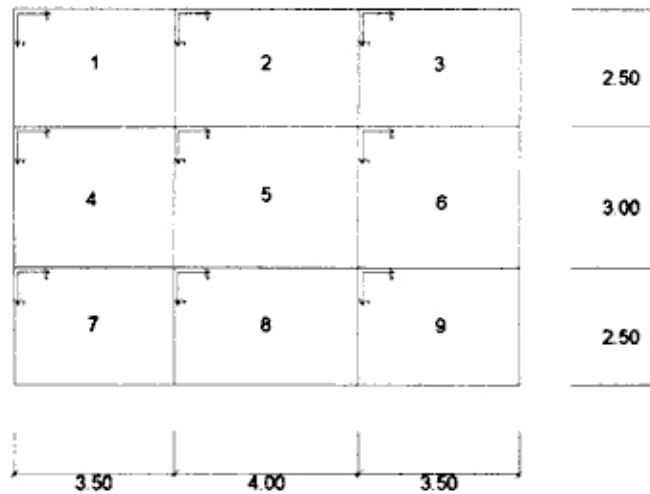


Fig. 3.8

Dada la simetría de las losas, se calcula los momentos positivos M_x y M_y en los centros de las losas 1, 2, 4 y 5, los momentos negativos en los centros de los bordes entre las losas 1-2, 1-4, 2-5 y 4-5 respectivamente, cada una de los cuales tienen su propio sistema de carga (figuras: del 3.9 al 3.16) .

De estas comparaciones se aprecia que el método con menor precisión, es el método práctico, alcanzando un máximo error de 5.70% más para el momento positivo y 11.54% más para el momento negativo.

Con el uso del sap90 y la malla de 391 nudos el máximo error es 6.82% menos para el momento positivo y 10.82% menos para el momento negativo; y con el uso de la malla de 1485 nudos el máximo error es 0.84% más para el momento positivo y 1.14% menos para el momento negativo.

Otro factor importante es el tiempo de ejecución de los programas de cómputo, el que debe ser lo mínimo posible.

A continuación se hace una comparación del tiempo de ejecución de los programas: el SAP90 para dos diferentes mallas con 391 y 1485 nudos, y el programa de losas continuas.

El tiempo de ejecución del SAP90 con 391 nudos es 1.8 veces el tiempo de ejecución del programa de losas continuas, y para 1485 nudos es 5.0 veces más. Como se indicó anteriormente ni con 391 ó 1485 nudos se obtienen resultados con la precisión que ofrece el programa de losas continuas.

COMPARACION DE RESULTADOS

SISTEMA DE CARGA

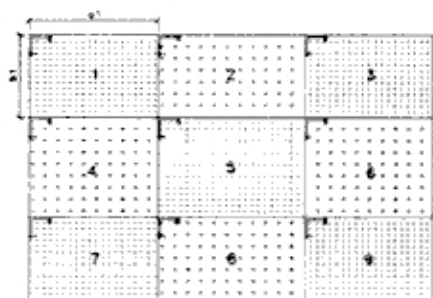


Fig. 3.9

MOMENTO EN EL CENTRO DE LA LOSA #1
 $x=a/2$ $y=b/2$

REFERENCIA	Mx	%ERROR	My	%ERROR
PRACTICO	93.0000	2.40	213.0000	1.79
SAP90 391	89.7093	5.86	207.1175	4.50
SAP90 1485	95.3410	-0.05	218.5500	-0.77
L CONTINUA	95.2907	-	216.8882	-

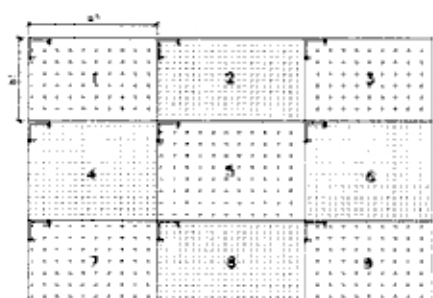


Fig. 3.10

MOMENTO EN EL CENTRO DE LA LOSA #2
 $x=a/2$ $y=b/2$

REFERENCIA	Mx	%ERROR	My	%ERROR
PRACTICO	86.0000	0.09	233.0000	2.19
SAP90 391	80.2115	6.82	232.7650	2.29
SAP90 1485	86.2500	-0.20	239.7100	-0.63
L CONTINUA	86.0810	-	238.2194	-

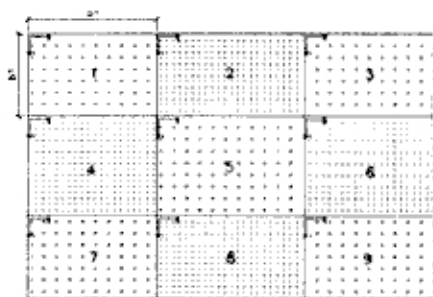


Fig. 3.11

MOMENTO EN EL CENTRO DE LA LOSA #4
 $x=a/2$ $y=b/2$

REFERENCIA	Mx	%ERROR	My	%ERROR
PRACTICO	127.0000	-5.53	219.0000	-1.23
SAP90 391	124.0600	-3.08	225.5900	-4.28
SAP90 1485	120.8000	-0.37	218.1600	-0.84
L CONTINUA	120.3491	-	218.3406	-

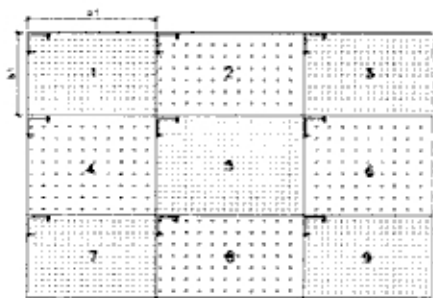


Fig. 3.12

MOMENTO EN EL CENTRO DE LA LOSA #5
 $x=a/2$ $y=b/2$

REFERENCIA	Mx	%ERROR	My	%ERROR
PRACTICO	115.0000	-5.70	246.0000	-3.54
SAP90 391	110.0900	-1.18	246.8500	-3.89
SAP90 1485	109.4800	-0.62	238.9100	-0.55
L CONTINUA	108.8033	-	237.5968	-

SISTEMA DE CARGA

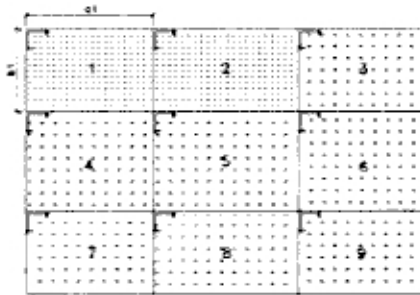


Fig 3.13

MOMENTOS EN EL CENTRO DEL BORDE
ENTRE LAS LOSAS #1 Y #2
 $x=a1/2$ $y=b1/2$

REFERENCIA	Mx	ERROR
PRACTICO	-333 0000	11.36
SAP90 391	-335 0200	10.82
SAP90 1485	-371.6600	1.07
L.CONTINUA	-375 6774	-

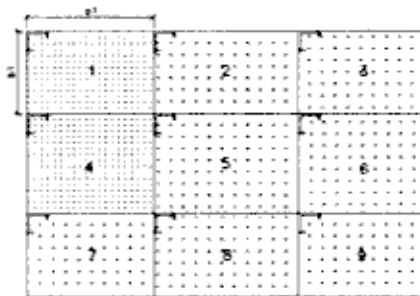


Fig. 3.14

MOMENTOS EN EL CENTRO DEL BORDE
ENTRE LAS LOSAS #1 Y #4
 $x=a1/2$ $y=b1$

REFERENCIA	My	ERROR
PRACTICO	-429 0000	6.74
SAP90 391	-434 5400	5.54
SAP90 1485	-454 9200	1.11
L.CONTINUA	-460 0218	-

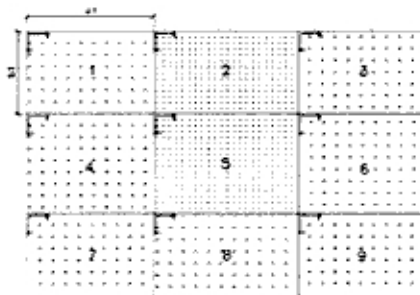


Fig 3.15

MOMENTOS EN EL CENTRO DEL BORDE
ENTRE LAS LOSAS #2 Y #5
 $x=a2/2$ $y=b2$

REFERENCIA	My	ERROR
PRACTICO	-442 0000	7.32
SAP90 391	-461.5800	3.22
SAP90 1485	-471.4800	1.14
L.CONTINUA	-476.9257	-

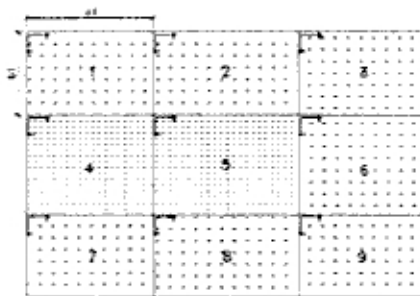
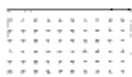


Fig 3.16

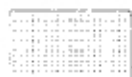
MOMENTOS EN EL CENTRO DEL BORDE
ENTRE LAS LOSAS #4 Y #5
 $x=a4$ $y=b4/2$

REFERENCIA	Mx	ERROR
PRACTICO	-374.0000	11.54
SAP90 391	-405.0700	4.19
SAP90 1485	-420 4100	0.56
L.CONTINUA	-422 7872	-

DESCRIPCION DE CARGAS:



300 kg/m2



700 kg/m2

3.3.3 Losa continua en el espacio

En este caso se comparan los resultados obtenidos mediante la utilización del programa de losas continuas, el método práctico y la solución que ofrece Kalmanok.

Adicionalmente, el método práctico se considera de la siguiente forma: cada losa que comparte algunos de sus lados con otra se considera empotrada y el lado apoyado como tal. Se desarrolla el problema de un tanque elevado según la figura 3.17 donde: $a=b=h=1.0$, el contenido es agua, los bordes superiores de las losas laterales se consideran como simplemente apoyados y todos los demás bordes son compartidos. Los ejes locales de cada losa se indican en dicha figura.

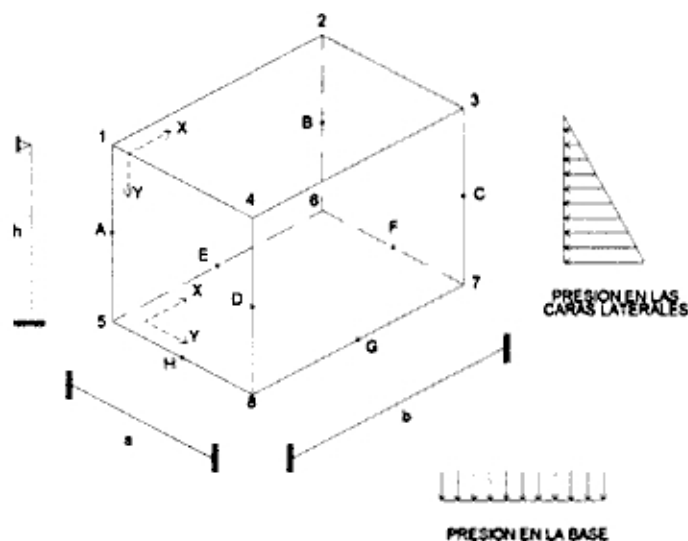
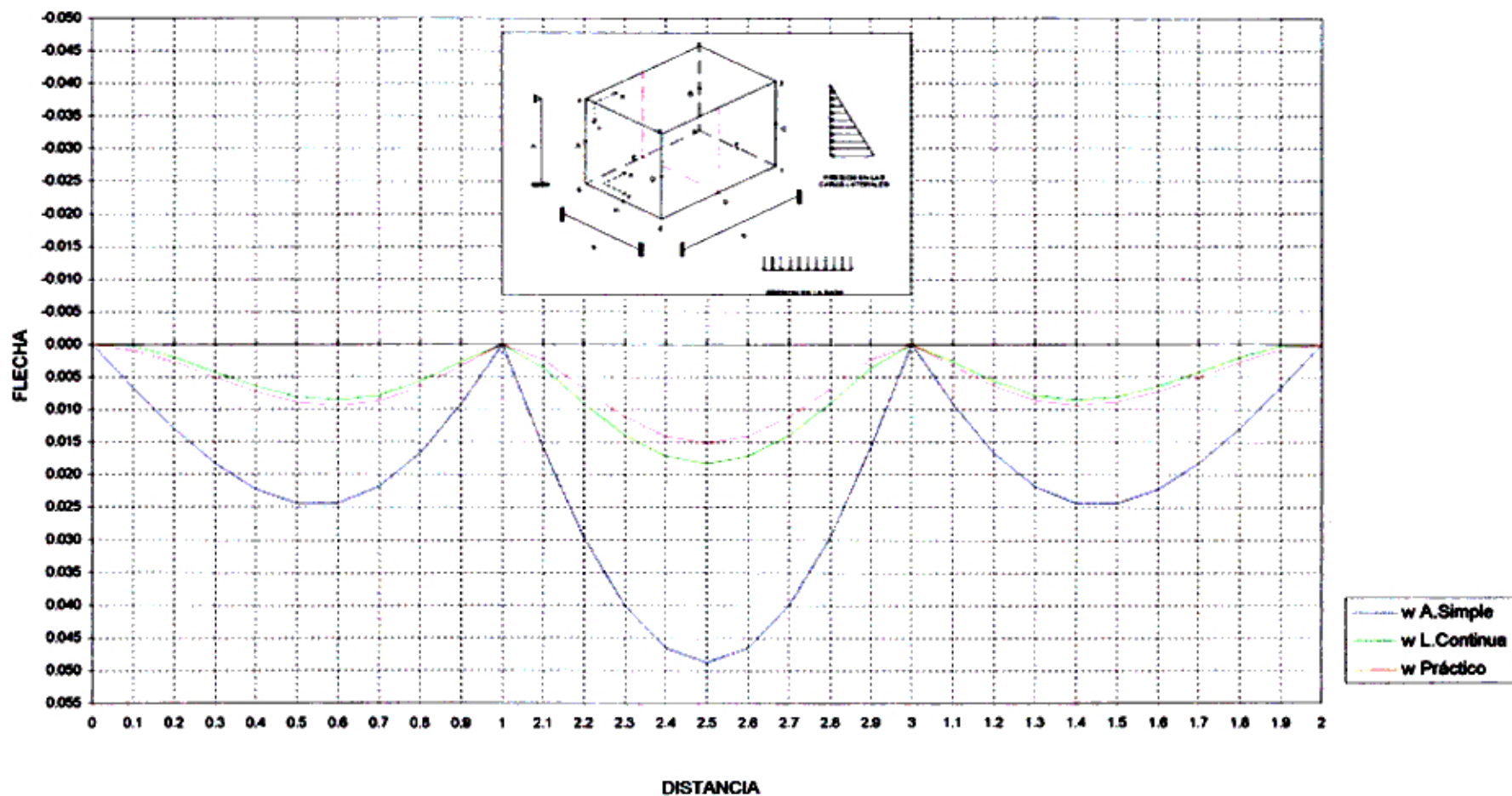


Fig. 3.17

Se analiza las máximas flechas sobre el eje de las losas que se indica en la figura 3.17 en color magenta. La diferencia de las máximas flechas en las losas laterales considerando cada losa como apoyada y como losas continuas es de 185% más, y la diferencia entre el método práctico y la solución del programa es de 9.6% más; la diferencia máxima de la flecha en la losa de la base al considerar como apoyada y como continua es de 165% más, y la diferencia entre el método práctico y la solución del programa es de 17.4% menos.

**DEFLEXION DEL EJE CENTRAL DE LAS LOSAS (LINEA DISCONTINUA INDICADA EN COLOR)
PARA UNA CARGA HIDROSTATICA**



DISTANCIA

Fig. 3.18

Se analiza los momentos en los puntos A,B,C y D pertenecientes a los bordes de las losas, como indica la figura 3.17, los valores que ofrece Kalmanok son 2.6% más respecto al análisis continuo; los que ofrece el método práctico 6.4% más respecto al análisis continuo. Para los puntos E, F, G y H son 2.4% más y 5.5% menos respectivamente. En el centro de las losas laterales para el momento M_x es 0.4% más y 12.12% más; para el momento M_y es 1.3% menos y 2.4% menos. En el centro de la losa de la base el momento M_x es 0.3% menos y 9.6% menos, el momento M_y es 0.3% menos y 9.6% menos.

3.4 Patrón de cargas que produce los efectos máximos

La necesidad de contar con patrones de cargas para obtener los máximos momentos en un grupo de losas continuas, conlleva a encontrar los siguientes tres patrones de cargas. Dado que no se siempre se presentan losas continuas cuadradas $b/a=1$, por el contrario se presentan generalmente losas rectangulares cuando $a/b>1$ ó $b/a>1$.

En las figuras 3.19, 3.20 y 3.21 se muestra la disposición de las losas indicando: la numeración, la dirección de los ejes y las losas cargadas para cada patrón.

En todos los casos se presentan los patrones de carga para los momentos positivos M_x y M_y en el centro de las losas 1, 2, 4 y 5; para los momentos negativos en los centros de los bordes entre las losas 1-2, 1-4, 2-1, 2-3, 2-5, 4-5, 4-1, 4-7, 5-4, 5-6, 5-2 y 5-8 respectivamente.

Debe notarse que los patrones de carga para un mismo punto, para los tres casos son en algunos casos completamente diferentes y son mostrados en sus respectivas figuras, donde "Car" indica losa cargada.

- Patrón de cargas cuando $b/a=1$, Indicada en la figura 3.19
- Patrón de cargas cuando $b/a<1$, Indicada en la figura 3.20
- Patrón de cargas cuando $b/a>1$, Indicada en la figura 3.21

donde:

- a : dimensión de la losa en la dirección X.
- b : dimensión de la losa en la dirección Y.

PATRON DE CARGAS (b/a=1)

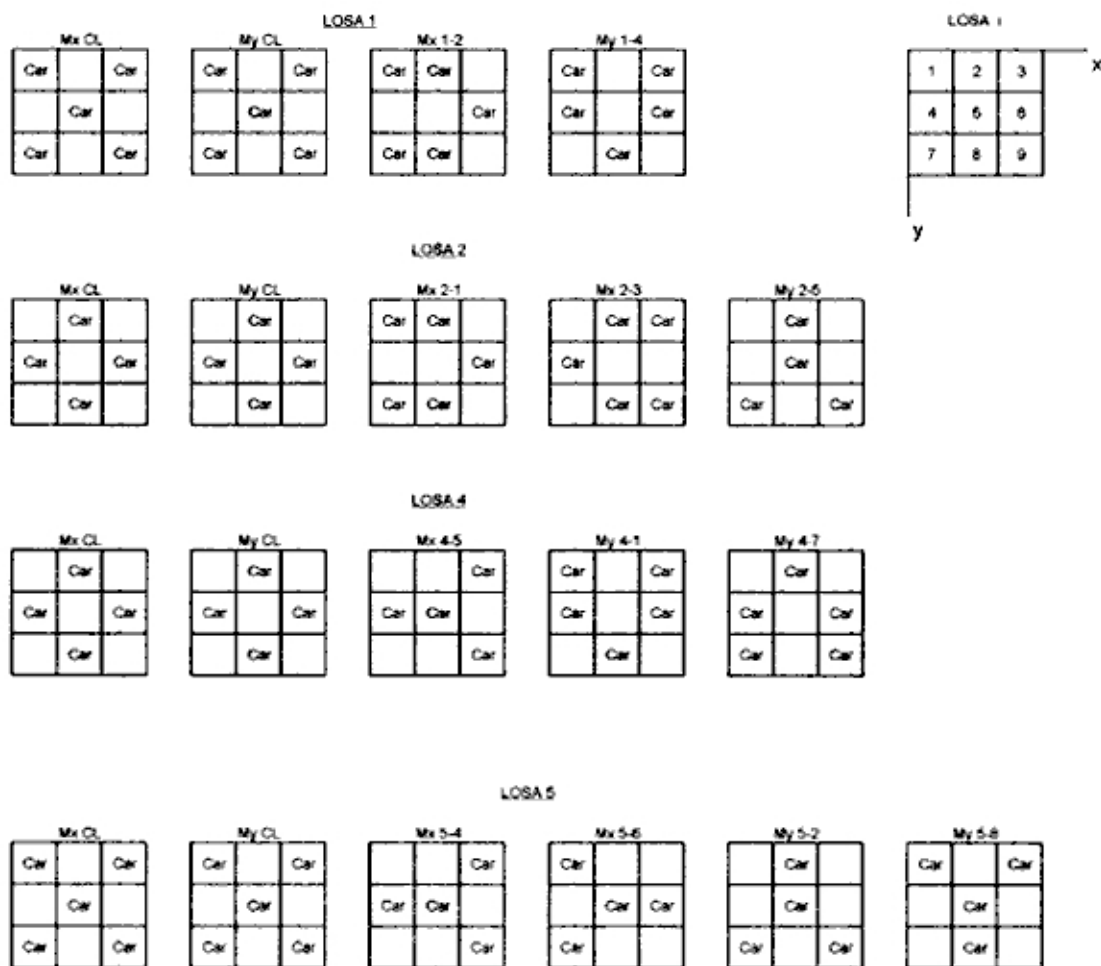


Fig 3.19

PATRON DE CARGAS (a/b>1)

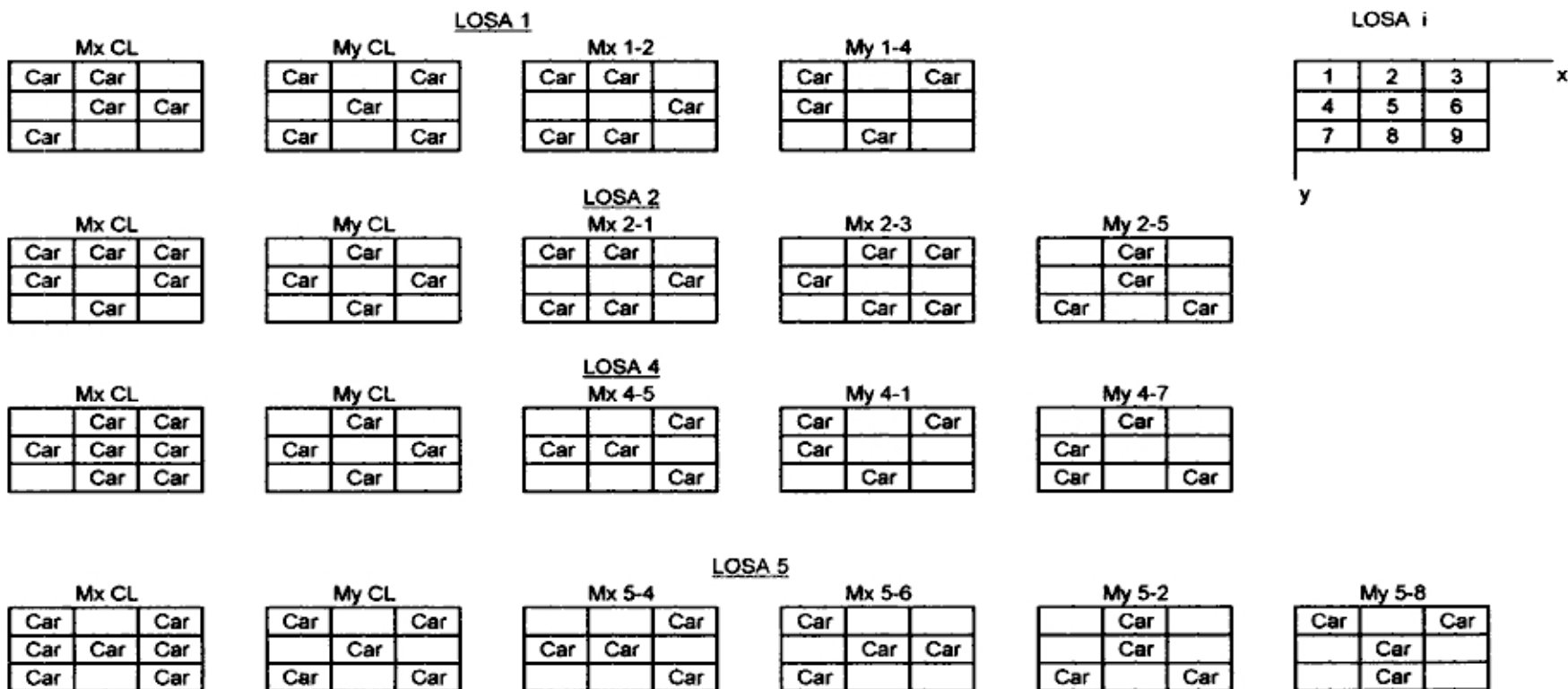


Fig. 3.20

PATRON DE CARGAS (b/a>1)

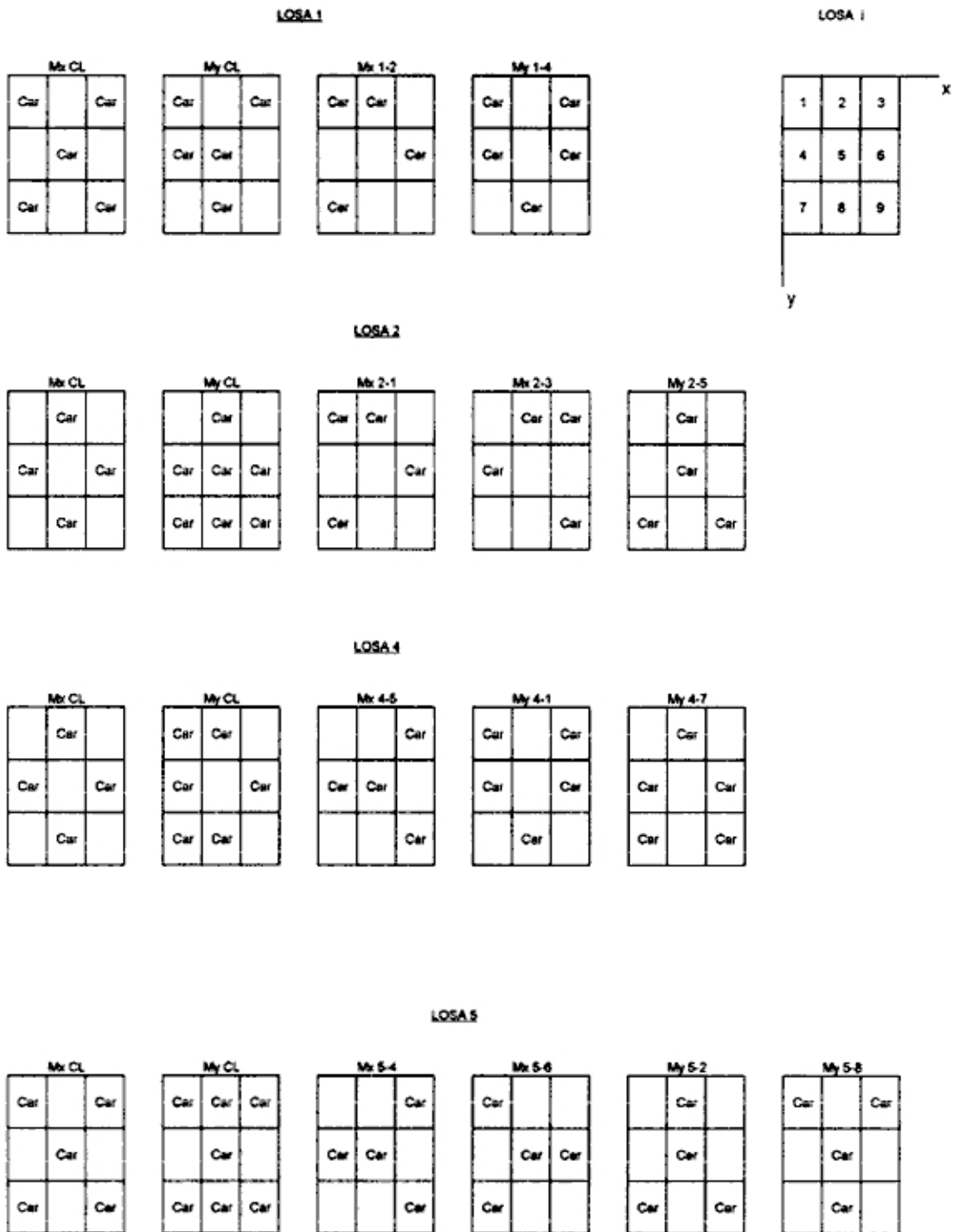


Fig 3 21

Las referencias bibliográficas hacen recomendaciones de patrones de carga para encontrar los máximos momentos en las losas. Estos momentos se coparan con los obtenidos con el patrón de cargas que se propone en esta tesis.

Esta comparación se desarrollará mediante un ejemplo práctico de nueve losas.

Se presentan resultados para:

- El patrón de cargas que recomienda la bibliografía, como indican las figuras desde 3.22 al 3.29.
- El patrón de cargas que se propone en esta tesis, indicada en las figuras 3.19, 3.20 y 3.21

Con la primera distribución de cargas se calculan los momentos con las siguientes alternativas de análisis: con el método práctico, con el uso del programa de cómputo SAP90 (usando 391 nudos y 1485 nudos) y con el programa de cómputo de losas continuas. Con la segunda distribución de cargas y el uso del programa de losas continuas se obtienen los máximos momentos.

Los puntos donde se analizaran los momentos M_x y M_y son: los puntos medios de las losas 1, 2, 4 y 5; en los puntos medios de los bordes entre las losas: 1-2, 1-4, 2-5 y 4-5; tal como indican las figuras 3.22, 3.23, 3.24, 3.25, 3.26, 3.27, 3.28 y 3.29, y sus respectivos cuadros adjuntos.

Los máximos errores de los momentos positivos que se presentan al comparar los resultados del primer sistemas de cargas respecto al segundo son: de 6.10% menos, que corresponde al momento M_x en el centro de la losa 2; de 4.59% menos, que corresponde al momento M_x en el centro de la losa 5; los demás errores son inferiores a los mencionados. Se debe notar también, que los errores de los momentos positivos en la dirección X son mayores a los de la dirección Y, cuando $b/a < 1$

Los errores de los máximos momentos negativos en la dirección X, también, son mayores a los momentos en la dirección Y, e inferiores al 1.70%

**COMPARACION DE LOS MAXIMOS MOMENTOS
UTILIZANDO EL PATRON DE CARGAS ESTUDIADO**

SISTEMA DE CARGA

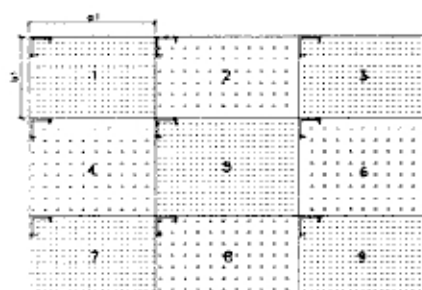


Fig. 3.22

**MOMENTO EN EL CENTRO DE LA LOSA #1
 $x=a1/2$ $y=b1/2$**

REFERENCIA	Mx	%ERROR	My	%ERROR
PRACTICO	93.0000	4.41	213.0000	1.79
SAP90 391	89.7093	7.80	207.1175	4.50
SAP90 1485	95.3410	2.01	218.5500	-0.77
L CONTINUA	95.2907	2.06	216.8882	-
MAXIMO	97.2936		216.8882	

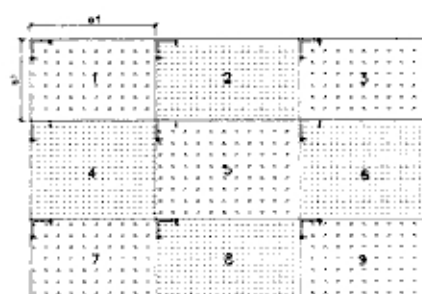


Fig. 3.23

**MOMENTO EN EL CENTRO DE LA LOSA #2
 $x=a2/2$ $y=b2/2$**

REFERENCIA	Mx	%ERROR	My	%ERROR
PRACTICO	86.0000	8.19	233.0000	2.19
SAP90 391	80.2115	12.51	232.7650	2.29
SAP90 1485	86.2500	5.92	239.7100	-0.63
L CONTINUA	86.0810	6.10	238.2194	-
MAXIMO	91.8766		238.2194	

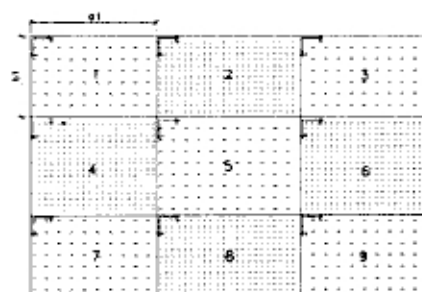


Fig. 3.24

**MOMENTO EN EL CENTRO DE LA LOSA #4
 $x=a4/2$ $y=b4/2$**

REFERENCIA	Mx	%ERROR	My	%ERROR
PRACTICO	127.0000	-4.69	219.0000	-1.23
SAP90 391	124.0600	-2.27	225.5900	-4.28
SAP90 1485	120.8000	0.42	218.1600	-0.84
L CONTINUA	120.3491	0.79	216.3406	-
MAXIMO	121.3113		216.3406	

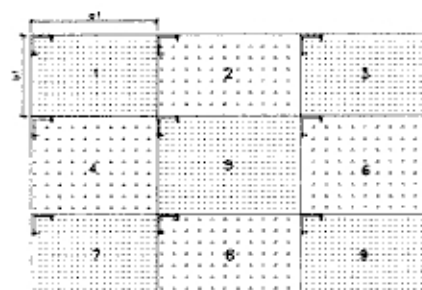


Fig. 3.25

**MOMENTO EN EL CENTRO DE LA LOSA #5
 $x=a5/2$ $y=b5/2$**

REFERENCIA	Mx	%ERROR	My	%ERROR
PRACTICO	115.0000	-0.46	246.0000	-3.54
SAP90 391	110.0900	3.83	246.8500	-3.89
SAP90 1485	109.4800	4.37	238.9100	-0.55
L CONTINUA	108.8033	4.96	237.5968	-
MAXIMO	114.4770		237.5968	

SISTEMA DE CARGA

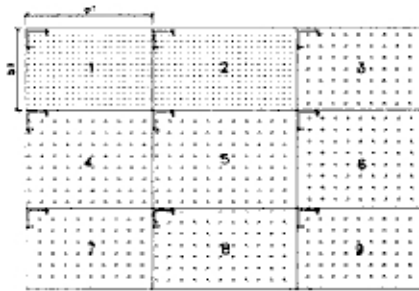


Fig. 3.26

MOMENTOS EN EL CENTRO DEL BORDE
ENTRE LAS LOSAS #1 Y #2
 $x=a_1 \ y=b_1/2$

REFERENCIA	Mx	%ERROR
PRACTICO	-333.0000	12.86
SAP90 391	-335.0200	12.34
SAP90 1485	-371.6800	2.75
L.CONTINUA	-375.6774	1.70
MAXIMO	-382.1851	

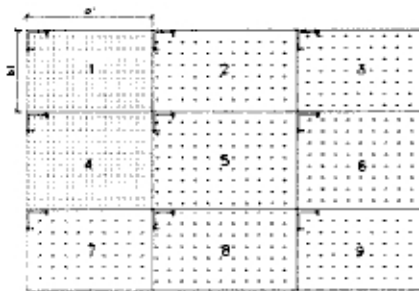


Fig. 3.27

MOMENTOS EN EL CENTRO DEL BORDE
ENTRE LAS LOSAS #1 Y #4
 $x=a_1/2 \ y=b_1$

REFERENCIA	My	%ERROR
PRACTICO	-429.0000	7.36
SAP90 391	-434.5400	6.16
SAP90 1485	-454.9200	1.76
L.CONTINUA	-460.0218	0.66
MAXIMO	-463.0829	

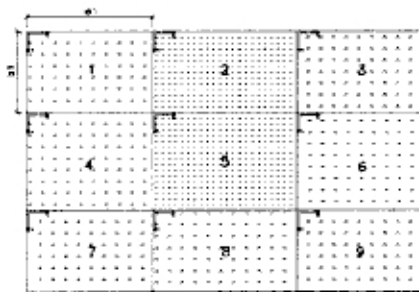


Fig. 3.28

MOMENTOS EN EL CENTRO DEL BORDE
ENTRE LAS LOSAS #2 Y #5
 $x=a_2/2 \ y=b_2$

REFERENCIA	My	%ERROR
PRACTICO	-442.0000	8.27
SAP90 391	-461.5800	4.21
SAP90 1485	-471.4800	2.16
L.CONTINUA	-476.9257	1.03
MAXIMO	-481.8748	

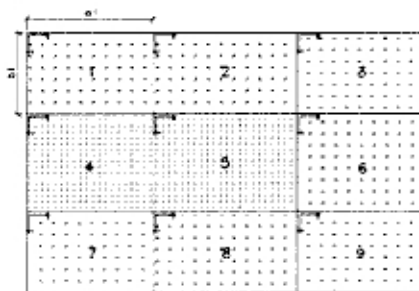
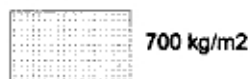


Fig. 3.29

MOMENTOS EN EL CENTRO DEL BORDE
ENTRE LAS LOSAS #4 Y #5
 $x=a_4 \ y=b_4/2$

REFERENCIA	Mx	%ERROR
PRACTICO	-374.0000	8.27
SAP90 391	-405.0700	4.21
SAP90 1485	-420.4100	2.16
L.CONTINUA	-422.7872	1.03
MAXIMO	-426.4220	

DESCRIPCION DE CARGAS:



A continuación se presenta la expansión de los patrones de cargas para mayor número de losas. Para obtener los máximos momentos positivos M_x y M_y en los centros de las losas, puntos "A", se procederá a cargar las losas de la siguiente forma:

- Cuando $b/a=1$

La disposición de las losas cargadas para M_x y para M_y es la misma y es como sigue:



Fig. 2.30

- Cuando $b/a < 1$

La disposición de las losas cargadas para el momento M_x es como sigue:



Fig. 2.31

La disposición de las losas cargadas para el momento M_y es como sigue:



Fig. 2.32

- Cuando $b/a > 1$

La disposición de las losas cargadas para el momento M_x es como sigue:

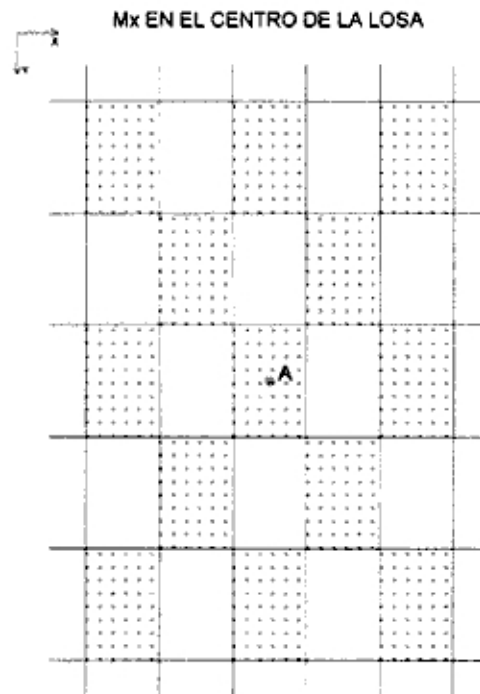


Fig. 2.33

La disposición de las losas cargadas para el momento M_y es como sigue:

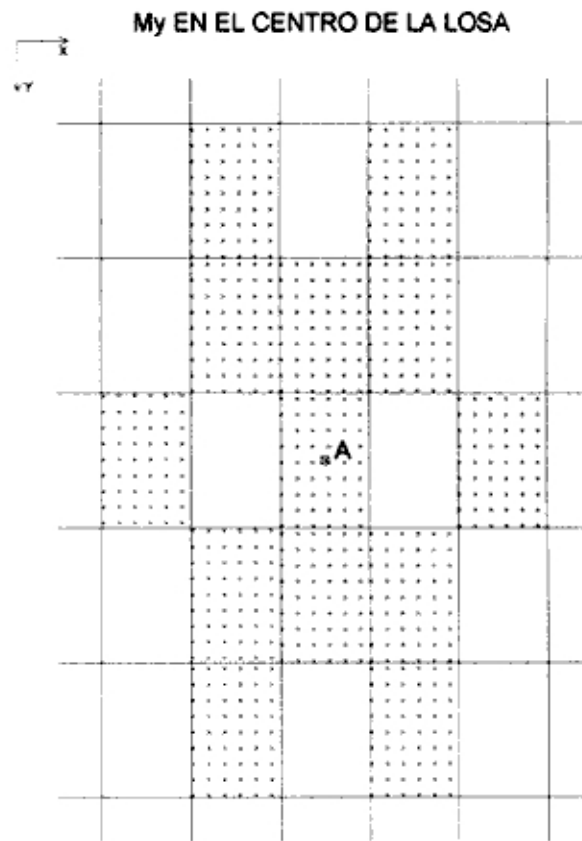


Fig. 2.34

Para obtener los máximos momentos negativos M_x o M_y según sea el borde, en el centro de los bordes de las losas, puntos "B", se procederá a cargar las losas de la siguiente forma:

- Cuando $b/a=1$

La disposición de las losas cargadas para M_x es como sigue:

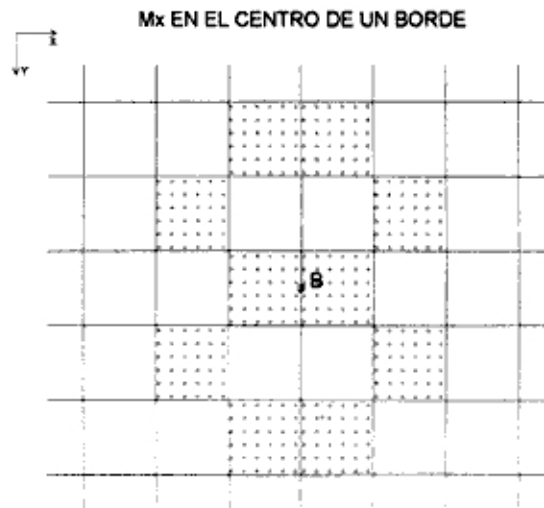


Fig. 2.35

De forma análoga se puede obtener la distribución para obtener el momento máximo M_y .

- Cuando $b/a < 1$

La disposición de las losas cargadas para el momento M_x es como sigue:

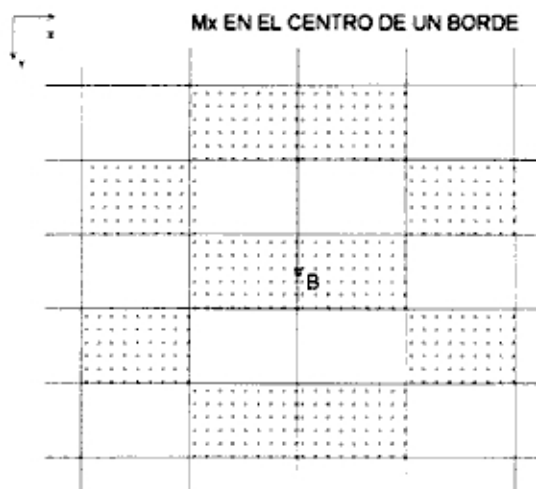


Fig. 2.36

La disposición de las losas cargadas para el momento M_y es como sigue:



Fig. 2.37

- Cuando $b/a > 1$

La disposición de las losas cargadas para el momento M_x es como sigue:

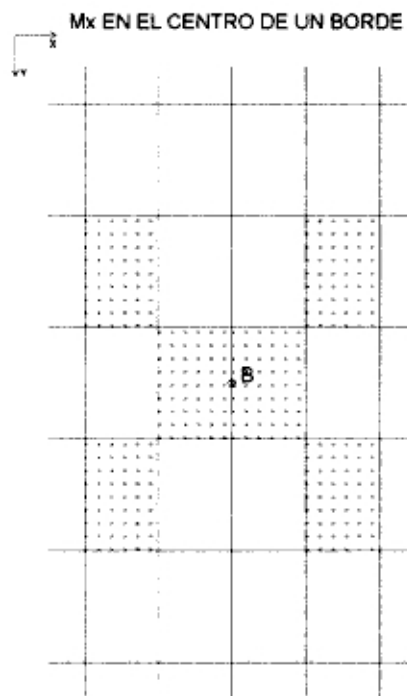


Fig. 2.38

La disposición de las losas cargadas para el momento M_y es como sigue:

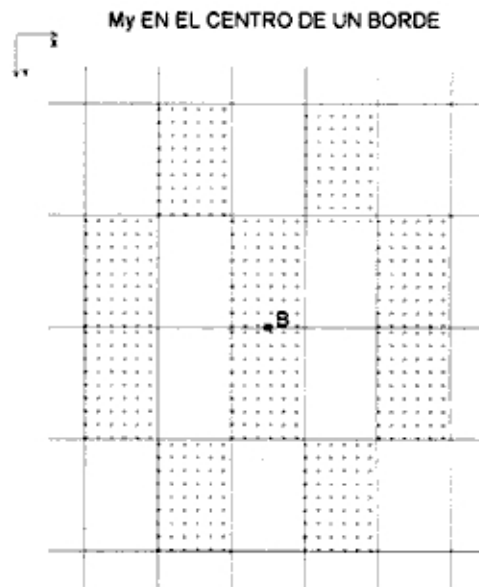


Fig. 2.39

CAPITULO 04

APLICACIONES

Con el *Programa de Losas Continuas* desarrollado para esta tesis; en este capítulo se resuelven problemas que se presentan con frecuencia en la ejecución de proyectos de diseño estructural como son: losas apoyadas en columnas así como la influencia de la rigidez de éstas en el diagrama de momentos de las losas, tanque elevado con proporciones de lados variable y, muros de contención con contrafuertes y la influencia de la relación del espaciamiento del contrafuerte respecto a su altura. Todos estos casos se acondicionan a la solución de losas continuas.

4.1 Losa empotrada en sus bordes y apoyada en una columna interior

Se analiza las flechas y los momentos en dos ejes paralelos al eje X. El eje 2 es el eje central de la losa, el eje 1 está a una distancia $b/10$ (0.50m) de éste.

La losa es de concreto y está empotrada en sus cuatro bordes. Además, está apoyada en una columna también de concreto, ubicada ésta exactamente en el centro de la losa, como se indica en la figura 4.1.

La carga es uniformemente distribuida en toda el área de la losa.

Las direcciones de los ejes también se indican en la figura.

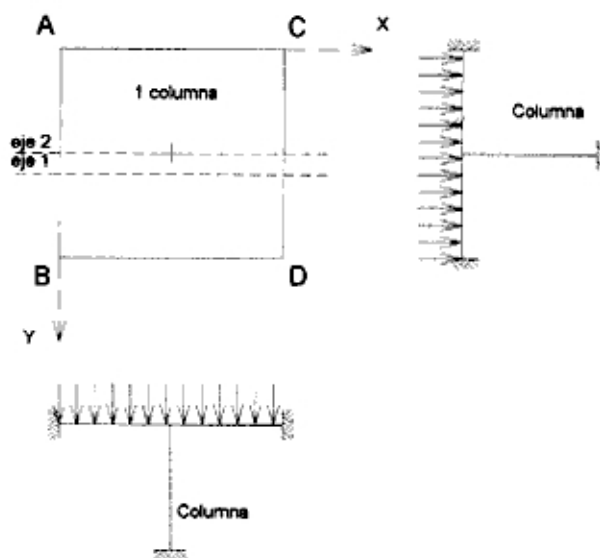


Fig. 4.1

Características de la losa:

- a=5.00 m : Longitud de la losa en la dirección X
- b=5.00 m : Longitud de la losa en la dirección Y
- h=0.20 m : Espesor de la losa

$q=1.00 \text{ t/m}^2$: Carga distribuida

$E=2.1e6 \text{ t/m}^2$: Módulo de elasticidad del concreto

Características de la columna:

$a=0.30 \text{ m}$: Longitud de la losa en la dirección X

$b=0.30 \text{ m}$: Longitud de la losa en la dirección Y

$l=3.00 \text{ m}$: Altura de la columna

$A=0.09 \text{ m}^2$: Area de la columna

$E=2.1e6 \text{ t/m}^2$: Módulo de elasticidad del concreto

4.1.1 Efecto del incremento de la rigidez de la columna

Se calculan las flechas y los momentos para los ejes 1 y 2, en ambos casos para un incremento progresivo de la rigidez de la columna: inicialmente sin considerar la columna (rigidez igual a cero), luego, con rigidez $K=65000\text{t/m}$, posteriormente, con rigideces de $2K$, $5K$ y $10K$ respectivamente, como indica la figura 4.2.

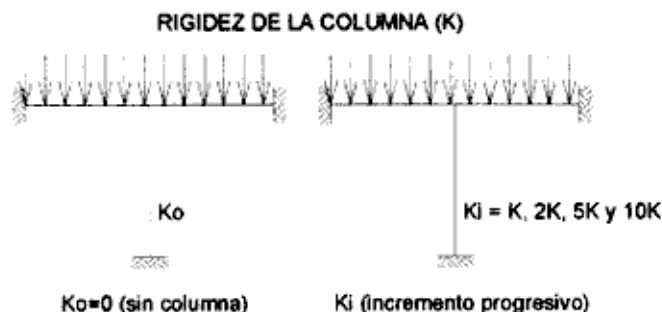


Fig. 4.2

Las figuras 4.4, 4.5, 4.6 y 4.7 muestran: la deflexión del eje central de la losa (eje 2), el diagrama de momentos M_x del eje 2, la deflexión del eje 1 y diagrama de momentos M_x del eje 1.

Las figuras 4.8 y 4.9 son: la superficie elástica y el diagrama de momentos de la losa cuadrada con las condiciones definidas anteriormente y la columna con rigidez $K=65000t/m$.

La figura 4.3 muestra la variación de la relación de los momentos en el centro de los ejes respecto al momento de la losa cuando no tiene columna, para un incremento de las rigideces de la columna.

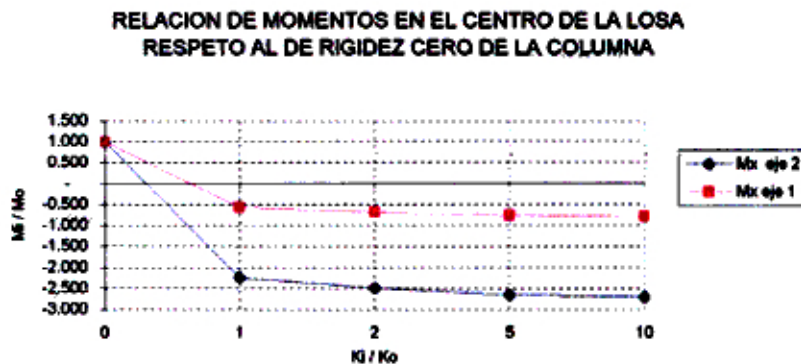


Fig. 4.3

También, la variación de la relación de los momentos en el centro del eje 1 respecto al momento sin considerar la columna, al tomar rigideces de la columna K , $2K$, $5K$ ó $10K$ es poco variable tomando valores de: 0.564, 0.679, 0.756, 0.784, claro está que el signo es cambiado; de la misma forma, para el centro del eje 2 éstas relaciones son: 2.251, 2.490, 2.651 y 2.708, también con signo cambiado.

DEFLEXION DEL EJE CENTRAL DE LA LOSA(EJE 2)
Para un incremento progresivo de la rigidez de la columna ($K=65000 \text{ t/m}$)

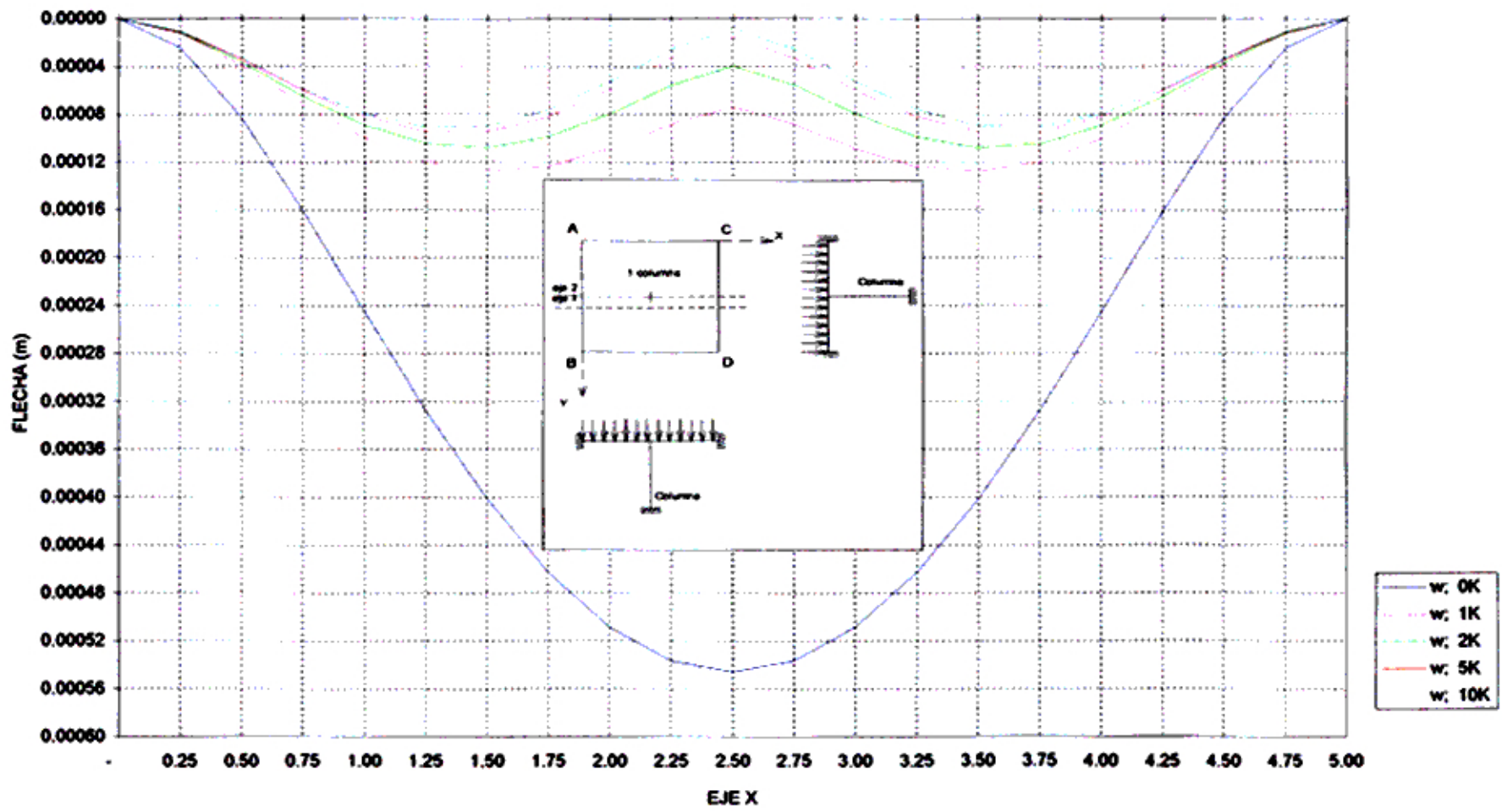


Fig. 4.4

MOMENTOS M_x EN EL EJE CENTRAL DE LA LOSA (EJE 2)

Para un incremento progresivo de la rigidez de la columna ($K=65000$ t/m)

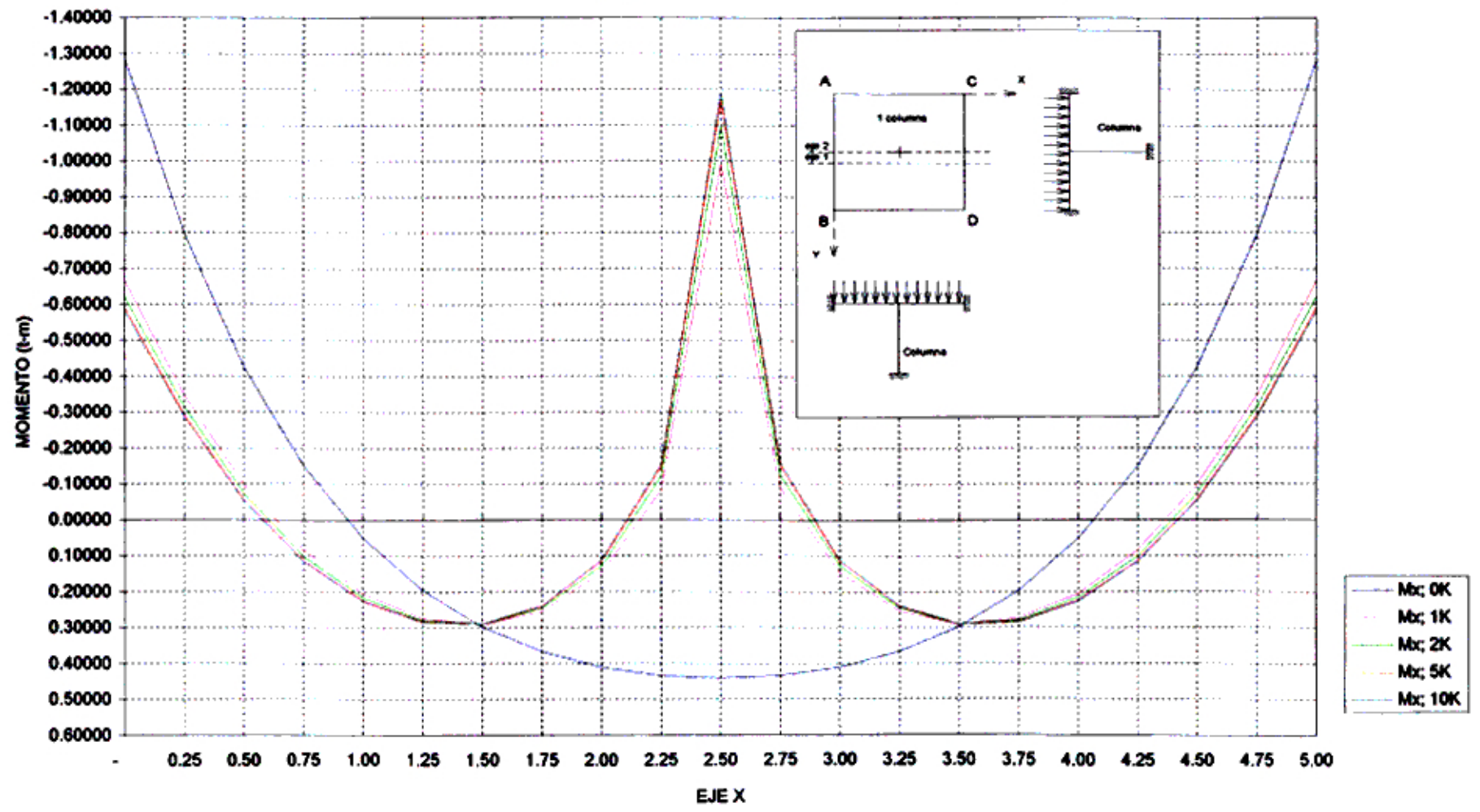


Fig. 4.5

DEFLEXION DEL EJE 1 (a 1/10 del lado) DEL EJE 2
 Para un incremento progresivo de la rigidez de la columna ($K=65000 \text{ t/m}$)

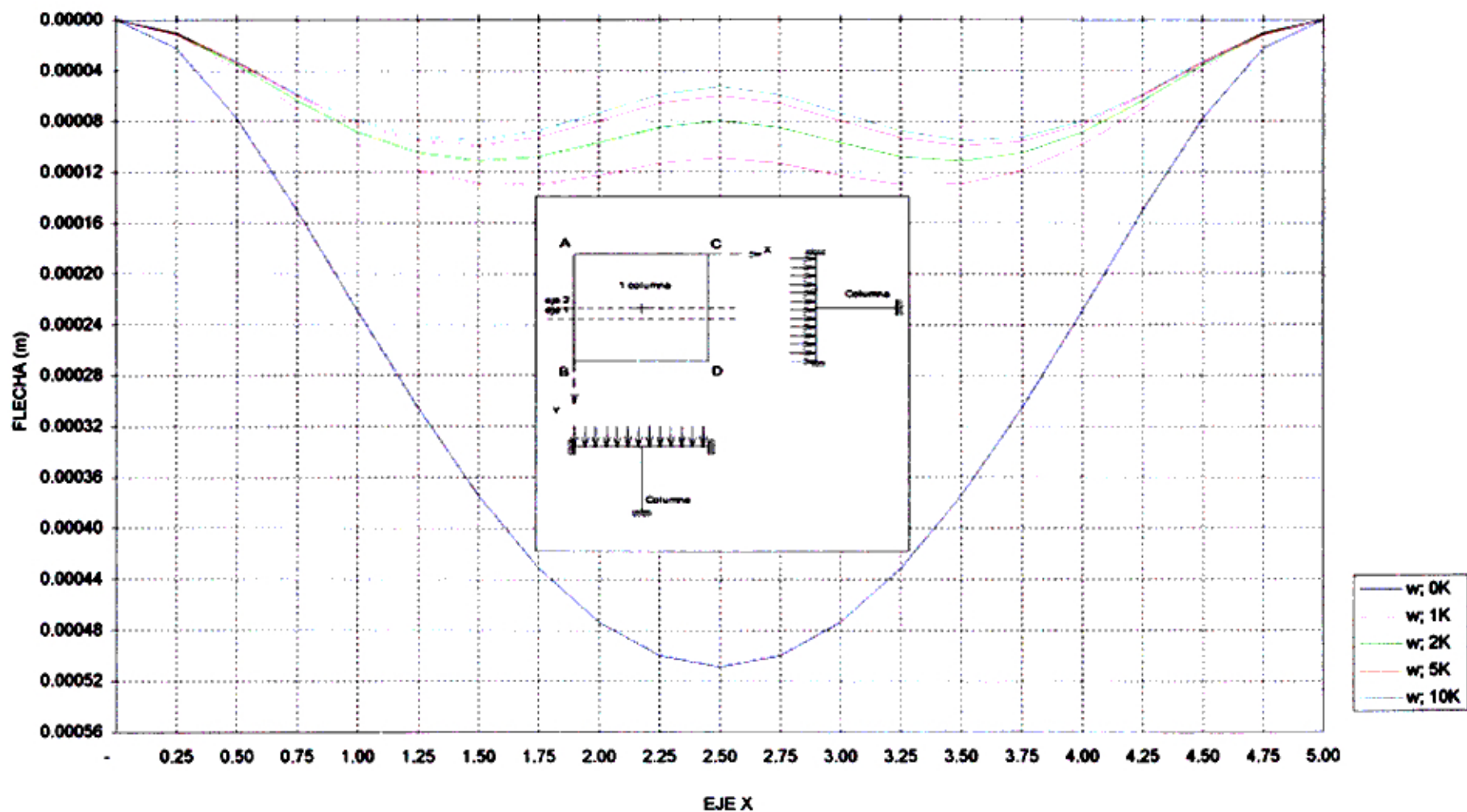


Fig. 4.6

MOMENTOS M_x EN EL EJE 1 (a 1/10 del lado) DEL EJE 2

Para un incremento progresivo de la rigidez de la columna ($K=65000$ t/m)

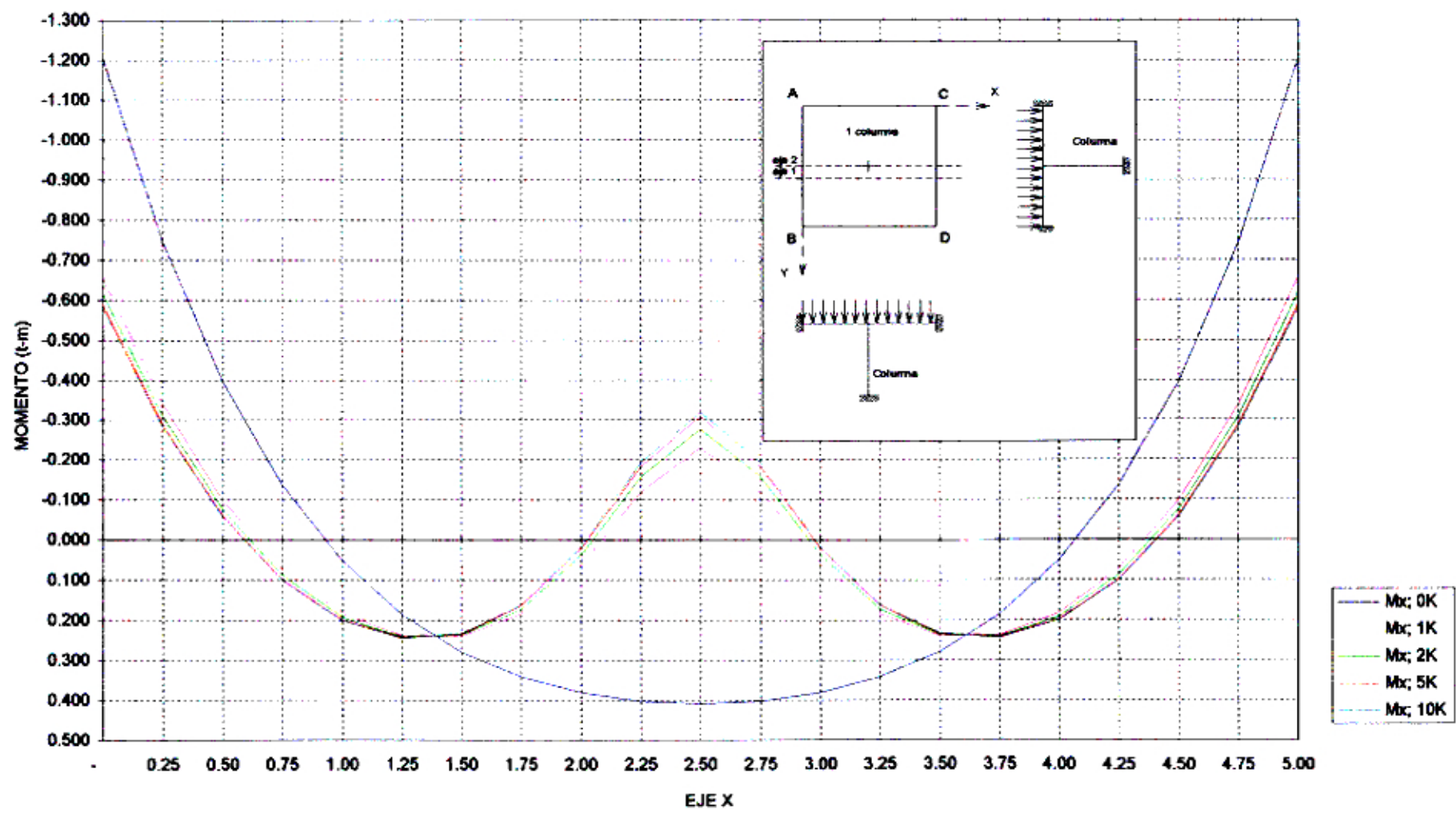
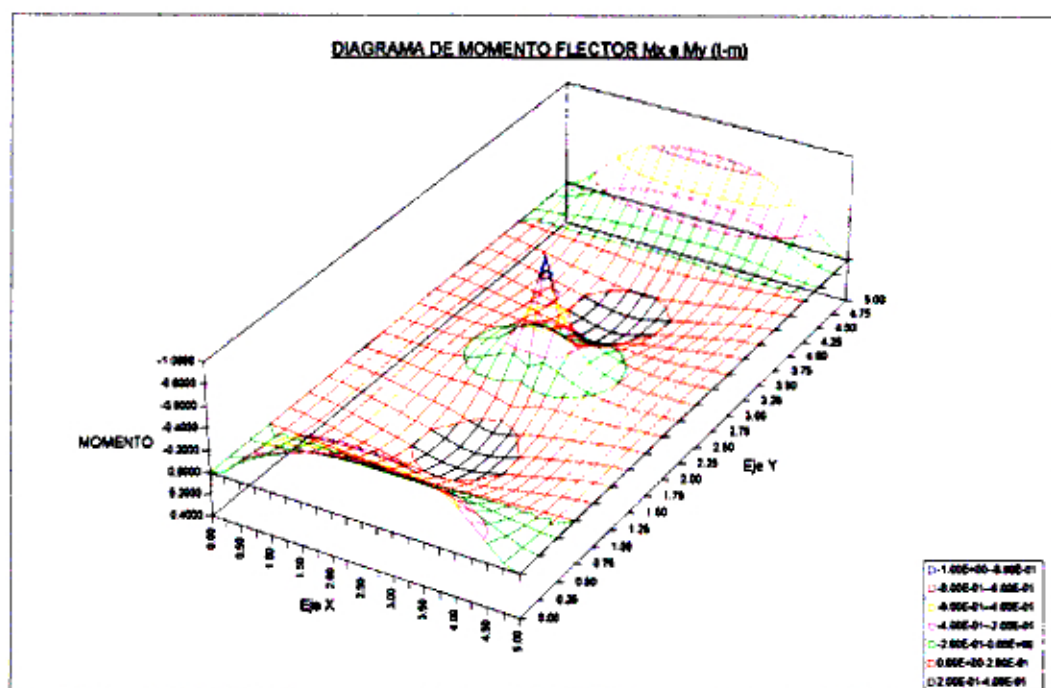
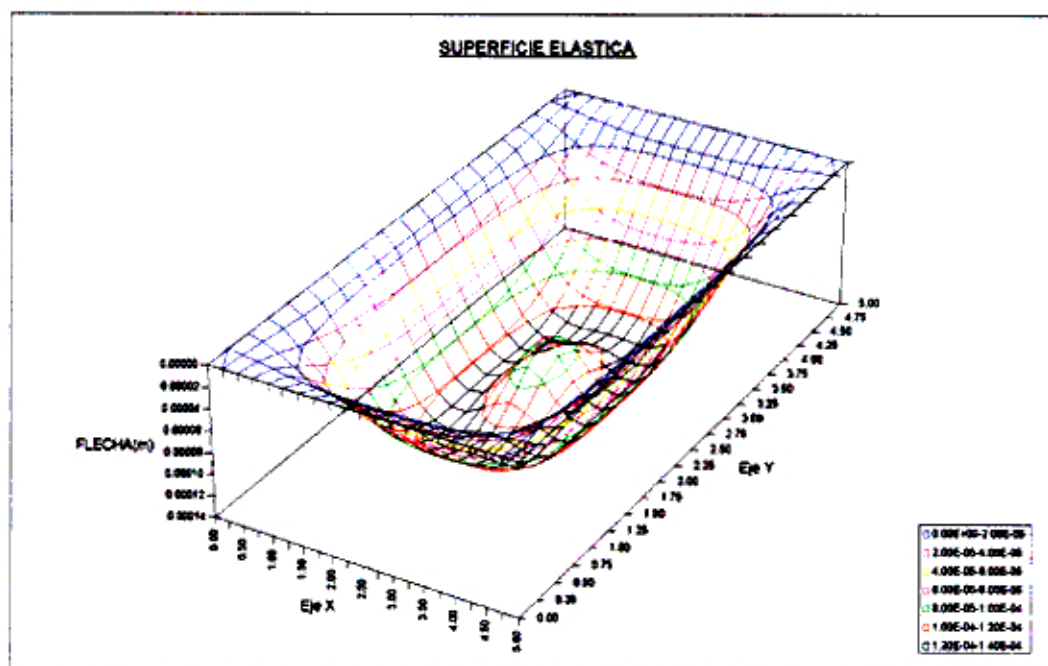


Fig. 4.7

LOSA EMPOTRADA EN SUS CUATRO BORDES Y APOYADA EN UNA COLUMNA



4.1.2 Comparación con el método de los elementos finitos

Sea una losa empotrada en sus cuatro bordes definida en el punto (4.1) y apoyada en una columna infinitamente rígida. La figura 4.10 muestra además, la disposición de una de las mallas que se usará en el análisis por los elementos finitos con el programa de cómputo SAP90.

Se hace el análisis por el método de los elementos finitos con tres distintas mallas, usando: 25, 81 y 441 nudos. Además, de analizarse con el programa de losas continuas.

En las figuras 3.11 y 3.12 se presentan las relaciones de las flechas que se obtuvieron con el SAP90 para cada malla, respecto a la solución con el programa de losas continuas, para los puntos 3 y 4 de la figura 4.10.

Para ambos casos, conforme se hace más fina la malla en la losa lo que conlleva a incrementar el número de los nudos, los resultados se aproximan a los valores que ofrece el programa de losas continuas. Así, para el punto 4 éstas relaciones son: 1.140, 1.087 y 1.021; para el punto 3 son: 1.032, 1.033 y 1.010, correspondientes a 25, 81 y 441 nudos respectivamente.

De la misma forma, la relación de los momentos de empotramiento, figuras 4.16 y 4.17, en los puntos 1 y 2 de la figura 4.10, para 25, 81 y 441 nudos son: 0.665, 0.927 y 0.989 para el nudo número 1; y 0.955, 1.003 y 1.010 para el nudo 2.

Las relaciones de los momentos M_x , figuras 4.13, 4.14 y 4.15, para el punto 3 son: 1.252, 1.119 y 1.019; para el punto 4 son: 0.904, 0.555 y 0.936; para el punto 5 son: 0.400, 0.657 y 0.967, correspondientes a 25, 81 y 441 nudos.

En todos los casos, la solución por el método de los elementos finitos usando el programa de cómputo SAP90, converge a la solución que ofrece el programa de losas continuas que usa el método de las series, a excepción del momento M_x en el punto 4 para 81 nudos, pero la solución para 25 y 441 nudos si converge a la solución dada por el método de las series.

**COMPARACION ENTRE EL METODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS
Y EL METODO DE LAS SERIES**

En una losa empotrada en sus cuatro bordes y apoyada en una columna
Aplicando una carga distribuida

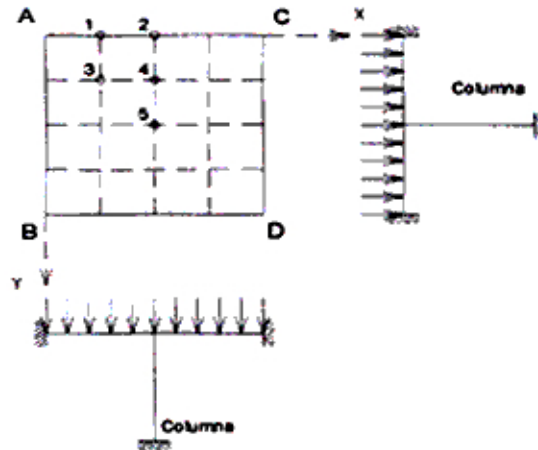


Fig. 4.10

FLECHAS EN LOS PUNTOS Nros. 3 Y 4

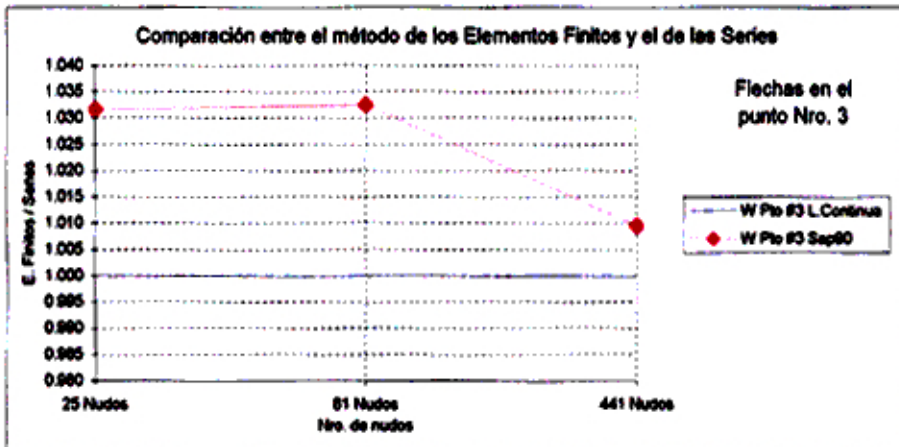


Fig. 4.11

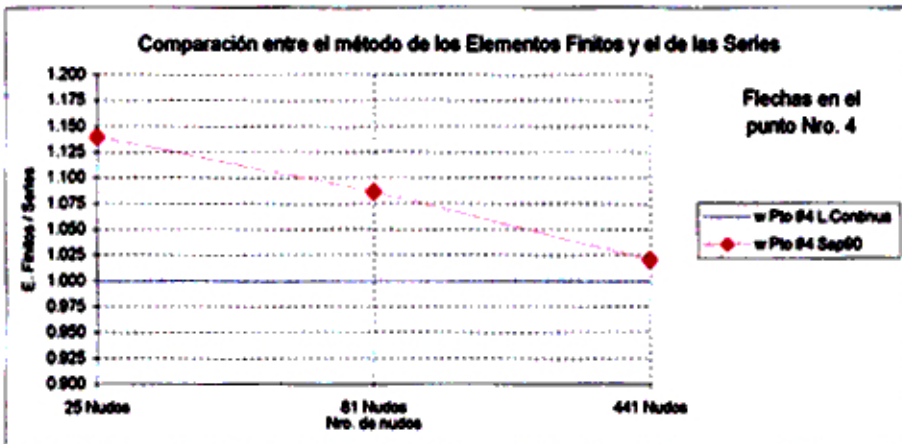


Fig. 4.12

MOMENTOS Mx EN LOS PUNTOS Nros. 3, 4 y 5

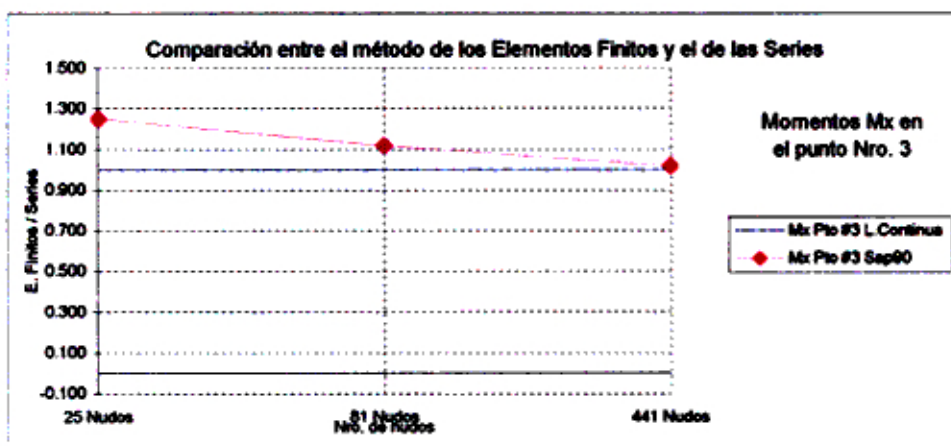


Fig. 4.13

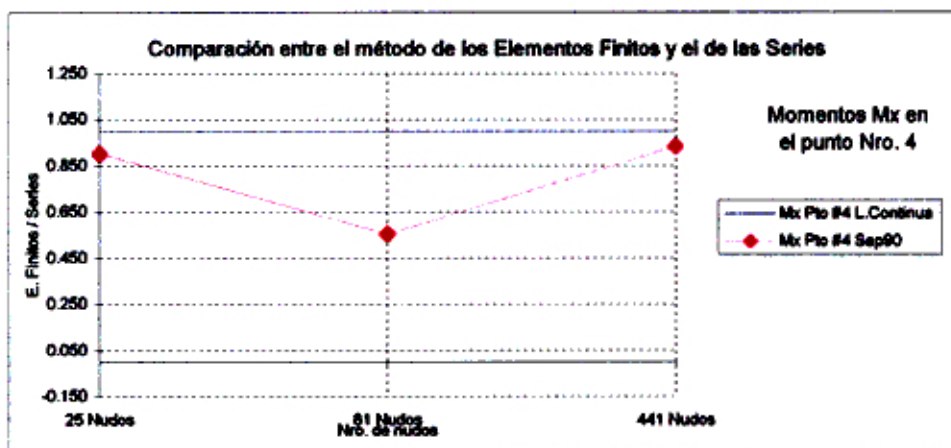


Fig. 4.14

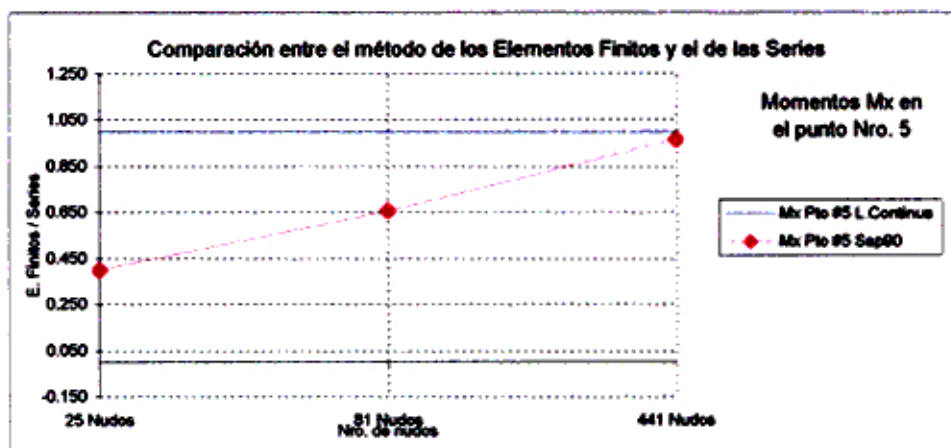


Fig. 4.15

MOMENTOS M_y EN LOS PUNTOS Nros. 1 y 2

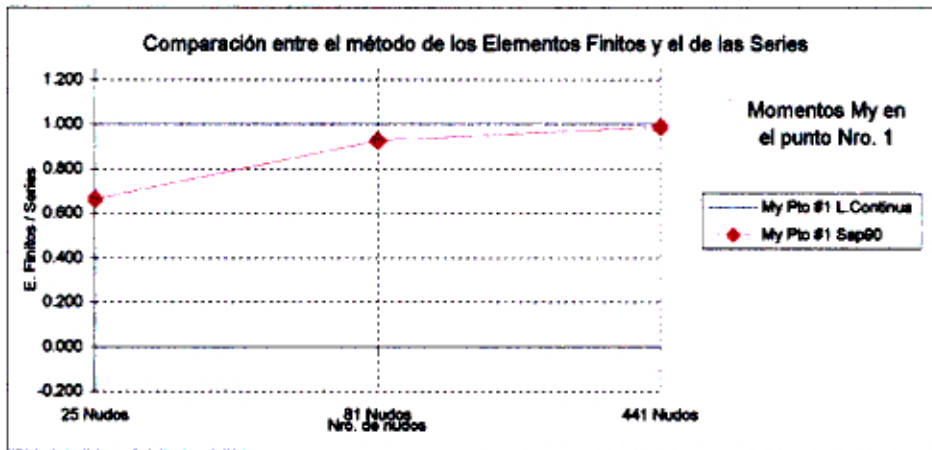


Fig. 4.16

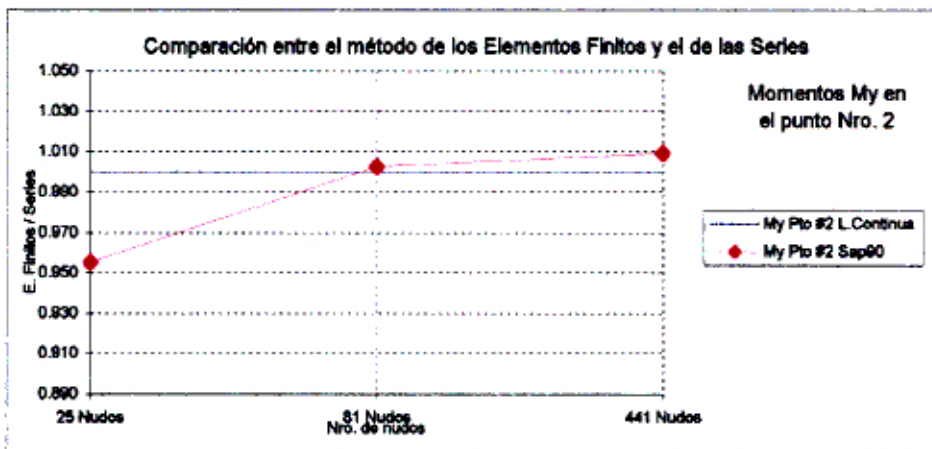


Fig. 4.17

4.2 Losa empotrada en sus bordes y apoyada en cuatro columnas interiores

Sea la losa de concreto cuya relación de lados $b/a=1$, empotrada en sus cuatro bordes y apoyada en cuatro columnas de concreto, figura 4.18, la ubicación de las columnas divide a la losa en tres tramos de igual longitud tanto en la dirección X como en la dirección Y.

Los ejes 1, 2 y 3 son paralelos al eje X y están definidos por: $y=5/6*b$, $y=2/3*b$ e $y=1/6*b$. El eje 3 es el eje central de la losa, el eje 2 coincide con los centros de dos columnas y el eje 1 está a $1/6*b$ del borde $y=b$.

La carga es uniformemente distribuida en toda el área de la losa.

Las direcciones de los ejes también se indican en la figura.

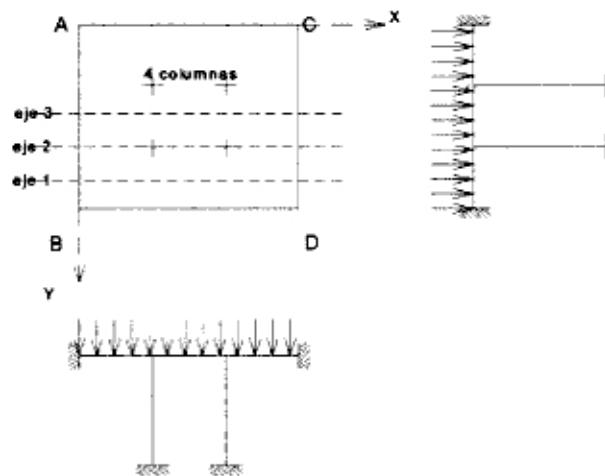


Fig. 4.18

Características de la losa:

- a=3.00 m : Longitud de la losa en la dirección X
- b=3.00 m : Longitud de la losa en la dirección Y
- h=0.20 m : Espesor de la losa
- q=1.00 t/m² : Carga distribuida
- E=2.1e6 t/m² : Módulo de elasticidad del concreto

Características de las columnas:

a : Longitud de la losa en la dirección X

b : Longitud de la losa en la dirección Y

Las columnas son consideradas infinitamente rígidas y el área de contacto entre la losa y la columna es tomado como puntual.

Las flechas, figuras 4.20, 4.21 y 4.22, los momentos M_x , figuras 4.24, 4.25 y 4.26, correspondientes a los ejes 1, 2 y 3 respectivamente, son calculados mediante el programa de losas continuas.

En cada uno de los casos se comparan los resultados de las flechas y los momentos con los resultados obtenidos sin considerar las columnas.

Las figuras 4.27 y 4.28 son: de la superficie elástica y del diagrama de momentos M_x (representa también M_y por ser simétrico) de la losa empotrada en sus cuatro bordes y apoyada sobre cuatro columnas infinitamente rígidas.

Los momentos negativos de empotramiento al colocar las cuatro (4) columnas sufren reducciones de sus magnitudes: para el eje 3 de 77.30%, para el eje 2 de 80.40% y para el eje 1 de 54.58%. Cabe señalar que la máxima reducción se ubica en el eje 2, donde están alineadas dos columnas.

**LOSA EMPOTRADA EN SUS CUATRO BORDES Y APOYADA EN CUATRO COLUMNAS
DEFLEXION DE LOS EJES 1, 2 y 3**

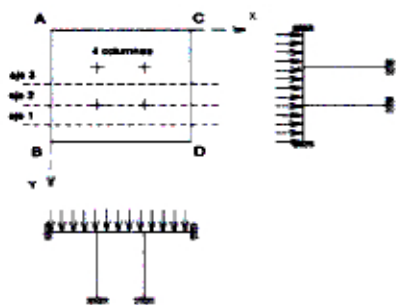


Fig 4.19

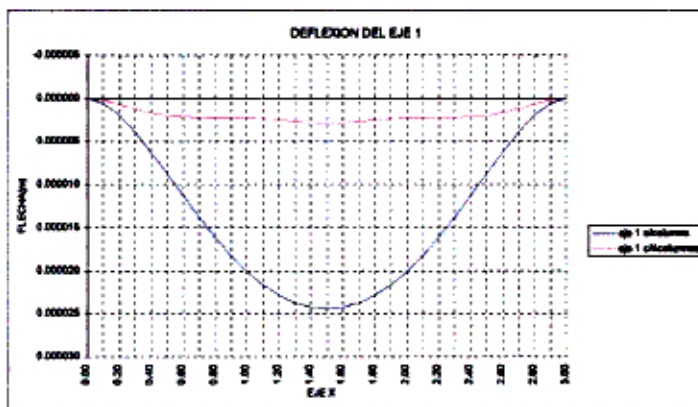


Fig 4.20

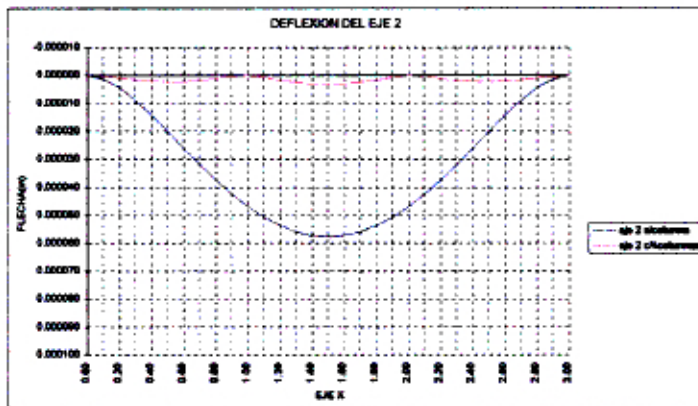


Fig 4.21

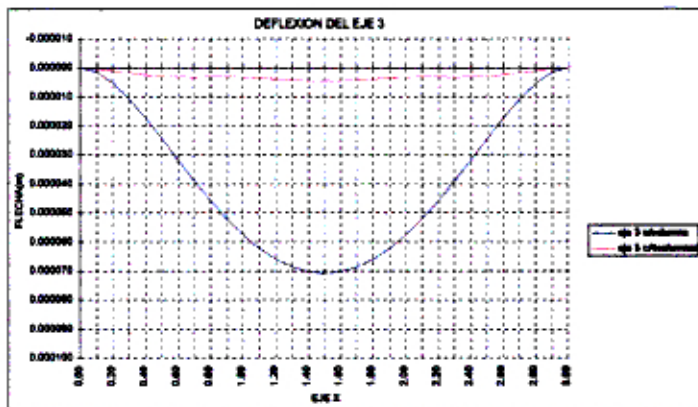


Fig 4.22

**LOSA EMPOTRADA EN SUS CUATRO BORDES Y APOYADA EN CUATRO COLUMNAS
MOMENTOS M_x EN LOS EJES 1, 2 y 3**

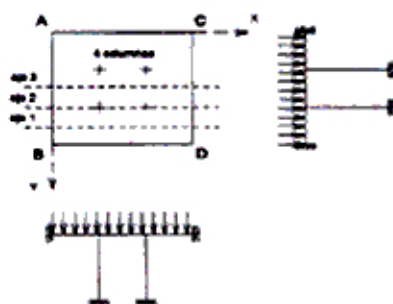


Fig 4.23

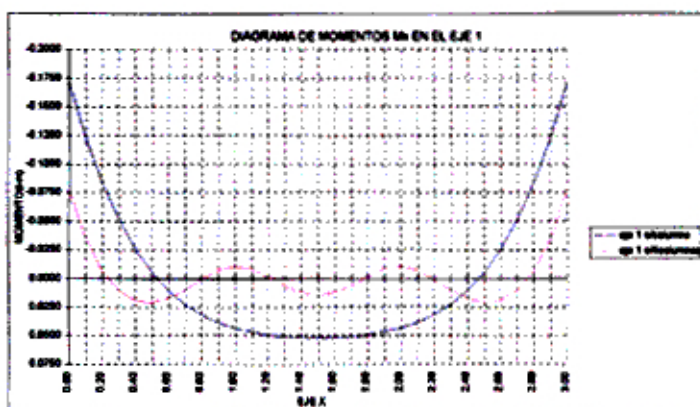


Fig 4.24

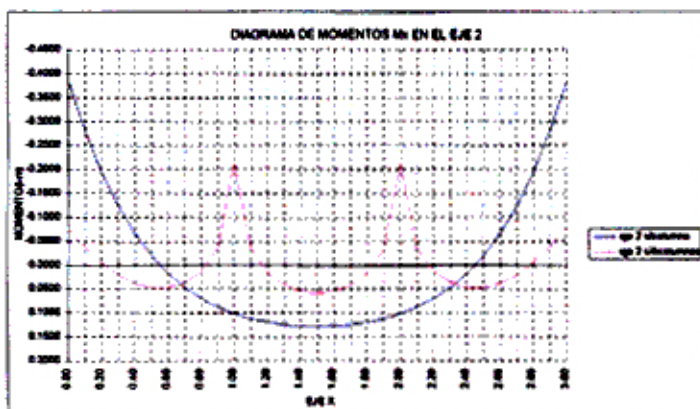


Fig 4.25

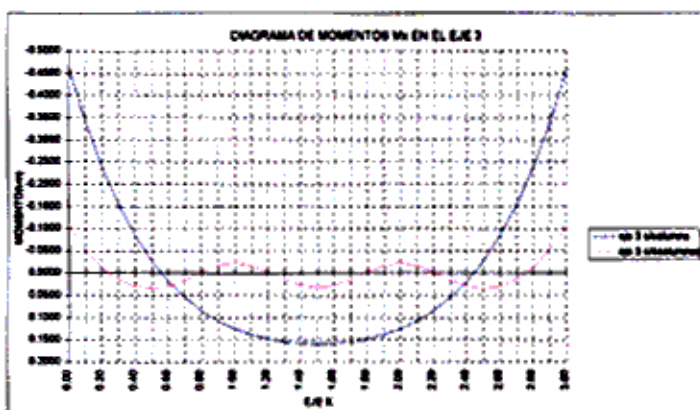


Fig 4.26

SUPERFICIE ELASTICA

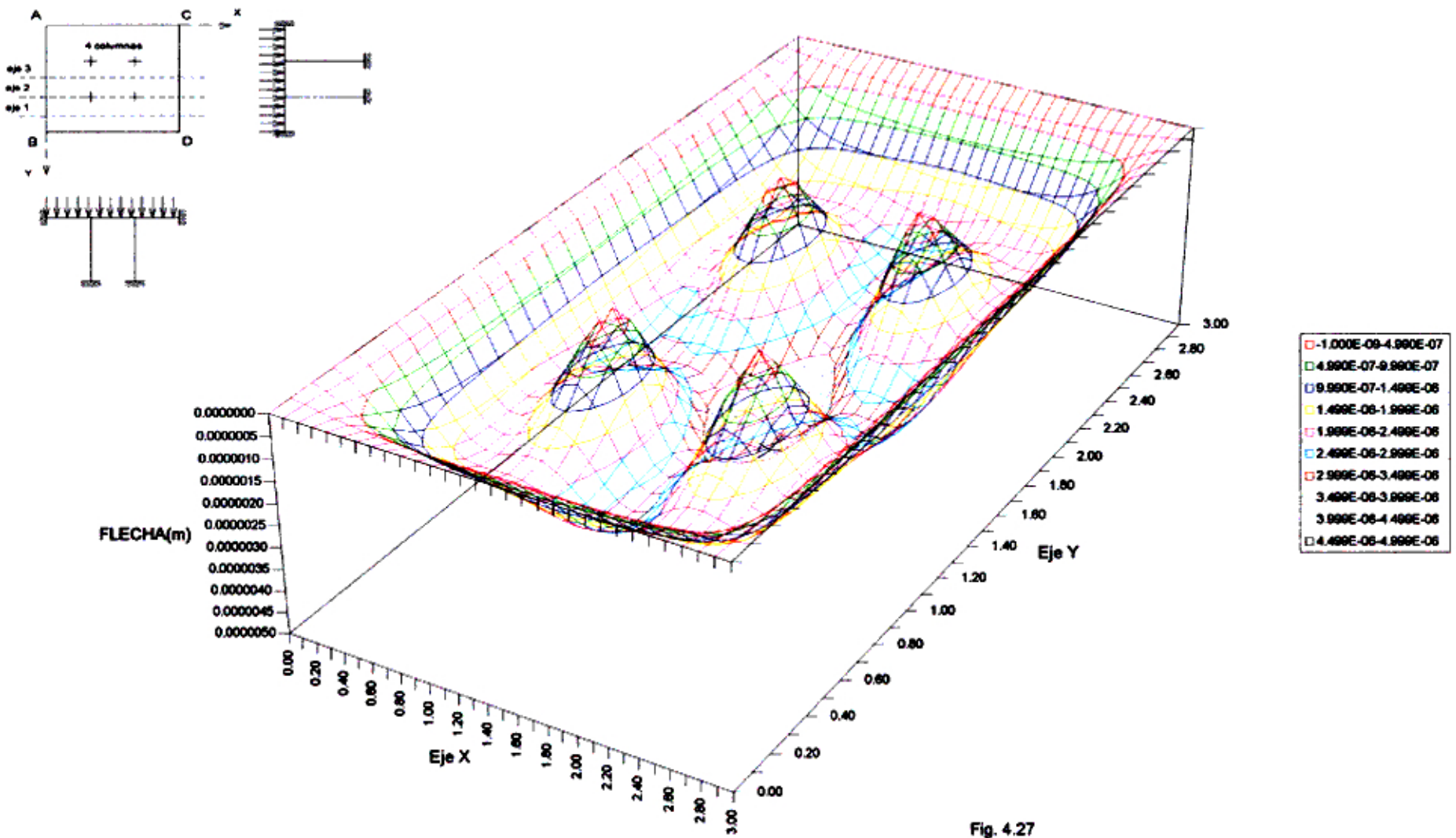


Fig. 4.27

DIAGRAMA DE MOMENTO $M_x - M_y$ (t-m)

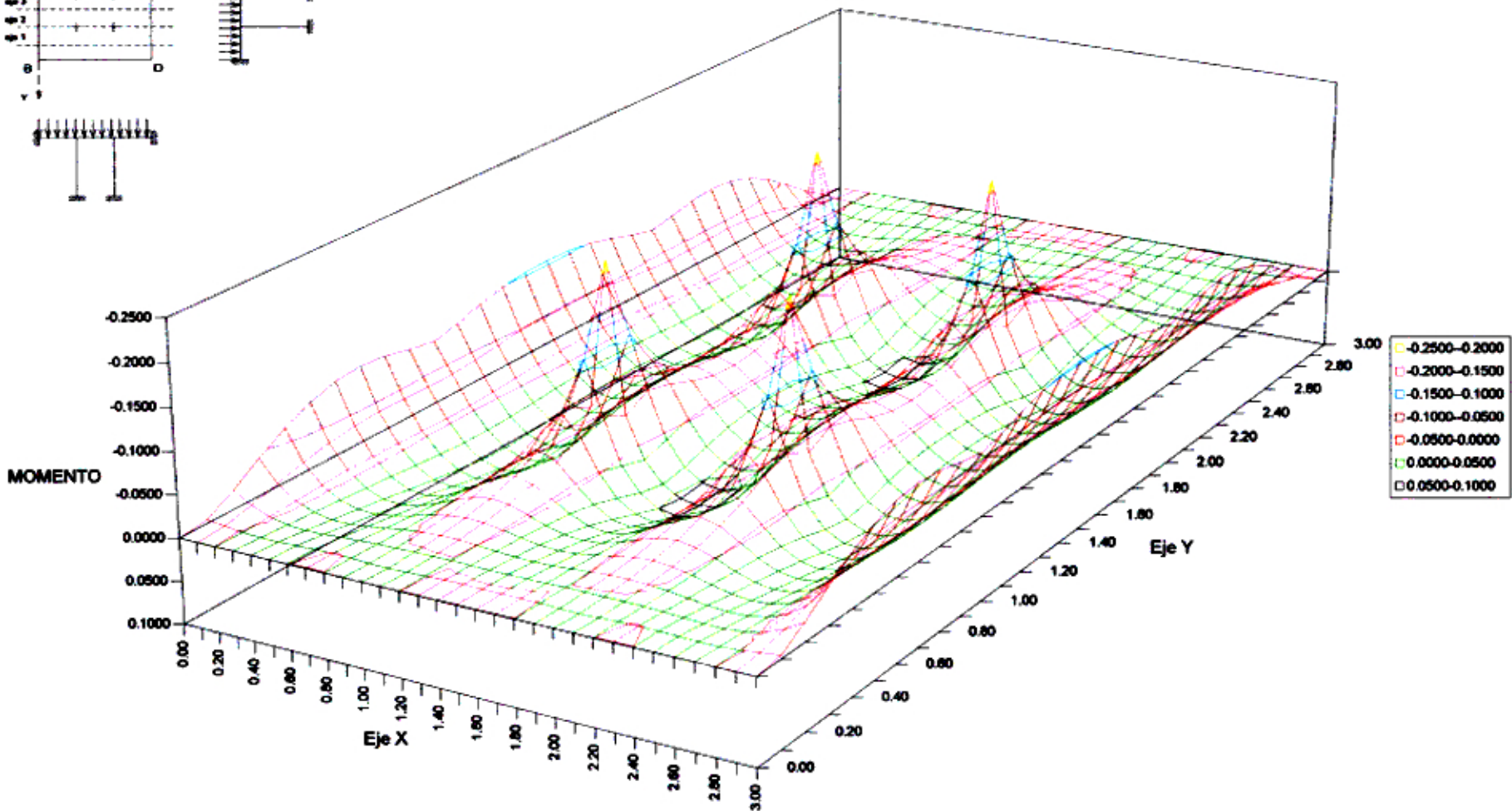
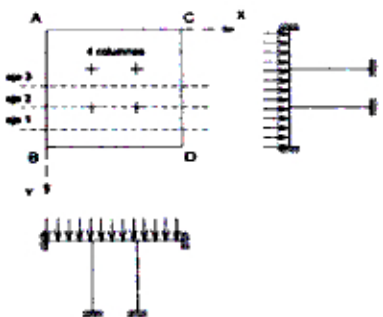


Fig. 4.28

4.3 Losa empotrada en sus bordes y apoyada en nueve columnas interiores

La figura 4.29 muestra la disposición de una losa de concreto, cuya relación de lados $b/a=1$, empotrada en sus cuatro bordes y apoyada en nueve columnas de concreto, la ubicación de las columnas divide a la losa en cuatro tramos de igual longitud tanto en la dirección X como en la dirección Y.

Los ejes 1, 2, 3 y 4 son paralelos al eje X, y están definidos por: $y=7/8*b$, $y=3/4*b$, $y=5/8*b$ e $y=1/2*b$. El eje 4 es el eje central de la losa, eje 1 está a $1/8*b$ del borde $y=b$, la distancia entre ejes es $1/8*b$.

La carga es uniformemente distribuida en toda el área de la losa.

Las direcciones de los ejes también se indican en la figura.

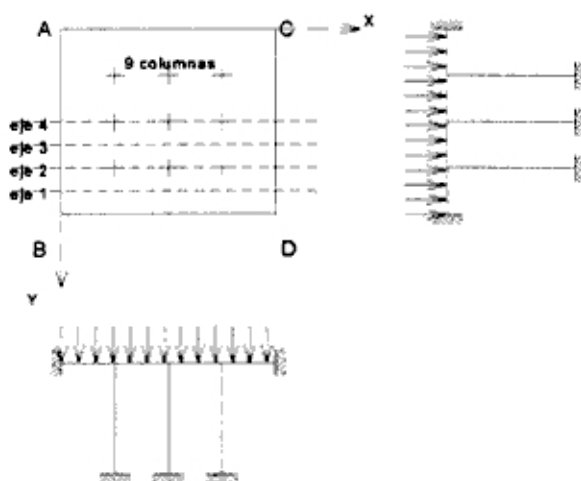


Fig. 4.29

Características de la losa:

- $a=4.00$ m : Longitud de la losa en la dirección X
- $b=4.00$ m : Longitud de la losa en la dirección Y
- $h=0.20$ m : Espesor de la losa
- $q=1.00$ t/m^2 : Carga distribuida
- $E=2.1e6$ t/m^2 : Módulo de elasticidad del concreto

Características de las columnas:

$a=0.20$ m : Longitud de la losa en la dirección X

$b=0.20$ m : Longitud de la losa en la dirección Y

Las columnas son consideradas infinitamente rígidas y el área de contacto entre la losa y columna *no* se considera como puntual.

Las flechas, figura 4.31, los momentos M_x , figura 4.32, correspondientes a los ejes 1, 2, 3 y 4 respectivamente, son calculados mediante el programa de losas continuas.

Se presentan comparaciones de las deflexiones entre los ejes 1, 2, 3 y 4 mostrado en la figura 4.31, y comparaciones de los momentos M_x entre los mismos ejes en la figura 4.32

Las figuras 4.33 y 4.34 son: de la superficie elástica y del diagrama de momentos M_x (representa también M_y por ser simétrico) de la losa empotrada en sus cuatro bordes y apoyada nueve columnas infinitamente rígidas.

4.3.1 Comparación con el método práctico de las franjas de columnas

Esta comparación se realiza para el caso de la figura 4.29, en la cual, se muestra la disposición de la losa y las columnas con sus respectivas dimensiones, tipo de material, condición de carga y de borde. Donde la relación (c/a) es 0.1 y el análisis se realiza tomando en consideración el área de contacto entre la losa y las columnas (no considerado la reacción en la columna como puntual).

En las figuras 4.29.2 y 4.29.3 se muestra la comparación de los diagramas de momentos obtenidos mediante: el método práctico de las franjas de columnas y el análisis de losas continuas, para los ejes 2 y 4 de la losa.

Los momentos de empotramiento M obtenidos mediante el primer método son 1.2% menos en el eje 2 y 4.0% menos en el eje 4. Los momentos negativos en el eje 2, sobre las columnas, son 41.8% y 45.1% menos; y en el eje 4 son 43.7% y 47.7% menos. Los momentos positivos en el eje 2 son 41.7% menos en promedio; y en el eje 4 son 43.9% menos en promedio.

De esto se concluye que: el método práctico de las franjas de columnas es un método que, por lo menos en este caso analizado, proporciona valores con deficiencia, especialmente en los centro de luces y sobre las columnas.

COMPARACION ENTRE EL METODO DE LAS SERIES Y EL DE LA FRANJA DE COLUMNAS

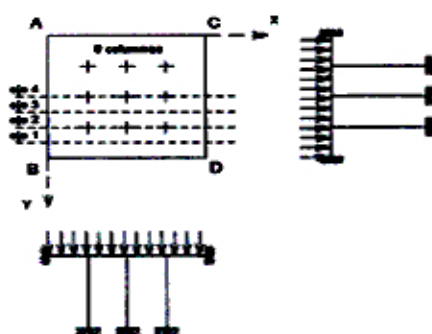


Fig. 4.29.1

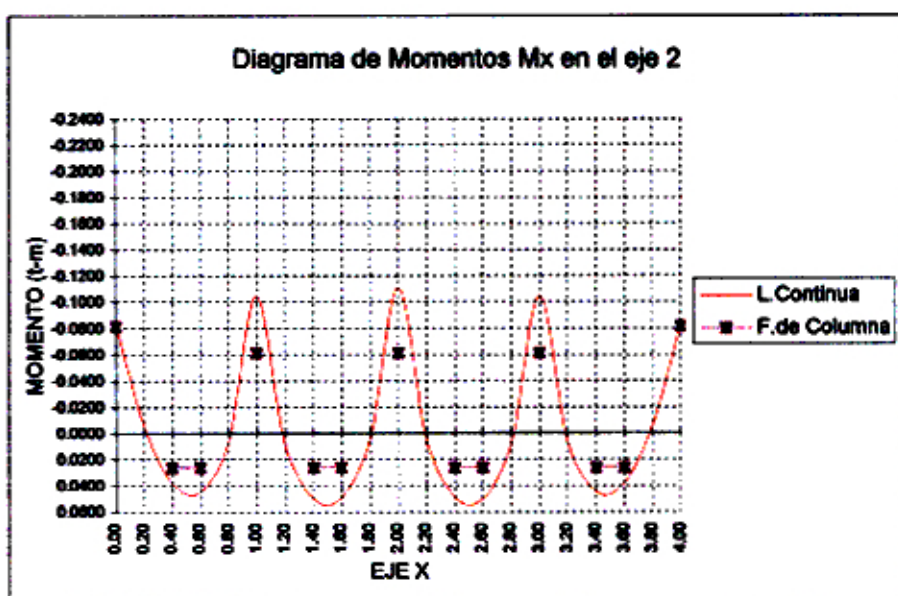


Fig. 4.29.2

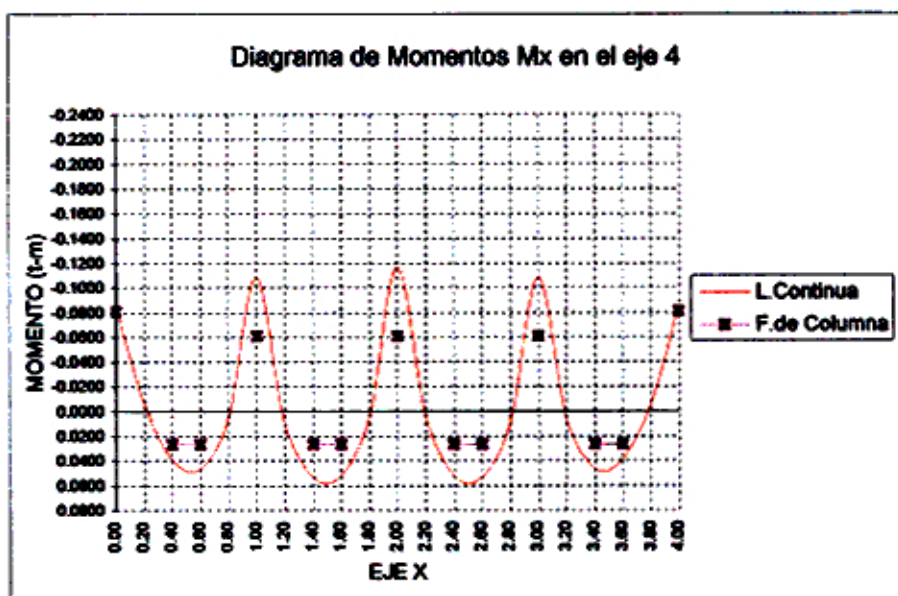


Fig. 4.29.3

LOSA EMPOTRADA EN SUS CUATRO BORDES Y APOYADA EN NUEVE COLUMNAS

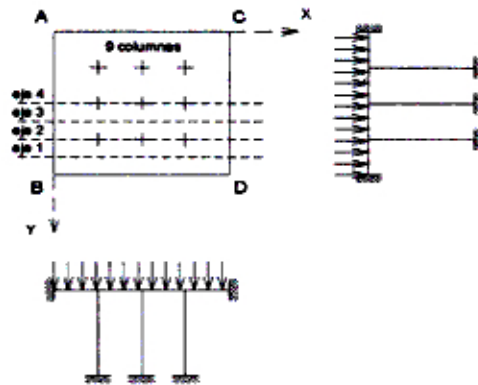


Fig. 4.30

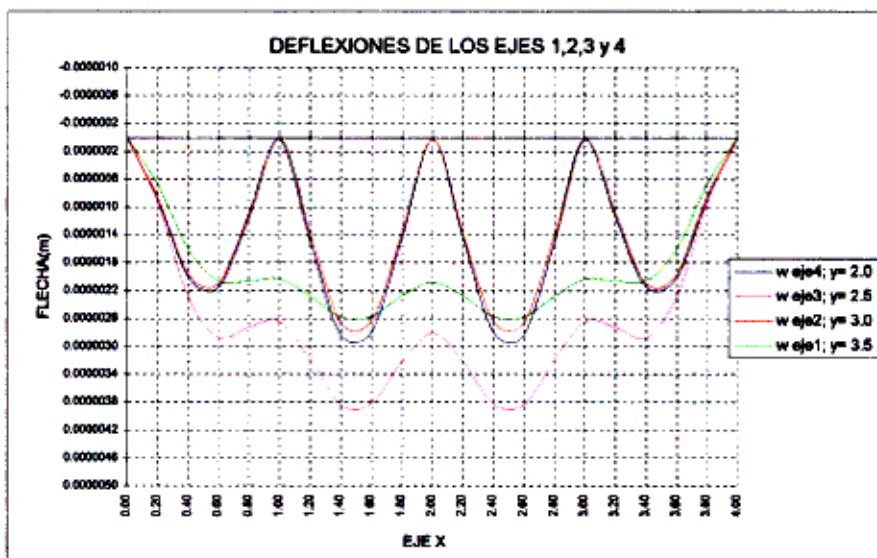


Fig. 4.31

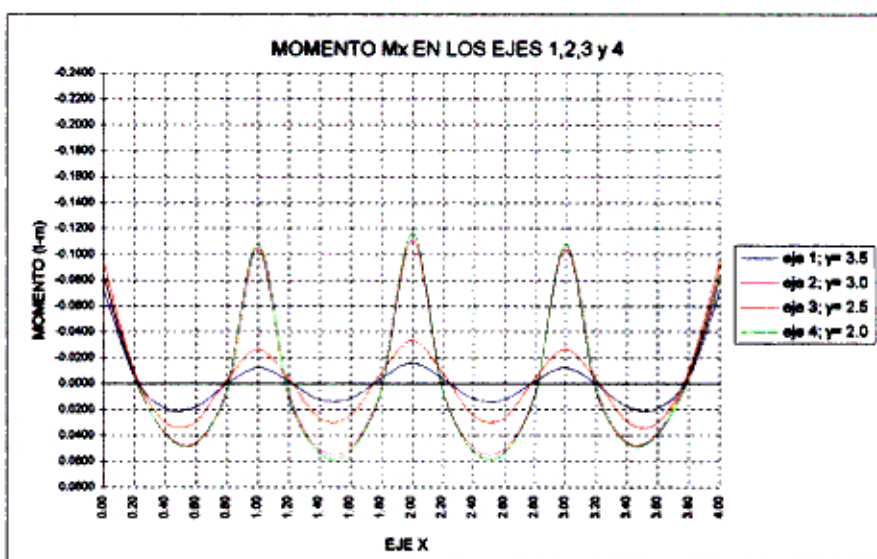
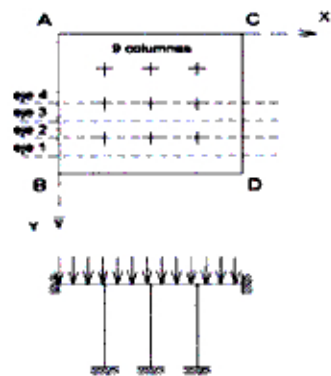


Fig. 4.32



SUPERFICIE ELÁSTICA

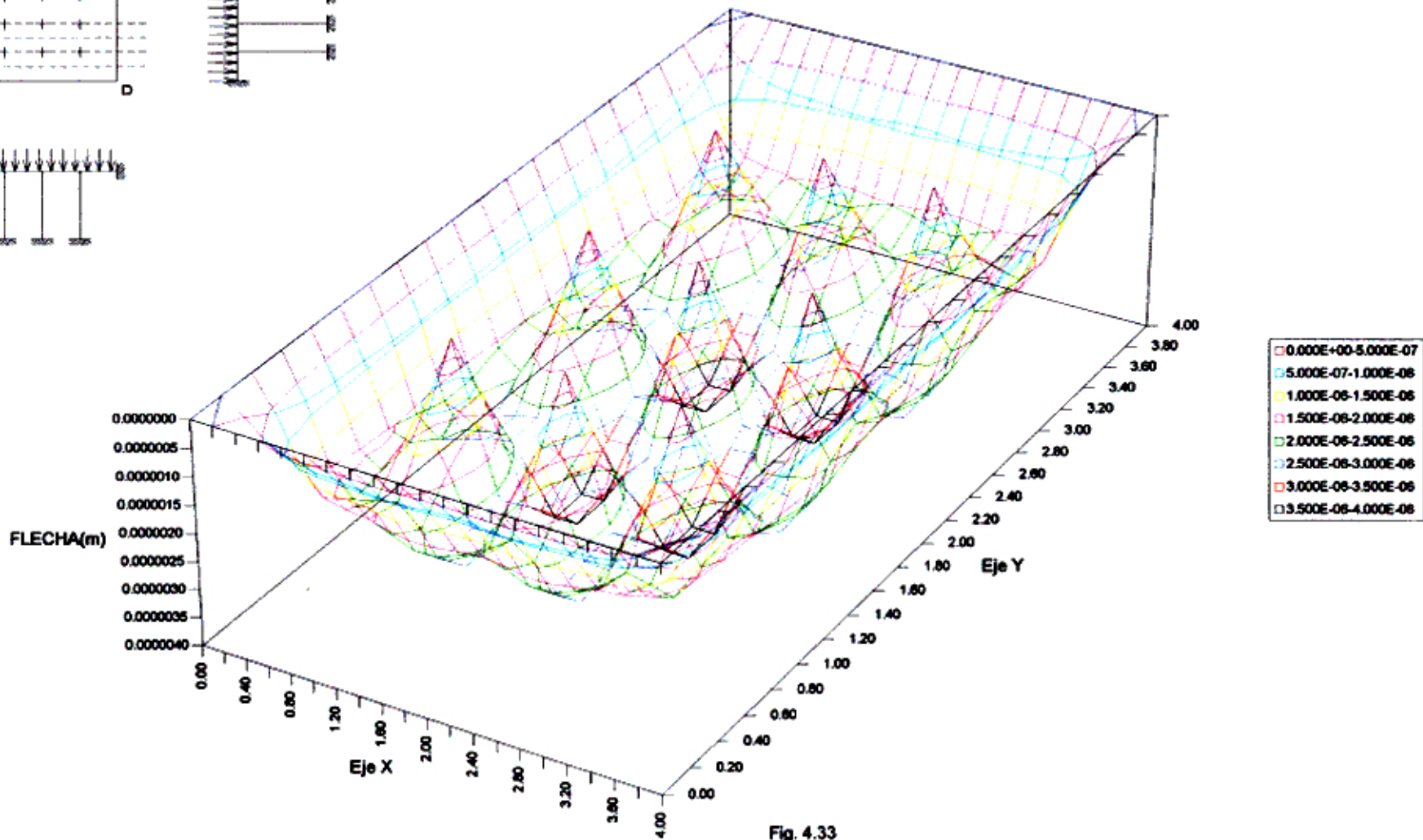


Fig. 4.33

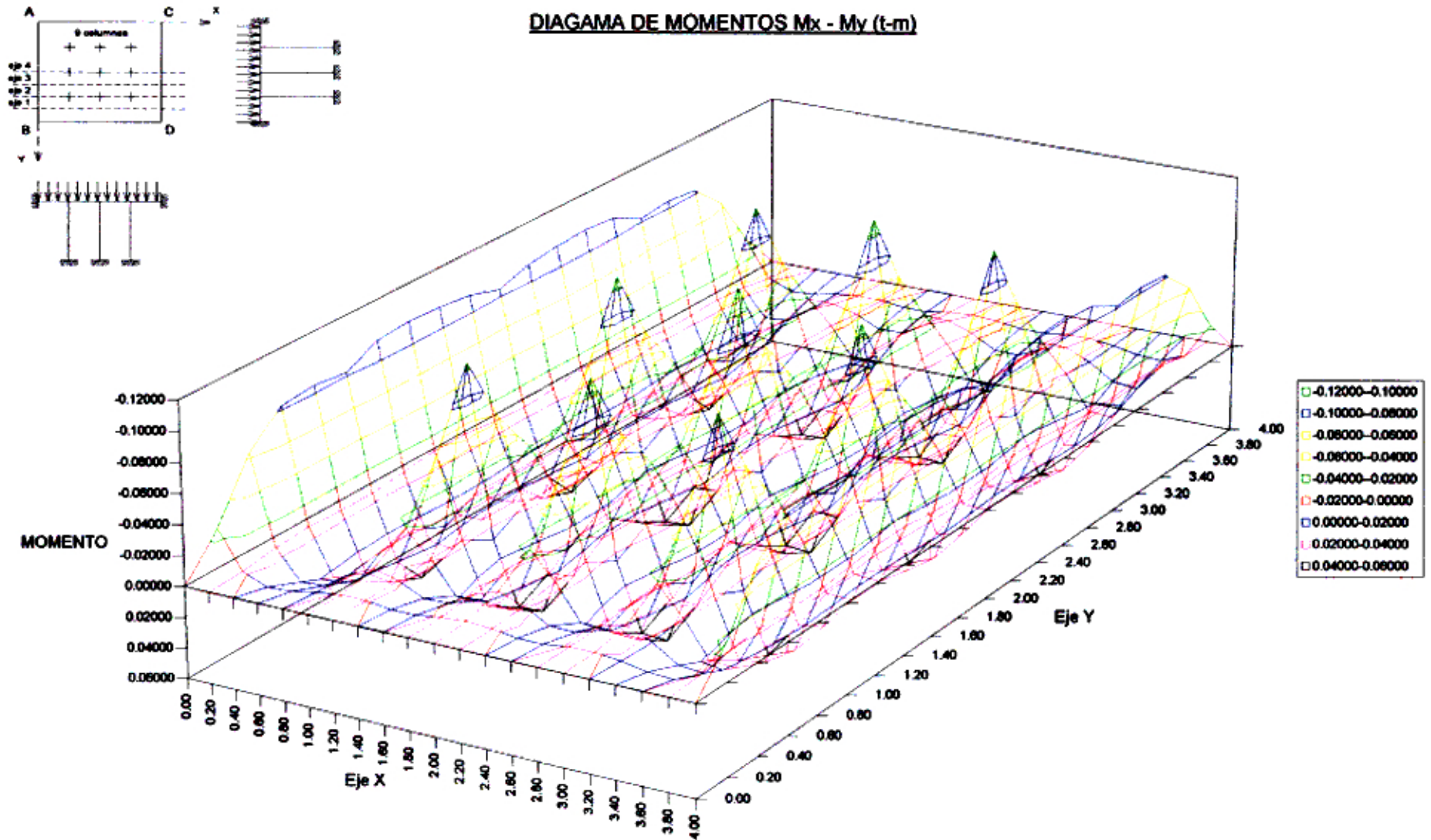


Fig. 4.34

4.4 Tanque elevado

Una de las aplicaciones que se adecua con facilidad al análisis de losas continuas con el programa desarrollado para esta tesis es el tanque elevado con tapa (en el capítulo anterior se resolvió también un tanque elevado pero sin tapa).

La influencia de la relación de los lados es un factor importante en el diseño. Por consiguiente, los aspectos a estudiarse serán: influencia de la relación de un lado respecto al otro en planta y la relación de la altura respecto a un lado.

Condiciones:

El contenido del tanque elevado es agua ($\gamma=1$) y está completamente lleno. Por lo tanto, la carga distribuida en la losa del fondo será la presión del agua en esta cara, cuyo valor será de $\gamma_{\text{agua}}h$ y la carga en las losas laterales será también la presión del agua, variando desde $\gamma_{\text{agua}}h$ en el fondo hasta tomar el valor de cero (0) en el borde superior.

Las condiciones de borde, los ejes locales de cada losa y los puntos a analizarse se indican en la figura 4.35

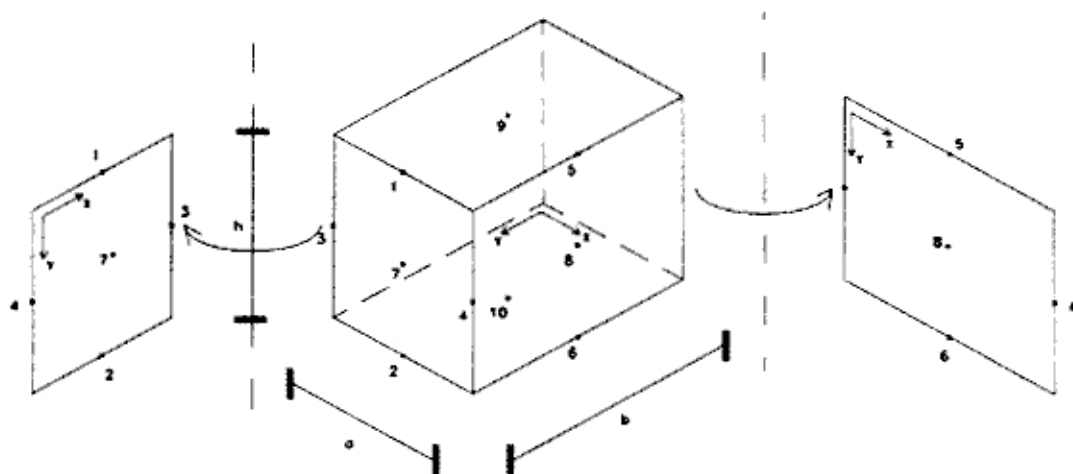


Fig. 4.35

Los dos casos a analizarse son:

- Cuando $b=1.0, 1.5$ y 2.0 ; y $a=1$. Entonces, $b/a = 1.0, 1.5$ y 2.0
- Cuando $h=1.0, 1.5$ y 2.0 ; y $a=1$. Entonces, $h/a = 1.0, 1.5$ y 2.0

En los siguientes análisis: las comparaciones de flechas y momentos se hacen respecto al tanque elevado cuyas dimensiones son: $a=1, b=1$ y $h=1$.

4.4.1 Efecto de la proporción de lados (b/a)

Las flechas en los puntos 8, 9 y 10 se incrementan, no así en el punto 7 donde se observa una disminución, aunque en menor proporción.

FLECHAS (factor=1/D)

				PUNTO			
	a	b	h	Nro. 7	Nro. 8	Nro. 9	Nro. 10
TE-01	1.0	1.0	1.0	0.00759212	0.00759212	-0.00322283	0.01840696
TE-02	1.0	1.5	1.0	0.00711857	0.01327772	-0.00699105	0.03354634
TE-03	1.0	2.0	1.0	0.00712761	0.01522485	-0.00990526	0.04035482

Cuadro 4.1.1

El momento en el punto 1 disminuye, aunque como valor no es considerable, y en el punto 2 aumenta 9.7% y 10.8% para b/a de 1.5 y 2.0.

				PUNTO Nro. 1		PUNTO Nro. 2	
	a	b	h	Mx	My	Mx	My
TE-01	1.0	1.0	1.0	-	-0.00620198	-	-0.04515434
TE-02	1.0	1.5	1.0	-	-0.00398932	-	-0.04954987
TE-03	1.0	2.0	1.0	-	-0.00350010	-	-0.05003060

Cuadro 4.1.2

Los momentos en los puntos 3 y 4 son iguales y sufren ligeros incrementos de 4.3% y 4.2% para b/a de 1.5 y 2.0.

				PUNTO Nro. 3		PUNTO Nro. 4	
	a	b	h	Mx	My	Mx	My
TE-01	1.0	1.0	1.0	-0.02567809	-	-0.02567809	-
TE-02	1.0	1.5	1.0	-0.02676961	-	-0.02676961	-
TE-03	1.0	2.0	1.0	-0.02676538	-	-0.02676538	-

Cuadro 4.1.3

El momento en el punto 5 se incrementa en 61.9% y 59% para b/a de 1.5 y 2.0; el momento en el punto 6 se incrementa en 46.3% y 62% para b/a de 1.5 y 2.0.

				PUNTO Nro. 5		PUNTO Nro. 6	
	a	b	h	Mx	My	Mx	My
TE-01	1.0	1.0	1.0	-	-0.00620198	-	-0.04515434
TE-02	1.0	1.5	1.0	-	-0.01004006	-	-0.06604646
TE-03	1.0	2.0	1.0	-	-0.00986112	-	-0.07317237

Cuadro 4.1.4

Los momentos M_x y M_y en el punto 7 disminuyen en 3.0% y 3.1% para b/a de 1.5 y 2.0; el M_x en el punto 8 disminuye en 43.8% y 79.3% para b/a de 1.5 y 2.0; el M_y en el punto 8 aumenta en 93.1% y 127.6% para b/a de 1.5 y 2.0.

	a	b	h	PUNTO Nro. 7		PUNTO Nro. 8	
				M_x	M_y	M_x	M_y
TE-01	1.0	1.0	1.0	0.00880583	0.00880585	0.00880583	0.00880585
TE-02	1.0	1.5	1.0	0.00852987	0.00852991	0.00494927	0.01700786
TE-03	1.0	2.0	1.0	0.00853498	0.00853502	0.00182540	0.02004772

Cuadro 4.1.5

Los momentos en el punto 9 son poco importantes, aunque se incrementan notablemente; el M_x en el punto 10 aumenta en 94.1% y 136.4% para b/a de 1.5 y 2.0; el M_y en el punto 10 disminuye en 36.6% y 71.5% para b/a de 1.5 y 2.0.

	a	b	h	PUNTO Nro. 9		PUNTO Nro. 10	
				M_x	M_y	M_x	M_y
TE-01	1.0	1.0	1.0	-0.00186418	-0.00186418	0.01947579	0.01947579
TE-02	1.0	1.5	1.0	-0.00377970	-0.00244300	0.03779531	0.01234155
TE-03	1.0	2.0	1.0	-0.00594111	-0.00190247	0.04603644	0.00555330

Cuadro 4.1.6

Se debe notar también que las flechas, los momentos M_x y M_y en el punto número 7 se hacen mínimas cuando la relación de los lados b/a es igual 1.75

4.4.2 Efecto del incremento de la altura en comparación con los lados (h/a)

Las flechas en los puntos números 7 y 8 se incrementan en 74.9% y 100.5% para h/a de 1.5 y 2.0; las flechas en el punto 9 disminuyen en 36.6% y 96.7%; y las flechas en el punto 10 disminuyen en 11.6% y 22.0% para h/a de 1.5 y 2.0 respectivamente.

FLECHAS (factor=1/D)

	a	b	h	PUNTO			
				Nro. 7	Nro. 8	Nro. 9	Nro. 10
TE-01	1.0	1.0	1.0	0.00759212	0.00759212	-0.00322283	0.01840696
TE-04	1.0	1.0	1.5	0.01327773	0.01327773	-0.00204345	0.01628051
TE-05	1.0	1.0	2.0	0.01522486	0.01522486	-0.00010476	0.01435995

Cuadro 4.2.1

Los momento en los puntos 1 y 5 son iguales y disminuyen en 21.2% y 68.1% para h/a de 1.5 y 2.0.

	a	b	h	PUNTO Nro. 1		PUNTO Nro. 5	
				Mx	My	Mx	My
TE-01	1.0	1.0	1.0	-	-0.00620198	-	-0.00620198
TE-04	1.0	1.0	1.5	-	-0.00488469	-	-0.00488469
TE-05	1.0	1.0	2.0	-	-0.00197738	-	-0.00197738

Cuadro 4.2.2

Los momentos en los puntos 2 y 6 son iguales y aumentan en 7.8% y 14.2% para h/a de 1.5 y 2.0

	a	b	h	PUNTO Nro. 2		PUNTO Nro. 6	
				Mx	My	Mx	My
TE-01	1.0	1.0	1.0	-	-0.04515434	-	-0.04515434
TE-04	1.0	1.0	1.5	-	-0.04865472	-	-0.04865472
TE-05	1.0	1.0	2.0	-	-0.05155358	-	-0.05155358

Cuadro 4.2.3

Los momentos en los puntos 3 y 4 son iguales y se incrementan en 48.2% y 61.7% para h/a de 1.5 y 2.0

	a	b	h	PUNTO Nro. 3		PUNTO Nro. 4	
				Mx	My	Mx	My
TE-01	1.0	1.0	1.0	-0.02567809	-	-0.02567809	-
TE-04	1.0	1.0	1.5	-0.03804331	-	-0.03804331	-
TE-05	1.0	1.0	2.0	-0.04151674	-	-0.04151674	-

Cuadro 4.2.4

Los momentos Mx en los puntos 7 y 8 aumentan en 93.1% y 127.6% para h/a de 1.5 y 2.0; los momentos My en los punto 7 y 8 disminuyen en 43.8% y 79.3% para h/a de 1.5 y 2.0.

	a	b	h	PUNTO Nro. 7		PUNTO Nro. 8	
				Mx	My	Mx	My
TE-01	1.0	1.0	1.0	0.00880583	0.00880585	0.00880583	0.00880585
TE-04	1.0	1.0	1.5	0.01700786	0.00494929	0.01700786	0.00494929
TE-05	1.0	1.0	2.0	0.02004772	0.00182541	0.02004772	0.00182541

Cuadro 4.2.5

Los momentos Mx y My en el punto 9 son poco importantes y disminuyen para incrementos de h/a; los momentos Mx y My en el punto 10 disminuyen en 6.3% y 11.9% para h/a de 1.5 y 2.0

	a	b	h	PUNTO Nro. 9		PUNTO Nro. 10	
				Mx	My	Mx	My
TE-01	1.0	1.0	1.0	-0.00186418	-0.00186418	0.01947579	0.01947579
TE-04	1.0	1.0	1.5	-0.00119550	-0.00119550	0.01825524	0.01825524
TE-05	1.0	1.0	2.0	-0.00008649	-0.00008649	0.01715646	0.01715646

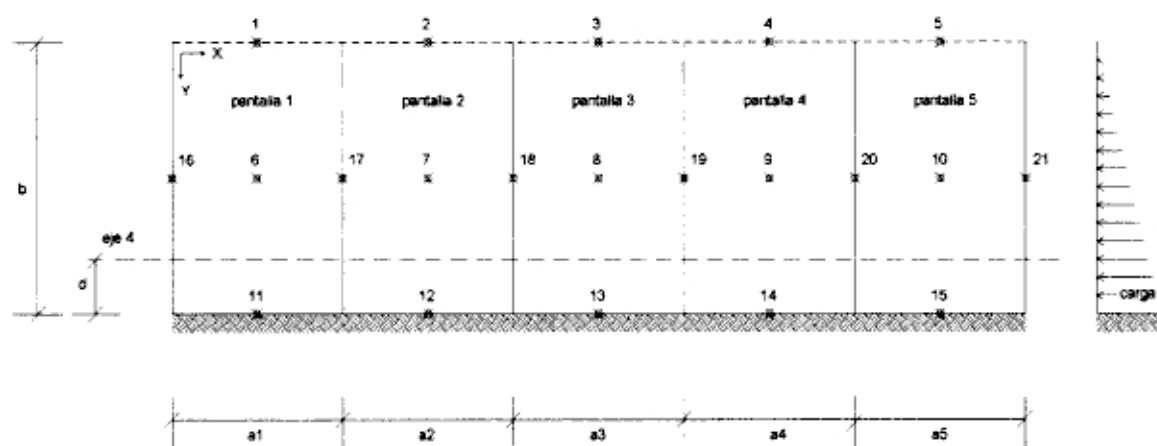
Cuadro 4.2.6

4.5 Muro de contención con contrafuertes

Otro ejemplo de aplicación práctico es el muro de contención con contrafuertes.

La solución de este problema se desarrollará en varias etapas: primero, se realizará una comparación entre los resultados que ofrece el programa de losas continuas y las fórmulas que recomienda la referencia (11), segundo, la influencia de la relación entre el espaciamiento de los contrafuertes y la altura de éste, y finalmente, comparaciones de momentos entre pantallas y la ubicación de los momentos máximos en cada pantalla.

En la figura 4.36, se muestran las dimensiones del muro de contención con contrafuertes: las dimensiones de cada pantalla, las condiciones de carga, los ejes de coordenadas, y la ubicación de cada punto a los que se hará referencia más adelante (desde 1 hasta 21).



MURO DE CONTENCIÓN CON CONTRAFUERTE

Fig. 4.36

Las condiciones de borde de las pantallas del muro de contención con contrafuertes son: los bordes superiores de cada pantalla están libre de restricciones (presentan desplazamientos y giros), los bordes inferiores se consideran empotrados en las zapatas, y los demás bordes se consideran apoyados sobre los contrafuertes.

4.5.1 Comparación con fórmulas recomendadas

La referencia (11) presenta las siguientes recomendaciones: los espaciamientos de los contrafuertes deben estar entre $h/3$ y $2h/3$, el espesor de los contrafuertes y de las pantallas deben ser mayor que 20cm.

La pantalla es una losa apoyada en los contrafuertes y en la zapata; generalmente el borde superior no tiene apoyo. Sin embargo, la pantalla puede ser diseñada como una losa continua apoyada en los contrafuertes sin considerar la influencia de la zapata como apoyo.

Los momentos para los refuerzos horizontales:

$$M^+ = \frac{pl^2}{16} \quad \text{y} \quad M^- = \frac{pl^2}{12}$$

donde:

- p : Presión del relleno al nivel considerado
 l : Distancia entre ejes de los contrafuertes

Los momentos para los refuerzos verticales:

$$M^- = 0.03\gamma_s K_a h_p^2 l$$

$$M^+ = \frac{M^-}{4}$$

donde:

- γ_s : Peso específico del relleno
 K_a : Coeficiente de empuje activo (Rankine)
 h_p : Altura de la pantalla

Para efecto de las comparaciones siguientes se resuelve el problema del muro de contención para $K_a \gamma_s = 1$.

La solución del problema se realiza para relaciones de espaciamiento respecto a la altura del contrafuerte (a/h , $a=1..5$) de: 0.2, 0.4, 0.6 y 0.8

Las comparaciones de los resultados se realizará entre la solución del método práctico y la solución mediante el programa de losas continuas.

Por ser simétrico el muro solo se analizan las pantallas 1, 2 y 3.

El cuadro 4.3 muestran los momentos en los puntos principales tal como indica la figura 4.36.

Los resultados (momentos M_y) que ofrece el método práctico en las zapatas (puntos 12 y 13) son demasiado conservadores, especialmente cuando el espaciamiento es menor, llegando a ser como máximo hasta 3.13 veces su valor real; en el punto 11 que corresponde a la pantalla exterior, a medida que se incrementa el espaciamiento los momentos disminuyen, llegando inclusive a ser menores que su valor real.

Los momentos M_y máximos en las pantallas, también son conservadores alcanzando hasta más de 4 veces su valor. De la misma forma, a medida que se incrementa el espaciamiento los valores se aproximan a su valor real.

Los momentos M_x en los centros de las pantallas (puntos 7 y 8) y en los centros de los contrafuertes (puntos 18 y 19), también son conservadores, llegando en el primer caso hasta 2.18 veces y en el segundo caso 1.24 veces su valor real. Pero, en el punto 6 son inferiores a su valor real para a/b de 0.2 y 0.4, y superiores para 0.6 y 0.8; en el punto 17 son inferiores para a/b de 0.2, 0.4 y 0.6, mas no para a/b de 0.8 para el que es ligeramente mayor.

Por lo tanto, los momentos que se obtienen al analizar el problema del muro de contención con contrafuerte por el método práctico son muy conservadores para las losas interiores; en las losas exteriores la calidad de estos resultados es dependiente del espaciamiento entre los contrafuertes. Los momentos M_y , también en las losas exteriores, que se obtienen por el método práctico son conservadores para pequeños espaciamientos; pero son deficientes para espaciamientos mayores; por otro lado, los momentos M_x son deficientes para espaciamientos pequeños, pero son conservadores para espaciamientos grandes.

COMPARACION DE MOMENTOS (M** / M series)
PARA MUROS DE CONTENCION CON CONTRAFUERTE

Momento My(-) en la zapata

	a1	a2	a3	a4	a5	b	My(-) **	My(-) por Series		
								My pto. 11	My pto. 12	My pto. 13
MC-01	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	1.0	-0.00600	-0.0030223	-0.0019180	-0.0021504
MC-02	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	1.0	-0.01200	-0.0106689	-0.0071584	-0.0078199
MC-03	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	1.0	-0.01800	-0.0208305	-0.0147901	-0.0158610
MC-04	0.8	0.8	0.8	0.8	0.8	1.0	-0.02400	-0.0325117	-0.0238455	-0.0253211

My(-) ** / My(-) Series

	a1	a2	a3	a4	a5	b	My pto. 11	My pto. 12	My pto. 13
MC-01	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	1.0	1.985	3.128	2.790
MC-02	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	1.0	1.125	1.676	1.535
MC-03	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	1.0	0.860	1.217	1.135
MC-04	0.8	0.8	0.8	0.8	0.8	1.0	0.738	1.006	0.948

Momento My(+) máximo de la pantalla

	a1	a2	a3	a4	a5	b	My(+)**	My(+) por Series		
								My pto. 6	My pto. 7	My pto. 8
MC-01	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	1.0	0.00150	0.0004820	0.0003340	0.0003400
MC-02	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	1.0	0.00300	0.0020091	0.0014726	0.0014310
MC-03	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	1.0	0.00450	0.0044404	0.0033402	0.0033379
MC-04	0.8	0.8	0.8	0.8	0.8	1.0	0.00600	0.0072808	0.0057968	0.0057143

My(+)** / My(+) Series

	a1	a2	a3	a4	a5	b	My pto. 6	My pto. 7	My pto. 8
MC-01	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	1.0	3.112	4.491	4.412
MC-02	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	1.0	1.493	2.037	2.096
MC-03	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	1.0	1.013	1.347	1.348
MC-04	0.8	0.8	0.8	0.8	0.8	1.0	0.824	1.035	1.050

Momento Mx(+) en el centro de la pantalla

	a1	a2	a3	a4	a5	b	Mx(+)**	Mx(+) por Series		
								Mx pto. 6	Mx pto. 7	Mx pto. 8
MC-01	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	1.0	0.00125	0.0014440	0.0006609	0.0009178
MC-02	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	1.0	0.00500	0.0053054	0.0028728	0.0035340
MC-03	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	1.0	0.01125	0.0096072	0.0061962	0.0070197
MC-04	0.8	0.8	0.8	0.8	0.8	1.0	0.02000	0.0125929	0.0081702	0.0099990

Mx(+)** / Mx(+) Series

	a1	a2	a3	a4	a5	b	Mx pto. 6	Mx pto. 7	Mx pto. 8
MC-01	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	1.0	0.866	1.891	1.362
MC-02	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	1.0	0.942	1.740	1.415
MC-03	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	1.0	1.183	1.816	1.603
MC-04	0.8	0.8	0.8	0.8	0.8	1.0	1.588	2.181	2.000

Momento Mx(-) en el centro de cada contrafuerte

	a1	a2	a3	a4	a5	b	Mx(-)**	Mx(-) por Series		
								Mx pto. 17	Mx pto. 18	Mx pto. 19
MC-01	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	1.0	-0.00167	-0.0020957	-0.0015744	-0.0015744
MC-02	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	1.0	-0.00667	-0.0062798	-0.0063940	-0.0063940
MC-03	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	1.0	-0.01500	-0.0169990	-0.0140026	-0.0140026
MC-04	0.8	0.8	0.8	0.8	0.8	1.0	-0.02067	-0.0256370	-0.0221557	-0.0221557

Mx(-)** / Mx(-) Series

	a1	a2	a3	a4	a5	b	Mx pto. 17	Mx pto. 18	Mx pto. 19
MC-01	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	1.0	0.795	1.059	1.059
MC-02	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	1.0	0.805	1.043	1.043
MC-03	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	1.0	0.882	1.071	1.071
MC-04	0.8	0.8	0.8	0.8	0.8	1.0	1.040	1.204	1.204

Cuadro 4.3

** Del Análisis y diseño de muros de contención / Referencia (11)

4.5.2 Efecto del incremento progresivo del ancho de las pantallas

El espaciamiento entre los ejes de los contrafuertes es un factor a tomar en consideración en el diseño de las pantallas y de los contrafuertes. Lo que conduce a realizar diversos análisis para espaciamientos variables. Como se mencionó anteriormente, dichos análisis se realizarán para relaciones de a/b (espaciamiento entre contrafuertes sobre la altura) de 0.2, 0.4, 0.6 y 0.8 respectivamente.

El cuadro 4.4 muestra los resultados de flechas y momentos en todos los puntos que se indican en la figura 4.36, para cada espaciamiento.

Para espaciamientos pequeños a/b de 0.2 y 0.4 las flechas en los puntos 2 y 4 están en dirección contraria a la de la carga, esto es debido a la influencia de las losas adyacentes, principalmente de la losa exterior.

Los momentos M_x en los centros de los bordes libres (puntos 1, 2 y 3), cuando se incrementan los espaciamientos entre los contrafuertes, sufren incrementos notables. El más crítico es en la losa 2, en ella, si se considera como 1 el momento M_x para b/a igual 0.2, entonces, los momentos se incrementan a 8.68, 41.97 y 132.29 veces para b/a de 0.4, 0.6 y 0.8 respectivamente.

El momento M_x en el centro de la pantalla que se incrementa con mayor proporción es en la pantalla 2, también si se considera como 1 el valor del momento M_x para b/a igual 0.2, entonces, los momentos se incrementan a 4.35, 9.38 y 13.88 veces para b/a de 0.4, 0.6 y 0.8 respectivamente.

Los momentos M_x en los centros de los contrafuertes (puntos 17, 18, 19 y 20), se incrementan en forma progresiva a medida que se aumentan los espaciamientos entre los contrafuertes, sin presentarse saltos notorios como en los otros casos precedentes. De igual forma, los momentos en las zapatas (puntos 11, 12, 13, 14 y 15) también se incrementan en forma progresiva.

**MURO DE CONTENCIÓN CON CONTRAFUERTE
CON 5 TRAMOS**

FLECHAS

	a1	a2	a3	a4	a5	b	Pto. 1	Pto. 2	Pto. 3	Pto. 4	Pto. 5	a/b
MC-01	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	1.0	0.0000084	-0.0000005	0.0000034	-0.0000005	0.0000084	0.20
MC-02	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	1.0	0.0002657	-0.0000130	0.0001052	-0.0000130	0.0002657	0.40
MC-03	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	1.0	0.0018509	0.0000549	0.0006978	0.0000549	0.0018509	0.60
MC-04	0.8	0.8	0.8	0.8	0.8	1.0	0.0065405	0.0010198	0.0025999	0.0010198	0.0065405	0.80
MC-05	0.4	0.6	0.6	0.6	0.4	1.0	0.0000298	0.0007005	0.0003660	0.0007005	0.0000298	var

	a1	a2	a3	a4	a5	b	Pto. 6	Pto. 7	Pto. 8	Pto. 9	Pto. 10	a/b
MC-01	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	1.0	0.0000617	0.0000147	0.0000301	0.0000147	0.0000617	0.20
MC-02	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	1.0	0.0009008	0.0002827	0.0004525	0.0002827	0.0009008	0.40
MC-03	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	1.0	0.0036318	0.0015167	0.0020161	0.0015167	0.0036318	0.60
MC-04	0.8	0.8	0.8	0.8	0.8	1.0	0.0066439	0.0042665	0.0051943	0.0042665	0.0066439	0.80
MC-05	0.4	0.6	0.6	0.6	0.4	1.0	0.0005482	0.0021282	0.0017765	0.0021282	0.0005482	var

MOMENTO Mx EN EL CENTRO DE LOS BORDES LIBRES

	a1	a2	a3	a4	a5	b	Pto. 1	Pto. 2	Pto. 3	Pto. 4	Pto. 5	a/b
MC-01	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	1.0	0.0001958	0.0000287	0.0000990	0.0000287	0.0001958	0.20
MC-02	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	1.0	0.0015496	0.0002494	0.0007719	0.0002494	0.0015496	0.40
MC-03	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	1.0	0.0048444	0.0012054	0.0024082	0.0012054	0.0048444	0.60
MC-04	0.8	0.8	0.8	0.8	0.8	1.0	0.0097570	0.0037993	0.0053435	0.0037993	0.0097570	0.80
MC-05	0.4	0.6	0.6	0.6	0.4	1.0	0.0004908	0.0024852	0.0018007	0.0024852	0.0004908	var

MOMENTO Mx EN EL CENTRO DE LAS LOSAS

	a1	a2	a3	a4	a5	b	Pto. 6	Pto. 7	Pto. 8	Pto. 9	Pto. 10	a/b
MC-01	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	1.0	0.0014440	0.0008609	0.0009178	0.0008609	0.0014440	0.20
MC-02	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	1.0	0.0053054	0.0028728	0.0035340	0.0028728	0.0053054	0.40
MC-03	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	1.0	0.0095072	0.0061962	0.0070197	0.0061962	0.0095072	0.60
MC-04	0.8	0.8	0.8	0.8	0.8	1.0	0.0125929	0.0091702	0.0099990	0.0091702	0.0125929	0.80
MC-05	0.4	0.6	0.6	0.6	0.4	1.0	0.0039370	0.0071707	0.0066196	0.0071707	0.0039370	var

MOMENTO My EN EL CENTRO DE LAS LOSAS

	a1	a2	a3	a4	a5	b	Pto. 6	Pto. 7	Pto. 8	Pto. 9	Pto. 10	a/b
MC-01	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	1.0	-0.0000005	-0.0000054	-0.0000014	-0.0000054	-0.0000005	0.20
MC-02	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	1.0	0.0004013	-0.0000245	0.0001020	-0.0000245	0.0004013	0.40
MC-03	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	1.0	0.0023917	0.0009525	0.0011851	0.0009525	0.0023917	0.60
MC-04	0.8	0.8	0.8	0.8	0.8	1.0	0.0056640	0.0035022	0.0037354	0.0035022	0.0056640	0.80
MC-05	0.4	0.6	0.6	0.6	0.4	1.0	0.0001268	0.0013190	0.0010656	0.0013190	0.0001268	var

MOMENTO Mx EN EL CENTRO DE LOS CONTRAFUERTE

	a1	a2	a3	a4	a5	b	Pto. 16 Y 21	Pto. 17	Pto. 18	Pto. 19	Pto. 20	a/b
MC-01	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	1.0	-	-0.0020957	-0.0015744	-0.0015744	-0.0020957	0.20
MC-02	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	1.0	-	-0.0082798	-0.0063940	-0.0063940	-0.0082798	0.40
MC-03	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	1.0	-	-0.0169990	-0.0140026	-0.0140026	-0.0169990	0.60
MC-04	0.8	0.8	0.8	0.8	0.8	1.0	-	-0.0256370	-0.0221557	-0.0221557	-0.0256370	0.80
MC-05	0.4	0.6	0.6	0.6	0.4	1.0	-	-0.0122636	-0.0148913	-0.0148913	-0.0122636	var

MOMENTO My EN EL CENTRO DE LAS ZAPATAS

	a1	a2	a3	a4	a5	b	Pto. 11	Pto. 12	Pto. 13	Pto. 14	Pto. 15	a/b
MC-01	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	1.0	-0.0030223	-0.0019180	-0.0021504	-0.0019180	-0.0030223	0.20
MC-02	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	1.0	-0.0108889	-0.0071584	-0.0078199	-0.0071584	-0.0108889	0.40
MC-03	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	1.0	-0.0209305	-0.0147901	-0.0158810	-0.0147901	-0.0209305	0.60
MC-04	0.8	0.8	0.8	0.8	0.8	1.0	-0.0325117	-0.0238455	-0.0253211	-0.0238455	-0.0325117	0.80
MC-05	0.4	0.6	0.6	0.6	0.4	1.0	-0.0093521	-0.0162588	-0.0153890	-0.0162588	-0.0093521	var

Cuadro 4.4

4.5.3 Comparación de momentos entre pantallas

Las pantallas del muro de contención con contrafuertes serán analizadas en las dos direcciones: primero, en los ejes verticales centrales de cada pantalla (eje1 eje2 y eje3 de la figura 4.37), luego, a lo largo del eje 4 de la figura 4.39; en cada uno de los casos se hará una comparación de los momentos. Finalmente se ubicará en las coordenadas XY los puntos a las que corresponden los máximos momentos M_y en cada pantalla.

- Sea el momento negativo de empotramiento M_y en la zapata de la pantalla 1 (eje1) como 100%, figura 4.37, entonces, el momento de empotramiento M_y en la zapata de la pantalla 2 (eje2) será 67.1% y el momento de empotramiento M_y en la zapata de la pantalla 3 (eje3) será 73.3%. De la misma forma, sea el momento máximo positivo M_y (del eje1) de la pantalla 1 como 100%, entonces, el momento máximo positivo M_y (del eje2) de la pantalla 2 será 74.8% y el momento máximo positivo M_y (del eje3) de la pantalla 3 será 72.7%.
- La figura 4.40 muestra el diagrama de momento M_x del eje4 de la figura 4.39. Sea el máximo momento M_x de la pantalla 1 en el eje 4 el 100%, entonces, el máximo momento M_x de la pantalla 2 en el eje 4 será 65% y el máximo momento M_x de la pantalla 3 en el eje 4 será 71.7%. La ubicación del momento máximos M_x de la pantalla 1 esté a la izquierda del eje1, el momento máximo M_x de la pantalla 2 está ligeramente a la derecha del eje 2, y el momento máximo M_x de la pantalla 3 está exactamente en el eje3.
- En el diseño es necesario saber la ubicación de los máximos momentos; por lo que se hizo necesario hallar la correspondiente ubicación. En los cuadros 4.3 se tiene la ubicación de los máximos momentos positivos M_y de cada pantalla y para cada espaciamiento, no estando necesariamente ubicado en su eje central, en la que se aprecia que: a medida que se incrementa el espaciamiento entre los contrafuertes, el máximo momento positivo M_y se aleja de la zapata. Hay una relación entre el máximo momento positivo M_y y el momento negativo de empotramiento M_y en la zapata; para cada a/b , esta relación varía desde 6.50 cuando a/b es 0.2 hasta 4.10 cuando a/b es 0.8

MOMENTO M_y EN LOS EJES CENTRALES 1,2 y 3 DE CADA PANTALLA

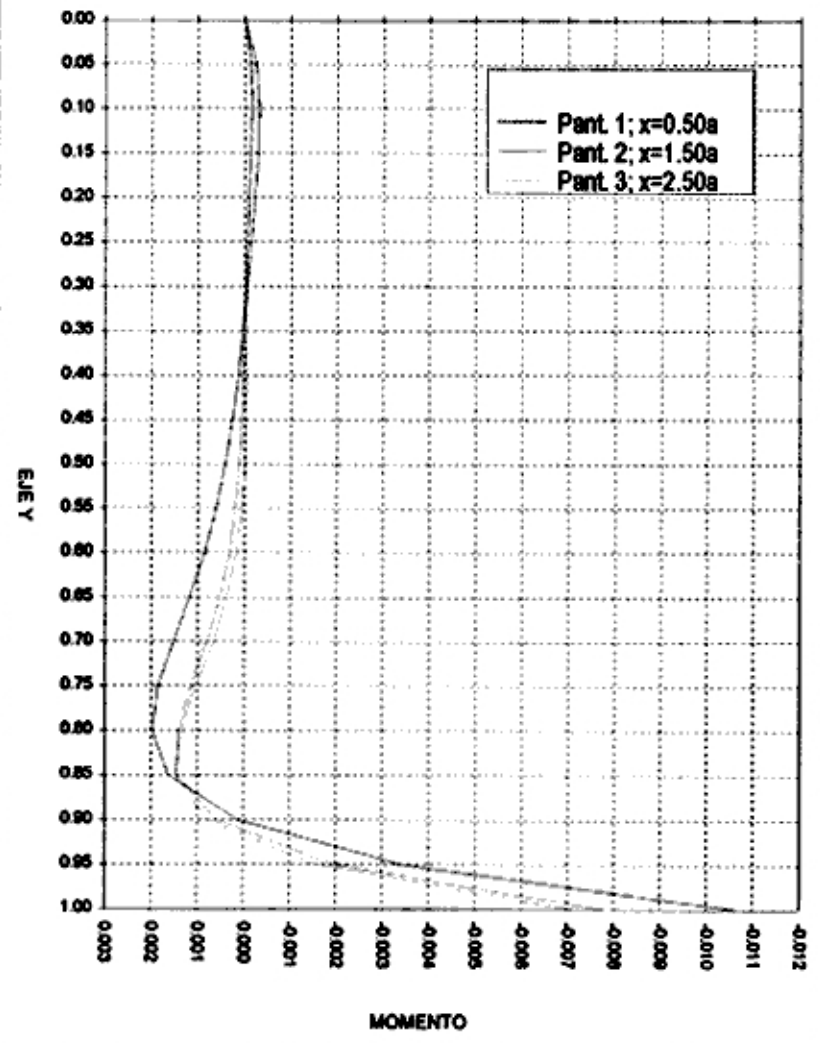
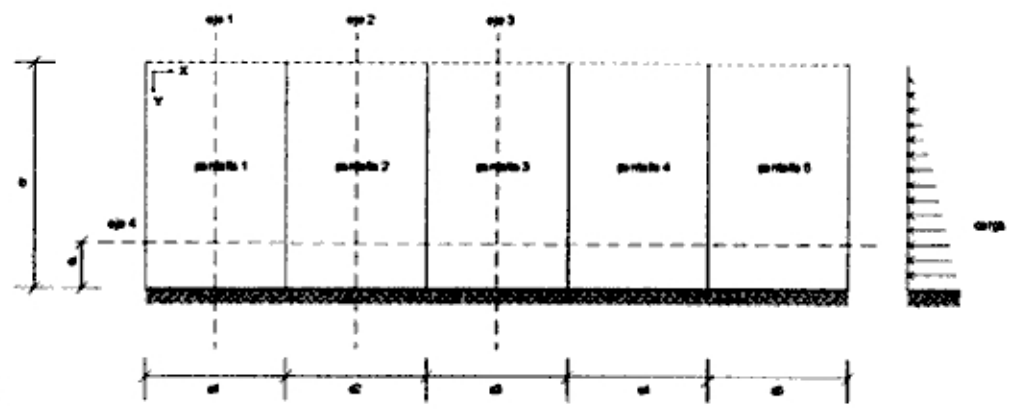


Fig. 4.36

COMPARACION DE MOMENTOS ENTRE PANTALLAS

$a/b=0.4 \quad a_1=a_2=a_3=a_4=a_5$



MURO DE CONTENCIÓN CON CONTRAFUERTE

Fig. 4.37

COMPARACION DE MOMENTOS M_x ENTRE PANTALLAS EN EL EJE 4
 $a/b=0.4$ $d=0.25b$ $a_1=a_2=a_3=a_4=a_5$

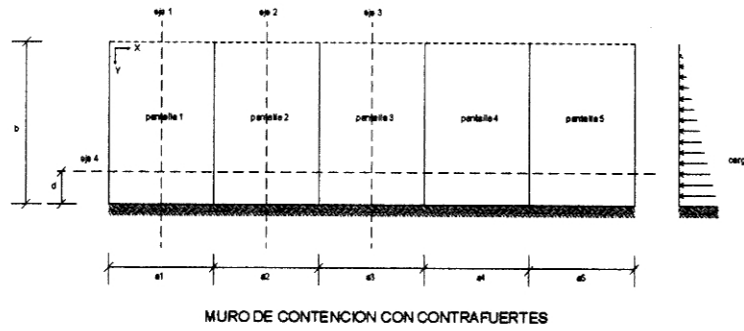


Fig. 4.39

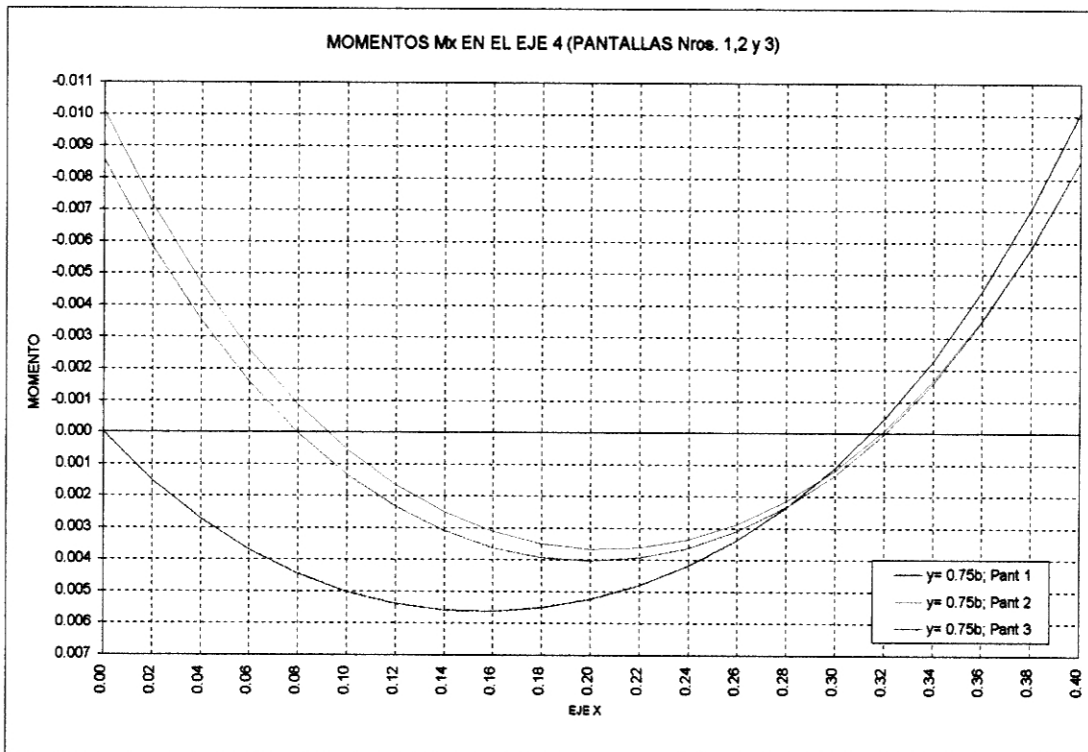


Fig. 4.40

UBICACION DE LOS MOMENTOS MAXIMOS $M_y(+)$ RESPECTO A LA ALTURA EN CADA PANTALLA

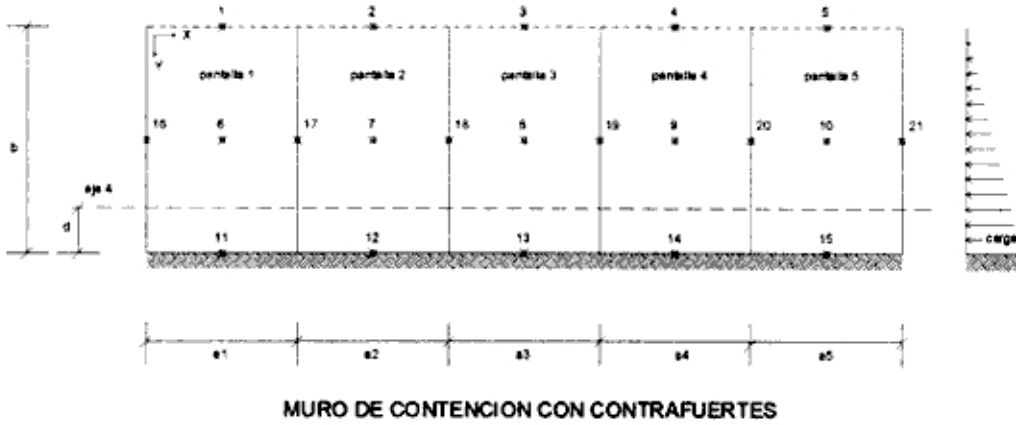


Fig. 4.41

Distancia $d = \text{factor} \cdot b$

ai / b	factor		
	Pant. 1	Pant. 2	Pant. 3
0.2	0.10	0.10	0.10
0.4	0.20	0.15	0.15
0.6	0.30	0.25	0.25
0.8	0.35	0.30	0.30

Relación de $M_y(-) / M_y(+)$ máximo

ai / b	Pant. 1	Pant. 2	Pant. 3
0.2	6.50	5.70	6.30
0.4	5.50	4.90	5.50
0.6	4.80	4.40	4.80
0.8	4.60	4.10	4.40

Cuadro 4.3

SUPERFICIE ELASTICA

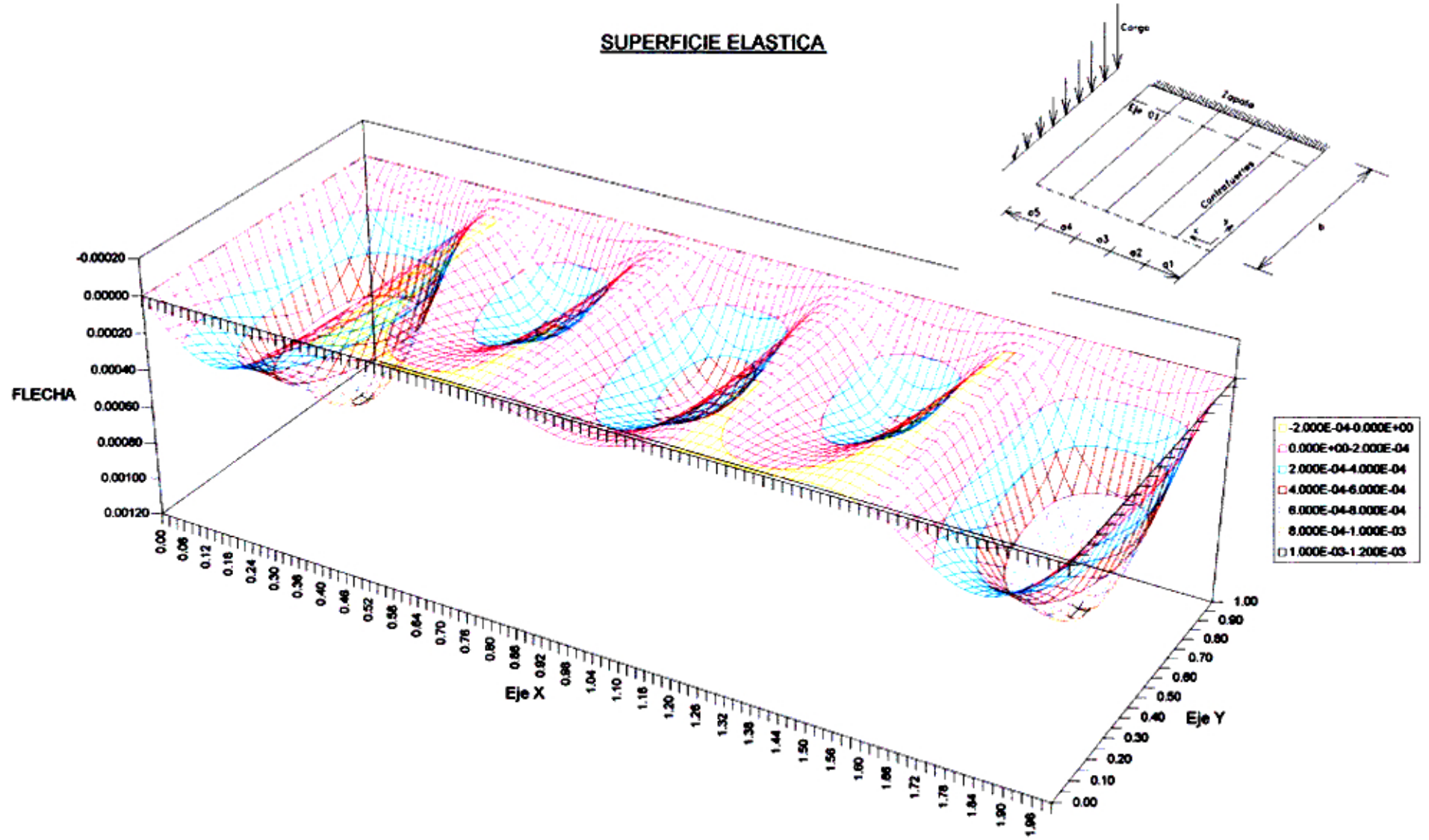


Fig. 4.42

DIAGRAMA DE MOMENTO FLECTOR M_x

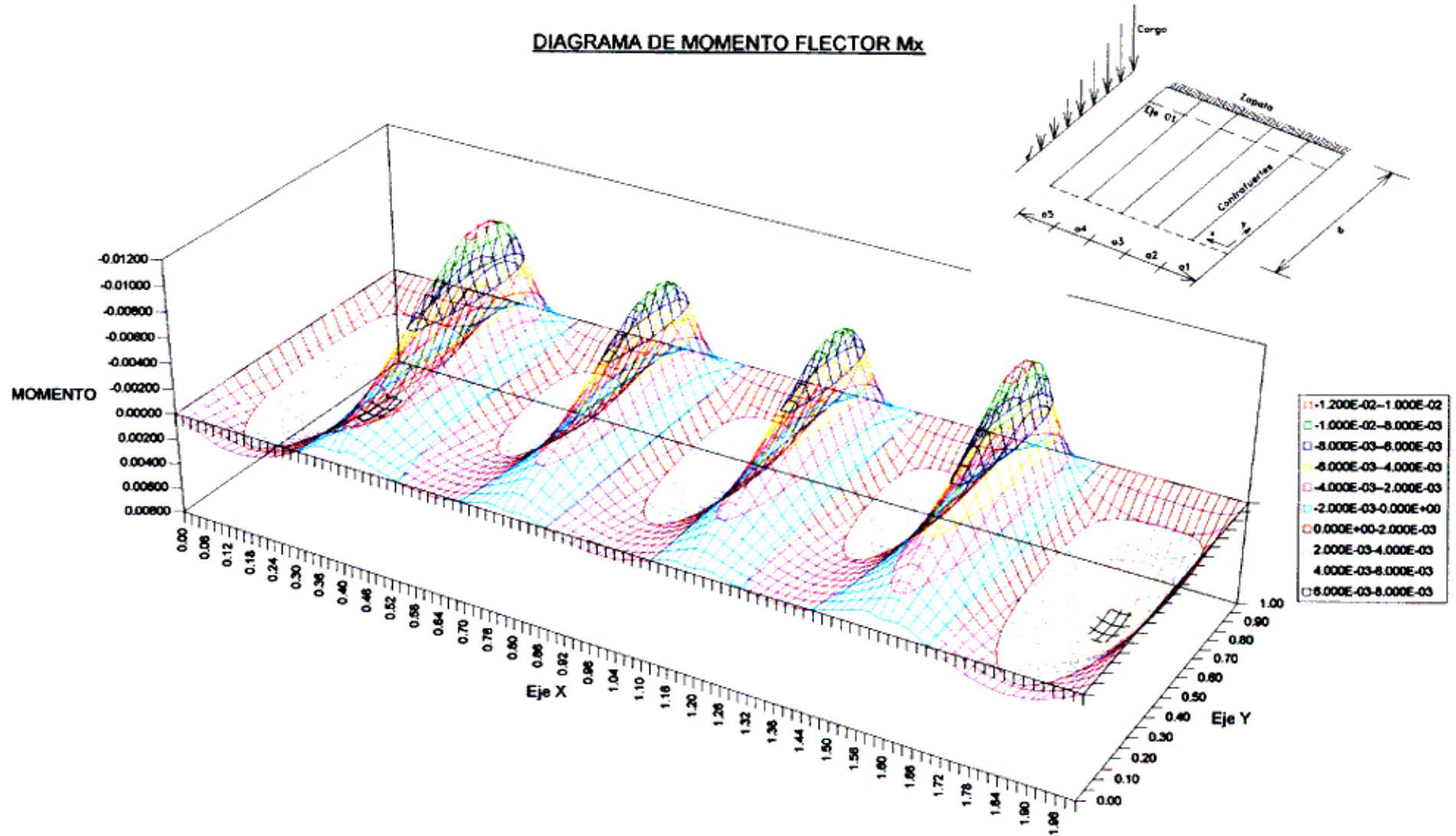


Fig. 4.43

DIAGRAMA DE MOMENTO FLECTOR M_y

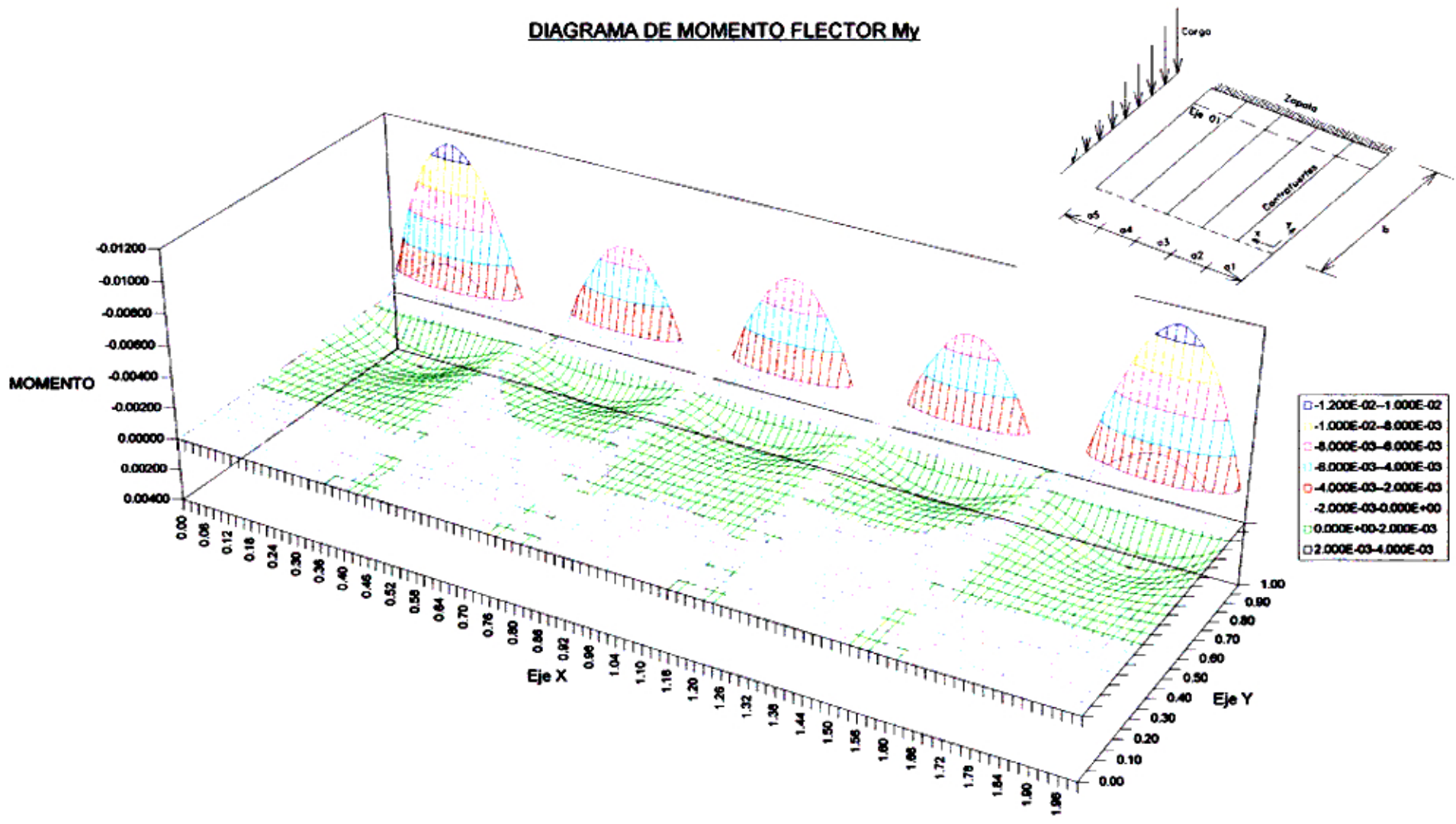
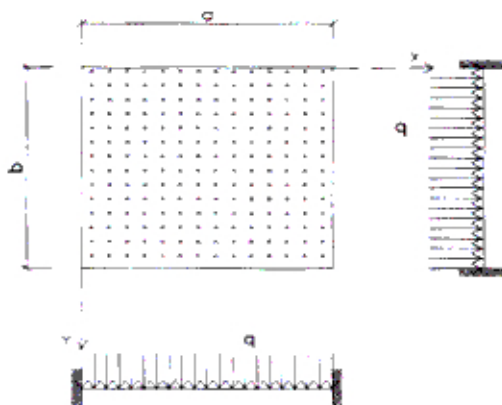


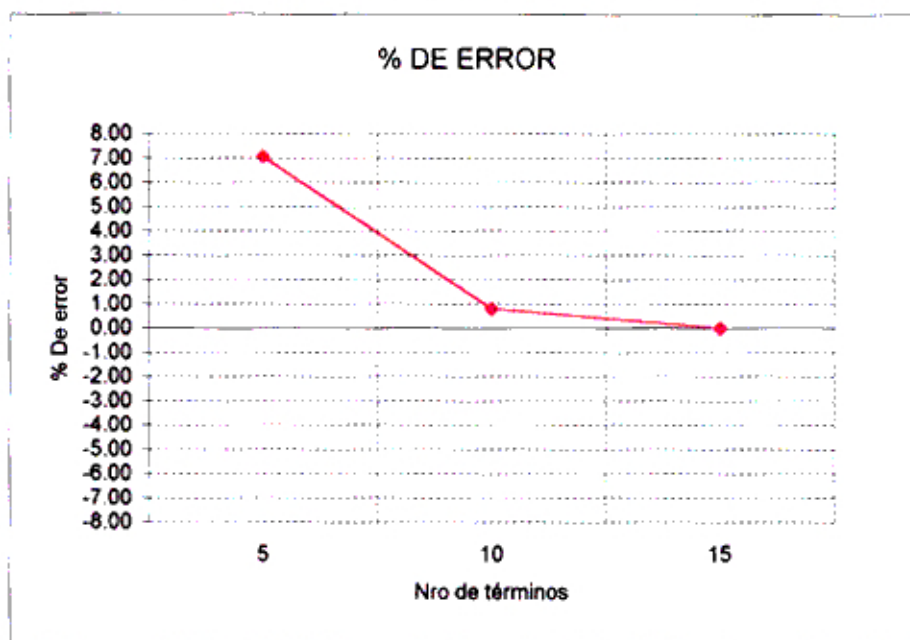
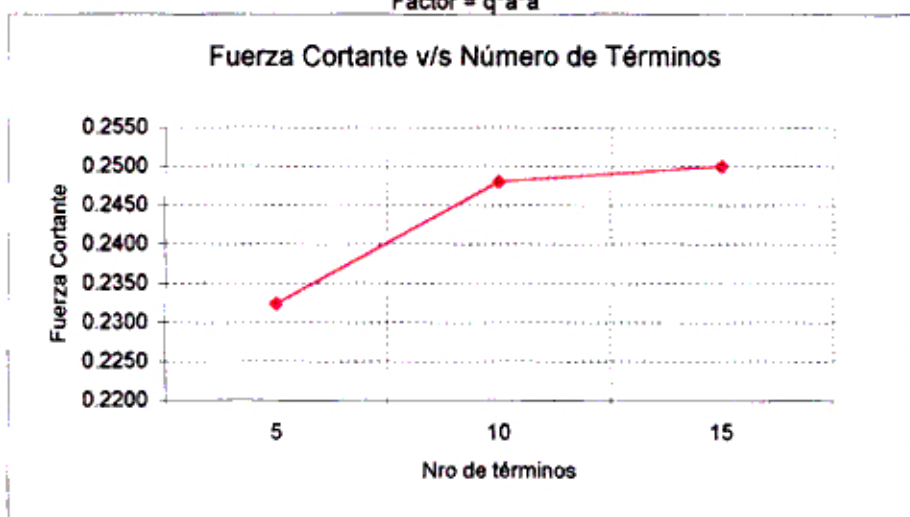
Fig. 4.44

CONVERGENCIA DE LA FUERZA CORTANTE

FUERZA RESULTANTE EN (x=a)



Factor = $q \cdot a \cdot a$



**REPORTE DEL PROGRAMA
"LOSAS CONTINUAS"
DESARROLLADO PARA ESTA TESIS**

Tesis : Análisis de Losas Continuas
Tesisista : ELMER H. CHAVEZ MAURICIO
Asesor : Dr. HUGO SCALETTI FARINA

ANALISIS DE LOSAS CONTINUAS POR SERIES DE FOURIER

Archivo de Nombres : NAMES.CFG
Archivo de Datos : COR-01.DAT
Archivo de Resultados : COR-01.SAL
Archivo de Imagen : COR-01.IMG

PRUEBA DEL DAMERO <KALMANOK>

CARACTERISTICAS DE CADA UNA DE LAS LOSAS:

losa	a	b	te	E	u	D
1	3.500	2.500	0.200	2100000.000	0.300	1538.462
2	4.000	2.500	0.200	2100000.000	0.300	1538.462
3	3.500	2.500	0.200	2100000.000	0.300	1538.462
4	3.500	3.000	0.200	2100000.000	0.300	1538.462
5	4.000	3.000	0.200	2100000.000	0.300	1538.462
6	3.500	3.000	0.200	2100000.000	0.300	1538.462
7	3.500	2.500	0.200	2100000.000	0.300	1538.462
8	4.000	2.500	0.200	2100000.000	0.300	1538.462
9	3.500	2.500	0.200	2100000.000	0.300	1538.462

CONDICIONES DE BORDE:

Lado Empotrado : 0
Lado Apoyado : -1
Lado Libre : -2
Lado Compartido : Código(número de losa adyacente)

losa	Norte	Sur	Oeste	Este
1	-1	4	-1	2
2	-1	5	1	3
3	-1	6	2	-1
4	1	7	-1	5
5	2	8	4	6
6	3	9	5	-1
7	4	-1	-1	8
8	5	-1	7	9
9	6	-1	8	-1

Número de lados Libres : 0
Número de lados Apoyados : 12
Número de lados Empotrados : 0
Número de lados Compartidos : 12

CONDICIONES DE CARGA:

Carga Hidrostática

losa	Crg#	cij	dij	gij	hij	qij	q2ij	q3ij
1	1	3.500	2.500	1.750	1.250	0.700	0.000	0.000
2	1	4.000	2.500	2.000	1.250	0.300	0.000	0.000
3	1	3.500	2.500	1.750	1.250	0.700	0.000	0.000
4	1	3.500	3.000	1.750	1.500	0.300	0.000	0.000
5	1	4.000	3.000	2.000	1.500	0.700	0.000	0.000
6	1	3.500	3.000	1.750	1.500	0.300	0.000	0.000
7	1	3.500	2.500	1.750	1.250	0.700	0.000	0.000
8	1	4.000	2.500	2.000	1.250	0.300	0.000	0.000
9	1	3.500	2.500	1.750	1.250	0.700	0.000	0.000

Carga Puntual:

losa	Crg#	gpij	hpij	ppij
1	1	1.000	1.000	0.000
2	1	1.000	1.000	0.000
3	1	1.000	1.000	0.000
4	1	1.000	1.000	0.000
5	1	1.000	1.000	0.000
6	1	1.000	1.000	0.000
7	1	1.000	1.000	0.000
8	1	1.000	1.000	0.000
9	1	1.000	1.000	0.000

FLECHAS:

Losa	x	y	w
1	0.000	0.000	0.000000000000
1	0.350	0.250	0.000010982196
1	0.350	0.500	0.000020281316
1	0.350	0.750	0.000028973021
1	0.350	1.000	0.000030603445
1	0.350	1.250	0.000031029649
1	0.350	1.500	0.000028368946
1	0.350	1.750	0.000023004257
1	0.350	2.000	0.000015635902
1	0.350	2.250	0.000007388223
1	0.350	2.500	0.000000000000
1	0.700	0.000	0.000000000000
1	0.700	0.500	0.000036673701
1	0.700	1.750	0.000041356940
1	0.700	2.000	0.000027802966
1	0.700	2.250	0.000012870051
1	0.700	2.500	0.000000000000
1	1.050	0.000	0.000000000000
1	3.150	2.250	0.000003941111
1	3.500	2.500	0.000000000000
2			

9	2.450	2.500	0.000000000000
9	3.500	2.500	0.000000000000

MOMENTOS:

Losa	x	y	Mx	My	Mxy
1	0.000	0.000	0.00000000	0.00000000	-0.14673969
1	0.350	0.250	0.04194730	0.05175940	-0.11769864
1	0.350	0.500	0.07116828	0.08052389	-0.09318193
1	0.350	0.750	0.08946636	0.09593337	-0.06018758
2	0.400	1.750	-0.06598638	-0.04483067	0.01167710
2	0.400	2.000	-0.05054754	-0.05016269	0.00206545
2	0.400	2.250	-0.03292312	-0.05705525	-0.01713243
2	0.400	2.500	-0.01938393	-0.06461311	-0.05451551
2	0.800	1.000	-0.00279304	0.01254496	0.00429402
2	0.800	1.250	-0.00867239	-0.00023018	0.01270792
2	0.800	1.500	-0.01503048	-0.01695979	0.01851606
2	0.800	1.750	-0.02200162	-0.03917626	0.01957373

9	3.150	1.750	0.08946636	0.09593337	-0.06018758
9	3.150	2.000	0.07116828	0.08052389	-0.09318193
9	3.150	2.250	0.04194730	0.05175940	-0.11769864
9	3.500	2.500	0.00000000	0.00000000	-0.14673969

CORTANTES:

Losa	x	y	Qx	Qy
1	0.000	0.000	0.00000000	0.00000000
1	0.350	2.250	-0.05251113	-0.30056272
1	0.350	2.500	-0.29175898	-0.42974966
1	0.700	0.000	0.00000000	0.49847245
1	0.700	0.250	0.07472140	0.35917343
1	0.700	0.500	0.13677110	0.23275253
1	0.700	0.750	0.17848011	0.12713911
2	0.000	0.000	0.00000000	-0.11414838
2	0.000	0.250	0.12828642	-0.29409668

9	2.800	0.250	0.08900000	0.52599450
9	3.150	1.250	-0.33720233	0.02956412
9	3.150	1.500	-0.34124932	-0.01984716
9	3.150	1.750	-0.31188867	-0.07291853
9	3.150	2.000	-0.24638071	-0.13680044
9	3.150	2.250	-0.14061280	-0.22470024
9	3.150	2.500	-0.00000000	-0.34481809
9	3.500	2.500	-0.00000000	-0.00000000

CONCLUSIONES y RECOMENDACIONES

Respecto a las cargas aplicadas en áreas parciales:

- En el caso de las cargas pseudo-puntuales (cargas aplicadas en áreas parciales de la losa), los momentos que se tienen bajo esta carga convergen lentamente al incrementar los términos de la serie. Es así que, los valores calculados para la carga puntual son 33% más respecto a la carga pseudo-puntual cuando c/a es 0.05; y 75% más cuando c/a es 0.1, cuando éstas últimas han alcanzado la convergencia. Los valores que da Timoshenko son todavía más conservadores: para c/a de 0.1 es 100% más; y cuando c/a es 0.01 es 16% más.
- Los momentos en las cercanías de los puntos de aplicación de las cargas puntuales también convergen lentamente. Es así que, el momento a una distancia como 1/10 del lado de la losa, del punto de aplicación de la carga puntual, para 10 términos de la serie, es 1.5% más de un valor cercano al exacto (considerando más de 100 términos).

Por lo tanto, en el análisis cuando se tienen cargas parciales se debe considerar a éstas como tal, es decir, no considerarlas como puntual.

El método de las series de Fourier utilizado en esta tesis para el análisis de las losas, toma en consideración factores como: tipos de carga, condiciones de borde y relaciones de lados. Proporciona resultados que son lo suficientemente exactos al considerar los diez primeros términos de las series. Los errores que se obtienen son menores al 1.0% respecto a sus valores exactos (considerando que los primeros 50 términos de la serie ofrece el valor exacto), los cuales son lo suficientemente exactos para hacer un diseño estructural.

Al comparar los resultados entre: tres losas continuas (de mucha longitud en la dirección perpendicular a la dirección analizada) analizada mediante el método de las series, y tres vigas en la misma dirección analizada mediante estructura de barras (método de las rigideces); la diferencia en promedio está en el orden del 0.20% y la máxima diferencias es de 1.15%.

Un factor importante es el tiempo de ejecución de los programas de cómputo. El programa de losas continuas que utiliza el método de las series es más rápido que el programa Sap90 que utiliza el método de los elementos finitos. Además, se necesita considerar una malla muy fina en el método de los elementos finitos, para obtener resultados con la misma precisión que el método de las series utilizando pocos términos de la serie.

Los patrones de carga que recomienda la bibliografía arrojan resultados inferiores al patrón de cargas que se estudia en esta tesis. Para el caso de las nueve losas por ejemplo: los momentos M_x en el centro de la losa 2 es 6.10% menos y el M_x en el centro de la losa 5 es 4.96% menos.

Los patrones de carga son diferentes para cada relación de lados ($a/b=1$, $a/b<1$ y $a/b>1$).

En el caso de una losa empotrada en sus cuatro bordes y apoyada en una columna en el centro: para un gran incremento de la rigidez de la columna, el momento en la losa en el punto de apoyo, tiene muy poca variación.

La relación de lados es un factor importante que se debe considerar al realizar el análisis de losas continuas, especialmente en tanques elevados y muros de contención con contrafuertes, ya que tiene gran influencia en la distribución de las fuerzas resultantes de sección en cada losa.

Los métodos prácticos en la mayoría de los casos ofrecen resultados conservadores, aunque también, en algunos casos presentan resultados con deficiencia. Lo que conlleva a no confiar plenamente en estos métodos prácticos, tanto para el análisis de losas de un solo paño como para el análisis de losas continuas en una y/o dos direcciones.

BIBLIOGRAFIA

- 1.- A.S. Kalmanok, ***"Manual para el Cálculo de Placas"***
Primera Edición, Moscú, 1959.
- 2.- S. Timoshenko, S. Woinowski-Krieger, ***"Teoría de Placas y Láminas"***
McGraw-Hill, Inc. New York, 1959.
- 3.- Samartín Quiroga Avelino F., ***"Cálculo de Estructuras de Puentes de Hormigón"***
Editorial Rueda, Madrid, España, 1983.
- 4.- L.C. Urquhart, C.E. O'Rourke, G. Winter, ***"Proyecto y Dimensionamiento de las Estructuras de Hormigón"***,
Manual teórico-práctico para el uso de las escuelas y facultades de
Ingeniería. Editorial Reverte, S.A., Barcelona, 1962.
- 5.- O.C. Zienkiewicz - R.L. Taylor, ***"El Método de los Elementos Finitos"***
Volumen I, 4ª Edición, McGraw-Hill, Barcelona, 1994.
- 6.- R. Park - W. L. Gamble, ***"Losas de Concreto Reforzado"***
Editorial Limusa, México, 1994.
- 7.- Bozzo R. Luis, ***"Análisis de Losas Planas Empleando un Elemento Finito
Isoparamétrico de 3 a 8 Nudos "***
Tesis de Grado, Facultad de Ingeniería Civil, Universidad Nacional de
Ingeniería, Lima, Perú, 1987.

- 8.- Rojas Y. Victor., ***"Análisis de Losas Utilizando el Método de los Elementos Finitos"***
Tesis de Grado, Facultad de Ingeniería Civil, Universidad Nacional de Ingeniería, Lima, Perú, 1995.
- 9.- Menzel Andreas, ***"Análisis Estructural III"***
Apuntes de Clase, Facultad de Ingeniería Civil, Universidad Nacional de Ingeniería, Lima, Perú, 1995-II.
- 10.- Tripolski, A., ***"Cálculo de Losas Cruzadas Continuas"***
Instituto de Ingenieros de Chile. 167P.
- 11.- Morales M. Roberto, ***"Análisis y Diseño de Estructuras de Muros de Contención"***,
Facultad de Ingeniería Civil, Universidad Nacional de Ingeniería, Lima, Perú, 1995-I.