

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

Facultad de Ciencias

Escuela Profesional de Física



Análisis numérico del movimiento de un caso particular del problema restringido de los tres cuerpos.

INFORME DE SUFICIENCIA

PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE

LICENCIADO EN FÍSICA

Presentado por:

AQUILES ARAUCO BENAVIDES

LIMA – PERÚ

2009

Dedicado a.

Mi Padre.

Domingo Arauco A.

II

Agradecimientos.

Agradezco a mi asesor Magister Edgard Vidalón, por ofrecerme el tema, por su permanente orientación, ayuda y apoyo al desarrollo del presente informe.

Asimismo a mi conyugue y compañera Martha López, por su apoyo y comprensión.

IV

Índice.

Introducción	1
1.- Ecuaciones del Movimiento del problema restringido de los tres cuerpos.	3
2.- Caso particular del problema restringido de los tres cuerpos.	5
3.- Ecuación diferencial ordinaria del movimiento adimensional.	7
3.1.- Magnitudes adimensionales.	7
3.2.- Energía de Jacobi.	9
4.- Solución numérica de las ecuaciones diferenciales ordinarias del movimiento.	10
5.- Resultados.	12
5.1.- Caso Sol-Júpiter.	12
5.2.- Caso Sol-Tierra.	22
6.- Observaciones y Conclusiones.	34
6.1.- Observaciones.	34
6.2.-Conclusiones.	34
Apéndice 1. 'Lagrangiano' del caso particular del problema analizado	35
Apéndice 2. Programa Aquilesorbitasfase-v2	37
Bibliografía.	43

Introducción.

El objeto del presente trabajo es analizar numéricamente un caso particular del problema restringido de los tres cuerpos, aplicado al sistema Sol-Júpiter-asteroides (Troyanos); Sol-Tierra-asteroides.

Recordemos que el problema de los tres cuerpos consiste en estudiar un sistema aislado formado por tres partículas sometido a sus fuerzas gravitatorias

El matemático y físico Joseph Louis Lagrange, estudio el problema de los tres cuerpos y determinó que para tres cuerpos de masa M_1 , M_2 , M_3 se pueden encontrar configuraciones orbitales estables para ciertas condiciones iniciales y posiciones determinadas. Estas condiciones son:

- La masa M_1 sea igual o 25 veces mayor que la masa M_2 .
- La masa M_3 sea mucho menor que las masa M_1 y M_2 .
- Las trayectorias estarán en un mismo plano.

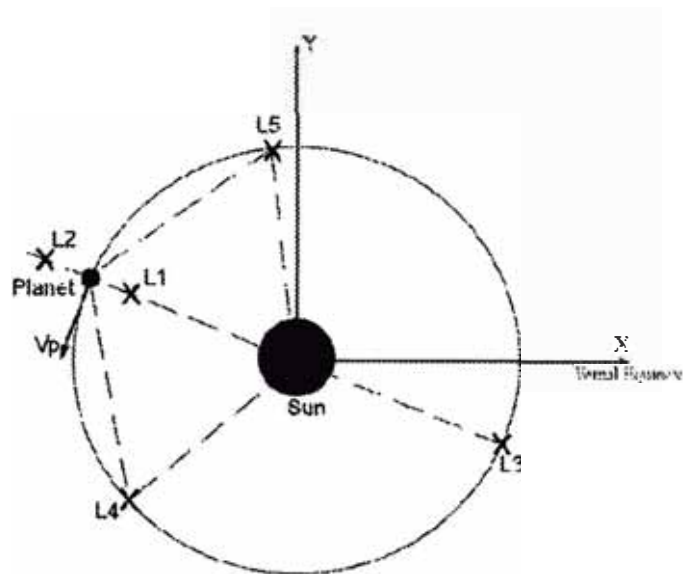


Fig. 1 puntos de Lagrange para el problema restringido de los tres cuerpos.

Lagrange determinó una solución particular donde la masa M_3 tiene puntos de equilibrio, con respecto a un sistema de referencia no inercial, de tal modo que el eje X pasa por los cuerpos de masa M_1 y M_2 . A estos puntos le llamo "Puntos de Liberación". También son conocidos como puntos de Lagrange L_1 , L_2 , L_3 , L_4 , y L_5 ; ver [10].

En el ejemplo de la fig.1 M_1 es el Sol, M_2 un planeta y en L_4 o L_5 podría estar un asteroide o un satélite artificial de masa M_3 .

Se demuestra que solo los puntos L_4 y L_5 proporcionan la suficiente estabilidad para mantener un cuerpo, un tiempo suficientemente largo.(relativamente).

En nuestro sistema solar, algunos planetas cumplen estas condiciones, como el caso Sol-Júpiter, en este caso los puntos L_1 , L_2 , y L_3 se encuentran en la recta que une el Sol con Júpiter; los puntos L_4 y L_5 están en los vértices de los triángulos equiláteros sobre la órbita de Júpiter, uno está adelantado 60° y el otro retrasado 60° .

Todos estos puntos son en realidad de equilibrio inestable o meta estable, siendo los de los vértices triangulares L_4 y L_5 los que muestran un mayor grado de estabilidad; lo cual no quiere decir que un asteroide ubicado en L_4 o L_5 permanecerá siempre en dicho punto, ya que su movimiento real es una oscilación alrededor de dicho punto de Lagrange; las observaciones astronómicas describen unas órbitas cerradas en forma de largas lágrimas achatadas y elípticas. Como se ve en la figura 2.

Para el caso de Sol-Júpiter, a los asteroides ubicados en los puntos L_4 y L_5 les denominan “Asteroides Troyanos”, ver [9].

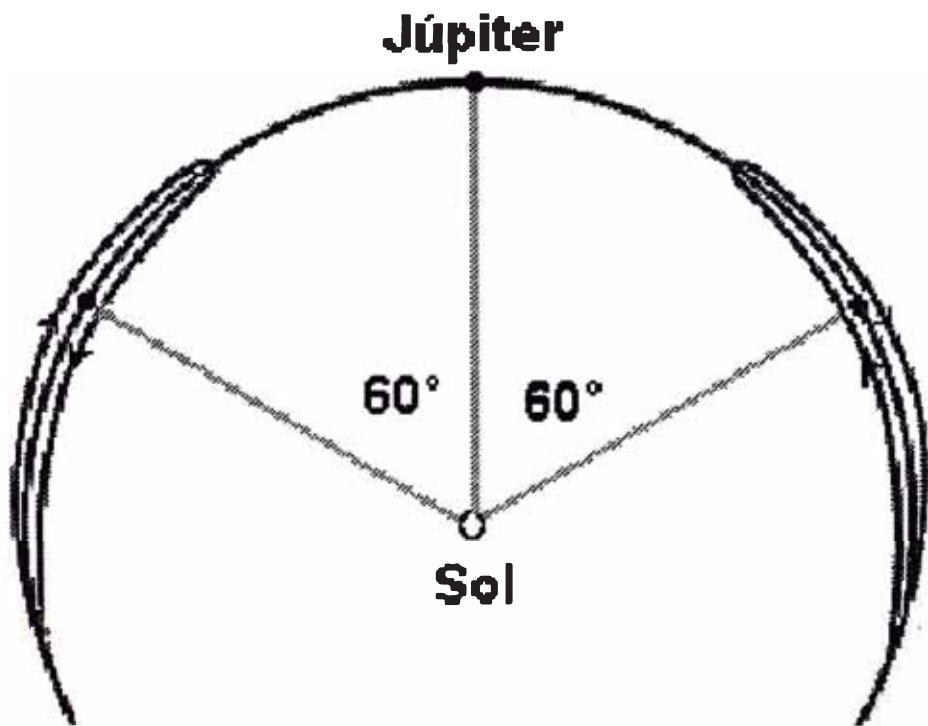


Fig. 2. Trayectoria observada de un asteroide troyano.

1.- Ecuaciones del movimiento del problema restringido de los tres cuerpos

Consideremos dos partículas A, B de masas M_1 y M_2 que describen circunferencias alrededor de su centro de masa, bajo la acción de su atracción gravitatoria mutua; y la tercera partícula C de masa m que se moverá en el campo gravitatorio de las partículas de masas M_1 y M_2 , la masa m es muy pequeña comparada con las otras masa de tal modo que la contribución de m al movimiento de las partículas A y B es despreciable. La trayectoria circular es con respecto al sistema de referencia inercial $X_I Y_I Z_I$ con origen en el centro de masa de las dos partículas A y B. pero para analizar mejor el movimiento de la partícula de masa m se considera un sistema de referencia no inercial XYZ con origen en el centro de masa tal que el eje X pase por las partículas A, B; como es evidente el sistema de referencia no inercial esta rotando con respecto al sistema de referencia inercial con velocidad angular ω_o .

ω_o está relacionado con las masa M_1, M_2 mediante la ecuación

$$\omega_o^2 = \frac{G(M_1 + M_2)}{a^3}. \quad (1)$$

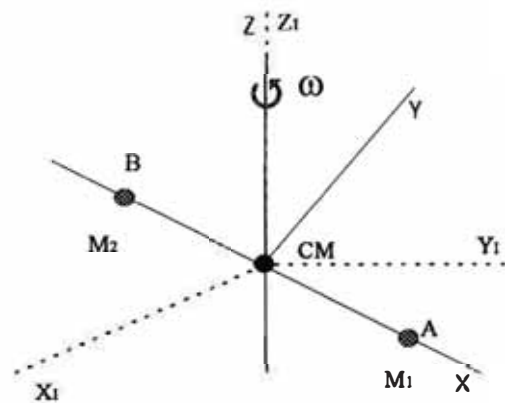


Fig. 3. Sistemas de referencia inercial $X_I Y_I Z_I$ y no inercial XYZ.

Donde a es la distancia entre las partículas A y B

Recordemos que existen dos bases de vectores

$$B_I = \{\hat{i}_I, \hat{j}_I, \hat{k}_I\}$$

$$B = \{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$$

Correspondientes a los dos sistemas de coordenadas $X_I Y_I Z_I$, y XYZ respectivamente

La velocidad angular $\vec{\omega}$ se expresa como $\vec{\omega} = \omega_0 \vec{k}_I$. (2)

También es evidente que los vectores velocidad angular y el vector posición correspondiente al punto P se puede expresar en la base B de la forma:

$$\vec{\omega} = \omega_0 \hat{k}, \quad (3)$$

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}. \quad (4)$$

La relación entre la velocidad, aceleración; medidas por un observador del sistema de referencia no inercial y la velocidad angular, esta dado por:

$$\vec{a} = \vec{a}_I - 2\vec{\omega} \times \vec{v} - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{v}). \quad (5)$$

Pero

$$\vec{a}_I = \frac{\vec{F}}{m}, \quad (6)$$

donde F es la fuerza total sobre la tercera partícula, luego de (5) y (6) tenemos,

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} - 2\vec{\omega} \times \vec{v} - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}), \quad (7)$$

que es la ecuación fundamental de la dinámica para la partícula de masa m en el sistema no inercial.

2.- Caso particular del problema restringido de tres cuerpos.

Consideremos el caso particular donde la partícula A tiene una masa mucho mayor que la partícula B, de tal modo que la partícula A este en el origen de coordenadas para todo instante. Además se supone que los movimientos están contenidos en un plano. Un ejemplo de este caso particular, es el sistema Sol-Tierra con un asteroide o satélite como tercera partícula de masa m .

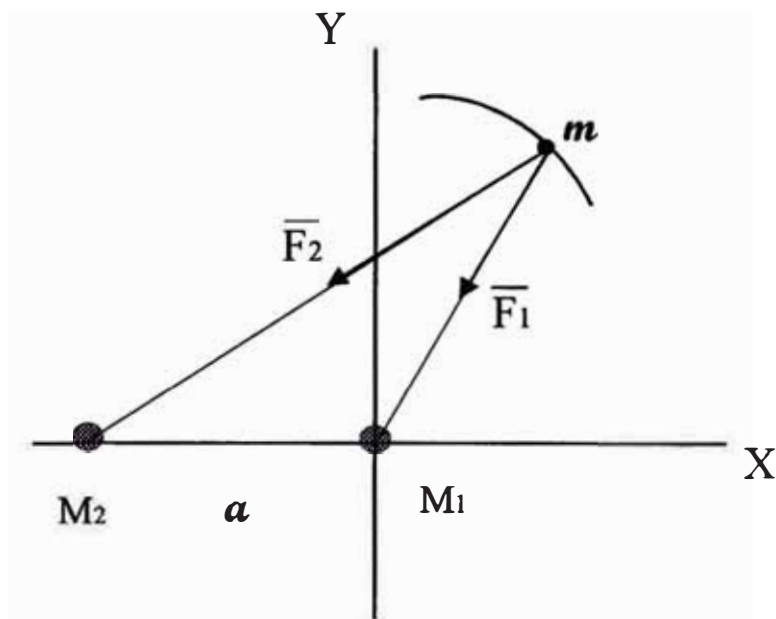


Fig. 4. Movimiento de una partícula de masa m para el caso particular del problema restringido de los tres cuerpos.

Luego la trayectoria de la partícula B será una circunferencia con centro en el origen de coordenadas. Con esta hipótesis el objetivo de hallar la trayectoria de la partícula de masa m , será más fácil de analizar usando el sistema de referencia no inercial, donde: la fuerza total sobre m se debe a las partículas A y B, luego de (7) tenemos,

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_1}{m} + \frac{\vec{F}_2}{m} - 2\vec{\omega} \times \vec{v} - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \quad (8)$$

Efectuando los productos vectoriales,

$$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = -\omega_0^2 (x\hat{i} + y\hat{j}), \quad (9)$$

$$2\vec{\omega} \times \vec{v} = 2\omega_0 \left(\frac{dx}{dt} \hat{i} - \frac{dy}{dt} \hat{j} \right) \quad (10)$$

Y reemplazando estos resultados en la ecuación (8) se obtiene.

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\frac{M_1 G (x\hat{i} + y\hat{j})}{(x^2 + y^2)^{3/2}} - \frac{M_2 G ((x-a)\hat{i} + y\hat{j})}{((x-a)^2 + y^2)^{3/2}} + \omega_0^2 (x\hat{i} + y\hat{j}) + 2\omega_0 \left(\frac{dx}{dt} \hat{i} - \frac{dy}{dt} \hat{j} \right), \quad (11)$$

De donde

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{M_1 G x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} - \frac{M_2 G (x-a)}{((x-a)^2 + y^2)^{3/2}} + \omega_0^2 x + 2\omega_0 \frac{dx}{dt}, \quad (12)$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -\frac{M_1 G y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} - \frac{M_2 G y}{((x-a)^2 + y^2)^{3/2}} + \omega_0^2 y - 2\omega_0 \frac{dy}{dt}. \quad (13)$$

Pero
$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}. \quad (14)$$

Luego (12) y (13) se transforman en:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{M_1 G x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} - \frac{M_2 G (x-a)}{((x-a)^2 + y^2)^{3/2}} + \frac{4\pi^2}{T^2} x + \frac{4\pi}{T} \frac{dx}{dt}, \quad (15)$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -\frac{M_1 G y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} - \frac{M_2 G y}{((x-a)^2 + y^2)^{3/2}} + \frac{4\pi^2}{T^2} y - \frac{4\pi}{T} \frac{dy}{dt}. \quad (16)$$

Estas son las ecuaciones que deben resolverse para obtener la trayectoria de la partícula de masa m . observamos que son no lineales y acopladas; es imposible resolverlas analíticamente.

3.- Ecuación diferencial ordinaria del movimiento adimensional.

3.1.- Magnitudes adimensionales.

Para facilitar la solución Introduciremos magnitudes adimensionales; y le llamaremos D a la distancia entre las partículas A y B.

$$x^* = \frac{x}{D}, \quad (17)$$

$$y^* = \frac{y}{D}, \quad (18)$$

$$a^* = \frac{a}{D}, \quad (19)$$

$$r^* = \frac{r}{D}, \quad (20)$$

$$T^* = \frac{T}{\tau}, \quad (21)$$

$$M_1^* = \frac{M_1}{M_{Ref.}}, \quad (22)$$

$$M_2^* = \frac{M_2}{M_{Ref.}} \quad (23)$$

$M_{Ref.}$ es la masa de referencia, τ el tiempo de referencia; y el vector posición de la partícula m será.

$$r^* = \sqrt{x^{*2} + y^{*2}}, \quad (24)$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{Ddx^*}{\tau dt^*}, \quad (25)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{Ddy^*}{\tau dt^*}, \quad (26)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{D^2 d^2 x^*}{\tau^2 dt^{*2}}, \quad (27)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{D^2 d^2 y^*}{\tau^2 dt^{*2}}. \quad (28)$$

Tomaremos $M_{Ref.} = M_{Sol}$ (29)

Usando estas magnitudes adimensionales las ecuaciones diferenciales (15) y (16) se transforman en:

$$\frac{d^2 x^*}{dt^{*2}} = -K \left[\frac{M_1 x^*}{d(P,A)^{*3}} + \frac{M_2 (x^* - a^*)}{d(P,B)^{*3}} \right] + \frac{4\pi^2}{T^{*2}} x^* + \frac{4\pi}{T^*} \frac{dy^*}{dt^*}, \quad (30)$$

$$\frac{d^2 y^*}{dt^{*2}} = -K \left[\frac{M_1 y^*}{d(P,A)^{*3}} + \frac{M_2 y^*}{d(P,B)^{*3}} \right] + \frac{4\pi^2}{T^{*2}} y^* - \frac{4\pi}{T^*} \frac{dx^*}{dt^*}. \quad (31)$$

Donde $d(P,A)^{*3} \equiv (x^{*2} + y^{*2})^{3/2}$, (32)

$$d(P,B)^{*3} \equiv ((x^* - a^*)^2 + y^{*2})^{3/2}, \quad (33)$$

$$K \equiv \frac{M_{Sol} G \tau^3}{D^3}. \quad (34)$$

Si se dan los siguientes valores

$$D = 1 \text{ U. A.} \quad (35)$$

$$M_{Sol} = 1.9891 \times 10^{30} \text{ kg.} \quad (36)$$

$$\tau = 1 \text{ año.} \quad (37)$$

Entonces $K = 39.$ (38)

3.2.- Energía de Jacobi.

Se demuestra que la siguiente magnitud física llamada energía de Jacobi se conserva, ver [04].

$$E_{J.} = \frac{m}{2} \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 \right] + \phi_{eff}, \quad (39)$$

Donde el potencial efectivo ϕ_{eff} esta dado por

$$\phi_{eff} = -\frac{GM_1 m}{(x^2 + y^2)^{1/2}} - \frac{GM_2 m}{((x-a)^2 + y^2)^{1/2}} - \frac{\omega_0^2 m}{2} (x^2 + y^2). \quad (40)$$

Esta propiedad es útil para comprobar los cálculos realizados cuando se resuelvan numéricamente las ecuaciones diferenciales.

Usando las magnitudes adimensionales y las definiciones (32) y (33) la energía de Jacobi se expresa.

$$E_j = \frac{mD^2}{\tau^2} \left\{ \frac{1}{2} \left[\left(\frac{dx^*}{dt^*} \right)^2 + \left(\frac{dy^*}{dt^*} \right)^2 \right] - \frac{GM_{ref} M_i \tau^2}{D^3 d(P,A)^*} - \frac{GM_{ref} M_j \tau^2}{D^3 d(P,B)^*} - \frac{2\pi^2 (x^{*2} + y^{*2})}{T^{*2}} \right\} \quad (41)$$

Llamaremos energía de Jacobi adimensional a la siguiente constante del movimiento.

$$E_j^* = \left\{ \frac{1}{2} \left[\left(\frac{dx^*}{dt^*} \right)^2 + \left(\frac{dy^*}{dt^*} \right)^2 \right] - \frac{KM_i^*}{\sqrt{x^{*2} + y^{*2}}} - \frac{KM_j^*}{\sqrt{(x^* - a^*)^2 + y^{*2}}} - \frac{2\pi^2 (x^{*2} + y^{*2})}{T^{*2}} \right\}. \quad (42)$$

Es esta la magnitud que usaremos para comprobar que los resultados son consistentes.

4.- Solución numérica de las ecuaciones diferenciales ordinarias del movimiento.

Las ecuaciones diferenciales ordinarias adimensionales del movimiento del cuerpo “m” están dadas por (30) y (31); para resolver estas ecuaciones diferenciales las transformamos en un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden, realizando el siguiente cambio de variable. Ver [11] [7].

$$x^* \equiv x_1, \quad (43)$$

$$y^* \equiv x_2, \quad (44)$$

$$\dot{x}^* \equiv x_3, \quad (45)$$

$$\dot{y}^* \equiv x_4. \quad (46)$$

Con estas definiciones las ecuaciones diferenciales se transforman en cuatro ecuaciones diferenciales no lineales y acopladas.

$$x_3 = \frac{dx_1^*}{dt^*}, \quad (47)$$

$$x_4 = \frac{dx_2^*}{dt^*}, \quad (48)$$

$$\dot{x}_3 = \frac{dx_3}{dt^*} = -K \left[\frac{H^*_1 x^*}{d(P,A)^{*3}} + \frac{H^*_2 (x^* - a^*)}{d(P,B)^{*3}} \right] + \frac{4\pi^2 x^*}{T^{*2}} + \frac{4\pi \dot{y}^*}{T^*}, \quad (49)$$

$$\dot{x}_4 = \frac{dx_4}{dt^*} = -K \left[\frac{H^*_1 y^*}{d(P,A)^{*3}} + \frac{H^*_2 y^*}{d(P,B)^{*3}} \right] + \frac{4\pi^2 y^*}{T^{*2}} - \frac{4\pi \dot{y}^*}{T^*}. \quad (50)$$

El sistema adimensional de ecuaciones diferenciales de primer orden se resolvió numéricamente mediante el método de Runge-Kutta de cuarto orden, desarrollando un programa en Delphi Borland 7.0 con paso $h=0.001$. El programa se puede ‘correr’ para diferentes tiempos, y se grafica usando Origen 6.0; de esta manera se obtienen gráficamente las orbitas del tercer cuerpo de masa “m”. Usando las coordenadas de las velocidades halladas el programa también calcula la energía adimensional de Jacobi, graficando esta energía podremos asegurar que los cálculos son consistentes. (Los programas están en el apéndice 2).

5.- RESULTADOS.

El desarrollo del trabajo se ha aplicado a casos relacionados a los estudiados históricamente por los astrónomos, como son los asteroides Troyanos, cuyas orbitas son conocidas; lo cual nos servirá para comprobar los resultados obtenidos.

5.1.- Caso Sol-Júpiter.

Dado que la masa el sol (M_1) es de $1,9891 \times 10^{30}$ kg y la masa de Júpiter (M_2) es $1,899 \times 10^{27}$ kg. observamos que la masa Júpiter es 0.001 veces la masa del Sol. y el radio de la órbita de Júpiter es 5.2 U.A., luego podemos ubicar el Sol en el origen de coordenadas (ver fig. 5)

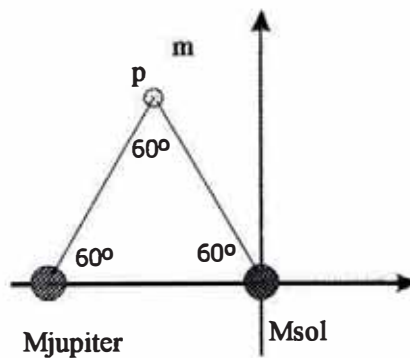


Fig.5.Movimiento de tres cuerpos restringido para el caso Sol-Júpiter-asteroide.

Por lo tanto. $M_1^* = 1,$ (51)

$M_2^* = 0.001,$ (52)

$d(\text{Sol}, \text{Júpiter}) = D,$ (53)

$D = 5.2 \text{ U.A.}$ (54)

$a^* = 5.2,$ (55)

$$T = 140 \text{ años}, \quad (56)$$

$$T^* = 140. \quad (57)$$

Las coordenadas de m estarán en un punto muy cercano al vértice P ver fig. 5. En esta simulación consideramos que el punto P está ubicado en la posición de r tal que:

$$r(0) = (-2.6, 4.5) \text{ U.A.} \quad (58)$$

En resumen las condiciones iniciales serán:

$$x^*(0) = -2.6, \quad y^*(0) = 4.5, \quad (59)$$

$$\dot{x}^*(0) = 0, \quad \dot{y}^*(0) = 0. \quad (60)$$

Las soluciones se han graficado con el paquete ORIGEN 6.0.

A continuación se muestran las más importantes gráficas para intervalos $[0, t_f]$, donde t_f tomara valores de 10, 50, 100, 150, 200, 300, 400, 380 y 1000 años (pags. 14 – 18). La energía adimensional de Jacobi vs. t^* (pg. 14); las órbitas, es decir x^* vs. y^* (pg 14-18); para $t=380$ años se muestra la órbita, x^* vs. t^* ; Además se muestran los gráficos de los momentos generalizados $p_x^*(t)$, $p_y^*(t)$ (pg. 20), el plano de fase p_x^* vs. x^* , p_y^* vs. y^* (pg. 21); mencionamos que en el apéndice 1 se discute el 'Lagrangiano' del sistema.

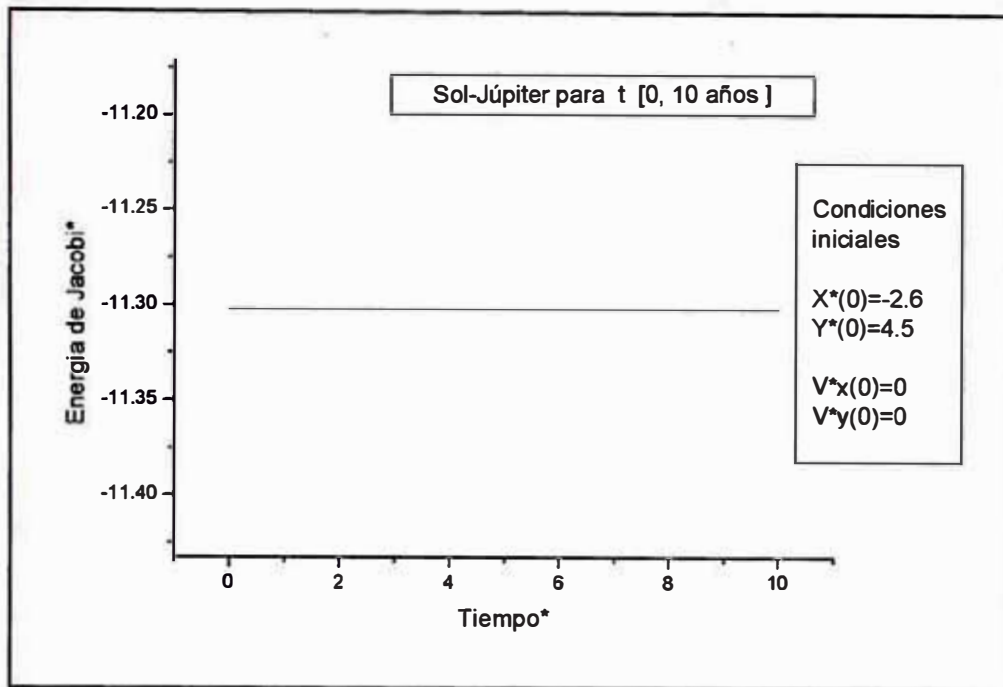


Fig. 6 Energía del asteroide en función del tiempo para el caso: Sol-Júpiter.

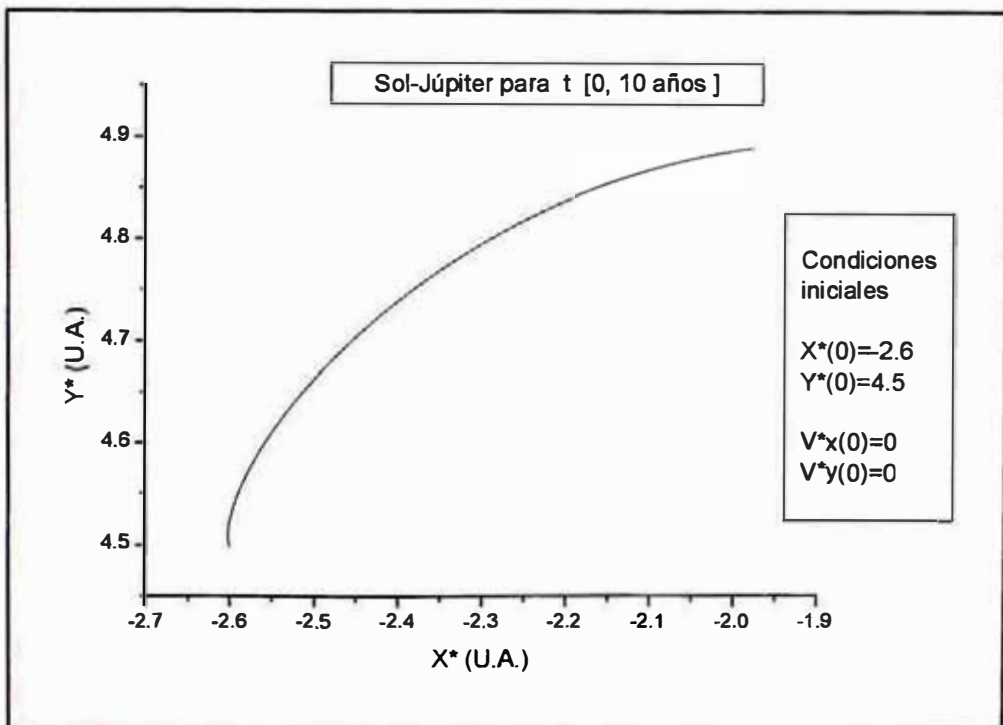


Fig.7 Trayectoria del asteroide para el caso: Sol-Júpiter, de 0 a 10 años.

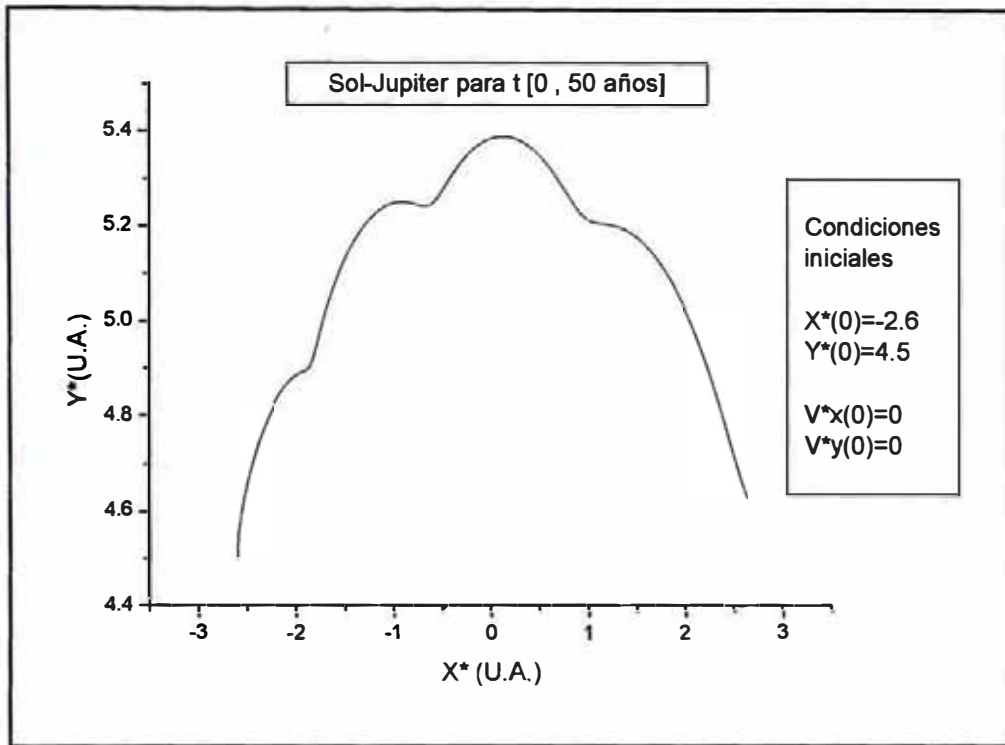


Fig. 8 Trayectoria del asteroide para el caso: Sol-Júpiter, de 0 a 50 años.

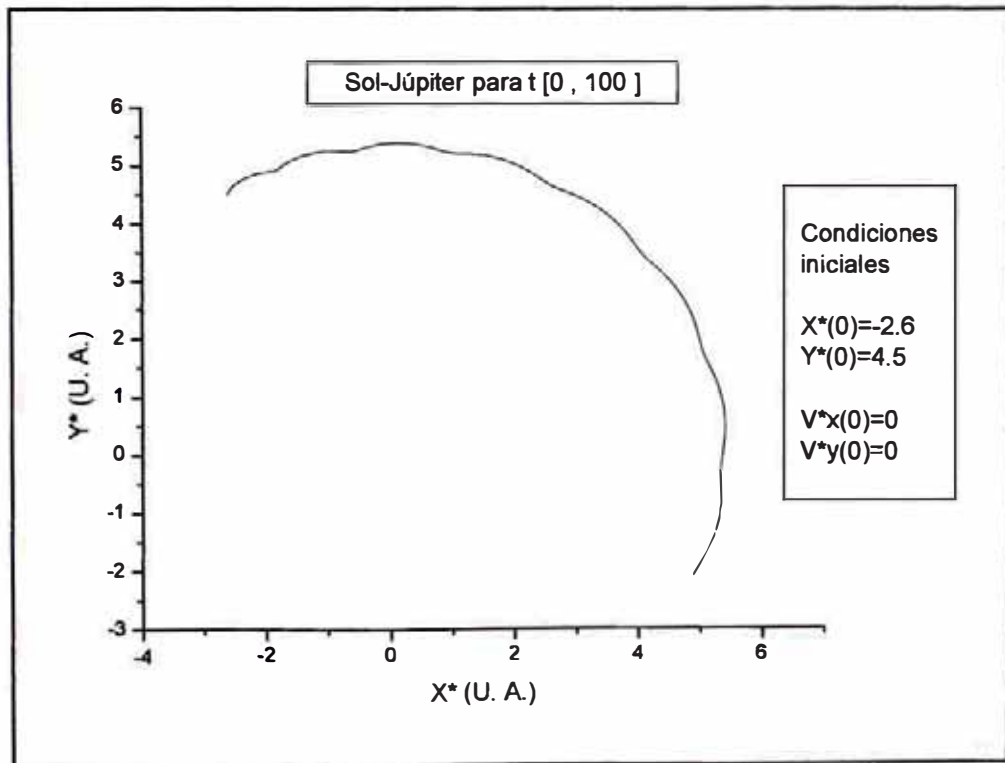


Fig. 9 Trayectoria del asteroide para el caso: Sol-Júpiter, de 0 a 100 años.

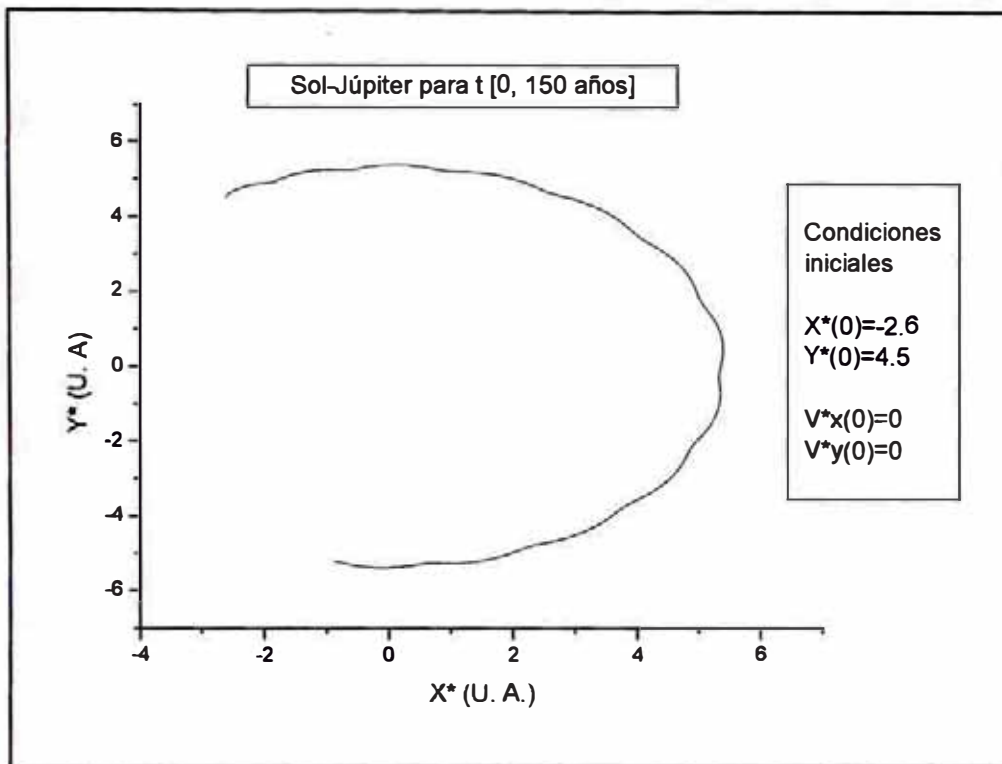


Fig.10 Trayectoria del asteroide para el caso: Sol-Júpiter, de 0 a 150 años.

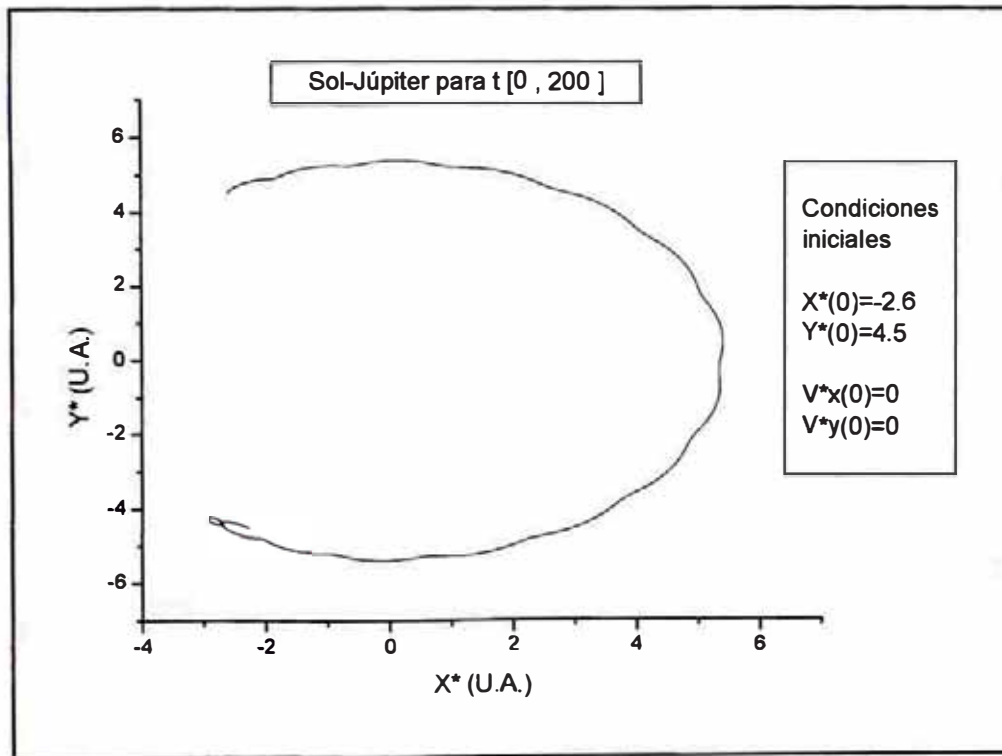


Fig. 11 Trayectoria del asteroide para el caso: Sol-Júpiter, de 0 a 200 años.

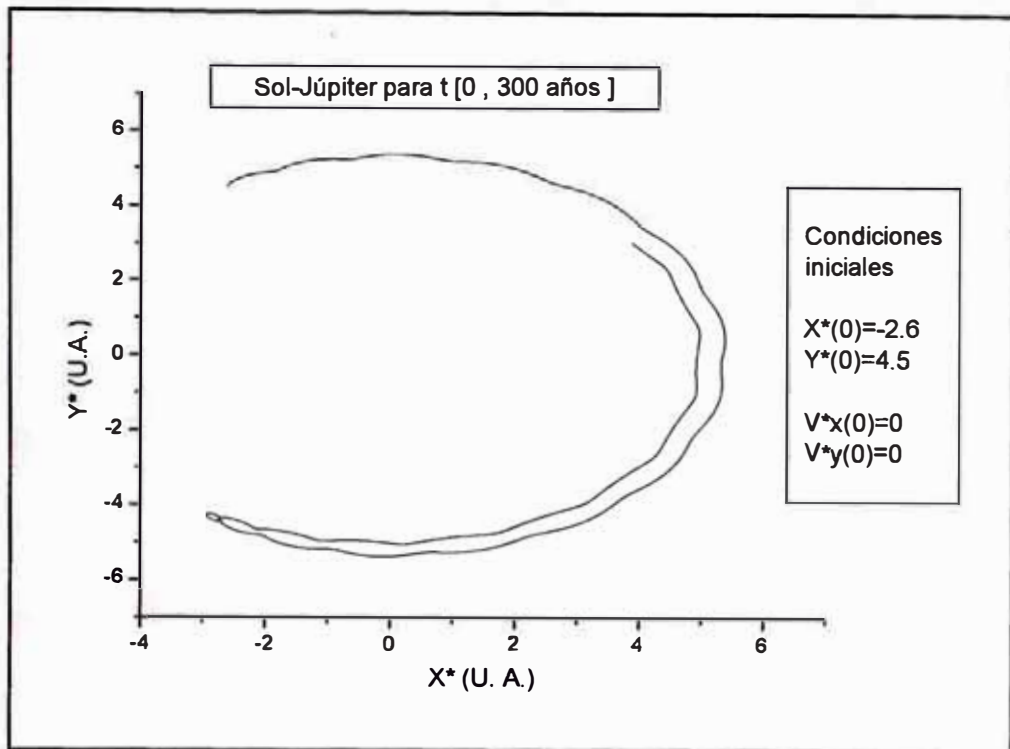


Fig.12 Trayectoria del asteroide para el caso: Sol-Júpiter, de 0 a 300 años.

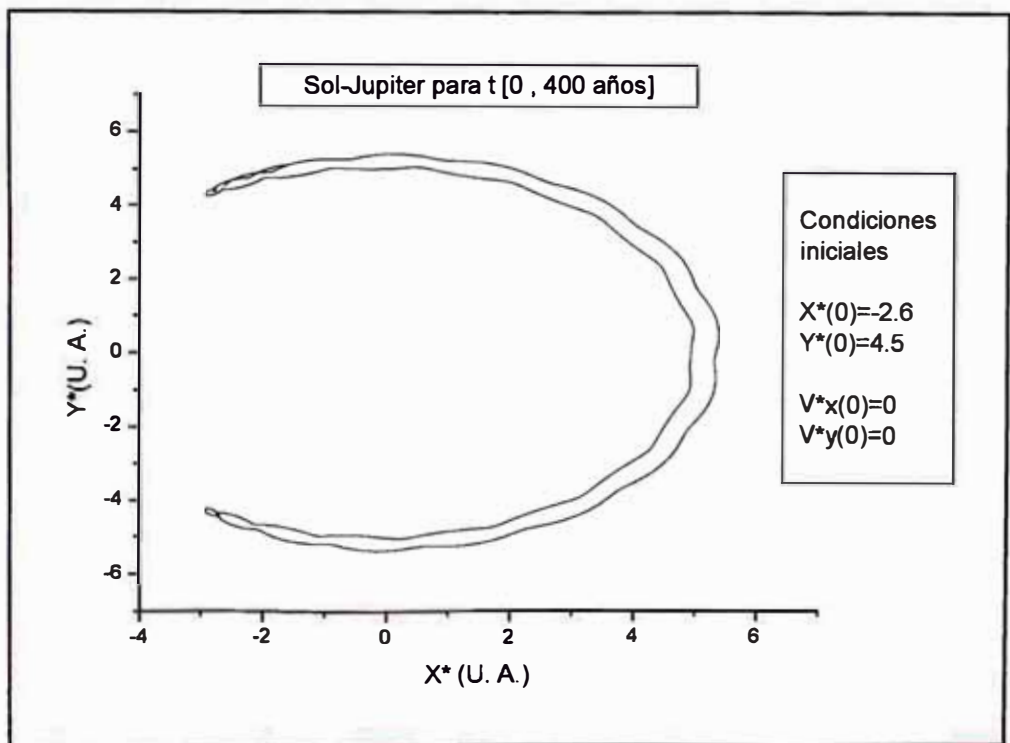


Fig.13 Trayectoria del asteroide para el caso: Sol-Júpiter, de 0 a 400 años.

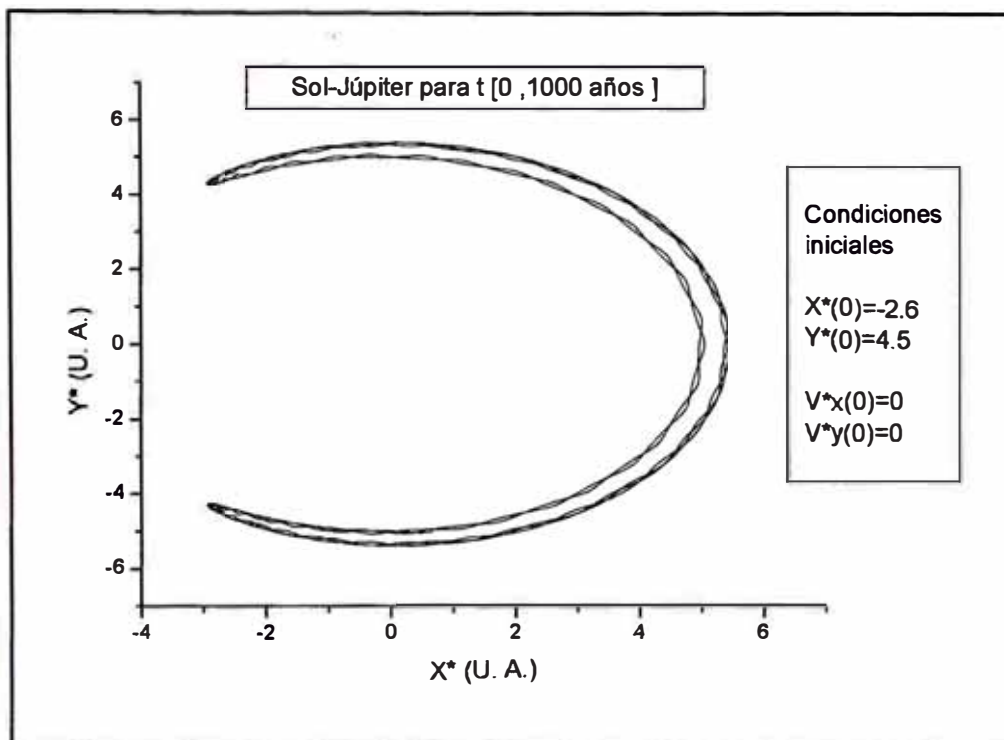


Fig. 14 Trayectoria del asteroide para el caso: Sol-Júpiter, de 0 a 1000 años.

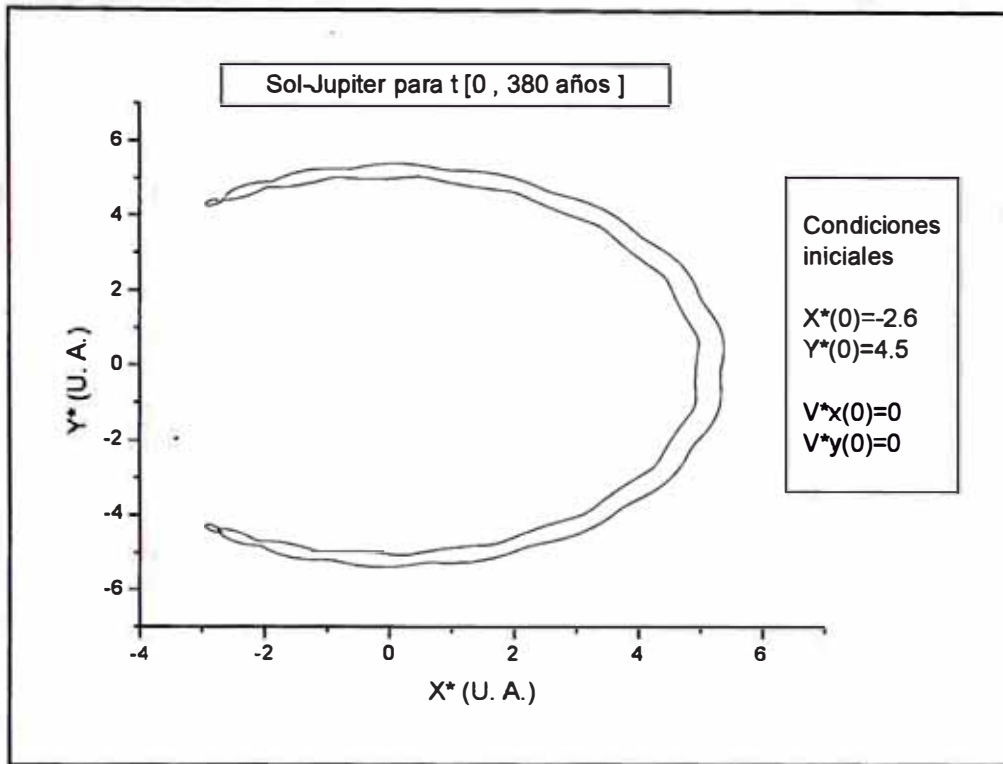


Fig. 15 Trayectoria del asteroide para el caso: Sol-Júpiter, de 0 a 380 años.

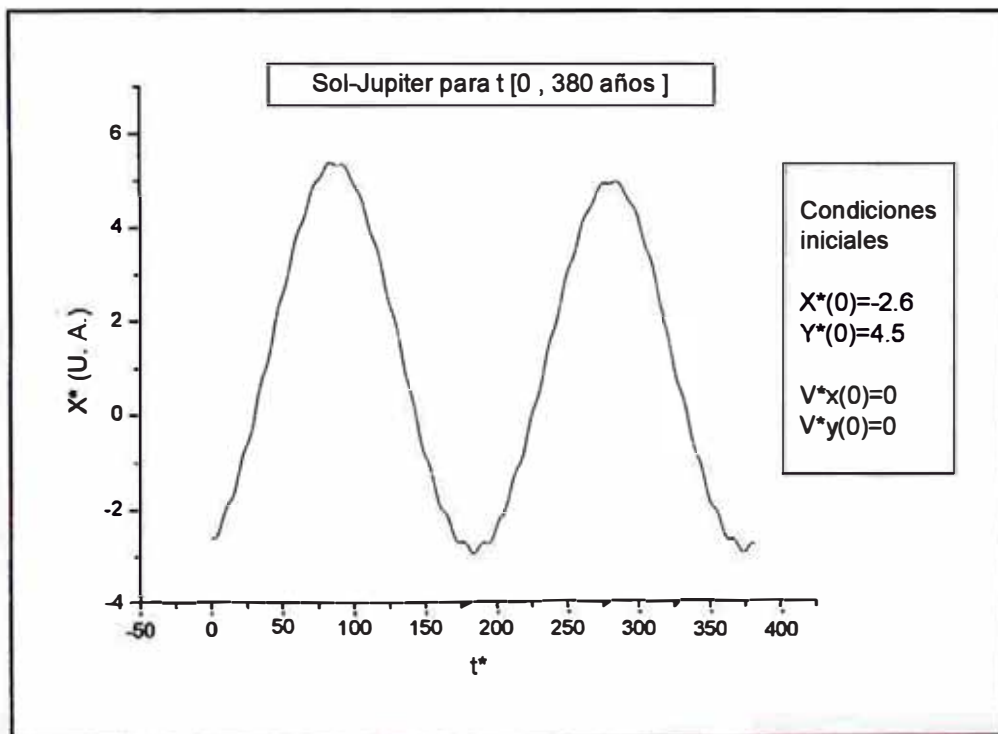


Fig. 16 x^* en función de t^* del asteroide para el caso: Sol-Júpiter, de 0 a 380 años.

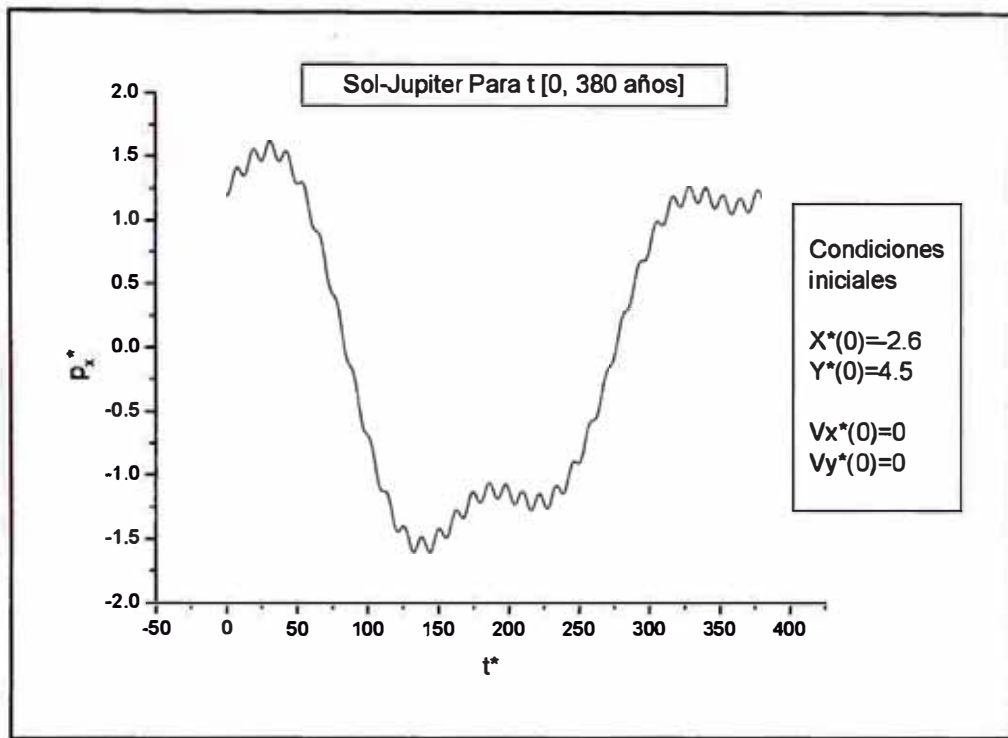


Fig. 17. Cantidad de movimiento p_x^* en función de t^* caso: Sol-Júpiter, de 0 a 380 años.

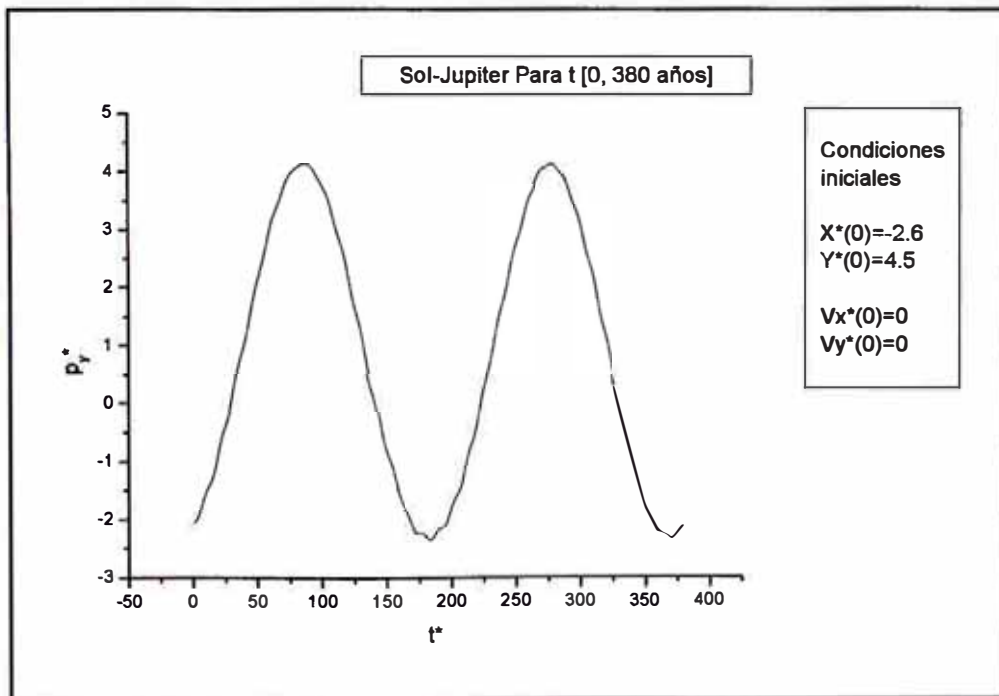


Fig. 18. Cantidad de movimiento p_y^* en función de t^* , caso: Sol-Júpiter, de 0 a 380 años.

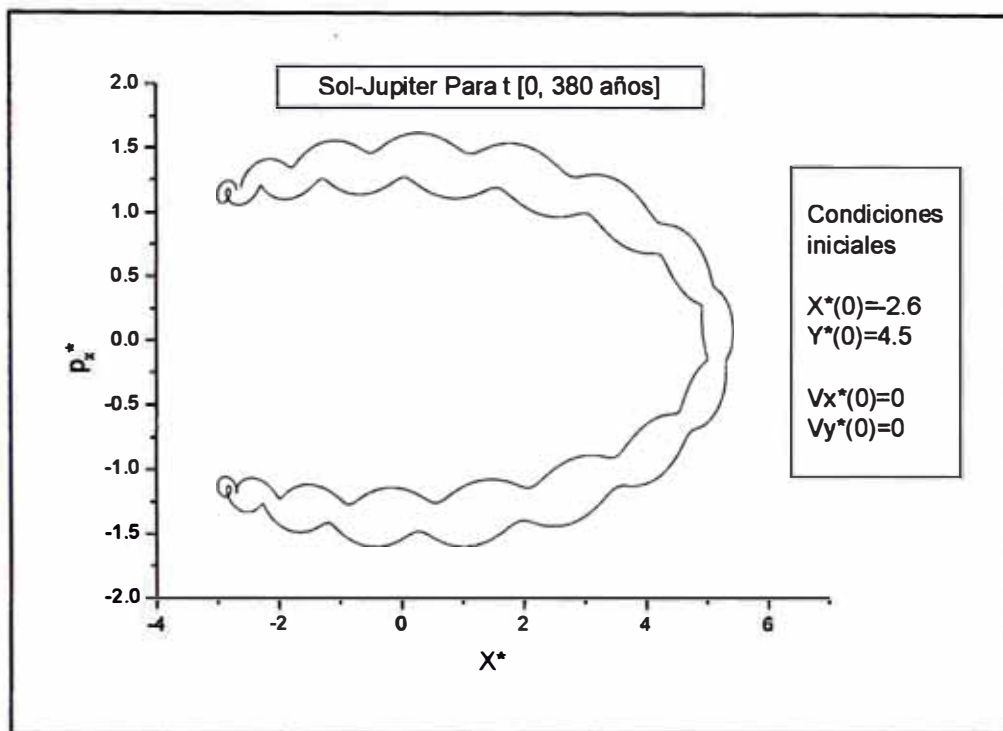


Fig. 19. Plano de fases p_x^* en función de X^* , caso: Sol-Júpiter, de 0 a 380 años.

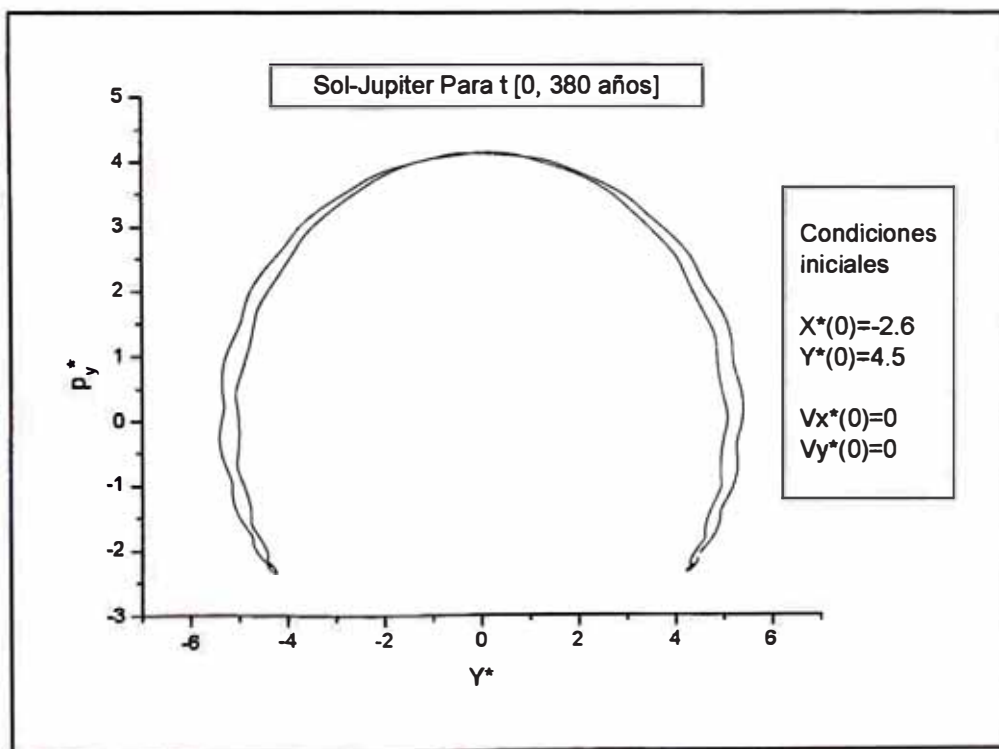


Fig. 20. Plano de fases p_y^* en función de Y^* , caso: Sol-Júpiter, de 0 a 380 años.

5.2.- Caso Sol-Tierra.

Ahora consideramos el caso Sol – Tierra – asteroide, para este caso también el asteroide estará en un punto muy cercano al vértice P, tomaremos.

$$\vec{r} = (-0.49, 0.866) \text{ U.A.} \quad (61)$$

Luego los valores adimensionales son:

$$M_1^* = 1, \quad (62)$$

$$M_2^* = 0.000003, \quad (63)$$

$$d(\text{Sol, Tierra}) = D, \quad (64)$$

$$D = 1 \text{ U.A.} \quad (65)$$

$$a^* = 1. \quad (66)$$

En resumen las condiciones iniciales serán:

$$x^*(0) = -0.49, \quad y^*(0) = 0.866, \quad (67)$$

$$\dot{x}^*(0) = 0, \quad \dot{y}^*(0) = 0. \quad (68)$$

A continuación se muestran las más importantes gráficas para intervalos $[0, t_f]$, donde t_f tomara valores de 20, 50, 100, 150, 200, 300 y 400 años (pgs. 23 a 26).

Y graficaremos con ORIGEN 6.0, la energía adimensional de Jacobi vs. el tiempo, (pg. 23); las órbitas, es decir x^* vs. y^* (pgs. 23 al 26); las posiciones x^* vs t^* ; (pg. 27); los momentums vs. t^* (pg. 28) y el espacio de fases (pg.29)

Además se considera otro caso cambiando las condiciones iniciales $x^*(0) = -0.48$, $y^*(0) = 0.8660254$, $V_x^*(0) = 0$, y $V_y^*(0) = 0$. Para 80 años, para este último caso se graficó los planos de fase p_x^* vs. x^* y p_y^* vs. y^* (pgs. 30 al 33).

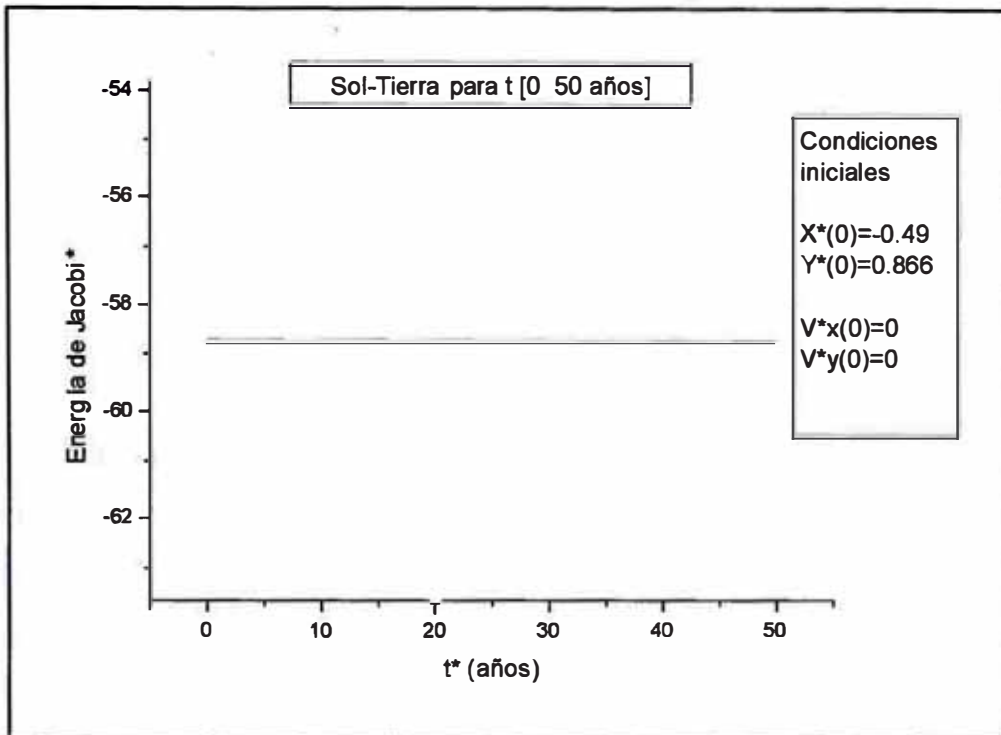


Fig. 21 Energía de Jacobi en función de t^* , caso: Sol-Tierra, de 0 a 50 años.

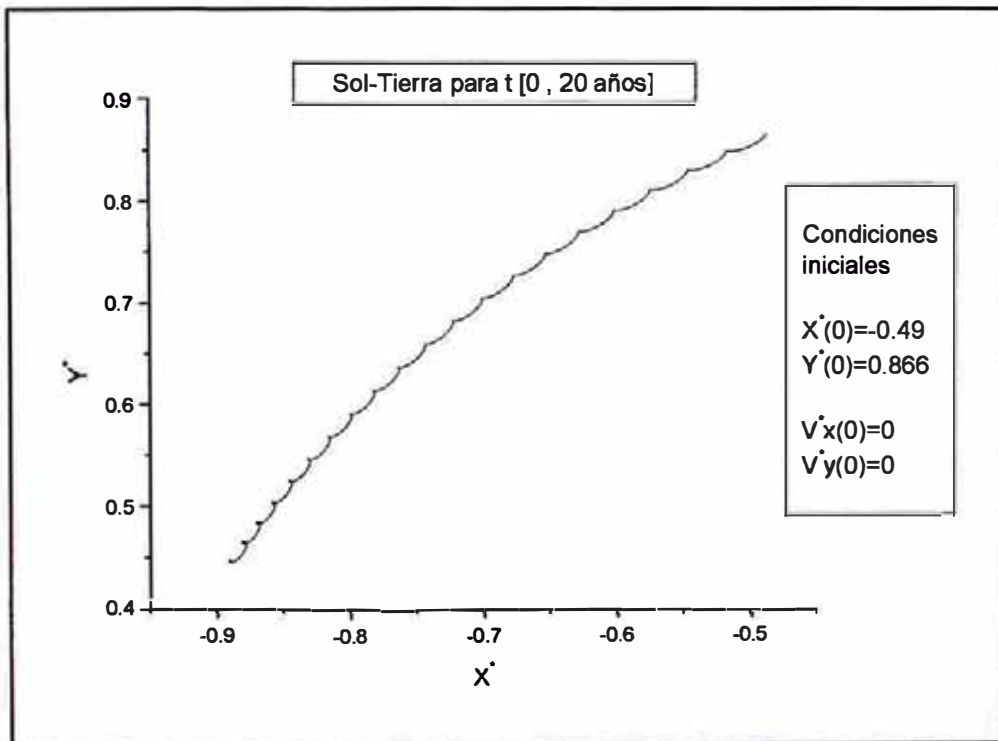


Fig. 22 Trayectoria del asteroide caso: Sol-Tierra, de 0 a 20 años.

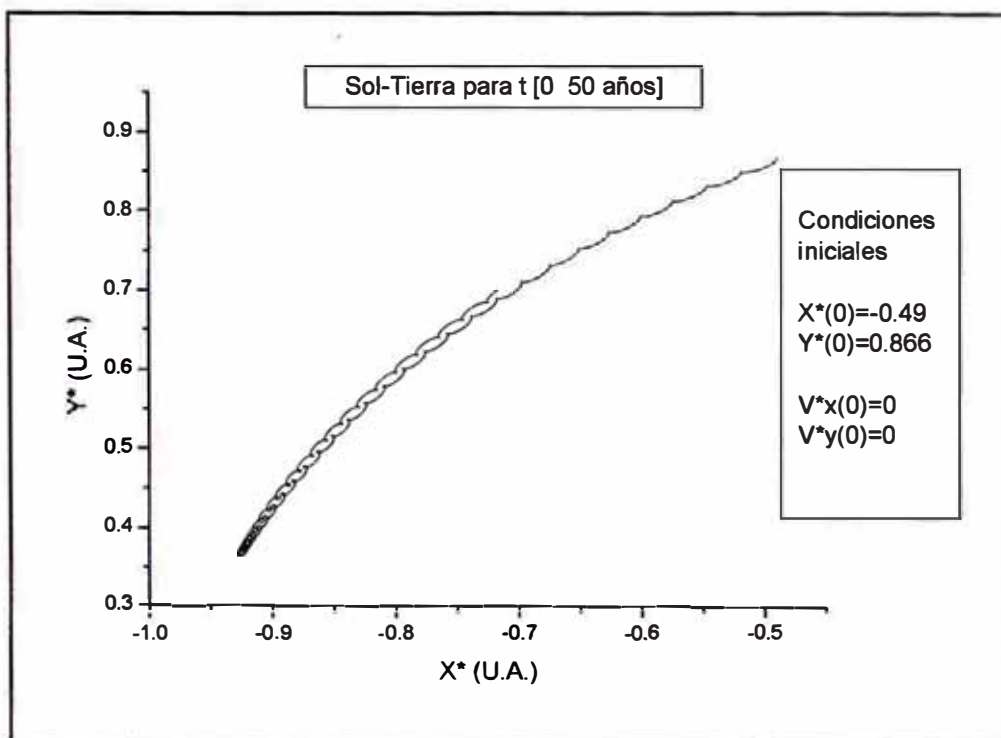


Fig. 23 Trayectoria del asteroide caso: Sol-Tierra, de 0 a 50 años.

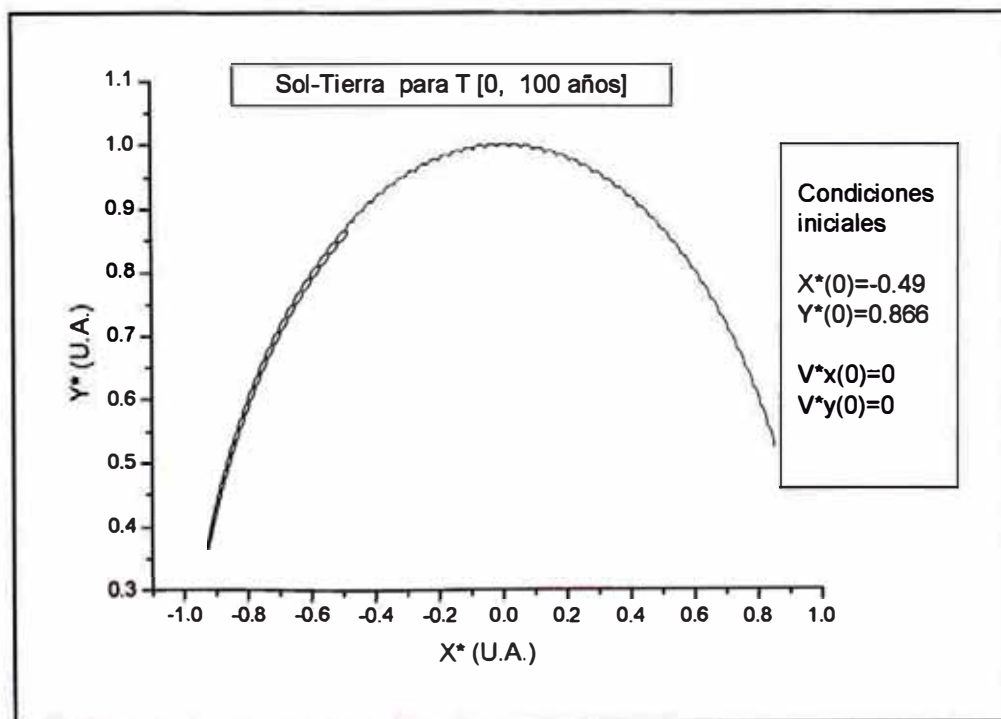


Fig. 24 Trayectoria del asteroide caso: Sol-Tierra, de 0 a 100 años.

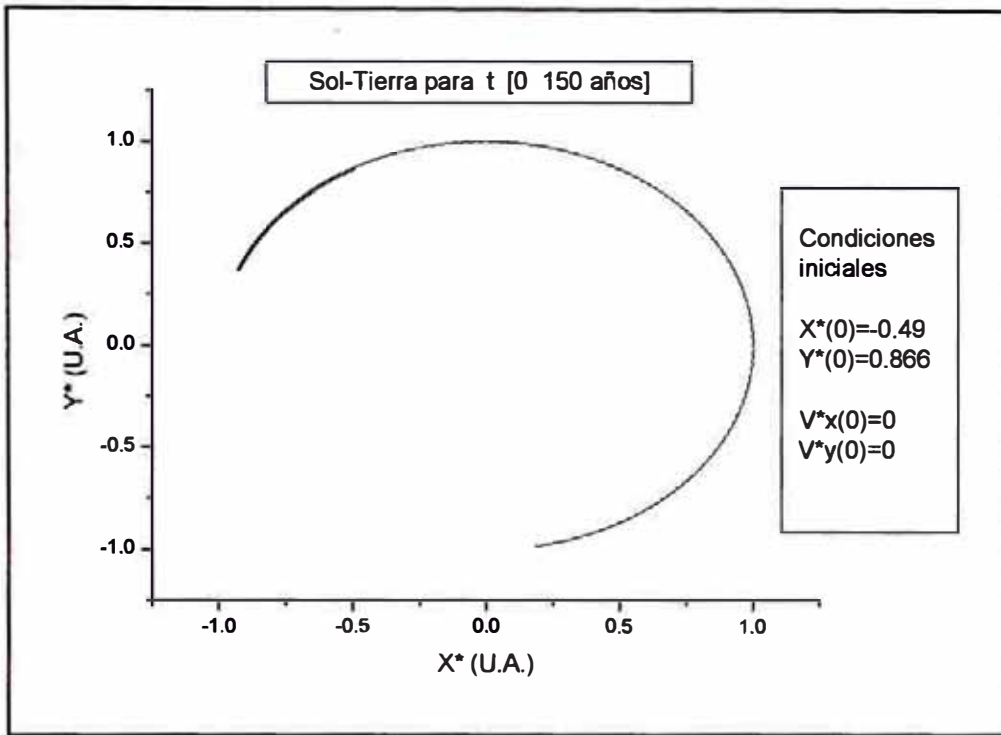


Fig. 25 Trayectoria del asteroide caso: Sol-Tierra, de 0 a 150 años.

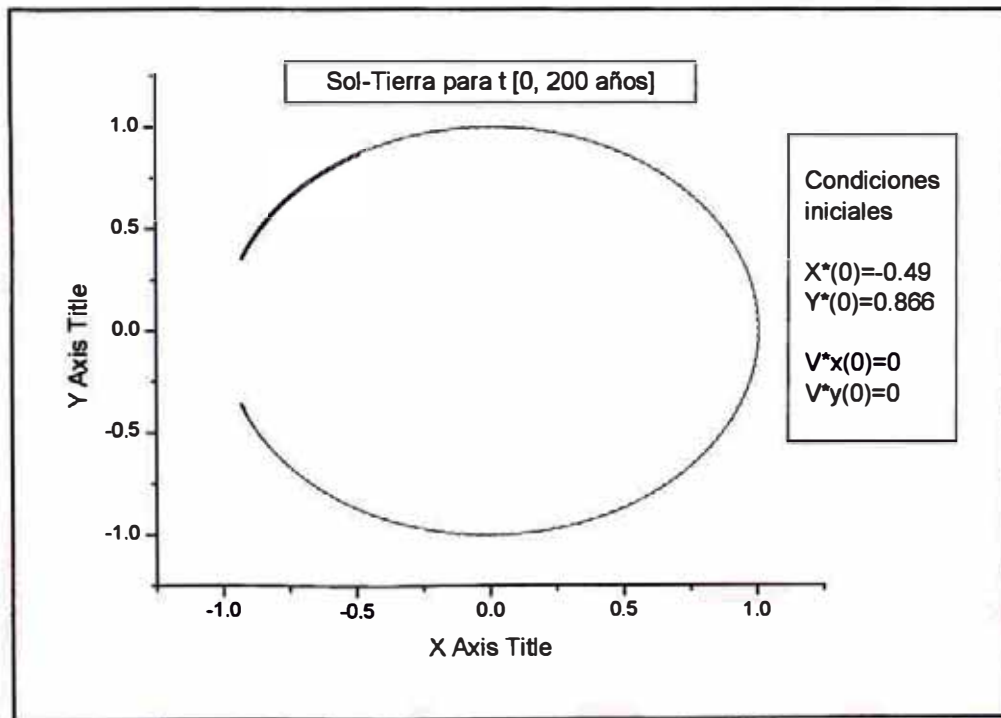


Fig. 26 Trayectoria del asteroide caso: Sol-Tierra, de 0 a 200 años.

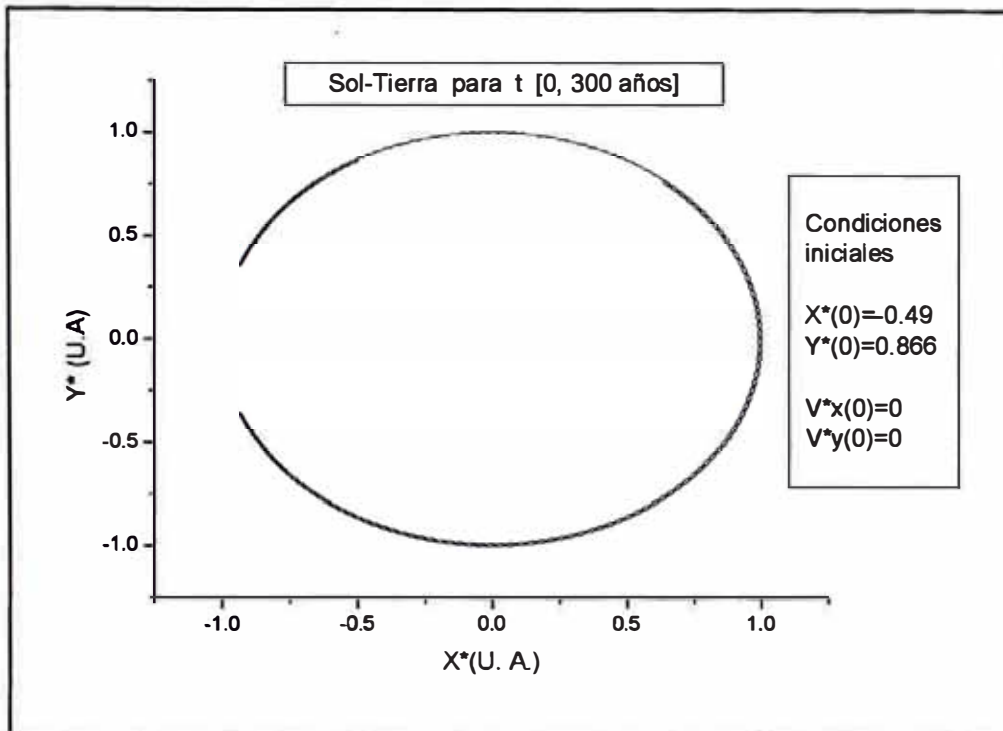


Fig. 27 Trayectoria del asteroide caso: Sol-Tierra, de 0 a 300 años.

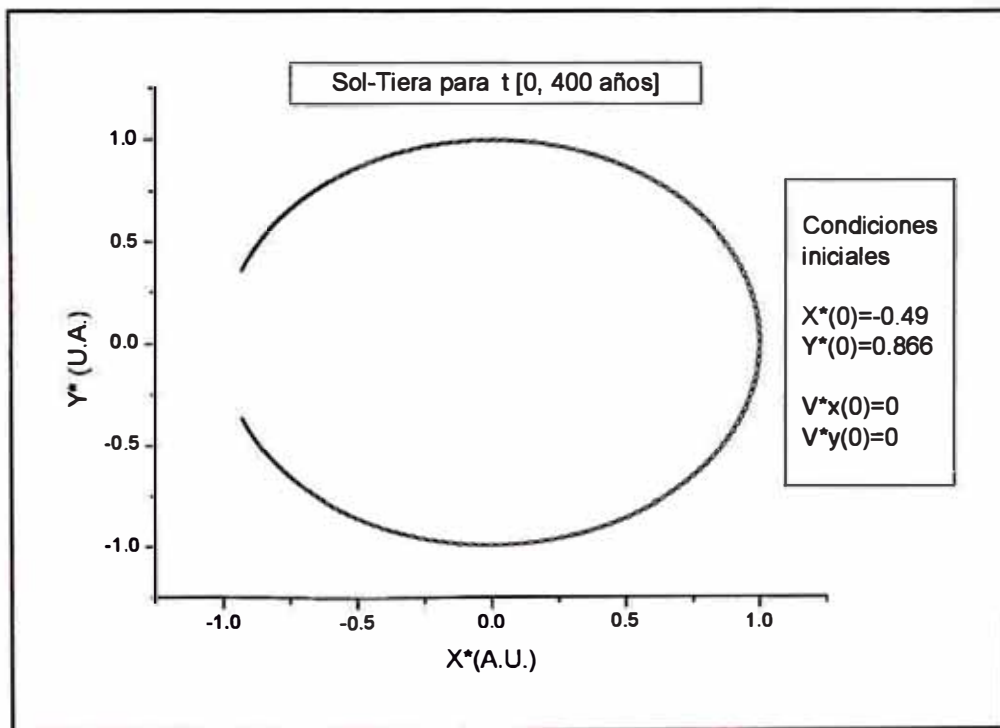


Fig. 28 Trayectoria del asteroide caso: Sol-Tierra, de 0 a 400 años.

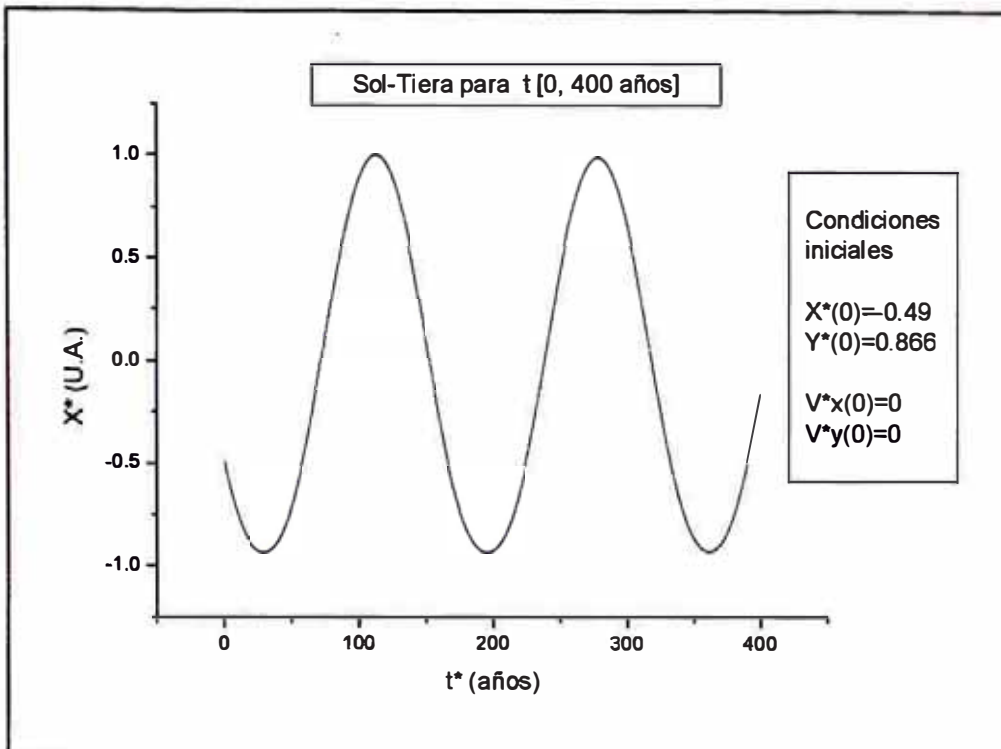


Fig. 29 x^* en función de t^* , caso: Sol-Tierra, de 0 a 400 años.

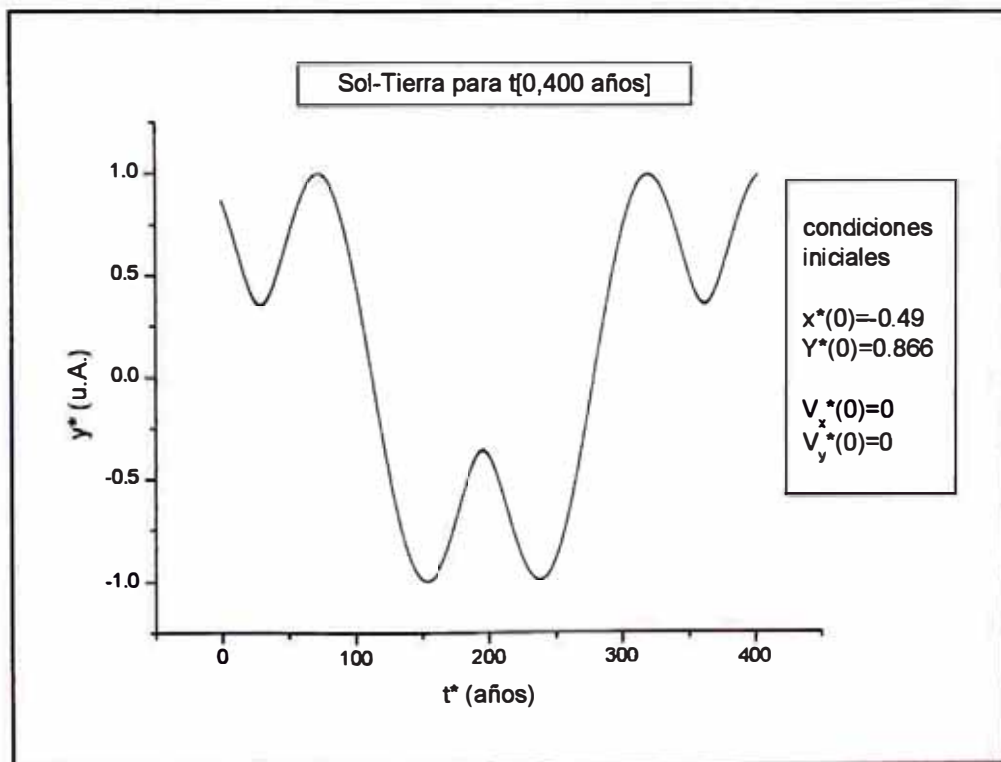


Fig. 30 y^* en función de t^* , caso: Sol-Tierra, de 0 a 400 años.

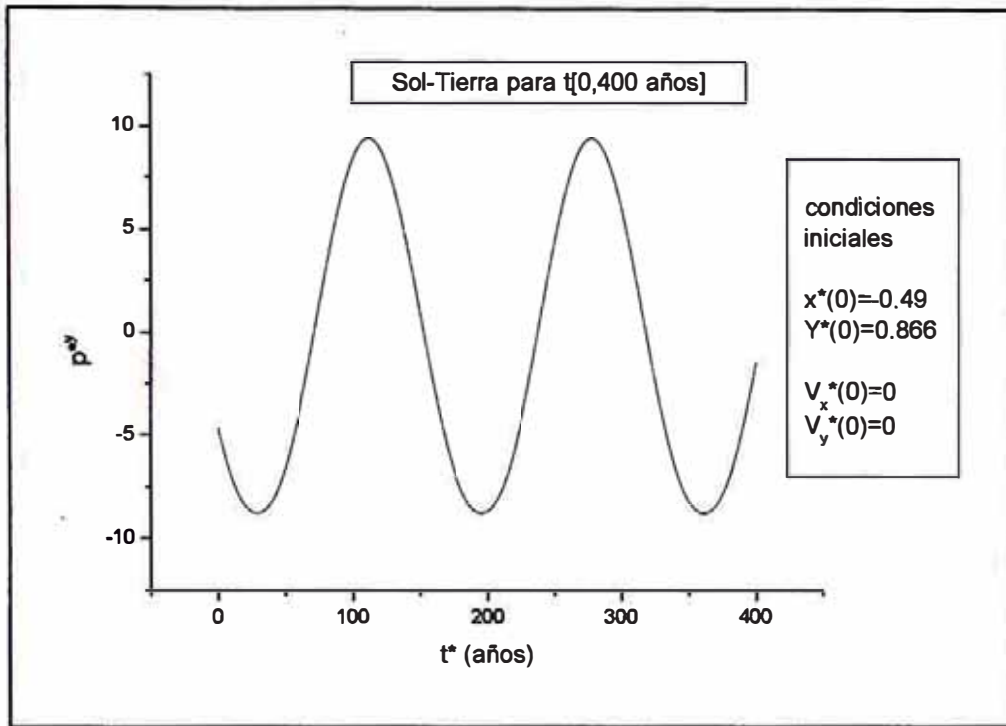


Fig. 31 p_y^* en función de t^* , caso: Sol-Tierra, de 0 a 400 años.

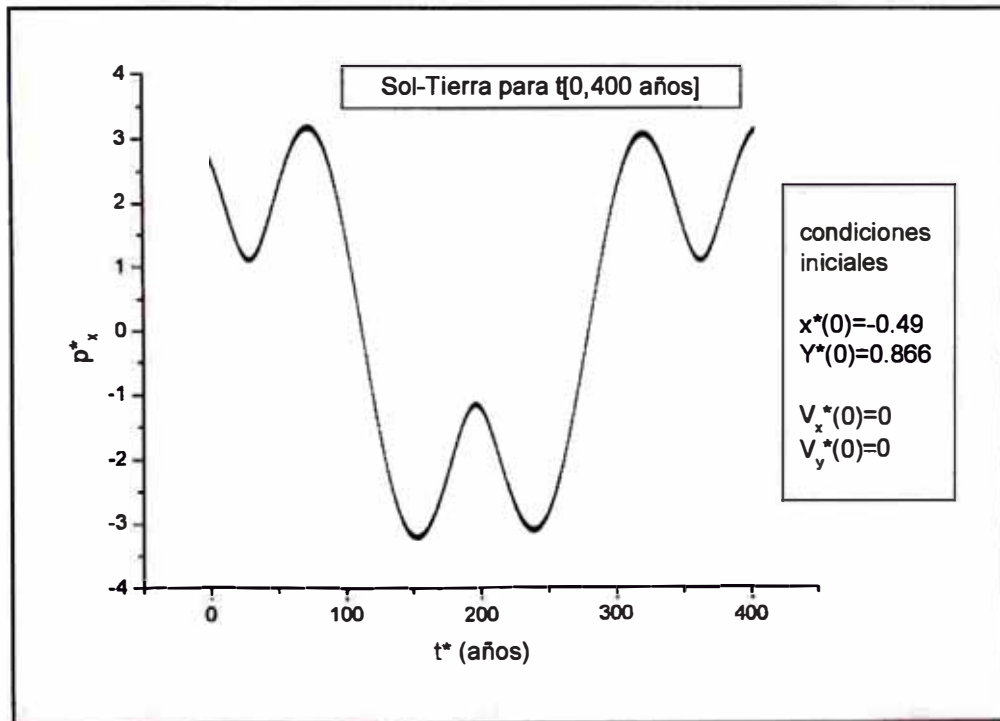


Fig. 32 p_x^* en función de t^* , caso: Sol-Tierra, de 0 a 400 años.

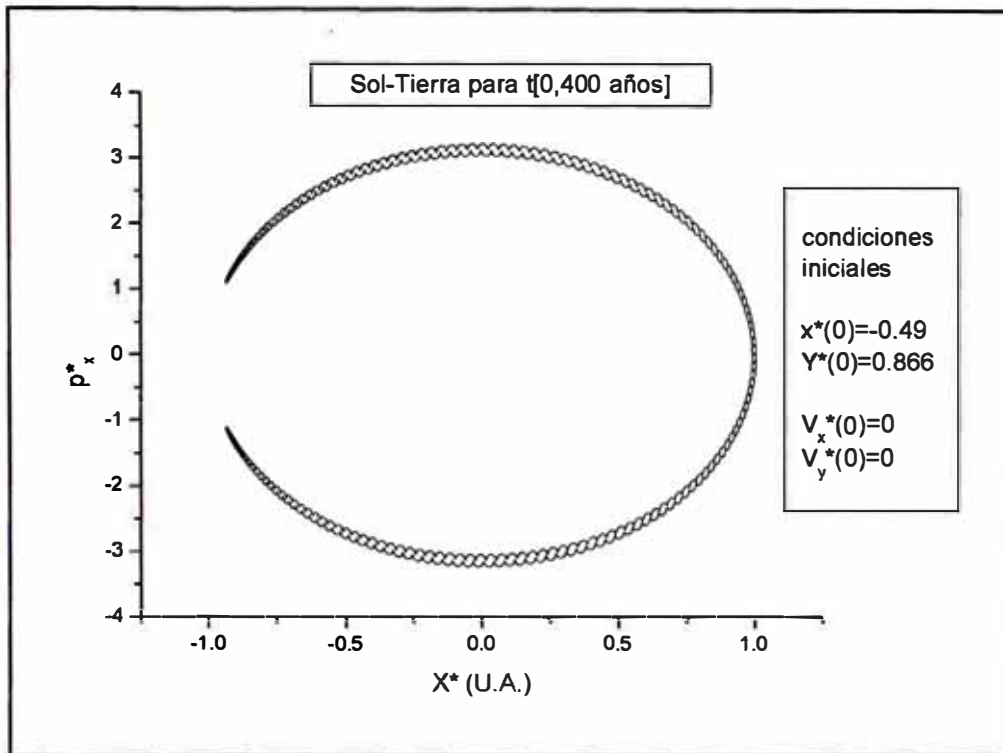


Fig. 33 p_x^* en función de X^* , caso: Sol-Tierra, de 0 a 400 años.

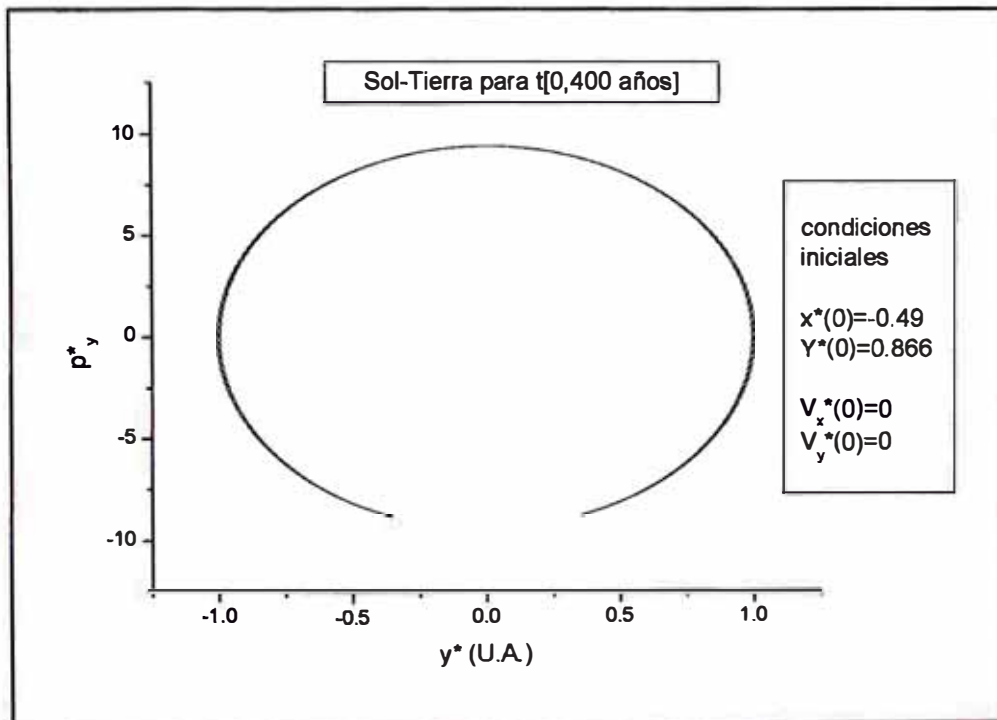


Fig. 34 p_y^* en función de Y^* , caso: Sol-Tierra, de 0 a 400 años

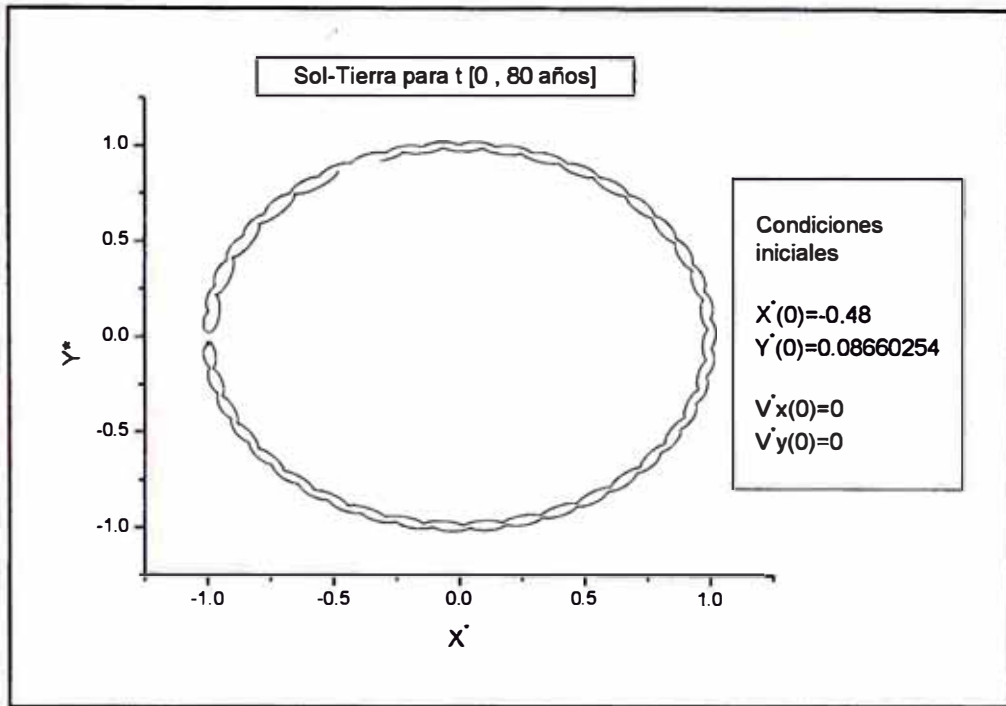


Fig. 35 Trayectoria del asteroide, caso: Sol-Tierra, de 0 a 80 años.

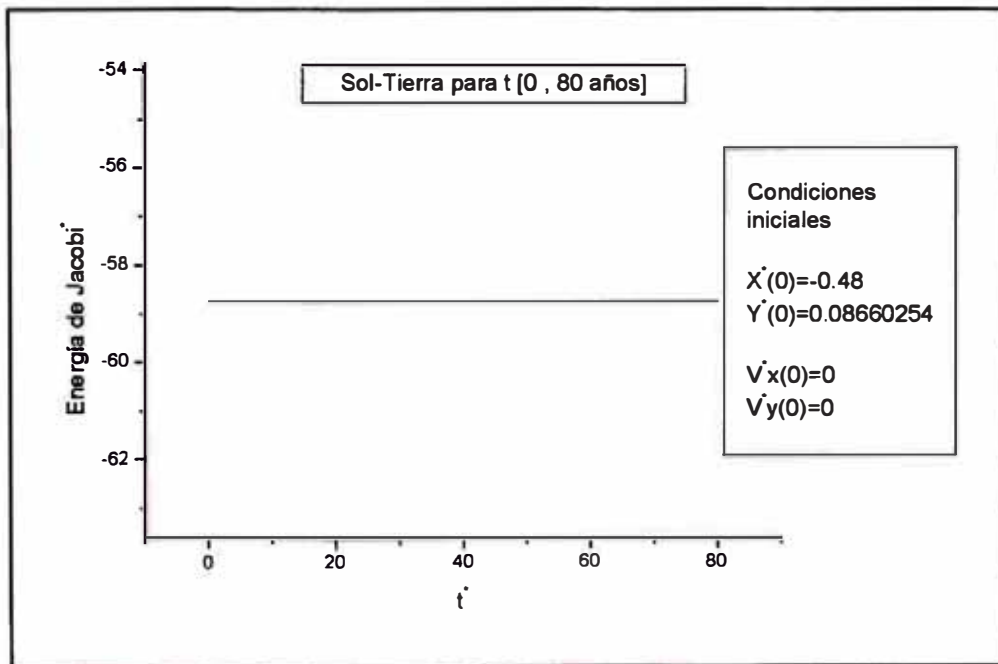


Fig. 36 Energía de Jacobi en función de t^* , caso: Sol-Tierra, de 0 a 80 años.

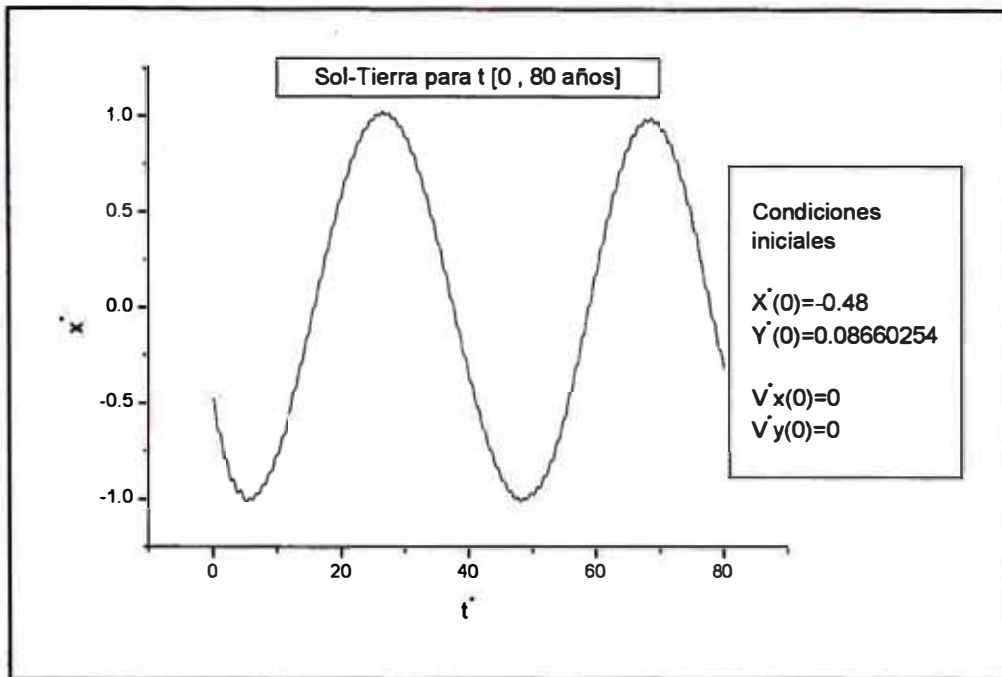


Fig. 37 x^* en función de t^* , caso: Sol-Tierra, de 0 a 80 años.

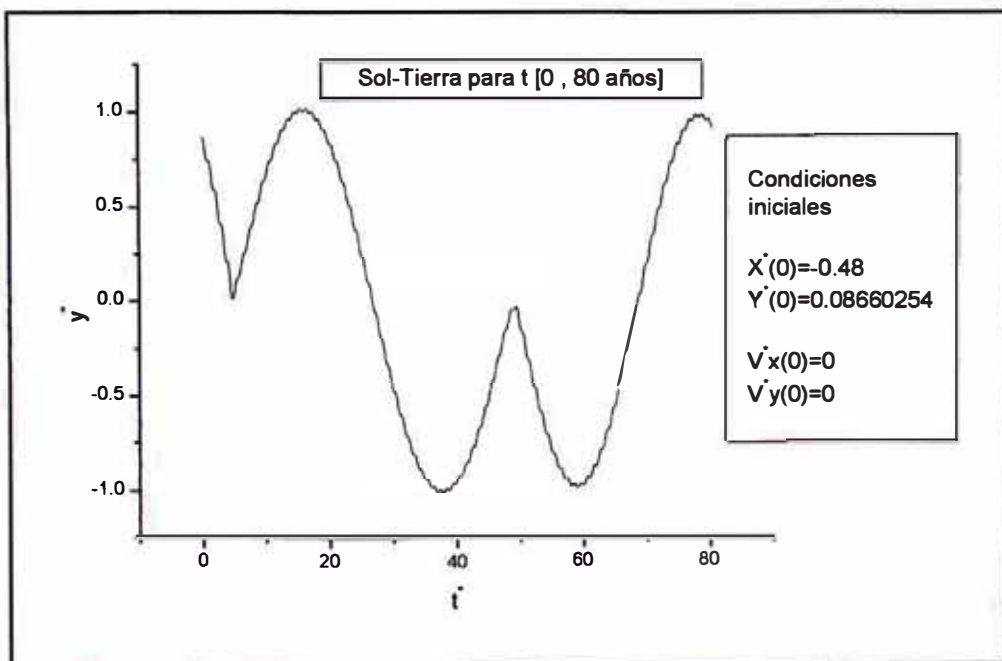


Fig. 38 y^* en función de t^* , caso: Sol-Tierra, de 0 a 80 años.

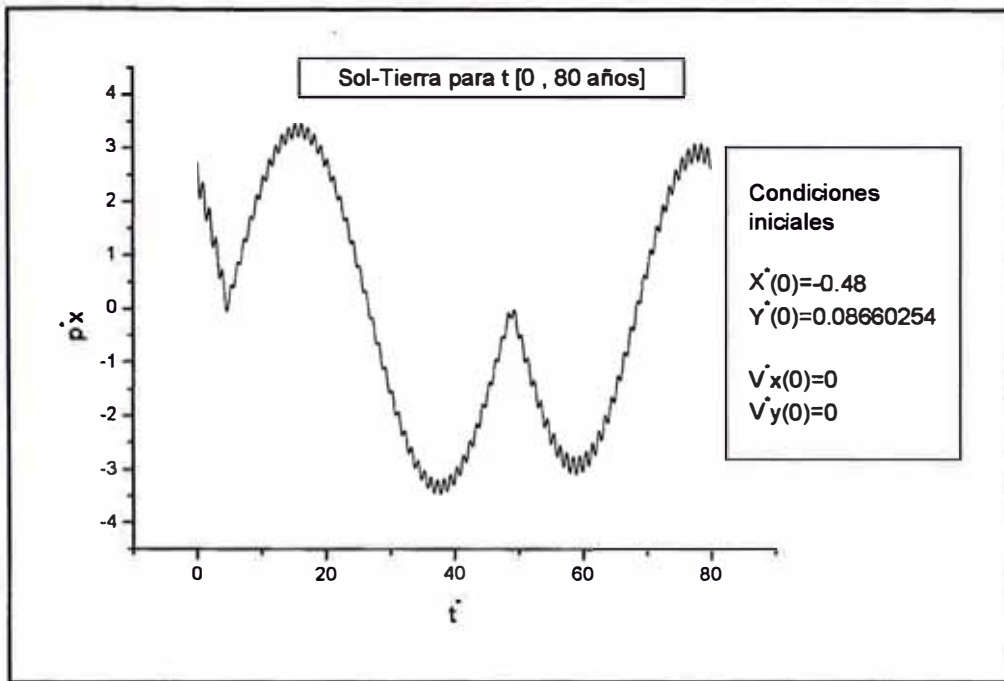


Fig. 39 p_x^* en función de t^* , caso: Sol-Tierra, de 0 a 80 años.

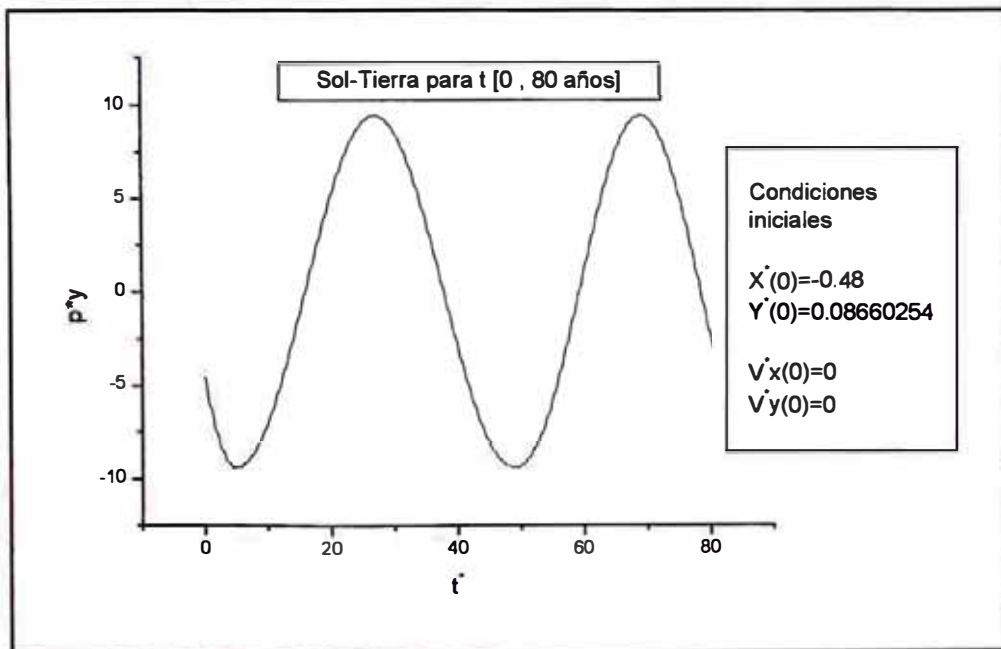


Fig. 40 p_y^* en función de t^* , caso: Sol-Tierra, de 0 a 80 años.

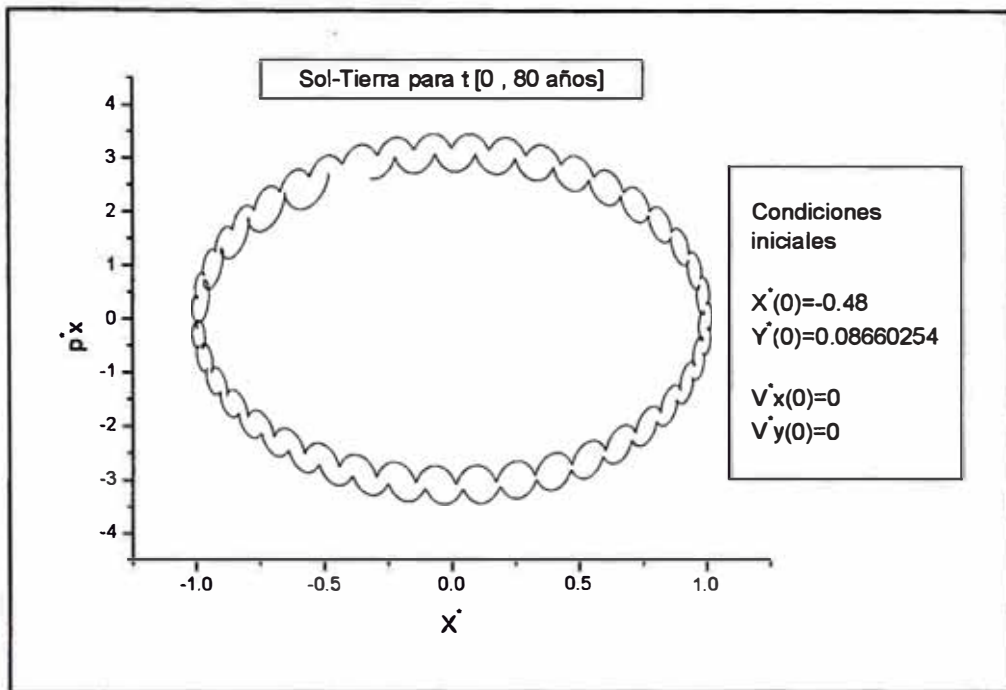


Fig. 41 Plano de fase p_x^* en función de x^* , caso: Sol-Tierra, de 0 a 80 años.

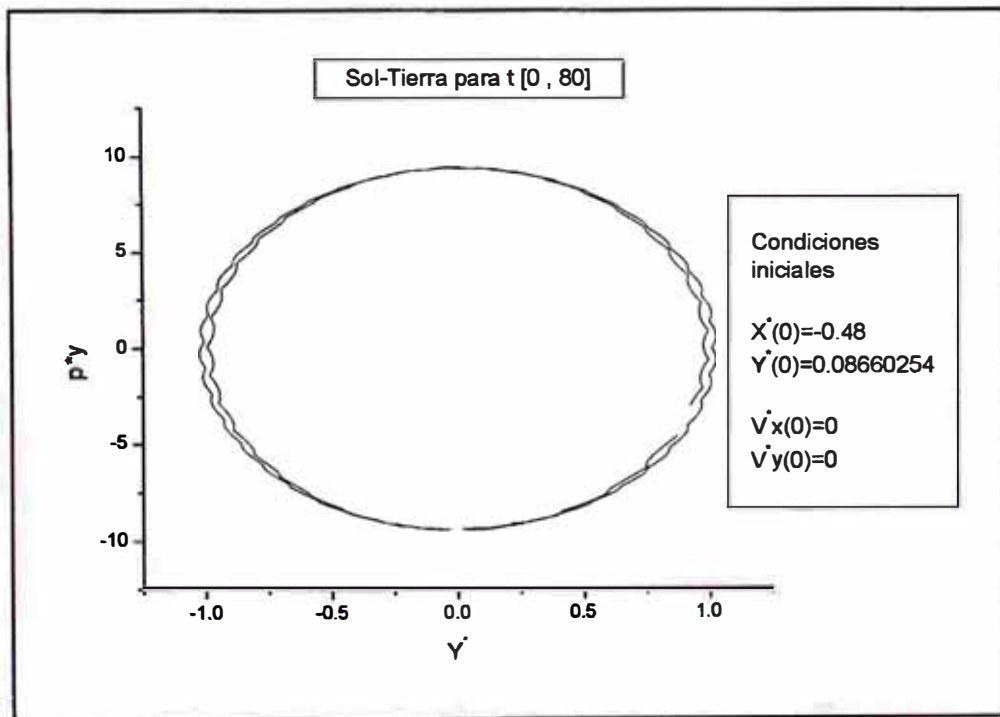


Fig. 42 Plano de fase p_y^* en función de y^* , caso: Sol-Tierra, de 0 a 80 años.

6.- Conclusiones y Observaciones.

6.1 Observaciones

1°.- La trayectoria de la partícula está contenida en una órbita que tiene la forma de un herraje o de una U.

2°.- Vemos que la órbita es simétrica con respecto al eje Y^* (0), en ese eje está el Sol

3°.- En el caso Sol-Júpiter de las graficas para 380 años y tiempos mayores de 400 años; podemos decir que después de 380 años, el asteroide se mueve casi sobre la misma orbita; es decir el 'periodo' es de 380 años. En el caso Sol-Tierra el 'periodo' es de 400 años.

4°.-De lo anterior podemos concluir que la partícula m ubicada en lugares próximos al punto de Lagrange L_4 se mueve en una órbita relativamente estable alrededor del Sol.

5°.-Se observa que la trayectoria obtenida tiene una forma parecida a la mostrada por la literatura astronómica, de los asteroides Troyanos. Ver [9] y [10].

6°.- En el diagrama de fases (p_x^* vs. x^*) observamos una curva que es parecida a la trayectoria del asteroide, en cambio la curva en el espacio de fases (p_y^* vs. y^*) está rotada 90° .

6.2.-Conclusiones

1°.-Cuando la energía de Jacobi es menor que cero, el movimiento del asteroide está en una región finita.

2°.-Por lo menos para estas condiciones iniciales consideradas, se encontraron trayectorias relativamente estables; y esto se puede utilizar para satélites artificiales.

Apéndice 1:

‘Lagrangiano’ del caso particular del problema restringido de los tres cuerpos

Consideremos coordenadas cartesianas como coordenadas generalizadas; como el sistema de referencia es no inercial y la energía mecánica no se conserva, no podemos decir que:

$L = E_k - E_p$; en este caso ensayamos un ‘Lagrangiano’ de la forma.

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + am\omega \dot{y}x + bm\omega \dot{x}y + \frac{M_1 mG}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{M_2 mG}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2}} + \frac{m\omega^2}{2}(x^2 + y^2). \quad (69)$$

Al usar las ecuaciones de Lagrange.

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right), \quad (70)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right). \quad (71)$$

Se hallan los valores de $a=3$, y $b=1$; es decir el ‘Lagrangiano’ será,

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + 3m\omega \dot{y}x + m\omega \dot{x}y + \frac{M_1 mG}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{M_2 mG}{\sqrt{(x-3)^2 + y^2}} + \frac{m\omega^2}{2}(x^2 + y^2). \quad (72)$$

Hallamos los momentums generalizados.

$$p_x \equiv m\dot{x} + m\omega y, \quad (73)$$

$$p_y \equiv m\dot{y} + 3m\omega x. \quad (74)$$

‘Lagrangiano’ adimensional

Podemos hallar un ‘Lagrangiano’ adimensional, procedemos así, por que las ecuaciones diferenciales ordinarias del movimiento son adimensionales, por esto reemplazando las ecuaciones (14), (17 al 29), en (72).

$$L = \frac{mD^2}{\tau^2} \left\{ \frac{1}{2}(\dot{x}^{*2} + \dot{y}^{*2}) + 3\omega \dot{y}^* x^* + \dot{x}^* y^* + \frac{GM_{Ref} M_1^* \tau^2}{D^3 d(P,A)^*} + \frac{GM_{Ref} M_2^* \tau^2}{D^3 d(P,B)^*} + \frac{\omega^2}{2} (x^{*2} + y^{*2}) \right\}. \quad (75)$$

Se obtiene:

$$L = \frac{mD^2}{\tau^2} L'. \quad (76)$$

Se define el ‘Lagrangiano’ adimensional

$$L' = \frac{1}{2}(\dot{x}^{*2} + \dot{y}^{*2}) + 3\omega \dot{y}^* x^* + \dot{x}^* y^* + \frac{KM_1^*}{\sqrt{x^{*2} + y^{*2}}} + \frac{KM_2^*}{\sqrt{(x^* - a^*)^2 + y^{*2}}} + \frac{2\pi^2}{T^{*2}} (x^{*2} + y^{*2}). \quad (77)$$

Con $\omega^* = \frac{2\pi}{T^*}, \quad (78)$

obtenemos los momentums generalizados adimensionales.

$$p_x^* = \dot{x}^* + \omega^* y^*, \quad (79)$$

$$p_y^* = \dot{y}^* + 3\omega^* x^* \quad (80)$$

Apendice 2

Programa aquilesorbitasfase_v2.

Programa que resuelve numéricamente el caso particular del problema restringido de los tres cuerpos usando el paquete Delphi Borland 7.0 .

{ Apply Runge-Kutta method to a system of differential equations, or to a second or higher order equation reduced to a first-order system t en años distancia en U.A. }

Uses

dialogs,

sysutils;

Label 11;

Const

N = 4;

type

group = array [1..N] of real;

var

xend, x0: group;

t: real;

i: integer;

dis_al_OC,

dis_al_Sol,

dis_a_Tierra : extended;

k,M1,M2,a,TT,px,py:extended;

EJ : extended;

```

s:string;

datos:text;

hh, hMax,tSIM : extended;

procedure derivs(x: group; t: real; var f: group);
begin
  f[1] := x[3];
  f[2] := x[4];
  f[3] :=
-( (K*M1*x[1]) / ( (sqr(x[1]) +sqr(x[2]))*sqrt( sqr(x[1]) +sqr(x[2])) ) )
-( (K*M2*(x[1]-a) / ( (sqr(x[1]-a)+sqr(x[2]))*sqrt( sqr(x[1]-a)+sqr(x[2])) ) )
+( (4*pi*pi*x[1]) / ( sqr(TT) ) )
+( (4*pi*x[4]) / ( TT ) );
//
  f[4] :=
-( (K*M1*x[2]) / ( (sqr(x[1]) +sqr(x[2]))*sqrt( sqr(x[1]) +sqr(x[2])) ) )
-( (K*M2*x[2]) / ( (sqr(x[1]-a)+sqr(x[2]))*sqrt( sqr(x[1]-a)+sqr(x[2])) ) )
+( (4*pi*pi*x[2]) / ( sqr(TT) ) )
-( (4*pi*x[3]) / ( TT ) );
//
end;

procedure rksyst(var xend: group; x0: group; t: real);
var f: group;
  xwrk: array [1..4, 1..N] of real;
  h : real;

```

```

i : integer;
begin

h := hh; //
derivs(x0, t, f);
    for i := 1 to N do begin
        xwrk[1, i] := h * f[i];
        xend[i] := x0[i] + xwrk[1, i]/2
    end;
derivs(xend, t + h/2, f);
for i := 1 to N do begin
    xwrk[2, i] := h * f[i];
    xend[i] := x0[i] + xwrk[2, i]/2
end;
derivs(xend, t + h/2, f);
for i := 1 to N do begin
    xwrk[3, i] := h * f[i];
    xend[i] := x0[i] + xwrk[3, i]
end;
derivs(xend, t + h, f);
for i := 1 to N do
    xwrk[4, i] := h * f[i];
for i := 1 to N do
    xend[i] := x0[i] + (xwrk[1,i] + 2*(xwrk[2,i]
        + xwrk[3,i]) + xwrk[4,i])/6;

```

end;

BEGIN

ASSIGN(DATOS,'f:\aq1.dat');REWRITE(DATOS);//ARCHDAT

writeln(datos,

 'T', ' '

 ,'X', ' ', 'Y', ' '

 ,'Vx"', ' ', 'Vy', ' '

 ,'Px', ' ', 'Py', ' '

 ,'EJ', ' '

 ,'D_al_OC', ' '

 ,'D_al_Sol', ' '

 ,'D_a_Tierra', ' ');

{ Condiciones Iniciales }

{ ===== }

x0[1] :=-0.48{9}; x0[2] :=0.8660254{866}; { Posición Asteroide }

x0[3] :=0; x0[4] :=0; { Velocidad Asteroide }

K:= 39.0; { Const. que hace adimensional }

M1:=1; { Masa del Sol }

M2:=0.000003; { Masa de la Tierra }

a:=-1; { Distancia Sol-Tierra (U.A) }

TT:=1; { Periodo Orbita }

tSIM:=82; { Tiempo de Simulación }

hMax:=0.001; { Paso Máximo }

t:= 0;

```

if (tSIM/1000)<=hMax then
hh:=(tSIM/1000)
else
hh:=hMax;
while t<tSIM do begin { tiempo de simulación AÑOS }
dis_al_OC := sqrt( sqr(x0[1]) + sqr(x0[2]) );
dis_al_Sol := sqrt( sqr(x0[1]) + sqr(x0[2]) );
dis_a_Tierra:= sqrt( sqr(x0[1]-a) + sqr(x0[2]) );
EJ:= ((1/2)*(sqr(x0[3])+sqr(x0[4])))
-(K*M1)/ sqrt( sqr(x0[1]) +sqr(x0[2]) ) )
-(K*M2)/ sqrt( sqr(x0[1]-a) +sqr(x0[2]) ) )
-((sqr(x0[1]) + sqr(x0[2]) )*(2*pi*pi)/ TT );
{ EP:=
-K/ sqrt( sqr(x0[1]+a) +sqr(x0[2]) )
-K/ sqrt( sqr(x0[1]-a) +sqr(x0[2]) ); }
Px:= x0[3] +(1*pi*x0[2]/TT);
Py:= x0[4] +(3*pi*x0[1]/TT);
// IF T mod 10=0 then
s:=' ';
rksyst(xend, x0, t);
for i:=1 to N do
x0[i] := xend[i];
writeln(datos,
T:12:8,' ',
,(x0[1]):12:6,' ',(x0[2]): 12:6,' '

```

```

,(x0[3]):12:6,' ',(x0[4]):12:6,' '
,(px):12:6,' ',(py):12:6,' '
,EJ:9:6,' '
,dis_al_OC:12:6,' '
,dis_al_Sol:12:6,' '
,dis a Tierra:12:6,' ');

t := t + hh;

s:=s +floattostr(t)+#9+ floattostr(EJ)+#13

end;

showmessage(s);

close(datos);

```

END.

Para la tierra

```

K:= 39.0;           { Const. que hace adimensional }
M1:=1;             { Masa del Sol }
M2:=0.000003;     { Masa de la Tierra }
a:=-1;             { Distancia Sol-Tierra (U.A) }
TT:=1;             { Periodo Orbita }

```

Para Jupiter

```

K:= 39.0;           { Const. que hace adimensional }
M1:=1;             { Masa del Sol }
M2:=0.0001;       { Masa de Jupiter }
a:=-5.2;           { Distancia Sol-Jupiter (U.A) }
TT:=140;           { Periodo Orbita }

```

Bibliografía.

01. Jerry B. Marion. “Dinámica clásica de las partículas y sistemas”, Editorial Reverté S.A., 2da. Edición. (1975).
02. H. Goldstein, “Mecánica Clásica”, Editorial Reverté S.A., 2da. Edición. (1994).
03. Keith R. Symon, “Mecánica”, Editorial Aguilar S. A., (1974).
04. James Binney and Scott Tremaine. “Galactic Dynamics” Princeton University Press. (1978).
05. S. Chapra y R. Canale, “Métodos numéricos para ingenieros”, Editorial Mc Graw Hill. 4ta. Edición. (2003).
06. Shoichiro Nakamura, “Métodos numéricos aplicados con software”, Editorial Prentice Hall. (1992).
07. E. Mohenir Borda, Tesis “Análisis numérico del movimiento de una partícula alrededor de un anillo” UNI Facultad de Ciencias, Lima Perú. (2006).
08. Armando Bemui. “El problema de los 3 cuerpo como problema de valores iniciales” <http://www.quipo.uni.edu.pe>
09. Grup d’Estudies Astronomic “ Los Troyanos” <http://www.astrogea.org>
10. Wikipedia “Puntos de Lagrange” <http://es.wikipedia.org>
11. E. Vidalón Vidalón “Informe de avance de investigación: Movimiento de un Satélite Artificial alrededor de la Tierra.” Universidad Nacional de Ingeniería, Facultad de Ciencias. (2008).