UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática

TESIS
PARA OPTAR POR EL TÍTULO PROFESIONAL DE
LICENCIADO EN MATEMÁTICA

Titulada:
Estudio de la Continuidad de un Operador Relacionado al Criterio de Nyman-Beurling Para la Hipótesis de Riemann

Presentada por:
Jesua Israel Epequin Chávez

Asesor:
Oswaldo José Velásquez Castañón

LIMA-PERU
2012

A mis padres, por todo su apoyo y amor incondicional.

Agradezco ante todo a mi asesor de tesis, Oswaldo Velasquez Castañon, inicialmente por haber aceptado trabajar conmigo, por haberme guiado en este mundo nuevo que representa para mi la teoría analítica de números, por la gran paciencia con la que me ha tratado a lo largo de la redacción de este documento, pero sobre todo quiero agredecerle por el interés sincero que me ha mostrado y que me sigue mostrando hasta el día de hoy.

También quiero agradecer a mis padres Luis y Lula, por su apoyo incondicional, por su amor y por su paciencia. No creo que me alcance la vida para devolverles lo que me han dado.

Asimismo quiero agradecer al Instituto de Matemáticas y Ciencias Afines (IMCA), a la Universidad Nacional de Ingeniería (UNI), instituciones que ayudaron a mi formación como matemático, a mis profesores Roger Metzger, Renato Benazic, Felix Escalante, Yboon Garcia, Christian Valqui y Julio Alcántara-Bode.

Finalmente quiero agradecer a mis compañeros Alonso Perez, Braulio Calagua, Christoper Salinas, Enrique Chávez y Frank Taipe, hábiles matemáticos que tengo el honor de conocer tanto a nivel académico como personal.

Resumen.-

El objetivo de este trabajo es analizar la continuidad de la función

$$\begin{array}{rccl} \Pi_{\chi,\rho}: & [0,1]^n & \to & L^2(0,\infty) \\ & (\theta_1,\ldots,\theta_n) & \mapsto & P_{\mathrm{Vect}(\rho_{\theta_1},\ldots,\rho_{\theta_n})}(\chi), \end{array}$$

donde χ es la función característica del intervalo $(0,1]$ en $(0,\infty)$, $\rho_{\theta_k}(s)=\{\frac{\theta_k}{s}\}$ para $k=1,\ldots,n$ y $P_{\mathrm{Vect}(\rho_{\alpha_1},\ldots,\rho_{\alpha_n})}(\chi)$ es la proyección ortogonal de χ sobre el subespacio vectorial generado por el conjunto $\{\rho_{\alpha_1},\ldots,\rho_{\alpha_n}\}$ en $L^2(0,\infty)$.

La elección de este operador es motivada por el criterio de Beurling que revela la dualidad existente entre las propiedades de la función zeta de Riemann y las de la función parte fraccionaria.

Comenzamos presentando la función ζ, el producto de Euler asociado a ella y demostrando su ecuación funcional. A continuación exponemos la prueba del criterio de Beurling, el cual nos proporciona una equivalencia para la hipótesis de Riemann en términos de la densidad en $L^2(0,\infty)$ del espacio formado por las funciones $f=\sum_{i=1}^n c_i\rho_{\theta_i}$ con $\sum_{i=1}^n c_i\theta_i=0$. Seguidamente caracterizamos la continuidad de un operador más general

$$\begin{array}{rccl} \Pi_V: & X\times H & \to & H \\ & (x,y) & \mapsto & P_{\mathrm{Vect}\left(u_1(x),\ldots,u_n(x)\right)}(y), \end{array}$$

donde X es un espacio topológico, H un espacio de Hilbert y las funciones $u_k: X\to H$ son continuas para $k=1,\ldots,n$. Tal caracterización se da en términos de la convergencia débil de subespacios vectoriales de H. Introducimos la medida de Haar m de un grupo abeliano localmente compacto G, y damos condiciones suficientes sobre una función $f\in L^1(G,m)$ que garanticen la continuidad de

$$\begin{array}{rccl} \Pi_F: & G^n & \to & L^2(G,m) \\ & (\theta_1,\ldots,\theta_n) & \mapsto & P_{\mathrm{Vect}(f_{\theta_1},\ldots,f_{\theta_n})}(y), \end{array}$$

donde f_{θ_k} es una dilatación de f para $k=1,\ldots,n$ y $y\in L^2(G,m)$. Finalmente, tomamos $G=(0,\infty)$, $f(t)=\{\frac{1}{t}\}$, $y=\chi$ y demostramos que en este caso se verifican las condiciones discutidas previamente. Esto establece la continuidad de $\Pi_{\chi,\rho}$.

ÍNDICE GENERAL

Resumen. —

El objetivo de este trabajo es analizar la continuidad de la función

$$\begin{array}{rccl} \Pi_{\chi,\rho}: & [0,1]^n & \to & L^2(0,\infty) \\ & (\theta_1,\ldots,\theta_n) & \mapsto & P_{\mathrm{Vect}(\rho_{\theta_1},\ldots,\rho_{\theta_n})}(\chi), \end{array}$$

donde χ es la función característica del intervalo $(0,1]$ en $(0,\infty)$, $\rho_{\theta_k}(s) = \left\{\frac{\theta_k}{s}\right\}$ para $k = 1,\ldots,n$ y $P_{\mathrm{Vect}(\rho_{\alpha_1},\ldots,\rho_{\alpha_n})}(\chi)$ es la proyección ortogonal de χ sobre el subespacio vectorial generado por el conjunto $\{\rho_{\alpha_1},\ldots,\rho_{\alpha_n}\}$ en $L^2(0,\infty)$.

La elección de este operador es motivada por el criterio de Beurling que revela la dualidad existente entre las propiedades de la función zeta de Riemann y las de la función parte fraccionaria.

Comenzamos presentando la función ζ, el producto de Euler asociado a ella y demostrando su ecuación funcional. A continuación exponemos la prueba del criterio de Beurling, el cual nos proporciona una equivalencia para la hipótesis de Riemann en términos de la densidad en $L^2(0,\infty)$ del espacio formado por las funciones $f = \sum_{i=1}^n c_i\rho_{\theta_i}$ con $\sum_{i=1}^n c_i\theta_i = 0$. Seguidamente caracterizamos la continuidad de un operador más general

$$\begin{array}{rccl} \Pi_V: & X\times H & \to & H \\ & (x,y) & \mapsto & P_{\mathrm{Vect}\left(u_1(x),\ldots,u_n(x)\right)}(y), \end{array}$$

donde X es un espacio topológico, H un espacio de Hilbert y las funciones $u_k : X \to H$ son continuas para $k = 1,\ldots,n$. Tal caracterización se da en términos de la convergencia débil de subespacios vectoriales de H. Introducimos la medida de Haar m de un grupo abeliano localmente compacto G, y damos condiciones suficientes sobre una función $f \in L^1(G,m)$ que garanticen la continuidad de

$$\begin{array}{rccl} \Pi_F: & G^n & \to & L^2(G,m) \\ & (\theta_1,\ldots,\theta_n) & \mapsto & P_{\mathrm{Vect}(f_{\theta_1},\ldots,f_{\theta_n})}(y), \end{array}$$

donde f_{θ_k} es una dilatación de f para $k = 1,\ldots,n$ y $y \in L^2(G,m)$. Finalmente, tomamos $G = (0,\infty)$, $f(t) = \left\{\frac{1}{t}\right\}$, $y = \chi$ y demostramos que en este caso se verifican las condiciones discutidas previamente. Esto establece la continuidad de $\Pi_{\chi,\rho}$.

NOTACIONES

Las letras $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ denotan al conjunto de los números naturales, enteros , reales y complejos respectivamente.
Para el número complejo $z = \sigma + i\tau$, los números reales $\mathfrak{R}(s) := \sigma$, $\mathfrak{I}(z) := \tau$ y $|z| := \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}$ denotan respectivamente su parte real, su parte imaginaria y su módulo.
Denotamos por $\mathbb{H}$ al conjunto $\{z \in \mathbb{C} : \mathfrak{I}(z) > 0\}$ y por $\mathbb{T}$ al conjunto $\{z \in \mathbb{C} : \ |z| = 1\}$
Denotamos por $H(U)$ al conjunto de las funciones complejas que son holomorfas en el abierto $U \subset \mathbb{C}$ y por $C(U)$ al cojunto de las funciones continuas en U.
El espacio vectorial generado por los vectores $v_1, \dots, v_n$ es denotado por $\mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_n)$.
Haciendo un abuso de notación, dado un número real a, denotamos por $\sigma < a$ al conjunto $\{z \in \mathbb{C} : \ \mathfrak{R}(z) < a\}$. De igual modo tenemos los conjuntos $\sigma > a$, $\sigma > a$ y $\sigma \leqslant a$.
La cantidad de primos en el intervalo $[1, x]$ es denotado por $\pi(x)$.
Dado un espacio topológico X y un subconjunto $A \subset X$, la clausura de A es denotada por $\overline{A}$, y su frontera por ∂A.
Para una función $f \in H(U)$, denotamos por $Z(f)$ al conjunto $\{z \in \mathbb{C} : \ f(z) = 0\}$. Dado $z \in Z(f)$ denotamos a su multiplicidad por $m(f, z)$.
Escribimos $f(x) = O(g(x))$ cuando $x \to x_0$ si existe $M > 0$ tal que $\big|f(x)\big| \leqslant M\big|g(x)\big|$ para todo x suficientemente cerca de x_0.
Dados un álgebra de Banach X y un elemento $x \in X$, denotamos por $\sigma(x)$ al espectro de x, por $\rho(x)$ al resolvente de x y por $r_\sigma(x)$ a su radio espectral.
Dada un álgebra de Banach X. Denotamos por $\triangle(X)$ al conjunto de los homomorfismos complejos de X y al núcleo de $\varphi \subset \triangle(X)$ lo denotamos por $\mathrm{N}(\varphi)$.
Dado un espacio topológico X. Una curva es una función continua $\gamma : [a, b] \to X$. El rango de γ será denotado por γ^* y su longitud por $l(\gamma)$.
Dado un abierto $U \subset \mathbb{C}$, el residuo de una función $f : U \to \mathbb{C}$ en un polo $z = a$ es denotado por $\mathrm{Res}(f, a)$.
Sean $\mathfrak{U} = \{u_1, \dots, u_n\}$ y $\mathfrak{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ subconjuntos de un espacio con producto interno H. El determinante de la matriz $G_{\mathfrak{U}} = \{\langle u_i, u_j\rangle\}$ se denota por $\mathrm{Gram}(u_1, \dots, u_n)$ y se llama determinante de Gram de $\mathfrak{U}$. El determinante de la matriz $G_{\mathfrak{U},\mathfrak{V}} = \big(\langle u_i, v_j\rangle\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ se denota $\mathrm{Gram}(u_1, \dots, u_n; v_1, \dots, v_n)$ y se llama determinante bilineal de Gram de $\mathfrak{U}$ y $\mathfrak{V}$.
Dados un espacio de Hilbert H, un subconjunto convexo y cerrado $C \neq \emptyset$ y $a \in H$. Denotamos a la proyección de a sobre C por $P_C(a)$.

Dados dos conjuntos A, X con $A \subset X$. Denotamos por χ_A a la función característica de A. El conjunto de funcionales lineales continuas en un espacio normado X es denotado por $\tilde{X}$. Sea f una función compleja definida en el espacio topológico X. Denotamos por $\mathrm{Supp}(f)$ al conjunto $\overline{\{x \in \mathbb{C} : f(x) \neq 0\}}$ y por $\mathrm{Sop}(f)$ al conjunto $\{x \in \mathbb{C} : f(x) \neq 0\}$.
Denotamos por G^* al conjunto de caracteres del grupo topológico G.
La parte entera y la parte fraccionaria de un número real x se denotan por $\lfloor x \rfloor$ y $\{x\}$ respectivamente, también denotamos $\rho(x) = \left\{\frac{1}{x}\right\}$.
Dadas f, g funciones complejas definidas en un espacio con medida X. Escribimos $f = g$ c.t.p para indicar que $f(x) = g(x)$ para todo x fuera de un conjunto de medida nula.
Sea X un espacio con medida μ, un número $p \geqslant 1$ y una función medible f tal que $\int_X |f|^p d\mu < \infty$. Denotamos por $\|f\|_p$ al número $\left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$.
Dadas f, g funciones reales de variable real. Escribimos $h(r) \overset{as}{<} g(r)$ para indicar que $h(r) < g(r)$ se verifica para todo r suficientemente grande. Si la misma desigualdad se verifica para alguna sucesión $r_n \to \infty$ escribimos $h(r) \overset{n}{<} g(r)$.
Sea f una función compleja definida en un abierto U. Denotamos por $M_f(r)$ al conjunto $\sup\Big\{\big|f(z)\big| : z \in U,\ |z| = r\Big\}$.
Dados un espacio normado X y $x \in X$. Escribimos $x_n \rightharpoonup x$ para indicar que la suceción $(x_n) \subset X$ converge débilmente hacia x.
Dados un espacio topológico X, un espacio de Hilbert H y una función $u : X \to H$. Decimos que u tiende débilmente hacia u_0 y lo denotamos por $u(x) \rightharpoonup_{x \to x_0} u_0$ cuando x tiende a x_0 si $\lim_{x \to x_0} f\big(u(x)\big) = f(u_0)$ para toda $f \in \tilde{X}$.
Dada $x \mapsto V(x)$ una aplicación del espacio topológico X en el conjunto de subespacios vectoriales del espacio de Hilbert H. Decimos que $V(x)$ tiende débilmente hacia 0 cuando x tiene a x_0, y lo denotamos $V(x) \rightharpoonup_{x \to x_0} 0$ cuando para toda $u : X \to H$ acotada tal que $u(x) \in V(x)$ para todo $x \in X$, se tiene $u(x) \rightharpoonup_{x \to x_0} u_0$.

INTRODUCCIÓN

Vamos a tomar las notaciones de [**Titchmarsh, 1986**] y de [**de Roton, 2003**]. La función zeta de Riemann es la función compleja definida por

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},$$

para $\Re(s) > 1$, y extendida de manera meromorfa a todo el plano complejo con un único polo en $s = 1$ de residuo igual a 1. Esta función satisface la ecuación funcional

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \operatorname{sen} \frac{1}{2} s\pi \Gamma(1-s)\zeta(1-s), \tag{1}$$

donde Γ es la función gamma de Euler. Otra ecuación funcional que involucra a la función zeta es la siguiente

$$\xi(s) = \xi(1-s), \quad \text{donde} \quad \xi(s) = \frac{1}{2} s(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s). \tag{2}$$

También tenemos que

$$\xi \text{ es una función entera de orden } 1. \tag{3}$$

En 1859 el matemático alemán Bernhard Riemann afirmó que los ceros no triviales de la función ζ pertenecen a la recta $\Re(s) = \frac{1}{2}$. Este problema permanece abierto hasta el día de hoy. Riemann demostró que los ceros no triviales se ubican en la banda crítica $0 \leqslant \Re(s) \leqslant 1$. En 1896, el matemático francés Jacques Hadamard y el belga Charles-Jean de la Valle Poussin probaron independientemente que ningún cero podía estar sobre la recta $\Re(s) = 1$. Este fué un paso clave en sus primeras demostraciones del teorema del número primo. Hadamard también mostró que estos ceros son simétricos respecto a las rectas $\Re(s) = \frac{1}{2}$ y $\Im(s) = 0$. Esto llevó a concluir que los ceros deben estar en el interior de la banda crítica $0 < \Re(s) < 1$. En 1914, el matemático británico Godfrey Harold Hardy demostró que existe un número infinito de ceros sobre la recta $\Re(s) = 1/2$ ([**Baltzersen, 2007**, §2.4]).

***Teorema* (*Hardy*).** — La función $t \mapsto \zeta(1/2 + it)$ real con valores reales tiene infinitos ceros; es decir, la función $\zeta(s)$ tiene infinitos ceros en la recta $\Re(s) = 1/2$.

La función zeta de Riemann guarda una relación estrecha con problemas relativos a la distribución de números primos. El teorema del número primo establece que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{\mathrm{li}(x)} = 1$$

donde $\pi(x)$ es la cantidad de primos en el intervalo $[1, x]$ y $\mathrm{li}(x) = \int_0^x \frac{dt}{\ln(t)}$ es llamada *integral logarítmica*. Riemann observó que el orden de la diferencia $\pi(x) - \mathrm{li}(x)$ depende de la distribución de los ceros de ζ alrededor de $\Re(s) = \frac{1}{2}$. Si la hipótesis de Riemann se cumple, entonces el término de error puede acotarse de la mejor manera posible. Concretamente, Helge von Koch demostró en 1901 que

$$\pi(x) = \mathrm{li}(x) + O\left(\sqrt{x}\ln(x)\right).$$

si y sólo si se cumple la hipótesis de Riemann.

Observando la fórmula

$$\int_0^\infty \left\{\frac{1}{t}\right\} t^{s-1}dt = -\frac{\zeta(s)}{s}, \qquad 0 < \Re(s) < 1$$

donde $\{s\} = s - \lfloor s \rfloor$ denota la parte fraccionaria de s, el matemático sueco Arne Beurling, tuvo la idea que sería posible transladar la hipótesis de Riemann a una propiedad de la función parte fraccionaria. Sea $\mathcal{B}$ el subespacio de $L^2(0,1)$ de funciones de la forma

$$f = \sum_{i=1}^{n} c_i \rho_{\theta_i} \qquad \text{con } n \in \mathbb{N}, 0 < \theta_i < 1, c_i \in \mathbb{C} \text{ para } i = 1, \ldots, n$$

donde $\rho_{\theta_i}(s) = \left\{\frac{\theta_i}{s}\right\}$, y $\mathcal{D}$ el subespacio de funciones de $\mathcal{B}$ que verifican $\sum_{i=1}^{n} c_i\theta_i = 0$, tenemos siguiente resultado, debido a Beurling.

Teorema. — La hipótesis de Riemann es cierta si y solo si $\mathcal{D}$ es denso en $L^2(0, 1)$.

En 1955, Beurling probó que esto equivale a mostrar que 1, la función característica del intervalo $(0, 1)$, pertenece a la clausura de $\mathcal{D}$ en $L^2(0, 1)$ (teorema 5.1). Así tenemos el siguiente resultado.

Teorema. — La hipótesis de Riemann es cierta si y solo si 1 pertenece a la clausura de $\mathcal{D}$ en $L^2(0, 1)$.

Estos teoremas revelan la dualidad existente entre las propiedades la de función zeta y aquellas de la función parte fraccionaria, y son de interés para nosotros debido a la simplicidad del enunciado y su demostración. Esta se debe a la estructura de espacio de Hilbert existente en $L^2(0, 1)$. Ambos enunciados son generalizados para $1 < p < \infty$, aunque en este caso la prueba se hace más complicada. El siguiente teorema es debido a Beurling **[Beurling, 1955]**

Teorema. — Para todo número real $p > 1$ las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. La función zeta de Riemann no tiene ceros en el semiplano $\Re(s) > 1/p$;
2. $\mathcal{D}$ es denso en $L^p(0, 1)$;
3. La función constante 1 pertenece a la clausura de $\mathcal{D}$ en $L^p(0, 1)$.

En 1992 el noruego Atle Selberg introdujo un conjunto de funciones a las cuales se puede extender la hipótesis de Riemann, *la clase de Selberg* $\mathcal{S}$. Las funciones de esta clase, por definición:

– Son representadas por series de Dirichlet en el semiplano $\Re(s) > 1$;
– Tienen un único polo en $s = 1$;
– Satisfacen una ecuación funcional similar a (2).

La hipótesis de Riemann se extiende a funciones en esta clase. En efecto, se conjetura que los ceros no triviales de $F \in \mathcal{S}$, al igual que los de la función ζ, se encuentran sobre la recta $\Re(s) = \frac{1}{2}$.

Existen resultados más recientes relativos a la equivalencia formulada por Beurling, entre los que podemos mencionar lo demostrado en el 2000 por Luis Báez-Duarte, Michel Balazard, Bernard Landreau y Eric Saias ([**Duarte et al., 2000**]).

Teorema. — La hipótesis de Riemann es cierta si y solo si la función característica del intervalo $(0, 1]$ pertenece a la clausura de $\mathcal{B}$ en $L^2(0, \infty)$.

Este último criterio, así como el de Beurling (teorema 5.1), son el punto central de esta tesis.

El contenido de este documento se divide en dos partes, teniendo al capítulo 5 como un nexo entre ellas.

En la primera mitad presentamos resultados básicos relativos a la función zeta. En el capítulo 1 hallamos preliminares que se utilizan a lo largo del texto. En el capítulo 2 demostramos el teorema de factorización de Weierstrass para funciones enteras, definimos las funciones de orden finito y demostramos que para estas últimas la factorización de Weierstrass puede ser significativamente mejorada (teorema 2.10). En el capítulo 3 definimos la función zeta, mostramos que ella puede ser expresada como un producto infinito, que admite una extensión meromorfa con polo simple de residuo 1 en $s = 1$ que satisface (1). El capítulo concluye con la demostración de (3).

El capítulo 5 tiene como objetivo demostrar la equivalencia de Beurling para la hipótesis de Riemann (teorema 5.1). Un paso clave en la demostración es la igualdad

$$\int_0^1 \{\theta/x\} x^{s-1} dx = \frac{\theta}{s-1} - \frac{\theta^s \zeta(s)}{s},$$

donde $\Re(s) > 1/2$ y $0 < \theta < 1$.

El objetivo de la segunda parte del documento es demostrar el siguiente resultado.

Teorema. — La función $\Pi_{\chi,\rho} : [0,1]^n \to L^2(0, \infty)$ definida por

$$\Pi_{\chi,\rho}\big((\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\big) = P_{\mathrm{Vect}(\rho_{\alpha_1}, \ldots, \rho_{\alpha_n})}(\chi),$$

es continua.

Con este fin, en el capítulo 6 introducimos un operador más general

$$\begin{array}{rccl} \Pi_V : & X \times H & \to & H \\ & (x, y) & \mapsto & \Pi\Big(\mathrm{Vect}\big(u_1(x), \ldots, u_n(x)\big), y\Big), \end{array}$$

donde H es un espacio de Hilbert, y las u_k son funciones definidas en un espacio topológico X con valores en H. Definimos la *convergencia débil hacia* 0 *cuando* x *tiene a* x_0 para una aplicación $x \mapsto V(x)$ de X en el conjunto de subespacios vectoriales de H denotada por $V(x) \rightharpoonup_{x \to x_0} 0$, y demostramos el siguiente resultado

Teorema. — Sea $x_0 \in X$, y sea $p \in \{1, \ldots, n\}$ el rango de $\{u_k(x_0)\}_{k=1}^n$. Supongamos que el conjunto $\{u_k(x_0)\}_{k=1}^p$ sea linealmente independiente. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. Π_V es continua en (x_0, y_0), para todo $y_0 \in H$.
2. Para todo $x \in X$, existe un complemento de $\mathrm{Vect}\{u_1(x), \ldots, u_p(x)\}$ en $\mathrm{Vect}\{u_1(x), \ldots, u_n(x)\}$ denotado por $W(x)$, tal que $W(x) \rightharpoonup 0$ cuando x tiende a x_0.

En el capítulo 7 analizamos la continuidad de Π_V cuando $H = L^2(Y, \mu)$, donde $(Y, \mathfrak{M}, \mu)$ es un espacio con medida. Para ello damos la definición de *soporte algebraico* de una función medible $f : Y \to \mathbb{C}$, introducimos el concepto de *función fina en un punto* y de *familia completa*. Finalmente demostramos el teorema que permite concluir la continuidad de Π_V.

Teorema. — Sea $p \in \{1, \ldots, n\}$ el rango de $\{u_k(x_0)\}_{k=1}^n$. Supongamos que el conjunto $\{u_k(x_0)\}_{k=1}^p$ sea linealmente independiente.
Sean $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ elementos de M que verifican

1. $\mathrm{Vect}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \cap H = \{0\}$;
2. Existe una familia completa $(E_\alpha)_{\alpha \in A}$ de elementos de $\mathfrak{M}$ tales que $\chi_{E_\alpha} \varphi_k \in H$ para todo $k = 1, \ldots, n$, y todo $\alpha \in A$.

Sean $f_1, \ldots, f_q$ funciones de X en M finas en x_0. Supongamos que para todo $x \in X$ existe un complemento $W(x)$ de $\mathrm{Vect}(u_1(x), \ldots, u_p(x))$ en $\mathrm{Vect}(u_1(x), \ldots, u_n(x))$, que está contenido en
$\mathrm{Vect}(\varphi_1, \ldots, \varphi_m, f_1(x), \ldots, f_q(x))$. Entonces, Π_V es continua en (x_0, y_0), para todo $y_0 \in H$.

En el capítulo 8 analizamos la continuidad del operador Π_V en el caso particular que las funciones u_k son dilataciones de una función f. Finalmente, en el capítulo 9 establecemos la continuidad de la función $\Pi_{\chi,\rho}$.

Capítulo 1

PRELIMINARES

1.1. Funciones holomorfas

Trabajaremos con funciones complejas definidas en subconjuntos del plano complejo. La siguiente definición es nuestro punto de partida.

Definición 1.1. — Sea una función compleja f definida en el abierto $U \subset \mathbb{C}$. Si $z_0 \in U$ y

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existe, decimos que la función es *derivable en* z_0 y denotamos al límite por $f'(z_0)$. Si existe $f'(z_0)$ para cada $z_0 \in U$ decimos que f es *holomorfa en* U.

El conjunto de las funciones $f : U \to \mathbb{C}$ holomorfas en un abierto $U \subset \mathbb{C}$ será denotado por $H(U)$.

Denotaremos con $D_r(z_0)$ al disco centrado en z_0 y con radio r, es decir:

$$D_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| < r\}.$$

Definición 1.2. — Se define el *radio de convergencia* de la serie de potencias $\sum a_n x^n$ por

$$R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Convenimos que $R = 0$ cuando la sucesión $\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)$ no es acotada y $R = \infty$ cuando tiende hacia cero.

Es un resultado conocido del análisis que la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ converge absoluta y uniformemente en compactos en $D_R(z_0)$, y diverge si $|z - z_0| > R$ [**Noguchi, 1988**, Theorem 2.4.3].

Definición 1.3. — Decimos que $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es *analítica* si para todo $z_0 \in \Omega$ la función f puede ser expresada como una serie de potencias alrededor de z_0. Es decir, existe $r > 0$ y $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ tal que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n,$$

para todo $z \in D_r(z_0)$.

Demostración. [**Noguchi, 1988**, Theorem 2.4.3]. □

Los siguientes resultados muestran la equivalencia entre los conceptos de función holomorfa y analítica.

Teorema 1.1. — Si f es analítica en Ω, entonces $f \in H(\Omega)$ y f' también es analítica en Ω. De hecho, si

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

para todo $z \in D_r(z_0)$, entonces para estos z tenemos

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}.$$

Demostración. — [**Rudin, 1987**, Theorem 10.6]. □

Teorema 1.2. — Para todo abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$, toda $f \in H(\Omega)$ es representable por una serie de potencias. De hecho, si $z_0 \in \Omega$ entonces f puede ser expresada como una serie de potencias alrededor de z_0. Además, el radio de convergencia de esta serie es el supremo de aquellos $r > 0$ tales que $D_r(z_0)$.

Demostración. [**Rudin, 1987**, Theorem 10.16]. □

Definición 1.4. — Sea X un espacio topológico. Una *curva* en X es una función $\gamma : [\alpha, \beta] \to X$ continua. Denotaremos el rango de γ por $\gamma^* = \gamma\big([a, b]\big)$. Si $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$ decimos que γ es una *curva cerrada.*

Un *camino* es una curva $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ que además es continuamente diferenciable por partes. Es decir, existe un conjunto finito $\{s_j\}_{j=0}^{n}$ con $\alpha = s_0 < s_1 < \cdots < s_n = \beta$ tal que la restricción de γ a $[s_{j-1}, s_j]$ es diferenciable, para cada $j = 1, \ldots, n$.

Definición 1.5. — Si $h = u + iv$ con $u, v : [a, b] \to \mathbb{R}$ continuas, definimos

$$\int_a^b h(t)dt = \int_a^b u(t)dt + i \int_a^b v(t)dt,$$

donde las integrales en el lado derecho son de Riemann. Ahora bien, sea γ un camino y $f : U \to \mathbb{C}$ una función continua en $\gamma^* \subset U$, definimos *la integral de f sobre γ* como

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\alpha^\beta f\big(\gamma(t)\big)\gamma'(t)dt = \sum_{k=1}^{n} \int_{s_{j-1}}^{s_j} f\big(\gamma(t)\big)\gamma'(t)dt.$$

Es fácil ver que

$$\int_\gamma f(\zeta)d\zeta \leqslant ||f_\gamma||_\infty \int_\alpha^\beta |\gamma'(t)|dt, \tag{4}$$

donde $||f_\gamma||_\infty = \sup\Big\{ \big|f(z)\big|, z \in \gamma \Big\}$. La integral en la parte derecha de la desigualdad se conoce como la *longitud de la curva* γ, y se denota por $l(\gamma)$.

Ahora presentamos el teorema de Cauchy. Utilizaremos el siguiente lema, cuya demostración puede ser encontrada en [**Rudin, 1987**, Theorem 10.13].

Lema 1.1. — Sea Δ un triángulo cerrado contenido en un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$, $p \in \Omega$ y una función $f \in H\big(\Omega \setminus \{p\}\big)$ continua en p. Entonces

$$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0.$$

***Teorema 1.3* (*Cauchy*).** — Sea Ω un abierto convexo, $p \in \Omega$ y una función $f \in H\big(\Omega\setminus\{p\}\big)$ continua en p. Entonces

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0,$$

para cualquier camino cerrado con $\gamma^* \subset \Omega$.

Corolario 1.1. — Sea Ω un abierto convexo, $p \in \Omega$ y una función $f \in H\big(\Omega\setminus\{p\}\big)$ continua en p. Si

$$F(z) = \int_{[a,z]} f(\zeta)d\zeta,$$

en donde $a \in \Omega$ es un punto fijo, entonces $F'(z) = f(z)$ para todo $z \in \Omega$.

***Teorema 1.4* (*Morera*).** — Sea f una función continua en un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$ tal que

$$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0$$

para todo triángulo $\Delta \subset \Omega$, entonces $f \in H(\Omega)$.

Demostración. [**Rudin, 1987**, Theorem 10.17]. □

Definición 1.6. — Diremos que un conjunto $\Omega \subset \mathbb{C}$ es una *región* si este es conexo y abierto. De ahora en adelante, a menos que se especifique lo contrario, la letra Ω denotará una región.

Dado un conjunto $X \in \mathbb{C}$ sabemos que este puede ser expresado como unión disjunta de sus componentes conexas. Si X es abierto, también lo son sus componentes y además la unión es disjunta y numerable.

Para la demostración del siguiente teorema vea [**Rudin, 1987**, Theorem 10.18].

Teorema 1.5. — Sea Ω una región, $f \in H(\Omega)$ y

$$Z(f) = \big\{a \in \Omega / f(a) = 0\big\}.$$

Entonces se verifica sólo una de las siguientes afirmaciones:

1. $Z(f) = \Omega$;
2. $Z(f)$ no tiene punto de acumulación en Ω.

En el segundo caso para cada $a \in Z(f)$, existe un único número natural $m = m(a)$ tal que

$$f(z) = (z-a)^m g(z),$$

donde $g \in H(\Omega)$ y $g(a) \neq 0$.

Definición 1.7. — Si $a \in \Omega$ y $f \in H\big(\Omega \setminus \{a\}\big)$ entonces se dice que f posee una *singularidad aislada* en el punto a. Si f puede ser definida en a de tal manera que la nueva función sea holomorfa en Ω, se dice que a es una *singularidad removible.*

De ahora en adelante usaremos $D'_r(a)$ para denotar la bola reducida con centro a y radio r, es decir

$$D'_r(a) = D_r(a) \setminus \{a\}.$$

Para la demostración del siguiente teorema vea [**Rudin, 1987**, Theorem 10.21].

Teorema 1.6. — Si $a \in \Omega$ y $f \in H(\Omega \setminus \{a\})$, entonces sólo una de las siguientes afirmaciones se verifica:

1. f tiene una singularidad removible en a;
2. existen números complejos $c_1, \cdots, c_m$ con $c_m \neq 0$ tal que
$$f(z) - \sum_{k=1}^{m} \frac{c_k}{(z-a)^k}$$
tiene una singularidad removible en a;
3. si $r > 0$ y $D_r(a) \subset \Omega$, entonces $f\big(D'_r(a)\big)$ es denso en $\mathbb{C}$.

En el caso (b) se dice que f tiene un *polo* en a y la función

$$\sum_{k=1}^{m} c_k(z-a)^{-k}$$

es conocida como la *parte principal* de f en a. En este caso se tiene que $\lim\limits_{z\to a} |f(z)| = \infty$

En el caso (c) se dice que f tiene una *singularidad esencial* en a. Un enunciado equivalente a (c) es:

c') Para cada número complejo w, existe una sucesión $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim z_n = a$ y $\lim f(z_n) = w$.

Definición 1.8. — Si $a \in \Omega$, $f \in H\big(\Omega \setminus \{a\}\big)$ y f tiene un polo en a con parte principal

$$Q(z) = \sum_{k=1}^{m} c_k(z-a)^{-k}.$$

Llamamos al número c_1 *residuo* de f en a y lo denotamos por

$$c_1 = \operatorname{Res}(f, a).$$

Teorema 1.7. — Sea una región $\Omega \in \mathbb{C}$. Dadas f, $g \in H(\Omega)$, g no idénticamente nula. Entonces las singularidades de f/g son removibles o polos, y están contenidas en $Z(g)$.

Demostración. Definamos $h : \Omega \setminus Z(g) \to \mathbb{C}$, por $h(z) = f(z)/g(z)$. Dado $z_0 \in \Omega$:

- Si $g(z_0) \neq 0$ entonces h es diferenciable en z_0.
- Si $g(z_0) = 0$, entonces por el teorema 1.5 $g(z) = (z - z_0)^m g_1(z)$, donde $m \geqslant 1$, $g_1 \in H(\Omega)$, y $g_1(z) \neq 0$. También tenemos que $f(z) = (z - z_0)^n f_1(z)$, donde $n \geqslant 0$, $f_1 \in H(\Omega)$, y $f_1(z) \neq 0$. Si definimos $h_1(z) = f_1(z)/g_1(z)$, tenemos que $h_1 \in H(\Omega)$,

y que $h_1(z_0) \neq 0$. Luego podemos expresar a h_1 bajo la forma de una serie de potencias alrededor de z_0, es decir

$$h_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \tag{5}$$

en donde $c_0 = h_1(z_0) \neq 0$.

Tenemos que $h(z) = (z - z_0)^{m-n} h_1(z)$. Si $m = n$, entonces definimos $h(z_0) = c_0$, y h tiene una singularidad removible en z_0. Si $m < n$, entonces de (5), h tiene un polo de orden $n - m$ en z_0. Finalmente, si $m > n$, entonces definiendo $h(z_0) = 0$, se llega a que h tiene una singularidad removible en z_0.

□

Definición 1.9. — Una función *entera* es una función holomorfa en todo el plano complejo.

Teorema 1.8 (Liouville). — Toda función entera y acotada es constante.

Demostración. [**Rudin, 1987**, Theorem 10.23]. □

Teorema 1.9. — Si $f \in H\big(D_R(a)\big)$ y $\big|f(z)\big| \leqslant M$ para todo $z \in D_R(a)$, entonces

$$\big|f^{(n)}(a)\big| \leqslant \frac{n!M}{R^n}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. [**Rudin, 1987**, Theorem 10.25]. □

Definición 1.10. — Decimos que una sucesión $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de funciones en Ω *converge hacia f uniformemente en compactos en* Ω si para todo compacto $K \subset \Omega$ y todo $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N$, entonces para todo $z \in K$, $|f_n(z) - f(z)| < \epsilon$.

Teorema 1.10. — Supongamos que $f_n \in H(\Omega)$, para $n = 1, 2, \ldots$, y que $f_n \to f$ uniformemente en compactos en Ω. Entonces $f \in H(\Omega)$ y $f_n' \to f'$ uniformemente en compactos en Ω.

Demostración. [**Rudin, 1987**, Theorem 10.27]. □

Definición 1.11. — Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto. Una función $u : \Omega \to \mathbb{C}$ se dice *armónica* sobre Ω si u es de clase C^2 y verifica la siguiente igualdad

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

La demostración del siguiente teorema puede ser hallada en [**Remmert, 1991**, §1.3.3].

Teorema 1.11. — Si f una función holomorfa en una región Ω que sólo asume valores reales ó que sólo asume valores imaginarios puros, entonces f es constante en Ω.

Sea una función $f = u + iv$, con $u, v : \Omega \to \mathbb{R}$ y $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto. Si f es holomorfa en Ω, las *ecuaciones de Cauchy-Riemann* implican que las funciones u y v son armónicas ([**Remmert, 1991**, §1.2.4]).

A continuación demostramos un resultado debido a los hermanos Nevanlinna. Antes presentamos el siguiente teorema.

Teorema 1.12. — a) Sea $u : \Omega \to \mathbb{C}$ una función armónica donde Ω es un abierto conexo. Si u alcanza su máximo en en algún $z_0 \in \Omega$, entonces u es constante.

b) Sean Ω un abierto conexo y u es una función continua en $\overline{\Omega}$, armónica en Ω. Si suponemos que u no es constante en Ω, entonces el máximo de u en $\overline{\Omega}$ se alcanza en $\partial\Omega$.

Demostración. **[Lang, 1999**, p. 261, Theorem 3.4] □

Si aplicamos el teorema anterior a $-u$ concluimos que ambos enunciados son válidos si reemplazamos la palabra máximo por mínimo.

Sea $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r,\ \Im(z) > 0\}$. Definimos $u : \overline{\Omega} \setminus \{-r, r\} \to \mathbb{C}$ por

$$u(x+iy) = \frac{2}{\pi}\left(\arctan\frac{y}{r+x} + \arctan\frac{y}{r-x}\right) \tag{6}$$

Un cálculo directo muestra que u es armónica en Ω y que

$$u(z) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad |z| = r, \\ 0 & \text{si} \quad \Im(z) = ,0 \end{cases}$$

La función $v = 1 - u$ es armónica en Ω y que

$$v(z) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad |z| = r, \\ 1 & \text{si} \quad \Im(z) = 0. \end{cases}$$

Lema 1.2. — Sea $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$, $f \in H(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ de modo que f tiene una cantidad finita de ceros en Ω. Supongamos que existen constantes M_1, $M_2 > 0$ tales que $|f(z)| \leqslant M_1$ cuando $|z| = r$ y $|f(z)| \leqslant M_2$ cuando $\Im(z) = 0$. En este caso, para todo $z \in \Omega \setminus Z(f)$ tenemos que

$$\log|f(z)| \leqslant u(z)\log M_1 + v(z)\log M_2,$$

donde u viene dada por (6) y $v = 1 - u$.

Demostración. Un cálculo directo muestra que $\log|f(z)|$ es armónica. Así, la función

$$h(z) = u(z)\log M_1 + v(z)\log M_2 - \log|f(z)|$$

es armónica en Ω excepto en los ceros de f, donde $h(z) \to \infty$. Además

$$h(z) = \begin{cases} \log M_1 - \log|f(z)| & \text{si} \quad |z| = r, \\ \log M_2 - \log|f(z)| & \text{si} \quad \Im(z) = 0. \end{cases}$$

En ambos casos $h(z) \geqslant 0$. Debido a que $\Omega \setminus Z(f)$ es conexo, el teorema 1.12 nos permite concluir que $h(z) \geqslant 0$ para todo $z \in \Omega \setminus Z(f)$, de donde se sigue el resultado. □

Si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ definimos

$$M_f(r) = \sup\Big\{|f(z)| : z \in \Omega,\ |z| = r\Big\}.$$

Denotamos por $\mathbb{H}$ al conjunto de números complejos con parte imaginaria positiva

$$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \Im(z) > 0\}.$$

Teorema 1.13 (Nevanlinna). — Sea $f \in H(\Omega)$, donde $\overline{\mathbb{H}} \subset \Omega$ y

$$\lambda = \liminf_{r \to \infty} \frac{\log M_f(r)}{r}.$$

Supongamos además que $|f(z)| \leqslant 1$ cuando $\Im(z) = 0$. Bajo estas hipótesis

$$|f(z)| \leqslant \exp\left(\frac{4}{\pi}\lambda y\right)$$

para todo $z \in \mathbb{H}$.

Demostración. Sea $\Omega_r = \{z \in \mathbb{H} : |z| < r\}$. Tenemos que $|f(z)| \leqslant M_f(r)$ cuando $|z| = r$ y $|f(z)| \leqslant 1$ cuando $\Im(z) = 0$. Por el lema anterior concluimos que para $z \in \Omega_r \setminus Z(f)$

$$\log|f(z)| \leqslant u(z) \log M(r),$$

donde

$$u(z) = \frac{2}{\pi}\left(\arctan\frac{y}{r+x} + \arctan\frac{y}{r-x}\right).$$

Ahora bien

$$\arctan\frac{y}{r+x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}\frac{y^{2n+1}}{(r+x)^{2n+1}} = \frac{y}{r+x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}\frac{y^{2n+1}}{(r+x)^{2n+1}}.$$

Tomando r suficientemente grande ($r > x$), vemos que

$$\frac{y}{r+x} = \frac{y}{r}\left(\frac{1}{1+x/r}\right) = \frac{y}{r}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{r^n} = \frac{y}{r}\left(1 + \frac{1}{r}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{r^{n-1}}\right) = \frac{y}{r} + O(1/r^2).$$

Además

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}\frac{y^{2n+1}}{(r+x)^{2n+1}} = \frac{1}{r^2}\frac{1}{(1+x/r)^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}\frac{y^{2n+1}}{(r+x)^{2n-1}} = O(1/r^2),$$

cuando $r \to \infty$, por lo tanto

$$\arctan\frac{y}{r+x} = \frac{y}{r} + O(1/r^2).$$

De manera análoga se demuestra que

$$\arctan\frac{y}{r-x} = \frac{y}{r} + O(1/r^2).$$

Así,

$$\log|f(z)| \leqslant \frac{4y}{\pi}(1 + O(1/r))\frac{\log M(r)}{r}.$$

Sea (r_n) una sucesión tal que $r_n \to \infty$, y $\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{\log M(r_n)}{r_n}$. Tomando $r = r_n$ en la desigualdad anterior y haciendo $n \to \infty$ concluimos que

$$\log|f(z)| \leqslant \frac{4\lambda}{\pi} y$$

para $z \in \Omega_r \setminus Z(f)$ lo cual nos permite concluir la prueba. □

En el teorema anterior se puede demostrar que $\lambda \geqslant 0$ **[Hille, 1962**, §18.4].

Corolario 1.2. — Sea $U = \{z \in \mathbb{C} : \Re < \alpha\}$ y $f \in H(\Omega)$ donde $\overline{U} \subset \Omega$. Supongamos que existe $M > 0$ tal que $|f(z)| \leqslant M$ cuando $\Re(z) = \alpha$. Entonces existe $\lambda \geqslant 0$ tal que

$$|f(\sigma + i\tau)| \leqslant M \exp\left(-\frac{4}{\pi}\lambda(\sigma - \alpha)\right) \tag{7}$$

para todo $\sigma < \alpha$.

Demostración. La función $F(z) = \frac{1}{M} f(\alpha + iz)$, verifica las condiciones del teorema anterior. Por lo tanto, tomando

$$\lambda = \liminf_{r\to\infty} \frac{\log M_F(r)}{r} \geqslant 0$$

tenemos que

$$|F(z)| \leqslant \exp(\frac{4\lambda}{\pi} y),$$

es decir

$$|f(\alpha + iz)| \leqslant M \exp(\frac{4\lambda}{\pi} y).$$

Si $z = x + iy$ entonces $\alpha + iz = \alpha - y + ix$, haciendo el cambio $\sigma = \alpha - y$, $\tau = x$ en la desigualdad anterior obtenemos (7). □

1.2. Convergencia débil de sucesiones, funciones y espacios vectoriales.

En esta sección introduciremos el concepto de convergencia débil de sucesiones y de funciones, sus propiedades principales, y veremos la relación entre ambos. Se trabajará en un espacio vectorial normado X. El conjunto de la funcionales lineales continuas de X será denotado por $\tilde{X}$.

Definición 1.12. — Si un espacio métrico (X, d) tiene la propiedad que toda sucesión de Cauchy converge, entonces decimos que es un espacio métrico *completo*.

Definición 1.13. — Sea X un espacio normado. Definimos la distancia entre dos puntos x, $y \in X$ por $d(x, y) = \|x - y\|$. Si (X, d) es un espacio métrico completo, entonces decimos que X es un espacio de *Banach*.

Definición 1.14. — Sea un espacio con producto interno X. Definimos la norma de $x \in X$ por $\|x\| = \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}}$. Si X es completo con la métrica derivada de esta norma entonces decimos que X es un espacio de *Hilbert*.

Definición 1.15. — Sea X un espacio vectorial normado y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de X. Se dice que tal sucesión *converge débilmente hacia* $x \in X$, y se denota $x_n \rightharpoonup x$, si

$$f(x_n) \to f(x)$$

para toda funcional lineal continua f.

Para evitar ambiguedades, en caso sea necesario, la convergencia usual será llamada *convergencia fuerte*.

El límite débil de una sucesión es único, pues si

$$x_n \rightharpoonup x \quad y \quad x_n \rightharpoonup y,$$

entonces

$$f(x_n) \to f(x) \quad y \quad f(x_n) \to f(y),$$

para toda funcional lineal continua. Como la convergencia fuerte lleva a un único límite, tenemos que

$$f(x) = f(y),$$

o equivalentemente

$$f(x-y) = 0$$

para toda funcional lineal continua. Se deriva de esto que $x - y = 0$ (ver [**Bachman, 2000**, §12.1]).

La demostración de los dos siguientes teoremas puede ser hallada en [**Bachman, 2000**, §14.1].

Teorema 1.14. — Sea X un espacio vectorial normado y $(x_n) \subset X$ una sucesión en tal espacio. Cada una de las afirmaciones listadas implica la siguiente:

1. La sucesión x_n converge fuertemente hacia x;
2. la sucesión x_n converge débilmente hacia x;
3. la sucesión x_n es acotada.

Teorema 1.15. — Sea (x_n) una sucesión acotada de vectores de un espacio vectorial normado X. Supongamos además que $f(x_n) \to f(x)$ para todas las funcionales lineales f que pertenecen a un conjunto A, verificando que

$$\overline{\text{Vect}(A)} = \tilde{X}.$$

En esta situación $x_n \rightharpoonup x$.

En lo que sigue, X denotará un espacio topológico y x_0 un elemento de X.

Definición 1.16. — Sea B_{x_0} un conjunto de vecindades de x_0. Decimos que B_{x_0} es un *sistema fundamental de vecindades* si para cada vecindad V de x_0 existe $U \in B_{x_0}$ tal que $U \subset V$.

Vamos a suponer que x_0 admite un sistema fundamental numerable $\{V_n\}$ de vecindades y que cada una de esas vecindades contiene propiamente a x_0. Si tomamos $U_1 = V_1$, $U_2 = U_1 \cap V_2$ e inductivamente tomamos $U_n = U_{n-1} \cap V_n$, obtenemos un sistema fundamental numerable $\{U_n\}$ de vecindades de x_0 que satisface $U_{n+1} \subset U_n$. Además, como cada U_n es una vecindad de x_0, existe V_{k_n} tal que $V_{k_n} \subset U_n$. Así, cada U_n contiene propiamente a x_0.

En las siguientes definiciones introducimos la noción de convergencia débil de funciones. Este concepto nos permitirá caractarizar la continuidad de un operador que introduciremos en la siguiente sección.

Definición 1.17. — Dada la función $u : X \to H$, decimos que u *converge débilmente hacia* u_0 cuando x tiende a x_0 si

$$\lim_{x \to x_0} f\big(u(x)\big) = f(u_0)$$

para toda funcional lineal continua f. Denotamos $u(x) \rightharpoonup_{x \to x_0} u_0$.

Como H es un espacio de Hilbert, si f es una funcional lineal continua, por el teorema de representación de Riesz (ver [**Bachman, 2000**, §12.4]) existe $z_f \in H$ tal que $f(x) = \langle x, z_f \rangle$ para todo $x \in H$. Luego u converge débilmente hacia u_0 cuando x tiende a x_0 si

$$\lim_{x \to x_0} \langle u(x), y \rangle = \langle u_0, y \rangle$$

para todo $y \in H$.

Definición 1.18. — Sea $x \mapsto V(x)$ una aplicación de X en el conjunto de subespacios vectoriales de H. Decimos que $V(x)$ *converge débilmente hacia* 0 cuando x tiene a x_0, y lo denotamos $V(x) \rightharpoonup_{x \to x_0} 0$ cuando para toda $u : X \to H$ acotada tal que $u(x) \in V(x)$ para todo $x \in X$, se tiene $u(x) \rightharpoonup_{x \to x_0} 0$.

Si $W(x) \subset V(x)$ para todo $x \in X$, y si $V(x) \rightharpoonup_{x \to x_0} 0$ entonces $W(x) \rightharpoonup_{x \to x_0} 0$

El siguiente teorema relaciona el concepto de convergencia débil de sucesiones con el introducido en la definición 1.17. La existencia del sistema fundamental numerable de vecindades es crucial en la demostración del mismo.

Teorema 1.16. — Sea $u : X \to H$. Tenemos que $u(x) \rightharpoonup_{x \to x_0} u_0$ si y solamente si $u(x_n) \rightharpoonup_{n \to \infty} u_0$ para toda sucesión (x_n) convergente hacia x_0.

Demostración. Sea (x_n) una sucesión convergente hacia x_0. Sea f una funcional lineal continua; como $\lim\limits_{x \to x_0} f(u(x)) = f(u_0)$ tenemos que $\lim\limits_{n \to \infty} f\big(u(x_n)\big) = f(u_0)$, luego $u(x_n) \rightharpoonup u_0$.

Supongamos ahora que u no converge débilmente hacia u_0 cuando x tiende a x_0. En ese caso existe una funcional lineal continua f y una vecindad $V_{f(u_0)}$ de $f(u_0)$ tal que para toda vecindad V_{x_0} de x_0 podemos hallar $y \in V_{x_0} \setminus \{x_0\}$ con $f\big(u(y)\big) \notin V_{f(u_0)}$. Como x_0 admite un sistema fundamental de vecindades $\{V_n\}$ podemos hallar $x_n \in V_n$ tal que $f\big(u(x_n)\big) \notin V_{f(u_0)}$. Como $V_{k+1} \subset V_k$ tenemos que x_n converge a x_0 mas $f\big(u(x_n)\big)$ no converge hacia $f(u_0)$, lo cual es una contradicción. $\square$

Ahora vamos a enunciar algunas propiedades de la convergencia débil que se derivan de las análogas en el caso de convergencia débil de sucesiones.

Teorema 1.17. — Sea $u : X \to H$ una función que tiende débilmente hacia u_0 cuando x tiende a x_0. Entonces u es acotada en una vecindad de x_0.

Demostración. Si u no es acotada en una vecindad de x_0, entonces para cada abierto V_n en el sistema fundamental de vecindades podemos hallar $x_n \in V_n$ tal que $\|u(x_n)\| > n$. Así, x_n converge hacia x_0 mas $(u(x_n))$ no es acotada, luego $(u(x_n))$ no converge débilmente por el teorema 1.14. Usando el teorema 1.16 llegamos a una contradicción. □

Ahora bien, si $u(x) \rightharpoonup_{x \to x_0} u_0$, y $\lim\limits_{x \to x_0} v(x) = v_0$, entonces $\lim\limits_{x \to x_0} \langle u(x), v(x) \rangle = \langle u_0, v_0 \rangle$. En efecto,

$$\begin{aligned}\left\|\langle u(x), v(x)\rangle - \langle u_0, v_0\rangle\right\| &\leqslant \left\|\langle u(x), v(x) - v_0\rangle\right\| + \left\|\langle u(x), v_0\rangle - \langle u_0, v_0\rangle\right\| \\ &\leqslant \|u(x)\|\|v(x) - v_0\| + \left\|\langle u(x), v_0\rangle - \langle u_0, v_0\rangle\right\|.\end{aligned}$$

Como u es acotada en una vecindad de x_0, $\lim\limits_{x \to x_0} v(x) = v_0$ y $\lim\limits_{x \to x_0} \langle u(x), v_0 \rangle = \langle u_0, v_0 \rangle$, concluimos que el lado derecho de la desigualdad anterior tiende a 0 cuando x tiende a x_0.

Teorema 1.18. — Sea $u : X \to H$ una función acotada en una vecindad de x_0, y $u_0 \in H$. Supongamos que la igualdad $\lim\limits_{x \to x_0} \langle u(x), y \rangle = \langle u_0, y \rangle$ se verifica para todo $y \in Y$, donde

$$\overline{\mathrm{Vect}(Y)} = H.$$

Bajo estas condiciones $u(x) \rightharpoonup u_0$ cuando x tiende a x_0.

Demostración. Sea una sucesión (x_n) convergente hacia x_0. Si demostramos que $u(x_n) \rightharpoonup u_0$, el resultado queda establecido en virtud del teorema 1.16. Como u es acotada en una vecindad de x_0 la sucesión $u(x_n)$ es acotada. Definamos $\phi : H \to \tilde{H}$, por $\phi(y) = f_y$, donde $f_y(x) = \langle x, y \rangle$, para $x \in H$. Tenemos que ϕ es inyectiva, sobreyectiva (esto se debe al teorema de representación de Riesz), $\phi(x + y) = \phi(x) + \phi(y)$ y $\phi(\alpha x) = \overline{\alpha}\phi(x)$. También se verifica que $\|\phi(y)\| = \|y\|$. Luego, si $A = \{f_y \in \tilde{H} : y \in Y\}$, tenemos que $\overline{\mathrm{Vect}(A)} = \overline{\mathrm{Vect}(\phi(Y))} = \phi(\overline{\mathrm{Vect}(Y)}) = \phi(H) = \tilde{H}$. Así, de la hipótesis, tenemos que $\lim f(u(x_n)) = f(u_0)$ para todo $f \in A$, y del teorema 1.15 resulta que $u(x_n) \rightharpoonup u_0$. □

Definición 1.19. — Sea $u : X \to H$. Decimos que $u_0 \in H$ es un *valor de adherencia débil de u cuando x tiende a x_0* si existe una sucesión $(x_n) \subset X$ que converge hacia x_0, tal que $u(x_n) \rightharpoonup_{n \to \infty} u_0$.

Para la demostración del siguiente teorema consulte [**Schwartz, 1979**, §13].

Teorema 1.19. — Sea $u : X \to H$ acotada en una vecindad de x_0. El conjunto $\mathcal{A}$ de valores de adherencia débiles de u cuando x tiende a x_0 es no vacío. Si $\mathcal{A} = \{u_0\}$ entonces $u(x) \rightharpoonup u_0$ cuando x tiende a x_0.

Definición 1.20. — Un conjunto A en un espacio topológico se dice σ-compacto si es unión numerable de conjuntos compactos.

1.3. Definición y propiedades elementales de las álgebras de Banach.

Definición 1.21. — Un *álgebra de Banach* es un espacio de Banach X sobre los números complejos, donde se define una multiplicación que verifica

a) $x(yz) = (xy)z$

b) $x(y+z) = xy + xz$, $(x+y)z = xz + yz$,

c) $\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y)$,

d) $\|xy\| \leqslant \|x\|\|y\|$.

para todo $x, y, z \in X$ y $\alpha \in \mathbb{C}$.

Si además X contiene un elemento e tal que $\|e\| = 1$ y

e) $xe = ex = x$,

para todo $x \in X$, decimos que X es un álgebra de Banach con identidad.

La desigualdad (d) implica que la multiplicación es continua. En efecto, si $x_n \to x$ y $y_n \to y$, de la identidad

$$x_n y_n - xy = (x_n - x)y_n + x(y_n - y),$$

se concluye que $x_n y_n \to xy$.

Definición 1.22. — Sea X un álgebra de Banach y $\varphi : X \to \mathbb{C}$ una funcional lineal no nula. Si

$$\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y),$$

para todo $x, y \in X$, decimos que φ es un *homomorfismo complejo*.

Definición 1.23. — Sea X un álgebra de Banach con identidad. Decimos que $x \in X$ es *invertible* si existe $y \in X$ tal que

$$xy = yx = e.$$

En este caso decimos que y es la *inversa de* x. El conjunto de los elementos invertibles se denotará por $\mathcal{U}$. Es fácil ver que la inversa de un elemento es única.

Teorema 1.20. — Si φ es un homomorfismo complejo en una álgebra de Banach con identidad, se tiene:

1) $\varphi(e) = 1$;

2) $\varphi(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathcal{U}$.

El ítem (b) del siguiente teorema implica que todos los homomorfismos complejos son continuos.

Teorema 1.21. — Sea X una álgebra de Banach con identidad y $x \in X$ con $\|x\| < 1$. Entonces

a) $e - x$ es invertible y

$$(e - x)^{-1} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n;$$

b) $|\varphi(x)| \leqslant 1$ para todo homomorfismo φ en X.

Demostración. Como $\|x\| < 1$ la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \|x\|^n$ converge. Por tanto, sean $s_N = \sum_{n=0}^{N} x^n$ y $t_N = \sum_{n=0}^{N} \|x\|^n$. La sucesión $(t_N)_{N\in\mathbb{N}}$ es convergente, y por ende de Cauchy. Así, dado

$\epsilon > 0$, si $M > N$

$$\|s_M - s_N\| \leqslant \|x^{N+1}\| + \ldots + \|x^M\| \leqslant \|x\|^{N+1} + \ldots + \|x\|^M = t_M - t_N < \epsilon,$$

para M, N suficientemente grandes, luego la sucesión $(s_N)_{N\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, por lo cual converge.

Sea $s = \text{lím}\, s_N$, tenemos

$$\|(e - x)s_N - e\| = \|x^{N+1}\| \leqslant \|x\|^{N+1},$$

y como $\|x\|^n$ converge hacia cero, de la continuidad de la multiplicación

$$(e - x)s = \lim_{N\to\infty} (e - x)s_N = e.$$

Análogamente se demuestra que $s(e - x) = e$.

Ahora bien, sea φ un homomorfismo en X, como $e - \varphi(x)^{-1}x \in \mathrm{N}(\varphi)$ del teorema 1.21 concluimos que $e - \varphi(x)^{-1}x$ no es invertible, por lo cual $|\varphi(x)^{-1}| \geqslant 1$, es decir $|\varphi(x)| \leqslant 1$. $\square$

Sea φ un homomorfismo complejo en X, como

$$\|\varphi\| = \sup_{\|x\|<1} |\varphi(x)|,$$

del ítem (b) del teorema anterior $\|\varphi\| \leqslant 1$; como $\varphi(e) = 1$ se concluye que $\|\varphi\| = 1$.

Teorema 1.22. — Sea X un álgebra de Banach con identidad.

a) El conjunto de los elementos invertibles $\mathcal{U}$ es abierto;

b) La función $\phi : x \mapsto x^{-1}$ definida en $\mathcal{U}$ es un homeomorfismo.

Demostración. Sea $x \in \mathcal{U}$, si $\|y - x\| < \|x^{-1}\|^{-1}$ entonces $e - x^{-1}(x - y)$ es invertible pues

$$\|x^{-1}(x - y)\| \leqslant \|x^{-1}\|\|x - y\| < 1.$$

Entonces

$$y = x\big(e - x^{-1}(x - y)\big)$$

es invertible, lo cual establece (a).

Ahora bien, dado $\epsilon > 0$, tomemos $\delta = \text{mín}\,\{1/2\|x^{-1}\|, \epsilon/2\|x^{-1}\|^2\}$. Si $\|x - y\| < \delta$ entonces, como $\delta < \|x^{-1}\|^{-1}$ tenemos que

$$y = x\big(e - x^{-1}(x - y)\big)$$

es invertible con inversa

(8) $$y^{-1} = \big(e - x^{-1}(x - y)\big)^{-1}x^{-1}.$$

Del teorema 1.21 tenemos que

$$\big(e - x^{-1}(x - y)\big)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\big(x^{-1}(x - y)\big)^n.$$

Reemplazando la última igualdad en (8) obtenemos

$$y^{-1} = x^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(x^{-1}(x-y)\right)^n x^{-1}.$$

Por ende

$$\begin{aligned} \|y^{-1} - x^{-1}\| &\leqslant \|x^{-1}\| \sum_{n=1}^{\infty} \|x^{-1}(x-y)\|^n = \|x^{-1}\| \frac{\|x^{-1}(x-y)\|}{1 - \|x^{-1}(x-y)\|} \\ &\leqslant \|x^{-1}\|^2 \frac{\|x-y\|}{1 - \|x^{-1}(x-y)\|} \leqslant 2\|x^{-1}\|^2 \|x-y\|, \end{aligned}$$

donde la última desigualdad se debe a que $\|x-y\| < 1/2\|x^{-1}\|$. Por tanto, si $\|y-x\| < \delta$ entonces $\|y^{-1} - x^{-1}\| < \epsilon$, es decir la función $x \mapsto x^{-1}$ es continua. □

Definición 1.24. — Sea X un álgebra de Banach. Si $x \in X$, el *espectro* $\sigma(x)$ de x es el conjunto de todos los números complejos λ tal que $\lambda e - x$ no es invertible. El complemento de $\sigma(x)$ es el *conjunto resolvente* $\rho(x)$ de x, y consiste en los $\lambda \in \mathbb{C}$ para los cuales $(\lambda e - x)^{-1}$ existe. El *radio espectral* de x es el número

$$r_\sigma(x) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(x)\}.$$

Es simple verificar que $r_\sigma(x)$ es el radio de la bola más pequeña centrada en el origen que contiene a $\sigma(x)$.

Teorema 1.23. — Sea X un álgebra de Banach con identidad y $x \in X$, entonces

a) El espectro $\sigma(x)$ es compacto y no vacío;

b) El radio espectral $r_\sigma(x)$ verifica

$$r_\sigma(x) = \lim \|x^n\|^{1/n}.$$

Demostración. Sea $\lambda \in \mathbb{C}$, si $|\lambda| > \|x\|$ entonces $\lambda e - x = \lambda(e - \lambda^{-1}x)$, es invertible pues

$$\|\lambda^{-1}x\| = |\lambda^{-1}| \|x\| < 1.$$

Así, $\sigma(x)$ está contenido en $D_{\|x\|}(0)$.

Si $\lambda \notin \sigma(x)$ entonces $\lambda e - x$ es invertible. Tomemos $r > 0$ tal que si $\|y - (\lambda e - x)\| < r$, entonces y es invertible. Si $|\mu - \lambda| < r$ entonces

$$\|(\mu e - x) - (\lambda e - x)\| = |\mu - \lambda| < r,$$

de donde $\mu e - x$ es invertible, es decir $\mu \notin \sigma(x)$. Así, $\sigma(x)$ es cerrado, y por ende compacto.

Definamos $R : \rho(x) \to X$ por $R(\lambda) = (\lambda e - x)^{-1}$, y para cada $f \in \tilde{X}$ sea $F = f \circ R : \rho(x) \to \mathbb{C}$.

Si $\lambda, \mu \in \rho(x)$

$$\begin{aligned}R(\lambda) - R(\mu) &= (\lambda e - x)^{-1} - (\mu e - x)^{-1}\\ &= (\mu - \lambda)(\lambda e - x)^{-1}(\mu e - x)^{-1}\\ &= (\mu - \lambda)R(\lambda)R(\mu).\end{aligned}$$

Luego, si $\lambda_0 \in \rho(x)$

$$\begin{aligned}F(\lambda) - F(\lambda_0) &= f\big(R(\lambda) - R(\lambda_0)\big)\\ &= (\lambda_0 - \lambda)f\big(R(\lambda)R(\lambda_0)\big).\end{aligned}$$

Así, de la continuidad de f se tiene

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0} \frac{F(\lambda) - F(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} = -f\big(R(\lambda_0)^2\big).$$

Es decir, F es holomorfa en $\rho(x)$.

Supongamos que el espectro es vacío, en este caso F es una función entera y como

$$\lim_{|\lambda|\to\infty} \big|F(\lambda)\big| = \lim_{|\lambda|\to\infty} \Big|f\big((\lambda e - x)^{-1}\big)\Big| \leqslant \|f\| \lim_{|\lambda|\to\infty} \big|\lambda^{-1}(e - \lambda^{-1}x)\big| = 0,$$

del teorema 1.8 F es idénticamente nula.

Por lo tanto, sea $\lambda \in \mathbb{C}$, como la elección de $f \in \tilde{X}$ fue arbitraria tenemos que

$$f\big((\lambda e - x)^{-1}\big) = 0,$$

para todo $f \in X^*$, es decir $(\lambda e - x)^{-1} = 0$ lo cual representa un contradicción. Concluimos que el espectro es no vacío.

Ahora bien, sea $\lambda \in \mathbb{C}$, tenemos

$$\begin{aligned}\lambda^n - x^n &= (\lambda e - x)(\lambda^{n-1}e + \cdots + x^{n-1})\\ &= (\lambda^{n-1}e + \cdots + x^{n-1})(\lambda e - x).\end{aligned}$$

Por lo tanto $\lambda^n \in \sigma(x^n)$ si y sólo si $\lambda \in \sigma(x)^n$. Es decir, se verifica que $\sigma(x^n) = \sigma(x)^n$, lo cual implica que $r_\sigma(x)^n = r_\sigma(x^n) \leqslant \|x^n\|$, de donde

(9) $$r_\sigma(x) \leqslant \liminf \|x^n\|^{1/n}.$$

Si $|\lambda| > \|x\|$

$$R(\lambda) = (\lambda e - x)^{-1} = \lambda^{-1}(e - \lambda^{-1}x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-(n+1)}x^n.$$

Así, dado $f \in X^*$, $F = f \circ R$ verifica

$$F(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-(n+1)} f(x^n).$$

Además F es holomorfa en $\rho(x)$, en particular para aquellos $\lambda \in \mathbb{C}$ con $|\lambda| > r_\sigma(x)$.

Ahora bien, sea $\Psi : \rho(x)^{-1} \to \mathbb{C}$ definida por $\Psi(z) = F(z^{-1})$, dado que $z \mapsto z^{-1}$ es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ la función Ψ es holomorfa en $D_{1/r_\sigma(x)}(0) \setminus \{0\}$ y

$$(10) \qquad \Psi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{n+1} f(x^n),$$

cuando $|z| < 1/\|x\|$. Ahora

$$\begin{aligned}\lim_{z\to 0} \Psi(z) &= \lim_{z\to 0} f\big((z^{-1}e - x)\big)\\ &= f(\lim_{z\to 0} z(e - zx)^{-1}) = 0.\end{aligned}$$

Definiendo $\Psi(0) = 0$ obtenemos una función holomorfa en $D_{1/r_\sigma(x)}(0) \setminus \{0\}$, continua en cero y por lo tanto holomorfa también en cero. Así, Ψ admite un desarrollo en serie de potencias alrededor del cero con radio de convergencia $1/r_\sigma(x)$ y como admite el desarrollo dado en (10) para $|z| < 1/\|x\|$ del principio de la identidad

$$\Psi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{n+1} f(x^n)$$

para todo $|z| < 1/r_\sigma(x)$. Por tanto

$$(11) \qquad F(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-k-1} f(x^k)$$

para $|\lambda| > r_\sigma(x)$.

Sea $n \in \mathbb{N}$, si multiplicamos ambos lados de (11) por λ^n e integramos ambos lados de la igualdad resultante en $S_r(0)$ donde $r > r_\sigma(x)$, obtenemos

$$f(x^n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{S_r(0)} \lambda^n F(\lambda) d\lambda$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Así tenemos

$$|f(x^n)| \leqslant \frac{1}{2\pi} r^n M_F(r) l(S_r(0)) = r^{n+1} M_F(r).$$

Pero

$$\begin{aligned}M_F(r) &= \sup\Big\{ |F(\lambda)| : |\lambda| = r \Big\} = \sup\Big\{ \Big|f\big(R(\lambda)\big)\Big| : |\lambda| = r \Big\}\\ &\leqslant \|f\| \sup\Big\{ \|R(\lambda)\| : |\lambda| = r \Big\} = \|f\| M_R(r).\end{aligned}$$

Así, para todo $f \in X^*$ y todo $n \in \mathbb{N}$

$$\Big|f(x^n)\Big| \leqslant \|f\| r^{n+1} M_R(r).$$

Dado $n \in \mathbb{N}$ existe $f \in X^*$ con $\|f\| = 1$ tal que $f(x^n) = \|x^n\|$, luego para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\|x^n\| \leqslant r^{n+1} M_R(r),$$

de donde

$$\|x^n\|^{1/n} \leqslant r^{1+1/n} M_R(r)^{1/n},$$

y

(12) $$\lim\sup\|x^n\|^{1/n} \leqslant r.$$

De (9) y (12) se concluye el ítem (b). □

Teorema 1.24. — Si X es una álgebra de Banach con identidad en la cual todo elemento no nulo es invertible, entonces X es isométricamente isomorfa al campo complejo.

Demostración. Si $x \in X$ y λ_1, $\lambda_2 \in \sigma(x)$, entonces $\lambda_1 e - x$ y $\lambda_2 e - x$ son no invertibles, y por tanto nulos. Como $\sigma(x)$ es no vacío, entonces posee un sólo elemento $\lambda(x)$ que verifica la igualdad $\lambda(x)e = x$. El mapeo $x \mapsto \lambda(x)$ es un isomorfismo isométrico. En efecto, sean x, $y \in X$, como $x = \lambda(x)e$ y $y = \lambda(y)e$ entonces $xy = \lambda(x)\lambda(y)e$, es decir $\lambda(xy) = \lambda(x)\lambda(y)$. Análogamente se demuestra que $\lambda(x+y) = \lambda(x) + \lambda(y)$ y $\lambda(\alpha x) = \alpha\lambda(x)$. Además $|\lambda(x)| = \|\lambda(x)e\| = \|x\|$ y todo $\lambda \in \mathbb{C}$ es valor espectral de $x = \lambda e$. □

Definición 1.25. — Un subconjunto J de un álgebra de Banach conmutativa X se llama *ideal* si:

a) J es un subespacio vectorial de X;
b) $ax \in J$ para todo $a \in X$ y $x \in J$.

Si $J \neq X$, J es un *ideal propio*; si además J no está contenido propiamente en otro ideal (distinto de X) decimos que J es un *ideal maximal*.

Proposición 1.1. — Sea X un álgebra de Banach conmutativa con identidad, tenemos:

a) Los ideales propios de X no contienen elementos invertibles;
b) Si J es un ideal de X entonces su cerradura $\overline{J}$ también es un ideal.

Demostración. Sea $a \in \overline{J}$, es decir $a = \lim a_n$, donde $a_n \in J$ y sea $x \in X$. De la continuidad del producto tenemos

$$ax = \lim a_n x$$

y como $a_n x \in J$ para todo $n \in \mathbb{N}$ se concluye que $ax \in \overline{J}$, lo cual establece el ítem (b). La demostración de ítem (a) es trivial. □

Teorema 1.25. — Sea X un álgebra de Banach conmutativa con identidad, entonces:

a) Todo ideal propio está contenido en un ideal maximal;
b) Todo ideal maximal es cerrado.

Demostración.

a) Sea J un ideal propio de X. Definamos el conjunto

$$\mathcal{P} = \{I \subset X :\ J \subset I, I \text{ es ideal propio}\},$$

parcialmente ordenado por inclusión y $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}$ totalmente ordenado. Tomemos

$$M = \cup_{I \in \mathcal{Q}} I.$$

Es claro que M es un ideal. Afirmamos que M es propio. En efecto, caso contrario tenemos que $e \in M$ por lo cual $e \in I$ para algún $I \in \mathcal{Q}$, pero por la proposición 1.1 los ideales propios no contienen elementos invertibles, lo cual representa una contradicción.

Así, M es cota superior de $\mathcal{Q}$. Por el lema de Zorn (cf. [**Halmos, 1960**, Sec. 16]), $\mathcal{P}$ admite un elemento maximal J_0. Afirmamos que J_0 es un ideal maximal. En efecto, si $I \supset J_0$ es ideal propio entonces $J \subset I$ lo cual significa que $I \in \mathcal{P}$, pero J_0 es elemento maximal, por lo cual $J_0 \supset I$ de modo que $J_0 = I$. Así, $J_0 \supset J$ es un ideal maximal.

b) Sea M ideal maximal, por la proposición 1.1 $\overline{M}$ es también un ideal. Supongamos que $e \in \overline{M}$, en ese caso tenemos

$$e = \lim a_n,$$

donde $a_n \in M$ y como el conjunto de elementos invertibles $\mathcal{U} \ni e$ es abierto, $a_n \in \mathcal{U}$ para todo n suficientemente grande. Es decir, M contiene elementos invertibles, lo cual representa una contradicción. Así, $e \notin \overline{M}$, es decir $\overline{M}$ es un ideal propio, y como $M \subset \overline{M}$ entonces $M = \overline{M}$.

□

Sea X es un espacio vectorial y V un subespacio. Definamos la relación de equivalencia $(x, y) \in R$ si y solo si $x - y \in V$, y la función $\pi : X \to X/V$ dada por $\pi(x) = x + V$.

El conjunto X/V es un espacio vectorial con la suma y producto dados por

$$\pi(x) + \pi(y) = \pi(x + y),$$
$$\alpha\pi(x) = \pi(\alpha x).$$

La definición de suma y producto en X/V hacen que π sea una transformación lineal.

Teorema 1.26. — Si X es un álgebra de Banach conmutativa y $I \subset X$ es un ideal cerrado propio, entonces X/I es una álgebra de Banach conmutativa. Si además X tiene identidad, entonces X/I también la tiene.

Demostración. Por ser X un espacio de Banach y I un subespacio cerrado X/I es un espacio de Banach respecto a la norma

$$\|\pi(x)\| = \inf\{a \in X : a \in \pi(x)\}.$$

Definamos la multiplicación en X/I de la siguiente manera

$$\pi(x)\pi(y) = \pi(xy).$$

Si $x' \in \pi(x)$ e $y' \in \pi(y)$ tenemos

$$xy - x'y' = x(y - y') + (x - x')y' \in I.$$

Así, la multiplicación esta bien definida. Solo resta mostrar que

$$\|\pi(x)\pi(y)\| \leqslant \|\pi(x)\|\|\pi(y)\|,$$

es decir

$$\|\pi(xy)\| \leqslant \|\pi(x)\|\|\pi(y)\|. \tag{13}$$

Para ello sean $a \in \pi(x)$, $b \in \pi(y)$ tenemos

$$ab - xy = (a - x)b + x(b - y) \in I.$$

Así $ab \in xy + I$ y

$$\|\pi(xy)\| \leqslant \|ab\| \leqslant \|a\|\|b\|,$$

de donde obtenemos (13). La verificación de las demás condiciones de un álgebra de Banach así como la conmutatividad de la multiplicación es trivial. Supongamos que X posee una identidad e. En ese caso tenemos

$$\|\pi(e)\| \leqslant \|e\| = 1.$$

Supongamos que $\|\pi(e)\| < 1$; en este caso existe $x \in \pi(e)$ tal que $\|x\| < 1$, de donde $e - x \in I$ es invertible, lo cual es una contradicción pues I es un ideal propio. □

De la definición de norma en X/I se tiene que $\|\pi(x)\| \leqslant \|x\|$, por lo cual π es una transformación lineal continua.

Sean X y Y álgebras conmutativas con identidad y $\varphi : X \to Y$ un homomorfimo continuo no nulo. Entonces $\mathrm{N}(\varphi) = \varphi^{-1}(0)$ es un ideal cerrado propio. Recíprocamente, si $I \subset X$ es un ideal cerrado propio, por el teorema 1.26 X/I es un álgebra de Banach, y $\pi : X \to X/I$ un homomorfismo continuo.

Teorema 1.27. — Sea X un álgebra de Banach conmutativa con identidad, y sea $\triangle(X)$ el conjunto de todos los homomorfismos complejos de X.

a) Todo ideal maximal de X es el núcleo de algún $h \in \triangle(X)$.
b) Si $h \in \triangle(X)$, el núcleo de h es un ideal maximal de X.
c) Sea $x \in X$, $h(x) \neq 0$ para todo $h \in \triangle(X)$ si y sólo si x es invertible.
d) Un elemento $x \in X$ es invertible si y sólo si x no pertenece a algún ideal propio de X.
e) $\lambda \in \sigma(x)$ si y sólo si $h(x) = \lambda$ para algún $h \in \triangle(X)$.

Demostración.

a) Sea I un ideal maximal; sabemos que $\pi : X \to X/I$ es un homomorfismo continuo. Sea $x \in X$ tal que $\pi(x) \neq I$, es decir $x \notin I$. En ese caso $J = I + xX$ es un ideal que contiene a I propiamente, por lo cual $J = X$, y $e \in J$, luego $e = a + yx$ para algún $a \in I$, $y \in X$. Así $e - xy = a \in I$ de donde $\pi(x)\pi(y) = \pi(xy) = \pi(e)$, en otras palabras $\pi(x)$ es invertible. Del teorema 1.24 existe $\varphi : X/I \to \mathbb{C}$ isomorfismo isométrico. La función $h = \varphi \circ \pi \in \triangle(X)$ tiene por núcleo a I.

b) Sea $h \in \triangle(X)$, es claro que $\mathrm{N}(h)$ es un ideal cerrado propio. Si $x \notin \mathrm{N}(h)$ entonces $J = \mathrm{N}(h) + xX$ es un ideal que contiene propiamente a $\mathrm{N}(h)$. Además, si $z \in X$, $y = z - \big(h(x)^{-1}e\big)x \in \mathrm{N}(h)$, de donde $z = y + \big(h(x)^{-1}e\big)x \in J$, es decir $J = X$. Por lo tanto $\mathrm{N}(h)$ es maximal.

c) Si x no es invertible entonces $I = xX$ es un ideal propio pues $e \notin I$. Sea $J \supset I$ un ideal maximal, por el item (a) $J = \mathrm{N}(h)$ para algún $h \in \triangle(X)$. Por lo tanto $x \in I \subset \mathrm{N}(h)$, es decir $h(x) = 0$. Recíprocamente, si x es invertible, del teorema 1.20 $h(x) \neq 0$ para todo $h \in \triangle(X)$.

d) Ningún elemento invertible pertenece a un ideal propio. El recíproco fue probado en (c).

e) Basta aplicar (c) a $\lambda e - x$ en lugar de x.

□

Definición 1.26. — Sea $\triangle(X)$ el conjunto de todos lo homomorfismos complejos de una álgebra de Banach conmutativa X. Si $h \in \triangle(X)$

$$\hat{x}(h) = h(x).$$

asigna a cada $x \in X$ una función $\hat{x} : \triangle(X) \to \mathbb{C}$, llamada *transformada de Gelfand* de x.

Sea $\hat{X}$ el conjunto de todos los $\hat{x}$ con $x \in X$. La *topología de Gelfand* de $\triangle(X)$ es la topología débil generada por $\hat{X}$, es decir, la topología más pequeña que hace a todas los $\hat{x}$ continuas.

Los abiertos básicos de esta topología son

$$V(h, x_1, \ldots, x_N, \epsilon) = \{f \in \triangle(X) : |f(x_k) - h(x_k)| < \epsilon,\ k = 1, \ldots, N\},$$

donde $h \in \triangle(X)$, $N \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_N \in X$.

Obviamente $\hat{X} \subset C(\triangle(X))$. El $\triangle(X)$ equipado con su topología de Gelfand es llamado *espacio de ideales maximales de* X.

Definición 1.27. — El *radical* de X, denotado por $\operatorname{rad} X$, es la intersección de todos los ideales maximales de X. Si $\operatorname{rad} X = \{0\}$, X se llama *semisimple.*

Teorema 1.28. — Sea $\triangle(X)$ el espacio de ideales maximales del álgebra de Banach conmutativa X.

a) $\triangle(X)$ es un espacio de Hausdorff localmente compacto.

Si además X tiene identidad:

b) $\triangle(X)$ es compacto.

c) La transformada de Gelfand es un homomorfismo de X sobre el subálgebra $\hat{X}$ de $C(\triangle(X))$, cuyo núcleo es $\operatorname{rad} X$. Por lo tanto, la transformada de Gelfand es un isomorfismo si y solo si X es semisimple.

d) Para cada $x \in X$, el rango de $\hat{x}$ es el espectro $\sigma(x)$. Así

$$\|\hat{x}\|_\infty = r_\sigma(x) \leqslant \|x\|,$$

donde $\|\hat{x}\|_\infty = \text{máx}\Big\{|\hat{x}(h)| : h \in \triangle(X)\Big\}$, y $x \in \operatorname{rad} X$ si y solo si $r_\sigma(x) = 0$.

Demostración.

a) Como los homomorfismos complejos son funcionales lineales continuas de norma uno $\triangle(X) \cup \{0\} \subset D_1(0) \subset \tilde{X}$.

Afirmamos que $\triangle(X) \cup \{0\}$ es compacto con la topología débil-$*$. Como $D_1(0)$ es compacto débil-$*$ basta mostrar que $\triangle(X) \cup \{0\}$ es cerrado débil-$*$.

Sea h_0 un elemento de la cerradura débil-$*$ de $\triangle(X) \cup \{0\}$. Debemos mostrar que

$$h_0(xy) = h_0(x)h_0(y). \tag{14}$$

Dado $\epsilon > 0$ la vecindad $V(h_0, x, y, xy, \epsilon)$ de h_0 contiene un elemento $h \in \triangle(X) \cup \{0\}$. Luego

$$\begin{aligned} h_0(x)h_0(y) - h_0(xy) = {} & \big(h_0(x) - h(x)\big)h_0(y) + h(x)\big(h_0(y) - h(y)\big) \\ & + h(x)h(y) - h_0(xy), \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned}\big|h_0(x)h_0(y) - h_0(xy)\big| &\leqslant \epsilon\Big(\big|h_0(y)\big| + \big|h(x)\big| + 1\Big)\\ &\leqslant \epsilon\Big(\big|h_0(y)\big| + \|x\| + 1\Big).\end{aligned}$$

Como la elección de $\epsilon > 0$ fue arbitraria, h_0 verifica (14), es decir $h_0 \in \triangle(X) \cup \{0\}$.

Es claro que la topología de Gelfand en $\triangle(X)$ es la topología heredada de la topología débil-$*$ en $\tilde{X}$. Así, la topología de Gelfand separa puntos pues la topología débil-$*$ lo hace. Por lo tanto, sea $h \in \triangle(X)$, como $h \neq 0$ existen V_1, V_2 abiertos en la topología de Gelfand tal que $0 \in V_1$, $h \in V_2$, y $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, es decir

$$\overline{V_2} \subset V_1^c. \tag{15}$$

Como V_1^c es cerrado en la topología de Gelfand, $V_1^c = F \cap \triangle(X)$ donde F es cerrado débil-$*$. Además como $0 \notin F$

$$F \cap \triangle(X) = F \cap \big(\triangle(X) \cup \{0\}\big).$$

El conjunto al lado derecho de la última igualdad es cerrado en $\triangle(X) \cup \{0\}$ y por ende compacto. Así, V_1^c es compacto en la topología de Gelfand, y de (15) concluimos que $\overline{V_2}$ es compacto. Es decir, $\triangle(X)$ es localmente compacto.

b) Sabemos que $\triangle(X) \subset D_1(0) \subset \tilde{X}$. Si X tiene identidad afirmamos que $\triangle(X)$ es cerrado en la topología débil-$*$, lo cual implica que es compacto. En efecto, sea h_0 en la cerradura débil-$*$ de $\triangle(X)$, de manera similar a lo hecho en el ítem (a) se demuestra que h_0 verifica (14).

Dado $\epsilon > 0$ la vecindad $V(h_0, e, \epsilon)$ de h_0 contiene un elemento de $h \in \triangle(X)$. Luego $\big|1 - h_0(e)\big| = \big|h(e) - h_0(e)\big| < \epsilon$, de donde

$$h_0(e) = 1.$$

Así, h_0 es un homomorfismo complejo, es decir $h_0 \in \triangle(X)$.

c) Sean $x, y \in X$, $\alpha \in \mathbb{C}$ y $h \in \triangle(X)$. Entonces, como

$$\begin{aligned}\widehat{\alpha x}(h) &= h(\alpha x) = \alpha h(x) = (\alpha\hat{x})(h),\\ \widehat{x+y}(h) &= h(x+y) = h(x) + h(y) = \hat{x}(h) + \hat{y}(h) = (\hat{x}+\hat{y})(h),\\ \widehat{xy}(h) &= h(xy) = h(x)h(y) = \hat{x}(h)\hat{y}(h) = (\hat{x}\hat{y})(h),\end{aligned}$$

$\hat{X}$ es un subálgebra de $C\big(\triangle(X)\big)$ y $x \mapsto \hat{x}$ es un homomorfismo. Su núcleo está conformado por aquellos $x \in X$ tales que $h(x) = 0$ para todo $h \in \triangle(X)$; es decir aquellos x en la intersección de todos los ideales maximales de x, esto es, $\operatorname{rad} X$.

d) Si λ está contenido en el rango de $\hat{x}$ entonces $\lambda = \hat{x}(h) = h(x)$ para algún $h \in \triangle(X)$. Por (e) del teorema 1.27, esto ocurre si y solo si $\lambda \in \sigma(x)$.

□

1.4. Teoría de integración.

Definición 1.28. — El *soporte topológico* de una función compleja f definida en un espacio topológico X es el conjunto

$$\mathrm{Supp}(f) = \overline{\{x : f(x) \neq 0\}}.$$

El conjunto de todas las funciones complejas definidas en X cuyo soporte topológico es compacto se denotará por $C_c(X)$.

El conjunto $C_c(X)$ con las operaciones usuales de suma y producto con un escalar forman un espacio vectorial.

Definición 1.29. — Una funcional lineal $\Lambda : C_c(X) \to \mathbb{C}$ es *positiva* si $\Lambda f \geqslant 0$ para todo $f \geqslant 0$.

Definición 1.30. — Sea X un espacio topológico. Se dice que X es *localmente compacto* si para todo $x \in X$, podemos encontrar una vecindad V de x tal que $\overline{V}$ es compacto.

Teorema 1.29. — Sea X un espacio de Hausdorff localmente compacto, y sea Λ una funcional lineal positiva en $C_c(X)$. Entonces existe una σ-álgebra $\mathfrak{M}$ en X que contiene a todos los conjuntos de Borel en X, y existe una única medida positiva μ en $\mathfrak{M}$ tal que

a)

$$\Lambda f = \int_X f d\mu$$

para todo $f \in C_c(X)$ y que tiene las siguientes propiedades:

b) $\mu(K) < \infty$ para todo compacto $K \subset X$.

c) Para todo $E \in \mathfrak{M}$, tenemos

$$\mu(E) = \inf\{\mu(V) : E \subset V,\ V \text{ abierto}\}. \tag{16}$$

d) La relación

$$\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \subset E,\ K \text{ compacto}\} \tag{17}$$

se verifica para todo abierto E, y para todo $E \in \mathfrak{M}$ con $\mu(E) < \infty$.

e) Si $E \in \mathfrak{M}$, $A \subset E$, y $\mu(E) = 0$, entonces $A \in \mathfrak{M}$.

Definición 1.31. — Sea X un espacio con medida. Decimos que la medida es *regular exterior* (respectivamente *regular interior*) si verifica (16) (respectivamente (17)) para todo conjunto medible.

Así, la medida en el teorema 1.29 es regular exterior, y es regular interior en conjuntos abiertos y en aquellos de medida finita.

Definición 1.32. — Si $1 < p < \infty$ y si f es una función compleja medible en X, definimos

$$||f||_p = \left\{\int_X |f|^p d\mu\right\}^{1/p},$$

y a $L^p(\mu)$ como el conjunto de aquellas funciones tales que

$$||f||_p < \infty.$$

Definición 1.33. — Si p y q son números reales positivos tales que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

entonces decimos que p y q son *exponentes conjugados.*

Cuando $p \to 1$ entonces $q \to \infty$. Por lo tanto decimos que 1 y ∞ son conjugados.

Teorema 1.30 (Desigualdad de Hölder). — Si p y q son exponentes conjugados, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ y si $f \in L^p(\mu)$ y $g \in L^q(\mu)$, entonces $fg \in L^1(\mu)$, y

$$||fg||_1 \leqslant ||f||_p||g||_q.$$

Demostración. [Rudin, 1987, Theorem 3.8] □

Teorema 1.31. — Si $1 \leqslant p \leqslant \infty$, y $f \in L^p(\mu)$, $g \in L^p(\mu)$, Entonces $f + g \in L^p(\mu)$, y

$$||f+g||_p \leqslant ||f||_p + ||g||_p.$$

Demostración. [Rudin, 1987, Theorem 3.9] □

Finalmente hacemos notar que

a) $||\alpha f||_p = |\alpha| ||f||_p$, para $\alpha \in \mathbb{C}$.

b) $||f||_p = 0$ si y sólo si $f = 0$ c.t.p.

El teorema 1.31, y los dos anteriores items muestran que se puede introducir una norma en $L^p(\mu)$. Definamos $f \sim g$ si y sólo si $||f-g|| = 0$, es decir, si $f = g$ c.t.p. El conjunto de clases que determina esta relación de equivalencia es un espacio vectorial si definimos

$$[f] + [g] = [f+g],$$
$$\alpha[f] = [\alpha f],$$

y es un espacio normado si se define

$$\left|\left|[f]\right|\right|_p = ||f||_p.$$

Así al ver a $L^p(\mu)$ como un espacio normado, realmente estamos considerando el conjunto un conjunto cuyos elementos son clases de equivalencia.

Teorema 1.32 (Convergencia dominada). — Sea (X, μ) un espacio con medida y $f_n : X \to \mathbb{C}$ una sucesión de funciones medibles tal que

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

existe para todo $x \in X$. Si existe una función $g \in L^1(\mu)$ tal que, para $n = 1, 2, \ldots$, y $x \in X$

$$|f_n(x)| \leqslant g(x)$$

entonces $f \in L^1(\mu)$,

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| d\mu = 0,$$

y

$$\lim_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu.$$

Demostración. [**Rudin, 1987**, Theorem 1.34]. □

Definición 1.34. — Sea X un espacio con una medida positiva μ. Decimos que μ es *σ-finita* si X puede ser expresado como unión numerable de conjuntos medibles con medida finita.

Sea μ una medida positiva, sea $1 \leqslant p \leqslant \infty$, y q el exponente conjugado de p. La desigualdad de Hölder (teorema 1.30) muestra que si $g \in L^q(\mu)$ y

$$\Phi_g(f) = \int_X fg d\mu,$$

entonces Φ_g es una funcional lineal acotada en $L^p(\mu)$. La recíproca de esta afirmación está contenida en el siguiente teorema.

Teorema 1.33. — Sea $1 \leqslant p < \infty$, μ una medida σ-finita en X, y Φ una funcional lineal en $L^p(\mu)$. Entonces existe una única $g \in L^q(\mu)$, donde q es el exponente conjugado de p, tal que

$$\Phi(f) = \int_X fg d\mu$$

para todo $f \in L^p(\mu)$. Además, en este caso

$$||\Phi|| = ||g||_q.$$

Demostración. [**Rudin, 1987**, Theorem 6.16]. □

Cabe notar que si $1 < p < \infty$ la condición de que μ sea σ-finita puede ser omitida [**Bartle, 1995**, §8.15].

Estaremos interesados en el espacio de funciones de cuadrado integrable $L^2(\mu)$, en este espacio se puede introducir un producto interno. En efecto, si f, $g \in L^2(\mu)$ entonces, por el teorema 1.30, $fg \in L^1(\mu)$. Así, definimos

$$\langle f, g\rangle = \int_X |fg| d\mu$$

Se puede demostrar que, con respecto a este producto interno, $L^2(\mu)$ es un espacio de Hilbert [**Rudin, 1987**, Theorem 3.11].

Bajo las hipótesis del teorema 1.29 se tiene:

Teorema 1.34. — Para $1 \leqslant p < \infty$, $C_c(X)$ es denso en $L^p(\mu)$.

Demostración. [**Rudin, 1987**, Theorem 3.14]. □

Sea $X = (0,1)$ con la medida de Lebesgue, en este caso el conjunto de funciones de cuadrado integrable se denota por $L^2(0,1)$. El teorema anterior tiene el siguiente corolario.

Corolario 1.3. — El conjunto de los polinomios definidos en $(0, 1)$ es denso en $L^2(0, 1)$.

Demostración. Por el teorema 1.34 dado $\epsilon > 0$ y $f \in L^2(0, 1)$ podemos encontrar una función g de soporte compacto $K \subset (0, 1)$ tal que $||f - g||_2 < \epsilon$. Sea $K \subset [a, b] \subset (0, 1)$

un intervalo cerrado cuyo complemento en $(0,1)$ tenga medida menor a ϵ. Por el teorema de aproximación de Weierstrass (cf. [**Dugundji, 1965**, p. 282, Ex. 1]) existe un polinomio p tal que $|g(x) - p(x)| < \epsilon$, para todo $x \in [a,b]$. Luego

$$||g-p||_2^2 = \int_0^1 |g(x)-p(x)|^2 dx = \int_a^b |g(x)-p(x)|^2 dx + \int_{(0,1)\setminus[a,b]} |p(x)|^2 dx$$

Si $M > 0$ es tal que $|p(x)| < M$ para todo $x \in [0,1]$, entonces

$$||g-p||_2^2 \leqslant (b-a)\epsilon^2 + M^2\epsilon$$

Así tenemos que

$$||f-p||_2 \leqslant ||f-g||_2 + ||g-p||_2 \leqslant \epsilon(\sqrt{b-a+M^2/\epsilon}+1).$$

□

Como el conjunto de los polinomios es generado por $\{1, x, x^2, \ldots\}$, podemos escribir el teorema anterior como

$$L^2(0,1) = \overline{\mathrm{Vect}\{1, x, x^2, \ldots\}}. \tag{18}$$

Sean $(X, \mathfrak{S})$, $(Y, \mathfrak{J})$ espacios medibles. Un *rectángulo medible* es un conjunto de la forma $A \times B$ donde $A \in \mathfrak{S}$ y $B \in \mathfrak{J}$. Definimos $\mathfrak{S} \times \mathfrak{J}$ como la σ-álgebra más pequeña en $X \times Y$ que contiene a los rectángulos medibles.

Definición 1.35. — Si $E \subset X \times Y$, $x \in X$, $y \in Y$, definimos

$$E_x = \{y : (x,y) \in E\}, \qquad E^y = \{x : (x,y) \in E\}.$$

Si f es una función en $X \times Y$, a cada $x \in X$ asociamos una función f_x definida en Y por $f_x(y) = f(x,y)$. Si $y \in Y$, f^y se define en X por $f^y(x) = f(x,y)$.

Definición 1.36. — Si $(X, \mathfrak{S}, \mu)$, $(Y, \mathfrak{J}, \lambda)$ son espacios con medida σ-finita, y si $Q \in \mathfrak{S} \times \mathfrak{J}$ definimos

$$(\mu \times \lambda)(Q) = \int_X \lambda(Q_x) d\mu = \int_y \mu(Q^y) d\lambda. \tag{19}$$

La función $\mu \times \lambda$ está bien definida pues las integrales que aparecen en (19) son iguales [**Rudin, 1987**, Theorem 7.6].

Teorema 1.35 (Fubini). — Sean $(X, \mathfrak{S}, \mu)$, $(Y, \mathfrak{J}, \lambda)$ espacios con medida σ-finita, y sea f una función definida en $X \times Y$ y medible con $\mathfrak{S} \times \mathfrak{J}$.

a) Si $0 \leqslant f \leqslant \infty$, y si

$$\varphi(x) = \int_Y f_x d\lambda, \quad \psi(y) = \int f^y d\mu. \quad (x \in X,\ y \in Y) \tag{20}$$

entonces φ es $\mathfrak{S}$-medible, ψ es $\mathfrak{J}$ medible, y

$$\int_X \varphi d\mu = \int_y \psi d\lambda. \tag{21}$$

b) Si $f \in L^1(\mu \times \lambda)$ entonces $f_x \in L^1(\lambda)$ para casi todo $x \in X$, $f^y \in L^1(\mu)$ para casi todo $y \in Y$; las funciones φ y ψ definidas en (20) c.t.p. están en $L^1(\mu)$ y $L^1(\lambda)$, respectivamente y (21) se verifica.

1.5. Propiedades de las proyecciones ortogonales

Comenzaremos esta sección revisando algunos conceptos de análisis convexo (cf. [**Bachman, 2000**, chap. 22]).

Teorema 1.36. — Sea $C \neq \emptyset$ un subconjunto convexo y cerrado de un espacio de Hilbert real H, y $a \in H$. Entonces existe un único $p \in C$ tal que, para todo $x \in C$

$$\|p - a\| \leqslant \|x - a\|.$$

Se dice que p es la *proyección de a sobre C*, y se denotará por $P_C(a)$. Además, son equivalentes

1. $p = P_C(a)$;
2. $p \in C$ y $\langle a - p, x - p\rangle \leqslant 0$ para todo $x \in C$.

Demostración. Sea $m = \inf\{\|x - a\|^2 : x \in C\}$. Dado $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in C$ tal que $m < \|x_n - a\|^2 \leqslant m + \frac{1}{n}$. Luego, dados dos enteros positivos n y p, usando la identidad del paralelogramo [**Hoffman and Kunze, 1971**, p. 273, Ex. 9] tenemos que

$$\begin{aligned}\|x_n - x_{n+p}\|^2 &= \big\|(x_n - a) + (a - x_{n+p})\big\|^2\\ &= 2\big(\|x_n - a\|^2 + \|x_{n+p} - a\|^2\big) - 4\Big\|\frac{x_n + x_{n+p}}{2} - a\Big\|^2,\end{aligned}$$

y como C es convexo se tiene que $m \leqslant \big\|\frac{x_n + x_{n+p}}{2} - a\big\|^2$, de donde

$$\|x_n - x_{n+p}\|^2 \leqslant \frac{4}{n}.$$

Luego, la sucesión (x_n) es de Cauchy, y por lo tanto converge a un punto $p \in C$, el cual verifica $\|p - a\|^2 = m$, de donde se sigue que $\|p - a\| \leqslant \|x - a\|$ para todo $a \in C$.

Ahora bien dado $x \in C$ y $p = P_C(a)$, tenemos que $p + \frac{1}{n}(x - p) \in C$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego

$$\|p - a\|^2 \leqslant \Big\|p + \frac{1}{n}(x - p) - a\Big\|^2 = \|p - a\|^2 + \frac{2}{n}\langle p - a, x - p\rangle + \frac{1}{n^2}\|x - p\|^2,$$

de donde

$$0 \leqslant 2\langle p - a, x - p\rangle + \frac{1}{n}\|x - p\|^2,$$

y tomando límite cuando n tiende al infinito obtenemos

$$\langle a - p, x - p\rangle \leqslant 0.$$

Recíprocamente, sea $p \in C$ tal que $\langle a-p, x-p\rangle \leqslant 0$ para todo $x \in C$. Tenemos que

$$\frac{1}{2}\left(\|a-p\|^2-\|a-x\|^2\right) \leqslant \frac{1}{2}\left(\|a-p\|^2+\|x-p\|^2-\|a-x\|^2\right)$$
$$= \langle a-p, x-p\rangle,$$

es decir, $\|p-a\| \leqslant\|x-a\|$ para todo $x \in C$. Finalmente, si $p_1, p_2 \in C$ verifican esta condición. Luego, $\langle p_1-a, p_1-p_2\rangle \leqslant 0$ y $\langle a-p_2, p_1-p_2\rangle \leqslant 0$. De donde, $\|p_2-p_1\|^2 = 0$.
□

El teorema anterior nos permite definir una función $P_C : H \to H$, llamada *operador proyección* que a cada $x \in H$ le asigna su proyección sobre el conjunto C.

El teorema siguiente nos dice que el operador proyección es no expansivo.

Teorema 1.37. — Sea $C \neq \emptyset$ un subconjunto convexo y cerrado de un espacio de Hilbert H, entonces

$$\left\|P_C(x)-P_C(y)\right\| \leqslant\|x-y\|$$

para todo $x, y \in H$.

Demostración. La caracterización de la proyección junto al hecho que $P_C(x)$ y $P_C(y)$ pertenecen a C implican

$$\left\langle y-P_C(y), P_C(x)-P_C(y)\right\rangle \leqslant 0,$$
$$\left\langle x-P_C(x), P_C(y)-P_C(x)\right\rangle \leqslant 0.$$

Por lo tanto

$$\left\|P_C(x)-P_C(y)\right\|^2 \leqslant \langle x-y, P_C(x)-P_C(y)\rangle$$
$$\leqslant\|x-y\|\left\|P_C(x)-P_C(y)\right\|,$$

lo que demuestra el teorema. □

Corolario 1.4. — Bajo las hipótesis del teorema 1.37, P_C es continuo.

El siguiente teorema recopila algunas propiedades adicionales del operador proyección P_V en el caso particular en que V es un subespacio cerrado de H.

Teorema 1.38. — Sea V un subespacio cerrado de un espacio de Hilbert H. El operador P_V verifica las siguientes propiedades.

1. Para todo $x \in H, y \in V$, $y = P_V(x)$ si y solamente si $y-x \in V^{\perp}$;
2. P_V es una transformación lineal de H sobre V.

Demostración. Para demostrar el ítem 1 basta ver que todo $v \in V$ puede escribirse de la forma $v = y-P_V(x)$ para algún $y \in V$, y usar la caracterización del operador proyección dada en el teorema 1.36.

Ahora, sea $x \in H$, del ítem 1 tenemos que $x-P_V(x) \in V^{\perp}$, es decir $x = P_V(x)+z$, con $z \in V^{\perp}$, y debido a que $V \cap V^{\perp} = \{0\}$, tenemos que si $x = v+v'$ con $v \in V$, $v' \in V^{\perp}$, entonces $v = P_V(x)$, y $v' = z$. El ítem 2 se deriva de esta unicidad. □

Como vimos en la demostración del teorema anterior, cada $x \in V$ puede ser escrito de manera única como suma de elementos de V y de $V^{\perp}$. En este caso se dice que H se descompone en suma directa $H = V \oplus V^{\perp}$.

Concluimos esta sección con un corolario del teorema de Hahn-Banach [**Bachman, 2000**, Theorem 11.1].

Teorema 1.39. — Sea V un subespacio del espacio normado X y sea $x_1 \in X$ tal que $d(x_1, M) = d$, es positiva. Entonces existe una funcional lineal acotada F, con norma 1, tal que $F(x_1) = d$ y, para cualquier $x \in M$, $F(x) = 0$.

Demostración. [Bachman, 2000, Theorem 12.3] □

Se debe hacer notar que si M es un subespacio propio cerrado de X y $x_1 \notin M$, entonces las hipótesis previas son satisfechas. Usualmente, esta es la situación en la que se aplica este teorema.

1.6. Integral de Stieltjes.

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $x \in \mathbb{R}$. Usamos la siguiente notación

$$f(x+0) = \lim_{x\to 0^+} f(x), \qquad f(x-0) = \lim_{x\to 0^-} f(x).$$

Definición 1.37. — Una *partición del intervalo* $[a,b]$ es un subconjunto finito $P \subset [a,b]$ tal que $a \in P$ y $b \in P$. Cuando escribimos $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ convenimos que $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$.

Sea $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función real definida en el intervalo compacto $[a,b]$. Para una partición $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ de $[a,b]$ definimos

$$V(\alpha, P) = \sum_{k=1}^{n} \left|\alpha(t_k) - \alpha(t_{k-1})\right|,$$
$$V(\alpha) = \sup\{V(\alpha, P); P \subset [a,b] \text{ es una partición}\}.$$

Llamamos a $V(\alpha)$ la *la variación total de* α. Si $V(\alpha) < \infty$ decimos que α es de *variación acotada*.

Ejemplo 1. — Si α es una función monótona no decreciente, entonces para toda partición $P \subset [a,b]$ tenemos que $V(\alpha, P) = \alpha(b) - \alpha(a)$. Luego α tiene variación acotada.

Definición 1.38. — La *norma de una partición* $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\} \subset [a,b]$ es el número $|P| = \max_{k=1,\ldots,n} \{t_k - t_{k-1}\}$. Sean $f, \alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ dos funciones. Dada una partición $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\} \subset [a,b]$, y un conjunto de puntos $\xi = \{\xi_k \in [t_{k-1}, t_k]; k = 1, \ldots, n\}$. El par (P, ξ) se llama *partición punteada* y se denota por P^*. A cada partición punteada P^* del intervalo $[a,b]$ asociamos la *suma de Stieltjes* $\sum(f, \alpha, P^*) = \sum(P^*)$, definida por

$$\sum(P^*) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\left[\alpha(t_k) - \alpha(t_{k-1})\right].$$

Definimos la *integral de Stieltjes* de f relativamente a α por

$$\int_a^b f(t)d\alpha = \lim_{|P|\to 0} \sum(P^*).$$

La igualdad arriba significa que, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\left| \int_a^b f(t)d\alpha - \sum(P^*) \right| < \epsilon$, para toda partición punteada P^*, con $|P| < \delta$.

Uno de los aspectos que demuestra el verdadero potencial de la integral de Riemann-Stieltjes se presenta cuando la función α es una función escalonada como la función parte entera o la función escalón unitario, como se ve en la siguiente proposición.

Proposición 1.2. — Sean f y α como en la definición anterior y $Q = \{t_0, \ldots, t_n\}$ una partición del intervalo $[a, b]$. Supongamos que α es constante en los intervalos (t_k, t_{k+1}), $k = 0, \ldots, n-1$ y que f es continua en Q. Bajo estas hipótesis, tenemos

$$\int_a^b f(t)d\alpha = \sum_{k=0}^{n} f(t_k)\big(\alpha(t_k + 0) - \alpha(t_k - 0)\big),$$

donde $\alpha(t_0 - 0) = \alpha(t_0)$ y $\alpha(t_n + 0) = \alpha(t_n)$.

Demostración. Haremos la demostración en el caso que α es constante en los intervalos $[a, c)$ y $(c, b]$ donde $a < c < b$, el caso general es análogo.

Si P^* es una partición punteada del intervalo $[a, b]$, entonces

$$\sum(P^*) = f(\xi_k)\big(\alpha(t_k) - \alpha(t_{k-1})\big) = f(\xi_k)\big(\alpha(c+0) - \alpha(c-0)\big))$$

donde $[t_{k-1}, t_k]$ es el intervalo de la partición que contiene a c. Por la continuidad de f en c vemos que $f(\xi_k) \to f(c)$ cuando $|P| \to 0$, luego

$$\int_a^b f(t)d\alpha = \lim_{|P|\to 0} \sum(P^*) = f(c)\big(\alpha(c+0) - \alpha(c-0)\big))$$

□

Ejemplo 2. — Como una aplicación directa de la proposición anterior, tenemos la siguiente igualdad entre las sumas parciales de una serie y una integral relativa la función parte entera $\lfloor \cdot \rfloor$.

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \int_0^n f(x)\, d\lfloor x \rfloor$$

donde $n \in \mathbb{N}$, y f es continua.

El siguiente teorema nos da condiciones necesarias para garantizar la existencia de la integral de Stieltjes, para su demostración vea [**Noguchi, 1988**, Theorem 7.3.4].

Teorema 1.40. — Con las notaciones anteriores.

1. Si $V(\alpha) < \infty$, y f es continua, entonces $\int_a^b f(t)d\alpha$ existe.

2. Bajo las mismas hipótesis, $\int_a^b \alpha(t)df$ existe, y

$$\int_a^b \alpha(t)df = \alpha(t)f(t)\Big|_a^b - \int_a^b f(t)d\alpha.$$

En los casos más comunes, la integral de Stieltjes se reduce a una integral de Riemann, sustituyendo $d\alpha$ por $\alpha'(t)dt$.

Teorema 1.41. — Si f es continua y α es de clase C^1 en $[a, b]$ entonces

$$\int_a^b f d\alpha = \int_a^b f(t)\alpha'(t)dt.$$

Demostración. [Lages Lima, 2008, p. 194, teorema 4] □

1.7. Fórmulas de Abel y Euler

La siguiente fórmula es conocida como la identidad de Abel, consecuencia de la proposición 1.2 y del teorema 1.40.

Teorema 1.42. — Para cualquier función aritmética $a(n)$ sea

$$A(x) = \sum_{n\leqslant x} a(n),$$

donde $A(x) = 0$ si $x < 1$. Si f es de clase C^1 en un intervalo $[y, x]$ entonces

$$\sum_{y<n\leqslant x} a(n)f(n) = A(x)f(x) - A(y)f(y) - \int_y^x A(t)f'(t)dt. \tag{22}$$

Demostración. [Apostol, 1974, Theorem 4.2]. □

La identidad de Abel tiene el siguiente corolario.

Corolario 1.5. — Si $f : [y, x] \to \mathbb{C}$ es una función de clase C^1. Entonces

(23)

$$\sum_{y<n\leqslant x} f(n) = \int_y^x f(t)dt + \int_y^x \left(t - \lfloor t\rfloor - \frac{1}{2}\right) f'(t)dt + \left(y - \lfloor y\rfloor - \frac{1}{2}\right) f(y) - \left(x - \lfloor x\rfloor - \frac{1}{2}\right) f(x$$

Demostración. Tomando $a(n) = 1$ para todo $n \geqslant 1$ encontramos que $A(x) = \lfloor x\rfloor$ y (22) implica

$$\sum_{y<n\leqslant x} f(n) = \lfloor x\rfloor f(x) - \lfloor y\rfloor f(y) - \int_y^x \lfloor t\rfloor f'(t)dt.$$

Combinando esto con la integración por partes

$$\int_y^x tf'(t)dt = xf(x) - yf(y) - \int_y^x f(t)dt,$$

obteniendo el resultado deseado. □

1.8. Series de Fourier

Definición 1.39. — Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es *seccionalmente diferenciable* si ella es seccionalmente continua y su función derivada f' también es seccionalmente continua.

Definición 1.40. — Sea f una función seccionalmente continua y periódica de periodo $2L$. Definimos los *coeficientes de Fourier de f* como

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx, \quad n \geqslant 0;$$
$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{L}dx, \quad n \geqslant 1,$$

y su serie de Fourier como

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{L} + b_n\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Teorema 1.43. — Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función seccionalmente diferenciable y de periodo $2L$. Entonces la serie de Fourier de la f, converge, en cada punto x, para $\frac{1}{2}\big[f(x+0)+f(x-0)\big]$, es decir

$$\frac{1}{2}\big[f(x+0)+f(x-0)\big] = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{L} + b_n\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{L}\right). \tag{24}$$

Demostración. [de Figueiredo, 1987, §2.4] □

Si en particular la función f en el teorema anterior es continua en un punto x, entonces en este caso $f(x+0) = f(x-0) = f(x)$ y (24) se reduce a

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{L} + b_n\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Ejemplo 3. — La función $f(x) = \lfloor x\rfloor - x + 1/2$ es periódica de periodo $2L = 1$ y posee discontinuidades en todos los números enteros. Un cálculo de sus coeficientes de Fourier muestra que $a_n = 0$, para $n \geqslant 0$ y $b_n = 1/n\pi$, para $n \geqslant 1$.

Es claro que f satisface las condiciones del teorema 1.43. Por lo tanto, para $x \notin \mathbb{Z}$ tenemos que

$$\lfloor x\rfloor - x + \frac{1}{2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{sen}(2n\pi x)}{n\pi}. \tag{25}$$

Capítulo 2

FACTORIZACIÓN DE FUNCIONES DE ORDEN FINITO

2.1. Factorización de Weierstrass

Definición 2.1 **(*Rama principal del logaritmo*)**. — Definimos la *rama principal del logaritmo* como la función $\log : \mathbb{C}\backslash]-\infty, 0] \to \mathbb{C}$ que asigna, a cada número complejo $z \in \mathbb{C}\backslash]-\infty, 0]$, el número

$$\log(z) = \ln|z| + i\theta,$$

donde ln es la función logaritmo real, y θ es el único número en $(-\pi, \pi)$ tal que $z = |z|e^{i\theta}$. Denotamos $\arg z = \theta$ el *argumento principal* de z.

Definición 2.2. — Dada la sucesión $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números complejos, la *productoria* $\prod z_n$ es la sucesión de *productos parciales* $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definidos por

$$p_n = \prod_{k=1}^{n} z_k = z_1 z_2 \cdots z_n, \qquad n \geqslant 1.$$

Definición 2.3. — Diremos que la productoria $\prod z_n$ *converge* si existe a lo sumo un número finito de factores nulos y si los productos parciales formados por los factores que no se anulan tienden a un límite

$$\prod_{n=1}^{\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} p_n \neq 0.$$

En un producto convergente el factor general z_n tiende a 1, como consecuencia de este hecho es preferible escribir todos los productos infinitos en la forma

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1 + a_n),$$

de manera que $a_n \to 0$ sea una condición necesaria para la convergencia.

Teorema 2.1. — La productoria $\prod(1 + a_n)$ con $1 + a_n \neq 0$ es convergente si y solo si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \log(1 + a_n)$ lo es.

Demostración. [**Ahlfors, 1978**, p. 192, Theorem 5]. □

Teorema 2.2. — Una condición suficiente para la convergencia de la productoria $\prod(1+a_n)$ es la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$.

Demostración. [**Ahlfors, 1978**, p. 192, Theorem 6]. □

La prueba del siguiente lema puede ser encontrada en [**Rudin, 1987**, Theorem 15.3].

Lema 2.1. — Si $u_1,\ldots,u_N$ son números complejos, y si

$$p_N=\prod_{n=1}^{N}(1+u_n),\quad p_N^*=\prod_{n=1}^{N}\big(1+|u_n|\big),$$

entonces

$$p_N^*\leqslant \exp\big(|u_1|+\cdots+|u_N|\big),$$

y

$$|p_N-1|\leqslant p_N^*-1.$$

Definición 2.4. — Dados $\Omega\subset\mathbb{C}$, y la sucesión de funciones $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$, donde $g_n:\Omega\to\mathbb{C}$. Diremos que el producto infinito

$$\prod_{n=1}^{\infty}g_n(z),$$

converge en z_0 si el producto infinito $\prod_{n=1}^{\infty}g_n(z_0)$ converge. Decimos que el mismo producto infinito converge uniformemente si la sucesión de funciones $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, donde $f_n(z)=\prod_{m=1}^{n}g_m(z)$ converge uniformemente, y que converge uniformemente en compactos si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lo hace.

Para una demostración del siguiente teorema vea [**Rudin, 1987**, Theorem 15.4].

Teorema 2.3. — Sea $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones complejas, acotadas en un conjunto S, tal que $\sum_{n=1}^{\infty}\big|u_n(s)\big|$ converge uniformemente en S. Entonces el producto

$$f(s)=\prod_{n=1}^{\infty}\big(1+u_n(s)\big),$$

converge uniformemente en S, y $f(s_0)=0$ para álgun $s_0\in S$ si y sólo si $u_n(s_0)=-1$ para algún $n\leqslant N$, donde $N\in\mathbb{N}$ es un número fijo.

Como consecuencia, tenemos el siguiente teorema. Su demostración puede hallarse en [**Rudin, 1987**, Theorem 15.6]

Teorema 2.4. — Supongamos que $f_n \in H(\Omega)$ para $n = 1, 2, \ldots$, y que ninguna f_n es idénticamente nula en alguna componente de Ω, y

$$\sum_{n=1}^{\infty} |1 - f_n(z)|$$

converge uniformemente en compactos en Ω. Entonces el producto

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} f_n(z)$$

converge uniformemente en compactos en Ω. Luego $f \in H(\Omega)$. Y además, tenemos

$$m(f, z) = \sum_{n=1}^{\infty} m(f_n, z)$$

para $z \in \Omega$, donde $m(f, z)$ se define como la multiplicidad del cero de f en z *[si* $f(z) \neq 0$ *entonces* $m(f, z) = 0$*].*

Si $g(z)$ es una función entera, entonces $f(z) = e^{g(z)}$ es entera y distinta de cero. Recíprocamente, si $f(z)$ es una función entera que no se anula nunca, entonces la funcion $f'(z)/f(z)$ es entera, y por ende es derivada de una función entera g [vea el corolario 1.1]. De este hecho se deduce que la función $f(z)e^{-g(z)}$ tiene derivada nula y, por ende $f(z)$ es un múltiplo constante de $e^{g(z)}$, si absorbemos la constante en $g(z)$ tenemos que $f(z) = e^{g(z)}$.

Siguiendo este razonamiento podemos hallar la función entera más general con un número finito de ceros. Si f tiene un cero de orden $m \geqslant 0$ en el origen, y denotamos los otros ceros por $a_1, \ldots, a_N$, repitiendo los ceros múltiples. Del teorema 1.7 y de lo que acabamos de demostrar concluimos que es posible escribir

$$f(z) = z^m e^{g(z)} \prod_{n=1}^{N} (1 - \frac{z}{a_n}).$$

El argumento anterior sigue siendo válido si consideramos una función holomorfa definida en un conjunto convexo.

Si hay infinitos ceros la generalización obvia sería

$$f(z) = z^m e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right).$$

Sin embargo este producto no siempre converge. Para garantizar la convergencia tienen que introducirse ciertos factores.

Definición 2.5. — Hagamos $E_0(z) = 1 - z$ y para $n = 1, 2, 3, \ldots$,

$$E_n(z) = (1 - z) \exp\left\{z + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^n}{n}\right\}.$$

Estas funciones son conocidas como *factores elementales*. Tienen único cero simple en $z = 1$. El siguiente lema nos dice que estas funciones están cerca a 1 cuando $|z| < 1$ para

n suficientemente grande, a pesar de que $E_n(1) = 0$. Para ver su demostración consulte [**Rudin, 1987**, Theorem 15.8].

Lema 2.2. — Para $|z| \leqslant 1$ y $n = 0, 1, 2, \ldots,$

$$|1 - E_n(z)| \leqslant |z|^{n+1}.$$

Teorema 2.5. — Sea $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números complejos tal que $z_n \neq 0$ y $\lim_{n\to\infty} |z_n| = \infty$. Si $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de enteros no negativos tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{r_n}\right)^{1+p_n} < \infty, \tag{26}$$

para todo $r > 0$ *(donde $r_n = |z_n|$)*, entonces el producto infinito

$$P(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right), \tag{27}$$

define una función entera que se anula en cada z_n y no posee otros ceros. Además, si α aparece m veces en la sucesión $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, entonces P tiene un cero de orden m en α.

Si tomamos $p_n = n - 1$, la condición (26) se satisface.

Demostración. Dado un $r > 0$. Si $z \in D_r(0)$ del lema 2.2 se tiene que

$$\left|1 - E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right)\right| \leqslant \left|\frac{z}{z_n}\right|^{1+p_n} < \left(\frac{r}{r_n}\right)^{1+p_n},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ tal que $r < r_n$, pero como $\lim_{n\to\infty} r_n = \infty$, esto se cumple para todo n suficientemente grande. Luego, utilizando el test de Weierstrass [**Lages Lima, 2010**, p. 370, teorema 2] concluimos de (26) que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|1 - E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right)\right|,$$

converge uniformemente en $D_r(0)$. Luego converge en compactos en $\mathbb{C}$. Utilizando el teorema 2.4 obtenemos que el producto

$$P(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right),$$

converge en compactos en $\mathbb{C}$, que es entera, que $Z(P) = \{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y que el orden de cada cero es justamente el número de veces que este aparece en la sucesión $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Para demostrar la última afirmación vemos que, dado $r > 0$ se tiene que $r_n > 2r$ para todo n suficientemente grande. Luego $(r/r_n)^n < (1/2)^n$ para tales n y utilizando el criterio de comparación se sigue la convergencia de (26). □

Para algunas sucesiones $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se verifica (26) para una sucesión constante $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En estos casos, si tomamos esta constante tan pequeña como sea posible, la función resultante (27) se conoce como *producto canónico* correspondiente a $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Por ejemplo, si

$\sum 1/r_n < \infty$, podemos tomar $p_n = 0$, y el producto canónico es

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_n}\right).$$

Si $\sum 1/r_n = \infty$ pero $\sum 1/r_n^2 < \infty$, el producto canónico es

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_n}\right)e^{z/z_n}.$$

Teorema 2.6 (Factorización de Weierstrass). — Sea f una función entera, y sean $z_1, z_2, \ldots,$ los ceros de f listados conforme a sus multiplicidades. Entonces existe una función entera g y una sucesión $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de enteros no negativos, tales que

$$f(z) = z^m e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right)$$

donde m es un entero no negativo.

Demostración. Supongamos que $f(0) \neq 0$. Como los z_n son ceros de f se tiene necesariamente que $\lim_{n\to\infty} |z_n| = \infty$ (en caso contrario el conjunto $Z(f) = \{z_n\}$ tendría un punto de acumulación y f sería idénticamente nula). Tomemos el producto P como en el teorema 2.5. Entonces f/P tiene sólo singularidades removibles en el plano, y por ende puede ser extendida a una función entera. Además f/P no tiene ceros, luego existe una función entera g tal que $f/P = e^g$. Si f tiene un cero de orden m en $z = 0$, aplicamos lo anterior a $f(z)/z^m$.
□

2.2. Funciones de orden finito

Tomemos una función entera f. Estamos interesados en saber cuan rápido crece esta función. Para una caracterización general de su crecimiento introducimos la función

$$M_f(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|.$$

Si la desigualdad $h(r) < g(r)$ se verifica para todo r suficientemente grande, la llamaremos desigualdad asintótica y la denotaremos por $h(r) \overset{a.s}{<} g(r)$. Si la misma desigualdad se verifica para alguna sucesión $r_n \to \infty$ escribimos $h(r) \overset{n}{<} g(r)$.

La función entera f se llama *función de orden finito* si $M(r) \overset{a.s}{<} \exp(r^k)$ para algún $k > 0$. El *orden* f es el ínfimo de aquellos valores de k para los cuales la desigualdad asintótica se verifica. El orden de f se denota $\rho = \rho_f$. De la definición se sigue que, para todo $\epsilon > 0$

$$e^{r^{\rho-\epsilon}} \overset{n}{<} M_f(r) \overset{a.s}{<} e^{r^{\rho+\epsilon}}.$$

Tomando logaritmo dos veces obtenemos

$$\rho - \epsilon \overset{n}{<} \frac{\log\log M_f(r)}{\log r} \overset{a.s}{<} \rho + \epsilon,$$

dee donde

$$\rho = \limsup_{r\to\infty} \frac{\log\log M_f(r)}{\log r}.$$

Supongamos que f tiene orden ρ. Decimos que f tiene *tipo finito* si $M(r) \overset{as}{<} \exp(Ar^\rho)$ para algún $A > 0$.

El ínfimo de los valores de A para los cuales la última desigualdad asintótica se verifica se conoce como el *tipo de la función f* con respecto al orden ρ y se denota $\sigma = \sigma_f$. De manera similar a lo hecho para el orden se demuestra que

$$\sigma = \limsup_{r\to\infty} \frac{\log M_f(r)}{r^\rho}.$$

Sea

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \tag{28}$$

una función entera. Los siguientes dos lemas nos permitirán expresar el orden y el tipo de una fución entera en términos de la taza de decrecimiento de los coeficientes de su expansión en serie de potencias.

Lema 2.3. — Si la desigualdad asintótica

$$M_f(r) \overset{as}{<} e^{Ar^K}, \tag{29}$$

se verifica, entonces

$$|c_n| \overset{as}{<} \left(\frac{eAK}{n}\right)^{n/K}. \tag{30}$$

Demostración. [Levin, 1996, p. 5, Lemma 1]. □

Lema 2.4. — Si se verifica la desigualdad asintótica (30), entonces

$$M_f(r) \overset{as}{<} e^{(A+\epsilon)r^K}, \tag{31}$$

para todo $\epsilon > 0$.

Demostración. [Levin, 1996, p. 5, Lemma 2]. □

Sea ρ el orden de f. Dado $\epsilon > 0$, tomando $\epsilon_0 = \frac{\epsilon}{2}$ de la definición de orden y los dos lemas anteriores (tomando un A tal que $A + \epsilon_0 = 1$) se tiene que

$$\left(\frac{e(\rho-\epsilon_0)}{n}\right)^{\frac{n}{\rho-\epsilon_0}} \overset{n}{<} |c_n| \overset{as}{<} \left(\frac{e(\rho+\epsilon_0)}{n}\right)^{\frac{n}{\rho+\epsilon_0}}.$$

Tomando logaritmo, obtenemos

$$\frac{n}{\rho-\epsilon_0}\big[\log e(\rho-\epsilon_0) - \log n\big] \overset{n}{<} \log|c_n| \overset{as}{<} \frac{n}{\rho-\epsilon_0}\big[\log e(\rho-\epsilon_0) - \log n\big],$$

luego

$$(\rho-\epsilon_0)\left(1-\frac{\log e(\rho-\epsilon_0)}{\log n}\right)^{-1} \overset{n}{<} \frac{n\log n}{\log(1/|c_n|)} \overset{as}{<} (\rho+\epsilon_0)\left(1-\frac{\log e(\rho-\epsilon_0)}{\log n}\right)^{-1},$$

y debido a que $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\log e(\rho-\epsilon_0)}{\log n} = 1$, tenemos que

$$\rho-\epsilon \overset{n}{<} \frac{n\log n}{\log(1/|c_n|)} \overset{as}{<} \rho+\epsilon.$$

Así, hemos demostrado el siguiente resultado.

Teorema 2.7. — El orden ρ de la función entera (28) se determina por la fórmula

$$\rho = \limsup_{n\to\infty} \frac{n\log n}{\log(1/|c_n|)}.$$

De manera similar se demuestra lo siguiente.

Teorema 2.8. — El tipo σ de la función entera (28) se determina por la fórmula

$$\sigma = \frac{1}{\rho e}\limsup_{n\to\infty}\left(n\sqrt[n]{|c_n|^{\rho}}\right).$$

El siguiente resultado se conoce como la fórmula de Poisson.

Teorema 2.9 (Fórmula de Poisson). — Sea $z_0 \in \mathbb{C}$. Si $u : \overline{D}_R(z_0) \to \mathbb{C}$ es continua en $\overline{D}_R(z_0)$ y armónica en $D_R(z_0)$, entonces, para todo $z \in D_R(z_0)$ tenemos que

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\xi)\frac{|\xi|^2-|z-z_0|^2}{|\xi-z|^2}d\psi,$$

donde $\xi = Re^{e^{i\psi}}$.

Demostración. [Amar and Mathéron, 2004, §11.5.2.]. □

Si tomamos $z_0 = 0$, la fórmula resulta

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\xi)\frac{|\xi|^2-|z|^2}{|\xi-z|^2}d\psi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\xi)\Re\left(\frac{\xi+z}{\xi-z}\right)d\psi$$

$$(32)\qquad = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(Re^{i\psi})\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\theta-\psi)+r^2}d\psi,$$

donde $z = re^{i\theta}$.

Sea una función $f = u+iv$ holormorfa en $D_R(0)$ con parte real u continua en $\overline{D}_R(0)$. Se tiene que u es armónica en $D_R(0)$. Definamos

$$(33)\qquad g(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\xi)\frac{\xi+z}{\xi-z}d\psi.$$

Para demostrar que la función g es holomorfa en $D_R(0)$ basta mostrar que es continua, pues en ese caso del teorema 1.35 tenemos que, para todo triángulo $\triangle \subset D_R(0)$

$$\begin{aligned}\int_\triangle g(z)dz &= \frac{1}{2\pi}\int_\triangle \int_0^{2\pi} u(Re^{i\theta})\frac{Re^{i\theta}+z}{Re^{i\theta}-z}d\theta dz \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(Re^{i\theta})\int_\triangle \frac{Re^{i\theta}+z}{Re^{i\theta}-z}dzd\theta = 0,\end{aligned}$$

donde la última igualdad se debe a que la función $z \mapsto \frac{Re^{i\theta}+z}{Re^{i\theta}-z}$, donde $\theta \in [0, 2\pi]$, es holomorfa en $D_R(0)$. Así del teorema 1.4 concluimos que g es holomorfa en $D_R(0)$.

Para mostrar que g es continua tomemos una sucesión $(z_n) \in D_R(0)$ tal que $z_n \to z$. Definamos h, $h_n : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, donde $n \in \mathbb{N}$ de la siguiente manera

$$\begin{aligned}h_n(\theta) &= u(Re^{i\theta})\frac{Re^{i\theta}+z_n}{Re^{i\theta}-z_n} \\ h(\theta) &= u(Re^{i\theta})\frac{Re^{i\theta}+z}{Re^{i\theta}-z}\end{aligned}$$

La convergencia puntual $h_n \to h$ es obvia. Además, como $z_n \to z \in D_R(0)$ existe $r < R$ tal que $|z_n| < r$ para todo n suficientemente grande. Así,

$$|h_n(\theta)| = |u(Re^{i\theta})|\left|\frac{Re^{i\theta}+z_n}{Re^{i\theta}-z_n}\right| \leqslant M\frac{R+r}{R-r}$$

donde $|u(Re^{i\theta})| \leqslant M$ para todo $\theta \in [0, 2\pi]$. Del teorema 1.32 concluimos que

$$|g(z_n) - g(z)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |h_n(\theta) - h(\theta)|d\theta = \frac{1}{2\pi}||h_n - h||_1 \to 0,$$

es decir, g es continua.

Ahora bien, de (33) se tiene que

$$g(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\xi)\Re\left(\frac{\xi+z}{\xi-z}\right)d\psi + \frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\xi)\Im\left(\frac{\xi+z}{\xi-z}\right)d\psi,$$

de donde

$$f(z) - g(z) = i\left(v - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\xi)\Im\left(\frac{\xi+z}{\xi-z}\right)d\psi\right),$$

es decir, $f - g$ asume sólo valores imaginarios puros en $D_R(0)$. Luego, como es holomorfa, del teorema 1.11 se concluye que es constante, y como $f(0) - g(0) = iv(0)$ se tiene que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\xi)\frac{\xi+z}{\xi-z}d\psi + iv(0). \tag{34}$$

Ahora, si $f(z) \neq 0$ para todo $z \in \overline{D}_R(0)$, entonces existe $g \in H(D_R(0))$ tal que $f(z) = e^{g(z)}$. Luego, $\log f(z)$ es holomorfa en $D_R(0)$, y por (34)

$$\log f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(Re^{i\psi})|\frac{Re^{i\psi}+z}{Re^{i\psi}-z}d\psi + iC. \tag{35}$$

Además, de (32)

$$\log|f(z)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(Re^{i\psi})| \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\theta - \psi) + r^2} d\psi, \tag{36}$$

donde $z = re^{i\theta}$.

Supongamos ahora que f tiene ceros en $D_R(0)$. Como el conjunto $Z(f)$ no tiene punto de acumulación, f tiene una cantidad finita de ceros en $D_R(0)$. Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tales ceros (contando multiplicidades), ordenados de manera que $|a_k| \leqslant |a_{k+1}|$, para $k = 1, 2, \ldots, n$. Supongamos además que $f(z) \neq 0$ para $|z| = R$. Definimos la función

$$\varphi(z) = f(z)\prod_{m=1}^{n} \frac{R^2 - \overline{a}_m z}{R(z - a_m)}.$$

El teorema 1.7 nos permite concluir que φ tiene singularidades removibles en cada a_k, luego puede ser extendida a una función holomorfa en $D_R(0)$.

Es claro que $|\varphi(Re^{i\psi})| = |f(Re^{i\psi})|$ y que $\varphi(z) \neq 0$ para $|z| \leqslant R$. Así de (35) se sigue que

$$\log\varphi(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(Re^{i\psi})| \frac{Re^{i\psi} + z}{Re^{i\psi} - z} d\psi + iC.$$

Pero como

$$\log\varphi(z) = \log f(z) + \sum_{m=1}^{n} \log\frac{R^2 - \overline{a}_m z}{R(z - a_m)} + 2\pi i k_n, \ k_n \in \mathbb{Z}$$

se concluye que

(37)

$$\log f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(Re^{i\psi})| \frac{Re^{i\psi} + z}{Re^{i\psi} - z} d\psi + \sum_{|a_m|<R} \log\frac{R(z - a_m)}{R^2 - \overline{a}_m z} + i(C - 2\pi k_n)$$

Separando la parte real en la igualdad anterior obtenemos que

$$\log|f(z)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(Re^{i\psi})| \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\theta - \psi) + r^2} d\psi + \sum_{|a_m|<R} \log\left|\frac{R(z - a_m)}{R^2 - \overline{a}_m z}\right|$$

donde $z = re^{i\theta}$. Esta fórmula es conocida como la *fórmula de Poisson-Jensen*

Supongamos que $f(0) \neq 0$, tomando $z = 0$ en la fórmula anterior obtenemos que

$$\log|f(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(Re^{i\psi})| d\psi + \sum_{|a_m|<R} \log\frac{|a_m|}{R}. \tag{38}$$

Denotemos por $n(t)$ al número de puntos a_m satisfaciendo la desigualdad $|a_m| \leqslant t$. Debido a que $|a_k| \leqslant |a_{k+1}|$, obtenemos una función que asume valores enteros, monótona no decreciente y constante por partes. Luego, tomando $c > 0$ suficientemente pequeño ($c < |a_1|$), del teorema 1.40 tenemos

$$\sum_{|a_m|<R} \log \frac{R}{|a_m|} = \int_c^R \log \frac{R}{t} dn(t) = n(t) \log \frac{R}{t}\Big|_c^R + \int_c^R \frac{n(t)}{t} dt$$
$$= \int_c^R \frac{n(t)}{t} dt.$$

Así, haciendo $c \to 0^+$ obtenemos

$$\sum_{|a_m|<R} \log \frac{|a_m|}{R} = \int_0^R \frac{n(t)}{t} dt.$$

Reemplazando esta igualdad en (38) se tiene

$$\int_0^R \frac{n(t)}{t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log\big|f(Re^{i\psi})\big| d\psi - \log\big|f(0)\big|.$$

Esta fórmula es conocida como la *fórmula de Jensen.*

Asumamos que $f(0) = 1$. De la fórmula anterior obtenemos

$$\log M_f(er) \geqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log|f(ere^{i\psi})| = \int_0^{er} \frac{n(t)}{t} dt \geqslant \int_r^{er} \frac{n(t)}{t} dt \geqslant n(r)$$

El teorema siguiente, debido a Hadamard, es el resultado principal de este capítulo.

Teorema 2.10. — ***(Hadamard)*** Una función entera de orden finito ρ puede ser representada en la forma

$$f(z) = z^m e^{P_q(z)} \prod_{n=1}^{\infty} E_p\left(\frac{z}{a_n}\right), \tag{39}$$

donde $a_1, a_2, \dots,$ son los ceros no nulos de la función f, $p \leqslant \rho$, P_q es un polinomio de grado $q \leqslant \rho$, y m es el orden del cero en el origen.

Demostración. Supongamos inicialmente que $f(0) \neq 0$. De la fórmula (37) tenemos que

$$\log f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log\big|f(Re^{i\psi})\big| \frac{Re^{i\psi} + z}{Re^{i\psi} - z} d\psi + \sum_{|a_m|<R} \log \frac{R(z - a_m)}{R^2 - \overline{a}_m z} + i(C - 2\pi k_n).$$

Derivando esta fórmula $p + 1$ veces con $p = \lfloor \rho \rfloor$, obtenemos

$$\big[\log f(z)\big]^{(p+1)} = \frac{(p+1)!}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log\big|f(Re^{i\varphi})\big| \frac{2Re^{i\varphi}}{(Re^{i\varphi} - z)^{p+2}} d\varphi$$
$$+ \sum_{|a_m|<R} \frac{p!\overline{a}_n^{p+1}}{(R^2 - \overline{a_n} z)^{p+1}} - \sum_{|a_m|<R} \frac{p!}{(a_n - z)^{p+1}}.$$

Luego, si $r = |z|$

$$\left|\big[\log f(z)\big]^{p+1} + \sum_{|a_m|<R} \frac{p!}{(a_n - z)^{p+1}}\right| \leqslant \frac{(p+1)!}{2\pi} \log M_f(R) \frac{4\pi R}{(R-r)^{p+2}} + \frac{p! n(R)}{(R-r)^{p+1}}.$$

Debido a que para todo $\epsilon > 0$

$$\log M_f(R) \overset{as}{<} R^{\rho+\epsilon},$$

$$n(R) \leqslant \log M_f(eR) \overset{as}{<} R^{\rho+\epsilon}.$$

Tomando $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño y haciendo $R \to \infty$ obtenemos

$$[\log f(z)]^{p+1} = - \sum_{|a_m|<R} \frac{p!}{(a_n - z)^{p+1}}.$$

Luego, integrando ambos lados de la igualdad anterior sobre un camino cualquiera que una los puntos 0 y z, tal que no corte a los puntos $a_1, a_2 \ldots$, obtenemos

$$\log f(z) - P_q(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\log\left(1 - \frac{z}{a_n}\right) + \frac{z}{a_n} + \cdots + \frac{z^p}{pa_n^p}\right],$$

de donde se obtiene el resultado. $\square$

Capítulo 3

LA FUNCIÓN ZETA DE RIEMANN

3.1. Definición

Definición 3.1. — La función zeta de Riemann $\zeta(s)$ es definida por la serie

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}. \tag{40}$$

para $\Re(s) > 1$.

Proposición 3.1. — La serie (40) converge absoluta y unifomemente en compactos en el semiplano $\Re(s) > 1$, y es holomorfa en este semiplano

Demostración. Si $K \subset \{s \in \mathbb{C} : \Re(s) > 1\}$ es compacto existe $\sigma_0 > 1$ tal que $K \subset \{s \in \mathbb{C} : \Re(s) > \sigma_0\}$, Sea $s = \sigma + it$ y $\sigma_0 > 1$. Para $\sigma \geqslant \sigma_0$ tenemos que

$$\left|\frac{1}{n^s}\right| = \frac{1}{n^\sigma} \leqslant \frac{1}{n^{\sigma_0}}.$$

Sabemos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma_0}}$ es convergente. Del Test de Weierstrass concluimos la convergencia absoluta y uniforme de la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1/n^s$ en el semiplano $\sigma \geqslant \sigma_0$. El último enunciado resulta del teorema 1.10. □

Proposición 3.2 (Producto de Euler). — Cuando $\Re(s) > 1$, la función zeta de Riemann puede ser expresada por el *producto de Euler*

$$\zeta(s) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} \tag{41}$$

donde p recorre todos los primos.

Demostración. El producto en (41) converge para $\sigma > 1$ debido al teorema 2.2 y a que la serie

$$\sum_p^{\infty} \left|\frac{1}{p^s}\right| = \sum_p^{\infty} \frac{1}{p^\sigma}$$

converge.

Ahora bien, debido a que podemos multiplicar un número finito de series absolutamente convergentes, tenemos

$$\prod_{p\leqslant P}\left(1+\frac{1}{p^s}+\frac{1}{p^{2s}}+\cdots\right)=1+\frac{1}{n_1^s}+\frac{1}{n_2^s}+\cdots,$$

donde $n_1, n_2, \ldots$, son enteros cuyos factores primos no exceden a P. Como todos los enteros hasta P son de esta forma, tenemos de (40) que

$$\begin{aligned}\left|\zeta(s)-\prod_{p\leqslant P}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}\right| &= \left|\zeta(s)-1-\frac{1}{n_1^s}-\frac{1}{n_2^s}-\cdots\right| \\ &\leqslant \sum_{n=P+1}^{\infty}\frac{1}{n^\sigma};\end{aligned}$$

haciendo $P\to\infty$ se obtiene la igualdad deseada. □

3.2. La función gamma

Definición 3.2. — La *función gamma* está definida por

$$\Gamma(s)=\int_0^\infty e^{-t}t^{s-1}dt, \tag{42}$$

para $s\in\mathbb{C}$ con $\Re(s)>0$.

Proposición 3.3. — La integral (42) converge absolutamente y define una función holomorfa en el semiplano $\Re(s)>0$.

Demostración. Sea $s=\sigma+i\tau$ con $\sigma>0$. Como $\lim\limits_{t\to\infty} e^{-t/2}t^{\sigma-1}=0$, existe $M>0$ tal que si $t>M$ entonces $e^{-t/2}t^{\sigma-1}<1$. Se sigue que

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-t}t^{\sigma-1}dt &= \int_0^M e^{-t}t^{\sigma-1}dt+\int_M^\infty e^{-t}t^{\sigma-1}dt \\ &\leqslant \int_0^M t^{\sigma-1}dt+\int_M^\infty e^{-t/2}dt \\ &= \frac{M^\sigma}{\sigma}+2e^{-M/2}<\infty.\end{aligned}$$

Por lo tanto, la integral (42) converge absolutamente.

Sea Π el semiplano $\sigma>0$. Si demostramos que Γ es continua, usando el teorema de Fubini obtenemos para cualquier triángulo $\triangle\in\Pi$

$$\begin{aligned}\int_{\partial\triangle}\Gamma(s)ds &= \int_{\partial\triangle}\int_0^\infty e^{-t}t^{s-1}dtds \\ &= \int_0^1 e^{-t}\int_{\partial\triangle}t^{s-1}dsdt=0\end{aligned}$$

donde la última igualdad se debe a que $s \mapsto t^{s-1}$ es entera. Debido al teorema 1.4 concluimos que Γ es holomorfa.

Para demostrar que Γ es continua tomemos una sucesión $s_n = \sigma_n + i\tau_n$ cuyo límite $s = \sigma + i\tau \in \Pi$ y funciones $f_n(t) = e^{-t}t^{s_n-1}$, $f(t) = e^{-t}t^{s-1}$ definidas en $(0, \infty)$. La continuidad de $s \mapsto t^{s-1}$ implica que $\to f$ puntualmente. Fijando $\alpha \in (-1, \sigma - 1)$ tenemos que para n suficientemente grande

$$|f_n(t)| = e^{-t}t^{\sigma_n-1} \leqslant h(t), \tag{43}$$

donde

$$h(t) = \begin{cases} e^{-t}t^{\alpha} & 0 < t < 1, \\ e^{-t}t^{\sigma-1} & 1 \leqslant t. \end{cases}$$

Un cálculo directo muestra que

$$\int_0^\infty h(t)dt = \int_0^1 e^{-t}t^{\alpha} + \int_1^\infty e^{-t}t^{\sigma-1} < \infty$$

Es decir, la función al lado derecho de (43) es integrable. Así, el teorema 1.32 implica que

$$\int_0^\infty e^{-t}|t^{s_n-1} - t^{s-1}|dx = \|f_n - f\|_1 \to 0,$$

y la desigualdad

$$|\Gamma(s_n) - \Gamma(s)| \leqslant \|f_n - f\|_1$$

muestra que Γ es continua. □

De la definición, para $\Re(s) > 0$, integrando por partes tenemos

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s). \tag{44}$$

Esta fórmula permite prolongar la función gamma a todo el plano complejo.

Proposición 3.4. — La función gamma puede ser extendida a una función meromorfa definida en todo el plano complejo excepto en los polos simples $\{-n | n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ cuyos residuos son $\mathrm{Res}(\Gamma, -n) = \frac{(-1)^n}{n!}$

Demostración. Para $s \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N} \cup \{0\}$ con $\Re(s) < 1$, definimos la función gamma por

$$\Gamma(s) = \frac{\Gamma(s+n)}{(s+n-1)\cdots s} \tag{45}$$

donde $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ verifica que $-n < \Re(s)$. Debido a (44) y a que Γ no se anula en el semiplano $\Re(s) > 0$, la expresión (45) proporciona una extensión meromorfa de la función gamma con polos simples en el conjunto $\mathbb{N} \cup \{0\}$. Para hallar en residuo del polo en $s = -n + 1$ multiplicamos ambos lados de (45) por $s + n - 1$ y hacemos $s \to -n + 1$. Esto concluye la prueba.

□

Como $\Gamma(1) = 1$, por inducción se demuestra que $\Gamma(n) = (n-1)!$, para $n \in \mathbb{N}$. Por eso se dice que la función Γ extrapola la función factorial.

3.3. Fórmulas de complemento, duplicación y Stirling

La función Γ satisface las siguientes ecuaciones

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \pi/\operatorname{sen}\pi s, \qquad \Gamma(s)\Gamma(s+1/2) = 2^{1-2s}\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(2s)$$

para todo $s \in \mathbb{C}$. La primera de ellas se conoce como *fórmula de complemento* y la segunda como *fórmula de duplicación* **[Lang, 1999**, XV. §2].

Lema 3.1. — Para todo $s \in \mathbb{C}$.

$$\frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)} = \pi^{-\frac{1}{2}}\pi^{-s}\Gamma(s)\zeta(s).$$

Demostración. Si multiplicamos el numerador y el denominador de $\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)/\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)$ por $\Gamma(1-s/2)$, entonces las fórmulas de complemento y duplicación implican que

$$\frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)} = \frac{\pi^{\frac{1}{2}}2^{-s}}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi s}{2}\right)\Gamma(1-s)}.$$

La igualdad deseada queda establecida multiplicando y dividiendo el último término de la expresión anterior por $\Gamma(s)$. □

La función Γ también verifica otra igualdad conocida como la *fórmula de Stirling*.

$$\log\Gamma(z) = \left(z-\frac{1}{2}\right)\log z - z + \frac{1}{2}\log(2\pi) - \int_0^\infty \frac{t-\lfloor t\rfloor-\frac{1}{2}}{z+t}dt, \tag{46}$$

donde $-\pi < \arg z < \pi$. Al escoger este intervalo para el argumento estamos eliminando los polos de la función gamma.

Esta fórmula nos permite conocer el comportamiento asintótico de la función gamma pues, el término de error en (46) converge hacia 0 uniformemente en cualquier abierto $U = \{z \in \mathbb{C} : -\pi+\gamma < \arg(z) < \pi-\gamma\}$, donde $0 < \gamma < \pi$. En concreto tenemos el siguiente lema.

Lema 3.2. — Se tiene

$$\int_0^\infty \frac{t-\lfloor t\rfloor-\frac{1}{2}}{z+t}dt = O\left(\frac{1}{\operatorname{dist}(z,\mathbb{R}^-)}\right),$$

donde $d(z,\mathbb{R}^-)$ es la distancia de z al eje real negativo.

Demostración. Integrando por partes obtenemos que

$$\int_n^{n+1} \frac{t-\lfloor t\rfloor-\frac{1}{2}}{z+t}dt = \int_n^{n+1}\frac{P(t)}{(z+t)^2}dt,$$

donde P es una función periódica de periodo 1 de modo que $P(t) = \frac{1}{2}(t^2-t)$ cuando $0 \leqslant t \leqslant 1$. Sumando sobre $n \in \mathbb{N}$ llegamos a la igualdad

$$\int_0^\infty \frac{t-\lfloor t\rfloor-\frac{1}{2}}{z+t}dt = \int_0^\infty \frac{P(t)}{(z+t)^2}dt.$$

Luego, siendo $z = \sigma + i\tau$ tenemos que

$$\left|\int_0^\infty \frac{t - \lfloor t \rfloor - \frac{1}{2}}{z+t} dt\right| \leqslant \int_0^\infty \frac{1}{|z+t|^2} dt = \frac{1}{\tau^2} \int_0^\infty \frac{1}{1 + \left(\frac{\sigma+t}{|\tau|}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{|\tau|}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{\sigma}{|\tau|}\right) = \frac{1}{|\tau|} \arctan \frac{|\tau|}{\sigma} = O\left(\frac{1}{|\tau|}\right).$$

Tenemos dos posibilidades.

(I) Si $\sigma \leqslant 0$ entonces $d(z, \mathbb{R}^-) = |\tau|$, de donde

$$\left|\int_0^\infty \frac{t - \lfloor t \rfloor - \frac{1}{2}}{z+t} dt\right| \leqslant \frac{1}{|\tau|} \arctan \frac{|\tau|}{\sigma} = O\left(\frac{1}{d(z, \mathbb{R}^-)}\right)$$

(II) Si $\sigma > 0$ entonces $d(z, \mathbb{R}^-) = |z|$. Recordando que $\arctan u \leqslant u$ para $u \geqslant 0$ se obtiene

$$\left|\int_0^\infty \frac{t - \lfloor t \rfloor - \frac{1}{2}}{z+t} dt\right| = \frac{1}{|\tau|} \arctan \frac{|\tau|}{\sigma} = O\left(\frac{1}{\sigma}\right).$$

Así, en este caso

$$\left|\int_0^\infty \frac{t - \lfloor t \rfloor - \frac{1}{2}}{z+t} dt\right| = O\left(\min\left\{\frac{1}{\sigma}, \frac{1}{|\tau|}\right\}\right) = O\left(\frac{1}{|z|}\right) = O\left(\frac{1}{d(z, \mathbb{R}^-)}\right).$$

□

3.4. Ecuación funcional de la función zeta

Antes de proceder con la demostración de la ecuación funcional presentamos dos lemas.

Lema 3.3. — Si s es un número complejo tal que $\Re(s) < 0$ entonces.

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} y}{y^{s+1}} dy = -\Gamma(-s) \operatorname{sen} \frac{s\pi}{2}. \tag{47}$$

Demostración. Tomemos un camino γ orientado en sentido antihorario como se muestra en la figura 3.1. Por el teorema 1.3

$$\int_\gamma e^{-z} z^{s-1} dz = 0.$$

El camino γ está formado por dos segmentos rectilíneos y un arco de circunferencia C. Separando la integral en la igualdad anterior tenemos.

$$\int_0^R e^{-t} t^{s-1} dt + \int_C e^{-z} z^{s-1} dz + e^{is\frac{\pi}{2}} \int_R^0 e^{-it} t^{s-1} dt = 0 \tag{48}$$

Los $z \in C$ pueden escribirse en coordenadas polares como $z = Re^{i\alpha}$, $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$, luego para $z \in C$

$$|e^{-z} z^s| = e^{-R\cos\alpha} R^\sigma |e^{i\alpha s}| \leqslant e^{-\tau\alpha} R^\sigma \leqslant C_0 R^\sigma$$

donde $C_0 = \sup\{e^{-\tau\alpha} | \alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]\}$. Así, cuando $R \to \infty$

$$\left| \int_C e^{-z} z^{s-1} dz \right| \leqslant l(C) C_0 R^{\sigma-1} = \frac{\pi}{2} C_0 R^{\sigma} \to 0,$$

donde la convergencia hacia cero se debe a que $\sigma < 0$.

Haciendo $R \to \infty$ en (48)

$$e^{-is\frac{\pi}{2}} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{s-1} dt = \int_0^{\infty} e^{-it} t^{s-1} dt. \tag{49}$$

Igualando la parte real y la imaginaria en (49) obtenemos:

$$\int_0^{\infty} t^{s-1} \cos t dt = \Gamma(s) \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)$$

$$\int_0^{\infty} t^{s-1} \operatorname{sen} t dt = \Gamma(s) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi s}{2}\right) \tag{50}$$

Haciendo el cambio $s \mapsto -s$ en (50) se obtiene (47). □

Lema 3.4. — Si s es un número complejo tal que $\Re(s) > -1$ entonces.

$$\lim_{\lambda \to \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\lambda}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(2n\pi x)}{n x^{s+1}} dx = 0$$

Demostración. Integrando por partes obtenemos

$$\int_{\lambda}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(2n\pi x)}{x^{s+1}} = \frac{\cos(2n\pi\lambda)}{2n\pi\lambda^{s+1}} - \frac{s+1}{2n\pi} \int_{\lambda}^{\infty} \frac{\cos(2n\pi x)}{x^{s+2}} dx.$$

De donde

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\lambda}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(2n\pi x)}{n x^{s+1}} dx &= \frac{1}{2\pi\lambda^{s+1}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n\pi\lambda)}{n^2} - \frac{s+1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \int_{\lambda}^{\infty} \frac{\cos(2n\pi x)}{x^{s+2}} dx \\ &= O\left(\frac{1}{\lambda^{\sigma+1}}\right) + O\left(\int_{\lambda}^{\infty} \frac{dx}{x^{\sigma+2}}\right) = O\left(\frac{1}{\lambda^{\sigma+1}}\right).\end{aligned}$$

Lo cual concluye la demostración. □

Teorema 3.1 (Ecuación funcional). — La función ζ es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, posee un polo simple de residuo 1 en $s = 1$. Además satisface la ecuación funcional

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2} s\pi\right) \Gamma(1-s) \zeta(1-s) \tag{51}$$

Demostración. Tomamos $f(n) = n^{-s}$, en donde $s \neq 1$ y a, b enteros positivos. Del corolario 1.5 obtenemos

$$\sum_{n=a+1}^{b} \frac{1}{n^s} = \frac{b^{1-s} - a^{1-s}}{1-s} - s \int_a^b \frac{x - \lfloor x \rfloor - \frac{1}{2}}{x^{s+1}} dx + \frac{1}{2}(b^{-s} - a^{-s}).$$

Si tomamos $\Re(s) > 1$, $a = 1$, hacemos $b \to \infty$ y sumamos 1 a cada lado de la igualdad anterior obtenemos

$$\zeta(s) = s\int_1^\infty \frac{\lfloor x\rfloor - x + \frac{1}{2}}{x^{s+1}}dx + \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2}. \tag{52}$$

La igualdad anterior nos da una continuación analítica para $\sigma > -1$. En efecto, si escribimos

$$g(x) = \int_1^x \left(\lfloor t\rfloor - t + \frac{1}{2}\right) dt,$$

es fácil demostrar que $\left|g(x)\right| \leqslant \frac{1}{8}$ para todo $x \geqslant 1$. Además

$$\int_1^\infty \left|\frac{g(x)}{x^{s+2}}\right| \leqslant \int_1^\infty \frac{1}{x^{\sigma+2}} = \frac{1}{\sigma+1}.$$

es decir $g(x)/x^{s+2}$ es absolutamente integrable en $[1, \infty)$. Integrando por partes tenemos

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{\lfloor x\rfloor - x + \frac{1}{2}}{x^{s+1}}dx &= \left.\frac{g(x)}{x^{s+1}}\right|_1^\infty + (s+1)\int_1^\infty \frac{g(x)}{x^{s+2}}dx\\ &= (s+1)\int_1^\infty \frac{g(x)}{x^{s+2}}dx\end{aligned}$$

Siguiendo el procedimiento de demostración de la proposición 5.1 se concluye que la integral en la derecha de la igualdad anterior es holomorfa en $\sigma > -1$. Así resulta que la integral en (52) es holomorfa en este semiplano.

Debido a que para $\sigma < 0$ se verifica

$$s\int_0^1 \frac{\lfloor x\rfloor - x + \frac{1}{2}}{x^{s+1}}dx = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2},$$

para $-1 < \sigma < 0$

$$\zeta(s) = s\int_0^\infty \frac{\lfloor x\rfloor - x + \frac{1}{2}}{x^{s+1}}dx \tag{53}$$

Reemplazando (25) en la igualdad anterior, e integrando término a término

$$\begin{aligned}\zeta(s) &= \frac{s}{\pi}\sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} 2n\pi x}{n x^{s+1}}dx = \frac{s}{\pi}\sum_{n=1}^\infty \frac{(2n\pi)^s}{n}\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} y}{y^{s+1}}dy\\ &= \frac{s}{\pi}(2\pi)^s[-\Gamma(-s)]\operatorname{sen}\left(\frac{s\pi}{2}\right)\zeta(1-s)\\ &= 2^s\pi^{s-1}\operatorname{sen}\left(\frac{s\pi}{2}\right)\Gamma(1-s)\zeta(1-s). \qquad (54)\end{aligned}$$

En las dos últimas igualdades se hizo uso de (47) y de (44). En principio, esta identidad es válida para $-1 < \sigma < 0$. Debido a que la función al lado derecho de la igualdad anterior es analítica en $\sigma < 0$, podemos extender ζ a este semiplano. Así hemos obtenido una extensión meromorfa de ζ a todo el plano complejo, con un único polo simple en $s = 1$.

Para concluir resta justificar la integración término a término. Para ello, tomemos $\lambda > 0$ y

$$f_N(x) = \sum_{n=1}^{N} \frac{\operatorname{sen} 2n\pi x}{nx^{s+1}} = \pi \frac{\lfloor x \rfloor - x + \frac{1}{2}}{x^{s+1}}.$$

Es claro que

$$|f_N(x)| \leqslant \frac{3\pi}{2} x^{-(\sigma+1)}.$$

Como la función en el lado derecho de la desigualdad anterior pertenece a $L^1(0,\lambda)$, el teorema 1.32 nos permite concluir que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\lambda} \frac{\operatorname{sen}(2n\pi x)}{nx^{s+1}} dx = \int_0^{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(2n\pi x)}{nx^{s+1}} dx.$$

De esta igualdad se sigue que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(2n\pi x)}{nx^{s+1}} = \int_0^{b} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(2n\pi x)}{nx^{s+1}} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_b^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(2n\pi x)}{nx^{s+1}}.$$

La prueba concluye haciendo $b \to \infty$ en la igualdad anterior y usando el lema 3.4. □

Como consecuencia del lema 3.1 podemos reescribir la ecuación funcional de la siguiente manera.

(55) $$\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \pi^{-\frac{1-s}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \zeta(1-s).$$

Luego, la función

(56) $$\xi(s) = \frac{1}{2} s(s-1) \pi^{-s/2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s),$$

verifica la siguiente ecuación funcional.

(57) $$\xi(s) = \xi(1-s).$$

Teorema 3.2. — ξ es una función entera de orden 1

Demostración. Debido a que $(s-1)\zeta(s)$ es diferenciable en $s = 1$, tenemos que ξ es holomorfa para $\sigma > 0$. Como $\xi(s) = \xi(1-s)$, concluimos que ξ es entera.

Demostremos que

(58) $$|\xi(s)| < \exp(C|s| \log |s|)$$

cuando $|s| \to \infty$, para alguna constante C; en vista de (57) basta probar esta desigualdad para $\sigma \geqslant 1/2$. Evidentemente

(59) $$\left| \frac{1}{2} s(s-1) \pi^{-s/2} \right| < \exp |s|$$

para $|s|$ suficientemente grande. En el semiplano $\sigma \geqslant 1/2$ se verifica que $-\pi/2 < \arg s < \pi/2$, por lo tanto podemos usar la igualdad de Stirling. Tomando en cuenta que $\log \Gamma(s/2) =$

$\log|\Gamma(s/2)| + i\arg(\Gamma(s/2))$ entonces (46) implica que

$$\left|\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\right| < \exp(|s|\log|s|)$$

para $|s|$ grande. De (52) concluimos que

$$|\zeta(s)| < 2|s| \tag{60}$$

para $|s| \to \infty$. Esto completa la prueba de (58). Se sigue inmediatamente que, para todo $\epsilon > 0$

$$M_\xi(r) < \exp(Cr\log r) < \exp(r^{1+\epsilon}),$$

pues $C\log r \overset{as}{<} r^\epsilon$ para todo $\epsilon > 0$.

Así, concluimos que el orden de ξ es menor o igual a 1. De la fórmula de Stirling vemos que

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\log\Gamma(r)}{r\log r} = \frac{1}{2}.$$

La igualdad anterior, (60) y (59) implican que

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\log\xi(r)}{r\log r} = \frac{1}{2}.$$

Supongamos que el orden de ξ es menor que 1, es decir que existe $c < 1$ tal que

$$\xi(r) \leqslant M_\xi(r) \overset{as}{<} e^{r^c}.$$

Tomando logaritmo en la en la desigualdad anterior y multiplicando por $1/r\log r$ llegamos a una contradicción. □

Corolario 3.1. — Para todo $s \in \mathbb{C}$

$$\xi(s) = e^{A+Bs}\prod_\rho\left(1 - \frac{s}{\rho}\right)e^{\frac{s}{\rho}},$$

donde $\sum_\rho \frac{1}{|\rho|^2} < \infty$.

Demostración. Es una consecuencia del teorema anterior y el teorema 2.10 □

3.5. Distribución de los ceros

Del producto de Euler (41) se tiene que la función ζ no posee ceros en el semiplano $\sigma > 1$. Así también, de (54) se determina que la función ζ se anula para los enteros negativos pares, pues sen $\left(\frac{s\pi}{2}\right) = 0$ para $s = -2k$, $k = 1, 2, \ldots$. Estos son llamados *ceros triviales* de la función zeta.

Aparte de los ceros triviales, la función zeta también se anula en valores de s en la banda $\{s \in \mathbb{C}; 0 \leqslant \sigma \leqslant 1\}$. Estos son llamados *los ceros no triviales*. De la ecuación funcional de deduce que estos son simétricos con respecto a la recta $\sigma = \frac{1}{2}$. En efecto, sea $0 \leqslant \sigma \leqslant 1$ tal que

$$2^s\pi^{s-1}\operatorname{sen}\frac{1}{2}s\pi\Gamma(1-s)\zeta(1-s)=\zeta(s)=0,$$

como las funciones sen $\left(\frac{s\pi}{2}\right)$, $\Gamma(1-s)$ no se anulan en esta franja, entonces

$$\zeta(1-s)=0.$$

A continuación demostramos que la función ζ no se anula en puntos con parte real 1.

Proposición 3.5. — La función ζ no posee ceros en la recta $\Re(s)=1$.

Demostración. Para demostrar la primera afimación comenzamos viendo la identidad

$$3+4\cos\phi+\cos 2\phi=2(1+\cos\phi)^2\geqslant 0 \tag{61}$$

donde $\phi\in\mathbb{R}$. La expansión en serie de Taylor de la función logaritmo para $|x|<1$

$$\log(1+x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}x^k$$

implica que

$$-\log(1-x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k}. \tag{62}$$

Fijemos $s>1$, tomando logaritmo a (41) y usando (62)

$$\log\zeta(s)=\sum_p-\log(1-p^{-s})=\sum_p\sum_{k=1}^{\infty}\frac{p^{-ms}}{m},$$

de donde

$$\zeta(s)=\exp\left(\sum_p-\log(1-p^{-s})\right)=\exp\left(\sum_p\sum_{k=1}^{\infty}\frac{p^{-ms}}{m}\right). \tag{63}$$

Como las dos funciones en la igualdad anterior son analíticas se concluye que la igualdad se da en el semiplano $\sigma>1$. Tomando módulo en (63) obtenemos

$$|\zeta(\sigma+i\tau)|=\exp\left(\Re\left(\sum_p\sum_{k=1}^{\infty}\frac{p^{-ms}}{m}\right)\right)=\exp\sum_p\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(m\tau\log p)}{mp^{m\sigma}}$$

lo cual implica que

$$|\zeta(\sigma)|^3|\zeta(\sigma+i\tau)|^4|\zeta(\sigma+2i\tau)|=\exp\sum_p\sum_{k=1}^{\infty}\frac{3+4\cos(m\tau\log p)+\cos(2m\tau\log p)}{mp^{m\sigma}}$$

cuando $\sigma>1$.

De la última igualdad y de (61) se desprende que

$$|\zeta(\sigma)|^3|\zeta(\sigma+i\tau)|^4|\zeta(\sigma+2i\tau)|\geqslant 1 \tag{64}$$

Si $s_0=1+i\tau_0$ es un cero de ζ entonces $\zeta(s)=(s-1-i\tau_0)g(s)$, donde g es una función holomorfa en una vecindad de s_0 que no se anula en s_0; concluimos que cuando $\sigma\to 1$

entonces

$$\zeta^4(\sigma + i\tau_0) = O\big((\sigma - 1)^4\big).$$

Como ζ tiene un polo en $s = 1$, entonces cuando $\sigma \to 1$

$$\zeta^3(\sigma) = O\big((\sigma - 1)^{-3}\big).$$

Finalmente como ζ es holomorfa en $s_1 = 1 + 2i\tau_0$ entonces

$$\zeta(\sigma + 2i\tau_0) = O(1).$$

De (64) y las tres últimas igualdades se concluye que

$$O(\sigma - 1) = |\zeta(\sigma)|^3 |\zeta(\sigma + i\tau_0)|^4 |\zeta(\sigma + 2i\tau_0)| \geqslant 1,$$

lo cual representa una contradicción.

□

Por la simetría de los ceros respecto a la recta $\sigma = \frac{1}{2}$, concluimos que la función ζ tampoco se anula en la recta $\sigma = 0$. Así tenemos que los ceros no triviales se encuentran en la franja $0 < \sigma < 1$.

Antes de nuestro siguiente resultado damos una definición.

Definición 3.3. — La función *eta de Dirichlet* es definida por la serie

$$\eta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s} \tag{65}$$

Proposición 3.6. — La serie en (65) converge en $\Pi = \{s \in \mathbb{C} | \Re(s) > 0\}$ y define una función analítica en este semiplano.

Demostración. Sea $A(x) = \sum_{n \leqslant x} (-1)^n$, es claro que $|A(x)| \leqslant 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Fijemos $s \in \Pi$; del teorema 1.42

$$\sum_{a < n \leqslant b} (-1)^n n^{-s} = A(b) b^{-s} - A(a) a^{-s} + s \int_a^b A(t) t^{-s-1} dt$$

Entonces

$$\begin{aligned} \left| \sum_{a < n \leqslant b} (-1)^n n^{-s} \right| &\leqslant a^{-\sigma} + b^{-\sigma} + |s| \frac{b^{-\sigma} - a^{-\sigma}}{-\sigma} \\ &\leqslant a^{-\sigma} \left(2 + \frac{|s|}{\sigma} \right). \end{aligned} \tag{66}$$

Como el último término de (66) converge hacia cero cuando $a \to \infty$, por el criterio de Cauchy concluimos que la serie es convergente en Π. Por el teorema 1.10, para mostrar que $\eta(s)$ es holomorfa basta mostrar que la serie (65) converge uniformemente en compactos en Π. Si $C \subset \Pi$ es compacto existen $\sigma_0 > 0$ y $M > 0$ tales que $\Re(s) > \sigma_0$ y $|s| < M$ para todo

$s \in C$. De (66), cuando $a \to \infty$, para todo $s \in C$

$$\left| \sum_{a<n\leqslant b} (-1)^n n^{-s} \right| \leqslant a^{-\sigma_0} \left(2 + \frac{M}{\sigma_0}\right) \to 0.$$

Concluimos que la serie converge uniformemente en C. □

La siguiente proposición implica que todos los ceros de la función ζ en la banda crítica tienen parte imaginaria no nula.

Proposición 3.7. — Si $\Re(s) > 0$ tenemos

$$(1 - 2^{1-s})\zeta(s) = \eta(s) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}.$$

Esto implica que $\zeta(s) < 0$ si $0 < s < 1$.

Demostración. Inicialmente consideremos $\sigma > 1$. En este caso

$$\begin{aligned}
(1 - 2^{1-s})\zeta(s) &= (1 - 2^{1-s}) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^s} \\
&= (1 + 2^{-s} + 3^{-s} + \cdots) - 2(2^{-s} + 4^{-s} + 6^{-s} + \cdots) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s} = \eta(s).
\end{aligned}$$

Sin embargo, como $(1 - 2^{1-s})\zeta(s)$ es entera, y $\eta(s)$ es holomorfa en $\sigma > 0$ concluimos que la igualdad anterior se da en el semiplano $\sigma > 0$.

Cuando $s > 0$ la serie que define $\eta(s)$ tiene suma positiva. Si $0 < s < 1$ el factor $(1-2^{1-s})$ es negativo, y por ende $\zeta(s)$ también es negativo.

□

Los ceros de la función ζ también son simétricos respecto al eje real. Esto es una clara consecuencia de

$$\overline{\zeta(s)} = \zeta(\overline{s}). \tag{67}$$

Este es un caso particular del llamado *principio de reflexión*. Para demostrar la igualdad anterior definamos $f(s) = \overline{\zeta(\overline{s})}$. Un cálculo directo f es holomorfa en todo el plano complejo excepto en $s = 1$ y que para $s \neq 1$

$$f'(s) = \overline{\zeta'(\overline{s})}.$$

Cuando $s > 1$ tenemos que $f(s) = \overline{\zeta(\overline{s})} = \zeta(s)$, por el principio de la identidad concluimos que $f = \zeta$ para todo $s \neq 1$, lo cual implica (67). El principio de reflexión es una propiedad general para funciones complejas que son reales sobre la recta real [**Ahlfors, 1978**, §6.5].

Riemann conjeturó que todos los ceros complejos de la función zeta se encuentran ubicados en la recta crítica $\Re(s) = 1/2$. La veracidad o falsedad de esta conjetura, ahora conocida como la *hipótesis de Riemann* aún no ha sido determinada.

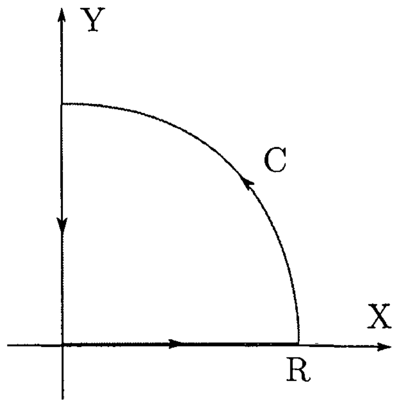

FIGURA 3.1. Gráfico del camino γ

Capítulo 4

GENERALIDADES SOBRE GRUPOS TOPOLÓGICOS

En este capítulo haremos una breve introducción a los grupos topológicos, demostraremos resultados que nos serán de utilidad en los capítulos posteriores, el principal de ellos es el teorema de dualidad de Pontriaguin.

4.1. Definición

Definición 4.1. — Un conjunto G se llama *grupo topológico* si:

1. G es un grupo.
2. G es un espacio topológico.
3. Las operaciones de grupo existentes en G son continuas en el espacio topológico G. De forma más precisa tenemos:
   a) Si $a, b \in G$, para todo entorno W de ab existen entornos U y V de a y b, respectivamente, tales que $UV \subset W$.
   b) Si $a \in G$, para todo entorno V de a^{-1} existe un entorno U de a tal que $U^{-1} \subset V$.

Las condiciones $a)$ y $b)$ pueden ser sustituidas por

c) Si $a, b \in G$, para todo entorno W de ab^{-1} existen entornos U y V de a y b, respectivamente, tales que $UV^{-1} \subset W$.

En la definición 4.1 podemos considerar sólo abiertos básicos.

Teorema 4.1. — Dado $a \in G$ definamos $f_a : G \to G$ por $f_a(x) = xa$. La función f es un homeomorfismo de G sobre sí mismo.

Demostración. Es claro que f_a es una biyección. Además, si $y = xa$ y W es un entorno de y, de la condición 3 de la definición 4.1 existen entornos U y V de x y a tales que $UV \subset W$. En particular $Ua \subset W$, es decir $f_a(U) \subset W$, lo que significa que la aplicación f_a es continua. De manera análoga se demuestra la continuidad de la función inversa $f_a^{-1}(x) = xa^{-1}$. □

De manera similar se demuestra que las funciones $g_a(x) = ax$ y $\varphi(x) = x^{-1}$ son homeomorfismos de G sobre G. El siguiente corolario es una aplicación directa del teorema anterior.

Corolario 4.1. — Todo grupo topológico G es *homogéneo*. Esto significa que dados $p, q \in G$ existe un un homeomorfismo $f : G \to G$, tal que $f(p) = q$.

Demostración. Basta poner $a = p^{-1}q$. El homeomorfismo f_a definido en el teorema 4.1 satisface $f_a(p) = q$. □

Corolario 4.2. — Sea G un grupo topológico. Sean $F \subset G$ un cerrado, $U \subset G$ un abierto, $P \subset G$ un conjunto cualquiera y $a \in G$. Entonces Fa, aF y F^{-1} son cerrados y UP, PU y U^{-1} son abiertos.

Demostración. La aplicación f_a es un homeomorfismo y por ende $Fa = f_a(F)$ es cerrado. Del mismo modo, Ua es abierto, y como $UP = \bigcup_{x \in P} Ux$ se tiene que UP es abierto. Las demás afirmaciones se demuestran de manera similar considerando las funciones $g_a(x) = ax$ y $\varphi(x) = x^{-1}$. □

De la homogeneidad del grupo topológico G se deduce que basta enunciar y demostrar sus propiedades locales para un elemento solamente. Por ejemplo, para comprobar que el espacio G es localmente compacto, basta demostrar que la unidad e admite una vecindad U cuya cerradura $\overline{U}$ es compacta. En efecto, dado $p \in G$, sea f el homeomorfismo tal que $f(e) = p$. Se tiene que $f(U)$ es un entorno de p y que $\overline{f(U)} = f(\overline{U})$ es compacto. También, para demostrar que G es discreto, es decir, que cada $p \in G$ admite un entorno formado por un elemento, basta ver que e posee esta propiedad.

De la homegeneidad resulta también que la topología de un grupo G queda determinada por un sistema fundamental de entornos de la unidad. El siguiente teorema aborda esta cuestión.

Teorema 4.2. — Sean G un grupo topológico, B_e un sistema fundamental de entornos de la unidad e, y F un conjunto denso en G (podemos tomar $F = G$). Entonces el conjunto $B = \{Ux : U \in B_e, x \in F\}$ es una base de G. Además el sistema B_e cumple las cinco condiciones siguientes:

a) Dados $U, V \in B_e$, existe $W \in B_e$ tal que $W \subset U \cap V$.
b) Para todo $U \in B_e$ existe $V \in B_e$ tal que $VV^{-1} \subset U$.
c) Para todo $U \in B_e$ y todo $a \in U$ existe $V \in B_e$ tal que $Va \subset U$.
d) Si $U \in B_e$ y $a \in G$, existe $V \in B_e$ tal que $a^{-1}Va \subset U$.

Demostración. Sea W un abierto y $a \in W$. Como $ee^{-1} = e \in Wa^{-1}$, de la definición 4.1 se tiene que existe un abierto V (el cual podemos asumir se encuentra en B_e) tal que $VV^{-1} \subset Wa^{-1}$. Por el corolario 4.2, $V^{-1}a$ es un abierto. Como F es denso en G existe $x \in F$ tal que $x \in V^{-1}a$, de donde

$$a \in Vx \subset VV^{-1}a \subset W$$

Las propiedades a),. . ., d) se deducen fácilmente. □

Teorema 4.3. — Sean G un grupo algebraico y B una familia de subconjuntos del conjunto G que cumplen las cinco condiciones del teorema 4.2. Entonces en el conjunto G admite una, y sólo una topología que lo convierte en un grupo topológico, y en la que B es un sistema fundamental de entornos de la unidad.

Demostración. Vea [**Pontriaguin, 1978**, §18]. □

Ejemplo 4. — Sea $\mathbb{Z}$ el grupo aditivo de los números enteros. Sea p un número primo. Indiquemos por U_k el conjunto de todos los números enteros divisibles por p^k. Como base en la unidad B_e tomamos la colección de todos los conjuntos U_k, $k \in \mathbb{N}$. Como $U_k \cap U_j = U_{\text{mín}\{k,j\}}$, la condición a) del teorema 4.2 se verifica. Si $a \in U_k$ y $b \in U_k$ se tiene $a - b \in U_k$. Es decir $U_k - U_k \subset U_k$. Es decir, la condición b) se cumple. Las condiciones c) y d) se verifican de manera trivial. Así gracias al teorema 4.3, introducimos una topología en el grupo $\mathbb{Z}$.

Es fácil ver que son distintas las topologías obtenidas de este modo para dos números primos distintos p y q. En efecto, sea V_k el conjunto de los números divisibles por q^k. Efectivamente en la primera topología la sucesión $p, p^2, \ldots, p^k, \ldots$ converge hacia cero, sin embargo como $p^k \notin V_j$, para todo $k, j \in \mathbb{N}$ tal sucesión no converge hacia cero en la segunda topología.

4.2. Grupo dual y medida de Haar

En lo que sigue G será un grupo topológico abeliano, Hausdorff y localmente compacto.

Sea $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. El conjunto $\mathbb{T}$ es un grupo abeliano con el producto usual y un grupo topológico con la topologia relativa heredada de $\mathbb{C}$.

Definición 4.2. — Un *caracter* χ de G es un homomorfismo continuo de G en el grupo topológico $\mathbb{T}$.

El conjunto de los caracteres de G es un grupo abeliano con el producto

$$\chi_1\chi_2(x) = \chi_1(x)\chi_2(x).$$

Este grupo se conoce como *grupo dual* y se denota por G^*. Es fácil verificar que $\chi_1\chi_2$ es un homomorfismo de G en $\mathbb{T}$. Además, dado $x \in G$ y W un entorno de $\chi_1\chi_2(x)$, como $\mathbb{T}$ es un grupo topológico, existen entornos U y V de $\chi_1(x)$ y $\chi_2(x)$ tales que $UV \subset W$. De la continuidad de χ_1 y χ_2 existen entornos U_x y V_x tales que $\chi_1(U_x) \subset U$ y $\chi_2(V_x) \subset V$. Tomando $W_x = U_x \cap V_x$, tenemos $\chi_1\chi_2(W_x) = \chi_1(W_x)\chi_2(W_x) \subset \chi_1(U_x)\chi_2(V_x) \subset UV \subset W$. Por lo tanto, $\chi_1\chi_2$ es continua en G.

El homomorfismo $1_G(x) = 1$ es la unidad de G^*. Dado $\chi \in G^*$, su inverso es el homomorfismo $\chi^{-1}(x) = \chi(x)^{-1}$; su continuidad resulta de la continuidad de χ y de la continuidad de $\varphi(x) = x^{-1}$, $x \in \mathbb{T}$.

Comenzamos esta sección con una definición.

Definición 4.3. — Sean $f : G \to \mathbb{C}$ y $x \in G$. Llamaremos *dilatación de f por x* a la función f_x definida por: $f_x(y) = f(yx^{-1})$ para $y \in G$.

En todo grupo abeliano localmente compacto G se puede introducir una σ-álgebra $\mathfrak{M}$ que contiene a todos los conjuntos de Borel y una medida positiva m no nula que es invariante bajo translaciones, es decir, para todo $x \in G$

$$\int_G f dm = \int_G f_x dm.$$

En particular, dado $E \in \mathfrak{M}$, si tomamos $f = \chi_E$ (función característica de E) obtenemos

$$m(E) = m(xE).$$

Esta medida es llamada *medida de Haar de* G. Para la construcción de esta medida se debe hallar una funcional lineal positiva T que además sea invariante por translaciones en $C_c(G)$, el espacio de las funciones continuas complejas con soporte compacto. Una vez logrado, el teorema de representación de Riesz nos da una medida m regular con las propiedades que se pide tal que

$$Tf = \int_G f dm \quad (f \in C_c(G)).$$

Proposición 4.1. — Sea G un grupo abeliano localmente compacto y m la medida de Haar en este grupo. Se verifican:

1) $m(A) > 0$ para todo abierto no vacío $A \subset G$;
2) m es única salvo constantes multiplicativas.

Demostración. Para demostrar 1) supongamos que existe un abierto $V \neq$ tal que $m(V) = 0$ y K compacto. Dado $x_0 \in V$, como $K \subset \cup_{x \in K}(x - x_0) + V$ existen $x_k \in K$, $k = 1, \ldots, n$ tal que $K \subset \cup_{k=1}^{n}(x_k - x_0) + V$, y como $m((x_k - x_0) + V) = m(V) = 0$ se tiene que $m(K) = 0$. Así, de la regularidad interior en abiertos se tiene que $m(U) = 0$ para todo conjunto abierto U, y de la regularidad exterior se tiene que $m(E) = 0$ para todo conjunto medible E, lo cual es una contradicción.

Ahora, sean m y m' dos medidas de Haar en G. Tomemos $g \in C_c(G)$ tal que $\int_G g dm = 1$. Definamos λ por

$$\int_G g(x^{-1}) dm'(x) = \lambda.$$

Para cualquier $f \in C_c(G)$ tenemos:

$$\begin{aligned}
\int_G f(x)dm'(x) &= \int_G g(y)dm(y) \int_G f(x)dm'(x) = \int_G g(y)dm(y) \int_G f_{y^{-1}}(x)dm'(x) \\
&= \int_G \left(\int_G g(y)f(xy)dm'(x) \right) dm(y) = \int_G \left(\int_G g(y)f(xy)dm(y) \right) dm'(x) \\
&= \int_G \left(\int_G g_x(y)f_x(xy)dm(y) \right) dm'(x) = \int_G \left(\int_G g(yx^{-1})f(y)dm'(x) \right) dm(y) \\
&= \int_G f(y)dm'(y) \int_G g(yx^{-1})dm(x) = \int_G f(y)dm'(y) \int_G g_{y^{-1}}(x^{-1})dm(x) \\
&= \int_G f(y)dm'(y) \int_G g(x^{-1})dm(x) = \lambda \int_G f(y)dm'(y).
\end{aligned}$$

Es decir $m' = \lambda m$. En las líneas anteriores el uso del teorema de Fubini fue válido desde que $h_1(x,y) = g(y)f(xy)$ y $h_2(x,y) = g(yx^{-1})f(y)$ están en $C_c(G \times G) \subset L^1(m \times m')$. □

Si G es compacto, $m(G) < \infty$ y podemos definir la medida de Haar m' por $m' = \frac{1}{m(G)}m$; se tiene que $m'(G) = 1$. Así si G es compacto se puede asumir que su medida es 1. Si G es discreto, fijando $p_0 \in G$, de la invariancia de la medida de Haar tenemos que $m(p) = m(p_0)$ para todo $p \in G$. Por ser discreto, existe un abierto V_0 tal que $V_0 = \{p_0\}$. Luego de la proposición 4.1 $m(p_0) = m(V_0) > 0$. Definiendo $m' = \frac{1}{m(p_0)}m$ se llega a que $m'(p) = 1$ para todo $p \in G$. Así si G es discreto se puede asumir que la medida de cualquier conjunto unitario es 1.

Ya establecida la unicidad de la medida de Haar cambiaremos la notación y escribiremos dx en lugar de dm.

Proposición 4.2. — Sea G un grupo abeliano localmente compacto y m la medida de Haar en este grupo. Para todo conjunto medible E, $m(E^{-1}) = m(E)$.

Demostración. Definamos la medida m' por $m'(E) = m(E^{-1})$. La medida así definida es invariante por translaciones. Así por la unicidad de la medida de Haar existe λ tal que $m(E^{-1}) = \lambda m(E)$. Tomemos un conjunto U abierto, y $V = U^{-1}U = \cup_{x \in U} x^{-1}U$. Es claro que $V = V^{-1}$ y por el corolario 4.2 también es abierto. Luego $m(V) = m(V^{-1}) = \lambda m(V)$, de donde $\lambda = 1$. □

El siguiente teorema es una consecuencia inmediata de la invariancia de la medida de Haar.

Teorema 4.4. — Dados $x \in G$ y $f \in L^p(m)$, $p \in [1,\infty)$ tenemos que $\|f_x\|_p = \|f\|_p$.

En lo que sigue escribimos $L^p(G)$ en lugar de $L^p(m)$.

Teorema 4.5. — Supongamos que $f \in L^p(G)$, $p \in [1,\infty)$. Si definimos

$$\begin{array}{rccc} \phi: & G & \to & L^p(G) \\ & x & \mapsto & f_x, \end{array}$$

la función ϕ es continua en G.

Demostración. Sean $x_0 \in G$ y $\varepsilon > 0$ dados. Como $C_c(G)$ es denso en $L^p(G)$, existe $g \in C_c(G)$ con soporte compacto K, tal que $\|g - f\|_p < \varepsilon/3$. De la continuidad de g existe una vecindad V_0 de e tal que si $x \in V_0$ entonces $|g(x) - g(e)| < \frac{\varepsilon}{3}[m(K)]^{-1/p}$; se sigue que para todo $y \in G$

$$|g(y) - g_x(y)| < \frac{\varepsilon}{3}[m(K)]^{-1/p}$$

si $x \in V_0$, de donde $\|g - g_x\|_p < \varepsilon/3$. Así

$$\|f - f_x\|_p \leqslant \|f - g\|_p + \|g - g_x\|_p + \|g_x - f_x\|_p < \varepsilon$$

si $x \in V_0$. Finalmente

$$\|f_{x_0} - f_x\|_p = \|(f - f_{xx_0^{-1}})_{x_0}\|_p = \|(f - f_{xx_0^{-1}})\|_p < \varepsilon$$

si $xx_0^{-1} \in V_0$, es decir si $x \in x_0V_0$, de donde se sigue la continuidad. □

4.3. Convolución de funciones

Definición 4.4. — Sean dos funciones medibles f y g en un grupo abeliano localmente compacto G. Definimos su *convolución* por la fórmula

$$(f * g)(x) = \int_G f(xy^{-1})g(y)dy$$

siempre que

$$\int_G |f(xy^{-1})g(y)|dy < \infty \tag{68}$$

Teorema 4.6. — a) Si (68) se cumple para algún $x \in G$ entonces $f * g = g * f$.

b) Si $f \in L^1(G)$ y $g \in L^\infty(G)$, entonces $f * g$ es acotada y uniformemente continua.

c) Si $f, g \in C_c(G)$, con soportes compactos A y B, entonces el soporte de $f * g$ está contenido en AB, de modo de $f * g \in C_c(G)$.

d) Si $1 < p < \infty$, $1/p + 1/q = 1$, $f \in L^p(G)$ y $g \in L^q(G)$ entonces $f * g \in C_0(G)$.

e) Si $f, g \in L^1(G)$, entonces (68) se cumple para casi todo $x \in G$, $f * g \in L^1(G)$ y

$$\|f * g\|_1 \leqslant \|f\|_1 \|g\|_1.$$

f) Si f, g y $h \in L^1(G)$, entonces $(f * g) * h = f * (g * h)$

Demostración.

a) Reemplazando y por yx en (68)

$$(f * g)(x) = \int_G f(y^{-1})g(y + x)dy$$

Del teorema 4.2

$$\int_G f(y^{-1})g(yx)dy = \int_G g(xy^{-1})f(y)dy.$$

Así, $(f * g)(x) = (g * f)(x)$.

b) Bajo la hipótesis (b)

$$|f * g(x)| \leqslant \int_G |f(xy^{-1})g(y)|dy \leqslant \|g\|_\infty \int_G |f(xy^{-1})|dy = \|g\|_\infty \|f\|_1.$$

Sean $x, y \in G$

$$\begin{aligned}|f * g(x) - f * g(y)| &\leqslant \int_G |f(xz^{-1}) - f(yz^{-1})||g(z)|dz \\ &\leqslant \|g\|_\infty \int_G |f(xz) - f(yz)|dz = \|g\|_\infty \|f_{x^{-1}} - f_{y^{-1}}\|_1.\end{aligned}$$

Como $x \mapsto f_x$ es uniformemente continua, la última expresión puede hacerse pequeña para xy^{-1} en una vecindad adecuada de cero.

c) Si $x \notin AB$ entonces para todo $y \in B$, $xy^{-1} \notin A$. Luego

$$f(xy^{-1})g(y) = 0$$

si $y \in B$ y como g se anula fuera de B. Se concluye que $f * g(x) = 0$, es decir $\text{Supp}(f * g) = \overline{\{x \in G : f * g(x) \neq 0\}} \subset \overline{AB} = AB$.

d) Existen sucesiones (f_n), $(g_n) \subset C_c(G)$, tal que $f_n \to f$ en L^p, y $g_n \to g$ en L^q. Usando la desigualdad de Hölder

$$\begin{aligned}\left|f * g(x) - f_n * g_n(x)\right| &\leqslant \left|g * f(x) - g * f_n(x)\right| + \left|f_n * g(x) - f_n * g_n(x)\right| \\ &\leqslant \|g\|_q \|f - f_n\|_p + \|f_n\|_p \|g - g_n\|_q,\end{aligned}$$

es decir $f_n * g_n \to f * g$ uniformemente. Por lo tanto $f * g \in C_0(G)$.

e) $h : G \times G \to \mathbb{C}$ definida por $h(x, y) = f(x - y)g(y)$ es medible. En efecto, si $E \subset G$ es medible, $E_2 = \{(x, y) : x - y \in E\}$ es medible en $G \times G$. Luego $(x, y) \mapsto f(x - y)$ es medible, pues f lo es. Luego, del teorema de Fubini

$$\|h\|_1 = \int_G \int_G \left|f(x - y)g(y)\right| dx dy = \|g\|_1 \|f\|_1,$$

es decir, $h \in L^1(G \times G)$, luego $h_x \in L^1(G)$ para casi todo $x \in G$. Finalmente

$$\|f * g\|_1 = \int_G \left|f * g(x)\right| dx \leqslant \int_G \int_G \left|f(x - y)g(y)\right| dx dy = \|f\|_1 \|g\|_1$$

f) Este ítem resulta de una aplicación directa del teorema de Fubini, justificada por el ítem (e).

□

El siguiente teorema nos muestra que podemos introducir una identidad respecto al producto de convolución en $L^1(G)$.

Teorema 4.7. — Si G es un grupo abeliano localmente compacto, $L^1(G)$ es un álgebra de Banach conmutativa. Si G es discreto, existe una función $\overline{e} \in L^1(G)$ tal que

$$f * \overline{e} = f,$$

para todo $f \in L^1(G)$.

Demostración. El primer enunciado se obtiene de (e), (f) y (a) del teorema 4.6 y de las igualdades

$$\begin{aligned}f * (g + h) &= f * g + f * h, \\ \alpha(f * g) &= (\alpha f) * g,\end{aligned}$$

para f, g, $h \in L^1(G)$, $\alpha \in \mathbb{C}$. Si G es discreto podemos asumir que la integral de cualquier conjunto unitario es 1. Definimos $\overline{e}(e) = 1$ y $\overline{e}(x) = 0$ si $x \neq e$, tenemos entonces que para $f \in L^1(G)$

$$(f * \overline{e})(x) = \sum_{y \in G} f(xy^{-1})\overline{e}(y) = f(x).$$

□

Teorema 4.8. — Si $\gamma \in G^*$, $\hat{\gamma} : L^1(G) \to \mathbb{C}$ dado por

$$\hat{\gamma}(f) = \int_G f(x)\gamma(x^{-1}) dx$$

es un homomorfismo complejo no nulo. Recíprocamente, todo homomorfismo complejo se obtiene de esta forma. Además $\gamma \mapsto \hat{\gamma}$ es inyectivo.

Demostración. Es claro que $\hat{\gamma}$ es lineal. Además si $f, g \in L^1(G)$ del teorema de Fubini

$$\begin{aligned}\hat{\gamma}(f * g) &= \int_G (f * g)(x)\gamma(x^{-1})dx = \int_G \int_G f(xy^{-1})g(y)\gamma(x^{-1})dydx \\ &= \int_G g(y) \int_G f(xy^{-1})\gamma(x^{-1})dxdy = \int_G g(y)\gamma(y^{-1}) \int_G f(x)\gamma(x^{-1})dxdy = \hat{\gamma}(g)\hat{\gamma}(f)\end{aligned}$$

Supongamos que $\hat{\gamma}$ es idénticamente nula. En ese caso para todo $K \subset G$ compacto $f_K = \gamma 1_K \in L^1(G)$, de donde $0 = \hat{\gamma}(f_K) = m(K)$. Como la medida de Haar es regular interior en abiertos, se concluye que $m(V) = 0$ para todo abierto V, lo cual representa una contradicción. Reciprocamente, si h es un homomorfismo complejo de $L^1(G)$, h es lineal acotada de norma 1. Luego

$$h(f) = \int_G f(y)\phi(y)dy$$

para algún $\phi \in L^\infty(G)$ con $\|\phi\|_\infty = 1$.

Si $f, g \in L^1(G)$

$$\begin{aligned}\int_G g(y)\phi(y)h(f)dy &= h(f)h(g) = h(f * g) = \int_G \int_G f(x-y)g(y)\phi(x)dydx \\ &= \int_G g(y) \int f_y(x)\phi(x)dxdy = \int g(y)h(f_y)dy.\end{aligned}$$

Luego

$$h(f)\phi(y) = h(f_y) \tag{69}$$

para casi todo $y \in G$. Tomando $f \in L^1(G)$ tal que $h(f) \neq 0$ y pasando a dividir este factor en la igualdad anterior tenemos que casi en todas partes ϕ es igual a una función continua. Así podemos asumir que ϕ es continua. Además

$$\begin{aligned}\phi(xy) &= \frac{h(f_{xy})}{h(f)} = \frac{h((f_x)_y)}{h(f)} \\ &= \frac{h(f_x)\phi(y)}{h(f)} = \phi(x)\phi(y).\end{aligned}$$

Se sigue que $\phi(x^{-1}) = \phi(x)^{-1}$. Luego $|\phi(x)| \leqslant 1$ implica que $|\phi(x)| = 1$. Concluimos que $\phi \in G^*$. El caracter buscado es $\gamma(x) = \phi(x^{-1})$. □

Con la biyección $\Gamma : \gamma \in G^* \mapsto \hat{\gamma} \in \triangle(L^1(G))$ podemos inducir una topología en G^* cuyos abiertos son preimágenes de abiertos en la topología de Gelfand de $\triangle(L^1(G))$.

Teorema 4.9. — La biyección $\Gamma : G^* \to \triangle(L^1(G))$ induce una topología de Hausdorff localmente compacta en G^* que tiene por subbase a los conjuntos $(\hat{f} \circ \Gamma)^{-1}(U)$ donde $U \subset \mathbb{C}$ es abierto y $\hat{f}$ es la transformada de Gelfand de $f \in L^1(G)$.

Demostración. Si $\gamma_1 \neq \gamma_2 \in G^*$ entonces $\Gamma(\gamma_1) \neq \Gamma(\gamma_2)$. Como la topología de Gelfand es de Hausdorffb existen abiertos disjuntos A_1, A_2 en $\triangle(L^1(G))$ tal que $\Gamma(\gamma_1) \in A_1$, $\Gamma(\gamma_2) \in$

A_2. Los abiertos $\Gamma^{-1}(A_1) \ni \gamma_1$, $\Gamma^{-1}(A_2) \ni \gamma_2$ son disjuntos en G^*. Esto prueba que la topología en G^* es de Hausdorff.

Es claro que la topología inducida en G^* por Γ convierte a esta última en un homeomorfismo. Luego

a) Si $A \subset \triangle\big(L^1(G)\big)$ se verifica que $\Gamma^{-1}(\overline{A}) = \overline{\Gamma^{-1}(A)}$.

b) Si $K \subset \triangle\big(L^1(G)\big)$ es compacto $\Gamma^{-1}(K) \subset G^*$ es compacto.

Sea $\gamma \in G^*$. Como $\Gamma(\gamma)$ tiene una vecindad con adherencia compacta, de (a) y(b) concluimos que su preimagen también tiene cerradura compacta. Es decir, la topología en G^* es localmente compacta.

El último enunciado resulta de observar que la subbase para la topología de Gelfand de $\triangle\big(L^1(G)\big)$ está conformada por $\hat{f}^{-1}(U)$ donde U es abierto en el plano complejo. □

4.4. La transformada de Fourier

Definición 4.5. — Dada $f \in L^1(G)$, la función $\tilde{f} : G^* \to \mathbb{C}$ definida por

$$\tilde{f}(\gamma) = \int f(x)\gamma(x^{-1})dx$$

se llama *transformada de Fourier* de f. El conjunto de todas las $\tilde{f}$ se denota por $A(G^*)$.

Es claro que $\hat{f} = \tilde{f} \circ \Gamma^{-1}$, donde $\hat{f}$ es la transformada de Gelfand de f. Luego

$$\tilde{f}^{-1}(U) = (\hat{f} \circ \Gamma)^{-1}(U). \tag{70}$$

La topología debil en G^* inducida por $A(G^*)$ tiene por subbase todos los $\tilde{f}^{-1}(U)$ donde $U \subset \mathbb{C}$ es un abierto. Luego, del último enunciado del teorema 4.9 y (70) concluimos que la topología debil inducida por $A(G^*)$ es la topología en G^* inducida por Γ de la topología de Gelfand de $\triangle\big(L^1(G)\big)$. Cada $\tilde{f}$ es continua con esta topología, y

$$\|\tilde{f}\|_\infty = \sup\Big\{\Big|\tilde{f}\big(\Gamma(\gamma)\big)\Big| : \gamma \in G^*\Big\} = \sup\Big\{\big|\hat{f}(h)\big| : h \in \triangle\big(L^1(G)\big)\Big\} = \|\hat{f}\|_\infty \leqslant \|f\|_1$$

Teorema 4.10. — Si G es compacto, G^* es discreto. Si G es discreto, entonces G^* es compacto.

Demostración. Si G es discreto, entonces $L^1(G)$ tiene una identidad. Luego $\triangle\big(L^1(G)\big)$ es compacto, por lo cual $G^* = \Gamma^{-1}\Big(\triangle\big(L^1(G)\big)\Big)$ también lo es.

Si G es compacto podemos asumir que $m(G) = 1$. Se verifica

$$\int_G \gamma(x)dx = \begin{cases} 0 & \text{si } \gamma \neq 1_G, \\ 1 & \text{si } \gamma = 1_G. \end{cases} \tag{71}$$

El caso $\gamma = 1_G$ es trivial. Si $\gamma \neq 1_G$, entonces $\gamma(x_0) \neq 1$ para algun $x_0 \in G$, y

$$\int_G \gamma(x)dx = \gamma(x_0)\int_G \gamma(xx_0^{-1})dx = \gamma(x_0)\int_G \gamma(x)dx,$$

de donde $\int_G \gamma(x)dx = 0$. Sea $f = 1_G \in L^1(G)$, (71) puede ser escrito como

$$\tilde{f}(\gamma) = \begin{cases} 0 & \text{si } \gamma \neq 1_G, \\ 1 & \text{si } \gamma = 1_G. \end{cases}$$

Como $\tilde{f}$ es continua $\{1_G\} = \tilde{f}^{-1}(\mathbb{C} \setminus \{0\})$ es abierto, es decir el conjunto formado sólo por 1_G es abierto y así G^* es discreto. □

Hasta ahora hemos demostrado que G^* es un grupo y un espacio de Hausdorff localmente compacto. A continuación demostramos que estas dos estructuras hacen de G^* un grupo abeliano localmente compacto.

Teorema 4.11. — a) La aplicación $(x, \gamma) \in G \times G^* \mapsto \gamma(x) \in \mathbb{T}$ es continua.

b) Sea $K \subset G$ compacto y $U_r = \{z \in \mathbb{C} | |z - 1| < r\}$. El conjunto

$$N(K, r) = \{\gamma | \gamma(x) \in U_r \text{ para todo } x \in K\},$$

es abierto en G^*.

c) La familia de todos los conjuntos $N(K, r)$ y sus translaciones forman una base de G^*.

d) G^* es un grupo abeliano localmente compacto.

Demostración.

a) Usando la definición 4.5 podemos escribir (69) como

$$\tilde{f}(\gamma)\gamma(x^{-1}) = \tilde{f}_x(\gamma)$$

donde $f \in L^1(G)$, $x \in G$ y $\gamma \in G^*$. Para demostrar (a) basta ver que $(x, \gamma) \mapsto \tilde{f}_x(\gamma)$ es continua para todo $f \in L^1(G)$. En efecto, dado $(x_0, \gamma_0) \in G \times G^*$ gracias al teorema 4.8 existe $f_0 \in L^1(G)$ tal que

$$\tilde{f}_0(\gamma_0) = \int f_0(x)\gamma_0(x^{-1})dx \neq 0,$$

y de la continuidad de $\tilde{f}_0$ existe una vecindad V_0 de γ_0 tal que $\tilde{f}(\gamma) \neq 0$ para $\gamma \in V_0$. Así, para todo $\gamma \in V_0$ tenemos que

$$\gamma(x) = \frac{\tilde{f}_x(\gamma)}{\tilde{f}(\gamma)}.$$

Es decir, la función $(x, \gamma) \mapsto \gamma(x)$ coincide con una función continua en el abierto $G \times V_0$, lo que implica (a).

Sea $f \in L^1(G)$, $x_0 \in G$ y $\gamma_0 \in G^*$. Dado $\epsilon > 0$ de la continuidad de $\tilde{f}_{x_0}$ y del teorema 4.5 existen vecindades V de x_0 y W de γ_0 tales que

$$\left\|f_x - f_{x_0}\right\|_1 < \epsilon \text{ y } \left|\tilde{f}_{x_0}(\gamma) - \tilde{f}_{x_0}(\gamma_0)\right| < \epsilon$$

para todo $x \in V$, $\gamma \in W$. Luego, si $(x, \gamma) \in V \times W$

$$\begin{aligned} \left|\tilde{f}_x(\gamma) - \tilde{f}_{x_0}(\gamma_0)\right| &\leqslant \left|\tilde{f}_x(\gamma) - \tilde{f}_{x_0}(\gamma)\right| + \left|\tilde{f}_{x_0}(\gamma) - \tilde{f}_{x_0}(\gamma_0)\right| \\ &\leqslant \left\|f_x - f_{x_0}\right\|_1 + \left|\tilde{f}_{x_0}(\gamma) - \tilde{f}_{x_0}(\gamma_0)\right| < 2\epsilon. \end{aligned}$$

b) Sea $K \subset G$ compacto y $r > 0$. Si $\gamma_0 \in N(K, r)$, para cada $x_0 \in K$, por el ítem (a) existen vecindades V de x_0 y W de γ_0 tales que $\gamma(x) \in U_r$ para $x \in V$ y $\gamma \in W$. Por la compacidad de K, existe un número finito de vecindades V que cubren K. Sea W_0 la intersección de las vecindades W correspondientes; es claro que si $\gamma \in W_0$ entonces $\gamma(x) \in U_r$ para todo $x \in K$. Como W_0 es una vecindad de γ_0, $N(K, r)$ es abierto.

c) Sea V un abierto y $\gamma_0 \in V$. Si $V_0 = \gamma_0^{-1}V$, entonces V_0 es abierto y $e \in V_0$. Debido a que la topología en G^* es la topología débil generada por $A(G^*)$, existen funciones $f_1, \ldots, f_n \in L^1(G)$ y $\epsilon > 0$ tales que

$$\bigcap_{i=1}^{n} \left\{ \gamma : \left| \tilde{f}_i(\gamma) - \tilde{f}_i(e) < \epsilon \right| \right\} \subset V_0.$$

Como $C_c(G)$ es denso en $L^1(G)$, existen $g_1, \ldots, g_n$ con soportes compactos $K_1, \ldots, K_n$ tales que $\left\| g_k - f_k \right\|_1 < \frac{\epsilon}{3}$ para $k = 1, \ldots, n$. Luego, si $\left| \tilde{g}_k(\gamma) - \tilde{g}_k(e) \right| < \frac{\epsilon}{3}$ entonces

$$\begin{aligned} \left| \tilde{f}_k(\gamma) - \tilde{f}_k(e) \right| &\leqslant \left| \tilde{f}_k(\gamma) - \tilde{g}_k(\gamma) \right| + \left| \tilde{g}_k(\gamma) - \tilde{g}_k(e) \right| + \left| \tilde{g}_k(e) - \tilde{f}_k(e) \right| \\ &\leqslant 2||f_1 - g_1||_1 + \left| \tilde{g}_k(\gamma) - \tilde{g}_k(e) \right| < \epsilon, \end{aligned}$$

es decir

$$\bigcap_{i=1}^{n} \left\{ \gamma : \left| \tilde{g}_i(\gamma) - \tilde{g}_i(e) < \delta \right| \right\} \subset V_0,$$

donde $\delta = \frac{\epsilon}{3}$. Las funciones $g_1, \ldots, g_n$ se anulan fuera del compacto $K = \cup_{i=1}^{n} K_i$. Si

$$r < \delta / \max_i ||f_i||_1,$$

y $\gamma \in N(K, r)$, entonces

$$\left| \tilde{g}_k(\gamma) - \tilde{g}_k(e) \right| \leqslant \int_K \left| \gamma(x^{-1}) - 1 \right| \left| f_k(x) \right| dx \leqslant r||f_k||_1 < \epsilon.$$

Así, $N(K, r) \subset V_0 = \gamma_0^{-1}V$, de donde $\gamma_0 N(K, r) \subset V$.

d) Sea $V \subset G^*$ abierto y $\gamma_0\gamma_1^{-1} \in V$. Por el ítem anterior existe un abierto $N(K, r)$ tal que $\gamma_0\gamma_1^{-1}N(K, r) \subset V$. Si $\lambda_0 \in \gamma_0 N(K, r/2)$ y $\lambda_1 \in \gamma_1 N(K, r/2)$ entonces $\lambda_0\lambda_1^{-1} \in \gamma_0\gamma_1^{-1} \in V$. En efecto, para todo $x \in K$

$$\begin{aligned} \left| \lambda_0(x)\lambda_1^{-1}(x)\gamma_0^{-1}(x)\gamma_1(x) - 1 \right| &= \left| \lambda_0(x)\gamma_0^{-1}(x) - \lambda_1(x)\gamma_1^{-1}(x) \right| \\ &\leqslant \left| \lambda_0(x)\gamma_0^{-1}(x) - 1 \right| + \left| 1 - \lambda_1(x)\gamma_1^{-1}(x) \right| < r/2 + r/2 = r, \end{aligned}$$

es decir

$$\left(\gamma_0 N(K, r/2) \right) \left(\gamma_1 N(K, r/2) \right)^{-1} \subset \gamma_0\gamma_1^{-1} N(K, r),$$

de donde se concluye que la función $(\gamma_0, \gamma_1) \mapsto \gamma_0\gamma_1^{-1}$ es continua.

□

Como G^* es un grupo abeliano localmente compacto tiene sentido considerar el doble dual $(G^*)^*$. El siguiente resultado es uno de los más fundamentales respecto a G^*; su demostración puede ser hallada en [**Pontriaguin, 1978**, §36].

Teorema 4.12. — El homomorfismo $\varphi : G \to (G^*)^*$ dado por $\varphi(x) = x^{**}$ donde

$$x^{**}(\chi) = \chi(x),$$

es tanto un isomorfismo como un homeomorfismo.

Capítulo 5

FORMULACIÓN EQUIVALENTE DE LA HIPÓTESIS DE RIEMANN

El propósito de este capítulo es probar el criterio de Beurling para la hipótesis de Riemann. El teorema que presentaremos puede generalizarse al espacio $L^p(0,1)$ [**Beurling, 1955**], en cuyo caso la prueba se complica significativamente pues no se cuenta con la estructura de espacio de Hilbert que ofrece $L^2(0,1)$. Nosotros trabajaremos el caso $p=2$. Para un mayor orden dividiremos la prueba en dos etapas. Esta puede ser hallada en [**Björk, 2000**]

5.1. Definiciones previas

Sea $\rho : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$\rho(x) = \left\{ \frac{1}{x} \right\}$$

donde $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ es la parte fraccionaria de x.

Para $0 < \theta < 1$ consideramos la dilatación de ρ por θ

$$\rho_\theta(x) = \rho(x\theta^{-1}) = \left\{ \frac{\theta}{x} \right\}.$$

Si restringimos ρ_θ al intervalo $(0,1)$ obtenemos una función no negativa que presenta discontinuidades en el conjunto $\{\frac{\theta}{k} : \ k = 1, 2, \ldots\}$.

Denotamos por $\mathcal{D}$ al subespacio de $L^2(0,1)$ de funciones de la forma

$$f = \sum_{i=1}^{n} c_i \rho_{\theta_i} \qquad \text{con } n \in \mathbb{N}, 0 < \theta_i < 1, c_i \in \mathbb{C} \text{ para } i = 1, \ldots, n$$

donde $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} c_i \theta_i = 0$.

***Teorema 5.1* (*Beurling*)**. — La hipótesis de Riemann es válida si y solo si la función constante 1 pertenece a la clausura de $\mathcal{D}$ en $L^2(0,1)$.

5.2. El criterio de Beurling

Inicialmente suponemos que 1 pertenece a la clausura de $\mathcal{D}$ en $L^2(0,1)$; demostraremos que esto implica la hipótesis de Riemann.

Sea $f \in L^2(0,1)$; definimos

$$F(s) = \int_0^1 f(x)x^{s-1}dx \tag{72}$$

donde $\sigma > 1/2$.

En la definición anterior se toma $\sigma > 1/2$ pues en este semiplano la función $s \mapsto x^{s-1}$, donde $x \in (0,1)$, es de cuadrado integrable, por lo cual la integral en (72) está bien definida.

Proposición 5.1. — Si $f \in L^2(0,1)$, entonces F definida en (72) es holomorfa en el semiplano $\sigma > 1/2$.

Demostración. Sea Π el semiplano $\sigma > 1/2$ y $F : \Pi \to \mathbb{C}$ la función definida en (72). Si demostramos que F es continua, usando el teorema de Fubini obtenemos para cualquier triángulo $\triangle \in \Pi$

$$\begin{aligned}\int_{\partial\triangle} F(s)ds &= \int_{\partial\triangle}\int_0^1 f(x)x^{s-1}dxds \\ &= \int_0^1 f(x)\int_{\partial\triangle} x^{s-1}dsdx = 0\end{aligned}$$

donde la última igualdad se debe a que $s \mapsto x^{s-1}$ es entera. Debido al teorema de Morera concluimos que F es holomorfa.

Para demostrar que F es continua tomemos una sucesión $s_n = \sigma_n + i\tau_n$ cuyo límite $s = \sigma + i\tau \in \Pi$ y funciones $g_n(x) = f(x)x^{s_n-1}$, $g(x) = f(x)x^{s-1}$ definidas en $(0,1)$. La continuidad de $s \mapsto x^{s-1}$ implica que $g_n \to g$ puntualmente. Fijando $\alpha \in (-1/2, \sigma - 1)$ tenemos que

$$|g_n(x)| \leqslant |f(x)|x^{\alpha} \tag{73}$$

para n suficientemente grande. Usando la desigualdad de Hölder

$$\int_0^1 |f(x)|x^{\alpha}dx \leqslant \|f\|_2 \frac{1}{\sqrt{2\alpha+1}} < \infty;$$

es decir, la función al lado derecho de (73) es integrable. Así, el teorema 1.32 implica que

$$\int_0^1 |f(x)||x^{s_n-1} - x^{s-1}|dx = \|g_n - g\|_1 \to 0,$$

y la desigualdad

$$|F(s_n) - F(s)| \leqslant \|g_n - g\|_1$$

muestra que F es continua.

□

Proposición 5.2. — Para cada $0 < \theta < 1$ tenemos

$$\int_0^1 \{\theta/x\}x^{s-1}dx = \frac{\theta}{s-1} - \frac{\theta^s\zeta(s)}{s} \tag{74}$$

donde $\Re(s) > 1/2$.

Demostración. Haciendo el cambio de variable $u = \theta/x$, la integral en (74) se convierte en

$$\theta^s \int_\theta^\infty \{u\}u^{-s-1}du. \tag{75}$$

Realizando un cambio de variable, vemos que

$$\int_n^{n+1} \{u\}u^{-s-1}du = \int_0^1 \frac{u}{(u+n)^{s+1}}du,$$

lo cual implica que

$$\int_1^\infty \{u\}u^{-s-1}du = \sum_{n=1}^\infty \int_0^1 \frac{u}{(u+n)^{s+1}}du.$$

Integrando por partes obtenemos

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{u}{(u+n)^{s+1}}du &= -\frac{1}{s}(n+1)^{-s} + \frac{1}{s}\int_0^1 (u+n)^{-s}du \\ &= -\frac{1}{s}(n+1)^{-s} + \frac{1}{s}\int_n^{n+1} (u)^{-s}dun\end{aligned}$$

Sumando la igualdad anterior sobre $n \geqslant 1$, teniendo en cuenta que $\sigma > 1$

$$\int_1^\infty \{u\}u^{-s-1}du = -\frac{\zeta(s)}{s} + \frac{1}{s} + \frac{1}{s}\int_1^\infty u^{-s}du = -\frac{\zeta(s)}{s} + \frac{1}{s-1}. \tag{76}$$

Finalmente

$$\int_\theta^1 \{u\}u^{-s-1}du = \frac{\theta^{-s+1}-1}{s-1} \tag{77}$$

Así, para $\sigma > 1$, la igualdad (74) es consecuencia de (75), (76) y (77). Por la proposición 5.1, la integral en el lado izquierdo de (74) es holomorfa en $\sigma > 1/2$, y como la función en el lado derecho también lo es, del principio de la identidad concluimos que la igualdad se da en el semiplano $\sigma > 1/2$.

□

Proposición 5.3. — Si la función constante 1 pertenece a la clausura de $\mathcal{D}$ en $L^2(0,1)$ entonces la hipótesis de Riemann es válida.

Demostración. Supongamos que 1 pertenece a la clausura de $\mathcal{D}$ en $L^2(0,1)$. En este caso, dado $\epsilon > 0$ existe $f \in \mathcal{D}$ tal que $\|1-f\|_2 < \epsilon$. Sea $f = \sum_{k=1}^n c_k\rho_{\theta_k}$ con $\sum_{k=1}^n c_k\theta_k = 0$. La proposición 5.2 implica

$$\int_0^1 (1-f(x))x^{s-1}dx = \frac{1}{s} - \sum_{k=1}^n c_k \int_0^1 \rho_{\theta_k}(x)x^{s-1}dx = \frac{1}{s} + \frac{\zeta(s)}{s}\sum_{k=1}^n c_k\theta_k^s \tag{78}$$

donde $\sigma > 1/2$.

La proposición 1.30 implica que

$$\left|\int_0^1 (1 - f(x))x^{s-1}dx\right| \leqslant \|1 - f\|_2 \frac{1}{\sqrt{2\sigma - 1}} \tag{79}$$

donde $\sigma > 1/2$. Juntando (78) y (79) tenemos

$$\left|\frac{1}{s} + \frac{\zeta(s)}{s}\sum_{k=1}^{n} c_k\theta_k^s\right| \leqslant \frac{\epsilon}{\sqrt{2\sigma - 1}}. \tag{80}$$

Si $\zeta(s_0) = 0$ para algún $s_0 = \sigma_0 + i\tau_0$ con $\sigma_0 > 1/2$, (80) se reduce a

$$\left|\frac{1}{s_0}\right| \leqslant \frac{\epsilon}{\sqrt{2\sigma_0 - 1}}$$

lo cual representa una contradicción pues la elección de $\epsilon > 0$ fue arbitraria. Concluimos que no hay ceros de la función zeta en el semiplano $\sigma > 1/2$, y la simetría de esta respecto a $\sigma = 1/2$ implica que tampoco hay ceros en el semiplano $\sigma < 1/2$. □

Ahora suponemos que la hipótesis de Riemann es cierta y demostramos como esto implica que 1 pertenece a la clausura de $\mathcal{D}$.

Sea $f \in L^2(0,1)$ tal que

$$\int_0^\delta |f(x)|dx > 0 \tag{81}$$

para todo $\delta > 0$ [(1)].

Para cada $0 < a < 1$ hagamos

$$f_a(x) = f(ax).$$

Denotemos por C_f al subespacio de $L^2(0,1)$ generado por $\{f_a : (0,1) \to \mathbb{C} : 0 < a < 1\}$. Si $1 < p < 2$ podemos considerar a C_f como un subespacio de $L^p(0,1)$ cuya clausura con la norma p se denotará como $C_f(p)$.

Sea F definida según (72), usando la desigualdad de Hölder obtenemos

$$|F(\sigma + i\tau)| \leqslant \|f\|_2 \frac{1}{\sqrt{2\sigma - 1}} \tag{82}$$

donde $\sigma > 1/2$.

Teorema 5.2. — Si para algún $p \in (1,2)$, $C_f(p)$ es un subespacio propio de $L^p(0,1)$, entonces F se extiende a una función meromorfa en todo el plano cuyos polos se ubican en el semiplano $\sigma < 1/2$. Además, para cada polo λ, la función $x^{-\lambda} \in C_f(p)$.

Demostración. Con el objeto de resaltar los puntos principales de la demostración, la dividiremos en tres partes.

Extensión meromorfa de F.

1. Recordemos que como $m((0,1)) = 1 < \infty$, $L^2(0,1) \subset L^p(0,1) \subset L^1(0,1)$ para todo $1 < p < 2$

Como $C_f(p)$ es un subespacio cerrado propio de $L^p(0,1)$, el teorema 1.39 implica que existe $\varphi \in L^p(0,1)$ no nulo tal que $\varphi(h) = 0$ para todo $h \in C_f(p)$, o de manera equivalente, $\varphi(f_a) = 0$ para todo $0 < a < 1$. Si q es exponente conjugado de p, del teorema 1.33 encontramos $k \in L^q(0,1)$ no nulo tal que para $0 < a < 1$

$$\int_0^1 k(x)f(ax)dx = 0. \tag{83}$$

Definamos

$$K(s) = \int_0^1 k(x)x^{-s}dx.$$

De manera análoga a lo hecho en la proposición 5.1 podemos demostrar que K es holomofa en $\sigma < 1/p$. Definamos $g : (1,\infty) \to \mathbb{C}$ por

$$g(\xi) = \int_0^{1/\xi} k(x)f(\xi x)dx$$

Usando la desigualdad de Hölder y un cambio de variable

$$|g(\xi)| \leqslant \|k\|_q \|f\|_p \xi^{-1/p}. \tag{84}$$

Debido a (84), la función

$$G(s) = \int_1^\infty g(\xi)\xi^{s-1}d\xi$$

está definida en el semiplano $\sigma < 1/p$ y además es holomorfa.

Por el lema 5.1 que demostramos a continuación se tiene que la igualdad

$$G(s) = F(s)K(s) \tag{85}$$

se verifica en la franja $1/2 < \sigma < 1/p$.

La igualdad (85) nos permite concluir que F se extiende de manera única a una función meromorfa si definimos $F(s) = \frac{G(s)}{K(s)}$ para $\sigma \leqslant 1/2$. Tal extensión es holomorfa en $\sigma > 1/2$. Afirmamos que también lo es en $\sigma = 1/2$. En efecto, supongamos que F tiene un polo de orden $m \geqslant 1$ en $s_0 = \frac{1}{2} + i\tau_0$. En este caso existe es una vecindad V de s_0 tal que $F \in H(V \setminus \{s_0\})$ y constantes $c_0, \ldots, c_m \in \mathbb{C}$ con $c_m \neq 0$ de modo que

$$g(s) = F(s) - \sum_{k=1}^{m} \frac{c_k}{(s-s_0)^k}$$

es holomorfa en $V \setminus \{s_0\}$ con singularidad removible en s_0. Concluimos que $s \mapsto F(s)(s-s_0)^{1/2}$ es no acotada para valores de s cercanos a s_0 lo cual representa una contradicción con (82).

Existencia de polos.

Para demostrar que el conjunto de polos de F es no vacío procedemos por contradicción. Supongamos que F es entera. Sea $\alpha \in (1/2, 1/p)$. De (82), si $\sigma \geqslant \alpha$

$$|F(s)| \leqslant \|f\|_2 \frac{1}{\sqrt{2\alpha - 1}}.$$

Es decir, F es acotada en $\sigma \geqslant \alpha$.

Como F es acotada por $M = ||f||_2 \frac{1}{\sqrt{2\alpha-1}}$ en la recta $\sigma = \alpha$ y es entera, del corolario 1.2 tenemos que

$$(86) \qquad |F(\sigma + i\tau)| \leqslant M e^{-\frac{4\lambda}{\pi}(\sigma-\alpha)}.$$

donde $\sigma \leqslant \alpha$.

Si $\lambda = 0$, (86) implica que F es acotada por M en el semiplano $\sigma \leqslant \alpha$. El teorema de Liouville (teorema 1.8) nos permite concluir que F es constante. La desigualdad

$$|F(s)| = \left| \int_0^1 f(x) x^{s-1} dx \right| \leqslant ||f||_2 \left(\int_0^1 x^{2\sigma-2} \right)^{1/2} = ||f||_2 (2\sigma - 1)^{-1/2},$$

implica que

$$\lim_{\sigma \to \infty} F(s) = 0;$$

es decir F es nula. Así, para todo $\sigma \geqslant 1/2$

$$\langle f, x^{s-1} \rangle = \int_0^1 f(x) x^{s-1} dx = 0.$$

Tomando $s = 0, 1, \ldots$ concluimos que $f \perp \overline{\text{Vect}(1, x, x^2, \ldots)} = L^2(0,1)$ lo cual implica que f es nula, contradiciendo (81).

Si $\lambda > 0$, sea $a = e^{-\frac{4\lambda}{\pi}}$, de modo que $0 < a < 1$. Para $\sigma > 1/2$, realizando un cambio de variable obtenemos

$$(87) \qquad \int_0^1 f(ax) x^{s-1} dx = a^{-s} \left(F(s) - \int_a^1 f(x) x^{s-1} dx \right).$$

Sea H la función en el lado derecho de la igualdad anterior. Afirmamos que H es entera y acotada.

– Cuando $\sigma \leqslant \alpha < 1$, de (86)

$$\begin{aligned} |H(s)| &\leqslant |a^{-s} F(s)| + \left| a^{-s} \int_a^1 f(x) x^{s-1} dx \right| \\ (88) \qquad &\leqslant M a^{-\alpha} + a^{-1} ||f||_1. \end{aligned}$$

Cuando $\sigma \geqslant \alpha > 1/2$, usando la desigualdad de Hölder

$$(89) \quad |H(s)| = \left| \int_0^1 f(ax) x^{s-1} dx \right| \leqslant ||f||_2 a^{-1/2} (2\sigma - 1)^{-1/2} \leqslant ||f||_2 a^{-1/2} (2\alpha - 1)^{-1/2}.$$

De (88) y (89), concluimos que H es acotada.

– Para demostrar que H es entera basta ver que la integral $I(s) = \int_a^1 f(x) x^{s-1} dx$ en (87) lo es. En efecto,

$$\int_a^1 |f(u) u^{s-1}| \leqslant \begin{cases} ||f||_1 & \text{si } \sigma \geqslant 1, \\ a^{\sigma-1} ||f||_1 & \text{si } \sigma < 1. \end{cases}$$

Es decir, la función $u \mapsto f(u) u^{s-1}$ es absolutamente integrable en $(a, 1)$. Siguiendo un procedimiento similar al de la proposición 5.1 basta demostrar que $I(s)$ es continua.

Para ello tomemos una sucesión $s_n = \sigma_n + i\tau_n$ que converge hacia $s = \sigma + i\tau$ y funciones $h_n(u) = f(u)u^{s_n-1}$, $h(u) = f(u)u^{s-1}$ definidas en $(a, 1)$. La convergencia puntual $h_n \to h_n$ es obvia. Tomando $\alpha < 0$ tal que $\alpha < \sigma - 1$, para n suficientemente grande $\alpha < \sigma_n - 1$. Como $a \leqslant u$

$$\left|h_n(u)\right| = \left|f(u)\right|u^{\sigma_n-1} < \left|f(u)\right|u^{\alpha} \leqslant \left|f(u)\right|a^{\alpha}.$$

Como la función al lado derecho de la igualdad anterior es integrable en $(a, 1)$, del teorema de convergencia dominada se tiene

$$\left|I(s_n) - I(s)\right| \leqslant ||h_n - h||_1 \to 0,$$

es decir $I(s)$ es continua.

Por el teorema de Liouville concluimos que H es una función constante. De la desigualdad (89) obtenemos

$$\lim_{\sigma \to \infty} \left|H(s)\right| = 0$$

Por lo tanto H es idénticamente nula. Siguiendo un argumento similar al caso $\lambda = 0$ concluimos que $x \mapsto f(ax)$ es idénticamente nula, lo cual representa una contradicción con (81).

La situación en el polo.

Si F tiene un polo en $s_0 = \sigma_0 + i\tau_0$ con $\sigma < 1/2$, supongamos que $x^{-s_0} \notin C_f(p)$. De manera análoga a lo que se hizo al inicio de la prueba hallamos funciones K_0 y G_0 holomorfas en el semiplano $\sigma < 1/p$ de modo que $K_0(s_0) \neq 0$, y en $1/2 < \sigma < 1/p$

$$G_0(s) = F(s)K_0(s).$$

De la unicidad de la extensión meromorfa la igualdad anterior se verifica en $\sigma < 1/p$. Como G_0 es holomorfa en s_0 y F tiene un polo en tal punto, concluimos que K_0 se anula en s_0, lo cual representa una contradicción. Esto concluye la prueba. □

Lema 5.1. — Sean $p \in (1, 2)$, F definida según (72), K y G como en el teorema 5.2. Entonces se verifica la igualdad

$$G(s) = F(s)K(s)$$

para todo $s \in \mathbb{C}$ tal que $1/2 < \Re(s) < 1/p$.

Demostración. Sean $X = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u > 1,\ \ 0 < v < 1/u\}$, $Y = \{(z, w) \in \mathbb{R}^2 : 0 < z < 1,\ \ 0 < w < z\}$. Haciendo el cambio de variable $\phi : (u, v) \in X \mapsto (uv, v) \in Y$ obtenemos la igualdad

$$G(s) = \int_1^{\infty} \int_0^{1/u} k(v)f(uv)u^{s-1}dvdu = \int_0^1 \int_0^z f(z)k(w)w^{-s}z^{s-1}dwdz. \tag{90}$$

El mismo cambio de variable muestra que

$$\int_0^1 \int_z^1 f(z)k(w)w^{-s}z^{s-1}dwdz = \int_0^1 \int_0^1 k(v)f(uv)u^{s-1}dudv = 0, \tag{91}$$

donde la última igualdad se debe a (83). Juntando (90) y (91) obtenemos (85). □

Sea $\mathcal{F}$ el espacio de las funciones en $(0,1)$ que asumen valores complejos. Para $0 < a < 1$ definamos el operador $T_a : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ por

$$T_a(g)(x) = \begin{cases} g(x/a) & 0 < x < a, \\ 0 & a \leqslant x < 1. \end{cases}$$

Afirmamos que $\mathcal{D}$ es un subespacio invariante para T_a. En efecto, sea $f = \sum c_k \rho_{\theta_k}$ con $0 < \theta_k < 1$ y $\sum c_k \theta_k = 0$. De la linealidad, $T_a(f) = \sum c_k T_a(\rho_{\theta_k})$. Además

$$\begin{aligned} T_a(\rho_{\theta_k})(x) &= \begin{cases} \rho_{\theta_k}(x/a) & 0 < x < a, \\ 0 & a \leqslant x < 1, \end{cases} \\ &= \begin{cases} \{a\theta_k/x\} & 0 < x < a, \\ 0 & a \leqslant x < 1, \end{cases} \\ &= \chi_{(0,a)}(x)\rho_{a\theta_k}(x). \end{aligned}$$

Si $a \leqslant x < 1$, entonces

$$\sum c_k \rho_{a\theta_k}(x) = \sum c_k \theta_k a/x = 0.$$

Luego

$$\sum c_k \rho_{a\theta_k} = \chi_{(0,a)} \sum c_k \rho_{a\theta_k} = \sum c_k T_a(\rho_{\theta_k}) = T_a(f).$$

Proposición 5.4. — Si la hipótesis de Riemann es válida entonces la función constante 1 pertenece a la clausura de $\mathcal{D}$ en $L^2(0,1)$.

Demostración. Supongamos que 1 no pertenece a la clausura de $\mathcal{D}$ en $L^2(0,1)$. En este caso su complemento ortogonal en $L^2(0,1)$ es no nulo, es decir existe $g \in L^2(0,1)$ no nula tal que

$$\int_0^1 f(x)g(x)dx = 0 \tag{92}$$

para toda $f \in \mathcal{D}$. Como $\mathcal{D}$ es invariante bajo los operadores T_a tenemos

$$0 = \int_0^a f(x/a)g(x)dx = a\int_0^1 f(x)g(ax)dx. \tag{93}$$

para todo $0 < a < 1$ y $f \in \mathcal{D}$. Así, tenemos que

$$\int_0^1 f(x)h(x)dx = 0 \tag{94}$$

para todo $h \in c_g$.

Para demostrar que g satisface la condición (81) suponemos lo contrario; es decir, $g = 0$ c.t.p. en algún intervalo $(0,a)$ con $0 < a < 1$. Sea $a_1 = \text{mín}(1, 2a)$ y $u \in (a, a_1)$. La función $f = u\rho_a - a\rho_u \in \mathcal{D}$. Un cálculo directo muestra que $f(x) = 0$ si $u < x < 1$ y $f(x) = a$ si $x \in (a,u)$. Usando (92)

$$\int_a^u g(x)dx = 0.$$

Así, definiendo $G : (0,1) \to \mathbb{C}$ por

$$G(x) = \int_0^x g(u)du$$

vemos que G se anula en $(0, a_1)$, de donde $g(x) = 0$ para $0 < x < \text{mín}(1, 2a)$. Repitiendo este proceso con a_1 en lugar de a, notamos que $g(x) = 0$ para $0 < x < \text{mín}(1, 2a_1) = \text{mín}(1, 4a)$. Después de un número finito de pasos concluimos que g es idénticamente nula en $(0, 1)$, lo cual representa una contradicción.

Usando el teorema 5.2 hallamos $s_0 = \sigma_0 + i\tau_0$ con $\sigma_0 < 1/2$ tal que para todo $1 < p < 2$

$$x^{-s_0} \in C_g(p).$$

Ahora bien, si $\phi \in C_g(p)$ existe una sucesión $(\phi_n)_n \subset C_g$, tal que $\|\phi - \phi_n\|_p \to 0$. Como toda $f \in \mathcal{D}$ es acotada

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 f(x)\phi(x)dx\right| &= \int_0^1 f(x)\big(\phi(x) - \phi_n(x)\big)dx \\ &\leqslant K\int_0^1 |\phi(x) - \phi_n(x)|dx \\ &\leqslant K\|\phi - \phi_n\|_p \to 0,\end{aligned}$$

donde utilizamos la desigualdad de Hölder en la segunda desigualdad. Concluimos que, para toda $f \in \mathcal{D}$

$$\int_0^1 f(x)x^{-s_0}dx = 0. \tag{95}$$

Sean θ, $c \in (0, 1)$ tales que $\theta^{-s_0} - c \neq 0$, (t_n) una sucesión tal que $t_n \to c^-$, y $f_n = \frac{1}{t_n}\rho_{t_n} - \frac{1}{\theta}\rho_\theta \in \mathcal{D}$. Si $r_0 = 1 - s_0$, $\Re(r_0) > 1/2$, el teorema 5.2 y (95) implican

$$\begin{aligned}0 &= \int_0^1 \left(1/t_n\rho_{t_n}(x) - 1/\theta\rho_\theta(x)\right) x^{r_0-1}dx \\ &= \frac{(\theta^{-s_0} - t_n^{-s_0})}{r_0}\zeta(r_0).\end{aligned}$$

Haciendo $n \to \infty$

$$\frac{(\theta^{-s_0} - c)}{r_0}\zeta(r_0) = 0.$$

Se concluye que $\zeta(r_0) = 0$ donde $\Re(r_0) > 1/2$, lo cual contradice la hipótesis de Riemann. Esto concluye la prueba. $\square$

Capítulo 6

UN CRITERIO DE CONTINUIDAD PARA EL OPERADOR PROYECCIÓN Π_V

6.1. Una fórmula para la proyección sobre un espacio de dimensión finita que involucra la matriz de Gram

Notación 6.1.1. — Sea V un espacio vectorial, y $\{x_i\}_{i\in I}$ un conjunto de elementos de V. El subespacio vectorial generado por los $x_i, i \in I$ será denotado por $\mathrm{Vect}(x_i, i \in I)$

Dados un espacio de Hilbert H, y un subconjunto $\{x_k\}_{k=1,\dots,n} \subset H$. El subespacio vectorial $V = \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n)$ es cerrado por ser de dimensión finita. Luego tiene sentido considerar la proyección P_V. La siguiente definición nos permitirá obtener una fórmula para P_V.

Definición 6.1. — Sean dos conjuntos $\mathfrak{U} = \{u_1, \dots, u_n\}$ y $\mathfrak{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ de elementos de H.

1. La matriz $G_{\mathfrak{U}} = \big(\langle u_i, u_j\rangle\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ se llama *matriz de Gram* de $\mathfrak{U}$. Su determinante se denota $\mathrm{Gram}(u_1, \dots, u_n)$ y se llama *determinante de Gram* de $\mathfrak{U}$.
2. La matriz $G_{\mathfrak{U},\mathfrak{V}} = \big(\langle u_i, v_j\rangle\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ se llama *matriz bilineal de Gram* de $\mathfrak{U}$ y $\mathfrak{V}$. Su determinante se denota $\mathrm{Gram}(u_1, \dots, u_n; v_1, \dots, v_n)$ y se llama *determinante bilineal de Gram* de $\mathfrak{U}$ y $\mathfrak{V}$.

Teorema 6.1. — Sea $\mathfrak{U} = \{u_1, \dots, u_n\}$ un conjunto de elementos de H. Entonces:

1. La matriz $G_{\mathfrak{U}}$ es hermitiana positiva.
2. $\mathrm{Gram}(u_1, \dots, u_n) = 0$ si y sólo si $\mathfrak{U}$ es linealmente dependiente.

Demostración. Tenemos que $(G^*_{\mathfrak{U}})_{ij} = \overline{(G_{\mathfrak{U}})_{ji}} = \overline{\langle u_j, u_i\rangle} = \langle u_i, u_j\rangle = (G_{\mathfrak{U}})_{ij}$, luego $G_{\mathfrak{U}}$ es hermitiana. Además,

$$\langle u, v\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i (G_{\mathfrak{U}})_{ij}\overline{\beta_j},$$

donde $u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i$ y $v = \sum_{i=1}^{n} \beta_i u_i$ son elementos de $\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_n)$. Luego

$$\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i (G_{\mathfrak{U}})_{ij}\overline{\alpha_j} = \langle u, u\rangle \geqslant 0,$$

y $G_{\mathfrak{U}}$ es positiva.

Ahora bien, si $\text{Gram}(u_1, \ldots, u_n) = 0$, entonces el sistema $G_{\mathfrak{U}} x = 0$ tiene una solución no trivial $x = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, es decir, existen escalares α_k, $k = 1, \ldots, n$ no todos nulos, tales que

$$\sum_{j=1}^{n} \langle u_i, u_j \rangle \alpha_j = 0$$

para todo $i = 1, \ldots, n$. Luego

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} \overline{\alpha_k} u_k \right\|^2 = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \overline{\alpha_i} u_i, \sum_{j=1}^{n} \overline{\alpha_j} u_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \overline{\alpha_i} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \langle u_i, u_j \rangle = 0,$$

y $\mathfrak{U}$ es linealmente dependiente.

Recíprocamente, si $\mathfrak{U}$ es linealmente dependiente, entonces existen escalares α_k, $k = 1, \ldots, n$ no todos nulos, tales que $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j u_j = 0$. Así,

$$\sum_{j=1}^{n} \overline{\alpha_j} \langle u_i, u_j \rangle = 0,$$

para todo $i = 1, \ldots, n$. Es decir, el sistema $G_{\mathfrak{U}} x = 0$ tiene una solución no trivial. Por lo tanto $\text{Gram}(u_1, \ldots, u_n) = 0$. □

Del ítem 1 del teorema anterior tenemos que $\text{Gram}(u_1, \ldots, u_n) \geqslant 0$. Presentamos a continuación la fórmula para la proyección de x_0 sobre $\text{Vect}(x_1, \ldots, x_n)$.

Teorema 6.2. — Sean $x_0 \in H$ y $\{x_k\}_{k=1,\ldots,n} \subset H$ un conjunto linealmente independiente. La proyección ortogonal $P(x_0)$ de x_0 sobre $V = \text{Vect}(x_1, \ldots, x_n)$, viene dada por la fórmula

$$P(x_0) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\overline{\text{Gram}(x_1 \ldots, x_n; x_1, \ldots, x_{k-1}, x_0, x_{k+1}, \ldots, x_n)}}{\text{Gram}(x_1, \ldots, x_n)} x_k.$$

Demostración. Sabemos que $P(x_0) \in V$. Por lo tanto, existen escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, tales que $P(x_0) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k$. Además, como $P(x_0) - x_0 \in V^{\perp}$, tenemos que

$$\langle x_k, x_0 \rangle = \langle x_k, P(x_0) \rangle = \sum_{j=1}^{n} \overline{\alpha_k} \langle x_k, x_j \rangle,$$

para todo $k = 1, \ldots, n$. La igualdad deseada se obtiene de la regla de Cramer y del hecho de que $\text{Gram}(x_1, \ldots, x_n) \geqslant 0$. □

El siguiente teorema nos da una condición necesaria y suficiente para que la proyección de x_0 sobre V no cambie cuando V aumenta.

Teorema 6.3. — Sean $x_k \in H, k = 0, \ldots, n$. Entonces $P_{\text{Vect}(x_1,\ldots,x_n)}(x_0) = P_{\text{Vect}(x_1,\ldots,x_{n-1})}(x_0)$ si y sólo si $x_0 - P_{Span(x_1,\ldots,x_{n-1})}(x_0) \perp x_n$.

Demostración.

Supongamos primero que $P_{\text{Vect}(x_1,\ldots,x_n)}(x_0) = P_{\text{Vect}(x_1,\ldots,x_{n-1})}(x_0)$. En este caso, el ítem 1 del teorema 1.38 nos permite concluir que

$$x_0 - P_{\text{Vect}(x_1,\ldots,x_{n-1})}(x_0) = x_0 - P_{\text{Vect}(x_1,\ldots,x_n)}(x_0) \perp x_n.$$

Recíprocamente, si suponemos que $x_0 - P_{\text{Vect}(x_1,\ldots,x_{n-1})}(x_0) \perp x_n$, entonces el teorema 1.38 implica que $x_0 - P_{\text{Vect}(x_1,\ldots,x_{n-1})}(x_0) \in \text{Vect}(x_1,\ldots,x_n)^{\perp}$. Como $P_{\text{Vect}(x_1,\ldots,x_{n-1})}(x_0) \in \text{Vect}(x_1,\ldots,x_n)$, el mismo teorema nos permite concluir que

$$P_{\text{Vect}(x_1,\ldots,x_n)}(x_0) = P_{\text{Vect}(x_1,\ldots,x_{n-1})}(x_0).$$

$\square$

6.2. Caracterización de la continuidad de Π_V en términos de la convergencia débil de un subespacio de H

Sea $\mathfrak{C}$ el conjunto de partes convexas y cerradas de H (el cual es no vacío pues $H \in \mathfrak{C}$) y las funciones continuas $u_k : X \to H$, $k = 1, \ldots, n$. Definimos:

$$\begin{aligned} \Pi : \ \mathfrak{C} \times H &\to H \\ (C, y) &\mapsto P_C(y), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V : \ X &\to H^n \\ x &\mapsto (u_1(x), \ldots, u_n(x)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pi_V : \ X \times H &\to H \\ (x, y) &\mapsto \Pi\Big(\mathrm{Vect}\big(u_1(x), \ldots, u_n(x)\big), y\Big). \end{aligned}$$

En esta sección presentamos un criterio de continuidad para la función Π_V.

Ejemplo. Veamos un caso en que la función Π_V es discontinua. Tomemos $X = \mathbb{R}$, $H = \mathbb{C}$, el vector $y_0 = i$, la función $u_1(x) = 1$ y la función u_2 definida por $u_2(x) = \cos(x) + i\,\mathrm{sen}(x)$. En este caso es fácil ver que $\Pi_V(x, i) = i$, si $x \notin \pi\mathbb{Z}$, y $\Pi_V(x, i) = 0$, si $x \in \pi\mathbb{Z}$. Luego Π_V es discontinua en los puntos $(\pi n, i)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Teorema 6.4. — Si la función

$$\begin{aligned} \Pi_V(\,\cdot\,, y_0) : \ X &\to H \\ x &\mapsto \Pi\Big(\mathrm{Vect}\big(u_1(x), \ldots, u_n(x)\big), y_0\Big) \end{aligned}$$

es continua en x_0, entonces Π_V es continua en (x_0, y_0).

Demostración. Tenemos que

$$\begin{aligned} \big\|\Pi_V(x, y) - \Pi_V(x_0, y_0)\big\| &\leqslant \big\|\Pi_V(x, y) - \Pi_V(x, y_0)\big\| + \big\|\Pi_V(x, y_0) - \Pi_V(x_0, y_0)\big\| \\ &\leqslant \|y - y_0\| + \big\|\Pi_V(x, y_0) - \Pi_V(x_0, y_0)\big\|, \end{aligned}$$

donde la segunda desigualdad se debe al teorema 1.37. Luego, la continuidad de Π_V en (x_0, y_0) se deriva de la continuidad de $\Pi_V(\,\cdot\,, y_0)$ en x_0. □

Así, para demostrar la continuidad de Π_V, basta demostrar la continuidad de una función de una sola variable.

Si E es un espacio vectorial, denotamos por $\mathfrak{L}(E)$ el conjunto de las transformaciones lineales $T : E \to E$.

Teorema 6.5. — Sea $U : X \to \mathfrak{L}(H)$ que satisface:

1) para cada $x \in X$, $U(x)$ es un operador unitario;
2) para cada $z \in H$, la aplicación $x \mapsto U(x)(z)$ es continua en x_0.

Si la aplicación Π_V es continua en (x_0, y_0) para todo $y_0 \in H$, entonces la aplicación

$$\begin{aligned} X \times H &\to H \\ (x, y) &\mapsto \Pi\Big(\mathrm{Vect}\Big(U(x)\big(u_1(x)\big), \ldots, U(x)\big(u_n(x)\big)\Big), y\Big) \end{aligned}$$

es continua en (x_0, y_0) para todo $y_0 \in H$.

Demostración. Demostremos en primer lugar que de 1 y 2 se derivan las afirmaciones:

3. para cada $z \in H$, la aplicación $x \mapsto U(x)^{-1}(z)$ es continua en x_0;
4. para cada $z_0 \in H$, la aplicación $(x, z) \mapsto U(x)(z)$ es continua en (x_0, z_0).

Tenemos que:

$$\begin{aligned} U(x)^{-1}(z) - U(x_0)^{-1}(z) &= U(x)^{-1}\big(z - U(x)U(x_0)^{-1}(z)\big) \\ &= U(x)^{-1}\big(U(x_0)(z') - U(x)(z')\big), \end{aligned}$$

donde $z' = U(x_0)^{-1}(z)$. Ahora bien, $U(x)^{-1}$ es un operador unitario, luego

$$\begin{aligned} \big\|U(x)^{-1}(z) - U(x_0)^{-1}(z)\big\| &= \Big\|U(x)^{-1}\big(U(x_0)(z') - U(x)(z')\big)\Big\| \\ &= \big\|U(x_0)(z') - U(x)(z')\big\|, \end{aligned}$$

y el ítem 3 se deriva del ítem 2.

Además, como $U(x)(z) - U(x_0)(z_0) = U(x)(z - z_0) + U(x)(z_0) - U(x_0)(z_0)$, y $U(x)$ es ortogonal, tenemos que:

$$\big\|U(x)(z) - U(x_0)(z_0)\big\| \leqslant \|z - z_0\| + \big\|U(x)(z_0) - U(x_0)(z_0)\big\|$$

y el ítem 4 se deriva del ítem 2.

Sea $T \in \mathfrak{L}(H)$, de la linealidad de T se tiene que $T\big(\text{Vect}(W)\big) = \text{Vect}\big(T(W)\big)$, para todo $W \subset H$. Así, dado $y_0 \in H$ fijo y $x \in X$ tenemos:

$$P_{\text{Vect}\Big(U(x)\big(u_1(x)\big),\ldots,U(x)\big(u_n(x)\big)\Big)}(y_0) = P_{U(x)\,\text{Vect}\big(u_1(x),\ldots,u_n(x)\big)}(y_0).$$

Además

$$P_{U(x)\,\text{Vect}\big(u_1(x),\ldots,u_n(x)\big)}(y_0) = U(x)P_{\text{Vect}\big(u_1(x),\ldots,u_n(x)\big)}\big(U(x)^{-1}(y_0)\big),$$

pues, tomando $y' = U(x)^{-1}(y_0)$ tenemos:

$$\begin{aligned} \Big\|y_0 - U(x)P_{\text{Vect}\big(u_1(x),\ldots,u_n(x)\big)}\big(U(x)^{-1}(y_0)\big)\Big\| &= \big\|U(x)(y') - U(x)P_{\text{Vect}(u_1(x),\ldots,u_n(x))}(y')\big\| \\ &= \big\|y' - P_{\text{Vect}\big(u_1(x),\ldots,u_n(x)\big)}(y')\big\| \\ &\leqslant \|y' - z\| \\ &= \big\|y - U(x)(z)\big\| \end{aligned}$$

para todo $z \in \text{Vect}\big(u_1(x), \ldots, u_n(x)\big)$.

Si escribimos $z_0 = U(x_0)^{-1}(y_0)$, como Π_V es continua en (x_0, z_0) el resultado se deriva de los ítems 3 y 4 y del teorema 6.4. □

Definición 6.2. — Sean E un espacio vectorial, E_1 y E_2 dos subespacios de E. Decimos que E_2 es un *complemento* de E_1 en E si $E = E_1 + E_2$. Si además se verifica que $E_1 \cap E_2 = \{0\}$, decimos que E_2 es un *suplemento* de E_1 en E.

Teorema 6.6. — Todo complemento de E_1 en E contiene un suplemento de E_1 en E.

Demostración. Sea E_2 un complemento de E_1 en E. Sea $\pi : E \to E/E_1$ la proyección canónica y $\{s(u_i)\}_{i\in I}$ una base de $s(E_2)$. Llamemos $E_2' = \text{Vect}\{u_i\}_{i\in I}$. Demostremos que E_2' es un suplemento de E_1 en E. Si $x \in E_1 \cap E_2'$, existen $\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_n}$ con $\{i_k\}_{k=1}^n \subset I$ tal que $x = \sum_{k=1}^n \lambda_{i_k} u_{i_k}$. Como $x \in E_1$ entonces $s(x) = 0$, luego $\sum_{k=1}^n \lambda_{i_k} s(u_{i_k}) = 0$, y como $\{s(u_i)\}_{i\in I}$ una base de $s(E_2)$, se sigue que $\lambda_{i_k} = 0$ para $k = 1, \dots, n$, de donde $x = 0$. Por lo tanto $E_1 \cap E_2' = \{0\}$

Ahora bien, como $E = E_1 + E_2$, entonces dado $x \in E$, existen $x_1 \in E_1$ y $x_2 \in E_2$, tales que $x = x_1 + x_2$. Como $\{s(u_i)\}_{i\in I}$ es base de $s(E_2)$, existen $\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_n}$ con $\{i_k\}_{k=1}^n \subset I$ tales que $s(x) = s(x_2) = \sum_{k=1}^n \lambda_{i_k} s(u_{i_k})$. Luego $x - \sum_{k=1}^n \lambda_{i_k} u_{i_k} \in E_1$, de donde $x \in E_1 + E_2'$. □

Ahora, vamos a presentar una caracterización de la continuidad de Π_V en términos de la convergencia débil hacia 0 de un cierto subespacio de H.

Teorema 6.7. — Sea $x_0 \in X$, y sea $p \in \{1, \dots, n\}$ el rango de $\{u_k(x_0)\}_{k=1}^n$. Supongamos que el conjunto $\{u_k(x_0)\}_{k=1}^p$ sea linealmente independiente. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. Π_V es continua en (x_0, y_0), para todo $y_0 \in H$.
2. Para todo $x \in X$, existe un complemento de $\text{Vect}\{u_1(x), \dots, u_p(x)\}$ en $\text{Vect}\{u_1(x), \dots, u_n(x)\}$ denotado por $W(x)$, tal que $W(x) \rightharpoonup 0$ cuando x tiende a x_0.

Demostración. Del teorema 6.1 tenemos que $\text{Gram}(u_1(x_0), \dots, u_p(x_0)) \neq 0$. Además como la aplicación $x \mapsto \text{Gram}(u_1(x), \dots, u_p(x))$ es continua, existe una vecindad V_0 de x_0 tal que el conjunto $\{u_1(x), \dots, u_p(x)\}$ es linealmente independiente para todo $x \in V_0$. Definamos $e_k : V_0 \to H$ para $k = 1, \dots, p$ por el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt, es decir

$$e_1(x) = \frac{u_1(x)}{\|u_1(x)\|} \ \text{ y } \ e_k(x) = \frac{v_k(x)}{\|v_k(x)\|} \ \text{ con } \ v_k(x) = u_k(x) - \sum_{j=1}^{k-1} \langle u_k(x), e_j(x) \rangle e_j(x).$$

Los e_k son funciones continuas. Además, para cada $x \in V_0$ el conjunto $\{e_1(x), \dots, e_p(x)\}$ es ortonormal y $\text{Vect}\{e_1(x), \dots, e_p(x)\} = \text{Vect}\{u_1(x), \dots, u_p(x)\}$. Ahora, dado $x \in V_0$, podemos escribir

$$V(x) = \text{Vect}(e_1(x), \dots, e_p(x)) \oplus W(x),$$

donde $W(x)$ es un complemento ortogonal de $\text{Vect}(e_1(x), \dots, e_p(x))$ en $V(x) = \text{Vect}(u_1(x), \dots, u_n(x))$. Luego, dado $y_0 \in H$,

$$P_{V(x)}(y_0) = P_{\text{Vect}\left(e_1(x), \dots, e_p(x)\right)}(y_0) + P_{W(x)}(y_0),$$

y como

$$P_{\text{Vect}\left(e_1(x),\dots,e_p(x)\right)}(y_0) = \sum_{j=1}^{p} \langle P_{\text{Vect}\left(e_1(x),\dots,e_p(x)\right)}(y_0), e_j(x) \rangle e_j(x) = \sum_{j=1}^{p} \langle y_0, e_j(x) \rangle e_j(x),$$

tenemos que

$$P_{V(x)}(y_0) = \sum_{j=1}^{p} \langle y_0, e_j(x) \rangle e_j(x) + P_{W(x)}(y_0).$$

Como la sumatoria en la igualdad anterior es continua como función de x y la función $P_{V(x)}(y_0)$ es continua en x_0 tenemos que

$$\lim_{x \to x_0} P_{W(x)}(y_0) = P_{W(x_0)}(y_0),$$

y como $W(x_0) = \{0\}$, tenemos que, para todo $y_0 \in H$

$$\lim_{x \to x_0} P_{W(x)}(y_0) = 0.$$

Ahora, sea $v : X \to H$ una función acotada (por una constante C), tal que $v(x) \in W(x)$ para todo $x \in X$. Tenemos que, para todo $w \in H$:

$$\big\| \langle v(x), w \rangle \big\| = \Big\| \big\langle v(x), P_{W(x)}(w) \big\rangle \Big\| \leqslant C \big\| P_{W(x)}(w) \big\| \to 0,$$

cuando x tiende a x_0. Luego $W(x) \rightharpoonup 0$ cuando x tiende a x_0. □

Teorema 6.8. — Sea $x_0 \in X$ tal que el conjunto $\{u_k(x_0)\}_{k=1}^{n}$ sea linealmente independiente. Entonces, la función Π_V es continua en (x_0, y_0), para todo $y_0 \in H$.

Demostración. Esto resulta de usar el teorema 6.7, pues existe una vecindad V_0 de x_0 tal que el conjunto $\{u_k(x)\}_{k=1}^{n}$ es linealmente independiente para $x \in V_0$. En esta vecindad podemos tomar $W(x) = \{0\}$, espacio que converge débilmente hacia 0. □

Capítulo 7

CONDICIONES SUFICIENTES PARA LA CONTINUIDAD DE Π_V.

En este capítulo X será un espacio topológico, y $x_0 \in X$ un punto con un sistema fundamental numerable de vecindades $B(x_0)$, cada una de estas vecindades conteniendo propiamente a x_0.

$(Y, \mathfrak{M}, \mu)$ denotará un espacio con medida positiva $\mu : \mathfrak{M} \to [0, \infty]$ definida sobre la $\sigma-$álgebra $\mathfrak{M}$. H representará el espacio de Hilbert

$$L^2(Y, \mu) = \{f : Y \to \mathbb{C} : \int_Y \|f\|^2 d\mu < \infty\}.$$

Dado $E \in \mathfrak{M}$, $L^2(E, \mu)$ denotará el subespacio de H constituido por las funciones que se anulan fuera de E. Finalmente M será el conjunto de las funciones medibles $f : Y \to \mathbb{C}$.

Definición 7.1. — Un conjunto $\{E_i\}_{i \in I}$ de elementos de $\mathfrak{M}$ se dice *completo* (respecto a μ) si:

1. $\mu(E_i) < \infty$ para todo $i \in I$;
2. Para toda función $f \in M$ tal que $f\chi_{E_i} \in L^1(Y, \mu)$ para todo $i \in I$, tenemos que

$$\text{si} \quad \int_{E_i} f d\mu = 0 \quad \text{para todo} \quad i \in I \ \textit{entonces} \ f = 0.$$

Definición 7.2. — Si $f \in M$ llamaremos *soporte algebraico* de la función f al conjunto:

$$\text{Sop}(f) = \{y \in Y : f(y) \neq 0\}.$$

Como f es una función medible, el conjunto $\text{Sop}(f)$ es medible.

En lo que sigue, al mencionar soporte nos referiremos al soporte algebraico.

La prueba del siguiente lema es trivial, y será omitida.

Lema 7.1. — Si $f_1, \ldots, f_n$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ son elementos de M, entonces:

$$\text{Sop}(\lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_n f_n) \subset \bigcup_{k=1}^{n} \text{Sop}(f_k).$$

7.1. Funciones finas en un punto.

Definición 7.3. — Dada una función $u : X \to M$. Decimos que u es *fina* en x_0 (respecto a μ) si, para todo $E \in \mathfrak{M}$ tal que $\mu(E) < \infty$, se tiene que

$$\lim_{x \to x_0} \mu\Big(E \cap \operatorname{Sop}\big(u(x)\big)\Big) = 0.$$

Tenemos que, si $\lim_{x \to x_0} \mu\Big(\operatorname{Sop}\big(u(x)\big)\Big) = 0$, entonces u es fina en x_0.

Sabemos que la recta real extendida $[-\infty, \infty]$ es un espacio topológico, y que los conjuntos $[-\infty, a)$, (a, b), $(a, \infty]$ con $a, b \in \mathbb{R}$ forman una base de tal espacio. Ahora bien, si tomamos $X = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, con la topologia relativa, obtenemos un espacio topológico con un sistema fundamental numerable de vecindades de $p = \infty$, $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ donde $U_n = \{n, n+1, \dots, \infty\}$.

Definición 7.4. — Decimos que una sucesión de funciones $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset H$ es *fina en* $p = \infty$ si la función $u : X \to H$, donde $X = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ y $u(n) = u_n$, es fina en $p = \infty$, es decir

$$\lim_{n \to \infty} \mu(E \cap \operatorname{Sop}(u_n)) = 0$$

para todo $E \in \mathfrak{M}$ con $\mu(E) < \infty$.

Sea $\mathfrak{F}(X, M)$ el conjunto de las funciones de X en M. Entonces $\mathfrak{F}(X, M)$ es un anillo con la suma y producto usual de funciones. Además, el conjunto de funciones de X en M finas en x_0 es un ideal de $\mathfrak{F}(X, M)$, luego es un $\mathfrak{F}(X, M)$-módulo. En efecto, si u es una función fina en x_0, y λ es una función de X en M. Del lema 7.1 tenemos que

$$\operatorname{Sop}(\lambda(x)u(x)) \subset \operatorname{Sop}(u(x)),$$

luego

$$\mu\Big(E \cap \big(\operatorname{Sop}(\lambda(x)u(x))\big)\Big) \leqslant \mu\Big(E \cap \operatorname{Sop}\big(u(x)\big)\Big),$$

y $\lim_{x \to x_0} \mu\Big(E \cap \big(\operatorname{Sop}(\lambda(x)u(x))\big)\Big) = 0.$

Lema 7.2. — Sea $u : X \to H$ una función fina en x_0. Supongamos que u es acotada (por una constante C) en una vecindad V de x_0. Entonces $u(x) \rightharpoonup 0$ cuando x tiende a x_0.

Demostración. Sea $E \in \mathfrak{M}$ tal que $\mu(E) < \infty$. Para $x \in V$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\Big|\langle u(x), \chi_E \rangle\Big| = \Big|\int_Y u(x)\overline{\chi_E} d\mu\Big| &= \Big|\int_{\operatorname{Sop}\big(u(x)\big)} u(x)\overline{\chi_E} d\mu\Big| \\
&\leqslant C\sqrt{\int_{\operatorname{Sop}\big(u(x)\big)} |\chi_E| d\mu} \\
&= C\sqrt{\mu\Big(E \cap \operatorname{Sop}\big(u(x)\big)\Big)},
\end{aligned}$$

donde se usó la desigualdad de Cauchy-Schwarz en la segunda línea. Como u es fina en x_0, deducimos que $\langle u(x), \chi_E \rangle$ tiende hacia 0 cuando x tiende hacia x_0. Así, debido a que el conjunto $\mathrm{Vect}\{\chi_E : E \in \mathfrak{M}, \mu(E) < \infty\}$ es denso en H, el resultado se obtiene del teorema 1.18. □

Corolario 7.1. — Sea $(u_n) \subset H$ una sucesión de funciones fina en $p = \infty$. Supongamos que la sucesión es acotada. Bajo estas condiciones $u_n \rightharpoonup 0$.

El siguiente resultado es una generalización del lema anterior.

Lema 7.3. — Sean $u_1, u_2, \ldots, u_n : X \to H$ funciones finas en x_0. Entonces

$$\mathrm{Vect}\big(u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x)\big) \rightharpoonup 0$$

cuando x tiende hacia x_0.

Demostración.

Sea $v : X \to H$ una función acotada, tal que $v(x) \in \mathrm{Vect}\big(u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x)\big)$, para todo $x \in X$. Tenemos para todo $x \in X$, y $y \in Y$:

$$v(x)(y) = c_1(x)u_1(x)(y) + \ldots + c_n(x)u_n(x)(y),$$

donde las c_i son funciones de X en $\mathbb{C}$. De la igualdad anterior se sigue que

$$\mathrm{Sop}\big(v(x)\big) \subset \bigcup_{k=1}^{n} \mathrm{Sop}\big(u_k(x)\big).$$

Por lo tanto la función v es fina en x_0. Del lema 7.2 concluimos que $v(x) \rightharpoonup 0$ cuando x tiende hacia x_0. □

Teorema 7.1. — Sea $u : X \to H$ una función fina en x_0 tal que para algún $f \in H$, $u(x) \rightharpoonup f$ cuando x tiende hacia x_0. Entonces $f = 0$.

Demostración. Como u converge débilmente, es acotada en una vecindad de x_0. Del lema 7.2 se sigue que $u(x) \rightharpoonup 0$ cuando x tiende hacia x_0. Por la unicidad del límite débil obtenemos $f = 0$. □

Corolario 7.2. — Sea $(u_n) \subset H$ una sucesión de funciones fina en $p = \infty$. Si $u_n \rightharpoonup f$, entonces $f = 0$.

7.2. El criterio de suficiencia

Lema 7.4. — Sea $u : X \to H$ una función que a cada $x \in X$ le asigna una función $u(x)$ dada por

$$u(x)(y) = c_1(x)\varphi_1(y) + \ldots + c_n(x)\varphi_n(y) + f(x)(y) \tag{96}$$

donde $c_k(x) \in \mathbb{C}$ para $k = 1, \ldots, n$, $x \in X$, y:

1. $\varphi_k \in M$ para todo $k = 1, \ldots, n$;
2. $\mathrm{Vect}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \cap H = \{0\}$;

3. Existe una familia completa $(E_\alpha)_{\alpha\in A}$ de elementos de $\mathfrak{M}$ tales que $\chi_{E_\alpha}\varphi_k \in H$ para todo $k = 1,\ldots,n$, y todo $\alpha \in A$;
4. $f : X \to M$ es fina en x_0;
5. Existe una constante $C > 0$ tal que $\|u(x)\| < C$ para todo $x \in X$.

Bajo estas condiciones, $u(x) \rightharpoonup 0$ cuando x tiende hacia x_0.

Demostración. Notemos que sin pérdida de generalidad, podemos suponer que el conjunto $\{\varphi_1,\ldots,\varphi_n\}$ es linealmente independiente en M. Además, de la hipótesis 3 tenemos

$$f(x)\chi_{E_\alpha} = u(x)\chi_{E_\alpha} - \sum_{i=1}^{n} c_i(x)\varphi_i\chi_{E_\alpha} \in H, \tag{97}$$

para todo $x \in X$ y $\alpha \in A$.

En primer lugar mostremos que existe una vecindad V de x_0 tal que c_i es acotada en V para todo $i = 1,\ldots,n$. En caso contrario para cada vecindad V de x_0 podemos hallar $k = k(V)$ tal que c_k no es acotada en V. Hagamos $m(x) = \max\{|c_1(x)|,\ldots,|c_n(x)|\}$. Así, para cada $B_k \in B(x_0)$ existe $x_k \in B_k$ tal que $m(x_k) > k$. Obtenemos así una sucesión (x_k) convergente hacia x_0 tal que $\lim_k m(x_k) = \infty$.

Tomando una subsucesión de (x_k) si es necesario, podemos suponer que existe un índice i_0 tal que $m(x_k) = |c_{i_0}(x_k)|$, y que cada una de las sucesiones $\left(\frac{c_i(x_k)}{m(x_k)}\right)$ converge hacia β_i. Hagamos $w(x_k) = \frac{u(x_k)}{m(x_k)}$.

Como (de la hipótesis 5) u es acotada en X, y además $m(x_k) \to \infty$, tenemos que $w(x_k) \to 0$ en H. En particular, si $\alpha \in A$:

$$\begin{aligned}\int_{E_\alpha} |w(x_k)|^2 d\mu &= \int_{E_\alpha} \left|\sum_{i=1}^{n} \frac{c_i(x_k)}{m(x_k)}\varphi_i + \frac{1}{m(x_k)} f(x_k)\right|^2 d\mu \\ &= \int_Y \left|\sum_{i=1}^{n} \frac{c_i(x_k)}{m(x_k)}\varphi_i\chi_{E_\alpha} + \frac{1}{m(x_k)} f(x_k)\chi_{E_\alpha}\right|^2 d\mu \to 0,\end{aligned}$$

o equivalentemente

$$\lim_{k\to\infty} \left\|\sum_{i=1}^{n} \frac{c_i(x_k)}{m(x_k)}\varphi_i\chi_{E_\alpha} + \frac{1}{m(x_k)} f(x_k)\chi_{E_\alpha}\right\|^2 = 0,$$

de donde obtenemos que

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{m(x_k)} f(x_k)\chi_{E_\alpha} = -\sum_{i=1}^{n} \beta_i\varphi_i\chi_{E_\alpha}.$$

Además, como de la hipótesis 4 tenemos que $\frac{1}{m(x_k)} f(x_k)\chi_{E_\alpha}$ es una sucesión de funciones de H finas en $p = \infty$, del corolario 7.2 obtenemos que $\sum_{i1}^{n} \beta_i\varphi_i\chi_{E_\alpha} = 0$. Luego $\int_{E_\alpha} \sum_{i=1}^{n} \beta_i\varphi_i = 0$, y como $\alpha \in A$ fue tomado arbitrariamente, de la hipótesis 3 obtenemos que $\sum_{i=1}^{n} \beta_i\varphi_i = 0$. Luego, como el conjunto $\{\varphi_1,\ldots,\varphi_n\}$ es linealmente independiente en M, cada uno de los β_i es nulo, lo cual es una contradicción, pues $|\beta_{i_0}| = 1$.

Tomemos una sucesión (x_k) convergente hacia x_0 tal que $u(x_k) \rightharpoonup \varphi$. Como los c_i son acotados en una vecindad de x_0, extrayendo una subsucesión si es necesario, podemos suponer que cada una de las sucesiones $\big(c_i(x_k)\big)_{k\in\mathbb{N}}$ converge hacia un límite $c_i \in \mathbb{C}$. Dado $\alpha \in A$, tenemos que

$$\langle u(x_k), \chi_{E_\alpha}\rangle \to \langle \varphi, \chi_{E_\alpha}\rangle$$

o equivalentemente

$$\sum_{i=1}^{n} c_i(x_k)\int_{E_\alpha}\varphi_i d\mu + \int_{E_\alpha} f(x_k)d\mu \to \int_{E_\alpha}\varphi d\mu. \tag{98}$$

Tomemos la sucesión $\big(v(x_k)\big)_{k\in\mathbb{N}}$ donde $v(x_k) = f(x_k)\chi_{E_\alpha} \in H$. Como $\big\|u(x_p)\chi_{E_\alpha}\big\| \leqslant \big\|u(x_p)\big\|$. De (97) tenemos que

$$\big\|v(x_k)\big\| \leqslant \big\|u(x_k)\big\| + \sum_{i=1}^{n}\big\|c_i(x_k)\varphi_i\chi_{E_\alpha}\big\|.$$

Como la función u es acotada y cada una de las sucesiones $\big(c_i(x_k)\big)_{k\in\mathbb{N}}$ converge tenemos que la sucesión $\big(v(x_k)\big)$ es acotada y tenemos también que es fina en $p = \infty$ (pues $\big(f(x_k)\big)$ lo es). Por lo tanto, del corolario 7.1 tenemos que $v(x_k) \rightharpoonup 0$. De ahí

$$\int_{E\alpha} f(x_k)d\mu = \int_Y f(x_k)\chi_{E_\alpha}d\mu = \langle v(x_k), \chi_{E_\alpha}\rangle \to 0.$$

Luego de (98) deducimos que

$$\sum_{i=1}^{n} c_i\int_{E_\alpha}\varphi_i d\mu = \int_{E_\alpha}\varphi d\mu.$$

De la hipótesis 3 obtenemos que

$$\sum_{i=1}^{n} c_i\varphi_i = \varphi,$$

y como $\varphi \in H$, de la hipótesis 2 resulta $\varphi = 0$. El resultado se sigue del teorema 1.19. □

***Teorema** 7.2.* — Sean $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ elementos de M que verifican las condiciones 2 y 3 del lema 7.4, y $f_1, \dots, f_p$ funciones de X en M finas en x_0. Supongamos que $V(x)$ es un subespacio vectorial de $\mathrm{Vect}\big(\varphi_1, \dots, \varphi_n, f_1(x), \dots, f_p(x)\big) \cap H$ para todo $x \in X$. Entonces

$$V(x) \rightharpoonup 0$$

cuando x tiende hacia x_0.

Demostración. Sea $v : X \to H$ una función acotada tal que $v(x) \in V(x)$ para todo $x \in X$. En ese caso existen funciones $c_i : X \to \mathbb{C}$, $i = 1, \dots, n+p$ tales que

$$v(x) = c_1(x)\varphi_1 + \cdots + c_n(x)\varphi_n + c_{n+1}(x)f_1(x) + \cdots + c_{n+p}(x)f_p(x).$$

Definimos $f : X \to M$ por $f(x) = c_{n+1}(x)f_1(x) + \cdots + c_{n+p}(x)f_p(x)$. Tenemos que f es fina en x_0, y

$$v(x) = c_1(x)\varphi_1 + \cdots + c_n(x)\varphi_n + f(x).$$

El resultado se sigue del lema 7.4. □

Consideremos las n funciones $u_i : X \to H$ continuas en x_0. El siguiente teorema nos permite concluir la continuidad de Π_V.

Teorema 7.3. — Sea $p \in \{1, \ldots, n\}$ el rango de $\{u_k(x_0)\}_{k=1}^{n}$. Supongamos que $\{u_k(x_0)\}_{k=1}^{p}$ es un conjunto linealmente independiente.
Sean $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ elementos de M que verifican las condiciones 2 y 3 del lema 7.4, y $f_1, \ldots, f_q$ funciones de X en M finas en x_0.
Además, supongamos que para todo $x \in X$ existe un complemento $W(x)$ de $\mathrm{Vect}(u_1(x), \ldots, u_p(x))$ en $\mathrm{Vect}(u_1(x), \ldots, u_n(x))$, que está incluido en $\mathrm{Vect}(\varphi_1, \ldots, \varphi_m, f_1(x), \ldots, f_q(x))$.
Entonces Π_V es continua en (x_0, y_0), para todo $y_0 \in H$.

Demostración. Como tenemos que $W(x) \subset H$, del teorema 7.2 tenemos que $W(x) \to 0$ cuando x tiende hacia x_0. El resultado se sigue del teorema 6.7. □

Capítulo 8

EL OPERADOR PROYECCIÓN ASOCIADO A LAS DILATACIONES DE UNA FUNCIÓN

En este capítulo G será un grupo abeliano localmente compacto y σ-compacto. Supondremos también que el elemento neutro e de G posee un sistema fundamental numerable de vecindades (V_n) y que cada una de estas vecindades contiene propiamente a e. Como vimos en la sección 1.2 del capítulo 1.5, podemos suponer también que $V_{n+1} \subset V_n$. Debido a la homogeneidad de G todos sus demás puntos poseen un sistema fundamental de entornos similar al de e (realmente son translaciones de este).

Vamos a retomar el problema de la sección 6.2 en el caso que $X = G^n$ y cada una de las funciones u_k es de la forma $u_k(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = f_{\alpha_k}$, donde f_{α_k} es una dilatación de f.

Continuaremos utilizando la notación $H = L^2(G, m)$ y M para el conjunto de funciones medibles de G en $\mathbb{C}$ y $m = dx$ la medida de Haar del grupo G.

Recordemos que la transformada de Fourier de $f \in L^1(G)$, $\hat{f} : \gamma \mapsto \int_G f(x)\gamma(x^{-1})dx$ es una aplicación continua sobre G^*. Para $f \in H$ denotamos

$$\begin{array}{llll} F: & G^n & \to & H^n \\ & (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) & \mapsto & (f_{\alpha_1}, \ldots, f_{\alpha_n}). \\ \Pi_F: & G^n \times H & \to & H \\ & ((\alpha_1, \ldots, \alpha_n), y) & \mapsto & P_{\text{Vect}(f_{\alpha_1}, \ldots, f_{\alpha_n})}(y). \end{array}$$

Finalmente denotaremos $V(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \text{Vect}(f_{\alpha_1}, \ldots, f_{\alpha_n})$.

8.1. Invariancia de un operador en H

Definición 8.1. — Sea $f \in H$. Llamamos *función de autocorrelación* de f a la función $A : G \to \mathbb{C}$ definida por

$$A(\lambda) = \langle f, f_\lambda \rangle = \int_G f(x)\overline{f_\lambda(x)}dx.$$

Definición 8.2. — Para $\alpha \in G$ definimos $K_\alpha : H \to H$ por $K_\alpha(f) = f_\alpha$.

Definición 8.3. — Decimos que un operador $U : H \to H$ es *invariante* si U conmuta con todos los operadores K_α.

Teorema 8.1. — Para $\alpha \in G$ y $f \in L^1(G)$, tenemos: $\hat{f_\alpha}(\chi) = \overline{\chi}(\alpha)\hat{f}(\chi)$ para todo $\chi \in G^*$.

Demostración. Sean $\chi \in G^*$ y $\alpha \in G$. Tenemos:

$$\overline{f_\alpha}(\chi) = \int_G f_\alpha(x)\overline{\chi}(x)dx = \int_G f(x\alpha^{-1})\overline{\chi}(x)dx = \int_G f(u)\overline{\chi}(\alpha u)du$$
$$= \overline{\chi}(\alpha)\int_G f(u)\overline{\chi}(u)du = \overline{\chi}(\alpha)\hat{f}(\chi).$$

□

La demostración del siguiente teorema es directa y será omitida.

Teorema 8.2. — Sean $f \in M$ y $\alpha \in G$. Entonces:

$$\operatorname{Sop}(f_\alpha) = \alpha \operatorname{Sop} f \ \text{ y } \ m(\operatorname{Sop}(f_\alpha)) = m(\operatorname{Sop} f).$$

Teorema 8.3. — Sea X un espacio topológico, $x_0 \in X$ y $u : X \to M$. Para $\alpha \in G$ y $x \in X$, definimos $u_\alpha : X \to H$ por $u_\alpha(x) = u(x)_\alpha$. Entonces, si u es fina en x_0, también lo es u_α.

Demostración. Sean $x \in X$, y $\alpha \in G$ y $E \in \mathfrak{M}$ tal que $m(E) < \infty$. Tenemos

$$E \cap \operatorname{Sop}(u_\alpha(x)) = E \cap \operatorname{Sop}(u(x)_\alpha) = E \cap \alpha \operatorname{Sop}(u(x)).$$

Luego, del teorema 8.2

$$m\Big(E \cap \operatorname{Sop}(u_\alpha(x))\Big) = m\Big((\alpha^{-1}E) \cap \operatorname{Sop}(u(x))\Big).$$

La última expresion en la igualdad anterior tiende hacia 0 cuando x tiende hacia x_0 pues $m(\alpha^{-1}E) = m(E) < \infty$ y u es fina en x_0. □

Teorema 8.4. — El conjunto $\{K_\alpha : \alpha \in G\}$ es un grupo conmutativo de operadores unitarios de H.

Demostración. Dados $\alpha, \beta \in G$ no es díficil demostrar que K_α es lineal, también conserva la norma (teorema 4.4). Finalmente un cálculo directo muestra que $K_e = id_H$, $K_\alpha \circ K_\beta = K_{\alpha\beta}$ y $K_{\alpha^{-1}} = K_\alpha^{-1}$. □

Teorema 8.5. — Sean $\alpha \in G$, $(a_1, \dots, a_n) \in G^n$ y $y_0 \in H$.

$$K_\alpha\big(P_{V(a_1,\dots,a_n)}(y_0)\big) = P_{V(\alpha a_1,\dots,\alpha a_n)}\big(K_\alpha(y_0)\big).$$

Demostración. Dado $y_0 \in H$, de la descomposición en suma ortogonal

$$H = V(a_1, \dots, a_n) \oplus V(a_1, \dots, a_n)^\perp$$

tenemos $y_0 = P_{V(a_1,\dots,a_n)}(y_0) + z$, con $z \in V(a_1, \dots, a_n)^\perp$. Luego

$$K_\alpha(y_0) = K_\alpha\big(P_{V(a_1,\dots,a_n)}y_0\big) + K_\alpha(z). \tag{99}$$

Como K_α es ortogonal (teorema 8.4), $K_\alpha\big(V(a_1, \dots, a_n)^\perp\big) = K_\alpha\big(V(a_1, \dots, a_n)\big)^\perp$. Luego (99) es la descomposición de $K_\alpha(y_0)$ en la suma directa ortogonal

$$H = K_\alpha\big(V(a_1, \dots, a_n)\big) \oplus K_\alpha\big(V(a_1, \dots, a_n)\big)^\perp.$$

El resultado se sigue de la igualdad $K_\alpha\big(V(a_1, \dots, a_n)\big) = V(\alpha a_1, \dots, \alpha a_n)$. □

8.2. Funciones admisibles

Definición 8.4. — La aplicación $f \in H$ se dice *admisible en el punto* $x = (x_1, \ldots, x_n) \in G^n$ si para todo $y \in H$ la aplicación Π_F es continua en (x, y). En tal caso diremos que x *es un punto admisible de* f.

Definición 8.5. — $f \in H$ se dice *admisible* si para todo $n \geqslant 1$, f es admisible en todo punto de G^n.

Teorema 8.6. — Sea $f \in H$. Para toda permutación σ de $\{1, \ldots, n\}$, se tiene que $(x_1, \ldots, x_n)$ es punto admisible de f si y sólo si $(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$ lo es.

Demostración. El resultado se deriva de la continuidad de la función $\overline{\sigma} : G^n \times H \to G^n \times H$, $\big((x_1, \ldots, x_n), y\big) \mapsto \big((x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}), y\big)$. □

Teorema 8.7. — Sean $\alpha \in G$, $f \in H$ y $(x_1, \ldots, x_n) \in G^n$. se tiene que f es admisible en $(x_1, \ldots, x_n)$ si y sólo si lo es también en $(\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n)$.

Demostración. Supongamos que $(x_1, \ldots, x_n)$ es admisible. Definamos la aplicación constante $K : G^n \to \mathfrak{L}(H)$, $K(z_1, \ldots, z_n) = K_\alpha$. Del teorema 8.4, K_α es un operador unitario de H. Además, para todo $f \in H$ la aplicación $(z_1, \ldots, z_n) \mapsto K(\alpha)(f) = f_\alpha$ es continua (por ser constante). Luego, del teorema 6.5, la aplicación

$$\begin{array}{rccl} \phi : & G^n \times H & \to & H \\ & (z_1, \ldots, z_n, y) & \mapsto & P_{\mathrm{Vect}(f_{\alpha z_1}, \ldots, f_{\alpha z_n})}(y). \end{array}$$

es continua en $(x_1, \ldots, x_n, y)$ para todo $y \in H$. Definamos

$$\begin{array}{rccl} T : & G^n \times H & \to & G^n \times H \\ & (z_1, \ldots, z_n, y) & \mapsto & \left(\frac{z_1}{\alpha}, \ldots, \frac{z_n}{\alpha}, y\right). \end{array}$$

Como $\Pi_F = \phi \circ T$, el resultado se deriva de la continuidad de T en $(\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n, y)$ y la continuidad de ϕ en $T(\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n, y)$. La afirmación recíproca es inmediata debido a la simetría del enunciado. □

Teorema 8.8. — Si U un operador unitario e invariante de H y f una función admisible, entonces Uf es admisible.

Demostración. Dados $n \in \mathbb{N}$ y $(x_1, \ldots, x_n) \in G^n$. Definamos la aplicación constante $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in G^n \mapsto U \in \mathfrak{L}(H)$. Para todo $f \in H$ la aplicación $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \mapsto Uf$ es continua (por ser constante), U es unitario y f es admisible en $(x_1, \ldots, x_n)$. Luego, del teorema 6.5 tenemos que la aplicación

$$\begin{array}{rccl} \psi : & G^n \times H & \to & H \\ & \big((\alpha_1, \ldots, \alpha_n), y\big) & \mapsto & P_{\mathrm{Vect}(Uf_{\alpha_1}, \ldots, Uf_{\alpha_n})}(y) \end{array}$$

es continua en $(x_1, \ldots, x_n)$, para todo $y \in H$. Además, como U es invariante, tenemos

$$\begin{aligned} \mathrm{Vect}(Uf_{\alpha_1}, \ldots, Uf_{\alpha_n}) &= \mathrm{Vect}(UK_{\alpha_1}f, \ldots, UK_{\alpha_n}f) \\ &= \mathrm{Vect}(K_{\alpha_1}Uf, \ldots, K_{\alpha_n}Uf) \\ &= \mathrm{Vect}((Uf)_{\alpha_1}, \ldots, (Uf)_{\alpha_n}). \end{aligned}$$

Así, Uf es admisible en $(x_1, \ldots, x_n)$. Luego, Uf es admisible. $\square$

8.3. La $\mathbb{C}$-álgebra de los polinomios exponenciales.

Definición 8.6. — Llamamos *polinomio exponencial de G* a toda función medible $f : G \to \mathbb{C}$ tal que

$$\dim\big(\mathrm{Vect}(f_\alpha : \alpha \in G)\big) < \infty.$$

Designamos por $\mathfrak{P}$ al conjunto de polinomios exponenciales de G.

Teorema 8.9. — $\mathfrak{P}$ es una $\mathbb{C}$-álgebra conmutativa.

Demostración. Sean f y g dos polinomios exponenciales. La inclusión

$$\mathrm{Vect}\big((f+g)_\alpha : \alpha \in G\big) \subset \mathrm{Vect}(f_\alpha : \alpha \in G) + \mathrm{Vect}(g_\alpha : \alpha \in G)$$

nos muestra que $f + g \in \mathfrak{P}$. Por otro lado, si $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_p\}$ genera $\mathrm{Vect}(f_\alpha : \alpha \in G)$ y $\{\psi_1, \ldots, \psi_q\}$ genera $\mathrm{Vect}(g_\alpha : \alpha \in G)$, entonces

$$\mathrm{Vect}\big((fg)_\alpha : \alpha \in G\big) \subset \mathrm{Vect}(\varphi_i\psi_j : 1 \leqslant i \leqslant p, 1 \leqslant j \leqslant g),$$

de donde $fg \in \mathfrak{P}$. Finalmente, si $\lambda \in \mathbb{C}$, tenemos

$$\mathrm{Vect}\big((\lambda f)_\alpha : \alpha \in G\big) = \mathrm{Vect}(\lambda f_\alpha : \alpha \in G) = \mathrm{Vect}(f_\alpha : \alpha \in G)$$

si $\lambda \neq 0$, y

$$\mathrm{Vect}\big((\lambda f)_\alpha : \alpha \in G\big) = \{0\}$$

si $\lambda = 0$. En cualquier caso $\lambda f \in \mathfrak{P}$. $\square$

Definición 8.7. —

1. Llamamos *caracter aditivo* a toda función continua $f : G \to \mathbb{C}$ que verifica
$$f(ab) = f(a) + f(b)$$
para todo $a, b \in G$.
2. Llamamos *caracter multiplicativo* a toda función continua $f : G \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$ que verifica
$$f(ab) = f(a)f(b)$$
para todo $a, b \in G$.

Teorema 8.10. — Si G no es compacto, entonces $\mathfrak{P} \cap H = \{0\}$.

Demostración. Supongamos que existe un polinomio exponencial $f \neq 0$ tal que $f \in H$. Sea V el espacio vectorial de dimensión finita $\mathrm{Vect}(f_\alpha : \alpha \in G)$. Como los operadores $(K_\alpha\big|_V)$, $\alpha \in G$ conmutan, poseen un vector propio común $g \neq 0$. Es decir, para todo $\alpha \in G$ tenemos $g_\alpha = c(\alpha)g$ para alguna constante $c(\alpha)$. Hagamos $h = |g|^2$. Como $g \in L^2(G)$ entonces $h \in L^1(G)$. Además, h es no nulo y $h_\alpha = \big|c(\alpha)\big|^2 h$ para todo $\alpha \in G$. Así, para todo $\chi \in G^*$, y todo $\alpha \in G$ tomando la transformada de Fourier tenemos

$$\overline{\chi}(\alpha)\hat{h}(\chi) = \big|c(\alpha)\big|^2\hat{h}(\chi).$$

Sea E el conjunto, no vacío (pues $1_G \in E$) de aquellos $\chi \in G^*$ tales que $\hat{h}(\chi) \neq 0$. Para todo $\chi \in E$, y todo $\alpha \in G$ tenemos

$$\chi(\alpha) = \left|c(\alpha)\right|^2,$$

de donde se sigue que E es un conjunto unitario $\{1_G\}$. De la continuidad de $\hat{h}$, E es abierto en G^*. Luego 1_G posee una vecindad formada por un solo punto. Así, G^* es discreto y por ende G es compacto. □

8.4. Un conjunto especial de funciones medibles.

Definición 8.8. — Llamamos $\mathfrak{C}$ al conjunto de las funciones medibles $f : G \to \mathbb{C}$ tales que para todo $x_0 \in G$, la aplicación $x \mapsto f_x - f_{x_0}$ es fina (con respecto a la medida de Haar) en x_0.

Teorema 8.11. — El conjunto $\mathfrak{C}$ es una $\mathbb{C}$-álgebra invariante por dilataciones.

Demostración. Sean $f, g \in \mathfrak{C}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ y $h = f + \lambda g$. Tenemos

$$h_x - h_{x_0} = f_x - f_{x_0} + \lambda(g_x - g_{x_0})$$

y

$$(fg)_x - (fg)_{x_0} = f_x g_x - f_{x_0} g_{x_0} = f_x(g_x - g_{x_0}) + g_{x_0}(f_x - f_{x_0}).$$

Se sigue del lema 7.1 que h y fg pertenecen a $\mathfrak{C}$. Por otro lado, si $\alpha \in G$, entonces

$$(f_\alpha)_x - (f_\alpha)_{x_0} = (f_x - f_{x_0})_\alpha.$$

Se sigue del teorema 8.3 que $f_\alpha \in \mathfrak{C}$. □

Teorema 8.12. — Si $S \in \mathfrak{M}$ y $m(S) < \infty$, entonces $\chi_S \in \mathfrak{C}$.

Demostración. Como $m(S) < \infty$, entonces $\chi_S \in H$. Sean $x, x_0 \in G$. Tenemos, para todo $t \in G$

$$K_x(\chi_S)(t) - K_{x_0}(\chi_S)(t) = \begin{cases} 0 & si\ t \in xS \cap x_0 S \\ 1 & si\ t \in xS \setminus x_0 S \\ -1 & si\ t \in x_0 S \setminus xS \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Luego

$$\mathrm{Sop}\big(K_x(\chi_S) - K_{x_0}(\chi_S)\big) = (xS - x_0 S) \cup (x_0 S - xS),$$

de donde

$$m\Big(\mathrm{Sop}\big(K_x(\chi_S) - K_{x_0}(\chi_S)\big)\Big) = m\big((xS - x_0 S) \cup (x_0 S - xS)\big) = \|K_x\chi_S - K_{x_0}\chi_S\|.$$

La última expresión en la igualdad anterior tiende hacia 0 cuando x tiende hacia x_0 debido al teorema 4.5. Por lo tanto $\chi_S \in \mathfrak{C}$. □

Teorema 8.13. — Sea $f \in M$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. Para todo $E \in \mathfrak{M}$ tal que $m(E) < \infty$, tenemos $f\chi_E \in \mathfrak{C}$.
2. $f \in \mathfrak{C}$.

Demostración. Supongamos que $f \in \mathfrak{E}$. Si $E \in \mathfrak{M}$ tiene medida finita, del teorema 8.12 $\chi_E \in \mathfrak{E}$. Luego, por el teorema 8.11 $f\chi_E \in \mathfrak{E}$.

Recíprocamente, supongamos que $f\chi_E \in \mathfrak{E}$ para todo $E \in \mathfrak{M}$ tal que $m(E) < \infty$. Tenemos

$$E \cap \operatorname{Sop}(f_x - f_{x_0}) = E \cap \operatorname{Sop}(f_x\chi_E - f_{x_0}\chi_E).$$

Además

$$\begin{aligned} f_x\chi_E - f_{x_0}\chi_E &= f_x\chi_{xx_0^{-1}E} - f_{x_0}\chi_E + f_x(\chi_E - \chi_{xx_0^{-1}E}) \\ &= (f\chi_{x_0^{-1}E})_x - (f\chi_{x_0^{-1}E})_{x_0} + f_x\big((\chi_E)_{x_0} - (\chi_E)_x\big)_{x_0^{-1}}, \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} m\big(E \cap \operatorname{Sop}(f_x - f_{x_0})\big) &\leqslant m\Big(E \cap \operatorname{Sop}\big((f\chi_{x_0^{-1}E})_x - (f\chi_{x_0^{-1}E})_{x_0}\big)\Big) \\ &\quad + m\Big(E \cap \operatorname{Sop}\Big(\big((\chi_E)_{x_0} - (\chi_E)_x\big)_{x_0^{-1}}\Big)\Big). \end{aligned}$$

Por hipótesis, $f\chi_{x_0^{-1}E} \in \mathfrak{E}$ pues $m(x_0^{-1}E) = m(E) < \infty$. Además, del teorema 8.12 $\chi_E \in \mathfrak{E}$. Es decir, $(\chi_E)_{x_0} - (\chi_E)_x$ es fina en x_0 para todo $x_0 \in G$. Del teorema 8.3 $\big((\chi_E)_{x_0} - (\chi_E)_x\big)_{x_0^{-1}}$ también es fina en x_0. Luego $f \in \mathfrak{E}$. □

Teorema 8.14. — Sea $f \in M$. Supongamos que para todo $\epsilon > 0$ existen funciones $g \in \mathfrak{E}$ y $h \in M$ con $m(\operatorname{Sop} h) < \epsilon$ cuya suma es f. Entonces, $f \in \mathfrak{E}$.

Demostración. Dado $\epsilon > 0$. Tenemos $f_x - f_{x_0} = g_x - g_{x_0} + h_x - h_{x_0}$. Luego

$$\begin{aligned} \operatorname{Sop}(f_x - f_{x_0}) &\subset \operatorname{Sop}(g_x - g_{x_0}) \cup \operatorname{Sop}(h_x) \cup \operatorname{Sop}(h_{x_0}) \\ &= \operatorname{Sop}(g_x - g_{x_0}) \cup x\operatorname{Sop}(h) \cup x_0 \operatorname{Sop}(h). \end{aligned}$$

Así, para todo $E \in \mathfrak{M}$ de medida finita tenemos

$$m\big(E \cap \operatorname{Sop}(f_x - f_{x_0})\big) \leqslant m\big(E \cap \operatorname{Sop}(g_x - g_{x_0})\big) + 2m\big(\operatorname{Sop}(h)\big).$$

Como $g \in \mathfrak{E}$ existe un abierto V_{x_0} que contiene a x_0 tal que, para todo $x \in V_{x_0} \setminus \{x_0\}$ se cumple que $m\big(E \cap \operatorname{Sop}(g_x - g_{x_0})\big) \leqslant \epsilon$. Así, para todo $x \in V_{x_0} \setminus \{x_0\}$ tenemos

$$m\big(E \cap \operatorname{Sop}(f_x - f_{x_0})\big) \leqslant 3\epsilon,$$

es decir

$$\lim_{x \to x_0} m\big(E \cap \operatorname{Sop}(f_x - f_{x_0})\big) = 0.$$

Equivalentemente, $f \in \mathfrak{E}$. □

Teorema 8.15. — Sean $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números complejos y $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos medibles de G tales que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} m(S_n) < \infty.$$

Entonces, si está definida, la función

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n \chi_{S_n} \tag{100}$$

pertenece a $\mathfrak{E}$.

Demostración. Dado $\epsilon > 0$, como $\sum_{n\in\mathbb{N}} m(S_n) < \infty$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N$ entonces $\sum_{n>N} m(S_n) < \epsilon$. Luego, si escribimos

$$f = \sum_{n\in\mathbb{N}} c_x \chi_{S_n} = f_N + R_N,$$

donde $f_N = \sum_{n=1}^{N} c_x \chi_{S_n}$ y $R_N = \sum_{n>N} c_x \chi_{S_n}$, como f_N es combinación lineal de elementos de $\mathfrak{E}$, entonces $f_N \in \mathfrak{E}$. Por otro lado, tenemos

$$\text{Sop}(R_N) \subset \bigcup_{n>N} S_n,$$

de donde

$$m(\text{Sop}(R_N)) \leqslant \sum_{n>N} m(S_n) < \epsilon.$$

El resultado se obtiene del teorema 8.14. □

Teorema 8.16. — Sean $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números complejos y $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de conjuntos medibles disjuntos dos a dos. Entonces, la función

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n \chi_{S_n} \tag{101}$$

pertenece a $\mathfrak{E}$.

Demostración. Es claro que la función (101) está bien definida. Sea $E \in \mathfrak{M}$ tal que $m(E) < \infty$. Tenemos

$$\chi_E \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n \chi_{S_n} = \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n \chi_{S_n \cap E}.$$

Como $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (S_n \cap E) \subset E$ y los S_n son disjuntos dos a dos, tenemos

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} m(S_n \cap E) \leqslant m(E) < \infty.$$

Del teorema 8.15, $\chi_E \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n \chi_{S_n} \in \mathfrak{E}$. La conclusión se sigue del teorema 8.13. □

8.5. Un teorema de admisibilidad

Teorema 8.17. — Si $f \in L^2(G)$ puede escribirse de la forma $f = g + h$ donde g es un polinomio exponencial (nulo si G es compacto) y $h \in \mathfrak{E}$, entonces f es admisible.

Demostración. Sea $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$ una base de $\mathrm{Vect}(g_\alpha : \alpha \in G)$. Si tomamos (E_α) la familia de todos los compactos de G, las funciones φ_k verifican las condiciones 2 y 3 del lema 7.4. Sean $x_0 = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in G^n$ y p el rango de $(f_{\alpha_1}, \ldots, f_{\alpha_n})$ en H. Sean $1 \leqslant i_1 \leqslant \ldots \leqslant i_p \leqslant n$ tales que el conjunto $(f_{\alpha_{i_k}})_{1\leqslant k\leqslant p}$ sea linealmente independiente. Para todo entero $j \notin \{i_1, \ldots, i_p\}$ podemos escribir

$$f_{\alpha_j} = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k^j f_{\alpha_{i_k}}.$$

Tomemos $x = (x_1, \ldots, x_n) \in G^n$. Tenemos

$$\mathrm{Vect}(f_{x_i} : 1 \leqslant i \leqslant n) = \mathrm{Vect}(f_{x_{i_k}} : 1 \leqslant k \leqslant p) + \mathrm{Vect}\Big(f_{x_j} - \sum_{k=1}^{p} \lambda_k^j f_{x_{i_k}} : j \notin \{i_1, \ldots, i_p\}\Big).$$

Para todo $j \notin \{i_1, \ldots, i_p\}$ tenemos

$$\begin{aligned} f_{x_j} - \sum_{k=1}^{p} \lambda_k^j f_{x_{i_k}} &= f_{x_j} - \sum_{k=1}^{p} \lambda_k^j f_{x_{i_k}} - \left(f_{\alpha_j} - \sum_{k=1}^{p} \lambda_k^j f_{\alpha_{i_k}}\right) \\ &= f_{x_j} - f_{\alpha_j} - \sum_{k=1}^{p} \lambda_k^j (f_{x_{i_k}} - f_{\alpha_{i_k}}) \\ &= \Big(g_{x_j} - g_{\alpha_j} - \sum_{k=1}^{p} \lambda_k^j (g_{x_{i_k}} - g_{\alpha_{i_k}})\Big) + \Big(h_{x_j} - h_{\alpha_j} - \sum_{k=1}^{p} \lambda_k^j (h_{x_{i_k}} - h_{\alpha_{i_k}})\Big). \end{aligned}$$

Como el primer término en la suma anterior pertenece a $\mathrm{Vect}(\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$, y el segundo es una función fina en x_0, el resultado se desprende del teorema 7.3. □

Ahora daremos ejemplos de funciones no admisibles en el caso que $G = \mathbb{R}$. Las dilataciones de una función g en este caso son funciones $x \mapsto g(x - \alpha)$.

Teorema 8.18. — Sea $g \in H$. Supongamos que la aplicación

$$\begin{aligned} \Psi : \mathbb{R} &\to H \\ \alpha &\mapsto g_\alpha \end{aligned}$$

Es diferenciable en $\alpha_0 \in \mathbb{R}$. Entonces:

1. Ψ es diferenciable en $\mathbb{R}$;
2. $\Psi'(\alpha) = \Psi'(0)_\alpha$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$;
3. si $g \neq 0$, entonces $\Psi(\alpha)$ y $\Psi'(\alpha)$ son linealmente independientes para todo $\alpha \in \mathbb{R}$;
4. si $g \neq 0$, entonces, para todo $\alpha_1 \in \mathbb{R}$, g no es admisible en el punto (α_1, α_1).

Demostración.

– Demostremos (1). Fijemos $\alpha_1 = \alpha_0 + k$ con $k \neq 0$. Para $\alpha \neq \alpha_1$, si $\beta = \alpha - k$ tenemos

$$\frac{\Psi(\alpha) - \Psi(\alpha_1)}{\alpha - \alpha_1} = \frac{K_\alpha g - K_{\alpha_1} g}{\alpha - \alpha_1} = K_k \left(\frac{g_\beta - g_{\alpha_0}}{\beta - \alpha_0}\right) = K_k \left(\frac{\Psi(\beta) - \Psi(\alpha_0)}{\beta - \alpha_0}\right).$$

De la continuidad de K_k y debido a que Ψ es diferenciable en α_0, se obtiene la diferenciabilidad de Ψ en α_1, y la igualdad

$$\Psi'(\alpha_1) = K_{\alpha_1 - \alpha_0}\Psi'(\alpha_0). \tag{102}$$

- De (1), la función Ψ es diferenciable en todo $\mathbb{R}$. Tomando $\alpha_0 = 0$ en 102 tenemos $\Psi'(\alpha_1) = K_{\alpha_1}\Psi'(0)$, para todo $\alpha_1 \in \mathbb{R}$. Es decir $\Psi'(\alpha_1) = \Psi'(0)_{\alpha_1}$.
- Sea $\mathfrak{F}$ la transformacion de Fourier sobre H, y hagamos $\Phi = \mathfrak{F} \circ \Psi : \mathbb{R} \to L^2(G^*) = L^2(\mathbb{R})$. Tenemos

$$\mathfrak{F}g(t) = \int_{\mathbb{R}} g(x)e^{-itx}dx$$

y

$$\Phi(\alpha) : t \mapsto e^{-it\alpha}\mathfrak{F}g(t).$$

Φ es diferenciable en $\mathbb{R}$ pues Ψ lo es y $\mathfrak{F}$ es una transformación lineal continua. Sea $\alpha_0 \in \mathbb{R}$, existe $z \in L^2(\mathbb{R})$ tal que

$$\left\| \frac{\Phi(\alpha) - \Phi(\alpha_0)}{\alpha - \alpha_0} - z \right\| \to 0$$

cuando x tiende hacia x_0. Así, podemos encontrar una sucesión (α_n) convergente hacia α_0, tal que $\left(\frac{\Phi(\alpha_n)-\Phi(\alpha_0)}{\alpha_n - \alpha_0}\right)$ converge puntualmente hacia z casi en todas a partes. Ahora bien, esta última sucesión tambien converge puntualmente casi en todas partes hacia la aplicación $t \mapsto (-it)e^{-it\alpha_0}\hat{g}(t)$. Por consiguiente, tenemos la igualdad:

$$\Phi'(\alpha_0) = \left[t \mapsto (-it)e^{-it\alpha_0}\hat{g}(t)\right].$$

Ahora supongamos que $\Psi(\alpha_0)$ y $\Psi'(\alpha_0)$ son linealmente dependiente. En este caso, $\Phi(\alpha_0)$ y $\Phi'(\alpha_0)$ también son linealmente dependientes y por tanto existe un número complejo μ tal que la aplicación $t \mapsto (-it)e^{-it\alpha_0}(1 + \mu it)\hat{g}(t)$ es idénticamente cero. Luego, la $\hat{g} = 0$, de donde $g = 0$. Así queda establecido (3).
- Sean $\alpha_1 \in \mathbb{R}$ y $y_0 \in H$. Para $\beta \neq \alpha_1$, tenemos

$$\mathrm{Vect}(g_{\alpha_1}, g_\beta) = \mathrm{Vect}\left(g_{\alpha_1}, \frac{g_{\alpha_1} - g_\beta}{\alpha_1 - \beta}\right).$$

Así, como $\Psi(\alpha_1)$ y $\Psi'(\alpha_1)$ son linealmente independientes, del teorema 6.8 tenemos

$$\lim_{\beta \to \alpha_1} \Pi_F\big((\alpha_1, \beta), y_0\big) = P_{\mathrm{Vect}\left(\Psi(\alpha_1), \Psi'(\alpha_1)\right)}(y_0).$$

Luego, si $y_0 - P_{\mathrm{Vect}\left(\Psi(\alpha)\right)}(y_0) \notin \mathrm{Vect}\big(\Psi'(\alpha_1)\big)^{\perp}$, del teorema 6.3 tenemos

$$P_{\mathrm{Vect}\left(\Psi(\alpha_1), \Psi'(\alpha_1)\right)}(y_0) \neq P_{\mathrm{Vect}\left(\Psi(\alpha)\right)}(y_0) = \Pi_F\big((\alpha_1, \alpha_1), y_0\big).$$

Es decir, Π_F es discontinua en (α_1, α_1).

□

8.6. El conjunto de las funciones c-admisibles.

En esta sección vamos a generalizar la teoría presentada en la sección 8.5. Vamos a suponer que la medida utilizada no es la medida de Haar del grupo G, pero que tiene la forma $m_c = c(x)dx$ donde dx es la medida de Haar de G y c es un caracter positivo continuo, distinto de la constante 1. En particular consideramos $H = L^2(G, m_c)$. En particular, G no es compacto y suponemos que $G \subset \tilde{G}$, donde $\tilde{G}$ es un espacio topológico tal que para todo $z \in Z = \tilde{G} \setminus G$

$$\lim_{\substack{x \to z \\ x \in G}} c(x) = 0.$$

Suponemos también que cada elemento de Z posee un sistema fundamental numerable de vecindades en $\tilde{G}$. Finalmente denotamos $X = \tilde{G}^n$.

Definición 8.9. — Sean $f \in M$, y $z \in Z$. Denotamos $f_z = 0$.

Teorema 8.19. — Sean $\alpha \in G$ y $f \in H$. Entonces $\|f_\alpha\| = \sqrt{c(\alpha)}\|f\|$.

Demostración. Sea $\alpha \in G$. Tenemos

$$\|f_\alpha\|^2 = \int_G |f_\alpha(x)|^2 c(x)dx = \int_G |f(x\alpha^{-1})|^2 c(x)dx = \int_G |f(u)|^2 c(u\alpha)du = c(\alpha)\|f\|^2,$$

de donde se obtiene el resultado. □

Teorema 8.20. — Sean E un conjunto medible de G y $x \in G$. Entonces: $m_c(xE) = c(x)m_c(E)$. En particular, si $f \in H$, entonces $m_c(\mathrm{Sop}(f_x)) = c(x)m_c(\mathrm{Sop}\, f)$.

Demostración.

$$m_c(xE) = \int_{xE} c(u)du = \int_E c(xv)dv = c(x)\int_E c(v)dv = c(x)m_c(E).$$

Además, si $f \in H$ se tiene que $\mathrm{Sop}(f_x) = x\,\mathrm{Sop}\, f$. Luego

$$m_c(\mathrm{Sop}(f_x)) = m_c(x\,\mathrm{Sop}(f)) = c(x)m_c(\mathrm{Sop}\, f).$$

□

Definición 8.10. — Dado $\alpha \in G$, definimos el operador $K^c_\alpha : H \to H$ por $K^c_\alpha(f) = \frac{1}{\sqrt{c(\alpha)}} f_\alpha$

De la definición resulta lo siguiente.

Teorema 8.21. — El operador K^c_α es unitario.

Teorema 8.22. — Sean $f \in M$ tal que $m_c(\mathrm{Sop}\, f) < \infty$ y $z \in Z$. Entonces la aplicación $x \mapsto f_x$ es fina (con respecto a la medida $c(x)dx$) en z.

Demostración. Del teorema 8.20, para todo $x \in G$: $m_x(\mathrm{Sop}(f_x)) = c(x)m_c(\mathrm{Sop}\, f)$. Por definición $\lim_{\substack{x \to z \\ x \in G}} c(x) = 0$, luego $\lim_{\substack{x \to z \\ x \in G}} m_c(\mathrm{Sop}(f_x)) = 0$, por lo cual f es fina en z. □

El tipo de función que se introduce en la siguiente definición generaliza a los polinomios exponenciales.

Definición 8.11. — Una función $f : G \to \mathbb{C}$ medible pertenece a $\mathfrak{E}_c$ cuando para todo $x_0 \in \tilde{G}$, la aplicación $x \mapsto f_x - f_{x_0}$ es fina (con respecto a la medida $c(x)dx$) en x_0.

Los teoremas 8.12, 8.14 y 8.15 conservan su validez remplazando m por m_c y $\mathfrak{E}$ por $\mathfrak{E}_c$. En particular tenemos el siguiente resultado.

Teorema 8.23. — Sean $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números complejos y $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos medibles de G tales que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} m_c(S_n) < \infty.$$

Entonces, si está definida, la función

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n \chi_{S_n} \tag{103}$$

pertenece a $\mathfrak{E}_c$.

Por el contrario, los teoremas 8.13 y 8.16 no se generalizan. En efecto, la función $1_G \notin \mathfrak{E}_c$ pues

$$x \mapsto (1_G)_x = \begin{cases} 1_G & \text{si } x \in G \\ 0 & \text{si } x \in Z \end{cases}$$

no es fina en ningún $z \in Z$.

Definición 8.12. — Decimos que la función $f \in H$ es *c-admisible* en el punto $(x_1, \ldots, x_n) \in \tilde{G}^n$ si para todo $y_0 \in H$, la aplicación

$$\Pi_F : (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \tilde{G}^n \mapsto P_{\mathrm{Vect}(f_{\alpha_1}, \ldots, f_{\alpha_n})}(y_0) \in H$$

es continua en el punto $(x_1, \ldots, x_n)$. En este caso decimos que $(x_1, \ldots, x_n)$ es un *punto c-admisible* de f.

Definición 8.13. — Se dice que $f \in H$ es *c-admisible* si para todo $n \geqslant 1$, f es c-admisible en todo punto de $\tilde{G}^n$.

A continuación presentamos un teorema que nos permite concluir cuando una función es c-admisible. Antes de ello demostramos el siguiente resultado.

Teorema 8.24. — Sea V un subespacio vectorial de dimensión finita de M, supongamos además que $V \subset L^2(K)$ para todo $K \subset G$ compacto y que $V \cap H = \{0\}$. Sea $f \in \mathfrak{E}_c$, y sea $u : \tilde{G} \to H$ una aplicación continua tal que:
(i) $u(z) = 0$ para todo $z \in Z$;
(ii) para todo $\alpha \in \tilde{G}$, $u(\alpha) - f_\alpha \in V$.
Entonces, para todo $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, la aplicación Π_U es continua en $\tilde{G}^q \times H$.

Demostración. Sea

$$V = \mathrm{Vect}(\psi_1, \ldots, \psi_m).$$

De las hipótesis hechas sobre V, las condiciones 2 y 3 del lema 7.4 se verifican. Sea $x_0 = (\alpha_1, \ldots, \alpha_q) \in \tilde{G}^q$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que

$$x_0 = (z_1, \ldots, z_l, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$$

donde $\alpha_i \in G$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$ y $z_j \in Z$ para todo $j \in \{1, \ldots, l\}$. Sea p el rango del conjunto $\{u(\alpha_1), \ldots, u(\alpha_n)\}$. Sean $1 \leqslant i_1 \leqslant \ldots \leqslant i_p \leqslant n$ tales que el conjunto $\{u(\alpha_{i_k})\}_{1 \leqslant k \leqslant p}$ sea linealmente independiente. Para todo entero $j \notin \{i_1, \ldots, i_p\}$

$$u(\alpha_j) = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k^j u(\alpha_{i_k}).$$

Tomemos $x = (w_1, \ldots, w_l, x_1, \ldots, x_n) \in \tilde{G}^q$ y hagamos

$$F(x) = \mathrm{Vect}\big(u(w_1), \ldots, u(w_l), u(x_1), \ldots, u(x_n)\big).$$

Tenemos

$$F(x) = \mathrm{Vect}\big(u(x_{i_k}) : 1 \leqslant k \leqslant p\big) + G(x) + H(x),$$

donde

$$G(x) = \mathrm{Vect}\big(u(x_j) - \sum_{k=1}^{p} \lambda_k^j u(x_{i_k}) : j \notin \{i_1, \ldots, i_p\}\big),$$

$$H(x) = \mathrm{Vect}\big(u(w_j), 1 \leqslant j \leqslant l\big).$$

Por un lado, para todo $j \notin \{i_1, \ldots, i_p\}$ tenemos

$$\begin{aligned} u(x_j) - \sum_{k=1}^{p} \lambda_k^j u(x_{i_k}) &= u(x_j) - \sum_{k=1}^{p} \lambda_k^j u(x_{i_k}) - \big(u(\alpha_j) - \sum_{k=1}^{p} \lambda_k^j u(\alpha_{i_k})\big) \\ &= u(x_j) - u(\alpha_j) - \sum_{k=1}^{p} \lambda_k^j \big(u(x_{i_k}) - u(\alpha_{i_k})\big) \\ &= \underbrace{f_j(x)}_{\in V} + \underbrace{f_{x_j} - f_{\alpha_j}}_{\text{fina en } x_0} - \sum_{k=1}^{p} \lambda_k^j \big(\underbrace{f_{i_k}(x)}_{\in V} + \underbrace{f_{x_{i_k}} - f_{\alpha_{i_k}}}_{\text{fina en } x_0}\big). \end{aligned}$$

Por otro lado, para $1 \leqslant j \leqslant l$ tenemos

$$u(w_j) = g_j(x) + f_{w_j}$$

con $g_j(x) \in V$ para todo $x \in \tilde{G}^n$ y f_{w_j} fina en x_0. Del teorema 7.3 se concluye que f es admisible. $\square$

Como una consecuencia directa del teorema anterior tenemos lo siguiente.

Teorema 8.25. — Si $f \in L^2\big(G, c(x)dx\big)$ puede escribirse de la forma $g + h$, donde g es un polinomio exponencial y h pertenece a $\mathfrak{E}_c$, entonces f es c-admisible.

Capítulo 9

LA PROYECCIÓN RELACIONADA AL CRITERIO DE BEURLING-NYMAN

9.1. Introducción

Vamos a retomar el problema presentado en el capítulo 8 en el caso donde la función f está definida por $f(t) = \{\frac{1}{t}\}$ (donde u es la parte fraccionaria del número real u, es decir $u - \lfloor u \rfloor$), y cuando y_0 es la función χ característica del intervalo $(0, 1]$.

El criterio de Beurling y Nyman motiva esta elección. Si denotamos por $\mathfrak{B}$ el subespacio de $L^2(0, \infty)$ de funciones de la forma $f(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k g_{\alpha_k}(t)$ donde $n \in \mathbb{N}$ y $0 < \alpha_k \leqslant 1$ para $1 \leqslant k \leqslant n$, el criterio afirma que la hipótesis de Riemann equivale a que la función caracteristica χ del intervalo $(0, 1]$ es límite en $L^2(0, \infty)$ de funciones de $\mathfrak{B}$.

El punto de partida de la demostración de este criterio es la fórmula de transformación de Mellin siguiente:

$$\int_0^\infty \left\{\frac{1}{t}\right\} t^{s-1} dt = -\frac{\zeta(s)}{s}$$

para $0 < \Re(s) < 1$. Es de interés la sucesión (δ_n) definida por

$$\delta_n = \inf_{\substack{(c_1,\ldots,c_n)\in\mathbb{C}^n \\ 0\leqslant\alpha_1,\ldots,\alpha_n\leqslant 1}} \|\chi - \sum_{i=1}^{n} c_k g_{\alpha_k}\|.$$

El criterio de Beurling y Nyman antes mencionado implica que

Teorema 9.1. — La hipótesis de Riemann equivale a

$$\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$$

Notemos que χ no es combinación lineal de funciones g_{θ_i}. En efecto, si $\chi = \sum_{j=1}^{n} c_j g_{\theta_j}$ y $0 < \Re(s) < 1$, tomando la tranformada de Mellin

$$\frac{1}{s} = -\frac{\zeta(s)}{s} \sum_{j=1}^{n} c_j \theta_j^s,$$

lo cual implica que

$$\frac{1}{\zeta(s)} = -\sum_{j=1}^{n} c_j \theta_j^s.$$

Por extensión analítica, para $\Re(s) > 1$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\mu(j)}{j^s} = -\sum_{j=1}^{\infty} c_j \theta_j^s.$$

De la unicidad de la escritura de una serie de Dirichlet $s \mapsto \sum_{n\geqslant 1} a_n e^{-\lambda_n s}$ se tendría $u(j) = 0$, para todo j suficientemente grande, lo cual representa una contradicción.

En lo que sigue vamos a aplicar los resultados de la sección 8.6 tomando $G = (0, \infty)$ con la medida de Haar $m = \frac{dx}{x}$, $c(x) = x$ y $\tilde{G} = [0, \infty)$. En este caso $m_c = dx$ es la medida de Lebesgue y $H = L^2(0, \infty; dx)$ es el espacio de funciones de cuadrado integrable con la medida de Lebesgue.

9.2. La continuidad de $\Pi_{\chi,\rho}$

Teorema 9.2. — La aplicación $f : t \mapsto \lfloor \frac{1}{t} \rfloor$ pertenece a $\mathfrak{E}_c$.

Demostración. Se tiene la igualdad

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} n\chi_{(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]}$$

con

$$\sum_{n=1}^{\infty} m_c\Big(\big(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\big]\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} < \infty.$$

El resultado se sigue del teorema 8.23. □

Teorema 9.3. — La función $\rho(t) = \{\frac{1}{t}\}$ es c-admisible.

Demostración. Resulta de los teoremas 8.25, 9.2 y de la igualdad $\{\frac{1}{t}\} = \frac{1}{t} - \lfloor \frac{1}{t} \rfloor$. □

Podemos reescribir el teorema anterior de la siguiente manera.

Teorema 9.4. — Para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo $y \in L^2(0, \infty)$ la función definida por

$$\begin{array}{rccl} \Pi_\rho : & [0, \infty)^n & \to & L^2(0, \infty) \\ & (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) & \mapsto & P_{\text{Vect}(\rho_{\alpha_1}, \ldots, \rho_{\alpha_n})}(y). \end{array}$$

es continua.

Corolario 9.1. — La función $\Pi_{\chi,\rho} : [0, 1]^n \to L^2(0, \infty)$ definida por

$$\Pi_{\chi,\rho}\big((\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\big) = P_{\text{Vect}(\rho_{\alpha_1}, \ldots, \rho_{\alpha_n})}(\chi),$$

es continua.

Usaremos el siguiente lema para demostrar que (δ_n) es estrictamente decreciente.

Lema 9.1. — El espacio $\mathcal{N} = \text{Vect}\big(g_0 - \theta g_1 : \theta \in [0, 1]\big)$ es denso en $L^1(0, 1)$.

Demostración. [**Jousse, 2005**, Lemme 5]. □

Corolario 9.2. — Para todo $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ se verifica que $\delta_{n+1} < \delta_n$. También se alcanza la distancia δ_n, es decir existe $(x_1, \ldots, x_n) \in [0,1]^n$ tal que

$$\delta_n = \left\|\chi - P_{\mathrm{Vect}(\rho_{x_1},\ldots,\rho_{x_n})}(\chi)\right\| \leqslant \left\|\chi - P_{\mathrm{Vect}(\rho_{\alpha_1},\ldots,\rho_{\alpha_n})}(\chi)\right\|,$$

Para todo $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in [0,1]^n$.

Demostración.

- Por definición, δ_n es el ínfimo de la función $d_n : [0,1]^n \to \mathbb{C}$ dada por

  $$d_n : (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \mapsto \left\|\chi - P_{\mathrm{Vect}(\rho_{\alpha_1},\ldots,\rho_{\alpha_n})}(\chi)\right\|.$$

  Como, del corolario 9.1, la aplicación

  $$(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \mapsto P_{\mathrm{Vect}(\rho_{\alpha_1},\ldots,\rho_{\alpha_n})}(\chi)$$

  es continua en $[0,1]^n$, entonces d_n es continua, de donde se sigue el resultado.
- La inclusión $\mathrm{Vect}(\rho_{\alpha_1}, \ldots, \rho_{\alpha_n}) \subset \mathrm{Vect}(\rho_{\alpha_1}, \ldots, \rho_{\alpha_{n+1}})$ nos da la desigualdad $\delta_{n+1} \leqslant \delta_n$. Supongamos que $\delta_{n+1} = \delta_n$. Sea $f = \sum_{j=1}^n c_j \rho_{\theta_j}$ una función que verifica $\delta_n = \|\chi - f\|$ y $\theta \in [0,1]$. Para todo $c \in \mathbb{C}$ y para todo $h \in \mathrm{Vect}(\rho_{\theta_1}, \ldots, \rho_{\theta_n})$ se tiene

  $$\delta_n = \|\chi - f\| = \delta_{n+1} \leqslant \left\|\chi - (h + c\rho_\theta)\right\|.$$

  Luego, se puede afirmar que

  $$P_{\mathrm{Vect}(\rho_{\theta_1},\ldots,\rho_{\theta_n})}(\chi) = P_{\mathrm{Vect}(\rho_{\theta_1},\ldots,\rho_{\theta_n},g_\theta)}(\chi) = f.$$

  Si escribimos $\varphi = \chi - f$, entonces del teorema 6.3 $\varphi \perp g_\theta$ para todo $\theta \in [0,1]$. Luego $\varphi \perp g_\theta - \theta g_1$ para todo $\theta \in [0,1]$, es decir:

  $$\int_0^\infty \varphi(t) \left(\left\{\frac{\theta}{t}\right\} - \theta\left\{\frac{1}{t}\right\}\right) dt = 0,$$

  y como $\{\theta/t\} - \theta\{1/t\} = 0$ cuando $t > 1$, la integral anterior se reduce a

  $$\int_0^1 \varphi(t) \left(\left\{\frac{\theta}{t}\right\} - \theta\left\{\frac{1}{t}\right\}\right) dt = 0.$$

  Por lo tanto, tenemos $\varphi|_{(0,1)} \in \mathcal{N}^\perp$ donde $\mathcal{N} = \mathrm{Vect}\big(g_\theta - \theta_{g_1} : \theta \in [0,1]\big)$. Del lema 9.1 se tiene que $\mathcal{N}$ es denso en $L^1(0,1)$. Luego, la aplicación $\varphi|_{(0,1)}$ es idénticamente nula. Así, la ortogonalidad entre φ y ρ_1 se escribe

  $$\int_1^\infty \frac{\varphi(t)}{t} dt = 0,$$

  es decir

  $$0 = \int_1^\infty \frac{1}{t}\big(\chi(t) - \sum_{j=1}^n c_j g_{\theta_j}(t)\big) dt = -\sum_{j=1}^n c_j \int_1^\infty \frac{\theta_j}{t^2} dt = -\sum_{j=1}^n c_j \theta_j.$$

  Así, cuando $t \in [1,\infty)$, $f(t) = \frac{1}{t}\sum_{j=1}^n c_j\theta_j = 0$ por lo cual $\varphi(t) = \chi(t) - f(t) = 0$, de donde φ es idénticamente nula en $\mathbb{R}_+$. La discusión posterior al teorema 9.1 nos lleva a una contradicción.

Capítulo 10

OBSERVACIONES Y CONCLUSIONES FINALES

Nuestra principal conclusión es la continuidad de la función $\Pi_{\chi,\rho}$, para ello fue necesario introducir el concepto de función fina en un punto así como el de polinomio exponencial. Como consecuencia de la continuidad de $\Pi_{\chi,\rho}$ tenemos que para todo $n \in \mathbb{N}$ la distancia δ_n es alcanzada. Concluimos también el hecho no trivial de que la sucesión $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es estríctamente decreciente, y que por ende converge hacia un límite no negativo. El valor de este límite es de suma importancia pues, debido al criterio de Beurling, la hipótesis de Riemann es equivalente al hecho de que este límite sea 0.

Es de importancia mencionar que el concepto de función fina resulta trivial si asumimos *también* la continuidad de la función. En efecto, si u es continua y fina en su dominio entonces u es idénticamente nula.

Si bien logramos demostrar que los ceros no triviales de la función ζ se encuentran en la franja $0 < \sigma < 1$, también existen zonas libres de ceros dentro de esta franja crítica. En efecto, usando su método de sumas exponenciales Vinogradov encontró que la región

$$\sigma \geqslant 1 - \frac{A}{\log^{\frac{3}{4}} \tau (\log\log\tau)^{\frac{3}{4}}},$$

donde $A > 0$ es una constante, es libre de ceros de ζ [**Titchmarsh, 1986**, §6.15].

En la misma línea de Beurling encontramos al criterio de Báez-Duarte [**Baez Duarte, 2002**]. Si tomamos $H = L^2(0,\infty; t^{-2}dt)$ y denotamos $e_\alpha(t) = \rho_{1/\alpha}(1/t)$, este criterio afirma que la hipótesis de Riemann es equivalente a que la distancia

$$d_n := \mathrm{dist}_H\big(\chi_{(1,\infty)}, \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_n)\big)$$

converge hacia 0 cuando n tiende al infinito. Aquí aparece nuevamente la función de autocorrelación que definimos anteriormente. Tomando $f(t) = \{t\}$ y H como en lineas anteriores obtenemos

$$A(\lambda^{-1}) = \int_0^\infty \{t\}\{\lambda t\}\frac{dt}{t^2}.$$

Debido a una conocida fórmula de la geometría hilbertiana se tiene

$$d_n^2 = \frac{\mathrm{Gram}(e_1, \ldots, e_n, \chi_{(1,\infty)})}{\mathrm{Gram}(e_1, \ldots, e_n)}$$

donde el producto escalar envuelto es el de H. En este cociente dos tipos de productos aparecen, a saber $\langle e_i, \chi_{(1,\infty)}\rangle$ y $\langle e_i, e_j\rangle$. La función A interviene en el segundo de ellos mediante la fórmula

$$\langle e_i, e_j\rangle = \frac{1}{i}A(\frac{j}{i}) = \frac{1}{j}A(\frac{i}{j}).$$

Concluimos que si se desea estimar d_n mediante el cociente dado lineas arriba resulta necesario profundizar el conocimiento de la función A **[Duarte et al., 2005]**.

BIBLIOGRAFÍA

[Ahlfors, 1978] Ahlfors, L. V. (1978). *Complex analysis*. McGraw-Hill Book Co., New York, third edition. An introduction to the theory of analytic functions of one complex variable, International Series in Pure and Applied Mathematics.

[Amar and Mathéron, 2004] Amar, É. and Mathéron, É. (2004). *Analyse Complexe*. NN, Paris, premiere edition.

[Apostol, 1974] Apostol, T. (1974). *Mathematical analysis*. Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Philippines, second edition.

[Bachman, 2000] Bachman, G. (2000). *Functional analysis*. Dover Publications, Inc., 31 East 2nd Street, Mineola, N.Y. 11501, second edition.

[Baez Duarte, 2002] Baez Duarte, L. (2002). A strengthening of the nyman-beurling criterion for the riemann hypothesis.

[Balazard, 2006] Balazard, M. (2006). Sur les dilatation entières de la fonction partie fractionnaire.

[Baltzersen, 2007] Baltzersen, J. (2007). *Hardys theorem and the prime number theorem*.

[Bartle, 1995] Bartle, R. G. (1995). *The elements of integration and Lebesgue measure*. Wiley-Interscience, first edition.

[Beurling, 1955] Beurling, A. (1955). A closure problem related to the Riemann zeta-function. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 41:312–314.

[Björk, 2000] Björk, J. E. (2000). Lectures in analysis for ph.d-students. pages 12–16. www.math.kth.se/ oaf/kvantumkurs.pdf.

[de Figueiredo, 1987] de Figueiredo, D. G. (1987). *Análise de Fourier e equações diferenciais parciais*. Brasilia, segunda edition.

[de Roton, 2003] de Roton, A. (2003). *Généralisation du critère de Beurling-Nyman à la classe de Selberg.*

[Duarte et al., 2000] Duarte, B., Balazard, M., Saias, E., and Landreau, B. (2000). Notes sur la fonction zeta de riemann 3. *Advances in Mathematics*, 149:130–144(15).

[Duarte et al., 2005] Duarte, B., Balazard, M., Saias, E., and Landreau, B. (2005). Étude de l'autocorrélation multiplicative de la fonction 'partie fractionnaire'. *The Ramanujan journal*, 9:215–240.

[Dugundji, 1965] Dugundji, J. (1965). *Topology.* Prentice Hall., Boston, first edition.

[Halmos, 1960] Halmos, P. R. (1960). *Naive set theory.* Springer., New York, first edition.

[Halmos, 1978] Halmos, P. R. (1978). *Measure theory.* Springer-Verlag New York Inc., New York, first edition.

[Hille, 1962] Hille, E. (1962). *Analytic function theory. Vol. II.* Ginn and Company., New York, second edition.

[Hoffman and Kunze, 1971] Hoffman, K. and Kunze, R. (1971). *Linear algebra.* Prentice Hall., Englewood Cliffs, second edition.

[Jousse, 2005] Jousse, N. (2005). Étude d'un problème de continuité lié à l'hypothèse de Riemann. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 55(4):1373–1410.

[Lages Lima, 2008] Lages Lima, E. (2008). *Curso de análise volume 2.* IMPA, Rio de Janeiro, décima edition.

[Lages Lima, 2010] Lages Lima, E. (2010). *Curso de análise volume 1.* IMPA, Rio de Janeiro, décima segunda edition.

[Lang, 1999] Lang, S. (1999). *Complex analysis.* Springer., New York, fourth edition.

[Levin, 1996] Levin, B. Y. (1996). *Lectures on entire functions*, volume 150 of *Translations of Mathematical Monographs.* American Mathematical Society, Providence, RI. In collaboration with and with a preface by Yu. Lyubarskii, M. Sodin and V. Tkachenko, Translated from the Russian manuscript by Tkachenko.

[Noguchi, 1988] Noguchi, J. (1988). *Introduction to Complex Analysis.* American Mathematical Society, first edition.

[Pontriaguin, 1978] Pontriaguin, L. S. (1978). *Grupos continuos.* Editorial Mir, Moscú.

[Remmert, 1991] Remmert, R. (1991). *Theory of Complex Functions.* Springer-Verlag New York Inc., New York, second edition.

[Rudin, 1987] Rudin, W. (1987). *Real and complex analysis*. McGraw-Hill Book Co., New York, third edition.

[Rudin, 1990] Rudin, W. (1990). *Fourier analysis on groups*. Wiley Classics Library. John Wiley & Sons Inc., New York. Reprint of the 1962 original, A Wiley-Interscience Publication.

[Schwartz, 1979] Schwartz, L. (1979). *Analyse hilbertienne*. Hermann, Paris.

[Titchmarsh, 1986] Titchmarsh, E. (1986). *The Theory of The Riemann Zeta-Function*. Oxford Univertity Press, New York, second edition.