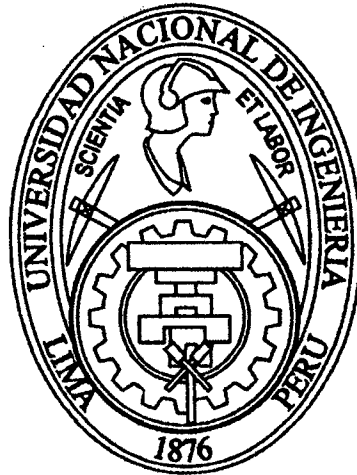


UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA



TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE  
LICENCIADO EN MATEMÁTICA

Titulada:

**ANÁLISIS MULTIDIMENSIONAL  
EN LA DETECCIÓN DE TALENTOS  
DEPORTIVOS EN ATLETAS CON  
SÍNDROME DE DOWN**

Presentada por:

**Willy Rudel Rivero Espinoza**

Asesor

Prof. William Carlos Echegaray Castillo

LIMA-PERÚ

2014

**Digitalizado por:**

Consortio Digital del  
Conocimiento MebLatam,  
Hemisferio y Dalse

## CIP - CATALOGO DE PUBLICACIÓN

Rivero Espinoza, Willy Rudel

Análisis Multivariado en la Detección de Talentos Deportivos  
en atletas con síndrome de Down / Willy Rudel Rivero  
Espinoza. – EPM - FC - UNI, 2014.

142 p.: il.

Tesis (Licenciatura)—Universidad Nacional de Ingeniería,  
Facultad de Ciencias, Escuela Profesional de Matemática,  
Lima, 2014. Asesor: William Carlos Echegaray Castillo.

**A mis Padres y hermanos por todo**

## AGRADECIMIENTOS

Agradecimiento muy especial al Profesor **Sergio Camiz**, por su sapienza, por su paciencia durante estos años y por su invaluable aporte a la tesis.

Al Profesor **William Carlos Echegaray Castillo** por su paciencia y asesoría.

Al profesor José Chero de la Asociación de Olimpiadas Especiales, por su disposición a colaborar.

A la Asociación de Olimpiadas Especiales, por su noble esfuerzo con ritmo silencioso.

A Carmen Gloria Pérez Castro, por su constante motivación y comprensión.

A mi amigo Alvaro Naupay.

A la profesora Zoila Sylvester de Ames, por sus valiosas enseñanzas (+)

A la Dra. Gabriela Porto de Power, por su ejemplo vida, en la política y académicamente.(+)

y a todos mis amigos que me alentaron a terminar este trabajo.

## **Resumen**

Este trabajo de investigación es un aporte a la detección de talento deportivo.

La motivación para este trabajo fueron varias:

1. Actualmente no existe un trabajo de investigación de somatotipo de los atletas con síndrome de down.
2. No existe una metodología para detectar talentos en atletas down
3. Si se puede hacer con personas down esta nueva metodología también es aplicable a personas normales.

Esta aventura concluye con una metodología para una mejor clasificación.

Revisando varias fuentes, no se ha encontrado trabajo de este tema.

# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1 Bases teóricas</b>	<b>3</b>
1.1 Muestra . . . . .	4
1.2 Antecedentes históricos . . . . .	6
1.3 Bases teóricas . . . . .	8
1.3.1 Somatotipo . . . . .	8
1.3.2 Importancia del estudio del somatotipo . . . . .	9
1.3.3 Aspectos históricos del somatotipo . . . . .	9
1.3.3.1 Escuela Italiana (De Giovanni, Viola y Pende) . . . . .	10
1.3.3.2 Escuela Francesa (Sigaud, Chaillon y Mac Auliffe) . . . . .	10
1.3.3.3 Escuela alemana. (E. Kretschmer) . . . . .	11
1.3.3.4 Escuela americana (W.H. Sheldon 1899- 1977) . . . . .	11
1.4 Definiciones y conceptualización del somatotipo . . . . .	12
1.4.1 Operacionalización conceptual de las variables - calculo de los componentes somatotipicos . . . . .	13
1.4.1.1 Cálculo del primer componente: endomorfia . . . . .	13
1.4.1.2 Cálculo del segundo componente: mesomorfia . . . . .	13
1.4.1.3 Calculo del tercer Componente: ectomorfia . . . . .	14
1.4.1.4 Calculo de las coordenadas del somatotipo . . . . .	14
1.4.2 Síndrome de Down . . . . .	17

<b>2</b>	<b>Conceptos matemáticos</b>	<b>22</b>
2.1	Matrices y determinantes . . . . .	22
2.1.1	Inversa de una matriz . . . . .	25
2.1.2	Rango de una matriz . . . . .	26
2.1.3	Sistema de ecuaciones lineales . . . . .	27
2.1.4	Solución de un sistema de n ecuaciones con n incógnitas . . . . .	28
2.1.5	Inversión de matrices . . . . .	28
2.1.6	Sistemas homogéneos de ecuaciones lineales . . . . .	29
2.2	Espacios vectoriales . . . . .	30
2.2.1	Vectores en $\mathbb{R}^n$ . . . . .	32
2.2.2	Subespacios . . . . .	33
2.2.3	Dependencia e independencia lineal . . . . .	36
2.2.4	Base y dimensión . . . . .	37
2.3	Espacios con producto interno . . . . .	39
2.3.1	Valores propios y vectores propios . . . . .	44
2.3.2	Diagonalización de una matriz . . . . .	47
2.3.3	Diagonalización ortogonal . . . . .	49
<b>3</b>	<b>Planteamiento del problema</b>	<b>53</b>
3.1	Determinación del Problema . . . . .	53
3.1.1	Formulación del Problema . . . . .	53
3.1.2	Problema General . . . . .	53
3.1.3	Problema Especifico . . . . .	54
3.2	Objetivo de la investigación . . . . .	54
3.2.1	Objetivo General . . . . .	54
3.2.2	Objetivo Especifico . . . . .	54
3.2.2.1	Importancia de la Investigación . . . . .	54
3.2.2.2	Alcances de la Investigación . . . . .	54
3.2.2.3	Limitaciones de la Investigación . . . . .	54

3.3	Hipótesis General . . . . .	55
3.4	Hipótesis Especifica . . . . .	55
<b>4</b>	<b>Metodología</b>	<b>56</b>
4.1	Poblacion y muestra . . . . .	56
4.1.1	Criterios de inclusión y exclusión . . . . .	58
4.2	Instrumentos y Escalas de Medición . . . . .	58
4.2.1	Modo de toma de medidas antropométricas . . . . .	58
4.2.2	Ubicación de puntos corporales de medición . . . . .	60
<b>5</b>	<b>Técnicas de análisis multidimensional de datos</b>	<b>71</b>
5.1	Componentes Principales . . . . .	71
5.1.1	Fundamentación Matemática . . . . .	72
5.1.2	Objetivo de los componentes principales . . . . .	72
5.1.3	Obtención de los componentes principales en el caso general y sus propiedades . . . . .	73
5.1.4	Problema . . . . .	74
5.1.5	Cálculo de los factores y de los componentes principales . . . . .	75
5.1.5.1	En el espacio de los individuos . . . . .	75
5.1.5.2	En el espacio de las variables . . . . .	78
5.1.6	Enfoque descriptivo . . . . .	80
5.1.7	Enfoque Estadístico . . . . .	82
5.1.8	Fases del análisis de Componentes Principales . . . . .	83
5.1.9	Elección de los componentes principales . . . . .	83
5.1.10	Representación Gráfica . . . . .	85
5.2	Validación y confiabilidad . . . . .	85
5.2.1	Aspectos generales . . . . .	85
5.2.2	Calidad del instrumento - validez y confiabilidad . . . . .	86
5.3	Análisis de componentes principales (ACP) . . . . .	88



5.3.1	Datos . . . . .	89
5.3.2	Círculo de correlaciones . . . . .	90
<b>6</b>	<b>Metódos de Clasificación</b>	<b>91</b>
6.1	Las mediciones de la diversidad . . . . .	92
6.1.1	Medidas de diversidad . . . . .	94
6.2	Algoritmos de agregación . . . . .	98
6.3	Criterios para la agregación . . . . .	100
6.3.1	Índice de Ward . . . . .	101
6.3.2	Criterio de agregación según el criterio de la varianza o ward . .	102
6.4	Selección del número de clases de la mejor partición poda del árbol . .	106
6.5	Descripción estadística de las clases . . . . .	110
6.5.1	Valores de prueba para los caracteres continuos . . . . .	111
6.5.2	Los valores de ensayo personajes Valoraciones . . . . .	111
<b>7</b>	<b>Resultados y conclusiones</b>	<b>119</b>
7.1	Resultados . . . . .	119
7.2	Conclusiones . . . . .	121
7.3	Sugerencias . . . . .	122
	<b>Anexo</b>	<b>123</b>
	<b>Bibliografía</b>	<b>138</b>

# Introducción

El presente trabajo de investigación pretende ser un aporte a la detección de talento deportivo.

Estos datos fueron recolectados en los campeonatos nacional, metropolitanos y colegios especializados de las olimpiadas especiales en el 2004 y utilizado en la tesis:

1. "Influencia del Entrenamiento Deportivo en el somatotipo, Distribución de Adiposidad, Índice de Masa Corporal y Razón Cintura-Cadera de Personas con Síndrome de Down" autor: Dr. Antonio Cruz Lip Lichan.
2. "Análisis multidimensional aplicada a la detección de talento deportivo en atletas con síndrome de down"

Los pasos para su desarrollo fueron los siguientes:

1. Recolección de datos a personas con síndrome de down.
2. Selección de datos (atletas).
3. Llevar los datos a una matriz de  $102 \times 10$  (somatotipo).
4. Cálculo de valores propios.
5. Se escogió los 2 primeros valores propios por considerarlo más representativo porque nos proporciona la mejor información.
6. Los 2 valores propios nos determina 2 componentes principales.

7. En la clasificación escogemos 6 grupos por considerarlos lo más representativo.
8. Resultados y conclusiones.

# Capítulo 1

## Bases teóricas

La novedad de esta tesis de investigación es porque en nuestro país nunca se ha desarrollado una metodología para detectar talentos deportivos, tanto a personas normales como personas con el síndrome de Down y tampoco se ha adaptado a la realidad nacional los métodos existentes en diversas partes del mundo.

Las tendencias del deporte actual se relacionan con la especialización temprana y el perfeccionamiento de los sistemas de selección de talentos, exigiendo eficacia y ley de la selección natural (supervivencia de los más aptos), el atleta no alcanzaría, salvo contadas excepciones, la longevidad y resultados deportivos deseados según la especialidad.

Las llamadas características morfológicas del modelo permiten la selección, para los diferentes tipos de deportes, de niños con particularidades del desarrollo físico favorables para dicha especialidad deportiva, así por ejemplo, una gran estatura puede predisponer al individuo para la obtención de buenos resultados en el baloncesto.

Se hace necesario entonces establecer, por deportes, direcciones para la selección de talentos en edades cada vez más tempranas, de forma tal que se detecten prontamente aquellos individuos que, adecuadamente entrenados, puedan ingresar en un futuro en la elite deportiva. No pocos autores han demostrado, por ejemplo, que el estudio de la composición y proporcionalidad corporal, y su aplicación práctica en el deporte,

brindan amplias posibilidades de conocer adecuadamente la figura del atleta para establecer una clasificación de la misma hacia una determinada especialidad deportiva [34]. De tal forma, cada especialidad poseerá un perfil antropométrico diferente.

Esta idea motiva el presente trabajo, con el fin de determinar los componentes principales del somatotipo de los atletas down y luego buscar clasificarlos de acuerdo a algún método de clasificación existente, con la finalidad de predecir a las personas con mayor probabilidad deportiva para uno o mas deportes, entonces el objetivo es encontrar al grupo con mayor destreza o mejores cualidades deportivas.

Entendiendo por talento para el investigador Pérez . “Los sujetos superdotados o talentosos son aquellos que, por sus habilidades extraordinarias, son capaces de altas realizaciones en áreas tales como la competencia intelectual general, aptitud académica, creatividad, liderazgo, competencia artística y competencia motriz,”

## 1.1 Muestra

Formada por personas con síndrome de Down y que en todos los casos fueron alrededor del 90% de los sujetos que integraban el total de la población estable de cada institución. La muestra de este estudio fue elegida al azar entre todos los temporalmente presentes; esto se llevó a cabo con todos aquellos que estuvieron en los diferentes clubes, colegios que participaron en las actividades competitivas y recreativas organizadas por “Olimpiadas Especiales” en la ciudad de Lima Metropolitana, en el período de enero – agosto del 2004.

Estos datos se utilizan para evaluar el somatotipo que constituye en la actualidad en un recurso sumamente útil para el análisis de la forma corporal entre los grupos humanos

Las mediciones arrojan valiosas informaciones, servirán para diagnosticar el estado físico-morfológico de las personas, lo que permitirá elaborar planes de actividades físicas que estén en relación con los requerimientos de los evaluados y hacer un seguimiento para conocer los cambios cuantitativos que se producen con la practica de las

actividades físicas. Para los profesores de educación física, estos aspectos son importantes, por ser las herramientas que permiten una individualización operativa, que a su vez produce una mejor orientación del desarrollo de sus clases.

Se ha utilizado la antropometría como herramienta de evaluación porque es un método no invasivo y su porcentaje de error en la medición no supera el 2%.

Estos tipos de datos aplicados a la población nacional ayudarían a mejorar las decisiones de política de estado.

Otra ventaja de este método es que no es invasivo y de bajo costo.

Otro problema existente es la falta de esfuerzo de profesionales de diversas especialidades al deporte nacional, sumado a la falta de dominio de las matemáticas y estadísticas básicas por parte de los profesores de educación física para la realización de trabajos de investigación en este apasionante campo, además hay que sumar la falta de vínculo entre el Instituto Peruano de Deporte (I.P.D.) y las universidades nacionales.

La selección de talentos siempre es un campo muy interesante en el mundo de la ciencia deportiva, porque a pesar de sus años de práctica crea polémicas entre los expertos, teniendo más opiniones a favor que las que se manifiestan en su contra. En estos últimos días la detección y selección de los talentos deportivos en el fútbol se ha convertido en un negocio muy lucrativo a nivel internacional debido a que los grandes clubes tienen filiales en diferentes partes del mundo, y aquí como por ejemplo, Boca Juniors, River Plate, FC Barcelona, Chelsea, Manchester City. etc. Con la única finalidad de llevarse al talento deportivo y no pagar el derecho de formación deportiva al respectivo club.

En Argentina la Asociación de Fútbol Argentina, ficha a todos los niños a nivel nacional para de alguna manera evitar la fuga de talentos deportivos.

La UNESCO y OMS afirman que aproximadamente uno de cada mil nacidos vivos presentan Síndrome de Down y que entre el 90 y el 95 % de las personas con discapacidad psíquica se debe a esta causa [24]. En la actualidad, hay en el mundo alrededor de 5 millones de personas con este síndrome, en Europa alrededor de 600,000; mientras que en el Perú la cifra, según datos obtenidos por el INEI en el Censo Nacional de 1993

(INEI), fue de 35,727 personas con retardo mental, que constituía el 12,4 % del total de discapacitados (288,523 ó 1,3% del total de la población). Éstos son los últimos datos oficiales accesibles a la población consultante [24].

Usaremos el somatotipo de Heath y Carter en los atletas Down sabiendo que, es una anomalía genética conocida como trisomía 21; debida a la disyunción en la fase de meiosis de dicho par. Según la Federación Española de Instituciones para el Síndrome de Down, es la primera causa de retraso mental en la población [24]; así como responsable del fenotipo característico, de condicionar la estructura y función tanto del cerebro como del sistema nervioso de las personas que la padecen, tiene vital influencia sobre su inteligencia, sus rasgos faciales y su aspecto corporal [24]. Condiciona también sus necesidades socio-afectivas y el papel que cumplen en la sociedad [11].

Esta tesis identificará los factores antropométricos de mayor importancia que determinan las capacidades deportivas de los pacientes con síndrome de Down, mediante una función multidimensional producto de un análisis de componentes principales, luego las clasificara proponiendo un grupo con mayores habilidades deportivas.

## 1.2 Antecedentes históricos

Son muchos los modelos matemáticos existentes para la selección y detección de talentos deportivos, tenemos los modelos:

1. El modelo Venezolano, desarrollado por el profesor Pedro Alexander [1]. Esta investigación dio origen a las normas de la condición física y patrones morfológico en dicho país. Esta nueva norma pudo usarse como base para la implementación de programas de actividad física y salud, así como para la detección temprana de talentos deportivos.(I.P.D. 2013).

Ejecución nacional. edad de 7.5 a 18.4 años. número de personas evaluadas = 7  
063

2. El modelo Colombiano, el estudio del instituto colombiano de la juventud y el Deporte permitió la elaboración de un técnico-metodológico para el inicio de la formación deportiva, además de dotar al sistema educativo de un instrumento basado en el estudio de las propias condiciones de la población colombiana. También permitió detectar científicamente las capacidades del futuro deportista. (I.P.D. 2013)

Ejecución en 8 ciudades. edad de 7 a 16 años número de personas evaluadas = 10 258

3. El modelo Argentino, el fin de este estudio fue tomar conocimiento real sobre el estado de salud general, postura, desarrollo de las capacidades condicionales, medidas antropométricas y condición psicosocial de los alumnos de nivel primario de la provincia de Mendoza, creando una base de datos con los resultados obtenidos en los test.

organizador - Dirección de educación física Ejecución a nivel nacional edad 11 años números de niños evaluados = 20 899.

Uno de los fundamentos para la adecuada iniciación del proceso formativo en la actividad física y deportiva del niño es la detección oportuna de sus potencialidades biofísica sobre las que partirá el desarrollo y la adquisición de las ulteriores capacidades. Por lo tanto, es indispensable contar con parámetros científicos que permitan interpretar el desarrollo físico y prever el rendimiento neuromotriz en las fases iniciales de la infancia, facilitando así la apropiada utilización de los recursos técnico-pedagógicos que optimicen el aprendizaje de la actividad física en esta edad.

Análisis exploratorio de datos multidimensionales [5]

- el modelo australiano,
- el modelo brasilero,
- el modelo cubano,



- el modelo de jamaica,
- el modelo mexicano,
- el modelo colombiano,
- el modelo español,
- el modelo ruso,
- el modelo británico, etc.

Todos estos modelos tienen como punto de partida la evaluación y análisis del somatotipo de la población a estudiar, luego desarrollan los percentiles de acuerdo a lo que se desea investigar en la población.

## **1.3 Bases teóricas**

### **1.3.1 Somatotipo**

La técnica del somatotipo se constituye en la actualidad en un recurso sumamente útil para el análisis de las variaciones de la forma corporal entre los grupos humanos tomando en cuenta los factores biológicos y los factores ambientales.

Es una clasificación cuantitativa de la composición corporal y la forma física de una persona; propuesta inicialmente por Sheldon, para pronosticar mediante la forma corporal el temperamento. (Los tres tipos de personalidad propuestos por Sheldon para clasificar cuantitativamente la forma del cuerpo humano, son aproximadamente parecidos a la clasificación de Jung de los tipos de pensar, sentir y percibir. Y estas a su vez se asemejan mucho a los estereotipos populares “del hombre delgado y temeroso, el hombre gordo y alegre y el chico duro y rudo” y modificado por Heath y Carter [6] actualmente está incluido en los protocolos propuestos por el ISAK (Sociedad Internacional para el estudio de la Cineantropometría), incluida esta sociedad como un

comité del International Council in Sports and Physical Education, NGO, UNESCO y, se aplica a personas con y sin práctica deportiva; aunque de preferencia en sujetos con actividad física sistematizada y deportistas calificados. Se expresa en una escala de tres números que representan los tres componentes:

- la endomorfía (adiposidad relativa),
- la mesomorfía (desarrollo músculo-esquelético) y
- la ectomorfía (linealidad o delgadez relativa).

Cada sujeto se representa por tres algoritmos, con una secuencia fija. Cada algoritmo representa el valor atribuido a cada uno de los componentes primarios de la constitución: endodermo, mesodermo y ectodermo. Cada una de estas capas embrionarias origina distintos elementos de la constitución del sujeto.

### **1.3.2 Importancia del estudio del somatotipo**

La determinación del somatotipo en diversos grupos humanos tiene importancia y puede ser utilizada en diversas áreas, entre ellas el deporte, para comparar el somatotipo de un deportista con el ideal o de referencia para su modalidad deportiva, en otros casos, para realizar seguimientos a un grupo deportivo durante un proceso de entrenamiento, por lo general se relaciona con los valores obtenidos en composición corporal, uso del somatotipo para establecer los cambios que se producen en función física le interesa conocer la forma corporal que presentan los alumnos y en base a ello planificar las actividades físicas y deportivas, además, la posibilidad de detectar y seleccionar a talentos deportivos.

### **1.3.3 Aspectos históricos del somatotipo**

El estudio de la morfología humana se ha servido de dos métodos principales, el mas antiguo utilizaba la intuición, certificándola a las personas de una población en tipos

constitucionales. Este método es conocido con el nombre de tipología a fenotipología. Otro método, más preciso se basa en mediciones corporales, conocida como la somatometría [4].

A partir de siglo XVIII se crean y desarrollan las denominadas Escuelas Biotipológicas que se diferencian según las variables que utilizan para clasificar a las personas [4].

### **1.3.3.1 Escuela Italiana (De Giovanni, Viola y Pende)**

La clasificación de la escuela italiana reconoce como base ontogenericamente, dos leyes: una que determina el aumento de masa o aumenta ponderal, que se expresa en el tronco (representante del sistema vegetativo) y, otra que determina la diferenciación corpórea o evolución de la forma, que se expresa en las extremidades (sistema del sistema de relación).

Viola, comparando las proporciones del tronco y las extremidades, formula la siguiente ley morfogénicas: “el aumento ponderal, o aumento de masa y la evolución morfológica, o diferenciación corpórea, están ontogeneticamente en proporción inversa”. Es decir, cuando hay aumento de la masa (tronco) hay poca evolución morfológica (extremidades) y viceversa. Propone tres tipos morfológicos:

- normotipo (normolineo),
- longilineo( microesplacnico) y
- brevilineo (macroesplacnico).

### **1.3.3.2 Escuela Francesa (Sigaud, Chaillon y Mac Auliffe)**

Sigaud parte de un principio de desarrollo morfológico que se resume en lo siguiente:

Piensa que desde el celular del centro a la periferia, que se detiene en el momento que la fuerza central es consumida. A partir de se instante, el conglomerado celular solo dispone de la energía necesaria para mantener su vida, produciéndose en la periferia, influidas por el mundo exterior, diferencias con el centro.

La parte central del organismo esta representada por el sistema cardiocasculorrenal (sin contacto con el mundo exterior), en tanto que la periferia esta representada por los sistemas respiratorio, digestivo, nervioso, muscular y sexual (en intima relación con el medio ambiente). Según como predominen en el desarrollo alguno de estos sistemas, se distinguen los cuatro tipos constitucionales que denominaron: muscular, respiratorio, cerebral y digestivo.

### **1.3.3.3 Escuela alemana. (E. Kretschmer)**

En base a estudios de la arquitectura corporal en enfermos mentales. Kretschmer establece una de las clasificaciones tipológicas mas interesantes que tuvo una aceptación en nuestro medio en el campo de la medicina y la actividad física. Un aspecto importante de su propuesta fue la de sostener la existencia de la relación entre los tipos morfológicos constitucionales y los tipos psíquicos como temperamento cicloide y esquizoide. Kretschmer distingue los siguientes tipos constitucionales: atlético, astenicléptosónico, pícnico y displástico.

### **1.3.3.4 Escuela americana (W.H. Sheldon 1899- 1977)**

También psiquiatra como su colega Kretschmer.

Sheldon (1940), buscando como clasificar el cuerpo humano utilizando una escala continua, desarrolló un procedimiento que lo llamó somatotipia (Método Foscópico de Sheldon), y con ella determinó la estructura morfológica de la persona, basándose en el cálculo de los tres componentes primarios que tienen origen en el embrión. Al primer componente lo llamó endomorfia, al segundo componente mesomorfia y el último componente ectomorfia.

Su método consistía en la valoración de un individuo por medio de tres fotografías en tres planos diferentes, luego realizaba diecisiete medidas sobre los negativos de las fotos, (con esta técnica realizo un estudio de 4000 estudiantes). Haciendo uso de tres cifras que representaban los componentes primarios, realizaba una cuantificación de la

morfología del individuo.

También en 1958, Parnell introduce importantes modificaciones a la técnica al incorporar medidas antropométricas para obtener los tres componentes del físico humano.

Además en 1948 y 1953, Bárbara Heath promueve la modificación del método Fotoscópico de Sheldon con la inclusión de medidas corporales en base a las propuestas de Hooton y Parnell.

Sheldon, basándose en la teoría de la existencia de tres componentes primarios del cuerpo humano presentes en todo individuo en mayor o menor grado creó el término somatotipo, el cual expresaría la cuantificación de estos componentes primarios cuya magnitud dependería del desarrollo alcanzado por las tres capas embrionarias conocidas como endodermo, mesodermo y ectodermo. Para todo esto creó una técnica fotográfica que correspondía al análisis de fotos tomadas en tres planos diferentes las cuales eran comparadas con fotos modelos.

## **1.4 Definiciones y conceptualización del somatotipo**

### **Definición 1.1.**

1. Endomorfia (Primer componente). Se origina del endodermo, que en el embrión origina el tubo digestivo y sus sistemas auxiliares. Indica predominio del sistema vegetativo y tendencia a la obesidad. Los endomorfos se caracterizan por su bajo peso específico. Su masa es flácida y sus formas redondeadas.
2. Mesomorfia (Segundo componente). Se refiere al predominio en la economía orgánica de los tejidos que derivan de la capa mesodérmica embrionaria: huesos, músculos y tejido conjuntivo. Los individuos mesodermos, por presentar en comparación con los anteriores una mayor masa músculo - esquelética tienen un mayor peso específico.

3. Ectomorfia (Tercer componente). Presenta un predominio de formas lineales y frágiles, así como una mayor superficie en relación a la masa corporal. Los tejidos que predominan son los derivados de la capa ectodérmica. Poseen un alto índice ponderal.

### 1.4.1 Operacionalización conceptual de las variables - calculo de los componentes somatotipicos

#### 1.4.1.1 Cálculo del primer componente: endomorfia

Haciendo endomorfia = endo

$$\text{endo} = 0.7182 + 0.1451 * \sum PC - 0.00068 * \sum PC^2 + 0.0000014 * \sum PC^3 * \frac{170.18}{T},$$

donde:

$\sum PC$  : sumatoria de pliegues (tricipital, sub-escapular y supra-iliaco),

$T$  : talla

#### 1.4.1.2 Cálculo del segundo componente: mesomorfia

$$\text{mesomorfia} = 0.858 * dh + 0.601 * df + 0.188 * pbc + 0.161 * ppc - h * 0.131 + 4.5,$$

dónde:

$dh$  : Diámetro de húmero,

$df$  : Diámetro fémur,

$pbc$  : Perímetro de brazo corregido,

$ppc$  : Perímetro de pantorrilla corregido.

Para realizar las correcciones de los perímetros del brazo y pantorrilla se utiliza el siguiente procedimiento:

$$pbc = \text{perímetro del brazo} - (\text{pliegue tricipital}/10)$$

$$ppc = \text{perímetro de la pantorrilla} - (\text{pliegue de pantorrilla}/10)$$

#### 1.4.1.3 Cálculo del tercer Componente: ectomorfía

Para el cálculo de la ectomorfía, en primer lugar se determina el valor del Índice Ponderal (I.P.):

$$I.P. = \text{estatura}/(\text{peso})^{1/3}$$

- Si  $I.P. \geq 40.75$  entonces:

$$\text{Ectomorfía} = (0.732 * I.P) - 25.58$$

- Si  $38.25 < I.P. < 40.75$ , entonces:

$$\text{Ectomorfía} = (0.463 * I.P) - 17.63$$

- Si el  $I.P. \leq 38.25$ , entonces:

$$\text{Ectomorfía} = 0.1$$

#### 1.4.1.4 Cálculo de las coordenadas del somatotipo

Se determina mediante la intersección de los puntos X e Y en la somatocarta, sobre una base de coordenadas cartesianas.

$$X = III - I$$

$$Y = 2 * II - (I + III)$$

dónde:

*I* : primer componente endomorfía

*II* : segundo componente mesomorfía

*III* : tercer componente ectomorfía

Una vez calculados los valores de cada uno de los componentes, se procede a situar un punto en el somatotipograma (somatocarta), que es un gráfico formado por un triángulo de lados curvos, diseñado por Reauleaux y utilizado más tarde por Sheldon

en 1954 (ver Figura 1.1). El triángulo está dividido por tres ejes que se cruzan en el centro, formando ángulos de 120 grados. Cada uno de estos ejes representa uno de los componentes estudiados, siendo el mesomorfo el que está situado en la parte superior, el endomorfo a la izquierda y el ectomorfo a la derecha. Cada uno de los vértices del triángulo representa un somatotipo (ver Figura 1.2).

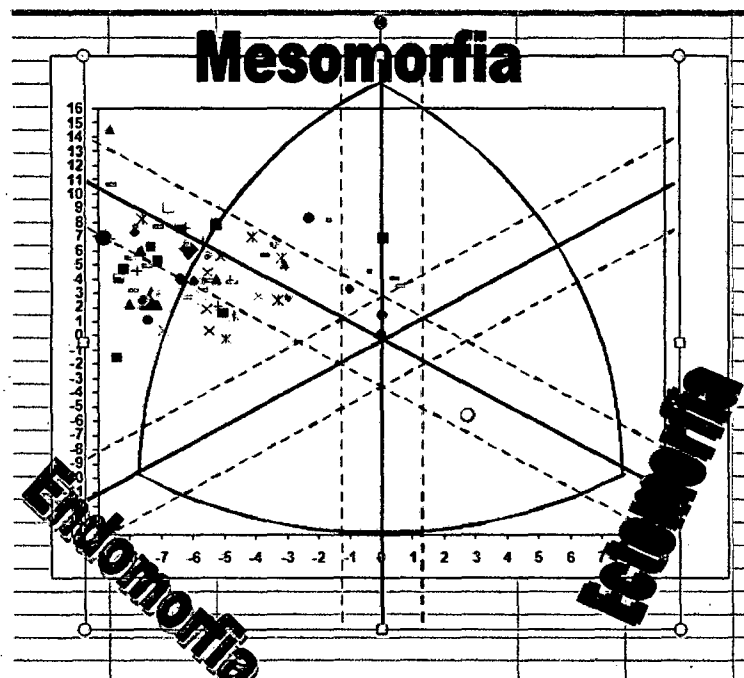


Figura 1.1: Esto es el somatotipo de los atletas con síndrome de down, fuente propia

Los somatotipos son clasificados en trece categorías o tipos [7]

1. Endomorfo balanceado: predominio del endomorfismo y los otros dos componentes no difieren.
2. Endomorfo-mesomórfico: el endomorfismo es dominante, pero el mesomorfismo es mayor que el ectomorfismo.
3. Endomorfo-mesomorfo: el endomorfismo y mesomorfismo son similares, siendo menor el ectomorfismo.



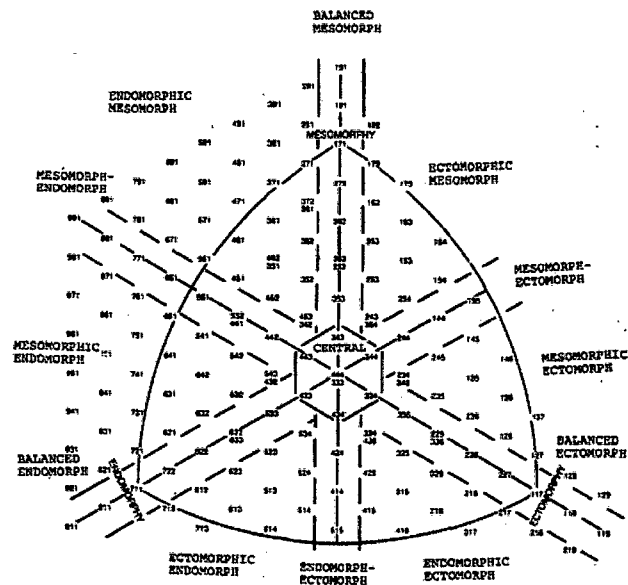


Figura 1.2: Cuadro explicativo de somatocarta

4. Mesomorfo-endomórfico: el mesomorfismo es dominante y el endomorfismo es mayor que el ectomorfismo.
5. Mesomorfo-balanceado: el mesomorfismo es dominante y similar a los otros dos componentes.
6. Mesomorfo-ectomórfico: el mesomorfismo predomina sobre el ectomorfismo y este a su vez es mayor que el endomorfismo.
7. Ectomorfo-mesomorfo: ectomorfismo y mesomorfismo son iguales, pero mayores que el endomorfismo.
8. Ectomorfo-mesomórfico: el ectomorfismo es dominante y el mesomorfismo es mayor que el endomorfismo.
9. Ectomorfo-balanceado: el ectomorfismo predomina sobre los componentes endo y mesomorficos.

10. Ectomorfo-endomórfico: ectomorfismo dominante y endomorfismo mayor que mesomorfismo.
11. Ectomorfo-endomorfo: ectomorfismo y endomorfismo con valores similares y mayores que el mesomorfismo.
12. Endomorfo-Ectomórfico: endomorfismo y ectomorfismo iguales pero mayores que el mesomorfismo.
13. Central: ningún componente difiere en más de una unidad con respecto a los otros dos.

Las características físico – corporales de cada tipo, están determinadas por la predominancia de los componente y su interrelación.

Las personas con síndrome de Down, tienen tendencia congénita a la endomorfía, es decir predominio del componente endomórfico sobre el mesomórfico y ambos arriba del ectomórfico; con ligera variación por género (ver Figura 1.3).

### **1.4.2 Síndrome de Down**

El síndrome de Down es una afección debida a que el bebé nace con un cromosoma extra. Los cromosomas son pequeños “paquetes” de genes en el organismo que determinan durante el embarazo la manera en que se formará el bebé y las funciones que tendrá su cuerpo durante la gestación y después de que nazca. Por lo general, los bebés nacen con 46 cromosomas, pero los bebés con síndrome de Down tienen una copia extra de uno de estos cromosomas (ver Figura 1.4). Esta copia extra altera el desarrollo normal del cuerpo y el cerebro y ocasiona problemas físicos y mentales en el bebé.

Aun cuando las personas con síndrome de Down tienen algunas características físicas y mentales comunes, los síntomas pueden ser de leves a graves. Por lo general, las personas con síndrome de Down presentan un desarrollo físico y mental más lento que

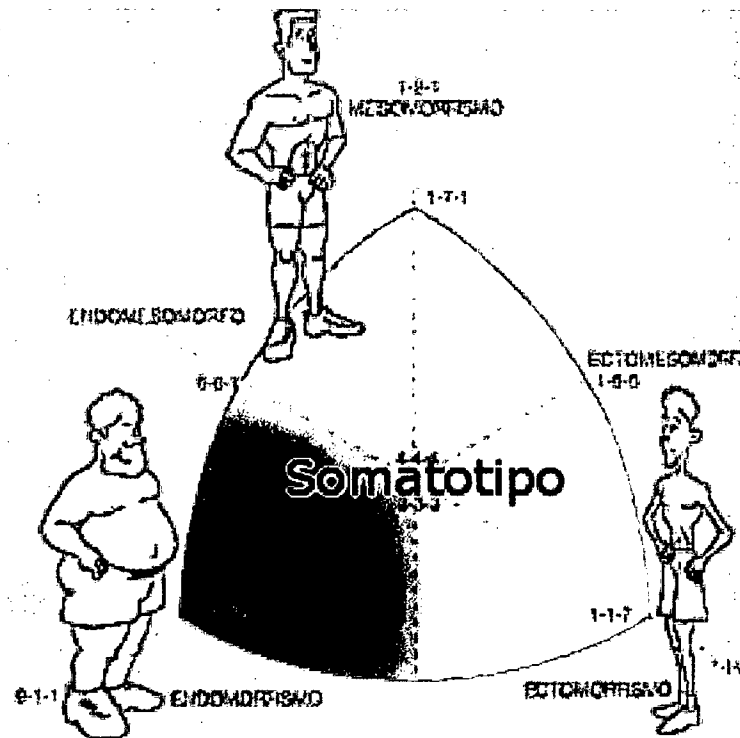


Figura 1.3: Descripción

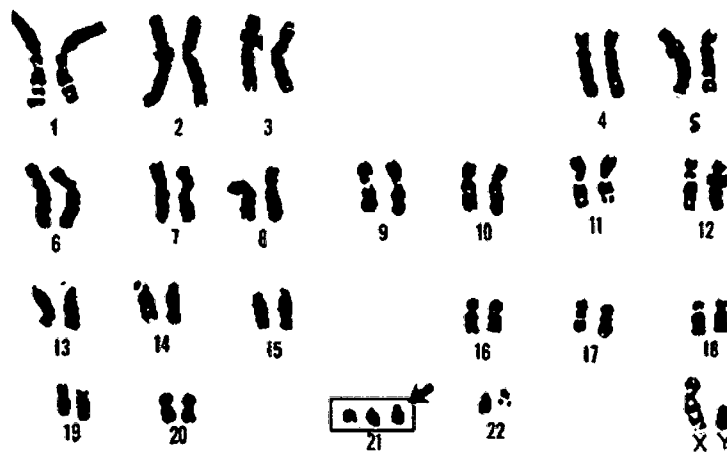


Figura 1.4: Cuadro explicativo del cromosoma del síndrome de down

las demás personas. Algunos signos físicos comunes del síndrome de Down consisten en:

- cara achatada y ojos ligeramente rasgados hacia arriba,
- cuello corto,
- orejas pequeñas y lengua larga,
- manchas blancas diminutas en el iris del ojo (la parte coloreada),
- manos y pies pequeños,
- un solo pliegue en la palma de la mano,
- dedos meñiques pequeños y a veces encorvados hacia el pulgar,
- débil tono muscular o ligamentos flojos (ver Figura 1.5).



Figura 1.5: Atletas en olimpiadas de gimnasia

### **¿Qué problemas presentan los bebés con síndrome de Down?**

Los bebés y adultos con síndrome de Down pueden tener problemas físicos así como discapacidades mentales. Todo los bebés nacidos con síndrome de Down son distintos. Además de los signos físicos, algunos pueden sufrir de defectos de nacimiento graves u otros problemas médicos. Sin embargo, muchos bebés con síndrome de Down llegan

a la edad adulta felices y con una vida productiva. Aún así, hay algunos problemas físicos asociados al síndrome de Down:

- Defectos de nacimiento en el corazón.
- Problemas estomacales, como obstrucción en el intestino delgado.
- Enfermedad celiaca, un problema digestivo que daña el intestino delgado impidiendo la buena absorción de los nutrientes.
- Problemas de memoria, concentración y juicio, a menudo llamados demencia  
Problemas auditivos.
- Problemas en los ojos, como cataratas y dificultad para ver objetos cercanos (hipermetropía).
- Problemas de la glándula tiroides.
- Problemas en el esqueleto.

Una persona con síndrome de Down puede tener un coeficiente intelectual (CI) de leve a moderado dentro del rango de las discapacidades intelectuales. También puede tener retrasos del lenguaje y dificultad de coordinación física.

### **¿Qué causa el síndrome de Down?**

Para comprender el síndrome de Down, es necesario conocer la forma en que se desarrolla el bebé. Todos los bebés comienzan a formarse cuando reciben 23 cromosomas del óvulo de la madre y 23 cromosomas del espermatozoide del padre. El síndrome de Down ocurre por un error originado en el óvulo o el espermatozoide. Este error causa un cromosoma extra (también llamado cromosoma número 21) en el óvulo o el espermatozoide, de manera que el bebé recibe 24 en lugar de 23 pares de cromosomas de uno de sus padres. Por lo tanto, el bebé tendrá 47 cromosomas en cada célula de su cuerpo, en lugar de 46. Este cromosoma extra causa los signos físicos y otros problemas

que se presentan en las personas con síndrome de Down. Todavía no se conocen las causas de los errores que producen un cromosoma extra.

Hasta ahora, solo se ha demostrado que la edad de la madre es un factor que aumenta el riesgo de tener un bebé con síndrome de Down. Este riesgo aumenta con cada año que pasa, especialmente después de que la madre tiene 35 años de edad. Sin embargo, dado que las mujeres jóvenes son más propensas a tener bebés que las mujeres mayores, el 80 por ciento de los bebés con síndrome de Down nace de mujeres menores de 35 años de edad.

1. El número de bebés con síndrome de Down parece estar aumentando, especialmente los nacidos de mujeres mayores de 35 años de edad.
2. Algunos factores parecen afectar el tiempo que vivirá una persona con síndrome de Down, como su raza o grupo étnico, si tuvo bajo peso al nacer y si nació con un defecto del corazón.
3. Las tasas de mortalidad de bebés negros o afroamericanos con síndrome de Down parecen ser más altas que las de los bebés blancos con síndrome de Down.

### **¿Se puede prevenir el síndrome de Down?**

No se sabe de qué manera se puede prevenir el síndrome de Down. Sin embargo, los bebés y niños con síndrome de Down a menudo se beneficiarán de programas especiales para ayudarles a mejorar sus limitaciones físicas y mentales. Estos programas pueden incluir terapia del lenguaje, terapia ocupacional y ejercicios de coordinación física. Los niños con síndrome de Down también necesitan a menudo asistencia o atención adicional en la escuela.

Si bien a la fecha no hay forma de prevenir el síndrome de Down, la mujer puede tomar medidas antes y durante el embarazo para tener un embarazo saludable. Estas medidas incluyen tomar todos los días multivitaminas con ácido fólico (400 microgramos), no fumar ni tomar alcohol durante el embarazo.

# Capítulo 2

## Conceptos matemáticos

### 2.1 Matrices y determinantes

**Definición 2.1.** Una *matriz* es un ordenamiento rectangular de números ( $\mathbb{R}$  ó  $\mathbb{C}$ ) dispuestos en filas y columnas.

**Ejemplo 2.1.**

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 15 & \sqrt{2} & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

**Definición 2.2.** *Matriz diagonal*, es una matriz cuadrada, donde todos sus elementos que no pertenecen a la diagonal principal son ceros.

**Notación:**  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$  es una matriz diagonal si  $a_{ij} = 0$  para  $i \neq j$ .

**Ejemplo 2.2.**

$$a = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{bmatrix}$$

**Definición 2.3.** *Matriz escalar*, es una matriz diagonal en la que todos los elementos de su diagonal principal son iguales.

**Notación:**  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$  es una matriz escalar si  $a_{ij} = 0$  para  $i \neq j$  y  $a_{ij} = c$  para  $i = j$ ,  $c$  una constante

**Ejemplo 2.3.**

$$B = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

**Definición 2.4.** *Matriz identidad*, es una matriz escalar en la que cada elemento de la diagonal es igual a la unidad

**Notación:** A la matriz identidad se le denota por  $I_n$ .

**Definición 2.5.** *Matriz fila*, es aquella matriz de orden  $1 \times n$ , es decir una matriz que posee una sola fila.

**Ejemplo 2.4.**

$$A = [1 \ 0 \ -8]_{1 \times 3}, \quad B = [6 \ -5 \ 2 \ -9]_{1 \times 4}$$

**Definición 2.6.** *Matriz columna*, es una matriz de orden  $m \times 1$ , es decir aquella que posee una sola columna

**Definición 2.7.** Una matriz  $B$  es la *matriz transpuesta* de una matriz  $A$  de orden  $m \times n$  si las filas de  $B$  son columnas de  $A$  y las columnas de  $B$  son filas de  $A$  en el mismo orden.

**Notación:**  $B = A^t$

$$A = [a_{ij}]_{m \times n} \iff A^t = [a_{ji}]_{n \times m}$$

**Observación 2.1.**  $a_{ji} = a_{ij}^t$ .

**Ejemplo 2.5.**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}_{2 \times 3} \quad \text{entonces } A^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$



**Propiedades de la matriz transpuesta:**

Sean  $A$  y  $B$  matrices cuyas transpuestas son respectivamente  $A^t$  y  $B^t$ ,  $k$  pertenece a  $\mathbb{R}$ .

1.  $(A^t)^t = A$ .
2.  $(A + B)^t = A^t + B^t$ .
3.  $(kA)^t = kA^t$ .
4.  $(A \times B)^t = B^t \times A^t$

**Definición 2.8.** *Matriz simétrica*, es toda matriz cuadrada  $A$  que cumple con la condición:  $A = A^t$

**Notación:**

$$A = [a_{ij}]_n \text{ es simétrica} \Leftrightarrow A = A^t \Leftrightarrow a_{ij} = a_{ji}, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n.$$

**Ejemplo 2.6.**

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -7 & 2 \\ 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

**Definición 2.9.** *Matriz triangular inferior*, es una matriz cuadrada cuyos elementos situados sobre la diagonal principal son ceros.

**Notación:**  $A = [a_{ij}]_n$  es una matriz T.I., si  $a_{ji} = 0$  para  $i < j$ .

**Ejemplo 2.7.**

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 6 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

**Definición 2.10.** *Matriz idempotente*, es una matriz cuadrada  $A$  que cumple la condición:  $A^2 = A$ .

**Ejemplo 2.8.** 1.  $A = I \Rightarrow I^2 = I$ .

$$2. A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

### 2.1.1 Inversa de una matriz

**Definición 2.11.** Sea  $A$  una matriz cuadrada y si existe una matriz cuadrada  $B$  tal que  $AB = BA = I$  entonces  $B$  se llama inversa de  $A$  y se dice que  $A$  es inversible.

**Notación:**  $B = A^{-1}$

**Ejemplo 2.9.** Sean

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

como  $AB = BA = I_2$  entonces  $B = A^{-1}$ .

**Ejemplo 2.10.** La matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

no tiene inversa.

**Teorema 2.1.** Si una matriz cuadrada es inversible, entonces su inversa es única.

**Prueba.** Por contradicción, supongamos que tengamos la matriz cuadrada  $A$  que es inversible, y asumamos que  $A$  tiene dos inversas  $B$  y  $C$  tal que  $B \neq C$ , o sea  $AB = BA = I$  y  $AC = CA = I$ .

También

$$\left. \begin{array}{l} C(AB) = CI = C \\ C(AB) = (CA)B = IB = B \end{array} \right\} \Rightarrow B = C$$

lo cual es una contradicción. □

**Teorema 2.2.** Si  $A$  y  $B$  son matrices inversibles del mismo orden, entonces

1.  $A^{-1}$  es inversible y  $(A^{-1})^{-1} = A$ .
2.  $A^n$  es inversible y  $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$  para  $n = 0, 1, 2, \dots$
3. Par cualquier escalar diferente de cero  $k$ ,  $kA$  es inversible

$$(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$$

**Definición 2.12.** *Determinante* es un número real o escalar asociado a una matriz cuadrada.

**Notación:** Sea  $A = [a_{ij}]_n$  entonces

$$|A| = D(A) = \det(A) = \text{determinante de } A \text{ de orden } n.$$

### 2.1.2 Rango de una matriz

Dada una matriz  $A$  de orden  $m \times n$ , es posible elegir submatrices cuadradas de orden  $k$ , las cuales están contenidas en  $A$ .

**Definición 2.13.** El *rango de una matriz*  $A$  de orden  $m \times n$  es el orden de la submatriz cuadrada más grande contenida en  $A$ , cuyo determinante es no nulo y se denota por  $r(A) = \text{rango de } A$ .

**Observación 2.2.**

1. De la definición vemos que si rango de  $A = b$ , entonces  $r(A) \leq \min\{m, n\}$ , donde  $A$  es de orden  $m \times n$ .
2. Para calcular el rango de  $A$ , basta que entre todas sus submatrices cuadradas más grandes, encontremos una que tenga su determinante no nulo. Si este no fuera el caso, continuamos con las submatrices cuadradas de orden inferior.

### 2.1.3 Sistema de ecuaciones lineales

El sistema de ecuaciones lineales con  $m$  ecuaciones y  $n$  incógnitas

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \tag{2.1}$$

es equivalente a la ecuación matricial

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

o simplemente  $Ax = B$ , donde  $A$  es de orden  $m \times n$ ,  $X$  de  $n \times 1$  y  $B$  de  $m \times 1$ .

#### Observación 2.3.

1. Como (2.1) es equivalente a (2.2), entonces toda solución de (2.2) es solución de (2.1) y viceversa.
2. Una solución del sistema es una  $n$ -upla cualquiera de números  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  para los que se satisfacen todas las ecuaciones.
3. La matriz  $A$  se llama matriz de los coeficientes del sistema
4. La matriz  $A_a = [A|B]$  de orden  $m \times (n + 1)$  se llama la matriz aumentada o ampliada del sistema.
5. En la solución del sistema (2.2) se pueden presentar tres casos:
  - (a) Que el sistema tenga solución única (consistente determinado).
  - (b) Que el sistema tenga infinitas soluciones (consistente indeterminado).
  - (c) Que el sistema no tenga solución (inconsistente).

**Ejemplo 2.11.** Estos tres casos podemos observarlos en un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.

Dadas

$$L_1: a_1x_1 + b_1x_2 = c_1 \text{ donde } a_1 \neq 0 \text{ ó } b_1 \neq 0$$

$$L_2: a_2x_1 + b_2x_2 = c_2 \text{ donde } a_2 \neq 0 \text{ ó } b_2 \neq 0$$

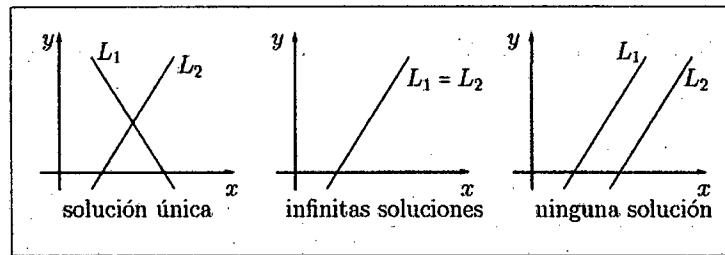


Figura 2.1: sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas

### 2.1.4 Solución de un sistema de n ecuaciones con n incógnitas

Si tenemos las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

es equivalente

$$A_{n \times n} X_{n \times 1} = B_{n \times 1} \tag{2.3}$$

### 2.1.5 Inversión de matrices

Del sistema 2.3, siendo  $|A| \neq 0$ , entonces  $A$  es inversible y existe  $A^{-1}$ , por lo tanto

$$X = A^{-1}B$$

que nos da el valor de las  $n$  incógnitas del sistema.

**Ejemplo 2.12.** Resolver el sistema

$$\begin{aligned}x + y + 2z &= 9 \\2x + 4y - 3z &= 1 \\3x + 6y - 5z &= 0\end{aligned}$$

**Solución:**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & 6 & -5 \end{bmatrix}$$

y  $|A| = -1$ . También

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -17 & 11 \\ -1 & 11 & -7 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

luego

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix},$$

entonces:  $x = 1, y = 2, z = 3$

### 2.1.6 Sistemas homogéneos de ecuaciones lineales

Se llama sistema homogéneo de ecuaciones lineales al sistema de la forma

$$AX = 0.$$

Es decir,

$$\begin{aligned}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0\end{aligned}$$

Los sistemas homogéneos siempre tienen solución:

1. solución trivial:  $x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_n = 0,$
2. solución no trivial: admite un número infinito de soluciones.

**Ejemplo 2.13.**

$$\begin{aligned}x + y + z &= 0 \\2x + 4y - z &= 0 \\3x + 2y + 2z &= 0\end{aligned}$$

llevando a la escalonada

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$r(A) = 3$ , entonces la solución es única:  $x = 0, y = 0, z = 0$ .

## 2.2 Espacios vectoriales

Sea  $V$  un conjunto sobre el que están definidas una ley de composición interna  $+$  y una composición externa, con dominio de operadores en un cuerpo  $\mathbb{K}$ .

Se dice que  $(V, +, \cdot)$  es un espacio vectorial sobre  $\mathbb{K}$  si:

- $(V, +)$  es un grupo abeliano, es decir se cumplen las propiedades

– Asociativa:

$$\forall u, v, w \in V, (u + v) + w = u + (v + w).$$

– Existe elemento neutro.

$$\exists 0 \in V \text{ tal que } 0 + u = u + 0 = u, u \in V.$$

– Existen elementos simétricos:

$$\forall u \in V, \exists (-u) \in V \text{ tal que } u + (-u) = (-u) + (u) = 0.$$

– Conmutativa:

$$\forall u, v \in V, u + v = v + u.$$

• Ley de composición externa, esto es, cumple las propiedades

–

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall u \in \mathbb{V}, (\lambda + \mu).u = \lambda.u + \mu.u.$$

–

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall \mu, \nu \in \mathbb{V}, \lambda(\mu + \nu) = \lambda.\mu + \lambda.\nu$$

–

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall u \in \mathbb{V}, \lambda.(\mu.u) = (\lambda.\mu).u$$

–

$$u \in \mathbb{V}, 1.u = u$$

Los elementos de  $\mathbb{K}$  se llaman *escalares*. Los de  $\mathbb{V}$ , *vectores*

### Propiedades

En las siguientes propiedades, supongamos que  $u, v$  son elementos de un espacio vectorial  $\mathbb{V}$  y que  $\lambda, \mu$  son escalares cualesquiera.

1.  $0.u = 0$ .
2.  $\lambda.0 = 0$ .
3. Si  $\lambda.u = 0$  entonces  $\lambda = 0$  o  $u = 0$ .
4. Si  $\lambda \in \mathbb{K}$  entonces  $-(\lambda.u) = (-\lambda).u = \lambda.(-u)$ .
5. Si  $\lambda.u = \mu.u$  y  $u \neq 0$ , entonces  $\lambda = \mu$ .



6. Si  $\lambda.u = \lambda.v$  y  $\lambda \neq 0$ , entonces  $u = v$ .

**Prueba.**

1. Si  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,  $\lambda.u = (\lambda + 0).u = \lambda.u + 0.u \implies 0.u = 0$ .

2. Si  $u \in \mathbb{V}$ ,  $\lambda.u = \lambda(u.0) = \lambda.u + \lambda.0 \implies \lambda.0 = 0$ .

3. Supongamos que  $\lambda.u = 0$  y  $\lambda \neq 0$ . Entonces sera  $\lambda^{-1}(\lambda.u) = 0$ , luego  $(\lambda^{-1}\lambda).u = 1.u = 0$ , es decir  $u = 0$ .

4.  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,  $u \in \mathbb{V}$ .

5. Sea

(a)  $\lambda.u + (-\lambda).u = (\lambda + (-\lambda)).u = 0.u = 0 \implies -\lambda.u = (-\lambda).u$ .

(b)  $\lambda.u + \lambda.(-u) = \lambda.(u + (-u)) = \lambda.0 = 0 \implies -\lambda.u = \lambda(-u)$ .

6. Si  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$  son tales que  $\lambda.u = \mu.u$ , entonces  $\lambda.u - \mu.u = 0$ . Por la propiedad distributiva, se tiene  $(\lambda - \mu).u = 0$ , de donde, por ser  $u \neq 0$ , se deduce que  $\lambda - \mu = 0$ , es decir,  $\lambda = \mu$ .

□

### 2.2.1 Vectores en $\mathbb{R}^n$

El conjunto de todas las n-uplas de números reales, denotado por  $\mathbb{R}^n$ , se llama un n-espacio. En particular una n-upla en  $\mathbb{R}^n$ , digamos

$$U = (u_1, u_2, \dots, u_n)$$

se llama un punto o un vector; los números reales  $u_i$ , se llaman las componentes (o coordenadas) del vector U.

**Teorema 2.3.** Para todo vector  $u, v$  y  $w \in \mathbb{R}^n$  y todo escalar  $k$  y  $k' \in \mathbb{R}$ :

1.  $(u + v) + w = u + (v + w)$

2.  $u + 0 = u$
3.  $u + (-u) = 0$
4.  $u + v = v + u$ .
5.  $k(u + v) = ku + kv$
6.  $(k + k')u = ku + k'u$
7.  $(kk')u = k(k'u)$
8.  $1u = u$

### 2.2.2 Subespacios

**Definición 2.14.** Un subconjunto  $W$  de un espacio vectorial  $E$  es un *subespacio* de  $E$ , si  $W$  es a sí mismo un espacio vectorial bajo la adición y multiplicación escalar definidas sobre  $E$ .

**Teorema 2.4.** Si  $W$  es un conjunto de uno o más vectores de un espacio vectorial  $E$ , entonces  $W$  es un subespacio de  $E$  si y sólo si se cumplen las condiciones siguientes:

1. Si  $u$  y  $v$  son vectores en  $W$ , entonces  $u + v$  está en  $W$ .
2. Si  $k$  es un escalar cualquiera y  $u$  es cualquier vector en  $W$ , entonces  $ku$  está en  $W$ .

**Prueba.**  $\Rightarrow$ ) Si  $W$  es un subespacio de  $E$ , entonces se satisfacen todos los axiomas de los espacios vectoriales, en particular, se cumplen los axiomas 1 y 6. Pero éstas son precisamente las condiciones *a)* y *b)*.

$\Leftarrow$ ) Supóngase que se cumplen las condiciones *a)* y *b)*, como éstas condiciones son los axiomas 1 y 6 de los espacios vectoriales sólo se necesita demostrar que  $W$  satisface los ocho axiomas restantes. Los axiomas 2,5,7,8,9 y 10 son satisfechos automáticamente por los vectores en  $W$ , dado que son satisfechos por todos los vectores en  $E$ . Por

lo tanto, para completar la demostración basta verificar que los axiomas 4 y 3 son satisfechos por  $W$ .

Sea  $u$  cualquier vector en  $W$ . Por la condición  $b$ ),  $ku$  está en  $W$  para todo escalar  $k$ . Al hacer  $k = 0$ , se deduce que  $0u = \theta$  está en  $W$ , y al hacer  $k = -1$ , se concluye que  $(-1)u = -u$  está en  $W$ .  $\square$

**Observación 2.4.** Todo espacio vectorial  $E$  tiene al menos dos subespacios. El propio  $E$  es un subespacio y el conjunto  $\{0\}$  que sólo consta del vector cero en  $E$  es otro subespacio denominado *subespacio cero*.

**Definición 2.15.** Se dice que un vector es una *combinación lineal* de los vectores  $v_1, v_2, \dots, v_r$  si se puede expresar en la forma

$$w = k_1v_1 + k_2v_2 + \dots + k_rv_r,$$

en donde  $k_1, k_2, \dots, k_r$  son escalares

**Definición 2.16.** Si  $v_1, v_2, \dots, v_r$  son vectores en un espacio vectorial  $V$  y si todo vector en  $V$  es expresable como una combinación lineal de  $v_1, v_2, \dots, v_r$ , entonces se dice que estos vectores generan a  $V$ .

**Teorema 2.5.** Si  $\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$  son vectores en un espacio vectorial  $V$ , entonces:

1. El conjunto  $W$  de todas las combinaciones lineales de  $v_1, v_2, \dots, v_r$  es un subespacio de  $V$ .
2.  $W$  es el subespacio más pequeño de  $V$  que contiene a  $\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ , en el sentido de que cualquier otro subespacio de  $V$  que contenga a  $\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$  debe contener a  $W$ .

**Prueba.**

1. Para demostrar que  $W$  es un subespacio de  $V$ , debe probarse que es cerrado bajo la adición y la multiplicación escalar.

Si  $u$  y  $v$  son vectores en  $W$ , entonces

$$u = c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_rv_r,$$

$$v = k_1v_1 + k_2v_2 + \cdots + k_rv_r,$$

en donde,  $c_1, c_2, \dots, c_r, k_1, k_2, \dots, k_r$  son escalares. Por lo tanto,

$$u + v = (c_1 + k_1)v_1 + (c_2 + k_2)v_2 + \cdots + (c_r + k_r)v_r,$$

y para cualquier escalar  $k$ ,

$$ku = (kc_1)v_1 + (kc_2)v_2 + \cdots + (kc_r)v_r.$$

Así entonces,  $u + v$  y  $ku$  son combinaciones lineales de  $v_1, v_2, \dots, v_r$  y, como consecuencia, están en  $W$ ; por consiguiente,  $W$  es cerrado bajo la adición y multiplicación escalar.

2. Cada vector  $v_i$  es una combinación lineal de  $v_1, v_2, \dots, v_r$ , puesto que es posible escribir,

$$v_i = 0v_1 + 0v_2 + \cdots + 1v_i + \cdots + 0v_r.$$

Por lo tanto, el subespacio  $W$  contiene a cada uno de los vectores  $v_1, v_2, \dots, v_r$ . Sea  $W'$  cualquier otro subespacio que contenga a  $v_1, v_2, \dots, v_r$ . Dado que  $W'$  es cerrado bajo la adición y multiplicación escalar, debe contener todas las combinaciones lineales

$$c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_rv_r \text{ de } v_1, v_2, \dots, v_r.$$

Por lo tanto,  $W'$  contiene a cada vector de  $W$ .

□

El espacio lineal  $W$  generado por un conjunto de vectores  $S = \{v_1, v_2, \dots, v_r\}$  se denota por  $\text{lin}(S)$  o bien,  $\text{lin}\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ .

### 2.2.3 Dependencia e independencia lineal

Si  $S = \{v_1, v_2, \dots, v_r\}$  es un conjunto de vectores del espacio vectorial  $V$ , entonces la ecuación vectorial

$$k_1v_1 + k_2v_2 + \dots + k_rv_r = \theta$$

tiene al menos una solución, a saber,

$$k_1 = 0, k_2 = 0, \dots, k_r = 0$$

Si esta es la única solución, entonces  $S$  recibe el nombre de conjunto *linealmente independiente* (L.I.). Si hay otras soluciones entonces se dice que  $S$  es un conjunto *linealmente dependiente* (L.D.).

**Teorema 2.6.** Sea  $S = \{v_1, v_2, \dots, v_r\}$  un conjunto de vectores en  $\mathbb{R}^n$ . Si  $r > n$ , entonces  $S$  es linealmente dependiente.

**Prueba.** Supóngase que

$$\begin{aligned}v_1 &= (v_{11}, v_{12}, \dots, v_{1n}) \\v_2 &= (v_{21}, v_{22}, \dots, v_{2n}) \\&\vdots \\v_r &= (v_{r1}, v_{r2}, \dots, v_{rn})\end{aligned}$$

Considérese la ecuación

$$k_1v_1 + k_2v_2 + \dots + k_rv_r = \theta$$

igualando componentes se obtiene el sistema

$$\begin{aligned}v_{11}k_1 + v_{21}k_2 + \dots + v_{r1}k_r &= 0 \\v_{12}k_1 + v_{22}k_2 + \dots + v_{r2}k_r &= 0 \\&\vdots \\v_{1n}k_1 + v_{2n}k_2 + \dots + v_{rn}k_r &= 0\end{aligned}$$

Este es un sistema homogéneo de  $n$  ecuaciones en las  $r$  incógnitas  $k_1, \dots, k_r$ . Supuesto que  $r > n$ , se tiene que el sistema tiene soluciones no triviales (es decir algún o algunos  $k_i$  son diferentes de cero). Por lo tanto,  $S = \{v_1, v_2, \dots, v_r\}$  es un conjunto linealmente dependiente.  $\square$

En particular, en este teorema se afirma que un conjunto en  $\mathbb{R}^2$ , con más de dos vectores, es linealmente dependiente y que un conjunto en  $\mathbb{R}^3$ , con más de tres vectores, es linealmente dependiente.

## 2.2.4 Base y dimensión

**Definición 2.17.** Si  $V$  es cualquier espacio vectorial y  $S = \{v_1, v_2, \dots, v_r\}$  es un conjunto finito de vectores en  $V$ , entonces  $S$  se denomina *base* para  $V$  si:

1.  $S$  es linealmente independiente.
2.  $S$  genera a  $V$

**Teorema 2.7.** Si  $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  es una base para un espacio vectorial  $V$ , entonces todo conjunto con más de  $n$  vectores es linealmente independiente.

**Prueba.** Sea  $S' = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$  cualquier conjunto de  $m$  vectores en  $V$ , en donde  $m > n$ . Se desea demostrar que  $S'$  es linealmente dependiente. Supuesto que  $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  es una base, cada  $w_i$  se puede expresar como una combinación lineal de los vectores en  $S$ , por ejemplo,

$$\begin{aligned} w_1 &= a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + \cdots + a_{n1}v_n \\ w_2 &= a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + \cdots + a_{n2}v_n \\ &\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\ w_m &= a_{1m}v_1 + a_{2m}v_2 + \cdots + a_{nm}v_n \end{aligned} \tag{2.4}$$

Para demostrar que  $S'$  es linealmente dependiente, se deben hallar los escalares  $k_1, k_2, \dots, k_m$ , no todos ceros, tales que

$$k_1w_1 + k_2w_2 + \cdots + k_mw_m = \theta \tag{2.5}$$

Al aplicar las Ecuaciones (2.4) en (2.5) se obtiene:

$$\begin{aligned} k_1 a_{11} + k_2 a_{12} + \cdots + k_m a_{1m} v_1 \\ + k_1 a_{21} + k_2 a_{22} + \cdots + k_m a_{2m} v_2 \\ \vdots \\ + k_1 a_{n1} + k_2 a_{n2} + \cdots + k_m a_{nm} v_n = \theta \end{aligned}$$

Por lo tanto, el problema de probar que  $S'$  es un conjunto linealmente dependiente se reduce a demostrar que existen  $k_1, k_2, \dots, k_m$ , no todos cero, que satisfacen

$$\begin{aligned} a_{11}k_1 + a_{12}k_2 + \cdots + a_{1m}k_m &= 0 \\ a_{21}k_1 + a_{22}k_2 + \cdots + a_{2m}k_m &= 0 \\ \vdots & \\ a_{n1}k_1 + a_{n2}k_2 + \cdots + a_{nm}k_m &= 0 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Entonces la demostración queda completa.  $\square$

**Teorema 2.8.** Dos bases cualesquiera para un espacio de dimensión finita tiene el mismo número de vectores.

**Prueba.** Sean  $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  y  $S' = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$  dos bases para un espacio vectorial de dimensión finita  $V$ . Dado que  $S$  es una base y  $S'$  es un conjunto linealmente independiente, el Teorema 2.7 implica que  $m \leq n$ . De modo análogo, dado que  $S'$  es una base y  $S$  es l.i., también se tiene  $n \leq m$ . Por tanto,  $m = n$ .  $\square$

**Ejemplo 2.14.** La base estándar para  $P_n$  contiene  $n + 1$  vectores; así entonces, toda base para  $P_n$  contiene  $n + 1$  vectores.

**Definición 2.18.** La *dimensión* de un espacio vectorial de dimensión finita  $V$  se define como el número de vectores en una base para  $V$ . Además, por definición, el espacio vectorial cero tiene dimensión cero.

**Notación:**  $\dim(V) = \#$  de vectores de la base de  $V$ .

**Ejemplo 2.15.**  $\mathbb{R}^n$  es un espacio vectorial de dimensión  $n$  y  $P_n$  es un espacio vectorial de dimensión  $n + 1$ .

**Teorema 2.9.**

1. Si  $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  es un conjunto de  $n$  vectores linealmente independiente en un espacio vectorial  $V$  de dimensión  $n$ , entonces  $S$  es una base para  $V$ .
2. Si  $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  es un conjunto de  $n$  vectores que generan un espacio vectorial  $V$  de dimensión  $n$ , entonces  $S$  es una base para  $V$ .
3. Si  $S = \{v_1, v_2, \dots, v_r\}$  es un conjunto linealmente independiente en un espacio vectorial  $V$  de dimensión  $n$  y  $r < n$ , entonces se puede agrandar  $S$  hasta formar una base para  $V$ ; es decir, existen los vectores  $v_{r+1}, \dots, v_n$  tales que  $\{v_1, v_2, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n\}$  es una base para  $V$ .

## 2.3 Espacios con producto interno

**Definición 2.19.** Un *producto interno* en un espacio vectorial  $E$  es una función  $E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ , que a cada par de vectores  $u, v \in E$  le asigna un número real  $\langle u, v \rangle$ , llamado producto interno de  $u$  por  $v$ , de modo que sean válidas las siguientes propiedades, para cualquiera  $u, u', v, v' \in E$  y  $\alpha \in \mathbb{R}$ :

1.  $\langle u + u', v \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u', v \rangle$ ,  $\langle \alpha u, v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle$ ,  
 $\langle u, v + v' \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, v' \rangle$ ,  $\langle u, \alpha v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle$
2.  $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$ .
3.  $\langle u, u \rangle > 0$  si  $u \neq 0$  y  $\langle u, u \rangle = 0$  si y sólo si  $u = 0$ .

El espacio vectorial  $E$  con un producto interno se llama un espacio con producto interno.



**Ejemplo 2.16.** Probar que  $\langle 0, v \rangle = 0 = \langle v, 0 \rangle$  para todo  $v \in E$ .

Como  $\langle 0, v \rangle = \langle 0 + 0, v \rangle = \langle 0, v \rangle + \langle 0, v \rangle \forall v \in E$ , entonces  $\langle 0, v \rangle = \langle v, 0 \rangle = 0$  para todo  $v \in E$ .

Resulta de 3), que si  $\langle u, v \rangle = 0$  para todo  $v \in E$  entonces  $u = 0$ . En efecto, si fuera  $u \neq 0$ , tendríamos  $\langle u, v \rangle \neq 0$  por lo menos cuando  $v = u$ .

Se sigue de esta observación que si  $u, u' \in E$  son vectores tales que  $\langle u, v \rangle = \langle u', v \rangle$  para todo  $v \in E$ , entonces  $u = u'$ . En efecto, esto implica que  $\langle u - u', v \rangle = 0$  para todo  $v \in E$ , luego  $u - u' = 0$  de donde  $u = u'$ .

Al número no negativo  $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$  se le llama norma o longitud del vector  $u$ .

Cuando  $\|u\| = 1$ , se dice que  $u \in E$  es un *vector unitario*. Todo vector  $u \neq 0$  se escribe como  $u = \|u\|.u'$ , donde  $u'$  es un vector unitario. Basta poner

$$u' = \frac{1}{\|u\|}.u$$

**Teorema 2.10** (Desigualdad de Cauchy-Schwarz). Sea un espacio vectorial  $E$ , entonces para cualesquiera  $u, v \in E$ , se tiene

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$$

Como una aplicación del teorema anterior tenemos

**Teorema 2.11.** En un espacio vectorial con producto interno, la norma satisface la *desigualdad triangular*

$$\|u + v\|^2 \leq (\|u\| + \|v\|)^2$$

**Prueba.** Como sólo intervienen números no negativos, basta demostrar que

$$\|u + v\| \leq (\|u\| + \|v\|)$$

En efecto,

$$\begin{aligned} \|u + v\|^2 &= \langle u + v, u + v \rangle \\ &= \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\langle u, v \rangle \\ &\leq \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\|u\|\|v\| \\ &= (\|u\| + \|v\|)^2 \end{aligned}$$

□

**Corolario 2.1.** La igualdad  $\|u + v\| = \|u\| + \|v\|$  se cumple sólo cuando uno de los vectores  $u, v$  es un múltiplo no negativo del otro.

**Prueba.** En efecto, por el argumento anterior,

$$\|u + v\| = \|u\| + \|v\|$$

se cumple si  $\langle u, v \rangle = \|u\|\|v\|$ , lo que es evidente si  $u = 0$  e implica  $v = \alpha u$  cuando  $u \neq 0$ . En este caso,  $\|u\|\|v\| = \langle u, v \rangle = \alpha \langle u, u \rangle = \alpha \|u\|^2$ , luego  $\alpha \geq 0$ . □

**Ejemplo 2.17.** Sean  $f$  y  $g$  dos funciones reales continuas definidas en el intervalo  $0 \leq t \leq 1$ . Entonces por la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

$$(\langle f, g \rangle)^2 = \left( \int_0^1 f(t)g(t)dt \right)^2 \leq \int_0^1 f^2(t)dt \cdot \int_0^1 g^2(t)dt = \|f\|^2 \|g\|^2$$

**Definición 2.20.** Si  $E$  es un espacio vectorial real con producto interno, entonces el ángulo  $\theta$  entre los vectores es diferente de cero  $u, v \in E$  está definido por

$$\cos \theta = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\|\|v\|}$$

**Definición 2.21.** Sea  $E$  un espacio vectorial con producto interno. Dos vectores  $u, v \in E$  se llaman *ortogonales* (o perpendiculares), si  $\langle u, v \rangle = 0$ . Se escribe,  $u \perp v$ . En particular,  $0$  es ortogonal a cualquier vector de  $E$ .

**Definición 2.22.** Un conjunto  $X \subset E$  se llama *ortogonal* si dos vectores distintos cualesquiera en  $X$  son ortogonales. Si, además, todos los vectores de  $X$  son unitarios entonces  $X$  se llama un conjunto *ortonormal*. Por lo tanto, un conjunto  $X \subset E$  es ortonormal si y sólo si, dados  $u, v \in X$  se tiene  $\langle u, v \rangle = 0$  si  $u \neq v$  y  $\langle u, v \rangle = 1$ , si  $u = v$ .

**Definición 2.23.** Una *base ortonormal* de  $E$  es una base de  $E$  el cual es un conjunto ortonormal

**Teorema 2.12.** En un espacio vectorial  $E$  con producto interno todo conjunto ortogonal  $X$  de vectores no nulos es linealmente independiente.

**Prueba.** Sea  $X = \{v_1, \dots, v_n\}$ . Tenemos  $\langle v_i, v_j \rangle = 0$  si  $i \neq j$ . Si

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0$$

es una combinación lineal nula de esos vectores entonces, para cada  $i = 1, 2, \dots, n$ , tomamos el producto interno de ambos miembros de esta igualdad por  $v_i$  y resulta

$$\alpha_1 \langle v_1, v_i \rangle + \dots + \alpha_n \langle v_n, v_i \rangle = 0$$

luego  $\alpha_i \langle v_i, v_i \rangle = \alpha_i \|v_i\|^2 = 0$  pues todos los productos internos  $\langle v_j, v_i \rangle$ , con  $i \neq j$ , son nulos en razón de la ortogonalidad de  $X$ . Además, como los vectores pertenecientes al conjunto  $X$  son todos no nulos, resulta de  $\alpha_i \|v_i\|^2 = 0$  que  $\alpha_i = 0$ . Así todos los coeficientes de la combinación lineal  $\sum \alpha_i v_i = 0$  son iguales a cero y los vectores del conjunto  $X$  son, por lo tanto, linealmente independientes.  $\square$

**Teorema 2.13.** En un espacio vectorial  $E$  con producto interno, sean  $u, v \in E$  dos vectores ortogonales, entonces

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$$

**Prueba.** Tenemos

$$\begin{aligned} \|u + v\|^2 &= \langle u + v, u + v \rangle \\ &= \langle u, u \rangle + 2\langle u, v \rangle + \langle v, v \rangle \\ &= \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\langle u, v \rangle \end{aligned}$$

pero como  $u \perp v$ , entonces  $\langle u, v \rangle = 0$ . Por lo tanto

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$$

$\square$

**Teorema 2.14.** Sea  $E$  un espacio con producto interno, donde  $u, v \in E$ , entonces

$$\frac{1}{4}\|u+v\|^2 - \frac{1}{4}\|u-v\|^2 = \langle u, v \rangle$$

**Prueba.** Como

$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\langle u, v \rangle$$

y

$$\|u-v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\langle u, v \rangle$$

entonces,

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}[\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2] &= \frac{1}{4}[4\langle u, v \rangle] \\ \frac{1}{4}\|u+v\|^2 - \frac{1}{4}\|u-v\|^2 &= \langle u, v \rangle \end{aligned}$$

□

**Teorema 2.15.** Sea  $V$  un espacio con producto interno y  $\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$  un conjunto ortonormal de vectores en  $V$ . Si  $W$  denota el espacio generado por  $v_1, v_2, \dots, v_r$ , entonces todo vector  $u$  en  $V$  se puede expresar en la forma

$$u = w_1 + w_2$$

en donde  $w_1$  está en  $W$  y  $w_2$  es ortogonal a  $W$  al hacer

$$w_1 = \langle u, v_1 \rangle v_1 + \langle u, v_2 \rangle v_2 + \dots + \langle u, v_r \rangle v_r$$

y

$$w_2 = u - \langle u, v_1 \rangle v_1 - \langle u, v_2 \rangle v_2 - \dots - \langle u, v_r \rangle v_r.$$

### 2.3.1 Valores propios y vectores propios

**Definición 2.24.** Sea  $A \in M(n, n)$ . El número  $\lambda$  es llamado *valor propio* (valor característico o eigenvalor) de  $A$  si existe un vector  $x \in \mathbb{R}^n$  no nulo tal que  $Ax = \lambda x$ . En tal caso el vector  $x$  se llama *vector propio* (vector característico o eigenvector) correspondiente (o asociado) al valor propio  $\lambda$ .

**Definición 2.25.** Sea  $\Pi : V \rightarrow V$  un operador lineal en el espacio vectorial  $V$  de dimensión  $n$ . El número  $\lambda$  es llamado valor propio (valor característico o eigenvalor) de  $T$  si existe un vector  $v$  no nulo tal que  $T(v) = \lambda v$ . En tal caso el vector  $v$  se le llama vector propio (vector característico o eigenvector) correspondiente (o asociado) al valor propio  $\lambda$ .

**Proposición 2.1.** Sea  $V$  un espacio vectorial de dimensión  $n$  y  $T : V \rightarrow V$  un operador lineal de  $V$ . Si  $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  es una base de  $V$  y sea  $A$  la matriz estándar de  $T$  con respecto a la base  $\beta$ . Se tiene entonces que

$$\lambda \text{ es un valor propio de } T \Leftrightarrow \lambda \text{ es valor propio de } A = [T]_{\beta}$$

**Prueba.**  $\Rightarrow$ ) Sea  $\lambda$  un valor propio de  $T$  y que  $v \in V$  un valor propio asociado a  $\lambda$  entonces

$$T(v) = \lambda v$$

$$[T(v)]_{\beta} = [\lambda v]_{\beta}$$

$$[T]_{\beta}[v]_{\beta} = \lambda[v]_{\beta}$$

$$Ax = \lambda x$$

en donde  $x = [v]_{\beta}$ ,  $\lambda$  es valor propio de  $A = [T]_{\beta}$  y  $x = [v]_{\beta}$  es un vector propio asociado a  $\lambda$  (obsérvese si  $v \neq 0$  entonces  $x \neq 0$ ).

$\Leftarrow$ ) Sea  $\lambda$  un valor propio de  $A = [T]_{\beta}$  y que  $x = (c_1, c_2, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$  es un vector propio asociado a  $\lambda$ , como  $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  es la base de  $V$ , entonces

$$v = c_1v_1 + c_2v_2 + \dots + c_nv_n$$

entonces

$$[T]_{\beta}[v]_{\beta} = \lambda[v]_{\beta}$$

$$[Tv]_{\beta} = [\lambda v]_{\beta}$$

$$Tv = \lambda v$$

lo que muestra que  $\lambda$  es un valor propio de  $T$  y  $v \in V$  (que es no nulo) es un vector propio asociado a  $\lambda$ . □

**Observación 2.5.** Si  $A, B \in M(n, n)$ , recordemos que  $B$  es semejante a  $A$  si existe  $P$  inversible tal que

$$B = P^{-1}AP$$

Si  $\lambda$  es un valor propio de  $A$  entonces  $\exists x \in X, x \neq 0$  (no nulo) tal que  $Ax = \lambda x$ , ahora si  $B$  es semejante a  $A$ , entonces existe  $P$  inversible tal que  $B = P^{-1}AP$ , luego

$$A = PBP^{-1}$$

$$(PBP^{-1})x = \lambda x$$

multiplicando por la izquierda por  $P^{-1}$  tenemos

$$(BP^{-1})x = \lambda P^{-1}x$$

$$B(P^{-1}x) = \lambda(P^{-1}x)$$

como  $x \neq 0$  y  $P$  es inversible entonces  $Px \neq 0$ , entonces  $\lambda$  es valor propio de  $B$  y  $P^{-1}x$  es valor propio asociado a  $\lambda$ .

**Prueba.** En efecto,

$$Ax = \lambda Ix \Rightarrow (\lambda I - A)x = 0$$

como existe una solución distinta de la trivial, se tiene

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

□

**Teorema 2.16.** Si  $A \in M(n, n)$

$$\lambda \text{ es valor propio de } A \Leftrightarrow \det(\lambda I - A) = 0$$

**Ejemplo 2.18.** Halle los valores propios de

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -17 & 8 \end{bmatrix}$$

**Solución**

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - A) &= \det \begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ -4 & 17 & \lambda - 8 \end{bmatrix} \\ &= \lambda(\lambda)(\lambda - 8) - 4 + 0 - [0 + 0 - 17\lambda] \\ &= \lambda^3 - 8\lambda^2 + 17\lambda - 4 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Por Ruffini

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -8 & 17 & -4 \\ 4 & & 4 & -16 & 4 \\ \hline & 1 & -4 & 1 & 0 \end{array}$$
$$\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0$$

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(1)}}{2(1)} \\ &= \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2} \\ &= 2 + \sqrt{3}, \lambda = 2 - \sqrt{3} \end{aligned}$$

### 2.3.2 Diagonalización de una matriz

En esta sección se enfoca la atención a los siguientes problemas:

**Problema 1** Dado un operador lineal  $T : V \rightarrow V$  sobre un espacio vectorial de dimensión finita ¿Existe una base para  $V$  respecto a la cual la matriz de  $T$  sea diagonal?

**Problema 2** Dado un operador lineal  $T : V \rightarrow V$  sobre un espacio de producto interior de dimensión finita ¿Existe una base ortonormal para  $V$  con respecto a la cual la matriz  $T$  sea diagonal?

Como  $A$  es la matriz estándar de  $T : V \rightarrow V$  en alguna base entonces el Problema 1 equivale a preguntar si existe un cambio de base tal que la nueva matriz para  $V$  sea diagonal, sabemos que la nueva matriz para  $T$  será  $P^{-1}AP$  donde  $P$  es la matriz de transición apropiada. Si  $V$  es un espacio vectorial con producto interno y las base son ortonormales entonces  $P$  será ortogonal.

En resumen los problemas 1 y 2 se plantean matricialmente como:

**Problema 1 (forma matricial)** Dada una matriz  $A$  cuadrada, ¿existe una matriz inversible  $P$  tal que  $P^{-1}AP$  sea diagonal?

**Problema 2 (forma matricial)** Dada una matriz cuadrada  $A$ , ¿hay una matriz ortogonal  $P$  tal que  $P^{-1}AP = P^TAP$  sea diagonal?

**Definición 2.26.** Se dice que una matriz cuadrada  $A$  es *diagonalizable* si existe  $P^{-1}$  tal que  $P^{-1}AP$  sea diagonal.

**Teorema 2.17.** Si  $A \in M(n, n)$  entonces las proposiciones son equivalentes

1.  $A$  es diagonalizable.
2.  $A$  tiene  $n$  eigenvectores linealmente independientes



**Prueba.**  $\Rightarrow$ ) Como  $A$  es diagonalizable, existe una matriz inversible

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \cdots & P_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ P_{n1} & P_{n2} & \cdots & P_{nn} \end{bmatrix}$$

tal que  $P^{-1}AP = D$ , donde

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Por tanto  $AP = PD$ , es decir

$$\begin{aligned} AP &= \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \cdots & P_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ P_{n1} & P_{n2} & \cdots & P_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda_1 P_{11} & \lambda_2 P_{12} & \cdots & \lambda_n P_{1n} \\ \lambda_1 P_{21} & \lambda_2 P_{22} & \cdots & \lambda_n P_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1 P_{n1} & \lambda_2 P_{n2} & \cdots & \lambda_n P_{nn} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

si ahora se denotan los vectores columnas de  $P$  por  $P_1, P_2, \dots, P_n$  entonces las columnas mismas de  $AP$  son  $\lambda_1 P_1, \lambda_2 P_2, \dots, \lambda_n P_n$ , también podemos que las columnas de  $AP$  son  $AP_1, AP_2, \dots, AP_n$ , entonces

$$AP_1 = \lambda_1 P_1, AP_2 = \lambda_2 P_2, \dots, AP_n = \lambda_n P_n$$

supuesto que  $P$  es inversible sus vectores columna son diferentes de cero, luego  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  son los eigenvalores de  $A$  y  $P_1, P_2, \dots, P_n$  son sus eigenvectores correspondientes ya que  $P$  es inversible que  $P_1, P_2, \dots, P_n$  son l.i.

$\Leftarrow$ )

□

### 2.3.3 Diagonalización ortogonal

El problema de diagonalización de matrices simétricas siempre tiene solución. En otras palabras se mostrará que toda matriz simétrica es semejante a una matriz diagonal.

**Definición 2.27.** Sea  $A \in M(n, n)$ . Se dice que  $A$  es una matriz *diagonalizable ortogonalmente* si existe  $P$  matriz ortogonal tal que  $P^{-1}AP = P^TAP$  es una matriz diagonal.

**Proposición 2.2.** Si  $A$  es diagonalizable ortogonalmente entonces  $A$  es simétrica.

**Prueba.** En efecto, si  $A$  es diagonalizable ortogonalmente, existe  $P$  ortogonal tal que  $P^TAP = D$ ,  $D$  matriz diagonal simétrica,  $P^T = P^{-1}$ ,

$$A = (P^T)^{-1}DP^{-1} = PDP^T$$

entonces

$$\begin{aligned} A^T &= (PDP^T)^T \\ &= P^{TT}D^TP^T \\ &= PDP^T \\ &= A \end{aligned}$$

por lo tanto

$$A^T = A \quad (A \text{ es simétrica})$$

□

**Teorema 2.18.** Si  $A$  es una matriz simétrica. Los valores propios de  $A$  son números reales.

**Prueba.** Sea  $\lambda$  un valor propio cualquiera de  $A$  y sea  $x$  un vector propio asociado a  $\lambda$  digamos  $\lambda = \alpha + i\beta$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  se mostrará que  $\beta = 0$ .

Obsérvese que el valor propio  $x$  siendo solución no trivial del sistema homogéneo  $(A - \lambda I)x = 0$  tiene coordenadas complejas, es decir,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n), x \in \mathbb{C}$ . Si  $Ax = \lambda x$ , entonces

$$\overline{Ax} = \overline{\lambda x}$$

$$\overline{Ax} = \overline{\lambda} \overline{x}$$

$$A\overline{x} = \overline{\lambda} \overline{x}$$

pues  $A$  es una matriz simétrica con elementos reales. Tomando transpuesta y el hecho que  $A$  es simétrica tenemos

$$\overline{x^T} A = \overline{\lambda} \overline{x^T}.$$

Al multiplicar por la izquierda por  $x$  y al usar  $Ax = \lambda x$  se tiene

$$\overline{x^T} \lambda x = \overline{\lambda} \overline{x^T} x$$

entonces

$$(\lambda - \overline{\lambda}) \overline{x^T} x = 0$$

luego

$$\overline{x^T} x = \begin{bmatrix} \overline{x}_1 & \overline{x}_2 & \cdots & \overline{x}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n |x_i|^2$$

donde  $|x_i|$  denota el módulo complejo de  $x_i, i \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Como  $x \neq \theta$  (vector nulo), entonces

$$\lambda - \overline{\lambda} = 0$$

$$\lambda = \overline{\lambda}$$

$$\beta = 0$$

entonces  $\lambda = \alpha \in \mathbb{R}$ .

□

**Teorema 2.19.** Sean  $\lambda_i$  y  $\lambda_j$  dos valores propios distintos de la matriz simétrica  $A$ . Si  $x_i$  y  $x_j$  son vectores propios con valores propios  $\lambda_i$  y  $\lambda_j$  respectivamente, entonces  $x_i$  es ortogonal a  $x_j$ , esto es  $\langle x_i, x_j \rangle = 0$  donde  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  es el producto interno canónico de  $\mathbb{R}^n$ .

**Prueba.**

$$Ax_i = \lambda_i x_i$$

$$Ax_j = \lambda_j x_j$$

Tomando transpuesta:

$$x_i^T A^T = \lambda_i x_i^T \Rightarrow x_i^T A = \lambda_i x_i^T$$

Al multiplicar por la izquierda por  $x_j$

$$x_i^T A x_j = \lambda_i x_i^T x_j$$

$$x_i^T \lambda_j x_j = \lambda_i x_i^T x_j$$

entonces

$$(\lambda_j - \lambda_i) x_i^T x_j = 0$$

Obsérvese

$$\begin{aligned} x_i^T x_j &= \begin{bmatrix} x_{1i} & x_{2i} & \dots & x_{ni} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1j} \\ x_{2j} \\ \vdots \\ x_{nj} \end{bmatrix} \\ &= x_{1i}x_{1j} + x_{2i}x_{2j} + \dots + x_{ni}x_{nj} \\ &= \langle x_i, x_j \rangle \end{aligned}$$

Se puede escribir

$$(\lambda_j - \lambda_i) \langle x_i, x_j \rangle = 0$$

como  $\lambda_j \neq \lambda_i$ , entonces  $\lambda_j - \lambda_i \neq 0$ , luego

$$\langle x_i, x_j \rangle = 0.$$

□

**Corolario 2.2.** Si  $A$  es una matriz simétrica de orden  $n$ , si  $A$  tiene  $n$  vectores propios distintos entonces  $A$  es diagonalizable ortogonalmente.

**Prueba.** Sean  $\lambda_i, i \in \{1, 2, \dots, n\}$  valores propios distintos de  $A$  y sean  $\tilde{x}_i$  sus vectores propios correspondientes a cada uno de estos valores propios. Sea

$$x_i = \frac{\tilde{x}_i}{\|\tilde{x}_i\|}, \quad i \in \{1, \dots, n\} \quad (2.7)$$

Se tiene que  $B = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  es una base ortonormal del teorema anterior y (2.7) y sea  $B'$  la base de  $\mathbb{R}^n$  y  $P$  la matriz de cambio de  $B$  a  $B'$  y como  $B$  es l.i., entonces  $P$  tiene por vectores columna a  $x_1, x_2, \dots, x_n$  y  $P$  es ortogonal, por lo tanto

$$P^{-1}AP = P^TAP = D,$$

$D$  diagonal.

□

# Capítulo 3

## Planteamiento del problema

### 3.1 Determinación del Problema

Se trata de encontrar un modelo de detección de talento deportivo en atletas Down en fase inicial, predecir mediante metodología científica las probabilidades del éxito deportivo.

#### 3.1.1 Formulación del Problema

Me hago la siguiente pregunta, ¿Se podrá encontrar alguna metodología para detectar talentos en atletas Down?

Entendiendo por talento “Los sujetos superdotados o talentosos son aquellos que, por sus habilidades extraordinarias, son capaces de altas realizaciones en áreas tales como la competencia intelectual general, aptitud académica, creatividad, liderazgo, competencia artística y competencia motriz”, por lo que planteo el siguiente problema

#### 3.1.2 Problema General

¿Cuáles son los factores principales para la detección del talento deportivo?

### **3.1.3 Problema Especifico**

1. ¿Cuál es la influencia del somatotipo en la detección del talento deportivo?
2. ¿Cuál es la influencia de la clasificación en la detección de talentos deportivos?

## **3.2 Objetivo de la investigación**

### **3.2.1 Objetivo General**

Establecer una metodología que relacione el análisis de componentes principales y el somatotipo

### **3.2.2 Objetivo Especifico**

- Establecer los componentes principales en los atletas con síndrome de Down.
- Establecer una clasificación a los atletas con síndrome de down en función a sus componentes principales

#### **3.2.2.1 Importancia de la Investigación**

La importancia de esta investigación es porque es la primera vez que en el país se hace este tipo de trabajo.

#### **3.2.2.2 Alcances de la Investigación**

este trabajo abre un nuevo camino en la detección de talentos deportivos

#### **3.2.2.3 Limitaciones de la Investigación**

Las limitaciones de este trabajo de investigación son muchos como por ejemplo:

1. No se cuenta con base de datos para poder hacer un trabajo comparativo y ver la tendencia.

2. La falta de profesionales con experiencia en el tema.
3. La falta del análisis de la dieta de los atletas.
4. El análisis del lactato de la sangre para tener mas variables de análisis.
5. Los somatotipos de los atletas nacionales más representativos.

### **3.3 Hipótesis General**

El análisis multidimensional relacionado con el somatotipo es una buena metodología como principal variable predictora en la detección de talento deportivo.

### **3.4 Hipótesis Especifica**

1. El análisis multidimensional valida el somatotipo como herramienta para la detección del talento deportivo.
2. Si se conoce las mediciones antropométricas de los atletas, se podrá predecir la clasificación del grupo con mayor probabilidad deportiva.



# Capítulo 4

## Metodología

Es un estudio de tipo observacional, comparativo, analítico y transversal

- Estudio observacional: por que el investigador no ha manipulado las variables de estudio, sólo recolectó los datos necesarios, para analizarlos, tabularlos, describirlos e interpretarlos.
- Estudio comparativo: Los datos obtenidos se compararon entre los subgrupos de cada grupo de análisis y, según se requirió.
- Estudio analítico: Se analizó si es que hay evidencia estadísticamente significativa que demuestre la influencia de la variable independiente sobre las otras presentadas.
- Estudio transversal: Mientras que la toma de datos (parte informativa) se efectuó una sola vez, las mediciones se realizaron en dos oportunidades consecutivas a cada sujeto de estudio, una por cada investigador; la segunda fue de control.

### 4.1 Poblacion y muestra

- Población: estuvo constituida por todas las personas con síndrome de Down que viven en Lima Metropolitana, de edades entre 12 y 36 años.

Muestra: formada por personas con síndrome de Down y que en todos los casos fueron alrededor del 90% de los sujetos que integraban el total de la población estable de cada institución y que cumplían los criterios de inclusión. La muestra de este estudio fue elegida al azar entre todos los temporalmente presentes; por lo que se efectuó un muestreo estratificado; homogenizando por su característica principal (presentar síndrome de Down) además del género y la cantidad reportada de horas de entrenamiento semanal. Esto se llevó a cabo con todos aquellos que estuvieron en los diferentes clubes, colegios e instituciones especializadas a donde acudimos; además de las que participaron en las actividades competitivas y recreativas organizadas por “Olimpiadas Especiales” en la ciudad de Lima Metropolitana, en el período de enero-agosto del 2004.

Al decir se evaluó antropométricamente; se refiere a que se hicieron las siguientes mediciones de acuerdo al protocolo de I.S.A.K (International Society for Advance of Kynantropometric). La Sociedad Internacional para el Avance de la Cineantropometría (ISAK) fue fundada como una organización de individuos cuya labor científica y profesional está relacionada con cineantropometría.

El propósito de ISAK es crear y mantener una red internacional de colegas que representan a la comunidad geográfica, trascendiendo mundo, la política y los límites de distintas disciplinas con el fin de establecer un área dinámica de la labor científica.

Cineantropometría es el área de la ciencia que estudia la medición de la composición del cuerpo humano. Como resultado de los cambios en los estilos de vida, la nutrición, los niveles de actividad y composición étnica de las poblaciones, los cambios en la distribución de las dimensiones, están ocurriendo siempre. Cineantropometría es la interfaz entre la anatomía y el movimiento. Se toma la medición del cuerpo humano y determina que es la capacidad para la función y el movimiento en una gama de ajustes.

ISAK ha elaborado normas internacionales para la evaluación antropométrica y un sistema internacional de acreditación de la antropometría (IAAS). El sistema de acreditación se basa en el concepto de una jerarquía de cuatro niveles. Un elemento clave en el que es el objetivo de garantizar la calidad de mantenimiento, al exigir que

todos los niveles tienen que cumplir error técnico inicial de la medición (TEM).

También se utilizaron dos balanzas nuevas, calibradas, dos calibradores métricos, dos antropómetros, dos calibradores de pliegues cutáneos y una cartilla para llenar los datos.

#### **4.1.1 Criterios de inclusión y exclusión**

- Criterios de inclusión:

- Grupo A y B: damas y varones.
- Atletas de diferentes disciplinas deportivas, que entrenan o participan en actividades deportivas y recreativas organizadas por la institución Olimpiadas Especiales u otras similares.
- Personas con síndrome de Down, con actividad física programada (clases escolarizadas de educación física, sesiones de terapia o aprestamiento).
- Personas con síndrome de Down entre los 12 y 36 años de edad.

- Criterios de exclusión:

- Personas con síndrome de Down con alteración funcional o problemas de salud evidente (constatado) que le impidan autonomía física y/o motora.
- Personas con síndrome de Down fuera del rango de 12 y 36 años de edad (edades límites; según datos oficiales de la Asociación de Olimpiadas Nacionales Especiales del Perú).

## **4.2 Instrumentos y Escalas de Medición**

### **4.2.1 Modo de toma de medidas antropométricas**

1. Pliegues. Los pliegues cutáneos se forman por una capa de piel doble y la capa de tejido adiposo subyacente, sin el músculo. Se toman en una acción de pinza

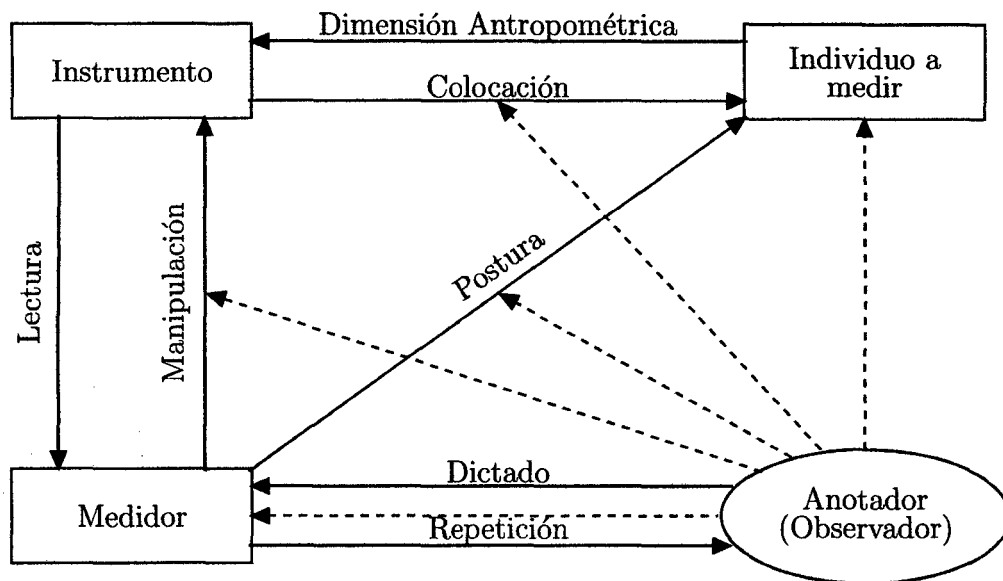


Figura 4.1: Diagrama del procedimiento de mediciones.

efectuado por el índice y el pulgar. Estos mantienen la acción durante todo el proceso de medición. Cada pliegue cutáneo se toma en un punto marcado y el adipómetro (ver Figuras 4.2 y 4.3) se aplica a un centímetro del punto de presión. Debe mantenerse el adipómetro en ángulo recto al eje longitudinal del pliegue. La lectura se efectúa después de liberar la palanca del adipómetro permitiendo que este ejecute toda la presión sobre el pliegue. La lectura se efectúa entre el segundo y cuarto segundo después de aplicar la presión

2. Perímetros. miden el contorno del segmento corporal elegido. Se utilizó una cinta métrica (centímetro) con graduación hasta en milímetros.
3. Diámetros. Son las medidas lineales realizadas en sentido horizontal, y que caracterizan en el caso concreto del estudio, son biépicondiliares. Se utilizó el antropómetro o calibrador deslizante (ver Figura 4.4).

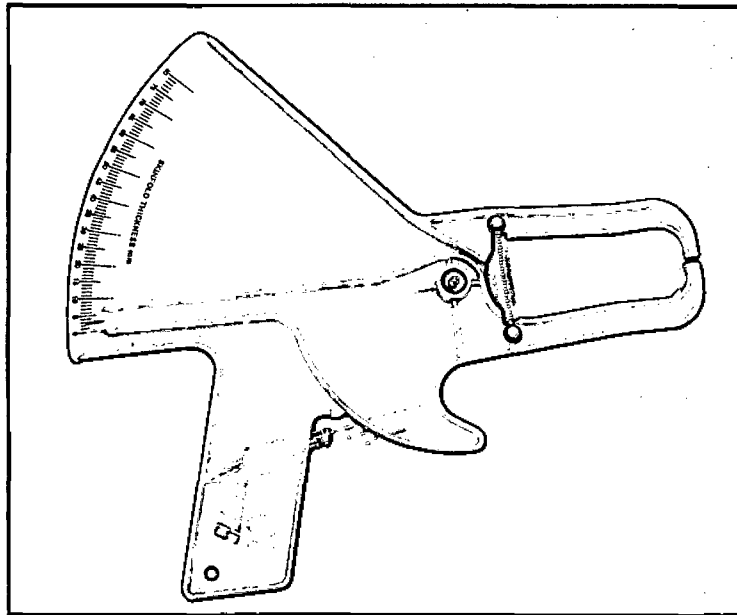


Figura 4.2: calibrador de pliegues cutáneos.

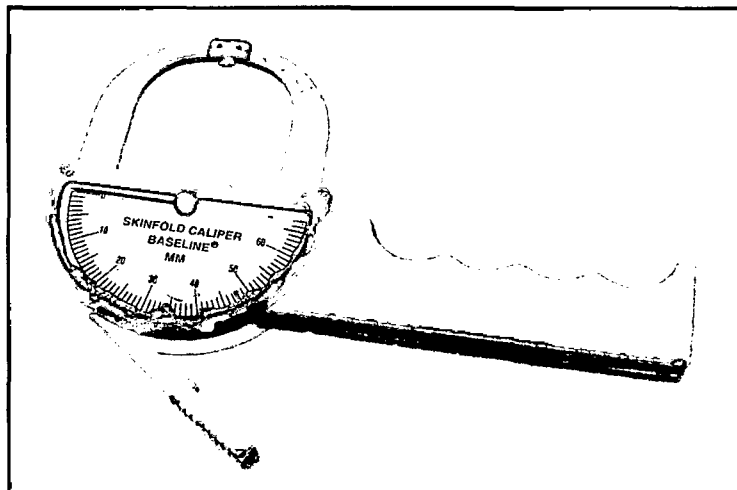


Figura 4.3: calibrador de pliegues cutáneos.

#### 4.2.2 Ubicación de puntos corporales de medición

1. Pliegue bicipital. Ubicado a nivel de la línea media entre el acromio y la cabeza del radio. El adipómetro se aplica un centímetro por debajo del pulgar y del

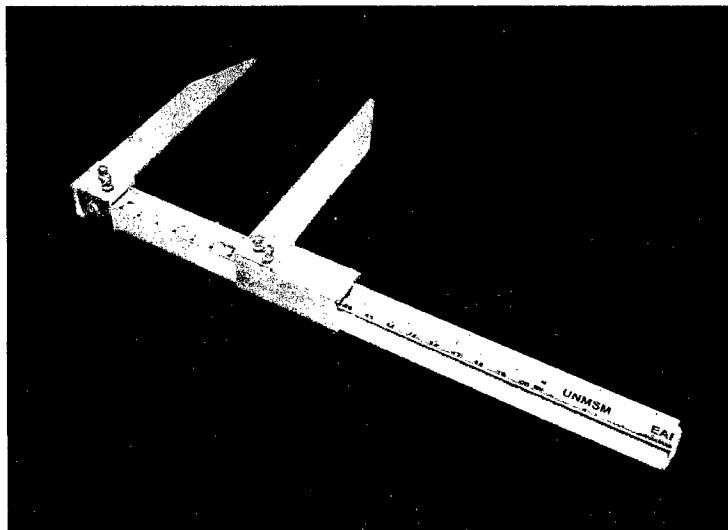


Figura 4.4: Para las mediciones de diámetros los huesos

índice que han tomado un pliegue sobre la superficie del brazo (ver Figuras 4.5 y 4.6).

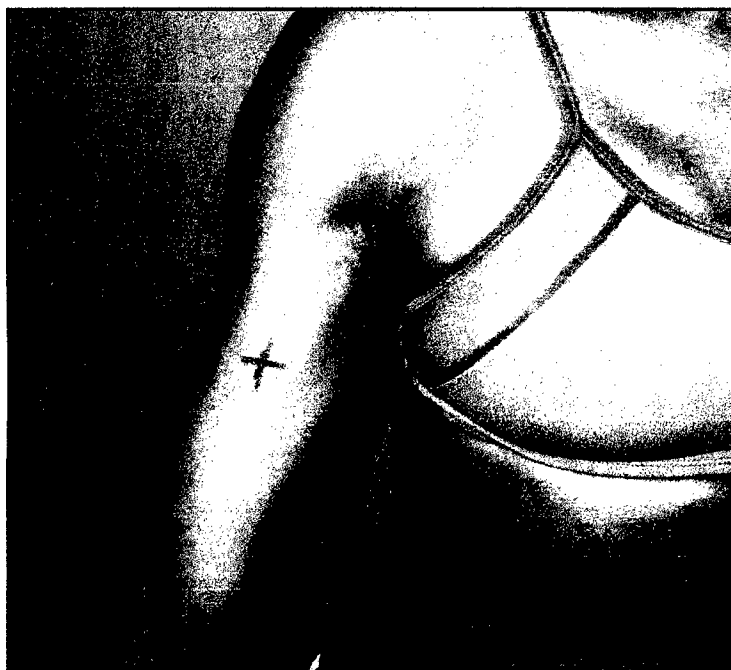


Figura 4.5: Punto antropométrico-ISAK.

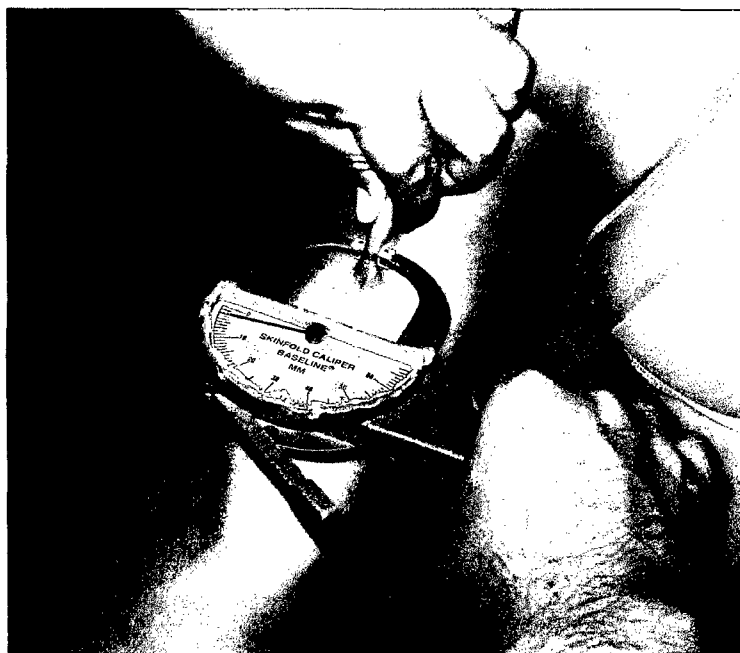


Figura 4.6: Punto antropométrico para la medición del pliegue- ISAK.

2. Pliegue tricipital. Localizado en el punto medio de la línea que une el acromion y el olécranon, paralelo al eje mayor del miembro. El adipómetro se aplica un centímetro por debajo del pulgar y del índice izquierdos que han tomado el pliegue vertical sobre la superficie posterior del brazo (ver Figuras 4.7 y 4.8).
3. Pliegue subescapular. Se encuentra a nivel del ángulo inferior de la escápula en su parte interna en sentido oblicuo, formando un ángulo de 45 grados con la horizontal que pasa por el borde inferior de la escápula. El adipómetro se aplica un centímetro por debajo del pulgar y del índice izquierdo que ha tomado el pliegue (ver Figuras 4.9 y 4.10).
4. Pliegue suprailíaco. El adipómetro se coloca un centímetro por delante del pulgar y del índice que han tomado el pliegue unos 3-5 centímetros paralelo y encima de la cresta ilíaca en sentido horizontal (ver Figuras 4.11 y 4.12).
5. Pliegue abdominal. El adipómetro se aplica un centímetro por debajo del pulgar



Figura 4.7: Punto antropometrico para la medición del pliegue del triceps -ISAK.

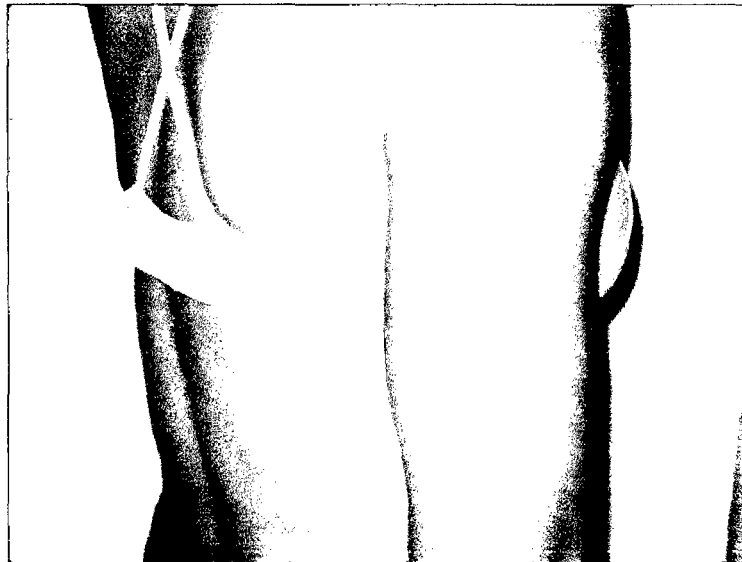


Figura 4.8: Punto antropometrico del tricep -ISAK.

y del índice que han tomado el pliegue vertical a nivel del ombligo, paralelo al eje mayor del abdomen y a unos cinco centímetros (ver Figuras 4.13 y 4.14).

6. Pliegue pantorrilla media. Se ubica sobre la cara medial de la pierna bajo el nivel



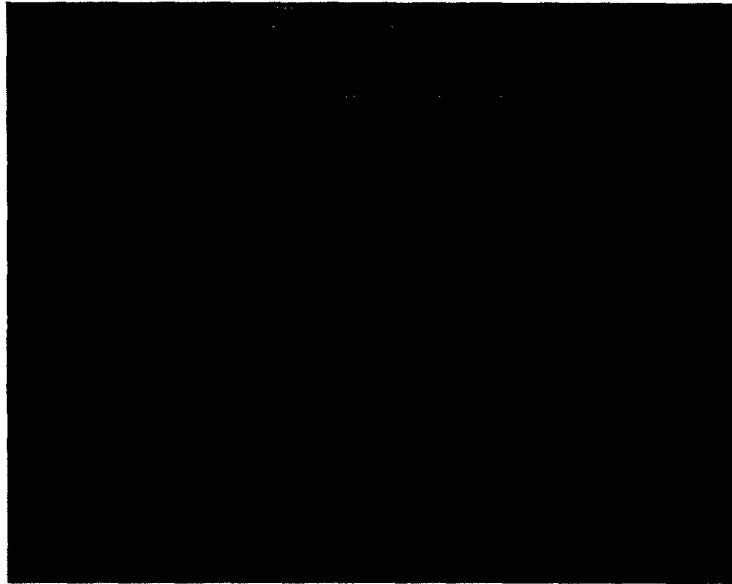


Figura 4.9: Punto antropométrico del subescapular -ISAK.



Figura 4.10: Técnica de medición del subescapular -ISAK.

de su circunferencia máxima. El adipómetro se coloca un centímetro por debajo del pulgar e índice que han tomado un pliegue en forma vertical (ver Figuras 4.15



Figura 4.11: Punto suprailiaco -ISAK.



Figura 4.12: Técnica de medición del suprailiaco -ISAK.

y 4.16).

7. Perímetro de pierna. El sujeto en posición de sentado, con el pie apoyado y rela-

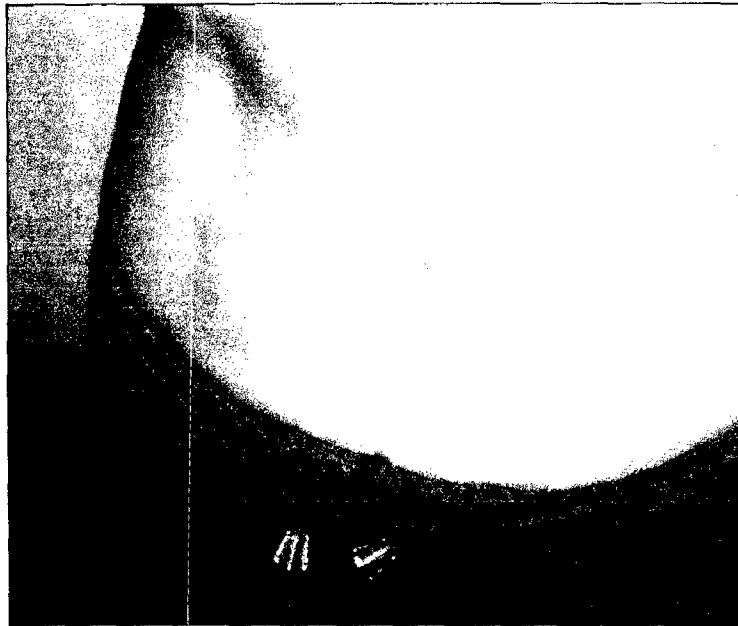


Figura 4.13: punto abdominal -ISAK.

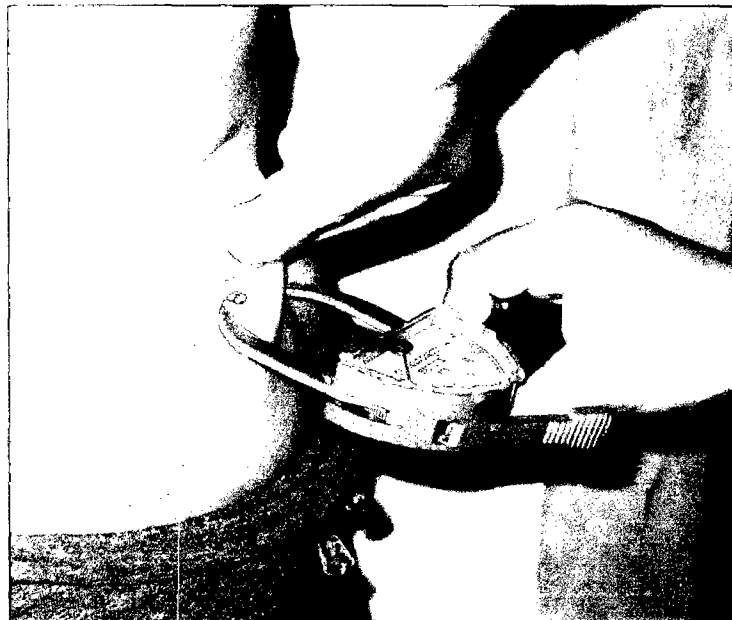


Figura 4.14: Técnica de medición del pliegue abdominal -ISAK.

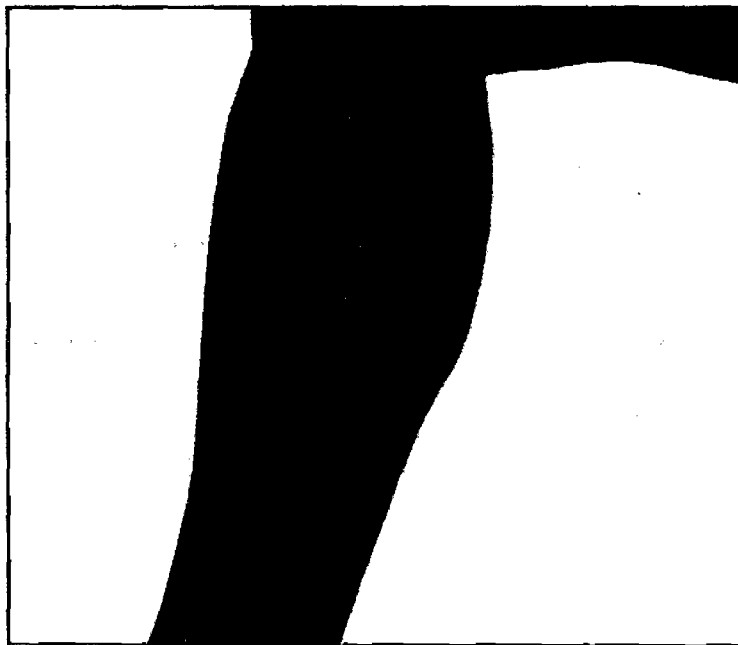


Figura 4.15: Punto de medición de la pantorrilla -ISAK.



Figura 4.16: Técnica de medición del pliegue de la pantorrilla -ISAK.

jado, se localiza la circunferencia máxima de la pantorrilla. moviendo ligeramente la cinta y observando la lectura hasta que sea de máximo valor.

8. Perímetro de cintura. Se localiza en el centro de la distancia entre el borde inferior de las costillas y el borde superior de las crestas ilíacas. En las personas en las que no se aprecia estrechamiento de la cintura se tomará la medida aproximadamente a este nivel.
9. Perímetro de cadera. Medida de la circunferencia a nivel de los trocánteres derecho e izquierdo, abordando la parte más prominente de la región glútea.
10. Diámetro fémur (biepicondilar). Es la distancia máxima entre el cóndilo lateral y medial del fémur. El sujeto está sentado, formando un ángulo de 90 grados la pierna con el muslo. El compás se coloca orientado hacia abajo en la bisectriz del ángulo recto de la rodilla. Con el dedo índice se palpan los epicóndilos. Se colocan las plataformas y se presiona firmemente sobre los puntos anatómicos. Si los epicóndilos no se palpan claramente, el dedo medio puede explorar un área circular y manejar ligeramente las plataformas del compás para asegurarse que abarcan estos puntos anatómicos (ver Figura 4.17).

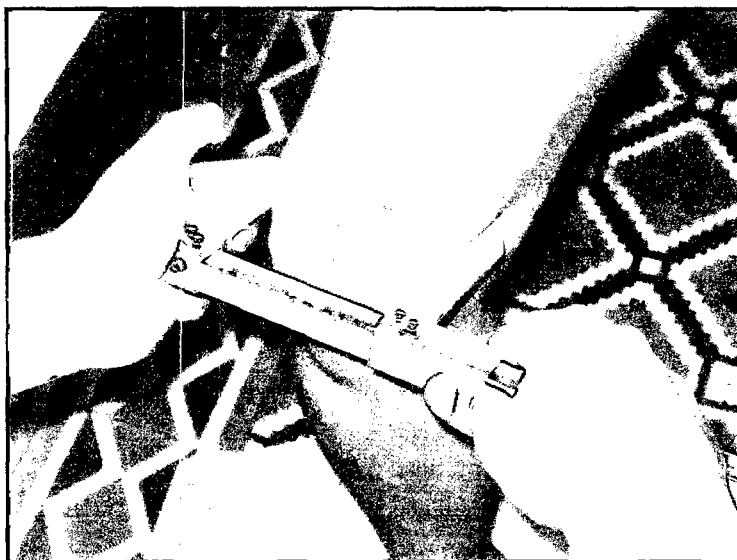


Figura 4.17: Técnica de medición del ancho de la rodilla -ISAK.

11. Diámetro del húmero (biepicondilar). Es el segmento corporal comprendido entre

el cóndilo lateral y medial del húmero. El brazo en posición horizontal y el antebrazo forma un ángulo de 90 grados con el brazo. Se coloca el compás orientado hacia arriba, en la bisectriz del ángulo recto formado por el codo. Se palpan los epicóndilos con el dedo medio (ver Figura 4.18).



Figura 4.18: Técnica de medición del ancho del codo -ISAK.

Todas las mediciones se efectuaron en el lado derecho de los sujetos; de igual modo en los diámetros y perímetros sobre pierna y brazo derecho.

UNFV – EUPG  
 AREA SALUD MAESTRIA: DEPORTE Y SALUD

Ficha Antropométrica Ad Hoc de Atletas Down  
 DATOS GENERALES

Nº Registro:  Fecha de toma:   
 El nombre del atleta es opcional

Apellido paterno                      Apellido Materno                      Nombres  
                                           

2. Género: M  F  3. Edad  4. F. Nac.

5. Deporte practicado:  6. Especialidad:

7. Tiempo de práctica:  8. Horas semanal práctica:

**MEDICIONES**

9. Talla:  cm. 10. Peso:  kg.

11.	Perímetro bíceps en flexión			cm.
12.	Perímetro pantorrilla			cm.
13.	Diámetro fémur			cm.
14.	Diámetro húmero			cm.
15.	Pliegue bicipital			mm.
16.	Pliegue tricpital			mm.
17.	Pliegue sub escapular			mm.
18.	Pliegue supra iliaco			mm.
19.	Pliegue abdominal			mm.
20.	Pliegue pantorrilla media			mm.
21.	Circunferencia Abdominal			cm.
22.	Circunferencia de caderas			cm.

**IMC:**

**SOMATOTIPO:**

**CINTURA/CADERA**

Figura 4.19: Ficha para el recojo de datos

# Capítulo 5

## Técnicas de análisis multidimensional de datos

### 5.1 Componentes Principales

**Definición 5.1.** El Análisis de Componentes Principales (ACP) es un método multidimensional (se llama multidimensional porque intervienen múltiples variables, cada una representada por una determinada cantidad de datos) de análisis de datos que permite la reducción de datos, es decir si son datos asociados a una alta dimensión (se considera alta dimensión cuando intervienen en el análisis más de 2 variables) los transforma en un conjunto de datos de menor dimensión, de tal manera que las representaciones gráficas así como las interpretaciones de las relaciones entre las variables involucradas se hace mas sencilla. Gómez (2000). Este método de reducción de datos preserva en lo posible la información contenida en las variables originales, utilizando para esto criterios de optimización geométrica así como algebraica.

En resumen, lo que se hace es que a partir de los datos originales se procedan a hacer transformaciones, de manera que las nuevas variables a las cuales se les denomina componentes principales (en el sistema transformado) tengan propiedades deseables en términos de varianzas (variabilidad) y relaciones entre ellas.



### 5.1.1 Fundamentación Matemática

Antes de examinar el caso general de extracción de componentes principales en el caso de  $p$  variables, vamos a considerar un caso de 2 variables para dar una visión intuitiva del método. Tiene la ventaja adicional de que se puede ilustrar gráficamente, y de forma completa, la relación entre variables y componentes.

La extracción de componentes de 2 variables tiene interés a efectos expositivos únicamente, ya que en general, en las aplicaciones del análisis de componentes principales se trata de reducir dimensión de un número elevado de variables.

Si la correlación muestral es nula entre el conjunto de variables, entonces las componentes principales coincidirán exactamente con las variables originales. Así pues, para aplicar este análisis hay que partir del supuesto de que las variables están correlacionadas entre sí.

El análisis de varianza es un método estadístico para determinar si diversos conjuntos de muestras aleatorias de una determinada variable proceden de una misma población o de poblaciones distintas. En general cada conjunto muestral se caracteriza por estar afectado por un tratamiento específico, que eventualmente puede influir en los valores que toma la variable que es objeto de estudio.

### 5.1.2 Objetivo de los componentes principales

Un problema central en el análisis de datos multivariantes es la reducción de la dimensionalidad: si es posible describir con precisión los valores de  $p$  variables por un pequeño subconjunto  $r < p$  de ellas, se habría reducido la dimensión del problema a costa de una pequeña pérdida de información.

El análisis de componentes principales tiene este objetivo: dada  $n$  observaciones de  $p$  variables, se analiza si es posible representar adecuadamente esta información con un número menor de variables construidas como combinaciones lineales de las originales.

Por ejemplo, con variables con alta dependencia es frecuente que un pequeño número de nuevas variables (menos del 20 por 100 de las originales) expliquen la mayor parte

(más del 80 por 100 de la variabilidad original). La técnica de componentes principales es debida a Hotelling [20], aunque sus orígenes se encuentran en los ajustes ortogonales por mínimos cuadrados introducidos por K. Pearson. Su utilidad es doble:

- Permite representar óptimamente en un espacio de dimensión pequeña observaciones de un espacio general  $p$ -dimensional. En este sentido, componentes principales es el primer paso para identificar las posibles variables latentes, o no observadas que generan los datos.
- Permite transformar las variables originales, en general correlacionadas, en nuevas variables incorrelacionadas, facilitando la interpretación de los datos. En este capítulo presentamos únicamente esta técnica como una herramienta exploratoria.

### **5.1.3 Obtención de los componentes principales en el caso general y sus propiedades**

En esta subsección, se va a examinar con detalle cómo se obtiene, ó se extrae, la primera componente principal. Posteriormente, se indicarán las reglas, que se aplican para extraer el resto de las componentes principales, es un caso típico de calculo de raíces y vectores característicos de una matriz simétrica. Concretamente se obtendrán las varianzas de los componentes, las correlaciones entre los componentes y las variables originales y las puntuaciones de los componentes.

Antes de realizar la exposición analítica de los puntos que se acaban de enumerar, vamos a hacer un resumen de los resultados mas importantes que se van a obtener.

1. Los componentes principales son combinaciones lineales de las variables originales.
2. Los coeficientes de las combinaciones lineales son los elementos de los vectores característicos asociados a la matriz de covarianzas de las variables originales.

3. La primera componente principal está asociada a la mayor raíz característica de la matriz de covarianzas de las variables originales.
4. La varianza de cada componente es igual a la raíz característica a que va asociada.
5. En el caso de que las variables estén tipificadas, la proporción de la variabilidad total de las variables originales captada por una componente es igual a la raíz característica correspondiente dividida por el número de variables originales.
6. La correlación entre una componente y una variable original se determina con la raíz característica de la componente principal y el correspondiente elemento del vector característico asociado, en el caso de que las variables originales estén tipificadas.

#### 5.1.4 Problema

Se trata de sintetizar los datos contenidos en una tabla de datos  $X$  en un conjunto más pequeño de nuevas variables  $C^1, C^2, \dots$  llamadas componentes principales, manteniendo la información esencial de  $X$ .

Así, en la etapa 1 del algoritmo se encuentra una variable sintética  $C^1$ , la primera componente principal, la cual es combinación lineal de las variables originales  $X^j$ , es decir:

$$C^1 = a_{11}X^1 + \dots + a_{ij}X^j + \dots + a_{1m}X^m,$$

donde  $X^j$  es la columna  $j$  de  $X$ . Esto significa que el valor de  $C^1$  para el individuo  $i$ -ésimo está dado por

$$C_i^1 = a_{11}x_{i1} + \dots + a_{ij}x_{ij} + \dots + a_{1m}x_{im},$$

Generalmente el primer componente principal  $C^1$ , no es suficiente para condensar la información contenida en  $X$ , por lo que se construye una segunda componente principal  $C^2$  luego una tercera  $C^3$  y así sucesivamente.

En general en la etapa  $k$ , se construye la componente principal  $k$ -ésima dada por:

$$C^k = a_{k1}X^1 + \dots + a_{kj}X^j + \dots + a_{km}X^m$$

Matricialmente se tiene que:

donde:

$$a^k = \begin{pmatrix} a_{k1} \\ \vdots \\ a_{kj} \\ \vdots \\ a_{km} \end{pmatrix}$$

- $a^k$  se llama el  $k$ -ésimo factor
- Los factores  $a_{kj}$  constituyen un sistema de pesos para las variables los cuales indican cuanto aporta cada variables a la construcción de la componente.
- Algunos factores  $a_{kj}$  serán negativos y otros serán positivos. El valor de cada peso por si solo no es importante, sino la relación con respecto a los otros pesos. Para evitar un problema de escalas se impone la siguiente

$$\sum_{j=1}^m (a_{kj})^2 = 1$$

### 5.1.5 Cálculo de los factores y de los componentes principales

Como en regresión, el ACP puede ser presentado tanto en el espacio de las variables como en el espacio de los individuos.

#### 5.1.5.1 En el espacio de los individuos

- Se supondrá que las variables están centradas y reducidas.
- $V = \frac{1}{n}X^tX$  es la matriz de varianzas-covarianzas. Como las variables están centradas y reducidas entonces  $V = R$ , la matriz de correlaciones, pues:

$$v_{ij} = \text{cov}(X^i, X^j) = \frac{\text{cov}(X^i, X^j)}{\sigma x^i \sigma x^j} = R(X^i, X^j).$$

- Por lo tanto el espacio de las filas de  $X$  en  $\mathbb{R}^m$  es el espacio de individuos cuyo origen será el centro de la nube de puntos.
- El objetivo del ACP es describir de manera sintética la nube de individuos.

**Teorema 5.1.** En la etapa 1 de un ACP se calcula el eje  $D_1$  que pasa por el origen para el cual la dispersión de la nube de puntos sea máxima, este eje  $D_1$  pasa entonces lo más cerca posible de la nube de puntos, es decir, el promedio de las distancias al cuadrado de los  $n$  puntos de la nube y el eje  $D_1$  es minimal (ver Figura 5.1).

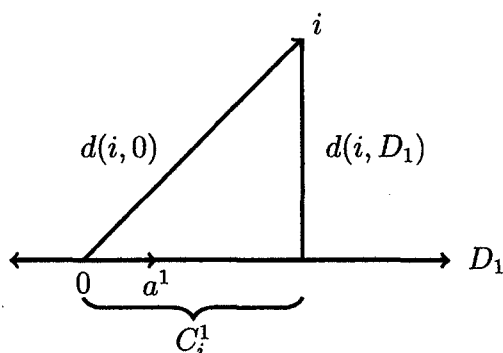


Figura 5.1: Gráfico del Teorema de Pitágoras.

Sea  $a^1$  es vector director normado (norma 1) del eje (recta)  $D_1$  entonces:  $a^1$  es el vector propio asociado al valor propio más grande de la matriz de  $V$  de varianzas-covarianzas.

Antes de probar el teorema necesitamos primero del siguiente lema (el cual vamos a asumir como válido):

**Lema 5.1.** Sean  $A$  y  $B$  dos matrices cuadradas  $m \times m$  simétricas y sea  $A$  una matriz definida positiva. Entonces el vector  $y \in \mathbb{R}^m$  que resuelve el siguiente problema de optimización:

$$\begin{cases} \max y^t B y \\ \text{sujeto a } y^t A y = 1 \end{cases}$$

es el vector propio  $a^1$  de  $A^{-1}B$  de norma 1 asociado al valor propio más grande  $\beta_1$ .

**Nota:** Una matriz  $A$  es definida si para todo  $u \in \mathbb{R}^m$  se tiene que  $u^t A u > 0$ .

**Prueba.** Las coordenadas del individuos  $i$ -esimo son:

$$i = (x_{i1}, \dots, x_{ij}, \dots, x_{im}).$$

Además, se sabe que la proyección del individuo  $i$  sobre el eje  $D_1$  es:

$$P(i, D_1) = \frac{\langle i, a^1 \rangle}{\|a^1\|} a^1$$

donde  $a = (a_1^1, a_2^1, \dots, a_m^1)$  (es vector director de norma 1 del eje  $D_1$ ) Entonces las coordenadas de la proyección del individuo  $i$  sobre el eje  $D_1$  son:

$$\begin{aligned} C_i^1 &= \frac{\langle i, a^1 \rangle}{\|a^1\|} \\ &= (a_1^1 x_{i1} + \dots + a_2^1 x_{ij} + \dots + a_m^1 x_{im}) \\ &= X a^1 \end{aligned}$$

De la Figura 5.1, usando el Teorema de Pitágoras, se deduce que:

$$d^2(i, 0) = (C_i^1)^2 + d^2(i, D_1),$$

por lo que sumando sobre  $i$  a ambos lados y multiplicando por  $1/n$  se tiene que:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d^2(i, 0) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (C_i^1)^2 + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d^2(i, D_1),$$

Como  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d^2(i, 0)$  es independiente del eje  $D_1$  que se escoja, se deduce que es una cantidad constante. Por lo tanto maximizar  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (C_i^1)^2$  es equivalente a minimizar  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d^2(i, D_1)$

Además es claro que:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (C_i^1)^2 = \frac{1}{n} (C_i^1)^t C^1 = \frac{1}{n} (a^1)^t X a^1.$$

De esta manera el problema que queremos resolver es:

$$\begin{cases} \max \frac{1}{n} (a^1)^t X^t X a^1 \\ \text{sujeto a } (a^1)^t a^1 = 1 \text{ (pues la norma de } a^1 \text{ debe ser 1)} \end{cases}$$

Entonces aplicando el lema anterior con  $B = \frac{1}{n}X^tX$  y  $A = I_{m \times m}$  es el vector propio de norma 1 de la matriz  $B = \frac{1}{n}X^tX$  asociado al valor propio más grande.  $\square$

**Teorema 5.2.** En la etapa 2 de un ACP se calcula el eje  $D_2$  que pasa por el origen para el cual la dispersión de la nube de puntos sea máxima, este eje  $D_2$  pasa entonces lo más cerca posible de la nube de puntos, es decir, el promedio de las distancias al cuadrado de los  $n$  puntos de la nube y el eje  $D_2$  es minimal.

Sea  $a^2$  el vector director normado (norma 1) del eje (recta)  $D_2$  el cual será ortogonal al vector  $a^1$  construido en la etapa 1, entonces: Se tiene el siguiente problema de optimización:

$$\begin{cases} \max \frac{1}{n}(a^2)^t X^t X a^2 \\ \text{sujeto a } (a^2)^t a^2 = 1 \\ (a^2)^t a^1 = 0 \end{cases}$$

cuya solución es el vector propio asociado al segundo valor propio más grande de la matriz de  $V$  de varianzas-covarianzas

**Teorema 5.3.** En la etapa  $k$  de un ACP se calcula el eje  $D_k$  que pasa por el origen para el cual la dispersión de la nube de puntos sea máxima, este eje  $D_k$  pasa entonces lo más cerca posible de la nube de puntos, es decir, el promedio de las distancias al cuadrado de los  $n$  puntos de la nube y el eje  $D_k$  es minimal.

Sea  $a^k$  el vector director normado (norma 1) del eje (recta)  $D_k$  el cual será ortogonal al vector  $a^r \forall r, r < k$  construidos en las etapas  $1, 2, \dots, k - 1$  entonces se tiene el siguiente problema de optimización:

$$\max \frac{1}{n}(a^k)^t X^t X a^k$$

### 5.1.5.2 En el espacio de las variables

**Teorema 5.4.** En la etapa 1 de un ACP se calcula una variable sintética (eje)  $C^1$  que resuma lo mejor posible las variables originales, es decir, de tal manera que:

$$\sum_{j=1}^m R^2(C^1, X^j)$$

sea máxima.

Entonces  $C^1$  es el vector propio asociado al valor propio más grande de la matriz  $\frac{1}{n}XX^t$ .

**Prueba.**

$$\text{cov}(C^1, X^j) = \frac{1}{n}(X^j)^t C^1 = \frac{1}{n}(C^1)^t X^j$$

lo cual implica que:

$$\text{cov}^2(C^1, X^j) = \frac{1}{n^2}(C^1)^t X^j (X^j)^t C^1.$$

como  $\text{var}(C^1) = \frac{1}{n}(C^1)^t C^1$  y  $\text{var}(X^j) = 1$ , se tiene que:

$$R^2(C^1, X^j) = \frac{\text{cov}^2(C^1, X^j)}{\text{var}(C^1)\text{var}(X^j)} = \frac{(C^1)^t X^j (X^j)^t C^1}{n(C^1)^t C^1}$$

De modo que maximizar  $\sum_{j=1}^m R^2(C^1, X^j)$  es equivalente a maximizar la siguiente expresión.

$$\frac{(C^1)^t X^j (X^j)^t C^1}{n(C^1)^t C^1}$$

entonces, aplicando el lema anterior,  $C^1$  es el vector propio asociado al valor propio más grande  $\lambda_1$  de la matriz  $\frac{XX^t}{n}$ . □

**Teorema 5.5.** En la etapa  $k$  de un ACP se calcula una variable sintética (eje)  $C^k$  que resume lo mejor posible las variables originales y que no esté correlacionada las primeras  $k-1$  componentes principales (variables sintéticas) ya calculadas, es decir, de tal manera que:

$$\begin{aligned} & \max \sum_{j=1}^m R^2(C^1, X^j) \\ & \text{sujeto } R^2(C^k, C^r) = 0, \text{ para } r = 1, 2, \dots, k-1 \end{aligned}$$

Entonces  $C_k$  es el vector propio de  $\frac{1}{n}XX^t$  asociado al  $k$ -ésimo valor propio más grande.

**Prueba.** Ver [35]. □

**Teorema 5.6.** 1.  $\frac{1}{n}XX^t$  y  $\frac{1}{n}X^tX$  tienen los mismos valores propios  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ .



2. Además el rango de ambas matrices es  $n-m$  y los últimos  $n-m$  valores propios de  $\frac{1}{n}XX^t$  son nulos.

**Prueba.** Ver [35]. □

**Teorema 5.7.** La suma de los  $m$  valores propios de  $\frac{1}{n}X^tX$  es igual al número de columnas  $m$  de la matriz  $X$ , es decir:

$$\sum_{j=1}^m \lambda_k = m.$$

**Prueba.** Ver [35]. □

### 5.1.6 Enfoque descriptivo

Se desea encontrar un subespacio de dimensión menor que  $p$  tal que al proyectar sobre el los puntos conserven su estructura con la menor distorsión posible. Veamos como convertir esta noción intuitiva en un criterio matemático operativo. Consideremos primero un subespacio de dimensión uno, una recta. Se desea que las proyecciones de los puntos sobre esta recta mantengan, lo más posible, sus posiciones relativas. Para concretar, consideremos el caso de dos dimensiones ( $p = 2$ ).

La Figura 5.2, es el ejemplo de la recta que minimiza las distancias ortogonales de los puntos a ella. Indica el diagrama de dispersión y una recta que, intuitivamente, proporciona un buen resumen de los datos, ya que la recta pasa cerca de todos los puntos y las distancias entre ellos se mantienen aproximadamente en su proyección sobre la recta. La condición de que la recta pase cerca de la mayoría de los puntos puede concretarse exigiendo que las distancias entre los puntos originales y sus proyecciones sobre la recta sean lo mas pequeñas posibles. En consecuencia, si consideramos un punto  $x_i$  y una dirección  $a_1 = a_{11}, \dots, a'_{1p}$ , definida por un vector  $a_1$  de norma unidad, la proyección del punto  $x_i$  sobre esta dirección es el escalar:

$$z_i = a_{11}x_{i1} + \dots + a_{1p}x_{ip} = a'_1x_i$$

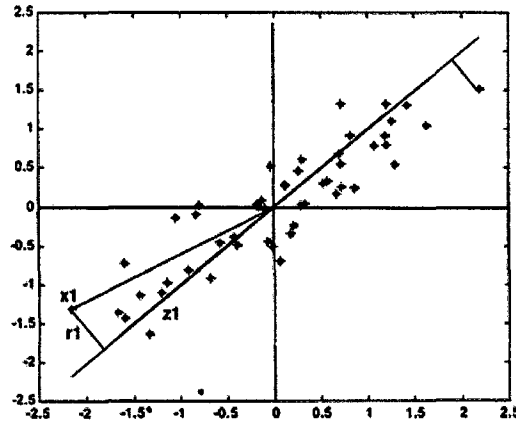


Figura 5.2: Identificación de los ejes principales.

y el vector que representa esta proyección será  $z_i a_1$ . Llamando  $r_i$  a la distancia entre el punto  $x_i$ , y su proyección sobre la dirección  $a_1$ , este criterio implica:

$$\text{Minimizar: } \sum_{i=1}^n r_i^2 = \sum_{i=1}^n |x_i - z_i z_i|^2$$

donde el valor absoluto de  $u$  es la norma euclídea o modulo del vector  $u$ .

La Figura 5.2 muestra que al proyectar cada punto sobre la recta se forma un triángulo rectángulo donde la hipotenusa es la distancia del punto al origen,  $(x_i' x_i)^{1/2}$ , y los catetos la proyección del punto sobre la recta ( $z_i$ ) y la distancia entre el punto y su proyección  $r_i$ . Por el teorema de Pitágoras, podemos escribir:

$$x_i' x_i = z_i^2 + r_i^2$$

y sumando esta expresión para todos los puntos, se obtiene:

$$\sum_{i=1}^n x_i' x_i = \sum_{i=1}^n z_i^2 + \sum_{i=1}^n r_i^2$$

Como el primer miembro es constante, minimizar  $\sum_{i=1}^n r_i^2$ , la suma de las distancias a la recta de todos los puntos, es equivalente a maximizar  $\sum_{i=1}^n z_i^2$  la suma al cuadrado

de los valores de las proyecciones. Como las proyecciones  $z_i$  son, por variables de media cero, maximizar la suma de sus cuadrados equivale a maximizar su varianza, y obtenemos el criterio de encontrar la dirección de proyección que maximice la varianza de los datos proyectados. Este resultado es intuitivo: la recta de la Figura 5.2 parece adecuada porque conserva lo mas posible la variabilidad original de los puntos.

El lector puede convencerse considerando una dirección de proyección perpendicular a la de la recta en esta figura: los puntos tendrían muy poca variabilidad y perderíamos la información sobre sus distancias en el espacio. Si en lugar de buscar la dirección que pasa cerca de los puntos buscamos la dirección tal que los puntos proyectados sobre ella conserven lo más posible sus distancias relativas llegamos al mismo criterio.

En efecto, si llamamos  $d_{ij}^2 = x_i'x_j$ , a los cuadrados de las distancias originales entre los puntos y  $\bar{d}_{ij}^2 = (z_i - z_j)^2$  a las distancias entre los puntos proyectados sobre una recta, deseamos que sea mínima.  $D = \sum_i \sum_j (d_{ij}^2 - \bar{d}_{ij}^2)$  Como la suma de las distancias originales es fija, minimizar D requiere maximizar  $\sum_i \sum_j \bar{d}_{ij}^2$

### 5.1.7 Enfoque Estadístico

Representar puntos  $p$  dimensionales con la mínima pérdida de información en un espacio de dimensión uno es equivalente a sustituir las  $p$  variables originales por una nueva variable  $z_i$  que resuma óptimamente la información. Esto supone que la nueva variable debe tener globalmente máxima correlación con las originales o, en otros términos, debe permitir prever las variables originales con la máxima precisión. Esto no será posible si la nueva variable toma un valor semejante en todos los elementos.

Volviendo a la Figura 5.2 se observa que la variable escalar obtenida al proyectar los puntos sobre la recta sirve para prever bien el conjunto de los datos. La recta indicada en la figura no es la línea de regresión de ninguna de las variables con respecto a la otra, que se obtienen minimizando las distancias verticales u horizontales, sino la que minimiza las distancias ortogonales o entre los puntos y la recta y se encuentra entre ambas rectas de regresión.

Encuentra entre ambas rectas de regresión. Este enfoque puede extenderse para obtener el mejor subespacio resumen de los datos de dimensión 2. Para ello, calcularemos el plano que mejor aproxima a los puntos. El problema se reduce a encontrar una nueva dirección definida por un vector unitario  $a_2$  que, sin pérdida de generalidad, puede tomarse ortogonal a  $a_1$ , y que verifique la condición de que la proyección de un punto sobre este eje maximice las distancias entre los puntos proyectados. Estadísticamente esto equivale a encontrar una segunda variable  $z_2$ , incorrelacionada con la anterior, y que tenga varianza máxima.

En general, la componente  $z_r$  ( $r < p$ ) tendrá varianza máxima entre todas las combinaciones lineales de las  $p$  variables originales, con la condición de estar incorrelacionada con las previamente obtenidas.

### **5.1.8 Fases del análisis de Componentes Principales**

Un análisis de componentes principales consta de las siguientes fases:

- Elección de los componentes principales.
- Representaciones gráficas.
- Calculo de las puntuaciones factoriales.

### **5.1.9 Elección de los componentes principales**

La elección de los ejes factoriales se realiza de tal manera que el primer factor recoja la máxima proporción posible de la variabilidad de la nube de puntos original. La variabilidad de la proyección de la nube de puntos sobre el eje definido por el factor debe ser la máxima posible.

El segundo factor debe recoger la máxima variabilidad posible no recogida por el primer factor y así sucesivamente hasta la elección de los  $K$  factores. De los  $K$  factores posibles, elegiremos aquellos que recojan el porcentaje de variabilidad que estimemos suficiente. Los factores elegidos son los que llamamos componentes principales. Como

ya se ha planteado, hay tantos factores como variables; en ese sentido es criterio nuestro el elegir el número de componentes suficiente para el mínimo indispensable de la información original. Los criterios de selección pueden ser diversos, a continuación se detallan algunos:

1. Un primer método consiste en elegir el componente que explica mas variabilidad; luego al que le sigue (en orden de explicación de variabilidades) de tal manera que se puede conseguir el porcentaje de variabilidad que se haya previsto. Para nuestro caso: tenemos una matriz de datos con 10 variables, nos podemos plantear extraer el número de componentes necesarios de tal forma que estos expliquen al menos el 70% de la variabilidad que aporta la matriz de datos.
2. Un segundo método consiste en extraer un número determinado de componentes, independientemente del porcentaje de variabilidad que estos contengan. Siguiendo con nuestro caso tenemos 10 variables y podemos extraer los 2 componentes que expliquen una mayor variabilidad.
3. Un tercer método consiste en extraer todos los componentes que expliquen, cada uno de ellos, al menos un porcentaje determinado de la información. Es decir podemos seleccionar todos los factores que expliquen, cada uno de ellos, un 5% o más de la variabilidad recogida en la matriz de datos.
4. Un cuarto método consiste en extraer los factores mayores que 1, cabe señalar que esta es la técnica que realiza por defecto el asistente estadístico. Importante saber que la única forma de obtener el 100% de la información, es extrayendo tantos componentes como variables hay en el fichero original. Una vez seleccionados los componentes principales estos y las variables se representan en forma de matriz. A esta matriz se le llama matriz factorial.

### **5.1.10 Representación Gráfica**

Ahora ya sabemos que el fin de un análisis de componentes principales es conseguir reducir las variables explicativas, obtener un número de componentes menor que el de variables y obviamente dar una interpretación práctica de los mismos. Entonces, a fin de conseguir una buena interpretación de los factores, una de las fases fundamentales de este análisis es la representación gráfica. fig.7.1 y fig.7.4

## **5.2 Validación y confiabilidad**

### **5.2.1 Aspectos generales**

Es de conocimiento que a la hora de recabar información sobre diversos aspectos de los individuos, se usa instrumentos tales como escalas, tests, listados, etc.; conformando una serie de ítems o enunciados que deben estar relacionados entre sí y cuyas puntuaciones individuales previamente sumadas nos dan el valor global de los individuos en el citado instrumento. En ese sentido podemos citar algunos tipos de instrumento que se usan con frecuencia en trabajos de investigación:

- Escalas de diferentes tipos para medir comportamientos de los individuos hacia diversas situaciones.
- Encuestas para diagnosticar la estrategia que toman las empresas, el factor humano.
- Tests para determinar o diagnosticar conocimientos, aptitudes, rasgos de personalidad.

Entonces nos hacemos la siguiente pregunta ¿hasta que punto el instrumento que nos permite hacer estas evaluaciones es válido y confiable? Para dar respuesta a esta pregunta es necesario, en primer lugar, conocer que significa calidad de un instrumento.

### 5.2.2 Calidad del instrumento - validez y confiabilidad

En cualquier tipo de investigación, la capacidad que tenga un instrumento de recolectar datos depende de dos atributos muy importantes como son: la validez y la confiabilidad. Si esta herramienta de recolección de información es defectuosa, nos llevará a resultados sesgados y a conclusiones equivocadas.

Determinar la confiabilidad y la validez de los cuestionarios utilizados es muy importante a la hora de analizar los datos. Nos limitaremos a enumerar los procedimientos más usuales y a señalar la conveniencia de utilizar algunos de ellos para conocer cuál es la condición con la que debemos analizar los datos, pues conviene recordar que aunque las escalas psicométricas se consideran instrumentos confiables y válidos, no son instrumentos estandarizados en la mayoría de los casos, dado que los construimos nosotros mismos.

Se dice que un instrumento tiene validez cuando realmente es capaz de medir aquello para lo cual ha sido concebido. En términos estadísticos la validez se define como la proporción de la varianza verdadera que es relevante para los fines del examen. Con el término relevante nos referimos a lo que es atribuible a la variable, características o dimensión que mide la prueba. En este sentido, generalmente la validez de un test se define ya sea por medio de la relación entre sus puntuaciones con alguna medida de criterio externo, o bien la extensión con la que la prueba mide un rasgo subyacente específico hipotético o “constructo”. En términos psicométricos, la validez es un concepto que ha pasado por un largo proceso evolutivo, desde aquella posición que sostenía que “un test es válido para aquello con lo que correlaciona”.

En los diferentes trabajos de investigación se considera que la validez se agrupa en tres grandes categorías:

**Validez de contenido:** Grado en el cual los ítems son una muestra representativa de la variable que se desea medir. Se refiere al grado en que un instrumento refleja un dominio específico del contenido de lo que se mide. Para lograr una buena evidencia del contenido debe tenerse en cuenta:

- Definición conceptual
- Definición operacional
- Pertinencia
- Exhaustividad
- Plan de Prueba
- Evaluación o juicio de un experto

**Validez de criterio:** Establece la validez de un instrumento de medición comparándola con algún criterio externo. Este criterio es un estándar con el que se juzga la validez del instrumento. Entre mas se relacionen los resultados del instrumento de medición con el criterio, la validez del criterio será mayor. Si el criterio se fija en el presente, se habla de validez concurrente; si el criterio se ubica en el futuro, se habla de validez predictiva; si el criterio se fija en el pasado, equivale a la validez posdictiva.

**Validez de constructo:** Se refiere al grado en que una medición se relaciona consistentemente con otras mediciones de acuerdo con hipótesis derivadas teóricamente y que conciernen a los conceptos (constructos) que están siendo medidos.

La validez del constructo incluye tres etapas:

- Se establece y especifica la relación teórica entre los conceptos.
- Se correlacionan ambos conceptos y se analiza cuidadosamente la correlación.
- Se interpreta la evidencia empírica de acuerdo con el nivel en que clarifica la validez del constructo de una medición en particular.

Entre mayor evidencia de validez de contenido, criterio y de constructo que tenga un instrumento de medición, este se acerca mas a representar la variable o variables que pretende medir.



**Definición 5.2** (Constructo). Es un concepto que forma parte de las teorías que intentan explicar la conducta humana: inteligencia, creatividad, emotividad, empatía. Un constructo es un concepto que requiere haber sido definido o adoptado de manera deliberada y consciente para un propósito científico.

se dice que un instrumento es confiable cuando al aplicarlo al menos dos veces al mismo grupo de individuos, se obtienen resultados similares. Cabe señalar que existen diversas técnicas para evaluar la confiabilidad de un instrumento de medición, todos utilizan fórmulas que generan un coeficiente de confiabilidad. Estos coeficientes varían entre cero y uno, lo cual implica que un coeficiente cero indica confiabilidad nula y coeficiente uno indica confiabilidad total, esto conlleva a afirmar que si el coeficiente se aproxima a cero hay mayor error en la medición. Dentro de los factores que pueden afectar la confiabilidad y la validez se encuentran:

- Improvisación
- Uso de instrumentos desarrollados en el extranjero que no han sido validados.
- Instrumento inadecuado para las personas a las que se le aplica.
- Condiciones en que se aplica el instrumento.

### 5.3 Análisis de componentes principales (ACP)

En un análisis de componentes principales se buscan, el punto de  $R^p$ , más “cercano” a la nube  $N$  de puntos, es decir el que pueda considerarse el mejor representante. Para medir las proximidades, se utilizará la noción de inercia.

También se busca la recta de  $R^p$ , mas cercana a la nube  $N$ , la nube  $N$  está incluida en esta recta.

Además el plano que es el subespacio de dimensión menor que, es decir de menor dimensión, que den una imagen lo más fiel posible de la nube de puntos.

Los valores propios te dicen cuanta inercia recoge cada eje factorial, así el eje 1 recoge el  $x\%$  de inercia que te da el primer valor propio.

Las componentes principales son el vector de coordenadas de los individuos, es decir las proyecciones de los individuos sobre cada eje factorial.

Lo que hace el ACP es una rotación de ejes buscando la mayor explicación de la inercia en menos ejes. Así los anteriores ejes se rotan hasta los vectores propios que dan la máxima explicación de inercia.

### 5.3.1 Datos

Se cuenta con una matriz  $X$  de  $n$  filas y  $p$  columnas, que provee para cada uno de los  $n$  individuos de una población las medidas de  $p$  variables numéricas.

Los elementos de la fila  $i$  y de la columna  $j$  de  $X$ ; es el valor de la variable  $j$  Para el individuo  $i$ .

Se incrementa el espacio vectorial  $R^p$  de la base  $(e_1, \dots, e_j, \dots, e_p)$  y el espacio vectorial  $R^p$  de la base  $(e'_1, \dots, e'_j, \dots, e'_n)$  al individuo  $i$  y a la variable  $j$  se asocian, respectivamente:

Los vectores

$$X_i = \sum_{j=1}^p x_i^j e_j$$

y

$$y^j = \sum_{i=1}^n x_i^j e'_i$$

representados por las matrices columnas  $X_i \in R^p$  y  $X^j \in R^n$  definidas por:

$$x_i^T = (x_i^1 \cdots x_i^j \cdots x_i^p)$$

y

$$(x_j^T) = (x_1^j \cdots x_i^j \cdots x_n^j)$$

Los puntos extremos de estos vectores (notados de la misma manera que los vectores), una vez fijado el origen en cada uno de los puntos se pueden construir a partir de la tabla  $X$  dos nubes de puntos:

- La nube de puntos individuos situados dentro del espacio  $R^p$ , con  $p$  dimensiones, dotado de un producto escalar  $M$ .
- La nube de puntos variables situada en el espacio  $R^n$ , con  $n$  dimensiones, dotado de un producto escalar  $D_n$ .

### 5.3.2 Circulo de correlaciones

Por otra parte, el coeficiente de correlación entre dos variables, donde al menos una está bien representada, se puede medir directamente por el coseno del ángulo formado por las proyecciones de las variables en el plano.

En efecto, se obtiene una estimación gráfica de este coseno midiendo en el círculo de correlaciones la abscisa de la proyección de la variable menos bien representada sobre la mejor representada.

Observación: el efecto “talla” Cuando todas las variables  $x_j$  están correlacionadas positivamente entre ellas, la primera componente principal define el llamado efecto “talla”. Así, teniendo la matriz (simétrica) de correlaciones, en este caso, todos sus elementos positivos, se puede mostrar (teorema de Frobenius) que un vector propio asociado al mayor valor propio tiene todas sus componentes del mismo signo (positivo por ejm). Entonces la primera componente principal está correlacionada (positivamente, digamos), con todas las variables y individuos están ordenados sobre el eje  $u_1$  por valores crecientes para el conjunto de variables.

# Capítulo 6

## Metódos de Clasificación

El objetivo de este capítulo es de dividir en subconjuntos (clases) un conjunto dado. Aplicar una clasificación a un conjunto equivale a definir en ese conjunto las clases entre las cuales se distribuyen los elementos del conjunto.

El proceso general para el desarrollo de una clasificación jerárquica ascendente se compone de varios pasos o momentos, cada uno de los cuales implica opciones, desde el cual depende el resultado final.

Las principales etapas de un proceso de clasificación automática son:

1. Identificación de la matriz de datos  $X$
2. Elección de la medida de asociación a usar para comparar los elementos a clasificar.
3. La elección del método o algoritmo de clasificación y el método de agregación/subdivisión.
4. La elección de un punto de corte de la jerarquía con el fin de obtener una partición.
5. Evaluación de los resultados a través del estudio de la similitud entre los grupos de objetos obtenidos y la interpretación de sus características.

A este respecto es de señalar que la elección de la medida de asociación, la elección del algoritmo de clasificación, la elección del criterio de la agregación depende de la naturaleza de los datos y los fines específicos de la investigación. Por lo tanto, la optimalidad de la solución no sólo depende de las condiciones iniciales, sino también de elegir la mejor estrategia (compatibilidad entre un tipo de datos, la medición de distancia, criterio de clasificación y algoritmo).

Entre las diferentes técnicas de clasificación automática, en desarrollo de este capítulo sólo se tratará los principios básicos de la técnica de clasificación jerárquica ascendente, utilizando algoritmos de agregación básica y eligiendo como la política la agregación de Ward.

## 6.1 Las mediciones de la diversidad

La literatura propone muchos tipos de índices (o medidas) de las diversas que existen, para adaptarse a diferentes situaciones. La elección de este índice, generalmente obtenido de operaciones que para medir la asociación entre dos unidades que involucran el conjunto de valores de todos los caracteres, depende de la naturaleza de los datos y los objetivos específicos de la investigación. Por lo tanto, ahora figuran las definiciones de los índices más importantes de la diversidad entre los objetos.

Sea  $I$  un conjunto de  $n$  elementos y la aplicación de los  $s$  valores reales no negativos tales que:

$$s : I \times I \rightarrow \mathbb{R}^+$$

Se define la medida  $s$  similitud que satisface las siguientes condiciones:

1.  $s(i, j) = s(j, i) \forall i, j \in I$  (propiedades de la  $I$  en simétrica).
2.  $s(i, i) = s(j, j) = s > s(i, j) \forall i, j \in I$  con  $i \neq j$ .

Un índice de similitud es simétrica y por lo tanto es máximo cuando la medición de la similitud de una unidad es para sí misma. A menudo, el valor máximo es 1, cuando

hay sucede o no, siempre se puede atribuir a un índice  $s$  entre 0 y 1:

$$s'(i, j) = \frac{s(i, i)}{s}.$$

Se define la disimilitud como la aplicación

$$d : I \times I \rightarrow \mathbb{R}^+$$

para los que existen las siguientes propiedades

3.  $d(i, j) \geq 0 \quad \forall i, j \in I,$
4.  $d(i, j) = d(j, i) \quad \forall i, j \in I$  (propiedad simétrica),
5.  $i = j \Rightarrow d(i, j) = 0 \quad \forall i, j \in I.$

Es necesario que los índices de disimilitud que se usen sean no negativo, en el sistema métrico y ultramétrica (deriva de la desigualdad triangular). Un índice de disimilitud  $\delta$  puede ser nulo sin que la relación entre los dos conjuntos sean coincidentes.

Los índices de disimilitud para el cual la siguiente relación

$$\delta(i, j) = 0 \Leftrightarrow i = j$$

se llama simétrica o índices de distancia.

Un índice inmediatamente que verifica la desigualdad triangular es, obviamente, una de distancia. Por lo tanto, la disimilitud se define:

La distancia (o métrica) satisface las siguientes propiedades:

6.  $d(i, j) = 0 \Leftrightarrow i = j \quad \forall i, j \in I;$
7.  $d(i, j) = d(j, i) \quad \forall i, j$  (propiedad simétrica);
8.  $d(i, j) \leq d(i, k) + d(k, j) \quad \forall i, j, k$  (desigualdad triangular);

**Observación 6.1.** Semimétrica o índice de distancia, verifica la propiedad 6, pero no la 8.

La distancia entre dos puntos satisface las siguientes propiedades:

1. Es un número que nunca puede ser negativo, ya que si  $i = j$  (para 6) que tiene  $d(i, j) = 0$ , entonces también la propiedad 7 es simétrica y por la propiedad triangular (8) tenemos:

$$0 = d(i, j) \leq d(i, h) + d(h, j) = 2d(i, h) \rightarrow d(i, h) \geq 0 \quad \forall i, h \in E$$

2. No depende del orden en el que se toma de los dos puntos.
3. Es cero si los dos puntos coinciden, no es cero si se separan los dos puntos.
4. La distancia entre dos puntos es menor o igual a la suma de las distancias entre cada uno de estos y un tercer punto.

A menudo la palabra métrica se utiliza como sinónimo de distancia, un espacio en el que se define una distancia se dice espacio métrico. En el caso de que no se verifica la propiedad triangular se dice espacio semimétrico.

Definimos distancia ultramétrica (o simplemente ultra-métrica) en la medida que  $d$  verifica las siguientes propiedades:

9.  $d(i, j) = 0 \Leftrightarrow i = j \quad \forall i, j \in I$ ;
10.  $d(i, j) = d(j, i) \forall i, j \in I$  (propiedad simétrica);
11.  $d(i, j) \leq \max d(i, k), d(k, j) \quad \forall i, j, k \in I$ .

La distancia ultramétrica es no negativa si  $d(i, j)$  es menor que el más grande de  $d(i, h)$  y  $d(h, j)$  también es menor de la suma. No se aplica la viceversa. por lo tanto, la condición 11. es condición más fuerte 8.

### 6.1.1 Medidas de diversidad

Se da una partición en  $k$  grupos de un conjunto de  $n$  unidades. Sea  $p$  el número de caracteres detectados en cada uno de ellos, una unidad de  $x_{ij}$  es el elemento genérico

de la matriz de datos  $X$ .  $n_k$  es el grupo  $k$ -ésimo,  $U_{kj}$  la media de la unidad para el grupo  $k$

$$U_{kj} = \frac{1}{n_k} \sum_i^{n_k} x_j$$

El centro de gravedad de dicho grupo tiene por lo tanto, las coordenadas  $(U_{k1}, U_{k2}, \dots, U_{km})$ . Estas anotaciones permiten formalizar las medidas para los datos cuantitativos.

Las diversidades de datos cuantitativo calculados pueden ser considerados como una medida de dos grupos  $(p, q)$  simplemente tratando los centros de gravedad de los grupos  $p$  y  $q$  como dos entidades que representan los mismos grupos.

Una de los motivos es la base del tratamiento de la similaridad entre los núcleos o grupos (en lugar de entre las entidades primarias) viene del hecho, como veremos más adelante, el métodos de clasificación procede atravez de pasos o iteraciones, por lo tanto, es preferible expresar generalmente la medida de similaridad/disimilaridad para cualquiera de estos pasos.

Se discuten así, por ejemplo, de disimilitud de un punto de un conjunto o la distancia entre dos conjuntos. Por lo tanto, es conveniente para el tratamiento de las medidas de acción asociado entre los núcleos, en lugar de entre los elementos, donde los núcleos puede ser cualquiera de los grupos de ambos elementos aislados. En el caso en que  $k$  es el grupo formado por un solo elemento, y tenemos:

$$U_{kj} = x_{ij}$$

Al contrario, los datos de tipo cualitativo, colocados en forma binaria, es posible diseñar una tabla tetracórica sido posible (modos a) realizada por dos entidades genéricas a  $e_i$  y  $e_j$  vectores  $x_i$  y  $x_j$ , que se distribuyen a la cantidad de pares de modos de carácter concordantes o discordantes de  $p$  detectados en ellos, de la siguiente manera:



$$\begin{array}{cc}
 & e_j \\
 & 1 \quad 0 \\
 e_i \quad 1 & \begin{array}{|c|c|} \hline a & b \\ \hline \end{array} \\
 & 0 \quad \begin{array}{|c|c|} \hline c & d \\ \hline \end{array}
 \end{array}$$

donde  $A$  puede expresarse como productos operando entre los valores coincidentes:

$$a = x_i^l x_j.$$

operando  $b+c$  valores en conflicto, que en el cálculo de la diferencia son el único distinto de cero:

$$b + c = \|x_i - x_j\|^2 = \sum_{i=1}^p \|x_{il} - x_{jl}\|^2 = (x_i - x_j)^l I(x)_i - x(j)$$

$d$  se obtiene de ejecución:  $d = p - a - (b + c)$

Dicho esto, examinaremos ahora algunas de las medidas de asociación más frecuentes que ofrecen para cada expresión entre los individuos y para los datos cuantitativos y datos cualitativos.

### la distancia euclídea

Dado un producto escalar  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  y la norma de un vector  $x_i$  define como:

$$\|x_i\| = \sqrt{\langle x_i, x_i \rangle},$$

Se llama Euclidiana, en general, cualquier distancia que se puede expresar a través de un producto escalar (forma bilineal simétrica definida positiva), y luego, en el caso de la distancia euclidiana clásica en la que se supone que el  $M$  métrica a ser unitario, se tiene:

$$d(x_i, x'_i) = \|x_i - x'_i\| = \sqrt{\langle x_i, x'_i \rangle}$$

En el caso cuantitativo:

$$d_{pq}^2 = \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p (u_{pj} - u_{qj})^2$$

Mientras que los caracteres cualitativo:

$$d_{pq}^2 = \frac{b+c}{p}$$

Ejemplos bien conocidos de algunas distancias euclidianas son:

- La distancia de Mahalanobis, para la que  $Q = V^{-1}$ , es decir, la inversa de la matriz de varianzas y covarianzas. Se utiliza esta distancia cuando toms en cuenta la correlación entre las variables cuantitativas;
- Distancia de la chi-cuadrado, muy útil para los datos cualitativos expresa en tablas booleanas o de frecuencia. En el caso que los datos se expresen en una tabla de contingencia, la distancia de chi-cuadrado entre los dos elementos se define:

$$d^2(e_i, e_j) = \sum_{I=1}^p \frac{x}{x_I} \left( \frac{x_{jI}}{x_j} - \frac{x_{iI}}{x_i} \right)$$

Dónde, se recuerda:  $e_i$  es el elemento genérico del conjunto  $I$ ,  $x_{il}$  es la frecuencia absoluta a la que se asume en correspondencia el  $l$ -ésimo elemento de  $J$ ,  $x_i, x_l, x$  son, respectivamente, la línea marginal, que columna y el total de la tabla. En este caso,  $Q = xD^{-1}$  donde  $D = \text{diag}(\dots, x_i, \dots)$ .

### Índice de similitud

Más índices de diversidad son medidas de similitud, sin embargo, por el bien de la brevedad no se enumeran aquí

### Índice de la Asociación

En cuanto al conjunto  $J$  de caracteres, entre los índices de asociación más conocidas en el caso cualitativo, tiene que recordar al menos el  $t$  chi-cuadrado, que se utiliza en el capítulo cuatro, en el manejo de los análisis de correspondencia (simple y múltiple), la T de Tschuprow y C de Cramer.

Las medidas anteriores de diversidad se van agregando al índice de Ward.

## 6.2 Algoritmos de agregación

Entre los muchos algoritmos de clasificación jerárquica ascendente disponibles, se presenta aquí los que más nos interesan.

Considere los  $n$  elementos, que se caracteriza por  $p$  características, cuantitativos o cualitativos, perteneciente al grupo  $I$  equipados con una medida de la diversidad: es, por ejemplo, una medida de la disimilitud (por el contrario se trata de una similitud que ocurrirá consecuentemente). Por supuesto, construir, una jerarquía.

Si denotamos por  $I_k$  el grupo genérico (o clase) de elemento, a continuación, el subconjunto de  $I$ , que define el elemento genérico de la partición, una tipología, como un conjunto de grupos, o puede ser expresada en símbolos:

$$\{I_1, I_2, I_3, \dots, I_k\}.$$

Supongamos que se ha elegido un buen criterio de agregación. El principio de acción de un algoritmo de agregación es la siguiente. Se parte de una partición donde cada objeto representa un grupo y la construcción de una primera matriz de las relaciones entre estos  $n$  grupos. A continuación, se unen a los grupos que eligen el criterio elegido, en un nuevo grupo, que se denota por  $h$ . En este punto se recalcula la asociación entre cada elemento  $r$  y el grupo  $h$  que se acaba de crear, la agregación (una vez más) de los grupos de la mayoría de los grupos vecinos y sigue así. El procedimiento continúa hasta formar un único grupo que contiene todos los  $n$  objetos de salida.

Los algoritmos agregados más utilizado, se describe en más detalle en la sección 5.3, se puede describir en términos de una relación de recurrencia en la que el disimilaridad en entre un grupo de  $h = p \cup q$  acaba de crear y cualquier otro grupo  $r$  se define por:

$$d(h, r) = \alpha_p d(p, r) + \alpha_q d(q, r) + \beta d(p, q) + \gamma |d(p, r) - d(q, r)|.$$

Inicialmente,  $d(p, q) = d_{pq}$ . Luego si ambos algoritmos están agregados entonces se cumple

$$d(h, r) = d_{hr}$$

De lo contrario.

En la Tabla 5.2.1 figuran los valores de los parámetros  $a_p, a_q, \beta$  y  $\gamma$  que dependen de los diferentes criterios de agregación comúnmente utilizados

	$a_p$	$a_q$	$\beta$	$\gamma$
conexión singular	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$
conexión completa	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
distancia media	$n_p/(n_p + n_q)$	$n_q/(n_p + n_q)$	$ap aq$	0
Ward	$(n_p + n_r)/n^*$	$(n_q + n_p)/n^*$	$n_r/n^*$	0

Tabla 6.1: Los coeficientes de la fórmula general (1) de Lance y Williams donde  $n_p, n_q$  y  $n_r$  representan al número en su núcleo y  $n^* = n_p + n_q + n_r$ .

La familia  $H$  se obtiene de agregar los elementos en grupos y de una jerarquía. Tiene la propiedad de contener grupos  $h$  y  $h'$  disjuntos ( $h \cap h' = \emptyset$ ) o grupos incluidos entre ellos ( $h \subset h'$ ). Después de la operación del algoritmo, también grupos disjuntos son entonces estrictamente incluidos en un grupo siguiente.

Un gráfico de diagrama de árbol, ó dendrograma, se visualiza de segundo orden aumentando el nivel de aglomeración de los núcleos. Este último, se llama el índice de la jerarquía.

Si tenemos en cuenta los  $n$  individuos que se clasifican como elementos inicial de la jerarquía, cada aglomeración produce un núcleo que serán numeradas en secuencia ( $n + 1, n + 2, \dots$ ). Este núcleo visualiza el eje por medio de un segmento horizontal (o un punto) que combina los dos elementos que lo generan. Este segmento se coloca en el dendrograma a un valor de índice ordenado igual a la distancia a la que se fusiona.

El dendrograma muestra por lo tanto, todo el proceso de agregación, es decir, una jerarquía de particiones. Una única partición se obtiene cortando el dendrograma a un nivel dado de la jerarquía de distancia. La elección de los grupos de obtener los resultados finales aquí en el problema: ¿en qué nivel de cortar el árbol?

En general, tiene un interés para que los grupos de máxima homogeneidad, y luego

necesidad de buscar el menor número de grupos con homogeneidad máxima (es obvio que el aumento del número de grupos crece homogeneidad en su interior). Esto es equivalente a cortar las raíces (es decir, inferior) de la serie de la mayoría de las ramas largas (es decir, la mayor parte del largo vertical), en los que tiene el mayor salto en la varianza interna que pasa por una serie de grupos que inmediatamente después.

### 6.3 Criterios para la agregación

Antes de que realmente se ejecute el algoritmo para clasificar la jerarquía, es necesario establecer una norma para definir el principio de la agregación de los objetos.

Al principio, se supone que el conjunto de  $n$  objetos para ser clasificados está equipado con una medida de similaridad o disimilaridad donde el índice de la jerarquía proporciona una ultramétrica en el mismo conjunto.

Una vez que haya determinado un grupo de objetos, debe preguntarse sobre qué base se puede calcular la distancia entre un individuo y un grupo, posteriormente, una distancia entre los dos grupos. Para este propósito, debemos definir una estrategia de agrupación de elementos establecer las reglas para el cálculo de distancias entre grupos disjuntos de los individuos, llamados criterios de agregación. Esta distancia entre agrupados se podrá, en general se calcular directamente a partir de las distancias de la diferentes elementos que intervienen en la reagrupación.

Por ejemplo, si  $x, y$  y  $z$  son tres objetos, y si los objetos  $x$  e  $y$  se reagrupan en un solo elemento  $h$ , se puede definir la distancia de esta  $z$  mediante la agrupación como la mayoría de pequeña distancia entre los diferentes elementos de  $h$  y  $z$ :

$$d(h, z) = \min(d(x, z), d(y, z)).$$

En concreto, en la matriz inicial de las distancias, las dos líneas correspondientes a los elementos  $x$  e  $y$ , hay una nueva línea de  $h$  que tiene como componentes los valores más pequeñas distancias entre el  $x$  e  $y$  tener con todos los otros elementos de  $I$ , continuar de la misma manera a segunda fusión hasta el agotamiento de la matriz.

Esta opción se conoce como el criterio de la unión simple (un solo vínculo) o saltar como mínimo, o incluso la mayor parte del vecino cercano.

De manera similar, es posible considerar la distancia máxima de los diferentes elementos de  $h$  de  $z$ :

$$d(h, z) = \max(d(x, z), d(y, z)).$$

Esta elección es, sin embargo, conocido como el criterio de que el diámetro o la unión completa (o saltar), o la búsqueda del vecino más distante. Otra regla simple es de uso frecuente, es el de la distancia media, para dos objetos  $x$  e  $y$  agrupados en  $h$ , se tiene:

$$d(h, z) = (d(x, z)d(y, z))/2.$$

En general, si  $x$  e  $y$  son dos subconjuntos disjuntos del conjunto de objetos que tienen, respectivamente,  $n_x$  y  $n_y$  elementos, entonces  $h$  es un subconjunto de tamaño  $n_x + n_y$  por elementos a definir:

$$d(h, z) = (n_x d(x, z) + n_y d(y, z))/(n_x + n_y).$$

La técnica de la clasificación ascendente jerárquica, por lo tanto, puede presentarse de acuerdo con diversos criterios de agregación. Entre estos últimos interesa especialmente en la forma de agregación de acuerdo con la variación, o el método de Ward.

### 6.3.1 Índice de Ward

Se define índice de Ward como una medida de disimilitud entre los dos grupos que corresponde al aumento de la desviación interna que se produce por fusión de grupos  $p$  y  $q$  en un nuevo grupo, es decir,

$$I_{pq} = W_{p+q} - W_p - W_q.$$

Habiendo indicado con  $W_p$  la desviación del interior del núcleo

$$W_p = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{n_p} \sum_{j=1}^m (x_{ij} - u_{pj})^2$$

y  $W_{p+q}$  desviación dentro del nuevo núcleo obtenido tras la fusión de p y q. Por lo que:

$$I_{pq} = \frac{n_p n_q}{n_p + n_q} d_{pq}^2$$

Siendo  $d_{pq}^2$  el cuadrado de la distancia euclidiana clásica. El índice es una distancia euclídea ponderada y tiende a resaltar grupos esférica (alrededor del centro de gravedad hacia arriba).

### 6.3.2 Criterio de agregación según el criterio de la varianza o ward

El criterio de agregación de acuerdo con la varianza tiende a optimizar cada paso la partición obtenida por agregación de dos elementos. Se utiliza sólo cuando la agregación es la distancia euclidiana y por lo tanto cada objeto puede ser representado en un espacio euclidiano en la mayoría de  $n - 1$  dimensiones, si  $n$  es el número de objetos.

Para explicar este criterio es útil recordar el concepto de inercia y el Teorema de Huygens.

Sea  $E$  un espacio euclídeo  $p$ -dimensional y  $V$  su espacio vectorial asociado si  $M$  es la matriz de tamaño  $p \times p$  que define los productos escalares entre los elementos de una base  $B = e_1, e_2, \dots, e_p$  de  $V$ , a saber:

$$\langle x, y \rangle_M = x' M y \quad \forall x, y \in V.$$

El producto escalar, definido por  $M$ , induce una norma y un métrica (distancia euclidiana), que se definen, respectivamente, por:

$$\forall x \in E : M - \|x\| = \|x\|_M = (\langle x, x \rangle_M)^{1/2};$$

Para lo siguiente se asume que  $M = I$

Supongamos que cada punto se proporciona con una masa  $m_i$  y cada clase de la partición de una masa  $m_k$  de tal manera que

$$\forall x, y \in E : M - \text{distancia}(x, y) = d_M(x, y) = \|x - y\|_M.$$

$$m = \sum_{i=1}^n m_i = \sum_{j=1}^k m_j, \quad m_j = \sum_{i \in I_k} m_i$$

El cuadrado de la distancia entre dos puntos está dada por: Indicando con  $g$  el baricentro de la nube de puntos  $N(I)$  y con  $G_K$  el baricentro de:

$$\|x_i - x_{i'}\|^2 = d^2(x_i, x_{i'})$$

$k$ -ésima clase. Inercia total de la nube

$$I = \sum_{i=1}^n m_i \|x_i - g\|^2$$

$$\text{donde, } g = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i x_i, \quad g_k = \frac{1}{m_k} \sum_{i \in I_k} m_i x_i$$

El teorema de Huygens proporciona la descomposición de la inercia total en los dos cantidades, la inercia intra-clase y inter-clase que, según la expresión

$$I = \sum_k \sum_{i \in I_k} m_i \|x_i - g_k\|^2 + \sum_k m_k \|g_k - g\|^2$$

es decir, la relación conocida  $T = W + B$

**Observación 6.2.** En general, por lo tanto, la variabilidad total multidimensional del conjunto que se divide en dos partes: la variabilidad interna de los grupos (INTRA) y la variabilidad externa entre los grupos (INTER), correspondientes a las matrices W y B.

En ausencia de la hipótesis específica de la noción de grupo y objetivos de la clasificación, se dirá que una partición que es mucho mejor cuando más elevada es la relación de la variabilidad externa /variabilidad total, es decir, cuanto más homogéneas y fuerte es la diferencia entre las clases, o tanto más inercia (o varianza) intra o mínima y la inter ó máxima.

Al principio del proceso de aglomeración la inercia intra es nula y el inter es igual a la inercia total. A medida que se procede en las agregaciones, la inercia interna aumenta y la externa disminuye hasta el punto final donde toda la inercia es una inercia intra,



ya que todos los elementos son reagrupados en un solo grupo o clase que es el propio conjunto.

El criterio de agregación de conformidad con la varianza consiste en buscar, para cada paso, una partición de tal manera que la varianza interna de cada clase sea mínima, y por lo tanto, sea máxima la externa. Esta búsqueda del salto mínimo de la varianza interna equivale lógicamente a minimizar la pérdida de varianza inter, que tiene cada agregación de dos elementos. Se muestra que tal cantidad, es conocido como el criterio de Ward, que es:

$$\Delta I_{pq} = \frac{m_p m_q}{m_p + m_q} d^2(x_p, x_q) = \frac{m_p m_q}{m_p + m_q} \|x_p - x_q\|^2.$$

Por lo tanto, el algoritmo basado en este criterio, las distancia inicial y distancia posterior siempre se calcula utilizando la expresión anterior. Para entender su significado, se produce después de su reconstrucción.

El criterio de agregación de conformidad con la varianza consiste en buscar, para cada paso, una partición de tal manera que la varianza interna de cada clase sea mínima, y el exterior sea máxima. Esta búsqueda para del salto mínimo de aumento de la varianza interna lógicamente equivalente a minimizar la pérdida de la varianza entre, que tiene en cada agregación de dos elementos. Se muestra que en tales cantidades, conocido como el criterio de Ward, que es:

$$\Delta I_{pq} = \frac{m_p m_q}{m_p + m_q} d^2(x_p, x_q) = \frac{m_p m_q}{m_p + m_q} \|x_p - x_q\|^2.$$

Por lo tanto, el algoritmo basado en tal criterio, la distancia inicial y las distancia posterior se calcula siempre mediante la expresión anterior. Para entender su significado se sigue por su reconstrucción.

Son los elementos  $p$  y  $q$  con masas  $m_p$  y  $m_q$ , siendo  $x_p$  y  $x_q$  los vectores correspondientes que pertenecen a la partición  $P(s)$  como clases. Después la fusión de los dos elementos del núcleo  $h$  denota por  $P(s - 1)$  a la partición  $s - 1$  clases y el vector  $x_h$  con:

$$x_h = \frac{m_p x_p + m_q x_q}{m_p + m_q}.$$

La inercia con respecto al centro de gravedad  $G$ , debido a que el par  $(p, q)$ , se expresa:

$$I_{pq}(s) = m_p \|x_p - g\|^2 + m_q \|x_q - g\|^2 = m_p \|x_p - x_h\|^2 + m_q \|x_q - x_h\|^2 + m \|x_h - g\|^2$$

que es:  $T = W + B$  siendo:

$$T = m_p \|x_p - g\|^2 + m_q \|x_q - g\|^2$$

$$W = m_p \|x_p - x_h\|^2 + m_q \|x_q - x_h\|^2$$

$$B = m \|x_h - g\|^2.$$

Cuando  $p$  y  $q$  se combinan en  $h$  la inercia interna se anula, y la inercia de la partición  $P(s-1)$  es:

$$I_{pq}(s-1) = m \|x_h - g\|^2$$

Por lo tanto la diferencia entre las dos inercias es igual a:

$$\Delta I_{pq} = I_{pq}(s) - I_{pq}(s-1) = \frac{m_p m_q}{m_p + m_q} \|x_p - x_q\|^2 = \frac{m_p m_q}{m_p + m_q} d^2(x_p, x_q)$$

La cantidad correspondiente al criterio de Ward.

Si el criterio de salto mínimo busca los elementos más cercanos, con el criterio de Ward se añaden los dos elementos que tienen un salto intra varianza mínima (o que producen una pérdida mínima de la inter- varianza). Sobre la base de este principio se puede entender a partir de la fórmula anterior que los puntos con las masas más pequeñas serán más fácilmente agregados. El índice de la jerarquía expresa en tal caso el nivel de que la pérdida de inercia y puede verificar que la suma de estos índices de nivel es igual a la inercia total.

A efectos de cálculo de distancias sucesivas en el proceso de jerárquica, el cuadrado de la distancia entre cualquier punto  $r$  y el centro de la clase  $h$  (núcleo de  $p$  y  $q$ , indicando siempre con estos  $p, q, r$  ó un  $i$ -ésimo individuo o un núcleo anterior  $(h-1)$ -ésimo) se escribe en función de la distancia de los puntos  $p$  y  $q$ :

$$d^2(h, r) = \frac{1}{m_p + m_q} (m_p d^2(p, r) + m_q d^2(q, r) - \frac{m_p m_q}{m_p + m_q} d^2(p, q))$$

Se observa que la expresión anterior (conocido como el teorema de la mediana) se deduce, una vez más, por la descomposición de la inercia del par  $(p, q)$  con respecto a  $r$  (inercia total) en el par de inercia con respecto a  $h$  (interna) y la inercia de  $h$  respecto a  $r$  (externa):

$$m_p \|x_p - x_r\|^2 + m_q \|x_q - x_r\|^2 = (m_p + m_q) \|x_h - x_r\|^2 + \frac{m_p m_q}{m_p + m_q} \|x_p - x_q\|^2$$

De la que es fácil de explicar con precisión  $d^2(h, r)$

## 6.4 Selección del número de clases de la mejor partición poda del árbol

La elección del número de grupos que la constituyen la mejor partición de  $n$  objetos es siempre más fácil si se hace una poda ó corte adecuado del dendrograma: el corte realizado debe hacerse después de las agregaciones que corresponde a los valores más bajos del índice que reúnen los elementos más cercanos, y antes de las combinaciones correspondientes a valores altos durante el proceso de clasificación, ya que la agregación de los elementos para clasificar, uno se acerca a la parte superior del árbol, la distancia entre las clases de agregada, lo más cercano, se hace cada vez más grande y el índice de nivel más y más alto. De corte, por lo tanto, el eje a un nivel correspondiente a un salto importante en el índice, se puede esperar para obtener una partición de buena calidad, los individuos agrupados delante y los agregados después de corte están muy lejos (por definición de la buena partición).

En general, es posible elegir entre dos o tres niveles donde se puede realizar el corte y luego dos o tres particiones finales. La elección de corte puede ser facilitado mediante el examen de la histograma del nivel de cierto aumento de los índices: el árbol se debe podar en el nivel en el cual se observa este histograma en un salto importante entre los dos índices consecutivos,  $k - 1$  y  $k$ , lo que sugiere por lo tanto, una buena partición en clases  $k$ . La situación ideal se muestra en la Figura 5.4.1 (a) cuando se observa un

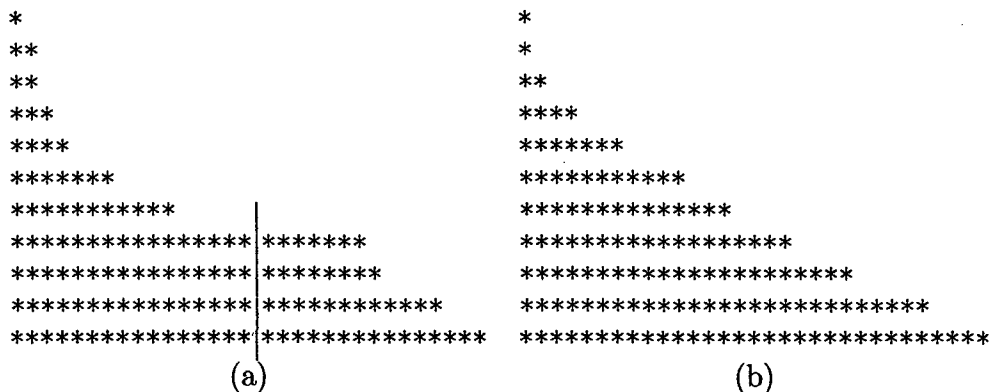


Tabla 6.2: Nivel de los índices de histograma

salto notable entre el cuarto y el quinto índice que sugiere una buena partición en cinco clases. En la Figura 5.4.1 (b) se observa, sin embargo, la situación típica en la que es difícil elegir el número de grupos dentro de la población.

Sin embargo, tal procedimiento no siempre obtiene la mejor partición posible porque los algoritmos de clasificación jerárquica no tienen las propiedades para producir una partición óptima. Esto es una consecuencia del hecho de que en el árbol construido la partición en  $k$  clases contiene la partición  $k$  en  $k - 1$  clases y está contenida en la partición en  $k + 1$  clases.

¿Cómo resolver, por lo tanto, el problema de la selección del número de clases para la mejor partición?

Los principales métodos que nos permiten elegir los valores óptimos obtenidos del parámetro  $k$ , por lo que le sugerimos para detener el proceso grupos de agregación hasta el valor seleccionado de  $k$ , que se define como reglas o criterios de detención, son criterios divididos en criterios de detención global y de detención local.

Los criterios de parada o detención evalúan una medida global,  $G(k)$ , por lo general basado en la variabilidad inter-grupo e intra-grupo y determina el valor de  $k$  para el que  $G(k)$  es óptima.

Una desventaja de estos criterios es que no nos permiten determinar si los datos se pueden dividir, porque hay una definición natural de  $G(I)$ .

Criterios de parada o detención local, sin embargo, permiten establecer que un par de grupos que se agregan (o si un grupo debe ser dividido). A diferencia de criterios de parada globales, el local de consideran sólo una parte de los datos (excepto cuando se hace la comparación entre  $k = 1$  y  $k = 2$ ) y sólo puede estimarse a particiones jerárquicamente anidados. Una desventaja de los criterios de detención locales es que necesitan para especificar un valor límite o un nivel significativo, cuyo valor óptimo por lo general depende de la propiedad (desconocido) en el conjunto de datos que se está considerando.

Muchos son los criterios de parada o detención que se han propuesto en la literatura. Un estudio detallado y muy valiosa de estos criterios es el llevado a cabo por Milligan y Cooper (1985). Entre los criterios hechas por estos autores, los cinco más importantes (tres global y local de dos), que sólo tiene sentido si es precedido por la definición de la distancia euclidiana, lo que les permite medir, para ser clasificado como se describe a continuación.

**G1:** El índice de Calinski-Harabasz (1974), adecuado para la determinación de una partición óptima de un conjunto de objetos descritos por las variables cuantitativas, se define por

$$G1(k) = \frac{\binom{B}{k-1}}{\binom{W}{n-k}}.$$

donde  $W$  y  $B$  denotan, respectivamente, la suma total de las distancias de los cuadrados inter-grupos del centro de gravedad, y la suma de las distancias de los cuadrados intra-grupos,  $k$  es el número de particiones que usted elije para obtener,  $n$  es el número de elementos de partida para clasificar. Está claro que este índice puede ser utilizado en el caso que las cantidades, primera mencionada son medible, y luego en la presencia de una definición de la distancia.

**G2:** el índice de Goodman-Kruskal (1954) se utiliza principalmente en los estudios clasificación, en el que tienen lugar las comparaciones entre toda la disimilitud en inter-grupos y dentro de los grupos. La comparación es concordante (discordante)

si una disimilitud inter-grupos es estrictamente menor (estrictamente mayor) de una disimilitud en intra-grupos, las similitudes entre los miembros de los dos grupos de disimilitud se descuidan en la definición del índice.

$$G2(k) = \frac{S_+ - S_-}{S_+ + S_-}$$

donde  $S_+ + (S_-)$  denota el número de comparaciones concordantes (discordante). Incluso en este caso se trata de un índice que se puede utilizar en caso que se pueda medir la disimilitud a grupos inter e intra grupo, y por lo que, previamente, se define una distancia euclidiana.

**G3:** Este índice estandariza la suma  $D(c)$  de disimilitud inter-grupos en una partición de objetos en  $c$  grupos. Si la partición tiene un total de  $r$  disimilitudes,  $D_{\min}$  ( $D_{\max}$  respectivamente) se define como la suma de  $r$  disimilitud más pequeña, y:

$$G3(c) = \frac{(D(c) - D_{\min})}{(D_{\max} - D_{\min})}$$

El valor de  $c$  que maximiza  $G1(c)$  o  $G2(c)$ , o minimiza  $G3(c)$  es el número entero que determina los grupos asignados - con la restricción de que sólo los valores más pequeños de  $c$  hay que tener en cuenta (Milligan y Cooper, 1985).

**L1:** Duda y Hart (1973) han propuesto una regla para decidir cuando un grupo debe ser dividido en dos subgrupos, basados en la comparación de su suma inter- clases de las distancias al cuadrado ( $W1$ ) con la suma de la suma inter-classes de las distancias al cuadrado cuando el grupo es óptimamente dividido en dos ( $W2$ ). Si el grupo contiene  $m$  objetos descritos por  $p$  caracteres cuantitativas la hipótesis que el grupo sea homogéneo (y por lo tanto podría ser subdividido) se rechaza si

$$\frac{W1}{W2} < 1 - \frac{2}{(\pi p)} - z \left[ \frac{2(1 - 8/(\pi^2 p))}{(mp)} \right]^{\frac{1}{2}}$$

donde  $z$  es una desviación normal estándar que especifica el nivel de significación de la prueba

**L2:** Beale (1969) propuso una prueba para decidir si un grupo puede dividirse. Esta consiste en la comparación de:

$$F = \frac{\left(\frac{W1-W2}{W2}\right)}{\left(\left(\frac{m-1}{m-2}\right) 2^{2/p} - 1\right)}$$

(Dónde  $W1$ ,  $W2$ ,  $m$  y  $p$  se definen como en **L1**) con una distribución  $F_{p, (m-2)p}$ , y el rechazo de la hipótesis cuando un grupo contiene un solo elemento para valores significativamente grandes de  $F$ .

En ambos de estos dos últimos criterios (criterios de parada local), la agregación por lo general procede hasta que se forma un grupo que consiste en un solo elemento.

## 6.5 Descripción estadística de las clases

Identificado la partición óptima en  $k$  grupos del conjunto de  $n$  objetos, se procede a la descripción e interpretación de las características de las clases que en la práctica representa una etapa fundamental para cualquier procedimiento de clasificación.

Ayudar a la interpretación de las clases son generalmente fundados sobre la base de comparaciones de promedios o porcentajes a clases internas con promedios o porcentajes obtenidos de los elementos para clasificar. Para seleccionar caracteres continuos o métodos de características nominales de cada clase, se mide la diferencia entre los valores relativos de la clase y los valores globales. Estas estadísticas se pueden convertir en un criterio llamado valor de la prueba que le permite operar una opción de las características y de identificar los más característicos (Morineau, 1984).

Entre los caracteres  $ci$  hay caracteres que han contribuido a la construcción de las clases, pero pueden participar en su descripción en el mismo principio de carácter ilustrativo en un análisis factorial. Estos caracteres permiten a posteriori identificar características y reagrupamientos establecidos a partir de características activas.

### 6.5.1 Valores de prueba para los caracteres continuos

En el caso de las variables cuantitativas o continua, para caracterización de un grupo, se compara la media de cada variable en el grupo,  $\bar{X}_k$ , con la media general,  $\bar{X}$ , y se evalúa tal diferencia, teniendo en cuenta la varianza del carácter, interna al grupo. Con este fin, se considera la prueba:

$$t_k(X) = \frac{\bar{X}_k - \bar{X}}{s_k(X)} \text{ con } s_k^2(X) = \frac{n - n_k}{n - 1} \frac{s^2(X)}{n_k}$$

donde  $s^2(X)$  y  $s_k^2(X)$  son, respectivamente, la varianza de la variable  $X$  y la varianza de la media, en el caso de una extracción sin repetir de la  $n_k$  unidad para ser considerado.

La hipótesis nula de una extracción al azar sin repetición de la  $n_k$  unidad del grupo  $k$ , la variable media aritmética  $\bar{X}_k$  del grupo tiene como valor esperado  $\bar{X}$  y la varianza como teórica  $s_k^2(X)$ .

La prueba de  $t_k$  sigue la ley de t de student y expresa la distancia entre la media del grupo y la media general en términos de desviaciones estándar de una curva normal. La probabilidad correspondiente al calculo empírico se muestra también en las tablas como el valor de prueba. Se trata del valor de una variable con una distribución normal (de gauss) estandarizada (es decir, con media cero y varianza unitaria)  $N(0,1)$  cuya probabilidad corresponde a la de la prueba. Por lo tanto los valores de prueba mas en módulo a 1.96 corresponden a una probabilidad de 5%, e indican que la media observada en los grupos difieren significativamente de la media en general, por lo tanto, son característicos del grupo.

Es posible utilizar este valor  $t_k$  como un orden de magnitud para identificar una lista entre las variables características en relación al grupo. Es decir, los valores absolutos de la prueba son de simples medidas de similitud entre caracteres y grupos.

### 6.5.2 Los valores de ensayo personajes Valoraciones

En el caso de los caracteres cualitativos o nominales una modalidad de un carácter puede considerarse como característicos de la clase si su presencia puede juzgarse sig-



nificativamente superior y si se puede atender respecto a su presencia en el colectivo (o junto)

Indicando de este modo con  $n_{jk}$  individuos con la modalidad  $j$ -ésima entre los  $n_k$  individuos de la clase  $k$ -ésimo, con  $n_j$  individuos con tal modalidad el colectivo de  $n$  elementos, la diferencia entre:

$$\frac{n_{jk}}{n_k} \text{ e } \frac{n_j}{n}$$

son medidas significativas.

Suponiendo que se extraen los  $n_k$  individuos de la clase  $k$  se extraen sin repetir los  $n$  individuos de la población, el porcentaje de personas que poseen la modalidad  $j$ -ésima de la clase debe coincidir en general con titular de la misma modalidad en la población. Esta condición representa la hipótesis de independencia en las que el número  $N$  de individuos de clase  $k$ , con la modalidad  $j$ , representa una variable aleatoria que sigue la ley hipergeométrica de parámetros  $(n, n_k, n_j)$  (Lebart et al ., 1995). Entonces se puede calcular la probabilidad de obtener un valor  $N$  mayor a  $n_{jk}$ :

$$p_k(j) = \text{prob}(N \geq n_{jk}).$$

Mas esta probabilidad es pequeña, más la hipótesis de extracción aleatoria es difícil de aceptar. Esta probabilidad se utiliza, para ordenar la modalidad más característica de una clase (la modalidad más característica corresponde a la pequeña probabilidad).

Desde esta probabilidad es a menudo muy pequeña, en la práctica puede ser reemplazado con el valor  $t_k(n)$  de la variable de Gauss correspondiente. Esa medida, en términos de extracción normal estandarizada, significa la diferencia entre el porcentaje de la presencia de la modalidad en la clase y el porcentaje de la modalidad en la población.

Para nuestro caso en la Figura 6.1 presentamos la clasificación

### DENDROGRAMA

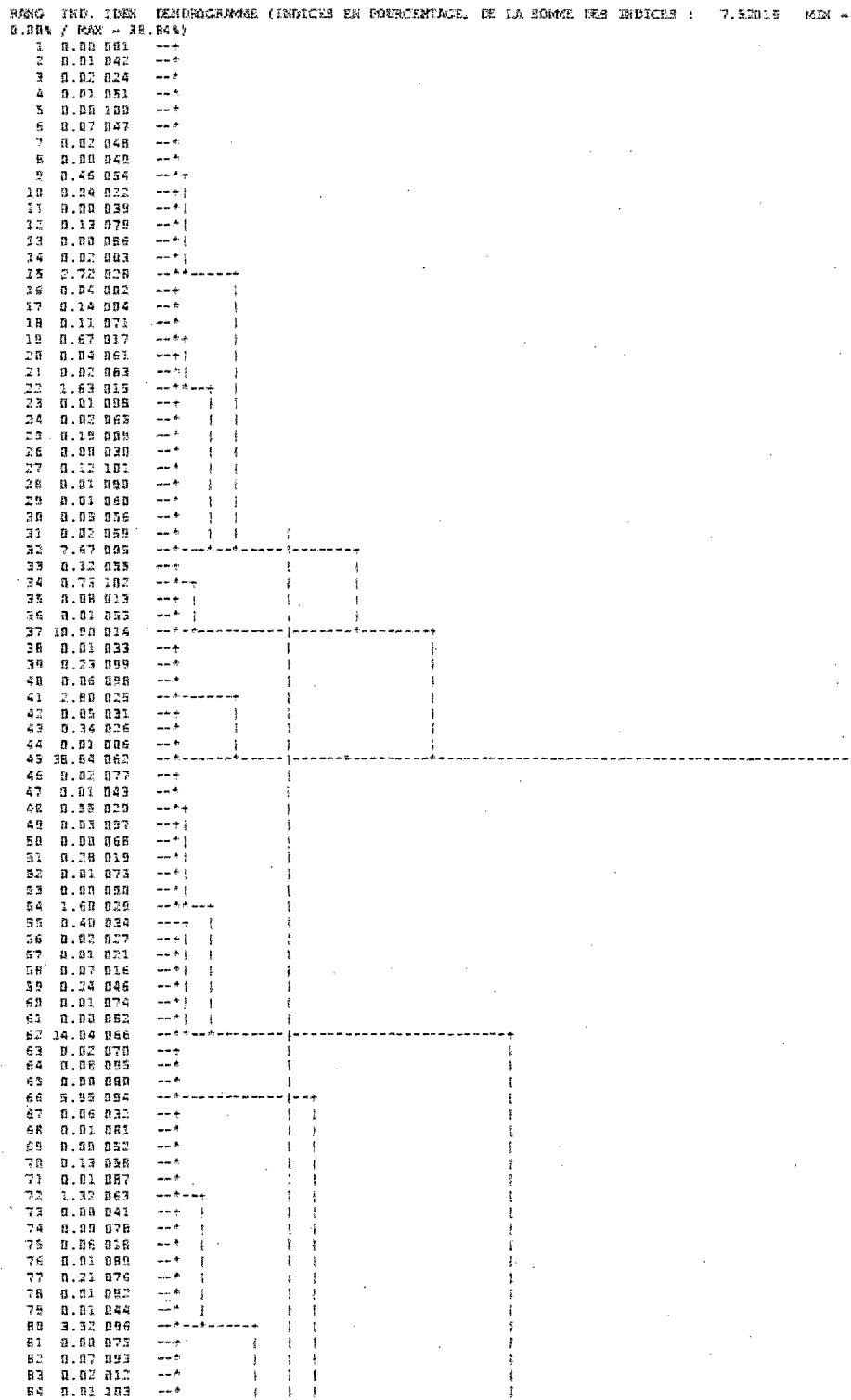


Figura 6.1: Clasificación mediante árboles o dendrograma.

El dendrograma, o árbol jerárquico, es una representación gráfica del resultado del proceso de agrupamiento en forma de árbol .

Etiqueta	Correlaciones		Contribución a los factores	
	C1 - TALLA	0.49	0.76	0.22
C2 - PESO	0.90	0.29	0.40	0.18
C3 - PBRFLE	0.86	0.16	0.38	0.10
C4 - P. PANTO	0.88	0.12	0.39	0.08
C5 - D. FÉMUR	0.76	0.23	0.34	0.14
C6 - D. HUME	0.59	0.60	0.27	0.37
C7 - PLITRICI	0.59	-0.68	0.26	-0.42
C8 - PLISUBE	0.62	-0.48	0.28	-0.30
C9 - PLI SUPR	0.71	-0.49	0.32	-0.31
C10 - PLIPANT	0.49	-0.73	0.22	-0.46

Tabla 6.3: Clasificación jerárquica.

NUM.	I	II	PESO	INDICE	
103	18	78	2.00	0.00001	*
104	29	50	2.00	0.00001	*
105	47	99	2.00	0.00002	*
106	19	68	2.00	0.00003	*
107	11	88	2.00	0.00004	*
108	3	86	2.00	0.00005	*
109	35	36	2.00	0.00009	*
110	94	80	2.00	0.00009	*
111	88	41	3.00	0.00010	*
112	58	52	2.00	0.00012	*
113	69	7	2.00	0.00013	*

114	79	39	2.00	0.00014	*
115	42	1	2.00	0.00015	*
116	84	67	2.00	0.00017	*
117	54	49	2.00	0.00017	*
118	45	37	2.00	0.00018	*
119	100	30	2.00	0.00018	*
120	66	82	2.00	0.00021	*
121	93	75	2.00	0.00027	*
122	23	72	2.00	0.00030	*
123	24	115	3.00	0.00038	*
124	60	90	2.00	0.00043	*
125	38	102	2.00	0.00050	*
126	112	81	3.00	0.00052	*
127	65	8	2.00	0.00057	*
128	20	43	2.00	0.00066	*
129	44	92	2.00	0.00067	*
130	63	87	2.00	0.00070	*
131	98	33	2.00	0.00082	*
132	105	51	3.00	0.00085	*
133	122	91	3.00	0.00086	*
134	56	124	3.00	0.00088	*
135	62	6	2.00	0.00090	*
136	104	73	3.00	0.00090	*
137	120	74	3.00	0.00095	*
138	96	129	3.00	0.00097	*
139	16	21	2.00	0.00100	*
140	76	89	2.00	0.00104	*
141	14	53	2.00	0.00107	*

142	95	70	2.00	0.00133	*
143	9	127	3.00	0.00140	*
144	117	48	3.00	0.00142	*
145	15	83	2.00	0.00143	*
146	5	59	2.00	0.00144	*
147	85	113	3.00	0.00149	*
148	132	123	6.00	0.00150	*
149	139	27	3.00	0.00150	*
150	28	108	3.00	0.00161	*
151	118	64	3.00	0.00168	*
152	128	77	3.00	0.00177	*
153	125	12	3.00	0.00186	*
154	106	57	3.00	0.00200	*
155	10	40	2.00	0.00230	*
156	107	133	5.00	0.00237	*
157	147	116	5.00	0.00320	*
158	145	61	3.00	0.00322	*
159	4	2	2.00	0.00323	*
160	114	22	3.00	0.00328	*
161	146	134	5.00	0.00340	*
162	26	31	2.00	0.00372	*
163	140	111	5.00	0.00438	*
164	25	97	2.00	0.00479	*
165	126	32	4.00	0.00480	*
166	156	151	8.00	0.00521	*
167	46	149	4.00	0.00531	*
168	153	121	5.00	0.00553	*
169	144	148	9.00	0.00555	*

170	110	142	4.00	0.00565	*
171	141	13	3.00	0.00634	*
172	157	109	7.00	0.00858	*
173	17	71	2.00	0.00861	*
174	101	55	2.00	0.00920	*
175	161	119	7.00	0.00926	*
176	130	165	6.00	0.00973	*
177	150	160	6.00	0.00990	*
178	173	159	4.00	0.01077	*
179	175	143	10.00	0.01401	*
180	138	163	8.00	0.01606	*
181	164	131	4.00	0.01698	*
182	137	167	7.00	0.01777	*
183	172	155	9.00	0.02036	*
184	136	154	6.00	0.02088	*
185	135	162	4.00	0.02569	*
186	182	34	8.00	0.03042	*
187	177	169	15.00	0.03437	*
188	184	152	9.00	0.04106	**
189	166	168	13.00	0.04139	**
190	158	178	7.00	0.05062	**
191	171	174	5.00	0.05476	**
192	180	176	14.00	0.09908	***
193	183	189	22.00	0.11802	****
194	186	188	17.00	0.12010	****
195	179	190	17.00	0.12236	****
196	195	187	32.00	0.20440	*****
197	185	181	8.00	0.21063	*****

198	193	192	36.00	0.26467	*****
199	198	170	40.00	0.44762	*****
200	191	196	37.00	0.57663	*****
201	197	200	45.00	0.81976	*****
202	199	194	57.00	1.05563	*****
203	202	201	102.00	2.92100	

\*\*\*\*\*

\*\*\*\*\*

---

Suma de índice de nivel=7.52015

# Capítulo 7

## Resultados y conclusiones

### 7.1 Resultados

1. De los 6 grupos, el grupo número 2 tiene mayor probabilidad de éxito deportivo.
2. Las variables de perímetro de pantorrilla y perímetro de brazo flexionado tienen mayor influencia en la primera componente. Fig.(7.5).
3. Las variables de los pliegues de la pantorrilla y el pliegue tricital y la talla están más cerca al segundo componente principal.(fig. 7.3)
4. Se identificaron 2 componentes principales que explican un 76.48de la inercia total. Tabla 7.1 y gráfico de sedimentación.
5. Observamos una mayor relación del peso con los perímetros de la circunferencia de la pantorrilla y perímetro de brazo flexionado. (fig. 7.5).
6. Observamos una correlación mas estable del diámetro del húmero con la talla, peso Perímetro de brazo flexionado, perímetro de pantorrilla, y diámetro de fémur. Fig.7.5



## Aplicación del A.C.P. para nuestro estudio:

Tabla 7.1: Histograma de los 10 valores propios o autovalores propios

Nº	Valor propio	%	Porcentaje acumulado	
1	4.9499	49.50	49.50	*****
2	2.5703	25.70	75.20	*****
3	0.6470	6.47	81.67	*****
4	0.4997	5.00	86.67	*****
5	0.3542	3.54	90.21	*****
6	0.3385	3.38	93.60	*****
7	0.2250	2.25	95.85	****
8	0.1986	1.99	97.83	****
9	0.1407	1.41	99.24	***
10	0.0760	0.76	100.00	**

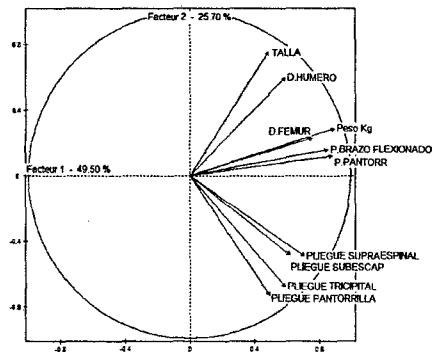


Figura 7.1: Los componentes principales representado en el círculo.

Tabla 7.2: Matriz de correlaciones

	Talla	Peso	p.b.fle.	P.pant	D.Fm	D.Hm	Ptrc	Psub	Pspr	Pp
Talla	1.00									
Peso	0.69	1.00								
PBF1	0.46	0.82	1.00							
Ppan	0.47	0.83	0.78	1.00						
Dfm	0.49	0.65	0.56	0.69	1.00					
DHm	0.66	0.61	0.57	0.48	0.59	1.00				
Ptrc	-0.17	0.32	0.38	0.41	0.30	-0.04	1.00			
Psub	-0.03	0.45	0.47	0.43	0.25	0.07	0.58	1.00		
Pspr	-0.01	0.48	0.48	0.45	0.36	0.23	0.71	0.66	1.00	
Ppan	-0.29	0.21	0.24	0.37	0.31	-0.13	0.76	0.51	0.63	1.00
C1	c2	c3	c4	c5	c6	c7	c8	c9	c10	

## 7.2 Conclusiones

1. El análisis multidimensional relacionado con el somatotipo es una metodología para detectar talentos deportivos.
2. El análisis multidimensional valida al somatotipo, porque el estudio muestra la predominancia de mesomorfia, luego sigue la endomorfía.
3. Si conocemos las mediciones antropométricas de los atletas para poder hacer el corte en el dendograma y obtener la clasificación depende de la experiencia de la experiencia del investigador, pero si se puede predecir los atletas con Mayor probabilidad deportiva.

## **7.3 Sugerencias**

Considero interesante ver que pasa cuando se aplica este método a las pruebas físico motoras.

# Anexo

En este anexo se adjuntan las figuras que permiten explicar los detalles de la tesis.

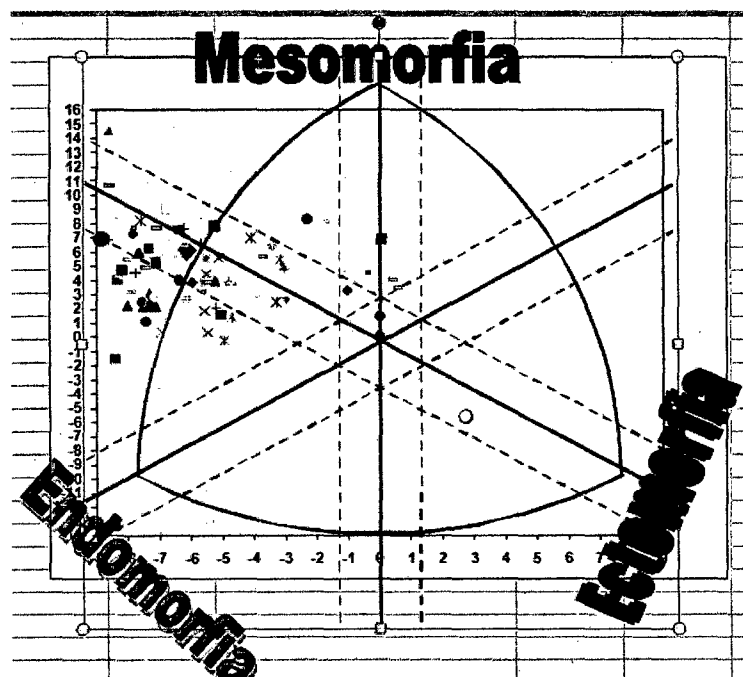


Figura 7.2: Somatocarta con las 3 coordenadas.

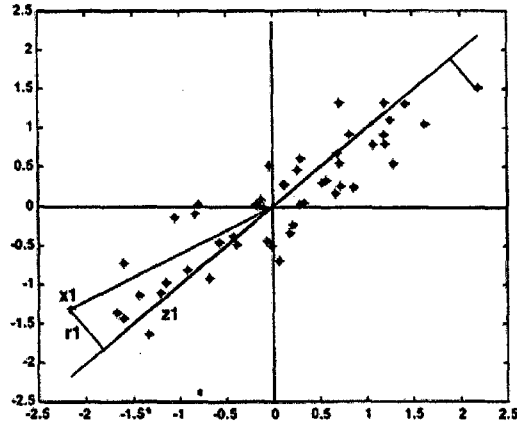


Figura 7.3: Ayuda a identificar los ejes principales.

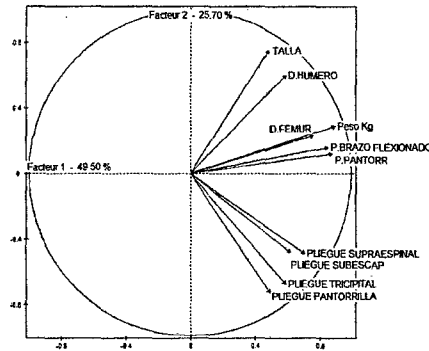


Figura 7.4: Los componentes principales representado en el círculo.

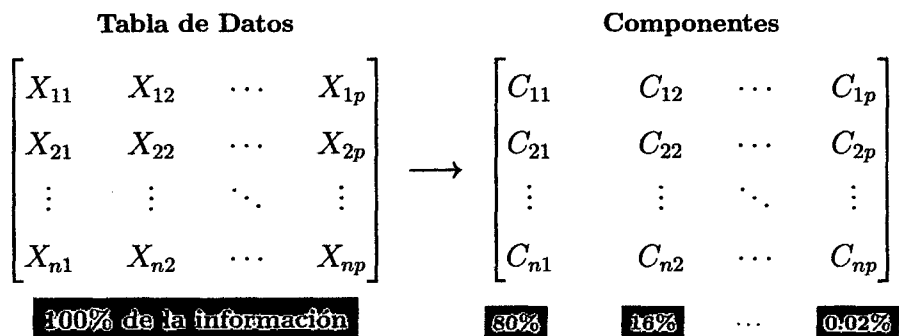


Tabla 7.3: Clasificación de los atletas

	INERTIES	EFFECTIF	POIDS	DISTANCE
INERTIE INTER-CLASES	5.8206			
INERTIES INTRA-CLASE				
CLASSE 1 / 6	0.4956	32	32.00	2.5479
CLASSE 2 / 6	0.0714	5	5.00	15.6333
CLASSE 3 / 6	0.2635	8	8.00	18.6537
CLASSE 4 / 6	0.2446	17	17.00	4.0250
CLASSE 5 / 6	0.0071	4	4.00	24.4290
CLASSE 6 / 6	0.6174	36	36.00	3.2954
INERTIE TOTALE	7.5201			

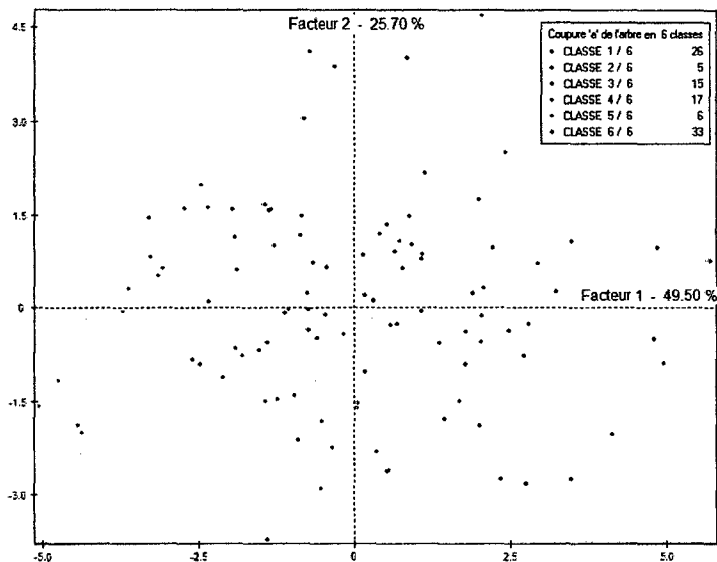


Figura 7.5: Otra manera de ver la clasificación.

Tabla 7.4: Otra manera de ver la clasificación mediante árboles.

NUM.	I	II	PESO	INDICE	
103	18	78	2.00	0.00001	*
104	29	50	2.00	0.00001	*
105	47	99	2.00	0.00002	*
106	19	68	2.00	0.00003	*
107	11	88	2.00	0.00004	*
108	3	86	2.00	0.00005	*
109	35	36	2.00	0.00009	*
110	94	80	2.00	0.00009	*
111	88	41	3.00	0.00010	*
112	58	52	2.00	0.00012	*
113	69	7	2.00	0.00013	*
114	79	39	2.00	0.00014	*
115	42	1	2.00	0.00015	*
116	84	67	2.00	0.00017	*
117	54	49	2.00	0.00017	*
118	45	37	2.00	0.00018	*
119	100	30	2.00	0.00018	*
120	66	82	2.00	0.00021	*
121	93	75	2.00	0.00027	*
122	23	72	2.00	0.00030	*
123	24	115	3.00	0.00038	*
124	60	90	2.00	0.00043	*
125	38	102	2.00	0.00050	*
126	112	81	3.00	0.00052	*
127	65	8	2.00	0.00057	*
128	20	43	2.00	0.00066	*
129	44	92	2.00	0.00067	*
130	63	87	2.00	0.00070	*
131	98	33	2.00	0.00082	*
132	105	51	3.00	0.00085	*
133	122	91	3.00	0.00086	*
134	56	124	3.00	0.00088	*
135	62	6	2.00	0.00090	*
136	104	73	3.00	0.00090	*
137	120	74	3.00	0.00095	*
138	96	129	3.00	0.00097	*
139	16	21	2.00	0.00100	*
140	76	89	2.00	0.00104	*
141	14	53	2.00	0.00107	*
142	95	70	2.00	0.00133	*
143	9	127	3.00	0.00140	*
144	117	48	3.00	0.00142	*
145	15	83	2.00	0.00143	*
146	5	59	2.00	0.00144	*
147	85	113	3.00	0.00149	*
148	132	123	6.00	0.00150	*
149	139	27	3.00	0.00150	*
150	28	108	3.00	0.00161	*
151	118	64	3.00	0.00168	*
152	128	77	3.00	0.00177	*
153	125	12	3.00	0.00186	*
154	106	57	3.00	0.00200	*
155	10	40	2.00	0.00230	*
156	107	133	5.00	0.00237	*
157	147	116	5.00	0.00320	*
158	145	61	3.00	0.00322	*
159	4	2	2.00	0.00323	*

Tabla 7.5: Matriz de correlaciones

	Talla	Peso	p.b.fie.	P.pant	D.Fm	D.Hm	Ptrc	Psub	Pspr	Pp
Talla	1.00									
Peso	0.69	1.00								
PBF1	0.46	0.82	1.00							
Ppan	0.47	0.83	0.78	1.00						
Dfm	0.49	0.65	0.56	0.69	1.00					
DHm	0.66	0.61	0.57	0.48	0.59	1.00				
Ptrc	-0.17	0.32	0.38	0.41	0.30	-0.04	1.00			
Psub	-0.03	0.45	0.47	0.43	0.25	0.07	0.58	1.00		
Pspr	-0.01	0.48	0.48	0.45	0.36	0.23	0.71	0.66	1.00	
Ppan	-0.29	0.21	0.24	0.37	0.31	-0.13	0.76	0.51	0.63	1.00
C1	c2	c3	c4	c5	c6	c7	c8	c9	c10	

Tabla 7.6: Estadísticos de fiabilidad

Alfa de Cronbach	Alfa de Cronbach basada en los elementos tipificados	N de elementos
.740	.881	10



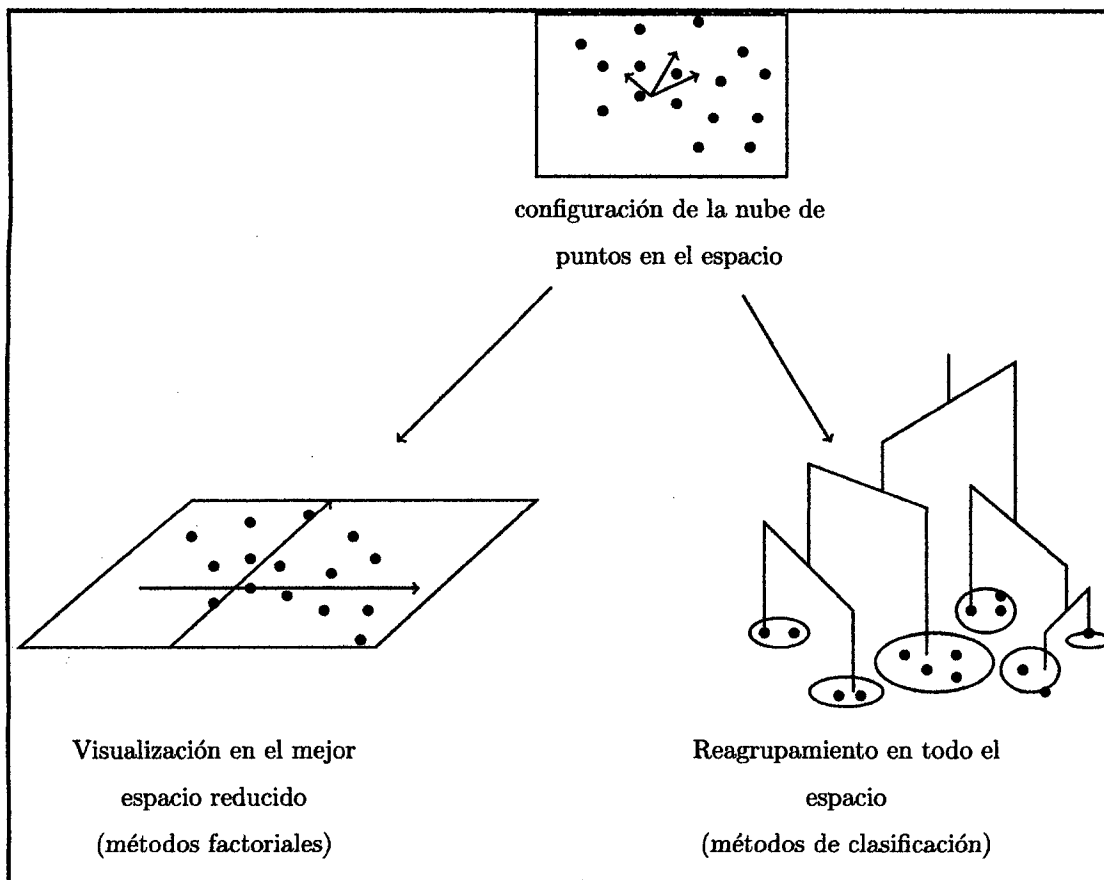
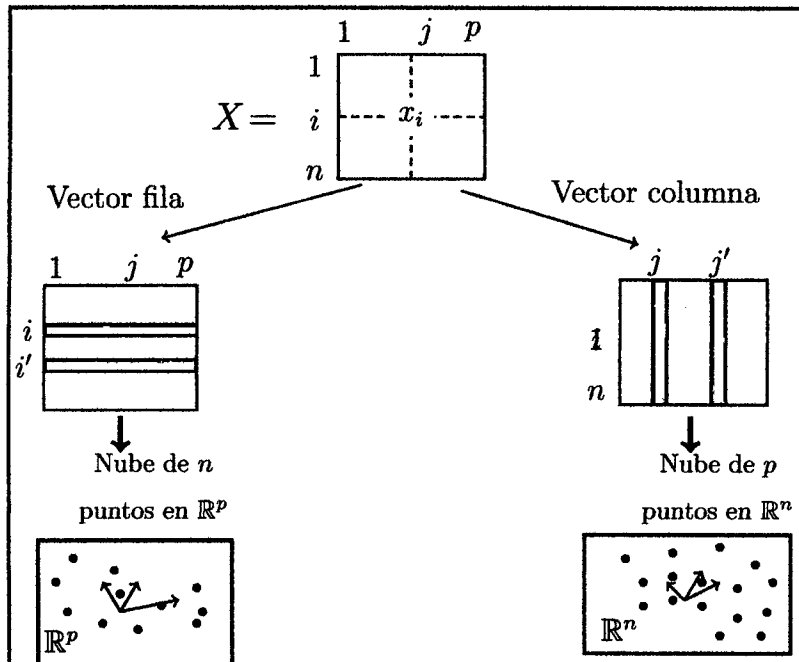


Figura 7.6: Esquema de los métodos factoriales y de clasificación.

Tabla 7.7: Histograma de los 10 valores propios o autovalores propios

Nº	Valor propio	%	Porcentaje acumulado	
1	4.9499	49.50	49.50	*****
2	2.5703	25.70	75.20	*****
3	0.6470	6.47	81.67	*****
4	0.4997	5.00	86.67	*****
5	0.3542	3.54	90.21	*****
6	0.3385	3.38	93.60	*****
7	0.2250	2.25	95.85	****
8	0.1986	1.99	97.83	****
9	0.1407	1.41	99.24	***
10	0.0760	0.76	100.00	**

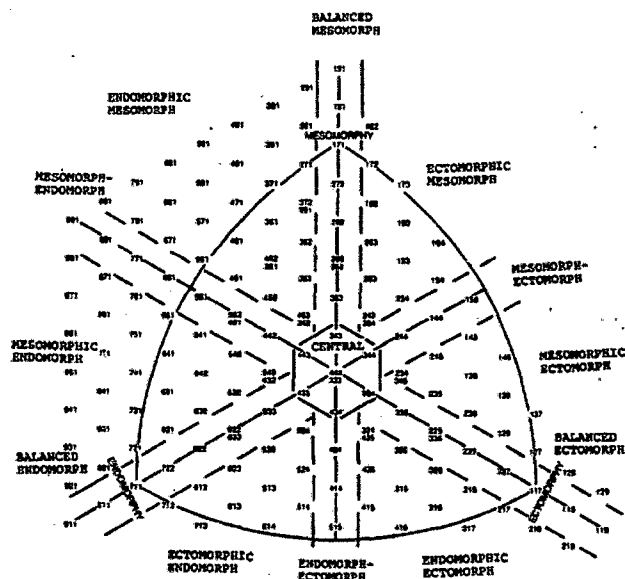


Figura 7.7: Cuadro explicativo de somatocarta

Tabla 7.8: Tabla de clasificación - Clase 1/6

IDEN	V. TEST	PROBA	CLASSE GENERAL		ECARTS TYPE		NUM. LIBELLE
<i>C2</i>	3.82	0.000	63.15	55.31	5.82	12.08	2. Peso Kg
<i>C1</i>	3.43	0.000	156.28	149.81	6.39	11.62	1. Talla
<i>C3</i>	3.24	0.001	29.28	27.32	1.73	3.55	3. P. brazo
<i>C6</i>	3.21	0.001	6.49	6.21	0.29	0.52	6. D. humero
<i>C4</i>	2.75	0.003	34.54	33.00	1.70	3.29	4. P. pantorr

Tabla 7.9: Tabla de clasificación - Clase 2/6

IDEN	V. TEST	PROBA	CLASSE GENERAL		ECARTS TYPE		NUM. LIBELLE
<i>C1</i>	4.52	0.000	172.82	149.81	11.88	11.62	1. Talla
<i>C6</i>	4.22	0.000	7.16	6.21	0.19	0.52	6. D. humero
<i>C5</i>	2.36	0.009	9.98	9.23	0.51	0.73	5. D. fémur
<i>C9</i>	-2.65	0.004	12.40	23.92	5.29	9.93	9. Pliegue supraespinal
<i>C8</i>	-2.70	0.003	9.96	20.52	1.81	8.92	8. Pliegue subescap
<i>C10</i>	-3.22	0.001	5.44	13.88	1.83	5.99	10. Pliegue pantorrilla
<i>C7</i>	-3.71	0.000	5.50	15.82	1.26	6.34	7. Pliegue tricipital

Tabla 7.10: Tabla de clasificación - Clase 3/6

IDEN	V. TEST	PROBA	CLASSE GENERAL		ECARTS TYPE		NUM. LIBELLE
<i>C3</i>	5.90	0.000	32.34	27.32	3.10	3.55	3. P. brazo flexionado
<i>C7</i>	5.47	0.000	24.13	15.82	4.77	6.34	7. Pliegue tricipital
<i>C4</i>	5.44	0.000	37.29	33.00	2.69	3.29	4. P. Pantorr
<i>C9</i>	5.38	0.000	36.73	23.92	7.63	9.93	9. Pliegue supraespinal
<i>C2</i>	5.11	0.000	70.11	55.31	11.22	12.08	2. Peso Kg
<i>C8</i>	4.85	0.000	30.90	20.52	10.50	8.92	8. Pliegue subescap
<i>C10</i>	4.66	0.000	20.57	13.88	5.34	5.99	10. Pliegue pantorrilla
<i>C5</i>	4.46	0.000	10.01	9.23	0.54	0.73	5.D. fémur
<i>C6</i>	3.07	0.001	6.59	6.21	0.40	0.52	6.D. húmero

Tabla 7.11: Tabla de clasificación - Clase 4/6

IDEN	V. TEST	PROBA	CLASSE GENERAL		ECARTS TYPE		NUM. LIBELLE
<i>C10</i>	4.75	0.000	20.21	13.88	3.80	5.99	10. Pliegue pantorrilla
<i>C7</i>	2.90	0.002	19.91	15.82	4.11	6.34	7. Pliegue tricipital
<i>C1</i>	-3.85	0.000	139.85	149.81	9.00	11.62	1. Talla
<i>C6</i>	-4.11	0.000	5.74	6.21	0.42	0.52	6.D. húmero

Tabla 7.12: Tabla de clasificación - Clase 5/6

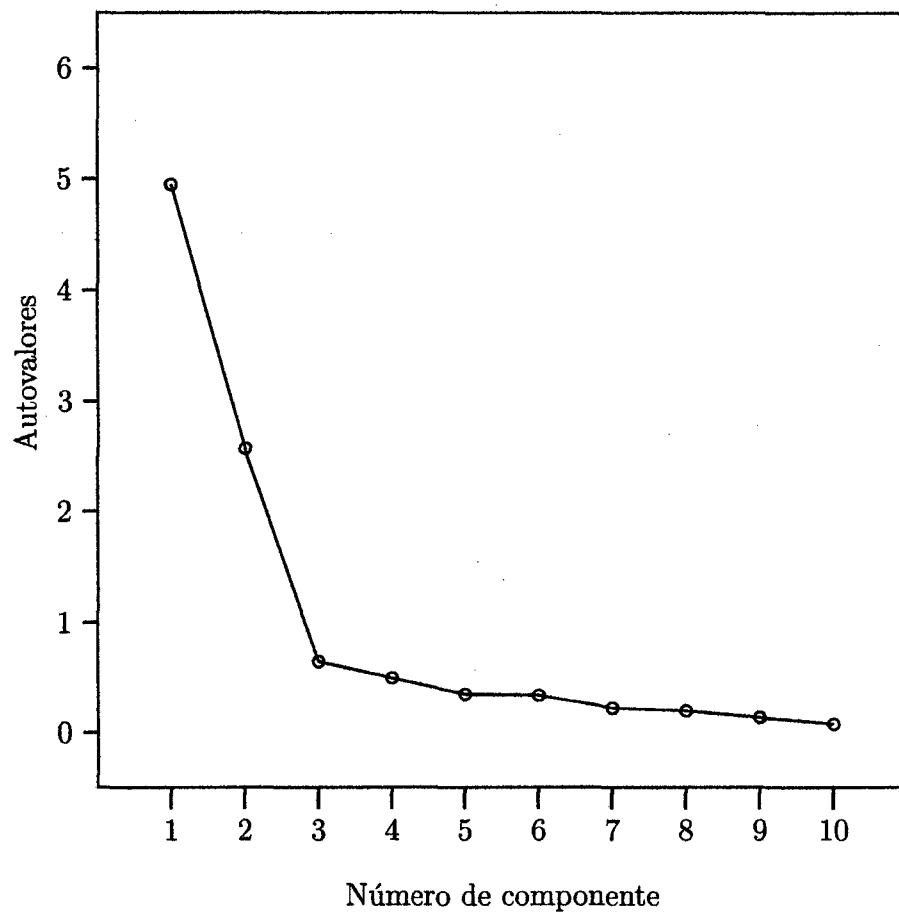
IDEN	V. TEST	PROBA	CLASSE GENERAL		ECARTS TYPE		NUM. LIBELLE
C8	-2.54	0.006	11.50	20.52	1.91	8.92	8. Pliegue subescap
C6	-3.44	0.000	5.50	6.21	0.21	0.52	6. D. húmero
C1	-4.04	0.000	131.12	149.81	7.88	11.62	1. Talla
C3	-4.16	0.000	21.43	27.32	1.06	3.55	3. Brazo flexionado
C5	-4.50	0.000	7.92	9.23	0.26	0.73	5. D. fémur
C2	-4.52	0.000	33.60	55.31	4.45	12.08	2. Peso Kg
C4	-5.01	0.000	26.43	33.00	1.39	3.29	4. P. pantorr

Tabla 7.13: Tabla de clasificación - Clase 6/6

IDEN	V. TEST	PROBA	CLASSE GENERAL		ECARTS TYPE		NUM. LIBELLE
<i>C5</i>	-3.38	0.000	8.87	9.23	0.45	0.73	5. D. fémur
<i>C3</i>	-3.90	0.000	25.33	27.32	2.03	3.55	3. P. brazo
<i>C2</i>	-4.05	0.000	48.27	55.31	5.44	12.08	2.Peso Kg
<i>C8</i>	-4.11	0.000	15.25	20.52	4.98	8.92	8. Pliegue subescap
<i>C10</i>	-4.13	0.000	10.32	13.88	3.33	5.99	10. Pliegue pantorrilla
<i>C7</i>	-4.26	0.000	11.93	15.82	4.05	6.34	7. Pliegue tricipital
<i>C4</i>	-4.31	0.000	30.95	33.00	1.67	3.29	4. P. pantorr
<i>C9</i>	-5.51	0.000	16.05	23.92	6.00	9.93	9.Pliegue supraespinal



Gráfico de sedimentación



# Bibliografía

- [1] Alexander, P.; "Aptitud Física, características morfológicas y composición corporal pruebas estandarizadas en Venezuela". 1995.
- [2] Bastos, R.; "Descripción morfológica de los Gimnastas cubanos de alto rendimiento". Trabajo para optar por el Título de Especialista en Primer Grado en Medicina del Deporte. Ciudad de la Habana, Cuba: Instituto de Medicina Deportiva. 1995.
- [3] Betancourt, H., Sanchez, G., Martínez, M., Echevarria, I.; "El somatotipo de Heath-Carter en luchadores cubanos de alto rendimiento de los estilos libre y grecorromano". La Habana – Cuba. efdeportes.com. Revista Digital - Buenos Aires - Año 8 - Nro. 45 – Febrero, 2002.
- [4] Bustamante, A.; "Estudio del crecimiento somático, somatotipo, composición corporal, edad morfológica y estado nutricional del escolar, entre 5,5 y 11,4 años, del Centro de Experimentación Pedagógica de la UNE" Ed. Lerma Gómez EIRL. Lima – Peru. 2003.
- [5] Camiz, S. "Tecnicque di analisi multidimensionale e multivariata del dati". 2000.
- [6] Carter, J.L.; "The Heath-Carter Somatotype Method". California: San Diego State University. 1980.
- [7] Carter, J.L.; Heath, B.H.; "Somatotyping Development and applications". Cambridge: Cambridge University Press. 1990.

- [8] Chapman, R., Hesketh, L.; "Fenotipo conductual de las personas con Síndrome de Down". Waisman Center, Universidad Wisconsin-Madison. *Rev. Mental Retardation and Developmental Disabilities Research Reviews*, 6: 84-95, Madison, Wi. (USA). p. 66-79. 2000.
- [9] Cronbach, L. J.; "Coefficient alpha and the internal structure of test". *Psychometrika*, 16, 3, 297-334. 1951.
- [10] Díaz, ME; Wong, "Analogía de algunas relaciones entre el peso y la talla durante la adolescencia". *Revista Cubana de Pediatría*; 62(3):376-85. 1990.
- [11] Federación Española de Instituciones para el Síndrome de Down (FEISD); "Bases y sustentos filosófico-teóricos". Madrid – España. 2000. [www.sindromedown.net.es](http://www.sindromedown.net.es)
- [12] Fernández, JA; García, RM.; "Índices de peso- talla como indicadores de masa muscular en el adulto del sexo masculino". *Revista Cubana de Alimentación y Nutrición*; 12(1):35-9. 1998.
- [13] García, J. Manso, Valdivieso, José Antonio Ruiz Caballero; "Pruebas para la valoración de la capacidad motriz en el deporte – Evaluación de la condición Física".
- [14] García, G., Rodríguez de Miranda, A., Escobar, M., Castro, D., Medina, T.; "La obesidad como problema de salud en la comunidad. *Revista cubana de Medicina General Integral*". V.12, n.4., La Habana – Cuba. 1996.
- [15] Girela, D.; "Primer Seminario Internacional Sobre Cineantropometría, Salud y Deporte". Universidad Alas Peruanas Lima – Perú. 2004.
- [16] Gómez, P.; "Los organizadores del currículo en matemáticas". *Revista EMA*, 5(3), pp 267-277. 2000.
- [17] Guerra, M.; "Tesis Doctoral: Síndrome de Down y respuesta al esfuerzo físico". Escuela de Medicina de L' Educació Física i l' Esport - Universidad de Barcelona – España. 2001.

- [18] Guilford, J.P.; "New standards for test evaluation". Educational and Psychological Measurement, 6, 427-439. 1946.
- [19] Hoeger, W. W. K., & Hoeger, S. A.; "Principles and Labs for Physical Fitness". 2da. ed. Englewood, CO: Morton Publishing Company. 1999.
- [20] Hotelling, H.; "Analysis of a Complex of Statistical Variables into Principal Components," Journal of Educational Psychology, 24, 417-441, 448-520, 1933.
- [21] Instituto Nacional de Estadísticas e Informática del Perú (INEI); "Censos Nacionales 1993". 1996.
- [22] Lagrand, C. y Pinzón, L.; "Análisis de datos métodos y ejemplos". Editorial: escuela colombiana de ingeniería. 2009.
- [23] Laurie, JA.; "Human Biology: A guide to fields methods". Londres: Academic Press. 1981.
- [24] Lip, A.; "Influencia del Entrenamiento Deportivo en el somatotipo, Distribución de Adiposidad, Índice de Masa Corporal y Razón Cintura – Cadera de Personas con Síndrome de Down". 2004.
- [25] López, S. y Sánchez, A.; "El ejercicio físico como estrategia de salud para la persona con síndrome de Down". Madrid – España. 2000. [www.canaldown21.com.es](http://www.canaldown21.com.es)
- [26] Ministerio de Educación, Cultura y Deporte de España; "Protocolo de medición: Valoración antropométrica". Consejo Superior de Deportes de España., Madrid - España. 2000.
- [27] Nájera, M., Díaz, F., Rodríguez, L.; "Prevalencia de factores de riesgo cardiovascular en un grupo de personas con deficiencia mental". Instituto de Investigación sobre el Trabajo - Universidad de Guanajuato. León, Guanajuato. México. Lecturas: Educación Física y Deportes. Revista Digital Buenos Aires/año 5 – #19 – Marzo 2000.

- [28] Norton, K., Olds, T.; "Antropométrica", Edición en Español: Dr. Juan Carlos Mazza. Biosystem Servicio Educativo. 2000. [www.nutrinfo.com.ar](http://www.nutrinfo.com.ar)
- [29] Ortega, T.L.; "El síndrome de down –Guía para padre, maestros y médicos". Editorial Trillas México. 2001.
- [30] Oviedo, H.C., Campo-Arias, A.; "Aproximación al uso del coeficiente alfa de Cronbach". Rev. Colomb. Psiquiatr. 34:572-580.
- [31] Rev.int.med.cienc.act.fís.deporte – vol. 6 - número 21 - marzo 2006 - ISSN: 1577-0354 Revista Digital - Buenos Aires - Año 8 - Nro. 45 – Febrero, 2002.
- [32] Rodríguez, C; Sánchez, G; Cabrera, I; García, E.; "Contribución al estudio del perfil Morfológico de atletas cubanos de alto rendimiento del sexo masculino". Boletín Científico-técnico del INDER; 1(2): 8. 1986.
- [33] Rodríguez, C. Utilización de indicadores simples en el Control Biomédico del Entrenamiento Deportivo. Revista Cubana de Medicina del Deporte y la Cultura Física; 2(1):7-13. 1987.
- [34] Rodríguez, J.; "Diccionario enciclopédico de ciencias y técnicas deportivas". ed. UNE, La Cantuta – Lima. 1999.
- [35] Rodríguez, O.; "Análisis en componentes principales (A.C.P)". 2009. [www.oldemarrodriguez.com](http://www.oldemarrodriguez.com)
- [36] Ross, WD; De Rose, EH; Ward R.; "Anthropometry applied to sport Medicine". En: Dirx A, Knutlgen HG, Tittel K, editors. "The Olympic Book of sport Medicine". Oxford: Blackwell Scientific Publication, 1988.
- [37] Rubin, S., Rimmer, J., Chicoine, B., Braddock, D. y McGuire, D.; "Prevalencia de sobrepeso en las personas con Síndrome de Down". Chicago – EEUU. Rev. Síndrome de Down, Volumen 16 (1), Número 60, 14-18, Marzo 1999.

- [38] Ruiz, F., Gil, J., Fernández-Pastor, V., De Diego M. y Perán, S.; "Entrenamiento intenso de atletismo en personas con Síndrome de Down". Revista Síndrome de Down. Málaga -España. p. 38 - 47. 2002
- [39] Ruiz, L.M.; "Valoración de los elementos motores del joven deportista: mitos y realidades", en "La detección temprana de talentos deportivos". Cuenca, Universidad de Castilla-La Mancha. 1998.
- [40] Sciarra, M. Celiz, B.; "Actitudes en padres y madres de bebés con síndrome Down". Universidad Peruana Cayetano Heredia, Lima - Perú. 2002. [www.discapnet.es](http://www.discapnet.es)
- [41] Suárez, R., Mirkin, A.; "El Somatotipo en Estudiantes de Educación Física". Escuela Universitaria de Educación Física. Tucumán - Argentina. 2001.
- [42] Villagra, A., Oliva, L.; "La obesidad como factor de riesgo en la persona con Síndrome de Down, frente a la alternativa de la actividad física y deportiva". Madrid - España. 2000. [www.efdeportes.com](http://www.efdeportes.com)
- [43] Wilmore, J., Costill. D.; "Fisiología del Esfuerzo y del Deporte". Ed. Paidotribo. Barcelona - España. 1998.