

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA

FACULTAD DE INGENIERIA
ELECTRICA Y ELECTRONICA



Estudio de la máquina de inducción incluyendo el efecto
de saturación transversal con diversos modelos de la
curva de magnetización

TOMO I

T E S I S

Para optar el Título Profesional de
INGENIERO ELECTRICISTA

Agustín Adalberto Gutierrez Páucar
PROMOCION 1984 - I

Lima -
Perú 1987

A MIS PADRES
AGUSTIN Y FELICITAS

TABLA DE CONTENIDO

- I. INTRODUCCION
- II. REPRESENTACION DE LA CURVA DE MAGNETIZACION POR LA -
ECUACION DE FROELICH.
 - 2.1. Fundamento Matemático
 - 2.2. Determinación de Inductancias
 - 2.3. Programa de Cálculo Computacional
- III. REPRESENTACION DE LA CURVA DE MAGNETIZACION USANDO -
INTERPOLACIONES LINEALES.
 - 3.1. Fundamento Matemático
 - 3.2. Obtención de Inductancias
 - 3.3. Programa Fortran de Evaluación de Inductancias
- IV. APROXIMACION DE LA CURVA DE MAGNETIZACION MEDIANTE -
FORMULAS POLINOMICAS.
 - 4.1. Fundamento Matemático
 - 4.2. Extensión del método a dos reactores en serie
y paralelo
 - 4.3. Descripción del Programa Fortran.
 - 4.3.1. Diagrama de Flujo
 - 4.3.2. Introducción de Datos
 - 4.3.3. Programas de Cálculo de Inductancias.
- V. TEORIA GENERALIZADA DE LAS MAQUINAS ELECTRICAS, IN -
CLUYENDO EL EFECTO DE SATURACION TRANSVERSAL CON DI -
VERSOS MODELOS DE CARACTERISTICAS DE MAGNETIZACION.
 - 5.1. Ecuaciones Generalizadas con vectores espacia -
les incorporando el efecto de saturación de la
trayectoria del flujo principal.

- 5.2. Efecto de la Saturación Variable.
- 5.3. Las Nuevas Ecuaciones Generales.
- 5.4. Simulación Digital.
 - 5.4.1. Formulación del Problema
 - 5.4.2. Diagrama de flujo de solución a las ecuaciones.
 - 5.4.3. Simulación Digital a la solución de las Ecuaciones Generalizadas representando a la curva característica de magnetización mediante diversas aproximaciones.
 - 5.4.4. Discusión de los resultados obtenidos por simulación digital.

VI. CARACTERISTICAS DE FUNCIONAMIENTO EN REGIMEN ESTACIONARIO.

- 6.1. Ecuaciones de ligadura para régimen estacionario en un colector infinito compensado.
- 6.2. Transformación de Componentes Simétricas Bifásicas.
- 6.3. Relaciones de par.
- 6.4. Magnitudes para una fase.
- 6.5. Contribución de secuencia positiva, por fase, - al par de origen eléctrico como función del deslizamiento.

VII. APLICACIONES.

- 7.1. Listado de los programas de Cálculo de Inductancias.
- 7.2. Listado del programa de solución a las Ecuaciones Generalizadas.

7.3. Pruebas Experimentales y Comparación Teórico-
Experimentales de Curvas de Magnetización.

7.4. Listado del programa de obtención del Par e-
léctrico como función del deslizamiento.

CONCLUSIONES

BIBLIOGRAFIA

APENDICES:

Apéndice A.

- Descripción de la Máquina de Inducción en -
prueba.
- Ensayo en vacío y determinación de paráme-
tros.

Apéndice B.

- Figura de Mérito.

Apéndice C.

- Detalle del uso de la subrutina DRKGS
- Detalle del uso de la subrutina MINV.

N O M E N C L A T U R A

- a : Vector unidad o vector unitario situado a 120° adelante del eje de referencia.
- : Matriz de estado
- B : Inducción magnética
- : Matriz de control
- $a_1, A, A', A'_{1eq}, b_1, B, B', B'_{1eq}, c_1, c_2, d_1, d_2$: constantes.
- ε : Índice de precisión
- $\overline{G}_{+-,dq}^{sr}$: Matriz completa de transformación de d-q a componentes simétricas.
- H : Intensidad magnética
- h : Longitud de paso para el método iterativo
- i_m, i_L : Corriente magnetizante en valor eficaz
- i_a, i_b, i_c : Corrientes en las fases a, b y c respectivamente
- i : Vector espacial de corrientes
- i_m, i'_m : Vector espacial de corriente magnetizante
- i'_s : Vector espacial de corrientes estáticas
- \overline{i}'_r : Vector espacial de corrientes rotóricas
- : Vector columna de corrientes en los arrollamientos estático y rotórico en el Modelo d-q.
- : Vector columna de corrientes en el Modelo de componentes simétricas bifásicas.
- $j\omega$: Operador complejo
- J : Constante de inercia total de la masa rotativa.
- K : Constante de deformación del eje del motor
- L : Inductancia dinámica en valor r.m.s
- L : Inductancia estática en valor r.m.s

L	: Inductancia propia por fase del arrollamiento rotórico
L_s	: Inductancia propia por fase del arrollamiento estatórico
L_{r1}	: Inductancia de dispersión del arrollamiento rotórico
L_{s1}	: Inductancia de dispersión del arrollamiento estatórico
L_{2s}	: Inductancia variable que toma en cuenta el efecto de intersaturación
L'	: Matriz de inductancias
L'^{-1}	: Matriz inversa de inductancias
m_j, m'_j	: Pendiente de curva, en la porción J
2η	: Número de polos
$p = \frac{d}{dt}$: Operador diferencial
	: Potencia compleja suministrada a las puertas del estator y rotor de la máquina d-q.
M, N, P	: Constantes
R_s	: Resistencia ohmica por fase estatórica
R_r	: Resistencia ohmica por fase rotórica
\underline{R}'	: Matriz de resistencias
s	: Deslizamiento de la máquina de inducción
t	: tiempo
T_e	: Par electromagnético
T^r, T_1	: Par exterior aplicado
u'_s, u'_r	: Vector columna de voltajes estatóricos, rotóricos respectivamente
u_i	: Vector espacial del voltaje total inducido.

u_t	: Componente de transformación del vector espacial inducido
u_{rot}	: Componente de rotación del vector espacial inducido
μ	: Angulo instantáneo formado por el eje de abscisas del sistema de referencia y la dirección de ψ_m .
V, V_R	: Voltaje de suministro en valor eficaz
v_a, v_b, v_c	: Voltajes en las fases a, b y c respectivamente.
v	: Vector espacial de tensión
\bar{v}'_s	: Vector espacial de tensiones estatóricas
\bar{v}'_r	: Vector espacial de tensiones rotóricas
\bar{v}^{sr}_{dq}	: Vector columna de voltajes estatóricos y rotóricos en el Modelo d-q
\bar{v}^{sr}_{+-}	: Vector columna de voltajes estatóricos y rotóricos en función de la variable + -
ω	: Velocidad angular de la red
ω	: Velocidad arbitraria del sistema de referencia - rotante
ω_s	: Velocidad de sincronismo
ω^r, ω_r	: Velocidad del rotor
ω	: Velocidad del flujo principal relativo al sistema de referencia general
m	: Reactancia magnetizante
\underline{z}'	: Matriz de impedancia
$\underline{z}'_s, \underline{z}'_r$: Matriz de impedancia únicamente con elementos estatóricos, rotóricos respectivamente.
\underline{z}^{sr}_{dq}	: Matriz de impedancia d-q
\underline{z}^{sr}_{+-}	: Matriz de impedancia en función de las variables + -
z	: Constante.

- λ_m : Flujo máximo magnetizante concatenado establecido por un suministro alterno
- ψ_a, ψ_b, ψ_c : Flujo concatenado en las fases a, b y c respectivamente
- ψ : Vector espacial de flujo concatenado
- $\psi_m, \bar{\psi}'_m$: Vector espacial de flujo magnetizante concatenado
- $\bar{\psi}'_s$: Vector espacial de flujos concatenados estáticos
- $\bar{\psi}'_r$: Vector espacial de flujos concatenados rotóricos
- α : Constante

P R O L O G O

En los últimos años ha existido una tendencia creciente - por obtener modelos matemáticos de representación de curvas características de magnetización y puedo decir que en la actualidad existen numerosos modelos de aproximación debido a la gran importancia de estas curvas.

En el presente trabajo se exponen tres modelos de representación de la curva característica de magnetización de circuitos magnéticos.

El objetivo es mostrar la sencillez y exactitud de las diversas aproximaciones, las cuales son completamente aplicables al diseño y/o análisis de las máquinas eléctricas.

Se trata de establecer la mejor aproximación, usando fórmulas matemáticas que nos permitan usarla con confianza - en los distintos problemas donde sea necesario considerar la variación de la inductancia con la corriente o incluir el efecto de la saturación en el análisis de máquinas eléctricas o dispositivos ferromagnéticos en general.

Se analiza el comportamiento de la máquina de inducción - en estado transitorio incluyendo el efecto de intersaturación; el cual está sustentado básicamente en la Teoría Generalizada de las Máquinas Eléctricas, que incorpora entre sus hipótesis el Modelo de Ejes Ortogonales y la teoría de los circuitos magnéticamente acoplados. Además se hace uso de la técnica de los vectores espaciales, median

te el cual se introduce un aspecto muy importante en el análisis, cual es, el de considerar la variación de la impedancia de la máquina con la corriente de magnetización, recurriendo a planteamientos de variación de flujo principal para luego llegar a determinar un nuevo conjunto de ecuaciones generales, donde los parámetros de inductancia variarán punto a punto según la curva de magnetización del material que se use en la construcción de la máquina.

Entonces, es necesario primero modelar adecuadamente la curva de magnetización, escogiendo la más sencilla y la que responda mejor a la característica experimental; para luego pasar a la resolución del sistema de ecuaciones diferenciales que resulta del análisis de las máquinas de inducción considerando la saturación de la trayectoria del flujo principal. Se recurre a métodos directos de solución considerando a las corrientes como variables de estado y además se emplean subprogramas que coadyuvan al proceso de integración numérico.

Se emplea el método iterativo de cálculo llamado "Runge - Kutta", de cuarto orden, que como sabemos posee la ventaja de la autoinicialización y además la de presentar una adecuada estabilidad numérica en comparación con otros métodos de similar orden de precisión.

Los resultados de la simulación son presentados en forma gráfica y tabulada, en ellas, puede verse las diversas características y peculiaridades de respuesta de las corrientes.

tes y torque electromagnético correspondientes a diferentes niveles saturados de tensión.

Finalmente considero que los modelos matemáticos presentados pueden ser usados en el estudio de otras situaciones, tales como, ocurrencias de desconexión brusca de tensión, optimización del diseño de máquinas de inducción, análisis de estado estable de generadores de inducción autoexcitados usando capacitores en sus terminales, etc.

I N T R O D U C C I O N

La alta utilización de diversas calidades de materiales - en la construcción de variados tipos de transformadores y máquinas eléctricas conduce a aproximar de la mejor forma posible a la curva característica de magnetización.

La predeterminación de la curva de magnetización constituye un paso esencial en el diseño normal de una máquina; - debido a que su comportamiento en su funcionamiento como generador ó motor depende casi completamente de esta curva y es por esta razón que se busca la mejor aproximación de la curva de magnetización con la finalidad de tener la seguridad de que la máquina va a satisfacer las condiciones especificadas en su diseño.

Dentro de los diversos tipos de máquinas eléctricas, el motor de inducción, es ampliamente utilizado, en sus diversas variedades, por su robustez, por ser la más confiable, la de más fácil obtención en el mercado dentro de las máquinas rotativas.

El presente trabajo pretende hacer un estudio detallado y con rigor de la operación de la máquina de inducción en estado transitorio considerando el efecto de la intersaturación, ya que se trata de una necesidad, no solo teórica sino de indudables aplicaciones prácticas en nuestro medio; así desde su uso en los sistemas productivos de la gran mayoría de las industrias actuales, su utilización -

en microcentrales suministrando energía eléctrica, vital para el desarrollo nacional, hasta su posible empleo como generador en las microcentrales hidroeléctricas aisladas, destinadas a la electrificación rural del país.

Antes del advenimiento de las computadoras, era una tarea muy ardua estudiar los procesos transitorios y más aún considerar el efecto de la saturación, es decir tener en cuenta diferentes valores de inductancia correspondientes a valores de corriente magnetizante; la manipulación y resolución de los sistemas de ecuaciones diferenciales no lineales con coeficientes variables resultaba una tarea muy difícil, en la actualidad las facilidades que nos brinda el uso de las computadoras analógicas y digitales en la resolución de tales sistemas, simplifica en forma notable el problema, se cuenta indudablemente con una herramienta muy útil para analizar las condiciones en que se pueda desenvolver una máquina en determinado instante.

El objetivo principal del presente trabajo es el de analizar el comportamiento en estado transitorio de la máquina de inducción considerando diferentes niveles de saturación, empleando para ello las nuevas ecuaciones generales que incluyen el efecto de la intersaturación y a la vez demostrar la importancia y necesidad de desarrollar modelos matemáticos adecuados de representación de curvas de magnetización, no solo exactos, sino que permitan comparar la respuesta de los diferentes modelos a fin de ele-

gir el más adecuado ó sencillo que se preste a este análisis particular.

Para desarrollar el análisis en estado transitorio se recurre a la Teoría Generalizada de las Máquinas Eléctricas en el cual se tiene al modelo de ejes ortogonales "d-q", - que proporciona un sistema más adecuado y práctico, por su estructura, ya que nos permite simplificar el análisis mediante adecuadas transformaciones de variables que luego resultan en un conjunto de ecuaciones diferenciales sencillas, fáciles de resolverse con el empleo de máquinas digitales o analógicas.

La aplicación de la Teoría Generalizada implica tomar en consideración las siguientes hipótesis:

- La distribución del flujo principal alrededor de la periferia del entrehierro es sinusoidal en todo caso de saturación. Esta suposición conduce a considerar que la saturación variable está modelado por la variación ficticia del espacio libre del entrehierro.
- Las fuerzas magnetomotrices (corrientes y voltajes) están distribuídas sinusoidalmente alrededor de la periferia.
- La corriente magnetizante permanece sinusoidal en todo caso en saturación.
- La conexión de los devanados estatóricos y rotóricos es simétrica. Estas hipótesis en particular la primera, son muy usadas en el análisis de las máquinas eléc

tricas.

El presente análisis podrá mejorarse si se logra tener en cuenta algunas simplificaciones como por ejemplo los armónicos espaciales, las pérdidas en el fierro, etc.

Expreso mi sincero reconocimiento a mi amigo y profesor Dr. James Bravo Basaldúa, asesor del presente trabajo por su constante dedicación y consejos, y a los señores profesores del sub-área de Máquinas Eléctricas por su apoyo.

Asimismo, mi agradecimiento al Centro de Cómputo y al Laboratorio de Electricidad de la Universidad Nacional de Ingeniería por las facilidades brindadas durante la elaboración de este trabajo y a todas aquellas personas a quienes de una u otra forma debo la culminación del mismo.

C A P I T U L O I I

REPRESENTACION DE LA CURVA DE MAGNETIZACION POR LA ECUACION DE FROELICH

2.1. FUNDAMENTO MATEMATICO

La ecuación que representa con mayor sencillez y relativa exactitud la curva de magnetización es la ecuación de Froelich:

$$B = \frac{aH}{b + H} \quad (2.1)$$

La ecuación (2.1) aproxima con gran exactitud a la curva característica de magnetización experimental en todas las regiones de dicha curva, excepto en la inmediata proximidad del origen de coordenadas, en donde entra en juego el efecto perturbador del magnetismo residual.

Un modo correcto de representar a la curva de magnetización experimental en su totalidad, es aproximando la zona lineal mediante una ecuación de recta y las zonas de curvatura y de saturación mediante la ecuación de Froelich. Todo el problema se reduce a seleccionar adecuadamente dos puntos de la curva de magnetización experimental a fín de evaluar las dos constantes desconocidas de la ecuación (2.1).

2.2. DETERMINACION DE INDUCTANCIAS ESTATICA Y DINAMICA

Mediante una sencilla prueba en vacío de la máquina de inducción en estudio, se obtiene la curva característi

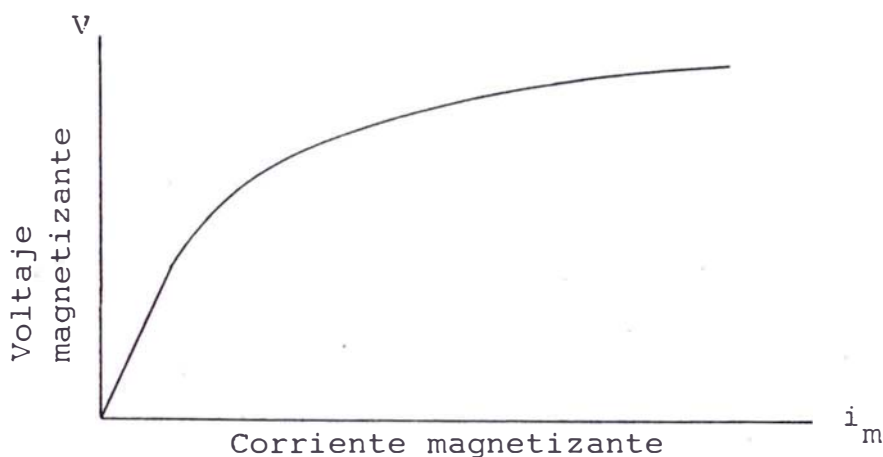


figura 2.1

ca experimental de la figura (2.1).

Mediante el empleo de las siguientes fórmulas conocidas - pasamos a obtener la curva característica de la figura -

(2.2):
$$\omega \lambda_m = \sqrt{2} V_R ; \lambda_m = \sqrt{2} \lambda \tag{2.2}$$

donde: λ_m = flujo magnetizante concatenado

V_R = tensión

ω = frecuencia de la red

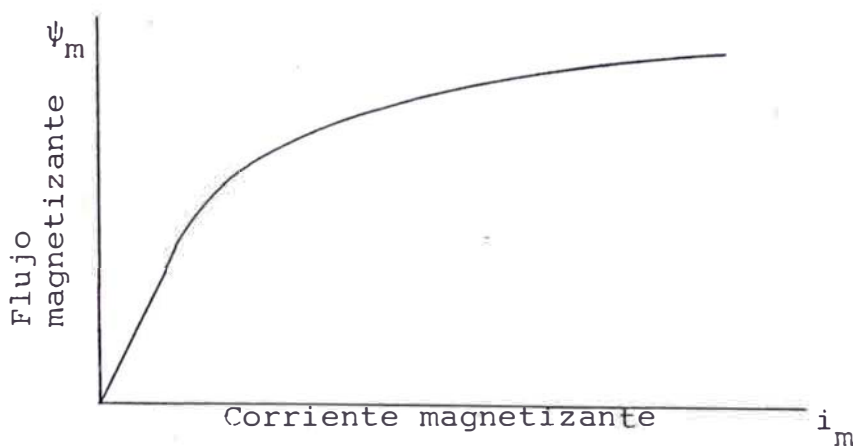


figura 2.2

Para cualquier valor de tensión suministrado a la máquina deberá obtenerse el valor correspondiente de inductancia

estática y dinámica; ello se conseguirá si para una tensión dada logramos obtener su correspondiente corriente magnetizante y seguidamente su valor respectivo de flujo magnetizante.

Para lograr este objetivo la curva característica de la figura (2.1) deberá ser expresada como una función de la forma $i_m = f(v)$ y la curva característica de la figura (2.2) como una función de la forma $\lambda_m = f(i_m)$.

Ambas funciones deberán ser representadas por medio de la ecuación de Froelich dadas a continuación:

$$i_m = \frac{b_1 V}{a_1 - V} \quad (2.3)$$

$$\lambda_m = \frac{a_2 i_m}{b_2 + i_m} \quad (2.4)$$

luego el problema se reduce a hallar las constantes a_1 , b_1 , a_2 y b_2 .

Para hallar a_1 y b_1 recurrimos a la curva característica experimental de la figura (2.1) en la cual tenemos como datos los puntos r.m.s. (V, i_m) .

Con solo dos puntos experimentales podremos hallar a_1 y b_1 . Estos dos puntos experimentales deberán ser tales que la ecuación teórica obtenida en base a estos dos puntos sea lo más exacta posible a la curva experimental.

Para lograr una gran aproximación en las tres regiones de la curva de magnetización se va a aproximar la zona lineal mediante la ecuación de una recta; entonces necesitamos de tres puntos experimentales para obtener una gran apro-

ximación, tal como se puede apreciar en la figura (2.3).

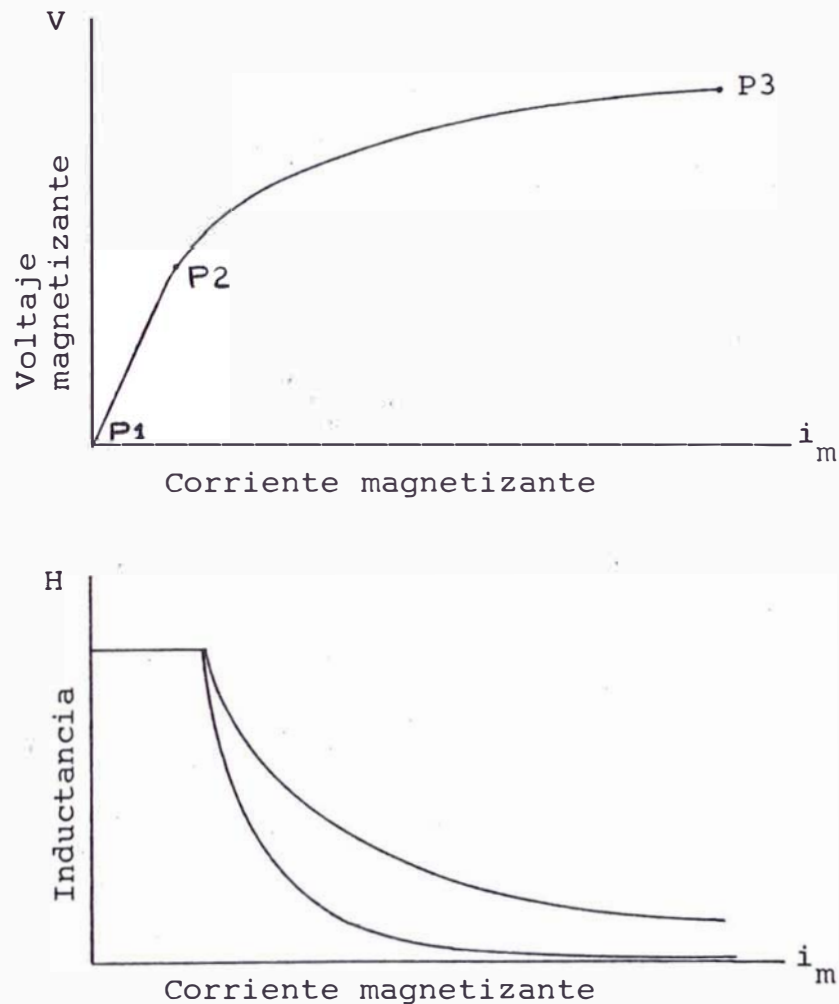


figura 2.3

El primer punto (P1) podrá ser cualquiera cercano al origen de coordenadas, el segundo punto (P2) estará ubicado en la vecindad de la zona de curvatura y el tercer punto (P3) de preferencia será el último punto experimental hallado.

De esta manera se podrá establecer dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas para luego obtener las constantes a_1 y b_1 :

$$i_m \Big|_{(P2)} = \frac{b_1 V}{a_1 - V} \Big|_{(P2)} \quad (2.5)$$

$$i_m \Big|_{(P3)} = \frac{b_1 V}{a_1 - V} \Big|_{(P3)} \quad (2.6)$$

La solución de estas ecuaciones es inmediata y de un modo análogo se obtendrán las constantes a_2 y b_2 .

El cálculo de las inductancias estática y dinámica para cualquier valor de tensión suministrado al estator se hará considerando las siguientes fórmulas:

$$L_m = \frac{\lambda_m}{i_m} \quad (2.7)$$

$$L = \frac{d \lambda_m}{d i_m} = \frac{a_2 b_2}{(b_2 + i_m)^2} \quad (2.8)$$

donde : L_m = inductancia estática

L = inductancia dinámica

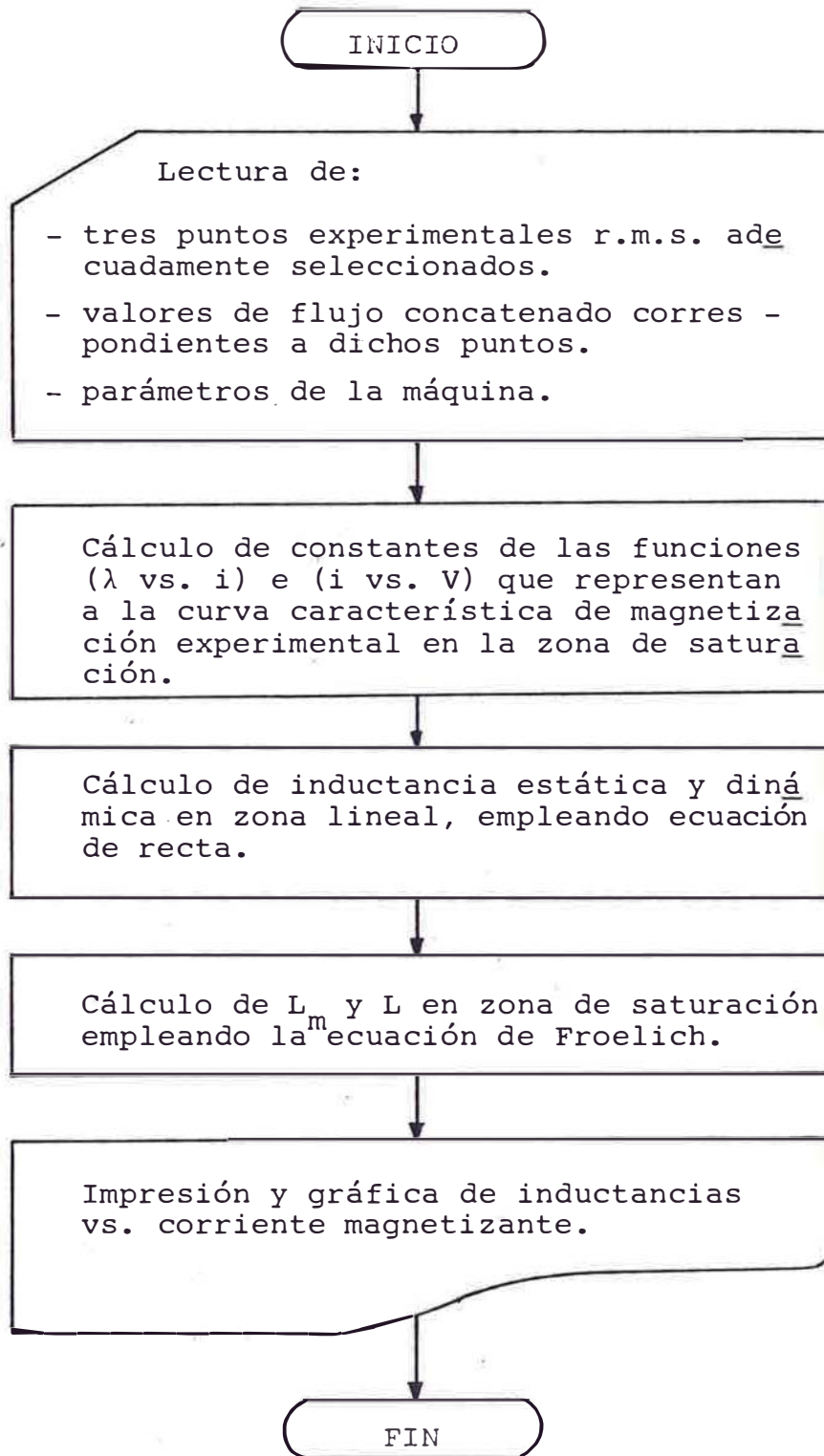
En la figura (2.3) apreciamos las curvas de estas inductancias, en ella podemos ver que en la zona lineal los valores de ambas inductancias son iguales para luego en la zona de saturación establecerse una diferencia marcada entre ambas curvas.

2.3. PROGRAMA DE CALCULO COMPUTACIONAL

A continuación se muestra el diagrama de flujo para la determinación de las inductancias estática y dinámica empleando la ecuación de una recta y la ecuación de Froelich a partir de la aproximación de la curva característica de magnetización.

El programa en lenguaje Fortran que describe esta tarea -

aproxima la curva característica experimental en la zona lineal mediante la ecuación de una recta y las zonas de curvatura y saturación mediante la ecuación de Froelich. En el capítulo VII se aprecia los resultados y gráficos de inductancias tabulando dichos valores en función de la corriente magnetizante para la máquina de inducción en prueba.



FROGLM FORTRAN A1 F 80 TRUNC=72 SIZE=121 LINE=43 COL=1 ALT=0
====>

```
      LM(I)=(FM2-FM1)/(IM2-IM1)
      LD(I)=(FM2-FM1)/(IM2-IM1)
51  CONTINUE
C    CALCULO DE LM Y LD EN ZONA DE SATURACION
      DO 61 I=240,390,10
C    V(I)=FLOAT(I)*F2/SQRT(3.)
      V(I)=FLOAT(I)
      VV=V(I)
      IL(I)=(B1*VV)/(A1-VV)
      IMM=IL(I)
      FM(I)=(A2*IMM)/(B2+IMM)
      FMM=FM(I)
      LM(I)=FMM/IMM
      LD(I)=A2*B2/(B2+IMM)**2.
61  CONTINUE
C    GRAFICA Y TABULACION DE INDUCTANCIAS      VS CORRIENTE MAG
      DO 71 I=30,390,10
      Y(I)=LM(I)
      Y1(I)=LD(I)
71  CONTINUE
      YMI=Y1(390)
      YMA=(FM2-FM1)/(IM2-IM1)
```

FROGLM FORTRAN A1 F 80 TRUNC=72 SIZE=121 LINE=64 COL=1 ALT=0
====>

```
      YMA=(FM2-FM1)/(IM2-IM1)
      DELY=(YMA-YMI)/100.
      WRITE(6,24)
24  FORMAT('1',/, 'FROELICH',1X, 'METHOD',1X, 'RESULT',1X,108('X'))
      WRITE(6,53)
53  FORMAT(' ',8('='),1X,6('='),1X,6('='),1X,'X'//)
      WRITE(6,54)
54  FORMAT(' ',1X, 'CMG',2X, 'IND',1X, 'EST',2X, 'IND',1X, 'DIN',1X,
      *'X',102('-'),'X', 'TLP',1X, 'X')
      WRITE(6,56)
56  FORMAT(' ',1X,3('='),5X, ' (*)',5X, ' (+)',3X, 'X',//)
      N1=IFIX(ABS(YMI/DELY)+0.5)+1
      N1=1
      IF(N1.GT.101) N1=101
      DO 25 I=30,390,10
      Z1=Y1(I)
      Z=Y(I)
      W=IL(I)
      DO 5 J=1,101
      LINE(J)=IC
5    LINA(J)=IC
      M=IFIX((Y(I)-YMI)/DELY+0.5)+1
```

FROGLM FORTRAN A1 F 80 TRUNC=72 SIZE=121 LINE=85 COL=1 ALT=0
====>

```
M=IFIX((Y(I)-YMI)/DELY+0.5)+1
IF(M.GT.101) M=101
M1=IFIX((Y1(I)-YMI)/DELY+0.5)+1
IF(M1.GT.101) M1=101
IF(M-N1) 28,29,30
30 DO 32 J=N1,M
   LINE(J)=IC
   IF(J.EQ.N1) LINE(J)=ID
   IF(J.EQ.M) LINE(J)=IE
32 CONTINUE
   GO TO 44
29 LINE(M)=ID
   GO TO 44
28 DO 40 J=M,N1
   LINE(J)=IC
   IF(J.EQ.N1) LINE(J)=ID
   IF(J.EQ.M) LINE(J)=IE
40 CONTINUE
44 WRITE(6,34) W,Z,Z1,LINE,I
34 FORMAT(' ',F5.2,1X,F8.6,1X,F8.6,'X',1X,101A1,I3,1X,'X')
   IF(M1-N1) 85,86,87
87 DO 88 J=N1,M1
```

FROGLM FORTRAN A1 F 80 TRUNC=72 SIZE=121 LINE=106 COL=1 ALT=0
====>

```
87 DO 88 J=N1,M1
   IF(J.EQ.M1) LINA(J)=IA
88 CONTINUE
   GO TO 89
86 LINE(M1)=ID
   GO TO 89
85 DO 90 J=M1,N1
   IF(J.EQ.M1) LINA(J)=IA
90 CONTINUE
89 WRITE(6,91) LINA
91 FORMAT('+',25X,101A1,5X)
25 CONTINUE
   WRITE(6,60)
60 FORMAT(' ',23X,108('X'))
   STOP
   END
```

* * * END OF FILE * * *

C A P I T U L O I I I

REPRESENTACION DE LA CURVA DE MAGNETIZACION USANDO INTER- POLACIONES LINEALES

3.1. FUNDAMENTO MATEMATICO

Existen diversos métodos de aproximación de la curva de magnetización de transformadores y máquinas eléctricas.

La aproximación puede ser alcanzada en todo el rango desde el origen hasta la región de saturación por el uso de una simple función algebraica o por alguna otra función trascendental. Estas representaciones teóricas tenderán a aproximarse en mayor ó menor grado en ciertas regiones.

El grado de exactitud con que las curvas teóricas alcanzan a las curvas experimentales se conoce como figura de mérito (ver Apéndice B).

Una ecuación simple que aproxima con alta exactitud un tramo comprendido entre dos puntos relativamente cercanos de la curva característica de magnetización experimental es:

$$B = \left| \frac{B_{j+1} - B_j}{H_{j+1} - H_j} \right| (H - H_j) + B_j \quad (3.1)$$

La ecuación (3.1) es la de una recta comprendida entre dos puntos consecutivos j y $j+1$.

El presente método a desarrollar es una de las mejores alternativas de aproximación por tener una figura de mérito

debajo de 0.01 siempre y cuando se cuente con una cantidad prudente de datos experimentales.

Este método numérico considera totalmente la no-linealidad de el material magnético, para ello la curva característica experimental de magnetización es subdividido en un número largo de secciones. Un método de interpolación lineal es entonces empleado y un programa de computación ayudará a describir esta tarea.

3.2. OBTENCION DE INDUCTANCIAS ESTATICA Y DINAMICA

Mediante una sencilla prueba de vacío a la máquina de inducción en estudio, se obtiene la curva característica de la figura (3.1).

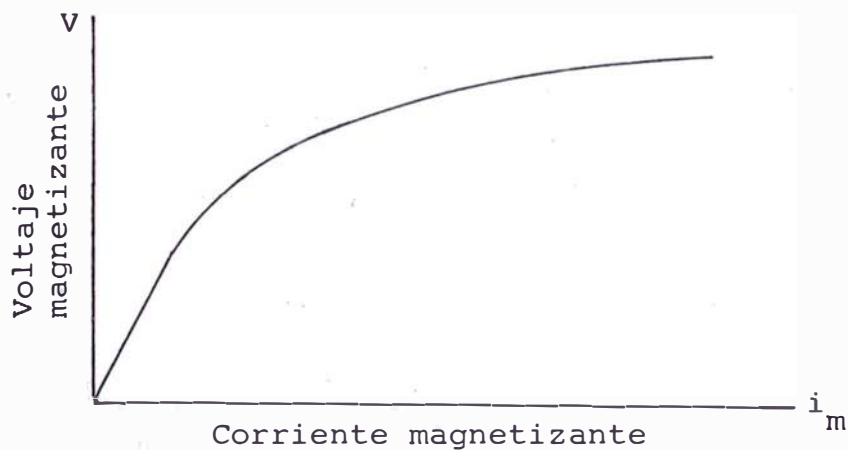


figura 3.1

Esta misma curva puede dibujarse considerando los valores de voltaje en el eje de abscisas y los valores de corriente magnetizante en el eje de ordenadas (i_m vs. V), tal como se muestra en la figura (3.2).

Además subdividiremos el eje de abscisas en $(n-1)$ partes iguales, es decir la distancia entre cada valor de tensión experimental es constante; la subdivisión de el eje

de abscisas será fácilmente realizada por un operador - quien de acuerdo a su requerimiento decidirá el número - de secciones iguales a obtener.

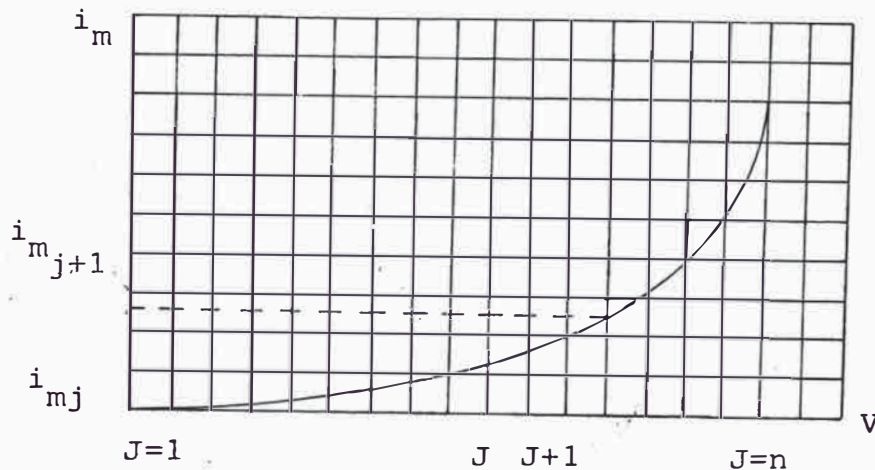


figura 3.2

El objetivo es obtener una función simple (ecuación lineal) en cada tramo comprendido entre dos puntos experimentales; si tenemos n puntos experimentales, obtendremos $(n-1)$ porciones individuales y tendremos que establecer $(n-1)$ ecuaciones lineales correspondientes a cada porción.

Para esto previamente determinaremos la pendiente en cada porción y su respectiva ecuación:

$$m_j = \frac{(i_{m_{j+1}} - i_{m_j})}{(V_{j+1} - V_j)} = \frac{(i_{m_{j+1}} - i_{m_j})}{\Delta V} \quad (3.2)$$

Luego, para cada valor de tensión suministrado, tendremos su respectivo valor de corriente magnetizante, dado en la ecuación (3.3):

$$i_m = m_j (V - V_j) + i_{m_j} \quad (3.3)$$

Mayor detalle del ensayo en vacío de la máquina de induc

ción en prueba en el Apéndice A.

Con el empleo de fórmulas conocidas se podrá obtener la siguiente curva de la figura (3.2).

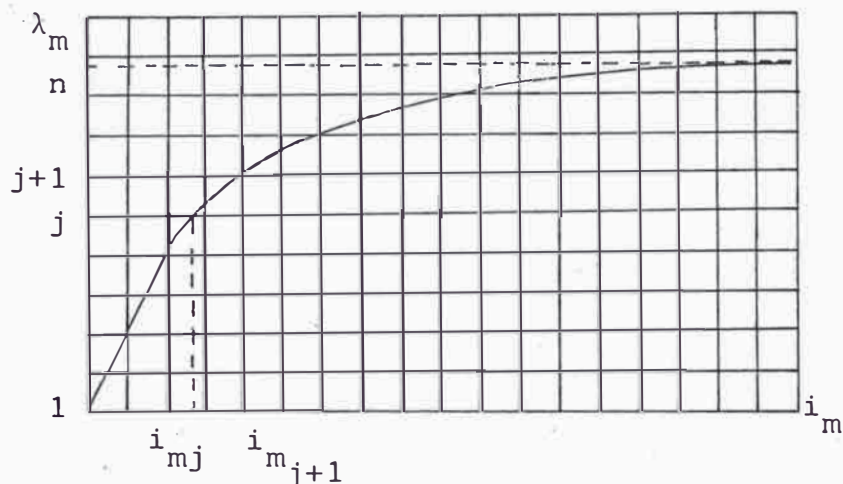


figura 3.3

Análogamente necesitamos conocer las $(n-1)$ ecuaciones de las porciones individuales de modo que para cualquier valor de i_m , hallemos su respectivo valor de λ_m .

La pendiente en cada porción está dada por la fórmula (3.

4):

$$m'_j = \frac{(\lambda_{mj+1} - \lambda_{mj})}{(i_{mj+1} - i_{mj})} \quad (3.4)$$

El valor de λ_m correspondiente al valor V de tensión suministrado a la máquina en prueba está dado por la ecua - ción (3.5):

$$\lambda_m = m'_j (i_m - i_{mj}) + \lambda_{mj} \quad (3.5)$$

Las inductancias estática y dinámica (L_m y L respectiva - mente) para cualquier valor de tensión suministrado a la máquina están dados por las siguientes fórmulas:

$$L_m = \frac{\lambda_m}{i_m} \quad (3.6)$$

$$L = \left| m' j \right| \quad (3.7)$$

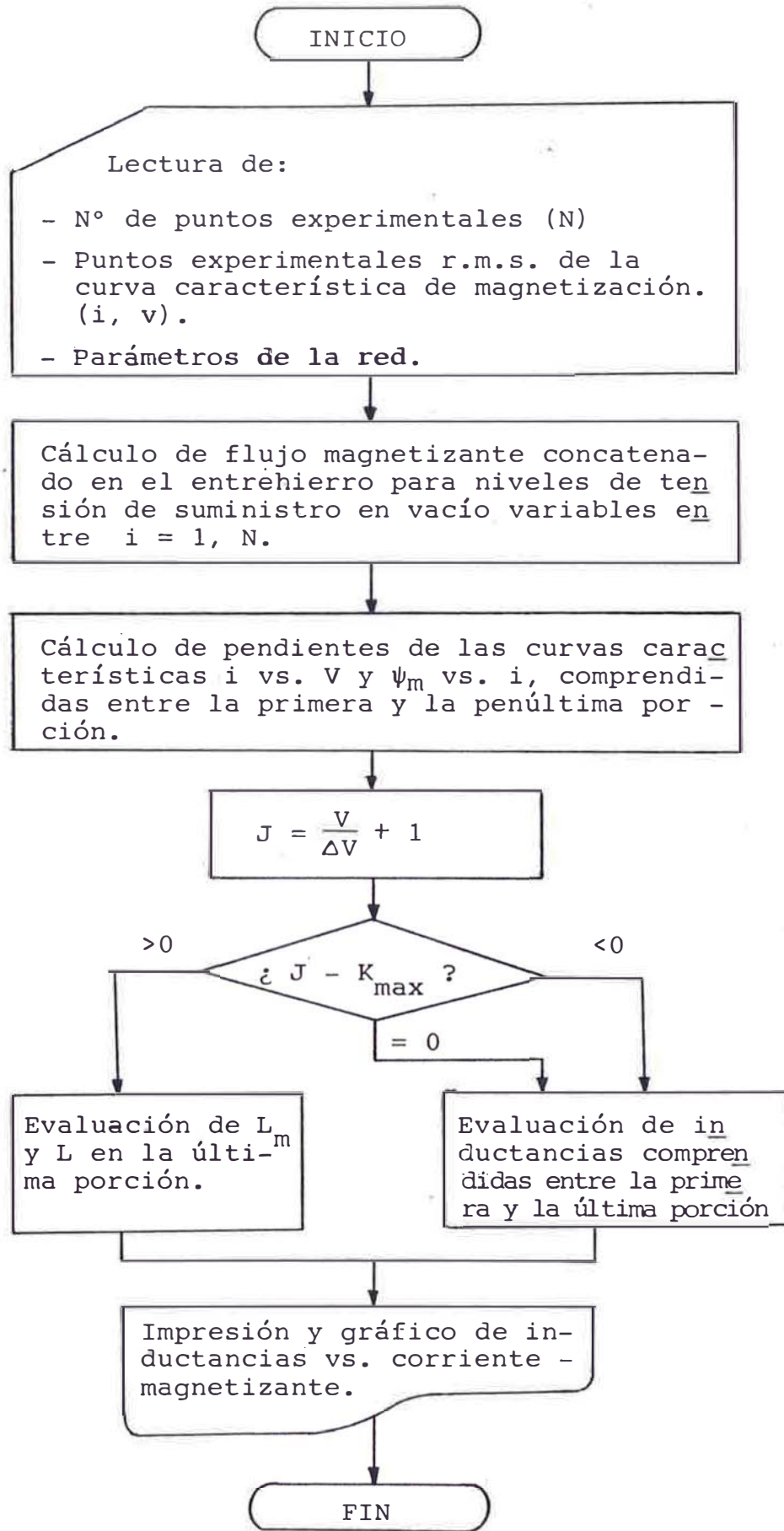
3.3. PROGRAMA FORTRAN DE EVALUACION DE INDUCTANCIAS

A continuación se muestra el diagrama de flujo del programa que evalúa y grafica los valores de inductancia estática y dinámica.

En ella apreciamos que se necesita conocer la pendiente - de la porción individual para un valor determinado de tensión suministrado al estator; ello se conseguirá empleando el índice J:

$$J = \frac{V}{\Delta V} + 1 \quad (3.8)$$

La utilización de este índice en el programa resulta muy importante, ya que, directamente refiriéndonos a éste, obtendremos la pendiente en la porción requerida y además - podremos referirnos a los dos puntos consecutivos del tramo que establecen justamente la ecuación del tramo en cuestión.




```

IPLGLM  FORTRAN  A1  F 80  TRUNC=72  SIZE=139  LINE=1  COL=1  ALT=0
====>
C      *****
C      *
C      *
C      *          PROGRAMA I
C      *          -----
C      *
C      *  PROGRAMA QUE EVALUA Y GRAFICA LOS VALORES DE INDUCTANCIA
C      *
C      *  ESTATICA Y DINAMICA, REPRESENTANDO A LA CURVA CARACTERISTICA
C      *
C      *  DE MAGNETIZACION MEDIANTE INTERPOLACIONES LINEALES
C      *
C      *****
C      DECLARACION DE VARIABLES
C      REAL XL(40), VT(40), FM(40), MIE(40), MFM(40)
C      REAL F, VAR, VIM, F2, FIN, VPL, ZM
C      REAL EM(360), ED(360), ZZ(360), FMG(360), Y(360), Y1(360), FMR
C      REAL A1, A2, RA, RE, FMA, FMX, VF, AVE, RI, RO, SA, SE, FOR
C      INTEGER KMAX, DV, N1, N2, N4
C      DIMENSION LINE(101), LINA(101)
C      DATA DV/10/, F/60./, P/2./,
C      *F2/1./, IA/'+'/, IC/' '/, ID/'I'/, IE/'*'/
C      LECTURA DE DATOS EXPERIMENTALES

```

```

IPLGLM  FORTRAN  A1  F 80  TRUNC=72  SIZE=139  LINE=22  COL=1  ALT=0
====>
C      LECTURA DE DATOS EXPERIMENTALES
C      N=0
C      READ(5,*) N7
C      21 READ(5,14,END=36) A1, A2
C      14 FORMAT(F7.3, F8.4)
C      N=N+1
C      XL(N)=A1
C      VT(N)=A2
C      GO TO 21
C      36 DO 99 I=1,N7
C      99 WRITE(6,31) I, XL(I), VT(I)
C      31 FORMAT(' ', //10X,I3,2X,F7.3,2X,F7.2)
C      CALCULO DEL FLUJO MAGNETIZANTE CONCATENADO EN EL ENTREHIERRO
C      FIN=377.
C      DO 11 I=1,N7
C      VAR=VT(I)
C      VIM=VAR*F2/SQRT(3.)
C      VIM=VAR
C      FM(I)=VIM/FIN
C      11 CONTINUE
C      CALCULO DE PENDIENTES DE CURVAS CARACTERISTICAS
C      N8=N7-1

```

IPLGLM FORTRAN A1 F 80 TRUNC=72 SIZE=139 LINE=43 COL=1 ALT=0
====>

```
      N8=N7-1
      DO 12 I=1,N8
      J=I+1
      RA=XL(J)
      RE=XL(I)
      FMA=FM(I)
      FMX=FM(J)
C     MIE(I)=(RA-RE)*SQRT(3.)/FLOAT(DV)
      MIE(I)=(RA-RE)/FLOAT(DV)
      MFM(I)=(FMX-FMA)/(RA-RE)
12  CONTINUE
C     CALCULO DE INDUCTANCIAS
      DO 41 I=30,390,10
      KMAX=N8
      VPL=FLOAT(I)
C     VF=VPL*F2/SQRT(3.)
      VF=VPL
      K=I/DV+1
      L=K-1
      IF(L-KMAX) 4,4,59
59  K=KMAX
      AVE=VT(K)
```

IPLGLM FORTRAN A1 F 80 TRUNC=72 SIZE=139 LINE=64 COL=1 ALT=0
====>

```
      AVE=VT(K)
      VPL=AVE+10.
C     VF=VPL*F2/SQRT(3.)
      VF=VPL
      VPL=FLOAT(I)
4  RI=XL(K)
C     RO=VT(K)*F2/SQRT(3.)
      RO=VT(K)*F2
      SA=MIE(K)
      SE=FM(K)
      FOR=MFM(K)
      ZZ(I)=RI+(VF-RO)*SA
      ZM=ZZ(I)
      FMG(I)=FOR*(ZM-RI)+SE
      FMR=FMG(I)
      EM(I)=FMR/ZM
      ED(I)=ABS(FOR)
41 CONTINUE
      DO 71 I=30,390,10
      Y(I)=EM(I)
      Y1(I)=ED(I)
71 CONTINUE
```

IPLGLM FORTRAN A1 F 80 TRUNC=72 SIZE=139 LINE=85 COL=1 ALT=0
====>

```
71 CONTINUE
   YMI=ED(390)
   YMA=EM(30)
   DELY=(YMA-YMI)/100.
   N1=1
   IF(N1.GT.101) N1=101
   WRITE(6,24)
24  FORMAT('1',//,'INTERPOLATION',2X,'LINEAR',2X,108('X')//13('='),
   *2X,6('='),2X//)
   WRITE(6,54)
54  FORMAT(' ',1X,'CMG',2X,'EST',2X,'IND',1X,'DIN',1X,'IND',1X,'X',
   *102('-'),'TLP',1X,'X'//1X,3('='),2X,3('='),2X,3('='),1X,3('='))//,
   *8X,'(*)',6X,'(+)',3X//)
   DO 25 I=30,390,10
   Z=Y(I)
   Z1=Y1(I)
   W=ZZ(I)
   DO 50 J=1,101
   LINE(J)=IC
50  LINA(J)=IC
   M=IFIX((Y(I)-YMI)/DELY+0.5)+1
   IF(M.GT.101) M=101
```

IPLGLM FORTRAN A1 F 80 TRUNC=72 SIZE=139 LINE=106 COL=1 ALT=0
====>

```
   IF(M.GT.101) M=101
   M1=IFIX((Y1(I)-YMI)/DELY+0.5)+1
   IF(M1.GT.101) M1=101
   IF(M-N1) 28,29,30
30  DO 32 J=N1,M
   IF(J.EQ.N1) LINE(J)=ID
   IF(J.EQ.M) LINE(J)=IE
32  CONTINUE
   GO TO 44
29  LINE(M)=ID
   GO TO 44
28  DO 40 J=M,N1
   IF(J.EQ.N1) LINE(J)=ID
   IF(J.EQ.M) LINE(J)=IE
40  CONTINUE
44  WRITE(6,34) W,Z,Z1,LINE,I
34  FORMAT(' ',F5.2,1X,F8.6,1X,F8.6,'X',1X,101A1,I3,1X,'X')
   IF(M1-N1) 85,86,87
87  DO 88 J=N1,M1
   IF(J.EQ.M1) LINA(J)=IA
88  CONTINUE
   GO TO 89
```

IPLGLM FORTRAN A1 F 80 TRUNC=72 SIZE=139 LINE=127 COL=1 ALT=0
====>

```
      GO TO 89
86 LINE(M1)=ID
      GO TO 89
85 DO 90 J=M1 ,N1
      IF(J.EQ.M1) LINA(J)=IA
90 CONTINUE
89 WRITE(6,91) LINA
91 FORMAT('+',25X,101A1,5X)
25 CONTINUE
      WRITE(6,60)
60 FORMAT(' ',23X,108('X'))//)
      STOP
      END
```

* * * END OF FILE * * *

C A P I T U L O I V

APROXIMACION DE LA CURVA DE MAGNETIZACION MEDIANTE FORMULAS POLINOMICAS

4.1. FUNDAMENTO MATEMATICO

La deducción de fórmulas es simple, si consideramos un inductor para el cual el voltaje aplicado V , produce una corriente i , y flujo concatenado λ :

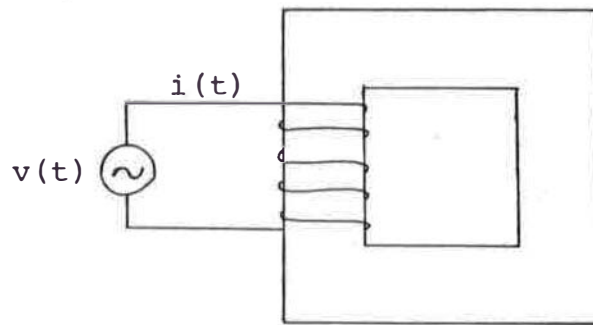


figura 4.1

Entonces de la figura (4.1), establecemos:

$$v(t) = Ri(t) + \frac{d \lambda}{dt}(t) \quad (4.1)$$

Donde t denota tiempo y R es una resistencia que simula las pérdidas de energía en el inductor.

La relación entre la corriente y flujo concatenado es no lineal. El procedimiento normal es trabajar con una idealizada función monotónica valuada, representando la corriente en función del flujo concatenado.

La curva de magnetización es aproximada por un ajuste polinominal entregado por la ecuación (4.2):

$$i(t) = A'\lambda(t) + B'\lambda^n(t) \quad (4.2)$$

donde: $\lambda(t) = \lambda_m \cos \omega t$; y (4.3)

$$n = 3, 5, 7, \dots,$$

Reemplazando la ecuación (4.3) en la ecuación (4.2) y simplificando tenemos una nueva expresión de la corriente en función del tiempo:

$$i(t) = (A'\lambda_m + b_1 B'\lambda_m^n) \cos \omega t + b_3 B'\lambda_m^n \cos 3\omega t + \dots \\ + b_n B'\lambda_m^n \cos n\omega t \quad (4.4)$$

Se puede apreciar que la onda de corriente está conformada por una fundamental, seguido de una serie de armónicos impares, cuyo valor eficaz tiene por expresión:

$$I_L = (A'\lambda_m + b_1 B'\lambda_m^n)^2 + (b_3 B'\lambda_m^n)^2 + \dots + (b_n B'\lambda_m^n)^2 \quad 1/2 \quad (4.5)$$

además: $\sqrt{2} V_R = \omega \lambda_m$; y (4.6)

$$A' = A\omega \quad ; \quad B' = B\omega^n$$

De las ecuaciones (4.5), (4.6) y (4.7) se tiene:

$$A^2 V_R^2 + \alpha V_R^{n+1} AB + Z V_R^{2n} B^2 - I_L^2 = 0 \quad (4.8)$$

Tenemos una expresión polinómica de valores r.m.s. de tensión y corriente. El objetivo es hallar las constantes A y B del polinomio dado, para ello evaluamos la ecuación - (4.8) en dos puntos experimentales de la curva de magnetización; estos dos puntos experimentales deberán ser juiciosamente seleccionados del total de puntos y para ello se fijan dos condiciones:

$$\gamma V_R \leq 0.5 \quad (4.9)$$

$$\frac{\gamma I_L}{\gamma V_R} \geq \sqrt{\frac{Z - (\alpha/2)^2}{Z}} \quad (4.10)$$

Donde γV_R es la relación del voltaje r.m.s. en el primer punto al voltaje r.m.s en el segundo punto y γI_L es la relación de corrientes r.m.s en forma análoga.

Seleccionando adecuadamente los dos puntos experimentales de la curva r.m.s, tenemos:

$$a_1 A^2 + b_1 B^2 + c_1 AB - d_1 = 0 \quad (4.8a)$$

$$a_2 A^2 + b_2 B^2 + c_2 AB - d_2 = 0 \quad (4.8b)$$

donde:

$$\begin{aligned} a &= V_R^2 \\ b &= V_R^{n+1} \\ c &= Z V_R^{2n} \\ d &= I_L^2 \end{aligned} \quad (4.11)$$

Manipulando las ecuaciones (4.8a) y 4.8b) despejamos A:

$$A = (k_1 + k_2 B^2)/k_3 B \quad (4.12)$$

donde:

$$\begin{aligned} k_1 &= d_1 a_2 - d_2 a_1 \\ k_2 &= b_2 a_1 - b_1 a_2 \\ k_3 &= c_1 a_2 - c_2 a_1 \end{aligned} \quad (4.13)$$

Sustituyendo la ecuación (4.12) en las ecuaciones (4.8a) y (4.8b), obtendremos:

$$MB^4 + NB^2 + P = 0 \quad (4.14)$$

donde:

$$\begin{aligned} M &= a_1 k_2^2 + b_1 k_3^2 + k_2 k_3 c_1 \\ N &= 2k_1 k_2 a_1 + c_1 k_1 k_3 - d_1 k_3^2 \\ P &= a_1 k_1^2 \end{aligned} \quad (4.15)$$

Luego:

$$B^2 = \frac{-N \pm \sqrt{N^2 - 4MP}}{2M} \quad 4.16)$$

Se espera que la ecuación (4.16) tenga dos raíces reales positivas de B^2 , pero para valores positivos de A no podemos tomar raíces positivas coincidentes de B^2 .

Puede comprobarse que los valores más altos positivos de B^2 entrega valores negativos de A y los más bajos valores positivos de B^2 , admite únicamente valores positivos de A ; por tanto los más bajos valores positivos de B^2 son tomados.

Finalmente las constantes A' y B' son halladas reemplazando los valores de A y B en la ecuación (4.7).

4.2. EXTENSION DEL METODO A DOS REACTORES EN SERIE Y PARALELO

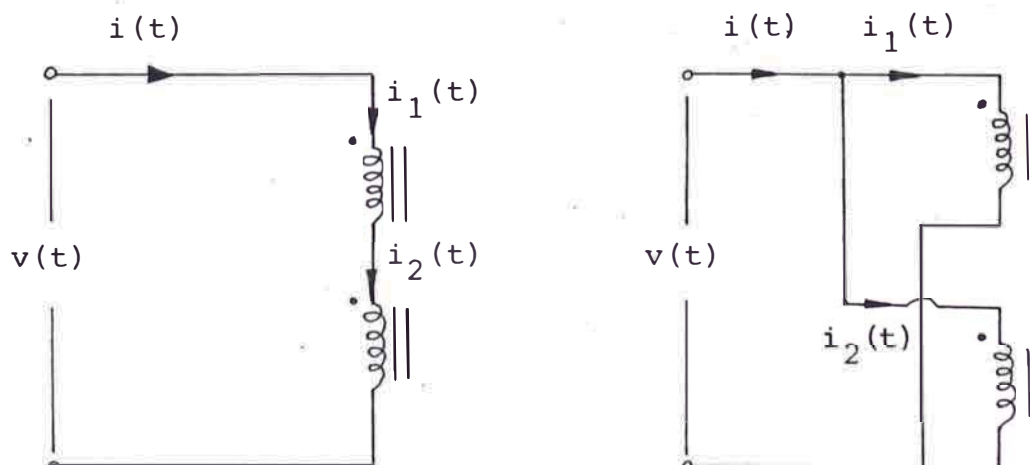


figura 4.2

Para el caso de reactores en paralelo establecemos las ecuaciones instantáneas de corriente individualmente:

$$i_1 = A_1' \lambda + B_1' \lambda^n \quad (4.17)$$

$$i_2 = A_2' \lambda + B_2' \lambda^n$$

De la figura (4.2):

$$\begin{aligned} i &= i_1 + i_2 = (A_1' + A_2') \lambda + (B_1' + B_2') \lambda^n = \\ &= A_{1eq}' \lambda + B_{1eq}' \lambda^n \end{aligned} \quad (4.18)$$

Las constantes desconocidas A_{1eq}' y B_{1eq}' son halladas a partir de las constantes A_1' , B_1' , A_2' y B_2'

Para el caso de reactores conectados en serie, los puntos (λ, i) de la curva característica de magnetización son obtenidas estableciendo primero las ecuaciones instantáneas de corriente individualmente:

$$i_1 = A_1' \lambda_1 + B_1' \lambda_1^n \quad (4.19)$$

$$i_2 = A_2' \lambda_2 + B_2' \lambda_2^n \quad (4.20)$$

Del circuito serie:

$$i = i_1 = i_2 \quad (4.21)$$

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 \quad (4.22)$$

$$i = A_{1eq}' \lambda + B_{1eq}' \lambda^n \quad (4.23)$$

La relación resultante λ/i entregada por la característica de magnetización podrá ser hallada por cualquiera de los siguientes métodos:

- a) El primer método consiste en asumir algún valor de corriente y obtener los valores correspondientes de λ_1 e λ_2 (ecuaciones 4.19 y 4.20); luego de la ecuación (4.

21) y usando el método de Newton-Raphson se logra obtener el valor de λ y por consiguiente los valores de A'_{1eq} y B'_{1eq} .

- b) El segundo método consiste en determinar el valor de la corriente i_1 para un valor particular asumido de λ_1 a partir de la ecuación (4.19).

De la ecuación (4.20) y empleando Newton-Raphson se halla el valor de λ_2 y por consiguiente λ , para finalmente determinar las constantes A'_{1eq} y B'_{1eq} .

4.3. DESCRIPCION DEL PROGRAMA FORTRAN

4.3.1. Diagrama de Flujo

La secuencia de formulación del programa (diagrama de flujo) ha sido realizado en forma general de manera que este diagrama siempre pueda usarse cuando se requiera establecer la representación de una curva de magnetización experimental con polinomios de grados diferentes; pues únicamente deberán cambiar las condiciones para la selección de los dos puntos experimentales y para la determinación de las constantes a, b, c y d. Esto es importante ya que muchas veces conviene trabajar considerando la mayor cantidad de armónicos de corriente, y otras veces no es conveniente, ya que de acuerdo a los sentidos positivos de los circuitos magnéticos en los núcleos de los transformadores, las componentes de frecuencias diferentes a la fundamental se anulan, dejando como resultante la curva casi sinusoidal.

En el diagrama de flujo se aprecia la necesidad de contar con una cantidad suficiente de puntos experimentales para luego en base a ciertas comparaciones seleccionar los dos puntos experimentales que después servirán para hallar las constantes de aproximación de la curva de magnetización.

De esta forma se logra aproximar la curva de magnetización dada por la ecuación:

$$i_L = A'\lambda + B'\lambda^n \quad (4.24)$$

y las inductancias están dadas por:

$$L_m = \left| \frac{\lambda}{i_L} \right| \quad (4.25)$$

$$L = \left| \frac{d\lambda}{d i_L} \right| = \left| \frac{1}{(A' + nB'\lambda^{n-1})} \right| \quad (4.26)$$

donde: λ = flujo magnetizante concatenado

i_L = corriente magnetizante

L_m = inductancia estática

L = inductancia dinámica

4.3.2. Introducción de Datos

Para conseguir un alto grado de exactitud en la representación de la curva de magnetización es necesario realizar el cálculo descrito para algunas combinaciones del total de puntos de la curva r.m.s. ya que son varios los pares de puntos que satisfacen las condiciones antes establecidas. La realización de esta tarea es inmediata cuando el trabajo se hace por cómputo.

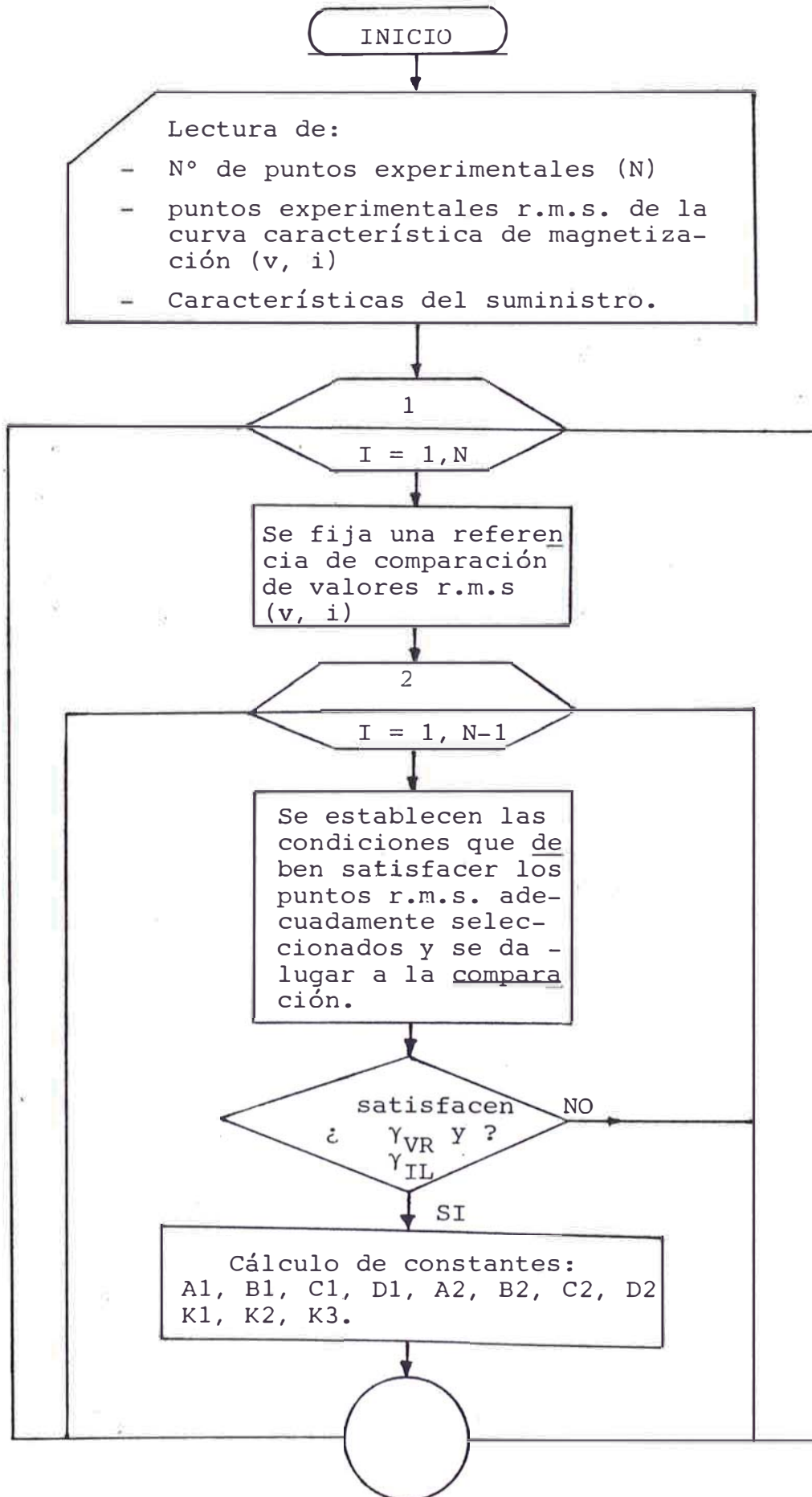
A continuación se muestra la forma como se introduce los datos experimentales.

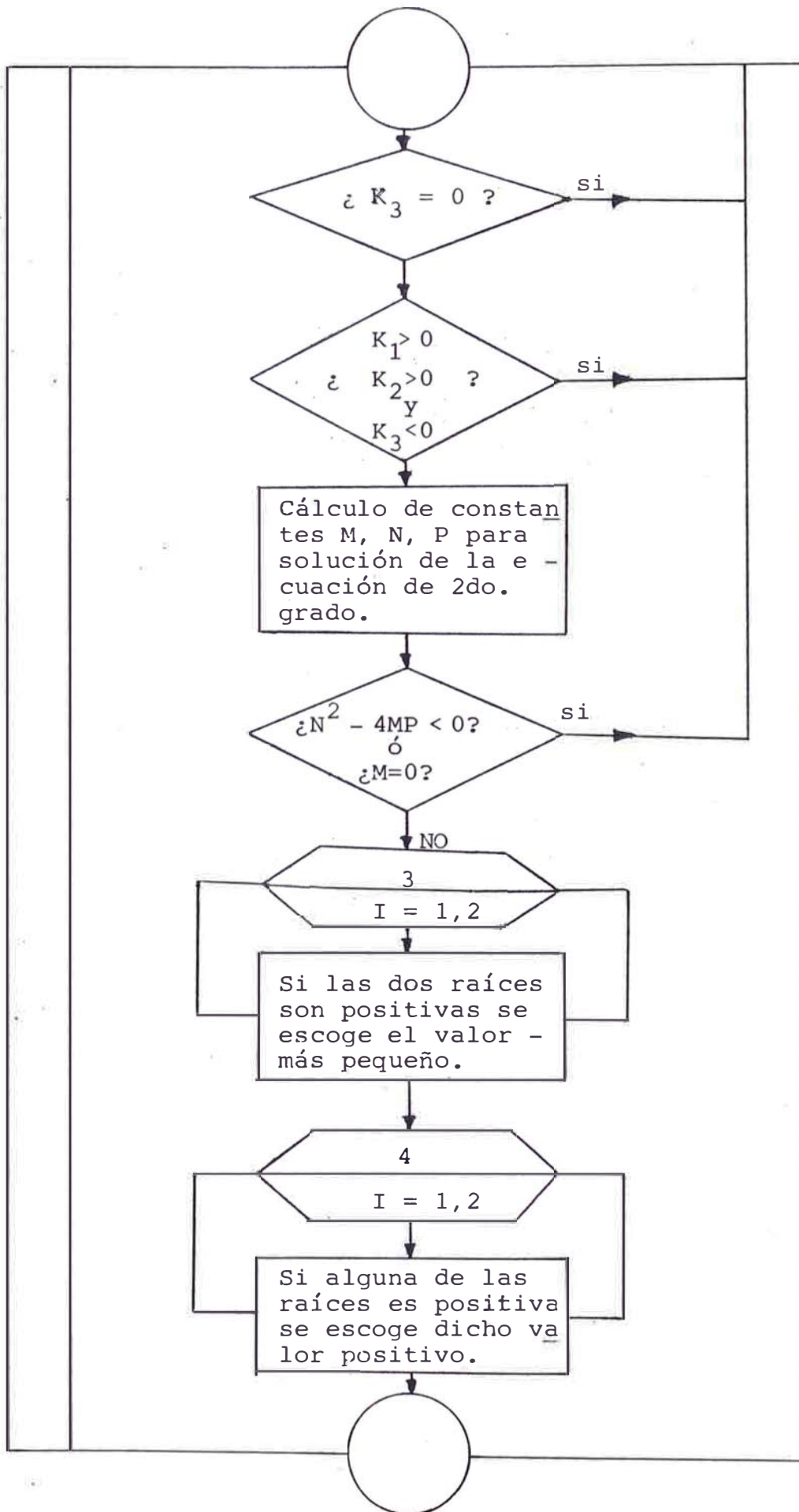
INTRODUCCION DE DATOS

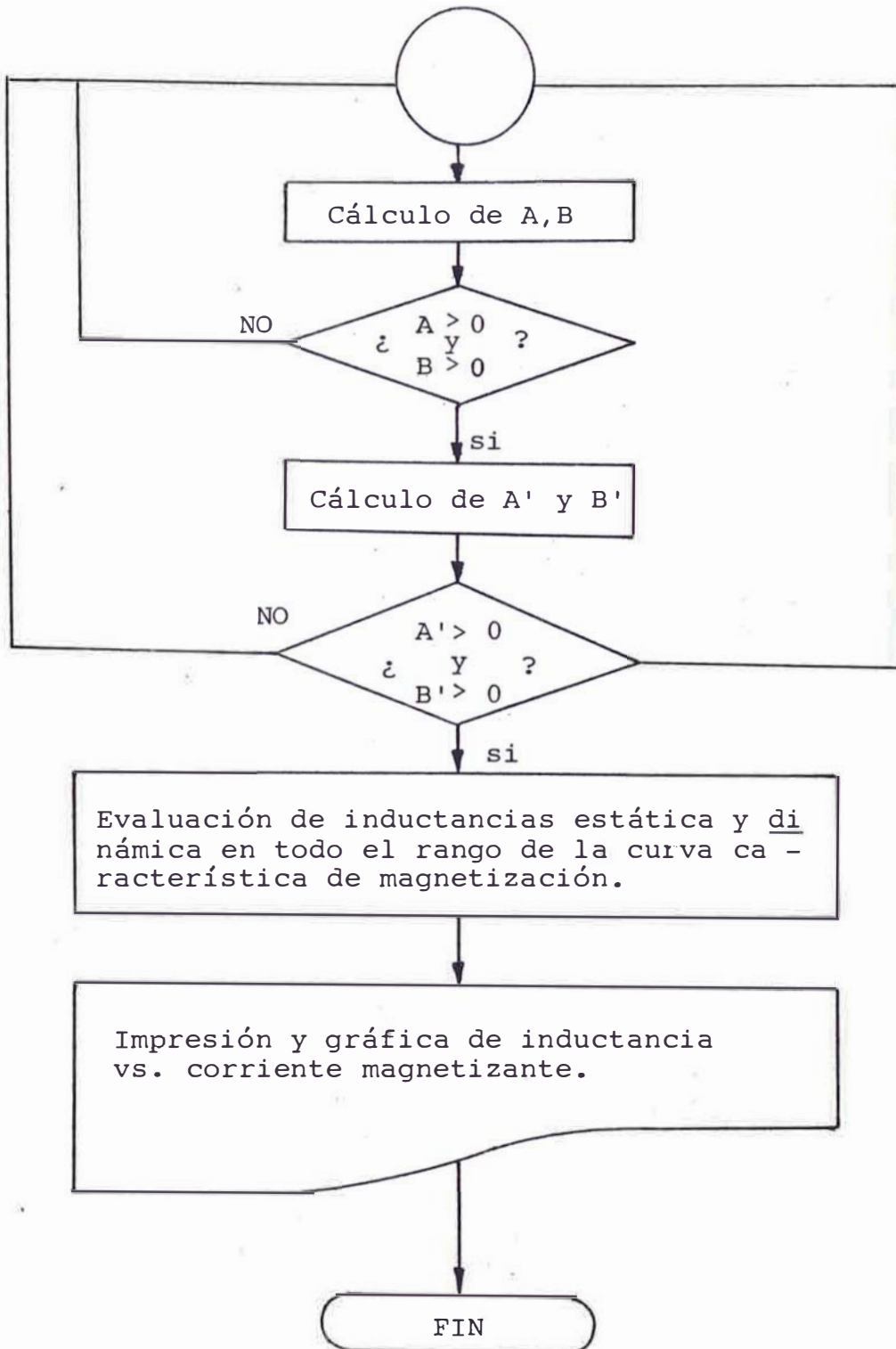
17

0.12	30.00
0.15	40.00
0.18	50.00
0.21	60.00
0.24	70.00
0.27	80.00
0.31	90.00
0.35	100.00
0.39	110.00
0.44	120.00
0.49	130.00
0.53	140.00
0.59	150.00
0.65	160.00
0.71	170.00
0.78	180.00
0.85	190.00

Luego tenemos el diagrama de flujo que muestra en forma general la secuencia de aproximación de la curva de magnetización y obtención de inductancias.







4.3.3. Programas de Cálculo de Inductancias

Cada programa Fortran descrito calcula los valores de inductancia estática y dinámica correspondientes a valores definidos de corriente magnetizante. Se ha establecido las ecuaciones considerando un único reactor, pero el método es extendible al caso de tener máquinas trifásicas, ya que es común contar con la simetría de los devanadós y es normal tener siempre un suministro trifásico balanceado, de tal forma que un sistema monofásico equivalente represente al sistema trifásico.

Como ejemplo se muestran tres programas de cálculo de inductancias, aproximando la curva característica de magnetización por polinomios de 3er. 5to. y 7mo. orden.


```

RPGLM   FORTRAN  A1  F 80  TRUNC=72 SIZE=192 LINE=1 COL=1 ALT=0
====>
C      *****
C      *
C      *                PROGRAMA  II                *
C      *
C      *
C      * PROGRAMAS QUE EVALUA Y GRAFICA LAS INDUCTANCIAS ESTADICA Y *
C      * DINAMICA , A PARTIR DE UNA REPRESENTACION POLINOMICA DE *
C      * QUINTO ORDEN DE LA CURVA CARACTERISTICA DE MAGNETIZACION *
C      *
C      *****
C      DECLARACION DE VARIABLES
C      REAL XL(100),VT(100),D,OM,FEP,FOP
C      REAL*8 U1,DENO(400),EM(400),ED(400),E,LMB(400),FAP
C      REAL*8 VFA(400),ZZ(400),VPP,VFP,LMBP,XDEN,XMP,Y(400),Y1(400)
C      REAL*8 K1,K2,K3,P2,Q1,X(5),RA,RE,GRANDE,RO,B20,CHICO,DELY,FIP
C      REAL*8 A1,B1,C1,D1,A2,B2,C2,D2,IL1,IL2,IL3,RU,Z,Z1,W,YMI,YMA
C      REAL*8 P,GRANDE,CHICO,C,A,B,AP,BP,LMBP,VR1,VR2,VR3,F2
C      INTEGER S, T,N4,M1,N1,N7,N8
C      DATA IA/'+'/,IB/' '/,ID/'I'/,IE/'*'/,F2/1.D0/,IC/' '/
C      DIMENSION LINE(101),LINA(101)

```

```

RPGLM   FORTRAN  A1  F 80  TRUNC=72 SIZE=192 LINE=22 COL=1 ALT=0
====>
C      DIMENSION LINE(101),LINA(101)
C      LECTURA DE DATOS EXPERIMENTALES (CURVA RMS)
C      N4=0
C      READ(5,*)N7
C      210 READ(5,140,END=21) A1,A2
C      140 FORMAT(F7.3,F8.4)
C      N4=N4+1
C      XL(N4)=A1
C      VT(N4)=A2
C      GO TO 210
C      21 DO 990 I=1,N7
C      990 WRITE(6,310) I,XL(I),VT(I)
C      310 FORMAT(' ',/,10X,I3,2X,F7.3,2X,F8.4)
C      INICIO DEL PROCESO
C      D=SQRT(13./63.)
C      DO 120 I1=1,N7
C      AP=-1.
C      BP=AP
C      L=N7+1-I1
C      IL2=XL(L)
C      VR2=VT(L)
C      N8=N7-1

```

RPGLM FORTRAN A1 F 80 TRUNC=72 SIZE=192 LINE=43 COL=1 ALT=0
====>

```
      N8=N7-1
      DO 130 J=1,N8
      K=N7-J
      VR3=VT(K)
      IL3=XL(K)
      GMVR=VR3/VR2
      GMIL=IL3/IL2
      GMMA=GMIL/GMVR
      IF(GMVR.LE.0.5.AND.GMMA.GE.D) GO TO 540
      GO TO 130
540  VR1=VR3
      IL1=IL3
C     CALCULO DE CONSTANTES
      A1=VR1**2.
      B1=(63./8.)*VR1**10.
      C1=5.*VR1**6.
      D1=IL1**2.
      A2=VR2**2.
      B2=(63./8.)*VR2**10.
      C2=5.*VR2**6.
      D2=IL2**2.
      K1=(D1*A2)-(D2*A1)
```

RPGLM FORTRAN A1 F 80 TRUNC=72 SIZE=192 LINE=64 COL=1 ALT=0
====>

```
      K1=(D1*A2)-(D2*A1)
      K2=(B2*A1)-(B1*A2)
      K3=(C1*A2)-(C2*A1)
      IF(K3.EQ.0.)GO TO 130
      IF(K1.GT.0.AND.K2.GT.0.AND.K3.LT.0.) GO TO 130
C     SOLUCION DE LA ECUACION DE 2DO GRADO CON EL MENOR VALOR +
C     DE B2
      E=(A1*K2**2)+(B1*K3**2)+(K2*K3*C1)
      U1=(2.*K1*K2*A1)+(C1*K1*K3)-(D1*K3**2)
      P=A1*K1**2
      P2=(U1**2)-(4.*E*P)
      IF(P2.LT.0.OR.E.EQ.0.) GO TO 130
      Q1=DSQRT(P2)
      X(1)=(-U1+Q1)/(2.*E)
      RA=X(1)
      X(2)=(-U1-Q1)/(2.*E)
      RE=X(2)
      IF(RA.LT.0.AND.RE.LT.0.) GO TO 130
      IF(RA.GE.0.AND.RE.GE.0.) GO TO 250
      GRANDE=RA
      DO 160 S=1,2
      RO=X(S)
```

RPGLM FORTRAN A1 F 80 TRUNC=72 SIZE=192 LINE=85 COL=1 ALT=0
====>

```
RO=X(S)
IF(RO.LE.GRANDE) GO TO 160
GRANDE=RO
160 CONTINUE
B20=GRANDE
GO TO 170
250 CHICO=X(1)
DO 680 T=1,2
RU=X(T)
IF(RU.GT.CHICO) GO TO 680
CHICO=RU
680 CONTINUE
B20=CHICO
170 C=B20
IF(C.EQ.0.) GO TO 130
B=DSQRT(C)
A=(K1+K2*C)/(K3*B)
IF(A.GT.0.AND.B.GT.0.) GO TO 190
130 CONTINUE
190 AP=A*377.
BP=B*377.**5.
IF(AP.GT.0.AND.BP.GE.0.) GO TO 200
```

RPGLM FORTRAN A1 F 80 TRUNC=72 SIZE=192 LINE=106 COL=1 ALT=0
====>

```
IF(AP.GT.0.AND.BP.GE.0.) GO TO 200
120 CONTINUE
200 CONTINUE
DO 301 I5=30,360,10
VPP=DFLOAT(I5)
C VFA(I5)=VPP*F2/DSQRT(3.D0)
VFA(I5)=VPP*F2
VFP=VFA(I5)
LMB(I5)=VFP/(377.D0)
LMBP=LMB(I5)
ZZ(I5)=((AP*LMBP)+(BP*LMBP**5.))
XMP=ZZ(I5)
EM(I5)=LMBP/XMP
DENO(I5)=(AP+(5.*BP*LMBP**4.))
XDEN=DENO(I5)
ED(I5)=1./XDEN
301 CONTINUE
C GRAFICA Y TABULACION DE INDUCTANCIAS VS CORR MAGNET
DO 371 I6=30,360,10
Y(I6)=EM(I6)
Y1(I6)=ED(I6)
371 CONTINUE
```

RPGLM FORTRAN A1 F 80 TRUNC=72 SIZE=192 LINE=127 COL=1 ALT=0
====>

```
371 CONTINUE
    YMI=ED(360)
    YMA=EM(30)
    DELY=(YMA-YMI)/(100.00)
    N1=1
    WRITE(6,640)
640 FORMAT('1',///,'RESULTS OF THE NEW METHOD (EQUATION OF',
* '5TH ORDER)')//)
    WRITE(6,54)
54 FORMAT(' ',1X,'CMG',3X,'EST',1X,'IND',1X,'DIN',1X,'IND',1X,'X',
*103('-',),'TLP',1X,'X')
    WRITE(6,56)
56 FORMAT(' ',1X,3('='),5X,'(*)',5X,'(+) ',3X,'X'///)
    DO 25 I9=30,360,10
        Z1=Y1(I9)
        Z=Y(I9)
        W=ZZ(I9)
        DO 50 J=1,101
            LINE(J)=IB
50 LINA(J)=IB
        FAP=((Y(I9)-YMI)/DELY+0.500)
        FEP=FAP+1.
```

RPGLM FORTRAN A1 F 80 TRUNC=72 SIZE=192 LINE=148 COL=1 ALT=0
====>

```
FEP=FAP+1.
M=FEP
IF(M.GT.101) M=101
FIP=((Y1(I9)-YMI)/DELY+0.500)
FOP=FIP+1.
M1=FOP
IF(M1.GT.101) M1=101
IF(M-N1) 28,29,30
30 DO 32 J=N1,M
    IF(J.EQ.N1) LINE(J)=ID
    IF(J.EQ.M) LINE(J)=IE
32 CONTINUE
    GO TO 44
29 LINE(M)=ID
    GO TO 44
28 DO 40 J=M,N1
    IF(J.EQ.N1) LINE(J)=ID
    IF(J.EQ.M) LINE(J)=IE
40 CONTINUE
44 WRITE(6,34) W,Z,Z1,LINE,I9
34 FORMAT(' ',F5.2,1X,F8.6,1X,F8.6,'X',1X,101A1,I3,1X,'X')
    IF(M1-N1) 85,86,87
```

```

RPGLM   FORTRAN  A1  F 80  TRUNC=72 SIZE=192 LINE=169 COL=1 ALT=0
====>
      IF(M1-N1) 85,86,87
87 DO 88 J=N1,M1
      IF(J.EQ.M1) LINA(J)=IA
88 CONTINUE
      GO TO 89
86 LINE(M1)=ID
      GO TO 89
85 DO 90 J=M1,N1
      IF(J.EQ.M1) LINA(J)=IA
90 CONTINUE
89 WRITE(6,91) LINA
91 FORMAT('+',25X,101A1,5X)
25 CONTINUE
      WRITE(6,60)
60 FORMAT(' ',23X,108('X'))//)
      WRITE(6,53)
53 FORMAT(' ','POINTS OF THE RMS CURVE AND CONSTANTS'//)
      WRITE(6,55) VR1,IL1,VR2,IL2
55 FORMAT(' ','V1=',F8.4,2X,'I1=',F7.3,2X,'V2=',F8.4,2X,'I2=',F7.3)
      WRITE(6,601)
601 FORMAT('0',2X,'A=',8X,'B=',8X,'AP=',8X,'BP=')
      WRITE(6,*) A,B,AP,BP

```

```

RPGLM   FORTRAN  A1  F 80  TRUNC=72 SIZE=192 LINE=190 COL=1 ALT=0
====>
      WRITE(6,*) A,B,AP,BP
      STOP
      END
* * * END OF FILE * * *

```

```

AGP1      FORTRAN  A1  F 80  TRUNC=72 SIZE=105 LINE=0 COL=1 ALT=0
====>
* * * TOP OF FILE * * *
C *****
C *                                     P R O G R A M A  I I . 1 *
C *                                     ----- *
C *      REPRESENTACION DE LA CURVA DE MAGNETIZACION POR UN *
C *      POLINOMIO DE TERCER ORDEN *
C *****
C DECLARACION DE VARIABLES
  REAL XL(100),VT(100),D
  REAL*8 K1,K2,K3,U1,P2,Q1,X(5),RA,RE,GRANDE,RO,B20,CHICO
  REAL*8 DENO,LM,LD,A1,B1,C1,D1,A2,B2,C2,D2,IL1,IL2,IL3,RU,E,P
  REAL*8 C,A,B,IMM,AP,BP,LMBD,AP,BP,VR1,VR2,VR3
  INTEGER S,T,N4
  DATA F2/1./
C LECTURA DE DATOS EXPERIMENTALES
  N4=0
  READ(5,*) N1
  210 READ(5,140,END=21) A1,A2
  140 FORMAT(F7.3,F8.4)
  N4=N4+1
  XL(N4)=A1
  VT(N4)=A2

```

```

AGP1      FORTRAN  A1  F 80  TRUNC=72 SIZE=105 LINE=21 COL=1 ALT=0
====>
  VT(N4)=A2
  GO TO 210
  21 DO 990 I=1,N1
  990 WRITE(6,310) I,XL(I),VT(I)
  310 FORMAT(' ',//,10X,I3,2X,F7.3,2X,F8.4)
C INICIO DEL PROCESO
  D=SQRT(13./63.)
  DO 120 I=1,N1
  AP=-1.
  BP=AP
  L=N1+1-I
  IL2=XL(L)
  VR2=VT(L)
  N2=N1-1
  DO 130 J=1,N2
  K=N1-J
  VR3=VT(K)
  IL3=XL(K)
  GMVR=VR3/VR2
  GMIL=IL3/IL2
  GMMA=GMIL/GMVR
  IF(GMVR.LE.0.5.AND.GMMA.GE.D) GO TO 240

```

```

AGP1      FORTRAN A1 F 80 TRUNC=72 SIZE=105 LINE=42 COL=1 ALT=0
====>
      IF(GMVR.LE.0.5.AND.GMMA.GE.D) GO TO 240
      GO TO 130
240 VR1=VR3
      IL1=IL3
C      CALCULO DE CONSTANTES
      A1=VR1**2.
      B1=(5./2.)*VR1**6.
      C1=3.*VR1**4.
      D1=IL1**2.
      A2=VR2**2.
      B2=(5./2.)*VR2**6.
      C2=3.*VR2**4
      D2=IL2**2.
      K1=(D1*A2)-(D2*A1)
      K2=(B2*A1)-(B1*A2)
      K3=(C1*A2)-(C2*A1)
      IF(K3.EQ.0.)GO TO 130
      IF(K1.GT.0.AND.K2.GT.0.AND.K3.LT.0.) GO TO 130
C      SOLUCION DE LA ECUACION DE SEGUNDO GRADO, OBTENIENDO EL MENOR
C      VALOR POSITIVO DE B2
      E=(A1*K2**2)+(B1*K3**2)+(K2*K3*C1)
      U1=(2.*K1*K2*A1)+(C1*K1*K3)-(D1*K3**2)

```

```

AGP1      FORTRAN A1 F 80 TRUNC=72 SIZE=105 LINE=63 COL=1 ALT=0
====>
      U1=(2.*K1*K2*A1)+(C1*K1*K3)-(D1*K3**2)
      WRITE(6,*) E,U1
      P=A1*K1**2
      P2=(U1**2)-(4.*E*P)
      IF(P2.LT.0.OR.E.EQ.0.)GO TO 130
      Q1=DSQRT(P2)
      X(1)=(-U1+Q1)/(2.*E)
      RA=X(1)
      X(2)=(-U1-Q1)/(2.*E)
      RE=X(2)
      IF(RA.LT.0.AND.RE.LT.0.) GO TO 130
      IF(RA.GE.0.AND.RE.GE.0.)GO TO 250
      GRANDE=RA
      DO 160 S=1,2
      RO=X(S)
      IF(RO.LE.GRANDE)GO TO 160
      GRANDE=RO
160 CONTINUE
      B20=GRANDE
      GO TO 170
250 CHICO=X(1)
      DO 680 T=1,2

```

```

AGP1      FORTRAN  A1  F 80  TRUNC=72 SIZE=105 LINE=84 COL=1 ALT=0
====>
      DO 680 T=1,2
      RU=X(T)
      IF(RU.GT.CHICO) GO TO 680
      CHICO=RU
680 CONTINUE
      B20=CHICO
170 C=B20
      IF(C.EQ.0.) GO TO 130
      B=DSQRT(C)
      A=(K1+K2*C)/(K3*B)
      IF(A.GT.0.AND.B.GT.0.) GO TO 190
130 CONTINUE
190 AP=A*377.
      BP=B*377.**3.
      IF(AP.GT.0.AND.BP.GE.0.) GO TO 200
120 CONTINUE
200 CONTINUE
      WRITE(6,*) A,B,AP,BP
      WRITE(6,500) VR1,VR2,IL1,IL2
500 FORMAT(' ', 'V1=' ,F8.4,2X, 'V2=' ,F8.4,2X, 'I1=' ,F7.3,2X, 'I2=' ,F7.3)
      STOP
      END

```

```

AGP1      FORTRAN  A1  F 80  TRUNC=72 SIZE=105 LINE=105 COL=1 ALT=0
====>
      END
* * * END OF FILE * * *

```



```

AGP3      FORTRAN  A1  F 80  TRUNC=72 SIZE=105 LINE=1 COL=1 ALT=0
====>
C          *****
C          *                                *
C          *          P R O G R A M A  I I . 3          *
C          *          -----          *
C          *          REPRESENTACION DE LA CURVA CARACTERISTICA DE          *
C          *          MAGNETIZACION POR UN POLINOMIO DE SETIMO ORDEN          *
C          *****
C          DECLARACION DE VARIABLES
          REAL XL(100),VT(100),D
          REAL*8 K1,K2,K3,U1,P2,Q1,X(5),RA,RE,GRANDE,RO,B20,CHICO
          REAL*8 DENO,LM,LD,A1,B1,C1,D1,A2,B2,C2,D2,IL1,IL2,IL3,RU,E,P
          REAL*8 C,A,B,IMM,AP,BP,LMBD,AP,BP,VR1,VR2,VR3
          INTEGER S,T,N4
          DATA F2/1./, VPL/ 30./
C          LECTURA DE DATOS EXPERIMENTALES
          N4=0
          READ(5,*) N1
210 READ(5,140,END=21) A1,A2
140 FORMAT(F7.3,F8.4)
          N4=N4+1
          XL(N4)=A1
          VT(N4)=A2
          GO TO 210

```

```

AGP3      FORTRAN  A1  F 80  TRUNC=72 SIZE=105 LINE=22 COL=1 ALT=0
====>
          GO TO 210
21 DO 990 I=1,N1
990 WRITE(6,310) I,XL(I),VT(I)
310 FORMAT(' ',//,10X,I3,2X,F7.3,2X,F8.4)
C          INICIO DEL PROCESO
          D=SQRT(491./1716.)
          DO 120 I=1,N1
          AP=-1.
          BP=AP
          L=N1+1-I
          IL2=XL(L)
          VR2=VT(L)
          N2=N1-1
          DO 130 J=1,N2
          K=N1-J
          VR3=VT(K)
          IL3=XL(K)
          GMVR=VR3/VR2
          GMIL=IL3/IL2
          GMMMA=GMMIL/GMVR
          IF(GMVR.LE.0.5.AND.GMMA.GE.D) GO TO 240
          GO TO 130

```

AGP3 FORTRAN A1 F 80 TRUNC=72 SIZE=105 LINE=43 COL=1 ALT=0
====>

```
GO TO 130
240 VR1=VR3
    IL1=IL3
C    CALCULO DE CONSTANTES
    A1=VR1**2.
    B1=(1716./64.)*VR1**14.
    C1=(70./8.)*VR1**8.
    D1=IL1**2.
    A2=VR2**2.
    B2=(1716./64.)*VR2**14.
    C2=(70./8.)*VR2**8.
    D2=IL2**2.
    K1=(D1*A2)-(D2*A1)
    K2=(B2*A1)-(B1*A2)
    K3=(C1*A2)-(C2*A1)
    IF(K3.EQ.0.)GO TO 130
    IF(K1.GT.0.AND.K2.GT.0.AND.K3.LT.0.) GO TO 130
C    SOLUCION DE LA ECUACION DE SEGUNDO GRADO, OBTENIENDO EL MENOR
C    VALOR POSITIVO DE B2
    E=(A1*K2**2)+(B1*K3**2)+(K2*K3*C1)
    U1=(2.*K1*K2*A1)+(C1*K1*K3)-(D1*K3**2)
    WRITE(6,*) E,U1
```

AGP3 FORTRAN A1 F 80 TRUNC=72 SIZE=105 LINE=64 COL=1 ALT=0
====>

```
WRITE(6,*) E,U1
P=A1*K1**2
P2=(U1**2)-(4.*E*P)
IF(P2.LT.0.OR.E.EQ.0.)GO TO 130
Q1=DSQRT(P2)
X(1)=(-U1+Q1)/(2.*E)
RA=X(1)
X(2)=(-U1-Q1)/(2.*E)
RE=X(2)
IF(RA.LT.0.AND.RE.LT.0.) GO TO 130
IF(RA.GE.0.AND.RE.GE.0.)GO TO 250
GRANDE=RA
DO 160 S=1,2
RO=X(S)
IF(RO.LE.GRANDE)GO TO 160
GRANDE=RO
160 CONTINUE
B20=GRANDE
GO TO 170
250 CHICO=X(1)
DO 680 T=1,2
RU=X(T)
```

```

AGP3      FORTRAN  A1  F 80  TRUNC=72 SIZE=105 LINE=85 COL=1 ALT=0
====>
      RU=X(T)
      IF(RU.GT.CHICO) GO TO 680
      CHICO=RU
680 CONTINUE
      B20=CHICO
170 C=B20
      IF(C.EQ.0.) GO TO 130
      B=DSQRT(C)
      A=(K1+K2*C)/(K3*B)
      IF(A.GT.0.AND.B.GT.0.) GO TO 190
130 CONTINUE
190 AP=A*377.
      BP=B*377.**7.
      IF(AP.GT.0.AND.BP.GE.0.) GO TO 200
120 CONTINUE
200 CONTINUE
      WRITE(6,*) A,B,AP,BP
      WRITE(6,500) VR1,VR2,IL1,IL2
500 FORMAT(' ', 'V1=',F8.4,2X, 'V2=',F8.4,2X, 'I1=',F7.3,2X, 'I2=',F7.3)
      STOP
      END
* * * END OF FILE * * *

```

C A P I T U L O V

TEORIA GENERALIZADA DE LAS MAQUINAS ELECTRICAS INCLUYENDO EL EFECTO DE SATURACION TRANSVERSAL CON DIVERSOS MODELOS DE CARACTERISTICAS DE MAGNETIZACION

5.1. ECUACIONES GENERALIZADAS CON VECTORES ESPACIALES IN CORPORANDO LOS EFECTOS DE SATURACION DE LA TRAYECTO RIA DEL FLUJO PRINCIPAL

La mayoría de autores, después del trabajo de Kron, dan una reconocida importancia a la existencia de los efectos de la intersaturación. Adkins y Harley /2/ dan los resultados de ensayos, los cuales demuestran la existencia de este efecto. El fenómeno de intersaturación puede ser totalmente explicado físicamente como matemáticamente en ecuaciones de forma completamente general; usando el - criterio de parámetros concentrados y luego aplicando el método de la Teoría Generalizada de Máquinas Eléctricas con vectores espaciales.

Las ecuaciones diferenciales de las tensiones estáticas y rotóricas serán desarrolladas para una máquina eléctrica empleando un sistema general de coordenadas escogidas arbitrariamente, tal como se observa en la figura (5.1). Se ha dibujado también la dirección instantánea de el flujo principal. Como nosotros estamos omitiendo las pérdidas en el núcleo, la dirección de la corriente magnetizante i_m es permanentemente coaxial a la dirección de $\vec{\Psi}_m$.

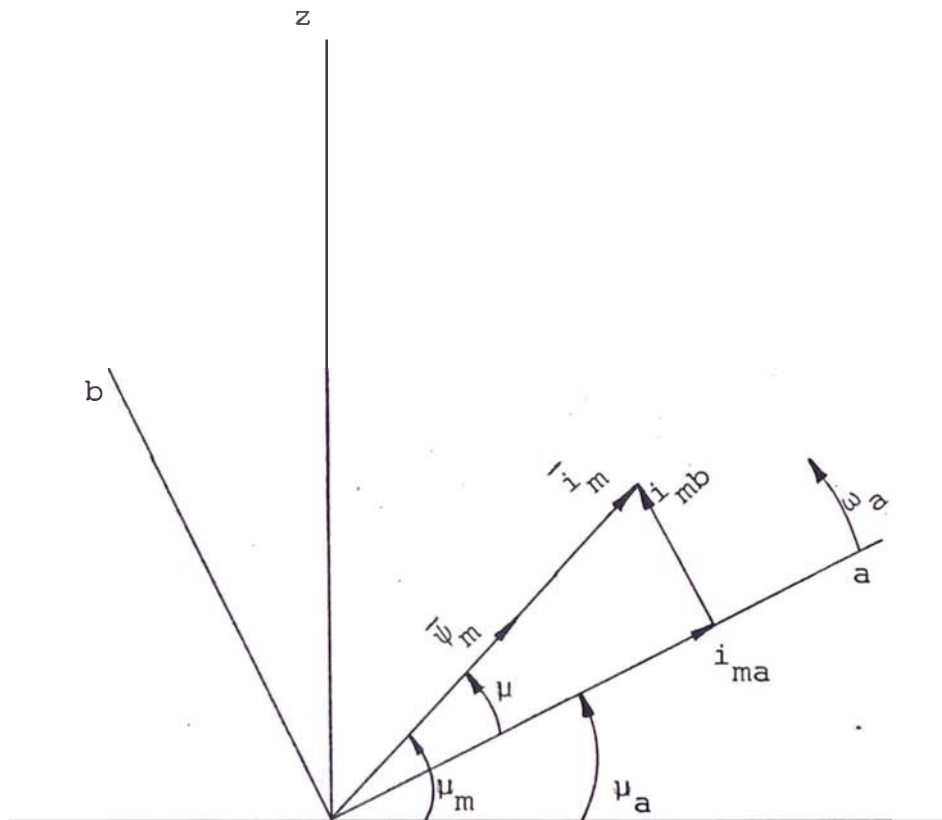


figura 5.1

En cualquier caso se cumple:

$$\psi_m = x_m i_m \quad (5.1)$$

El valor instantáneo de el ángulo formado por las direcciones \underline{a} y $\underline{\psi}_m$ es denotada por μ . w_a es la velocidad de las coordenadas rotantes (a, b). w_m es la velocidad de el flujo principal y corriente magnetizante, w_a y w_m están referidos a la referencia estacionaria (referencia del estator). Esta referencia natural está fijada al estator de la máquina y el comportamiento físico real de las cantidades individuales electromagnéticas dentro de la máquina son referidas a esta referencia y serían, en principio, medidos por un observador estacionario.

El uso de cualquier otro sistema de coordenadas (rotante) no altera el curso de transitorios, únicamente la formulación matemática de el fenómeno es transformada. Es interesante mencionar que la observación directa de las principales cantidades físicas (flujo principal o voltajes inducidos) prácticamente es muy dificultoso.

Los flujos transitorios y los voltajes inducidos transitorios están moviéndose dentro de la máquina con una velocidad muy irregular, todos los valores absolutos están cambiando rápidamente.

Los vectores espaciales tensión, corriente y flujo en un sistema de referencia estacionario están dados respectivamente por:

$$\bar{v} = \frac{2}{3} \left| v_a(t) + a v_b(t) + a^2 v_c(t) \right| \quad (5.2)$$

$$\bar{i} = \frac{2}{3} \left| i_a(t) + a i_b(t) + a^2 i_c(t) \right|$$

$$\bar{\psi} = \frac{2}{3} \left| \psi_a(t) + a \psi_b(t) + a^2 \psi_c(t) \right|$$

Las ecuaciones de tensión del estator y rotor en un sistema de referencia rotante a una velocidad arbitraria w_a son:

$$\bar{v}'_s = R_s \bar{i}'_s + \frac{d \bar{\psi}'_s}{dt} + j w_a \bar{\psi}'_s \quad (5.3)$$

$$\bar{v}'_r = R_r \bar{i}'_r + \frac{d \bar{\psi}'_r}{dt} + j (w_a - w_r) \bar{\psi}'_r \quad (5.4)$$

donde \bar{v}'_s , \bar{v}'_r , \bar{i}'_s , \bar{i}'_r , $\bar{\psi}'_s$, $\bar{\psi}'_r$ son los voltajes, corrientes y flujos en un sistema de referencia arbitrario y w_r es la velocidad de el rotor. Históricamente estas ecuacio -

nes han sido formuladas independientemente de la Teoría Generalizada de máquinas y ellas pueden ser expresadas en términos de el flujo magnetizante como sigue:

$$v_s' = R_s \bar{i}_s' + L_{sl} \frac{d \bar{i}_s'}{dt} + \frac{d \bar{\psi}_m'}{dt} + j w_a (L_{sl} \bar{i}_s' + \bar{\psi}_m') \quad (5.5)$$

$$v_r' = R_r \bar{i}_r' + L_{rl} \frac{d \bar{i}_r'}{dt} + \frac{d \bar{\psi}_m'}{dt} + j (w_a - w_r) (L_{rl} \bar{i}_r' + \bar{\psi}_m') \quad (5.6)$$

donde: $L_{sl} = L_s - L_m$ y $L_{rl} = L_r - L_m$ son las inductancias de dispersión del estator y del rotor respectivamente, y

$$\bar{\psi}_m' = L_m \bar{i}_m' = L_m (\bar{i}_s' + \bar{i}_r') \quad (5.7)$$

es el vector espacial del flujo magnetizante. Es importante mencionar que estas ecuaciones no contienen restricciones para la saturación de la trayectoria del flujo principal, $\bar{\psi}_m'$ estará en función del vector espacial corriente magnetizante determinada por la curva de magnetización.

Las ecuaciones (5.4) y (5.5) pueden ser resueltas en sus partes real e imaginaria, denotada respectivamente por su fijos x e y en el sistema de referencia general. Para el estator se tiene:

$$\mu_{sx} = R_s i_{sx} + L_{sl} \frac{d i_{sx}}{dt} + \frac{d \psi_{mx}}{dt} - w_a (L_{sl} i_{sy} + L_{mx} i_{my}) \quad (5.8)$$

$$\mu_{sy} = R_s i_{sy} + L_{sl} \frac{d i_{sy}}{dt} + \frac{d \psi_{my}}{dt} + w_a (L_{sl} i_{sx} + L_{my} i_{mx}) \quad (5.9)$$

Las ecuaciones son completamente generales, pero por simplicidad se ha considerado únicamente las máquinas con es

tator y rotor cilíndrico para las cuales se tiene:

$$L_{mx} = L_{my} = L_m$$

Podemos establecer:

$$\bar{\mu}'_s = \bar{z}'_s \bar{i}'_s \quad (5.10)$$

donde: $\bar{\mu}'_s = \begin{vmatrix} \mu_{sx'} & \mu_{sy'} \end{vmatrix}^t$ $\bar{i}'_s = \begin{vmatrix} i_{sx'} & i_{sy'} \end{vmatrix}^t$ (5.10a)

y:

$$\bar{z}'_s = \begin{vmatrix} R_s + (L_{s1} + L_o + L_{2c})p & L_{2s}p - w_a L_s \\ L_{2s}p + w_a L_s & R_s + (L_{s1} + L_o + L_{2c}) \\ (L_o + L_{2c})p & L_{2s}p - w_a L_m \\ L_{2s}p + w_a L_m & (L_o - L_{2c})p \end{vmatrix} \quad (5.10b)$$

donde: $L = (L + L_m)/2$ $L_2 = (L - L_m)/2$ (5.10c)

$$L_{2c} = L_2 \cos 2\mu \quad L_{2s} = L_2 \sin 2\mu$$

$$L = \frac{d}{d} \frac{|\bar{\psi}_m|}{|\bar{i}_m|} \quad (5.10d)$$

es una inductancia dinámica, la primera derivada de la curva de magnetización,

$$L_m = \begin{vmatrix} i_m \end{vmatrix} \quad (5.10e)$$

es una inductancia estática, también obtenida de la curva de magnetización. Evidentemente ambas inductancias L y L_m toman en cuenta el hecho de que i_m está continuamente cambiando. En un sistema de referencia estacionario ($w_a = 0$), existe un acoplamiento transversal entre los dos ejes del rotor y estator en cuadratura ($sx, ry, y sy, rx$) descrita por L_{2s} .

El término L_{2s} es el factor que toma en cuenta el fenómeno de intersaturación. Se puede apreciar que bajo condiciones lineales, cuando $L = L_m$, L_{2s} es cero. Por tal motivo este término no está presente en las ecuaciones convencionales en dos ejes {1, 2, 3}.

La figura (5.3) muestra las curvas de inductancias estática y dinámica, ambas derivadas de la curva de la figura - (5.2). Se muestra que para valores bajos de saturación $L = L_m$, no existe efecto de intersaturación.

Sin embargo para niveles altos de saturación la diferencia entre las dos curvas es grande y los efectos de intersaturación a esperarse son muy significantes.

En el capítulo VII se hallan los valores de inductancia estática y dinámica para la máquina en prueba por los tres métodos vertidos anteriormente; y como es de esperar todos los resultados son coincidentes, ya que se está trabajando con la misma curva de magnetización experimental.

Las cantidades $L_o + L_{2c}$ y $L_o - L_{2c}$ representan las inductancias mutuas de la máquina en los ejes x e y. Estos términos serán iguales al valor no saturado de L_m , si las condiciones lineales son asumidas.

Para algunos valores de μ , así como $\mu = \pi/4$, $L_o + L_{2c}$ y $L_o - L_{2c}$ son iguales, físicamente esto da a entender que la corriente magnetizante fluirá en los ejes x e y.

Las inductancias propias del estator en los ejes x e y son definidos en la ecuación (5.10b) por:

$$L_{sx} = L_{s1} + (L_o + L_{2c}) \quad (5.11a)$$

$$L_{sy} = L_{s1} + (L_o - L_{2c}) \quad (5.11b)$$

En el presente modelo, el acoplamiento mutuo y las inductancias propias varían con μ debido a la saturación; es decir el cuadro físico presentado es análogo al cuadro físico existente en las máquinas de polos salientes, en donde el acoplamiento mutuo existe entre los ejes x e y, y las inductancias propias también son diferentes debido a la variación de la reluctancia con el ángulo del rotor.

Las ecuaciones para el rotor se obtienen en forma análoga que para el estator:

$$\begin{aligned} \underline{\mu}'_r &= \underline{\bar{z}}'_r \underline{\bar{I}}'_r \\ \underline{\bar{u}}'_r &= \begin{vmatrix} \mu_{rx}' & \mu_{ry}' \end{vmatrix}^t \quad \underline{\bar{I}}'_r = \begin{vmatrix} i_{rx}' & i_{ry}' \end{vmatrix}^t \end{aligned} \quad (5.12)$$

y:

$$\underline{z}'_r = \begin{vmatrix} (L_o + L_{2c})p & L_{2s}p - (w_a - w_r)L_m \\ L_{2s}p + (w_a - w_r)L_m & (L_o - L_{2c})p \\ R_r + (L_{r1} + L_o + L_{2c})p & L_{2s}p - (w_a - w_r)L_r \\ L_{2s}p + (w_a - w_r)L_r & R_r + (L_{r1} + L_o - L_{2c})p \end{vmatrix} \quad (5.12b)$$

Nuevamente, el término que incorpora el efecto de saturación es L_{2s} , el cual en general no es cero, e introduce nuevos elementos en las ecuaciones de el rotor en la misma forma que para las ecuaciones del estator.

Las inductancias propias del rotor pueden ser definidas como:

$$L_{rx} = L_{rl} + (L_o + L_{2c}) \quad (5.13a)$$

$$L_{ry} = L_{rl} + (L_o - L_{2c}) \quad (5.13b)$$

Los cuales difieren entre sí y varían debido a los efectos de saturación de la trayectoria del flujo principal.

5.2. EL EFECTO DE LA SATURACION VARIABLE

El efecto de la saturación real causado por el núcleo de hierro está reemplazado por la suposición de la variación del espacio libre del entrehierro.

La saturación variable afecta el comportamiento transitorio o cambiante del flujo principal y la tensión inducida motivo por el cual estas cantidades son representadas matemáticamente mediante vectores espaciales.

De la figura (5.1) el valor instantáneo del ángulo formado por la dirección "a" y el flujo magnetizante (ψ_m) está denotado por " μ ". Luego:

$$\psi_m = \left| \psi_m \right| e^{j\mu} = \psi_m e^{j\mu} \quad (5.14)$$

Aplicando la ley de Faraday se tiene que el voltaje inducido en las máquinas a.c. de rotor cilíndrico, incluyendo la saturación variable tiene por expresión:

$$u_i = \frac{d}{dt} \bar{\psi}_m = e^{j\mu} \left| \frac{d}{dt} \psi_m + j \psi_m w_\mu \right| \quad (5.15)$$

donde:

$$w_\mu = \frac{d}{dt} \mu$$

es la velocidad del flujo principal ($\bar{\psi}_m$) relativo al sistema de referencia general.

La tensión total inducida en la ecuación (5.15) está compuesta por una tensión de transformación ($d\psi_m/dt$) dirigido en la dirección del flujo principal (ψ_m) y de una tensión de rotación ($\psi_m w_\mu$) dirigido perpendicularmente en la dirección del flujo. El hecho de dividir la tensión en dos componentes es un resultado físico bien conocido de la ley de Faraday aplicado a las máquinas rotativas de corriente alterna.

De la figura (5.4) notamos que $\psi_m = \psi_m(i_m)$ y $L = L(i_m)$ - en valores eficaces. De la ecuación (5.15) se tiene:

$$\bar{u}_i = e^{j\mu} \left| \frac{d}{dt} (i_m L_m) + j w_\mu i_m \right. \quad (5.16)$$

i_m y L_m son variables reales, por esta razón:

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_m}{dt} &= \frac{d}{dt} (i_m L_m) = \frac{d}{di_m} (i_m L_m) \times \frac{di_m}{dt} = \\ & \frac{d\psi_m}{di_m} \times \frac{di_m}{dt} \end{aligned} \quad (5.17)$$

Se define entonces:

$$L = \frac{d\psi_m}{di_m} \quad \text{inductancia dinámica}$$

$$L_m = \frac{\psi_m}{i_m} \quad \text{inductancia estática}$$

Estas inductancias ayudan a describir mejor al vector espacial de la tensión inducida, dado por:

$$e^{j\mu} L \frac{di_m}{dt} = u_T \quad \text{tensión de transformación}$$

$$je^{j\mu} i_m L_m w_\mu = u_{rot} \quad \text{tensión rotacional}$$

Finalmente el vector tensión total inducido es:

$$u_i = u_t + u_{rot} \quad (5.18)$$

5.3. LAS NUEVAS ECUACIONES GENERALES

Combinando las ecuaciones (5.10b) y (5.12b) en una simple ecuación matricial y sustituyendo las ecuaciones (5.11a), (5.11b) y (5.13a), (5.13b) se tiene la ecuación (5.19); esta es la nueva forma de la ecuación matricial de las máquinas eléctricas incorporando los efectos de saturación de la trayectoria del flujo principal.

En esta nueva ecuación, las inductancias propias del estator y rotor varían debido a los efectos de saturación, es decir no con el ángulo rotórico, sino con el ángulo μ formado por el vector corriente magnetizante y el eje de referencia.

La ecuación (5.19) ha sido derivada en un sistema de referencia rotante a una velocidad arbitraria w_a . Para una sustitución apropiada del valor de w_a , las ecuaciones pueden ser expresadas en otro sistema de referencia.

Así cuando $w_a = 0$ se tiene (5.20). Donde:

$$\begin{aligned} L_{sD} &= L_{s1} + L_o + L_{2c} & L_{sQ} &= L_{s1} + L_o - L_{2c} \\ L_{rd} &= L_{r1} + L_o + L_{2c} & L_{rq} &= L_{re} + L_o - L_{2c} \end{aligned} \quad (5.21)$$

Si las condiciones lineales magnéticas son asumidas, la ecuación (5.19) se reduce a la forma muy conocida de las ecuaciones en dos ejes, vistas éstas en la ecuación (5.22)

$$\begin{array}{c|c|c|c|c}
 \mu_{sx} & R_s + L_{sx} \rho & L_{2s} \rho - \omega_a L_m & (L_o + L_{2c}) \rho & L_{2s} \rho - \omega_a L_m & \lambda_{sx} \\
 \mu_{sy} & L_{2s} \rho + \omega_a L_m & R_s + L_{sy} \rho & L_{2s} \rho + \omega_a L_m & (L_o - L_{2c}) \rho & \lambda_{sy} \\
 \mu_{rx} & (L_o + L_{2c}) \rho & L_{2s} \rho - (\omega_a - \omega_r) L_m & R_r + L_{rx} \rho & L_{2s} \rho - (\omega_a - \omega_r) L_r & \lambda_{rx} \\
 \mu_{ry} & L_{2s} \rho + (\omega_a - \omega_r) L_m & (L_o - L_{2c}) \rho & L_{2s} \rho + (\omega_a - \omega_r) L_r & R_r + L_{ry} \rho & \lambda_{ry}
 \end{array}$$

Ecuación 5.19

$$\begin{array}{c}
 \mu_{sd} \\
 \mu_{sq} \\
 \mu_{rd} \\
 \mu_{rq}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 R_s + L_{sd}\rho \\
 L_{2s}\rho \\
 (L_0 + L_{2c})\rho \\
 L_{2s}\rho - \omega_r L_m
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 L_{2s}\rho \\
 R_s + L_{sq}\rho \\
 L_{2s}\rho + \omega_r L_m \\
 (L_0 - L_{2c})\rho
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 (L_0 + L_{2c})\rho \\
 L_{2s}\rho \\
 R_r + L_{rd}\rho \\
 L_{2s}\rho - \omega_r L_r
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 L_{2s}\rho \\
 (L_0 - L_{2c})\rho \\
 L_{2s}\rho + \omega_r L_r \\
 R_r + L_{rq}\rho
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \lambda_{sd} \\
 \lambda_{sq} \\
 \lambda_{rd} \\
 \lambda_{rq}
 \end{array}
 =$$

Ecuación 5.20

$$\begin{array}{c}
 \mu_{sd} \\
 \mu_{sq} \\
 \mu_{rd} \\
 \mu_{rq}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 R_s + L_s\rho \\
 0 \\
 L_m\rho \\
 -\omega_r L_m
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 0 \\
 R_s + L_s\rho \\
 \omega_r L_m \\
 L_m\rho
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 L_m\rho \\
 0 \\
 R_r + L_r\rho \\
 -\omega_r L_r
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 0 \\
 L_m\rho \\
 \omega_r L_r \\
 R_r + L_r\rho
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \lambda_{sd} \\
 \lambda_{sq} \\
 \lambda_{rd} \\
 \lambda_{rq}
 \end{array}
 =$$

Ecuación 5.22

Una comparación de las dos ecuaciones muestra claramente porque es incorrecto intentar tomar en cuenta la saturación mediante la sustitución de L_m en la ecuación (5.22), pues es necesario que se aplique la ecuación (5.20) y además se considere apropiadamente la variación de los valores r.m.s. de inductancia.

La ecuación que liga el proceso electromagnético con el proceso mecánico es:

$$T_1 = J \frac{d}{dt} W_m + D W_m + \frac{1}{K} \int_{-\infty}^t W_m dt + T_e \quad (5.23)$$

donde: T_1 par exterior aplicado

J momento de inercia total de la masa rotativa

D coeficiente de fricción viscosa

K deformación del eje del motor

T_e par electromagnético

W_m velocidad mecánica instantánea

El par de carga que se aplica al eje se compensa con diversos tipos de pares generados, tales como un efecto inercial, un par de fricción, un par de elasticidad debido a la torsión del eje y un par de origen electromagnético que se ejerce sobre el rotor. En todas las máquinas industriales de inducción, la torsión que sufre el eje es lo bastante pequeña y se considera su efecto casi nulo. Por lo tanto, se desprecia el par debido a la deformación de las ecuaciones del torque.

En el modelo de ejes ortogonales considerando el efecto -

de saturación, la expresión del momento electromagnético se puede deducir haciendo un balance de potencia instantánea.

La deducción de la expresión del torque electromagnético se encuentra detallado en la ref. /14/ que es la que utilizamos aquí y cuya expresión es:

$$T_e = \eta L_m (i_{ry} i_{sx} - i_{rx} i_{sy}) \quad (5.24)$$

Teniendo como datos conocidos las condiciones iniciales - de las corrientes y velocidad, mediante un adecuado método numérico se podrá hallar la solución aproximada del sistema de ecuaciones diferenciales.

5.4. SIMULACION DIGITAL

5.4.1. Formulación del Problema

Cuando se desea establecer un modelo de la máquina de inducción para un estudio de procesos transitorios, las ecuaciones que gobiernan ese estado se escriben en forma explícita, de manera que cada una de las derivadas de las variables a considerar se puedan despejar. Para este propósito, las ecuaciones han sido arregladas de forma de tener a las corrientes como variables de estado; de la ecuación (5.20) tenemos:

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A} \underline{x} + \underline{B} \mu \quad (5.25)$$

donde:

$$\underline{x} = \left[i_{sx}, i_{sy}, i_{rx}, i_{ry} \right]^t \quad (5.25a)$$

es el vector columna de las variables de estado:

$$\underline{v} = \left[v_{sx}, v_{sy}, v_{rx}, v_{ry} \right]^t \quad (5.25b)$$

es el vector columna de voltajes:

$$\underline{A} = -\underline{L}'^{-1} \underline{R}' \quad (5.25c)$$

es la matriz de estado:

$$\underline{L}' = \begin{vmatrix} L_{sD} & L_{2s} & L_o + L_{2c} & L_{2s} \\ L_{2s} & L_{sQ} & L_{2s} & L_o - L_{2s} \\ L_o + L_{2c} & L_{2s} & L_{rd} & L_{2s} \\ L_{2s} & L_o - L_{2c} & L_{2s} & L_{rq} \end{vmatrix} \quad (5.25d)$$

$$\text{y:} \quad \underline{B} = \underline{L}'^{-1} \underline{\mu} \quad (5.25e)$$

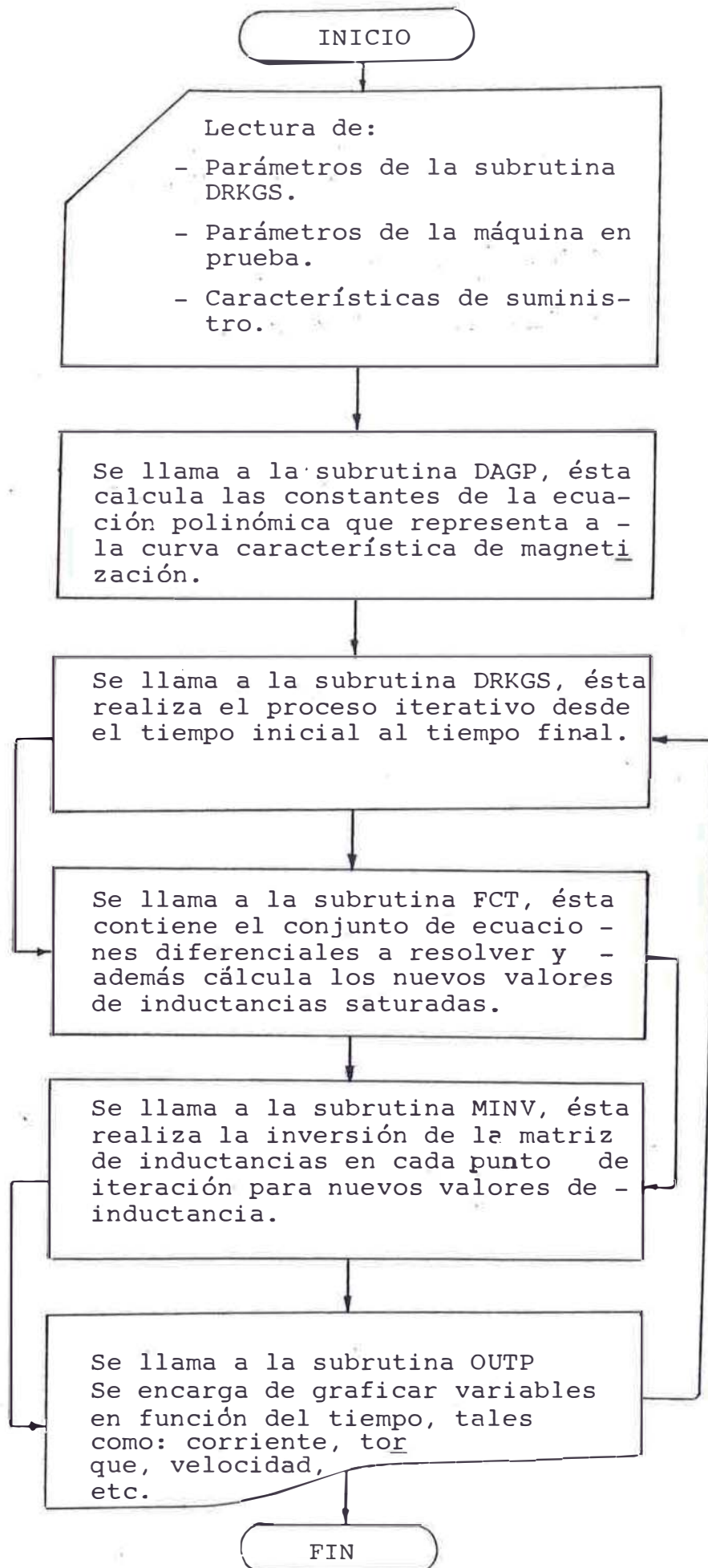
es la matriz de control.

La matriz \underline{R}' es la misma de las ecuaciones convencionales, pero los elementos de \underline{L}' no es cero en contraste a la forma que tenía en las ecuaciones convencionales de dos ejes. La ecuación general (5.20) conjuntamente con la ecuación (5.24) de movimiento es usada en la solución de un sinnúmero práctico de problemas en la operación de máquinas de inducción.

5.4.2. Diagrama de Flujo de solución a las ecuaciones

En el diagrama mostrado se aprecia la secuencia de solución al sistema de ecuaciones diferenciales que gobierna el comportamiento de la máquina de inducción en estado transitorio.

Se nombran cinco eficientes subrutinas que coadyuvan a la solución de las ecuaciones generales. El objetivo es encontrar valores a las correspondientes variables en juego (tensiones, corriente, torque, velocidad, etc.) para in-



tervalos directos de tiempo.

5.4.3. Simulación Digital a la solución de las Ecuaciones Generalizadas representando a la Curva Característica de magnetización mediante diversas aproximaciones.

El programa de cálculo está conformado por cinco subrutinas, las que tienen las siguientes funciones particulares:

- Subrutina DAGP, realiza el cálculo de constantes A' y B' para la posible aproximación o representación de la curva de magnetización experimental, (mayor detalle en el capítulo IV).
- Subrutina DRKGS, es la que realiza el proceso de integración numérica, empleando para ello el método de Runge-Kutta de cuarto orden, principalmente debido a su relativa simplicidad, característica de autoinicialización y además porque presenta una adecuada estabilidad numérica en comparación con otros métodos de similar orden de precisión. En el apéndice C se detalla con mayor énfasis la función de cada uno de sus parámetros principales.
- Subrutina FCT, contiene al conjunto de ecuaciones diferenciales a resolver, además evalúa los nuevos valores de inductancia correspondientes a niveles saturados de tensión. De no tener tensiones saturados, los valores de inductancia estática y dinámica -

toman valores iguales y constantes, tal como se aprecia en la figura (5.3).

En el proceso numérico se trabaja con valores instantáneos de tensión, corriente y con valores r.m.s. saturados o no saturados de inductancia, por tanto es preciso fijar criterios que permitan establecer relaciones entre los valores instantáneos y valores r.m.s.

Una de ellas es el de considerar un valor instantáneo máximo de tensión referencial, para el cual la máquina en prueba no está saturada, pero está a un paso inminente de entrar a la zona saturada de su curva característica, entonces para valores inmediatos y largamente superiores a este valor referencial, se considerarán valores saturados de inductancia. Otra forma, es tomando como referencia a un valor máximo instantáneo de corriente magnetizante para el cual se considera que la máquina no está saturada, entonces de una forma análoga, para valores superiores al valor referencial dado, se tomarán valores de inductancia saturados correspondientes.

Únicamente para la simulación en estado transitorio los valores de inductancia estática y dinámica a considerarse estarán dados por:

$$L_m = L_{m0} - h \Delta L_m \quad (5.26)$$

$$L = L_0 - h \Delta L$$

donde:

$$\Delta L_m = L_{mf} - L_{m0} \quad (5.27)$$

$$\Delta L = L_f - L_0$$

Estas variaciones son vistas de mejor modo en la figura (5.7). De esta manera se garantiza que el proceso de - integración numérico no diverga; es común hacer $|\Delta L_m| < \epsilon$ y $|\Delta L| < \epsilon$, donde ϵ es cualquier índice conveniente de precisión. Verbigracia, $\epsilon = 10^{-4}$, luego h deberá ser pequeño, lo suficiente como para prevenir la convergencia, es razonable hacer $h = \text{PRMT}(3) = 0.001$.

Subrutina OUTF, usada para lograr gráficos de las variables corriente, torque, velocidad, etc. en función del tiempo.

CARMEN FORTRAN A1 F 80 TRUNC=72 SIZE=302 LINE=1 COL=1 ALT=0
====>

```
CC *****
CC *
CC *   PROGRAMA DE SOLUCION A LAS ECUACIONES GENERALIZADAS DE LAS *
CC *   ----- *
CC *   MAQUINAS ELECTRICAS INCLUYENDO EL FENOMENO *
CC *   ----- *
CC *   DE INTERSATURACION *
CC *   ----- *
CC *****
```

```
REAL*8 Y(5),DERY(5),PRMT(5),AUX(8,5)
REAL LSL,LRL,ZF,ZJ,ZD,ZP,W,WA,TR,VD,VQ,RS,RR,LM,L,L0,L2
REAL AR1(4,4),DET,XL(100),VT(100)
REAL LSD,LSQ,LRD,LRQ,L2C,L2S
INTEGER NDIM,MY1(4),MY2(4)
EXTERNAL FCT
EXTERNAL OUTP
W1=1.
```

CARMEN FORTRAN A1 F 80 TRUNC=72 SIZE=302 LINE=22 COL=1 ALT=0
====>

```
W1=1.
W2=1.
W3=1.
READ(5,*) N1
210 READ(5,140,END=21) A1,A2
140 FORMAT(F7.3,F8.4)
N4=N4+1
XL(N4)=A1
VT(N4)=A2
GO TO 210
21 DO 990 I=1,N1
990 WRITE(6,310) I, XL(I),VT(I)
310 FORMAT(' ',//,10X,I3,2X,F7.3,2X,F8.4)
CALL DAGP(XL,VT,N1,W1,W2,W3,AA,BB,VV1,VV2,CC1,CC2)
CC PARAMETROS DEL DRKGS
DO 1 I=1,5
Y(I)=0.D0
DERY(I)=0.2D0
1 CONTINUE
PRMT(1)=0.0D0
PRMT(2)=0.092D0
PRMT(3)=0.001D0
```

CARMEN FORTRAN A1 F 80 TRUNC=72 SIZE=302 LINE=42 COL=1 ALT=0
====>

```
PRMT(2)=0.092D0
PRMT(3)=0.001D0
PRMT(4)=0.500D0
PRMT(5)=0.D0
NDIM=5
N=4
CC PARAMETROS DE LA MAQUINA
CC
VD=360.
VQ=360.
LSL=0.011
LRL=0.006
RS=3.4
RR=2.67
ZF=60.
ZJ=0.0397
ZD=0.
ZP=2.
TR=0.
W=2.*3.1416*ZF
WS=W/(ZP/2.)
WA=0.
```

CARMEN FORTRAN A1 F 80 TRUNC=72 SIZE=302 LINE=63 COL=1 ALT=0
====>

```
WA=0.
NDIM=5
COMMON VD,VQ,RS,RR,LSL,LRL,ZF,ZD,ZJ,ZP,W,WA,WS,TR,AA,BB
WRITE(6,105)
105 FORMAT('0',6X,'TIME (MS)',108X,' TE(N-M)'/3X,128('-')/)
CC WRITE(6,2)
CC 2 FORMAT('0',1X,' TIME ',2X,' CIRD ',2X,' CISO ',2X,
CC *' CIRD ',2X,' CIRQ ',2X,' VELO ROTOR',2X,' VSD ',2X,
CC *' VSQ ',2X,' CMG ',2X,' LM ',2X,' TORQ ELEC')
CC
CALL DRKGS(PRMT,Y,DERY,NDIM,IHLF,FCT,OUTP,AUX)
STOP
END
CC SUBPROGRAMA QUE CALCULA DERIVADAS DE CORRIENTES
SUBROUTINE FCT(X,Y,DERY)
REAL*8 RG(4,4),ML(4,4),ACMG
REAL*8 MV(4),C(4),Y(5),DERY(5),VRG(4)
REAL L,LM,L0,L2,L2C,L2S,LSD,LSQ,LRD,LRQ,LSL,LRL,RS,RR
REAL AR1(4,4),DET,U0,U,WA
INTEGER MY1(4),MY2(4),N
N=4
VSD=SQRT(3.)*VD*COS(W*X)
```


CARMEN FORTRAN A1 F 80 TRUNC=72 SIZE=302 LINE=85 COL=1 ALT=0
====>

```
VSQ=SQRT(3.)*VQ*SIN(W*X)
VSS=ABS(VSD+VSQ)
LM=0.70
L=LM
VM1=675.00
IF(VSS-VM1) 601,601,602
601 LM=0.70
L=LM
GO TO 603
602 ACMG=AA*VD/W+BB*(VD/W)**5
LM=VD/(W*ACMG)
L=1./(AA+BB*(VD/W)**4)
LM=0.7-(0.7-LM)*0.001
L=0.7-(0.7-L)*0.001
603 CONTINUE
CC COMMON VD,VQ,RS,RR,LSL,LRL,ZF,ZD,ZJ,ZP,W,WA,WS,TR,AA,BB
LLENADO DE LA MATRIZ 'RG'
DO 10 I=1,4
DO 10 J=1,4
RG(I,J)=0.D0
IF(I.EQ.J.AND.I.LT.3) RG(I,J)=RS
IF(I.EQ.J.AND.I.GT.2) RG(I,J)=RR
```

CARMEN FORTRAN A1 F 80 TRUNC=72 SIZE=302 LINE=106 COL=1 ALT=0
====>

```
IF(I.EQ.J.AND.I.GT.2) RG(I,J)=RR
10 CONTINUE
RG(1,2)=-WA*(LSL+L)
RG(1,4)=-WA*LM
RG(2,1)=WA*(LSL+L)
RG(2,3)=WA*LM
RG(3,2)=- (WA-Y(5))*LM
RG(3,4)=- (WA-Y(5))*(LRL+LM)
RG(4,1)=(WA-Y(5))*LM
RG(4,3)=(WA-Y(5))*(LRL+LM)
U0=3.1416/4.
U=2.*3.1416*ZF*X/(ZP)+U0
L0=(L+LM)/2.
L2=(L-LM)/2.
L2C=L2*COS(2.*U)
L2S=L2*SIN(2.*U)
LSD=LSL+L0+L2C
LSQ=LSL+L0-L2C
LRD=LRL+L0+L2C
LRQ=LRL+L0-L2C
DO 11 I=1,4
DO 11 J=1,4
```

CARMEN FORTRAN A1 F 80 TRUNC=72 SIZE=302 LINE=127 COL=1 ALT=0
====>

```
DO 11 J=1,4
ML(I,J)=L2S
11 CONTINUE
ML(1,1)=LSD
ML(1,3)=L0+L2C
ML(2,2)=LSQ
ML(2,4)=L0-L2C
ML(3,1)=L0+L2C
ML(3,3)=LRD
ML(4,2)=L0-L2C
ML(4,4)=LRQ
CC CALCULO DE LA INVERSA DE LA MATRIZ 'L'
DO 12 I=1,4
DO 12 J=1,4
AR1(I,J)=ML(I,J)
12 CONTINUE
CALL MINV (AR1,N,DET,MY1,MY2)
CC MATRIZ DE TENSIONES
MV(1)=SQRT(3.)*VD*COS(W*X)
MV(2)=SQRT(3.)*VQ*SIN(W*X)
MV(3)=0.D0
MV(4)=0.D0
```

CARMEN FORTRAN A1 F 80 TRUNC=72 SIZE=302 LINE=148 COL=1 ALT=0
====>

```
MV(4)=0.D0
CC CALCULO DE LA MATRIZ DERY
DO 13 I=1,4
C(I)=0.D0
DO 13 J=1,4
C(I)=C(I)+RG(I,J)*Y(J)
13 CONTINUE
CC WRITE(6,*) C
DO 14 I=1,4
VRG(I)=MV(I)-C(I)
14 CONTINUE
DO 15 I=1,4
IF(X) 54,55,54
55 DERY(I)=0.2D0
DERY(5)=0.2D0
GO TO 94
54 DERY(I)=0.D0
DERY(5)=0.D0
94 CONTINUE
DO 15 J=1,4
DERY(I)=DERY(I)+AR1(I,J)*VRG(J)
15 CONTINUE
```

```

CARMEN FORTRAN A1 F 80 TRUNC=72 SIZE=302 LINE=169 COL=1 ALT=0
====>
15 CONTINUE
DERY(S)=(1./ZJ)*(-TR-ZD*Y(5)+(ZP/2.)*UM*(Y(1)*Y(4)-Y(2)*Y(3)))
WRITE(6,*) DERY
RETURN
END
CC SUBPROGRAMA DE GRAFICAS
SUBROUTINE OUTP(X,Y,DERY,IHLF,NDIM,PRMT)
REAL*8 Y(5),DERY(5),PRMT(5)
DATA ASTE/'*','BLANDO','/'
DIMENSION GRAY(100)
REAL AIX1,AIX2,CHG,ZM,ZL,LH,TE,ACHG
COMMON VD,VO,RS,RR,LSL,LR,LF,ZF,ZD,ZJ,ZP,W,WA,WS,TR,AA,BB
VSD=SQRT(3.)*VD*COS(W*X)
WZ=Y(1)
VSO=SQRT(3.)*VO*SIN(W*X)
AIX1=Y(1)+Y(3)
AIX2=Y(2)+Y(4)
D=SQRT(ABS(AIX1**2+AIX2**2))
LH=0.70
VSD=ABS(VSD+VSO)
WH1=675.00
IF (VSS-VM1) 701,701,702
====>
701 LH=0.70
IF (VSS-VM1) 701,701,702
702 CHG=ABS(VD/UBB*(VD/U))**5
LH=VD/(U*ACHG)
LH=0.7-(0.7-LH)*0.001
GO TO 703
703 TE=(ZP/2.)*UM*(Y(1)*Y(4)-Y(2)*Y(3))*1.5
TE=-TE
CC DO 44 I=1,100
CC 44 GRAY(I)=BLANDO
CC K1=IFIX(9.0+0.01*TE)
CC GRAY(K1)=ASTE
CC TE=-TE
CC WRITE(6,119) X,GRAY,TE
CC119 FORMAT(' ',3X,F9.7,3X,100A1,5X,F9.3)
WRITE(6,21) X,Y(1),Y(2),Y(3),Y(4),Y(5),VSD,CHG,LH,TE
21 FORMAT('0',1X,11(F9.4,2X))
RETURN
END
SUBROUTINE DACP(OT,ST,N9,W1,W2,W3,YA,YB,YR1,YR2,YL1,YL2)
REAL OT(100),ST(100),D,YA,YB

```

```

CARMEN FORTRAN A1 F 80 TRUNC=72 SIZE=302 LINE=211 COL=1 ALT=0
====>
REAL OT(100),ST(100),D,YA,YB
REAL*8 K1,K2,K3,U1,P2,Q1,X(S),RA,RE,GRANDE,RO,B20,CHICO
REAL*8 DENO,C1,D1,H2,B2,C2,D2,RU,E,P
REAL*8 C,A,B,IMM,LMBD,IL1,IL2,IL3,VR1,VR2,VR3,AP,BP
INTEGER S,T
CC INICIO DEL PROCESO
D=SQRT(13./63.)
DO 120 I=1,N9
AP=-1.
BP=AP
L=N9+1-I
IL2=OT(L)
VR2=ST(L)
NG=N9-I
DO 130 J=1,N2
K=N9-J
VR3=ST(K)
IL3=OT(K)
GMVR=VR3/VR2
GMIL=IL3/IL2
GMMA=GMIL/GMVR
IF (GMVR.LE.0.5.AND.GMMA.GE.D) GO TO 240

```

```

CARMEN FORTRAN A1 F 80 TRUNC=72 SIZE=302 LINE=232 COL=1 ALT=0
====>
IF (GMVR.LE.0.5.AND.GMMA.GE.D) GO TO 240
GO TO 130
240 VR1=VR3
IL1=IL3
CC CALCULO DE CONSTANTES
A1=VR1**2.
B1=(63./B.)*VR1**10.
C1=5.*VR1**6.
D1=IL1**2.
H2=VR2**2.
B2=(63./B.)*VR2**10.
C2=5.*VR2**6.
D2=IL2**2.
K1=(D1*H2)-(D2*A1)
K2=(B2*A1)-(B1*H2)
K3=(C1*H2)-(C2*A1)
IF (K3.EQ.0.) GO TO 130
IF (K1.GT.0.AND.K2.GT.0.AND.K3.LT.0.) GO TO 130
SOLUCION DE LA ECUACION DE SEGUNDO GRADO, OBTENIENDO EL MENOR
CC VALOR POSITIVO DE B2
E=(A1*K2**2)+(B1*K3**2)+(K2*K3*K1)
U1=(2.*K1*K2*A1)+(C1*K1*K3)-(D1*K3**2)

```

CARMEN FORTRAN A1 F 80 TRUNC=72 SIZE=302 LINE=253 COL=1 ALT=0

CARMEN FORTRAN A1 F 80 TRUNC=72 SIZE=302 LINE=295 COL=1 ALT=0

```
1000) U1=(2.*K1*K2*A1)*(C1*K1*K3)-(D1*K3**2)
      P=A1*K1**2
      P2=(U1**2)-(4.*E*P)
      IF(P2.LT.0.OR.E.EQ.0.)GO TO 130
      Q1=DSQRT(P2)
      X(1)=-U1+Q1/(2.*E)
      RA=X(1)
      X(2)=-U1-Q1/(2.*E)
      RE=X(2)
      IF(RA.LT.0.AND.RE.LT.0.)GO TO 130
      IF(RA.GE.0.AND.RE.GE.0.)GO TO 250
      GRANDE=RA
      DO 160 S=1,2
      RO=X(S)
      IF(RO.LE.GRANDE)GO TO 160
      GRANDE=RO
160 CONTINUE
      EGO=GRANDE
      GO TO 170
250 CHICO=X(1)
      DO 680 T=1,2
      RU=X(T)
```

CARMEN FORTRAN A1 F 80 TRUNC=72 SIZE=302 LINE=274 COL=1 ALT=0

```
1000) RU=X(T)
      IF(RU.GT.CHICO)GO TO 680
      CHICO=RU
680 CONTINUE
      E20=CHICO
      C=E20
      IF(C.EQ.0.)GO TO 130
      B=DSQRT(C)
      A=(K1*K2*C)/(K3*B)
      IF(A.GT.0.AND.B.GT.0.)GO TO 190
130 CONTINUE
      AP=A*377.
      BP=B*377.**5
      IF(AP.GT.0.AND.BP.GE.0.)GO TO 200
120 CONTINUE
      LMBD=VD/377.
      WRITE(6,499)
499 FORMAT(' ',/,*,IMPRESION DE CONSTANTES DEL POLINOMIO:A,B,AP,BP*/)
      WRITE(6,*)A,B,AP,BP
      WRITE(6,500)VR1,VR2,IL1,IL2
500 FORMAT(' ',V1=',F8.4,2X',V2=',F8.4,2X',I1=',F9.4,2X',I2=',F9.4,/)
      YA=AP
```

```
====>
      YA=AP
      YB=BP
      YR1=VR1
      YR2=VR2
      YL1=IL1
      YL2=IL2
      RETURN
      END
```

*** END OF FILE ***

La aproximación de la curva características de magnetización es de fundamental importancia en el desarrollo de la solución a las ecuaciones generalizadas, debido a que los valores de inductancia estática y dinámica dependen completamente de la curva de magnetización experimental, además los valores que puedan tomar estas inductancias en las diferentes zonas de la curva de magnetización influyen decididamente en el comportamiento transitorio de la máquina.

Es así que debido a la gran importancia de los valores de inductancia, es que éstas han sido halladas por tres métodos diferentes.

En el capítulo VII se muestran resultados aproximando la curva de magnetización mediante un polinomio de quinto orden; empleando el método de interpolaciones lineales y usando la conocida ecuación de Froelich. Cualquiera de los métodos propuestos de representación de la curva de magnetización puede ser tomado para usarlo en la solución de las ecuaciones generalizadas.

Cualesquiera sea la aproximación de la curva de magnetización a utilizar los resultados siempre serán coincidentes.

5.4.4. Discusión de los resultados obtenidos por simulación digital

En el capítulo VII se aprecian los resultados gráficos individuales y en la figura (5.8) se muestra la variación del torque de un motor de inducción en el arran -

que para un suministro de voltaje en el estator de 240 - voltios. La curva A es determinada usando las ecuaciones convencionales, la curva B es hallada tomando en cuenta a propiamente a la saturación (representación de la curva de magnetización experimental mediante un polinomio de quinto orden).

En la figura (5.8) se puede ver que el efecto de saturación no es muy influyente. El efecto de considerar la saturación hace que el pico del torque electromagnético esté apenas reducido.

La figura (5.9) muestra la variación del torque electromagnético para un alto nivel de saturación, Las curvas A y B son obtenidas en la misma forma como para las curvas correspondientes en la figura (5.8). Haciendo una comparación entre las curvas A y B de la figura (5.9) se muestra nuevamente que las curvas son de forma similar, pero con los picos de torque reducidos y considerables, cuando la saturación es tomada en cuenta apropiadamente.

Las figuras (5.10) y (5.11) bajo las mismas condiciones - de suministro de 240 y 360 voltios respectivamente, muestran la variación de corriente i_{sD} .

Puede notarse que el efecto de saturación es menos pronunciado con las formas de onda de corriente que con las formas de onda de torque.

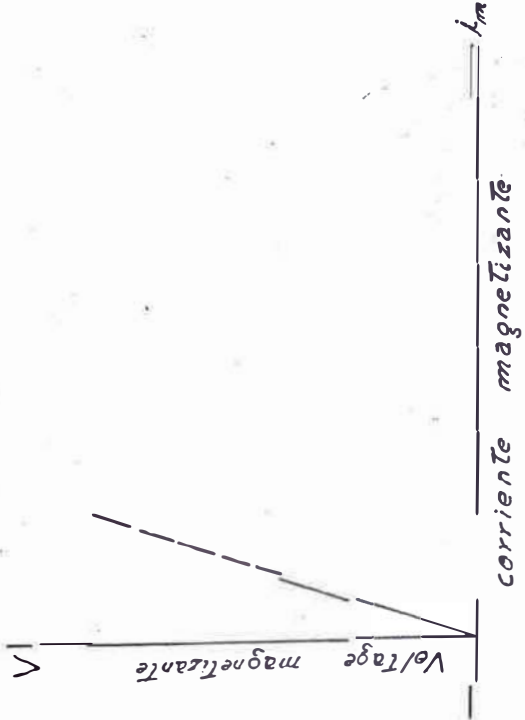


figura (5.2) Aproximación de la Curva de magnetización según el modelo convencional

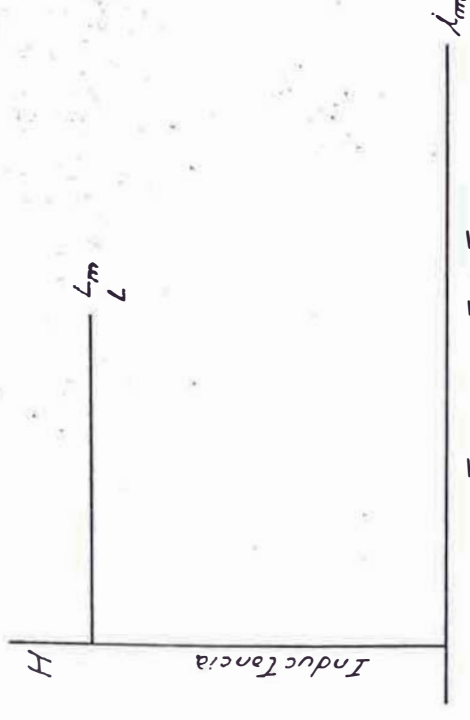


figura (5.3) Valores de inductancia corrientes - pendiente a la aproximación convencional

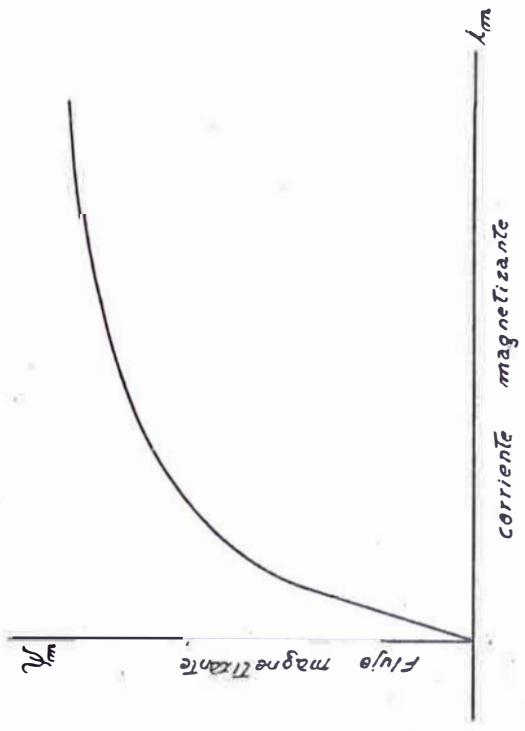


figura (5.4) Aproximación correcta de la curva de magnetización

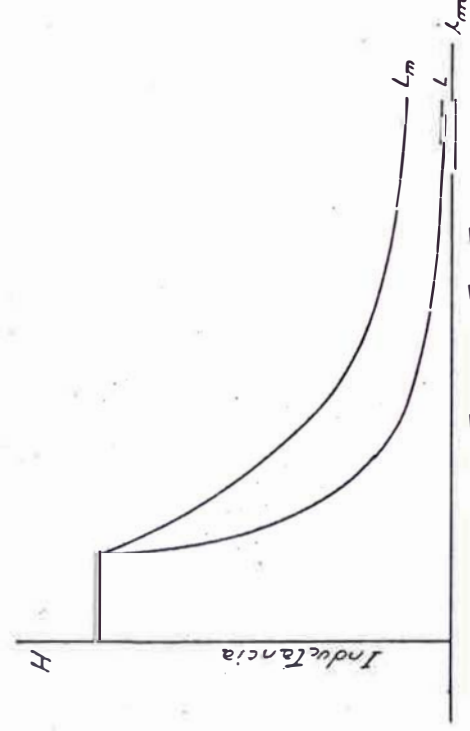


figura (5.5) Inductancias Estática y Dinámica

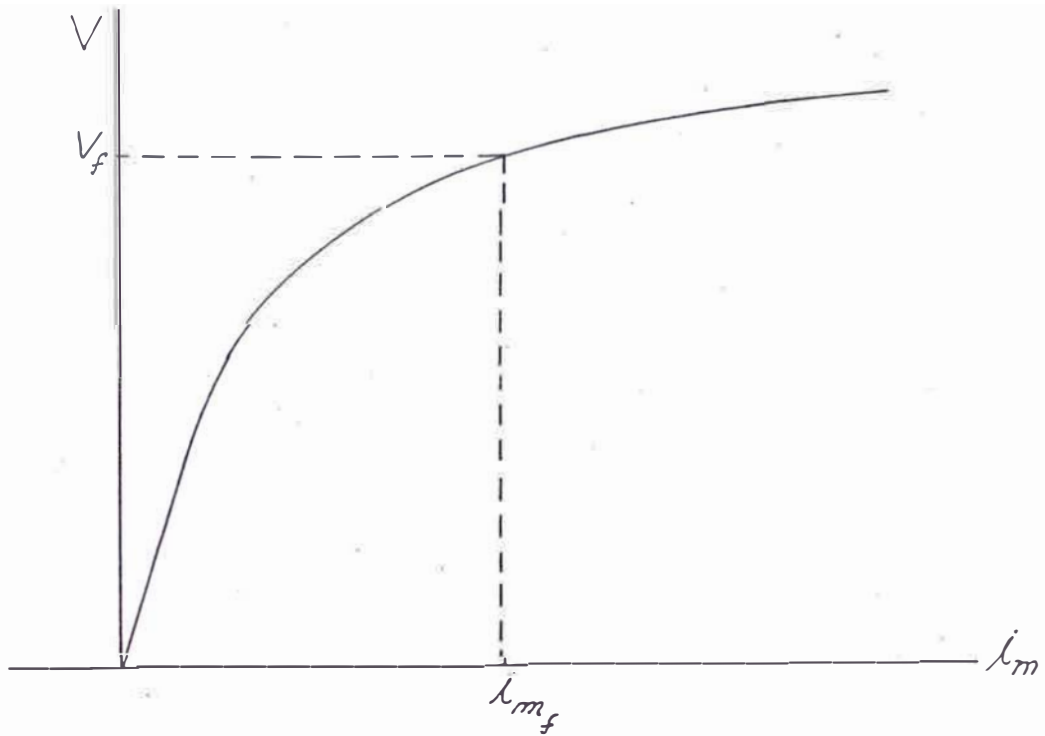


figura (5.6) Curva r.m.s. de magnetización de la máquina en prueba

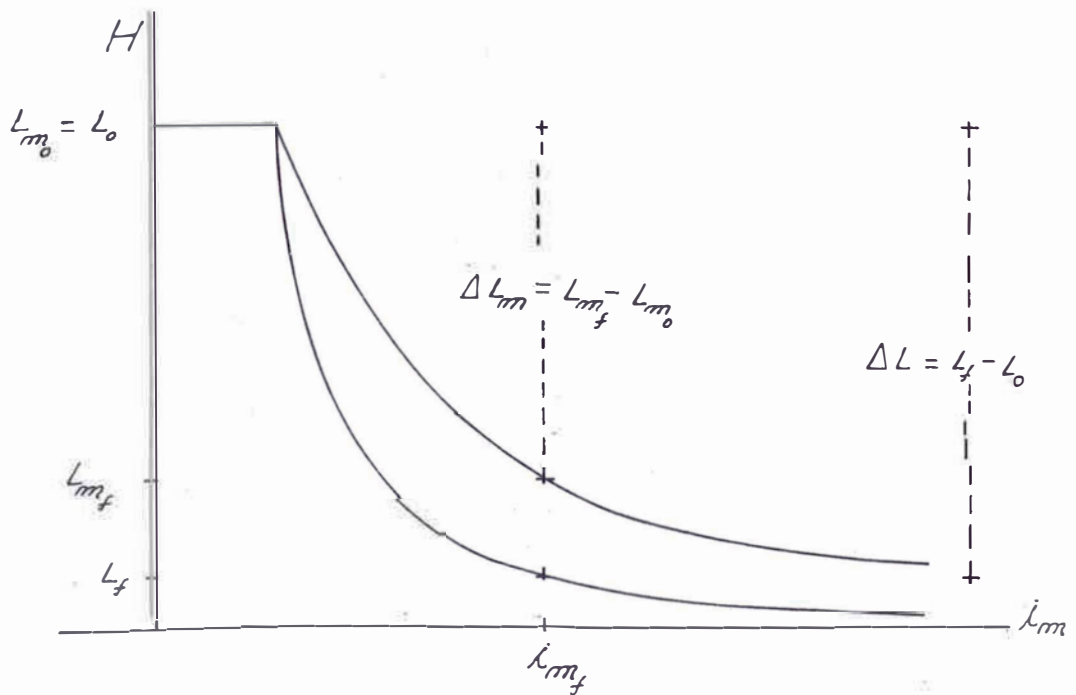


figura (5.7) Variación de valores de inductancia frente a un nivel saturado de tensión

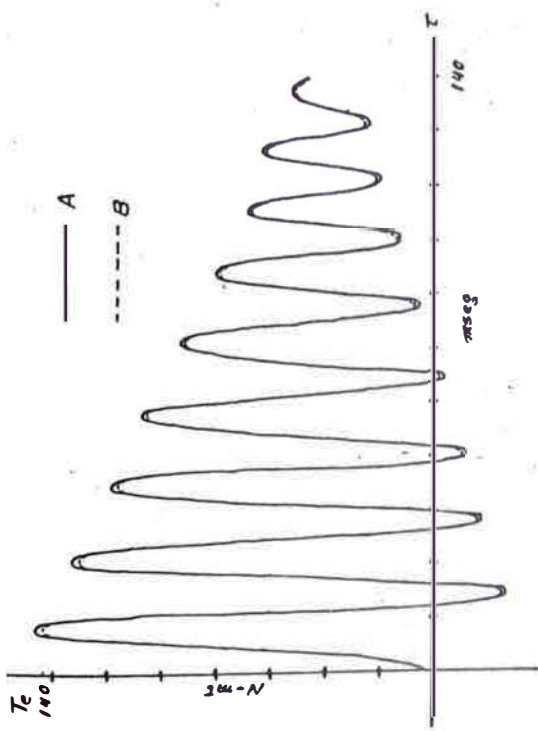


figura (5.8) Variación del Torque electromagnético para un suministro de 240 voltios

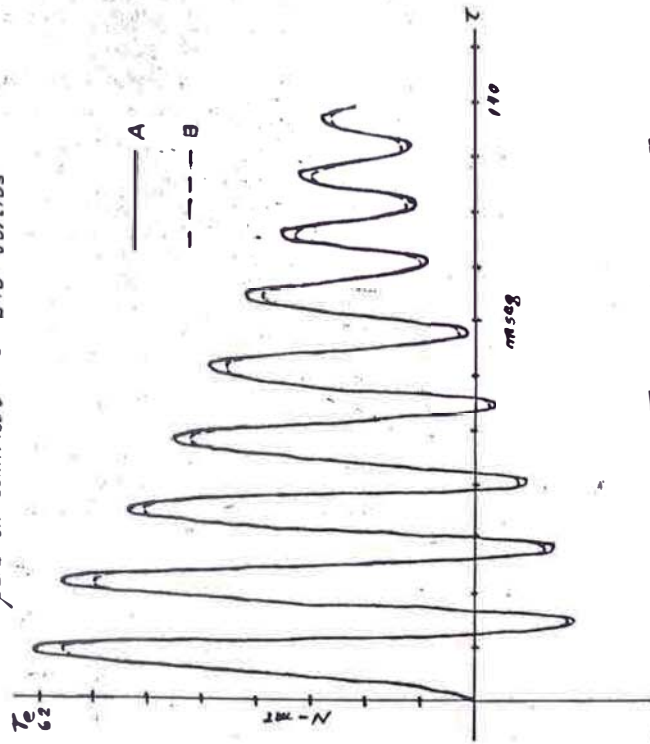


figura (5.9) Variación del Torque electromagnético para un suministro de 360 voltios

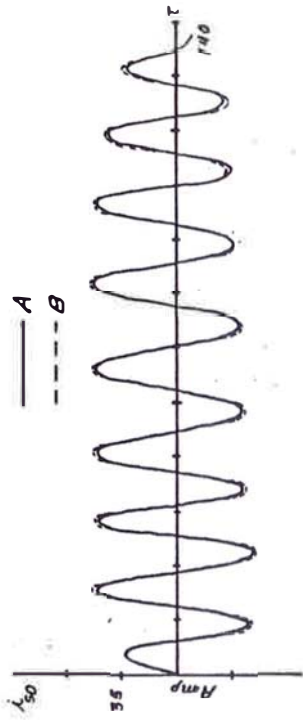


figura (5.10) Variación de corriente de un motor de inducción con suministro de 240 voltios

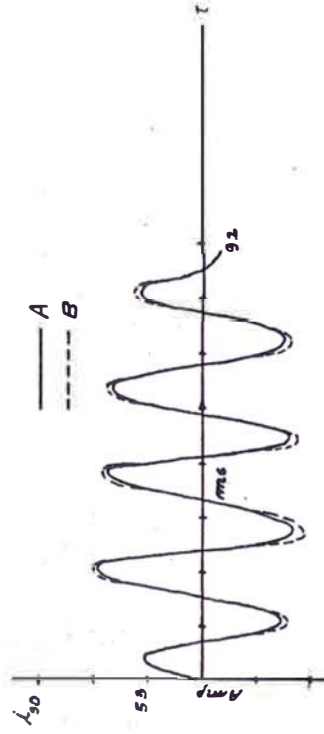


figura (5.11) Variación de corriente de un motor de inducción con suministro de 360 voltios

C A P I T U L O VI

CARACTERISTICAS DE FUNCIONAMIENTO EN REGIMEN ESTACIONARIO

6.1. ECUACIONES DE LIGADURA PARA REGIMEN ESTACIONARIO EN UN COLECTOR INFINITO COMPENSADO

En general las tensiones de puerta del rotor en una máquina de inducción son nulas; los circuitos del rotor están en cortocircuito o con sus extremos unidos a una resistencia exterior.

El presente análisis se hará en el modelo de componentes simétricas; entonces se verá:

$$v_{\alpha}^r = v_z^r = v_{\gamma}^r = 0 \quad (6.1)$$

Usando la matriz de transformación trifásica a bifásica - {ref. 4 - ecuaciones 12-10} obtenemos las tensiones en el rotor a-b equivalente:

$$v_a^r = v_b^r = 0 \quad (6.2)$$

De manera similar se obtienen las tensiones d-q y + - en el rotor:

$$v_d^r = v_q^r = 0 \quad (6.3)$$

$$v_+^r = v_-^r = 0 \quad (6.4)$$

En ciertas aplicaciones especiales, los circuitos del rotor no están cortocircuitados, nosotros omitiremos estos casos en este estudio.

Las puertas del estator de la máquina trifásica se conectan frecuentemente a una fuente de tensión trifásica (co

lector infinito compensado) que en este caso de estudio de la influencia de la saturación transversal, el voltaje suministrado en valor r.m.s. superará al valor de tensión nominal de trabajo.

Las tres tensiones del estator pueden, por tanto, especificarse como:

$$\begin{aligned} v_{\alpha}^s &= \sqrt{2} V^s \cos \omega t ; & v_z^s &= \sqrt{2} V^s \cos \left(\omega t + \frac{2\pi}{3} \right) ; \\ v_{\gamma}^s &= \sqrt{2} V^s \cos \left(\omega t - \frac{2\pi}{3} \right) \end{aligned} \quad (6.5)$$

donde V^s es el valor de la amplitud de las tensiones aplicadas a las fases. Usando la parte del estator en la transformación α -z- γ a a-b y d-q, obtenemos las excitaciones del estator equivalente respectivo.

$$v_a^s = v_d^s = \sqrt{2} V^s \cos \omega t ; \quad v_b^s = v_q^s = \sqrt{2} V^s \sin \omega t \quad (6.6)$$

Si la máquina de inducción funciona a partir de una alimentación trifásica compensada, las excitaciones bifásicas equivalentes son también compensadas. El presente desarrollo no estudiará el funcionamiento trifásico no compensado.

Las ecuaciones (6.3) y (6.6) representan cuatro ligaduras exteriores para el modelo d-q de la máquina de inducción. La quinta ligadura surge a partir de la especificación de algunas relaciones que conciernen a la puerta mecánica, en la forma de una carga mecánica pasiva si la máquina se emplea como motor o el modo en que se proporciona la energía mecánica si funciona como generador. Estas cinco ligaduras, junto con las cinco ecuaciones de equilibrio, (6.7) y (6.8) son suficientes para determinar completamen

$$\begin{array}{c}
 \vec{V}_D^s \\
 \vec{V}_q^s \\
 0 \\
 0
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 R_s + j\omega(L_{sl} + L) \\
 \omega_\mu(L_m - L) \\
 j\omega L \\
 -\omega_r L_m + \omega_\mu(L_m - L)
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 -\omega_\mu(L_m - L) \\
 R_s + j\omega(L_{sl} + L) \\
 \omega_r L_m - \omega_\mu(L_m - L) \\
 j\omega L
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 j\omega L \\
 \omega_\mu(L_m - L) \\
 R_r + j\omega(L_{rl} + L) \\
 -\omega_r L_r + \omega_\mu(L_m - L)
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 -\omega_\mu(L_m - L) \\
 j\omega L \\
 \omega_r L_r - \omega_\mu(L_m - L) \\
 R_r + j\omega(L_{rl} + L)
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \vec{I}_D^s \\
 \vec{I}_q^s \\
 \vec{I}_D^r \\
 \vec{I}_q^r
 \end{array}
 \quad (6.7)$$

onde $L_r = L_{rl} + L_m$

$$T_e = \eta L_m (\vec{I}_s^r \vec{I}_q^{r*} - \vec{I}_s^s \vec{I}_q^{s*}) \quad (6.8)$$

te las diez variables de puerta.

Interesa la respuesta en régimen estacionario a las excitaciones sinusoidales especificadas en las ecuaciones (6.5) y (6.6). En estas condiciones y siendo constante la velocidad, todas las variables d-q dependientes del tiempo, son funciones sinusoidales de la frecuencia de excitación ω . Empleando la notación compleja, todos los operadores $p = \frac{d}{dt}$ se pueden reemplazar rigurosamente por el operador $j\omega$.

Las representaciones complejas de las excitaciones del estator, dadas por las ecuaciones (6.6) se toman como:

$$\bar{v}_d^s = j\sqrt{\frac{s}{d}} \quad v_q^s = \sqrt{\frac{s}{q}} \quad (6.9)$$

donde \bar{v}_d^s y \bar{v}_q^s son los valores de las amplitudes de las tensiones de las dos fases de puerta del estator. Si se utiliza una alimentación bifásica compensada:

$$\sqrt{\frac{s}{d}} = \sqrt{\frac{s}{q}} = \sqrt{s}$$

Si se aplican tensiones compensadas a los devanados bifásicos del estator, sus corrientes formarán también un conjunto bifásico compensado con la misma frecuencia de ω rad/seg, produciendo un campo magnético giratorio en el entrehierro con frecuencia angular ω/η , donde η es el número de pares de polos establecidos por los devanados.

La velocidad angular del campo magnético giratorio ω/η , se denomina velocidad de sincronismo de la máquina. Esta velocidad se define como:

$$\omega_s = \frac{\omega}{\eta} \quad (6.10)$$

En función de la velocidad de sincronismo, el deslizamiento de la máquina se define como:

$$S = \frac{\omega_s - \omega^r}{\omega_s} \quad (6.11)$$

donde ω^r es la velocidad angular verdadera del rotor y S es una cantidad sin dimensiones, llamada «deslizamiento». Si la velocidad angular del rotor es igual a ω_s , el deslizamiento es nulo y si el rotor está quieto, el deslizamiento es igual a la unidad.

La velocidad ω^r viene dada en función del deslizamiento por:

$$\omega^r = (1 - S) \omega_s = (1 - S) \frac{\omega}{\dot{\eta}} \quad (6.12)$$

El par de origen eléctrico, T_e , para la modalidad de funcionamiento de régimen estacionario sinusoidal viene dado por:

$$T_e = \eta L_m (i_d^s i_q^r - i_q^s i_d^r) \quad (6.13)$$

Como todas las corrientes son funciones sinusoidales del tiempo, el valor medio de T_e viene dado por:

$$T_{e,avg} = R_e \left| \eta L_m (\bar{I}_d^s \bar{I}_q^{r*} - \bar{I}_q^s \bar{I}_d^{r*}) \right| \quad (6.14)$$

donde R_e indica que solo se considera la parte real de la expresión compleja y el asterisco significa el conjugado del término de corriente compleja. La ecuación (6.14) da solamente el valor medio del par de origen eléctrico.

6.2. TRANSFORMACION DE COMPONENTES SIMETRICOS BIFASICOS

La transformación de componentes simétricos bifásicos viene dada por la siguiente ecuación matricial:

$$\underline{\underline{V}}_{+-}^{sr} = \underline{\underline{G}}_{+-,dq}^{sr} \underline{\underline{V}}_{dq}^{sr} \quad (6.15)$$

Las matrices de tensión en la ecuación (6.15) vienen dadas individualmente por:

$$\underline{\underline{V}}_{dq}^{sr} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{V}}_d^s \\ \underline{\underline{V}}_q^s \\ \underline{\underline{V}}_d^r \\ \underline{\underline{V}}_q^r \end{bmatrix} \quad (6.16) \quad \underline{\underline{V}}_{+-}^{sr} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{V}}_+^s \\ \underline{\underline{V}}_-^s \\ \underline{\underline{V}}_+^r \\ \underline{\underline{V}}_-^r \end{bmatrix} \quad (6.17)$$

La matriz de tensión (d-q), como la matriz de tensión (+-), están compuestas por cantidades complejas. La transformación se define en función de cantidades complejas y se denomina generalmente transformación compleja.

La matriz de transformación de componentes simétricas, se define por:

$$\underline{\underline{G}}_{+-,dq}^{sr} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & j & 0 & 0 \\ 1 & -j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & j \\ 0 & 0 & 1 & -j \end{bmatrix} \quad (6.18)$$

La potencia compleja suministrada a las puertas del estator de la máquina d-q en función de las cantidades complejas, viene dada por:

$$\underline{\underline{P}}_{dq}^s = \left| (\underline{\underline{I}}_{dq}^s)^t \right|^* \underline{\underline{V}}_{dq}^s \quad (6.19)$$

En función de las variables (+-), la potencia suministrada, se define por:

$$\underline{\underline{P}}_{+-}^s = \left| (\underline{\underline{I}}_{+-}^s)^t \right|^* \underline{\underline{V}}_{+-}^s \quad (6.20)$$

La parte real representa los vatios y la parte imaginaria los voltio amperio reactivos suministrado a las puertas - del estator, además:

$$\left| (\underline{\bar{I}}_{dq}^s)^t \right|^* = (\underline{\bar{I}}_d^s)^* (\underline{\bar{I}}_q^s)^* \quad (6.21)$$

$$\left| (\underline{\bar{I}}_{+-}^s) \right|^* = (\underline{\bar{I}}_+^s)^* (\underline{\bar{I}}_-^s)^* \quad (6.22)$$

Haciendo sustituciones la potencia (+-) se transforma:

$$\underline{\bar{P}}_{+-}^s = \left| (\underline{\bar{I}}_{+-}^s)^t \right|^* G_{+-,dq}^s \underline{\bar{V}}_{dq}^s \quad (6.23)$$

Las corrientes se transforman del mismo modo:

$$\underline{\bar{I}}_{+-}^s = G_{+-,dq}^s \underline{\bar{I}}_{dq}^s \quad (6.24)$$

y tomando traspuestas tenemos:

$$(\underline{\bar{I}}_{+-}^s)^t = (G_{+-,dq}^s \underline{\bar{I}}_{dq}^s)^t = (\underline{\bar{I}}_{dq}^s)^t (G_{+-,dq}^s)^t \quad (6.25)$$

Reemplazando la conjugada de la ecuación (6.25) en (6.20)

tenemos:

$$\underline{\bar{P}}_{+-}^s = \left| (\underline{\bar{I}}_{dq}^s)^t \right|^* \left| (G_{+-,dq}^s)^t \right|^* G_{+-,dq}^s \underline{\bar{V}}_{dq}^s \quad (6.26)$$

$$U = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \left| (G_{+-,dq}^s)^t \right|^* G_{+-,dq}^s \quad (6.27)$$

Luego:

$$\underline{\bar{P}}_{+-}^s = \left| (\underline{\bar{I}}_{dq}^s)^t \right|^* \underline{\bar{V}}_{dq}^s \quad (6.28)$$

Comparando (6.19) y (6.28) se demuestra que la potencia - es invariante, es decir:

$$\underline{\bar{P}}_{+-}^s = \underline{\bar{P}}_{dq}^s$$

Dadas las tensiones (+, -), puede encontrarse fácilmente - las tensiones (d-q), invirtiendo simplemente la ecuación - (6.15):

$$\underline{\bar{v}}_{dq}^s = \underline{G}_{dq,+}^s \underline{\bar{v}}_{+-}^s \quad (6.29)$$

donde:

$$\underline{G}_{dq,+}^s = (\underline{G}_{+-,dq}^s)^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -j & j \end{vmatrix} \quad (6.30)$$

Considerando estator y rotor tenemos:

$$\underline{G}_{dq,+}^{sr} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -j & j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -j & j \end{vmatrix} \quad (6.31)$$

De las ecuaciones (6.9), tenemos:

$$\underline{\bar{v}}_d^s = j \sqrt{v}_d^s \quad \underline{\bar{v}}_q^s = \sqrt{v}_q^s \quad (6.32)$$

Escribiendo en componentes la transformación dada por la - matriz (6.15), obtenemos para las tensiones (+ -) del esta - tor:

$$\underline{\bar{v}}_+^s = \frac{1}{\sqrt{2}} (\underline{\bar{v}}_d^s + j \underline{\bar{v}}_q^s) \quad \underline{\bar{v}}_-^s = \frac{1}{\sqrt{2}} (\underline{\bar{v}}_d^s - j \underline{\bar{v}}_q^s) \quad (6.33)$$

Sustituyendo (6.32) en (6.33) tenemos:

$$\underline{\bar{v}}_+^s = \frac{j}{\sqrt{2}} (\sqrt{v}_d^s + \sqrt{v}_q^s) \quad \underline{\bar{v}}_-^s = \frac{j}{\sqrt{2}} (\sqrt{v}_d^s - \sqrt{v}_q^s) \quad (6.34)$$

En la práctica se dá que las magnitudes de las tensiones - sinusoidales son iguales o compensadas, es decir $\sqrt{v}_d^s = \sqrt{v}_q^s = \sqrt{v}^s$, luego tenemos:

$$\underline{\bar{v}}_+^s = j \sqrt{2} \sqrt{v}^s \quad \text{y} \quad \underline{\bar{v}}_-^s = 0 \quad (6.35)$$

Las excitaciones compensadas dan lugar a la formación de un campo magnético giratorio uniforme en el sentido angular positivo, razón por la que la variable de tensión $+$ se denomina tensión de secuencia positiva y la variable $-$ tensión de secuencia negativa.

Para una excitación compensada tendremos un campo giratorio uniforme en el sentido positivo y solamente existirán los términos de secuencia positiva. El presente desarrollo analizará únicamente el suministro compensado.

La ecuación (6.7) puede escribirse en forma matricial como:

$$\underline{\underline{V}}_{dq}^{sr} = \underline{\underline{Z}}_{dq}^{sr} \underline{\underline{I}}_{dq}^{sr} \quad (6.36)$$

Al usar la transformación de componentes simétricas la podremos escribir como:

$$\underline{\underline{V}}_{+-}^{sr} = \underline{\underline{Z}}_{+-}^{sr} \underline{\underline{I}}_{+-}^{sr} \quad (6.37)$$

donde:
$$\underline{\underline{V}}_{+-}^{sr} = \underline{\underline{G}}_{+-,dq}^{sr} \underline{\underline{V}}_{dq}^{sr} \quad (6.38)$$

$$\underline{\underline{I}}_{+-}^{sr} = \underline{\underline{G}}_{+-,dq}^{sr} \underline{\underline{I}}_{dq}^{sr} \quad (6.39)$$

y:
$$\underline{\underline{Z}}_{+-}^{sr} = \underline{\underline{G}}_{+-,dq}^{sr} \underline{\underline{Z}}_{dq}^{sr} (\underline{\underline{G}}_{+-,dq}^{sr})^{-1} \quad (6.40)$$

Reemplazando las ecuaciones (6.18), (6.31), (6.36) en (6.40) y efectuando operaciones se logra obtener la matriz $\underline{\underline{Z}}_{+-}^{sr}$ tal como se observa en la ecuación (6.41).

El objetivo es el de obtener la potencia transformada por fase para ello tendremos que descomponer la resistencia del rotor en dos resistencias, una fija y otra "variable"

$$\begin{array}{ccccccc}
 R_5 + j\omega(L_{sr} + L) + \frac{\omega L_m}{\omega} & 0 & j\omega(L + \frac{\omega L_m}{\omega}) & 0 & & & \\
 0 & R_3 + j\omega(L_{sr} + L) - j\frac{\omega L_m}{\omega} & 0 & j\omega(L - \frac{\omega L_m}{\omega}) & & & \\
 j\omega(L - (1-s)\frac{L_m}{\eta} + \frac{\omega L_m}{\omega}) & 0 & R_4 + j\omega(L_{sr} + L) + (1-s)\frac{L_r}{\eta} + \frac{\omega L_m}{\omega} & 0 & & & \\
 0 & j\omega(L + (1-s)\frac{L_m}{\eta} - \frac{\omega L_m}{\omega}) & 0 & R_2 + j\omega(L_{sr} + L) + (1-s)\frac{L_r}{\eta} - \frac{\omega L_m}{\omega} & & &
 \end{array}$$

Z_{+-}

Ecuación (6.41)

multiplicada por una expresión de deslizamiento, para ello dividimos las tensiones estáticas entre s y las tensiones rotóricas entre $(2-s)$. El artificio aplicado es válido, ya que las funciones de fuerza exteriores, en ambos casos es cero, ya que se ha supuesto que las puertitas del rotor de la máquina de inducción están en cortocircuito tal y como se propuso originalmente.

Por tanto de (6.41) tenemos:

$$\begin{aligned} \bar{V}_+^s = & \left| R_s + j\omega((L_{s1} + L) + \frac{\omega \mu}{\omega} (L_m - L)) \right| \bar{I}_+^s + \\ & j\omega \left| L + \frac{\omega \mu}{\omega} (L_m - L) \right| \bar{I}_+^r \end{aligned} \quad (6.41a)$$

$$\begin{aligned} \bar{V}_-^s = & \left| R_s + j\omega((L_{s1} + L) - \frac{\omega \mu}{\omega} (L_m - L)) \right| \bar{I}_-^s + \\ & j\omega \left| L - \frac{\omega \mu}{\omega} (L_m - L) \right| \bar{I}_-^r \end{aligned} \quad (6.41b)$$

$$\begin{aligned} \frac{\bar{V}_+^r}{s} = 0 = & \left| j\omega \left| \frac{L}{s} - \frac{L_m(1-s)}{\eta} + \frac{\omega \mu}{\omega s} (L_m - L) \right| \right| \bar{I}_+^s + \\ & \left| \frac{R_r}{s} + j\omega \left| \frac{(L_{r1} + L)}{s} + \frac{(1-s)L_r}{s} + \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{\omega \mu}{\omega s} (L_m - L) \right| \right| \bar{I}_+^r \end{aligned} \quad (6.41c)$$

$$\begin{aligned} \frac{\bar{V}_-^r}{(2-s)} = 0 = & \left| j\omega \frac{L}{(2-s)} + \frac{(1-s)L_m}{(2-s)\eta} - \frac{\omega \mu (L_m - L)}{(2-s)\omega} \right| \bar{I}_-^s + \\ & \left| \frac{R_r}{(2-s)} + j\omega \left| \frac{(L_{r1} + L)}{(2-s)} + \frac{(1-s)L_r}{\eta(2-s)} - \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{\omega \mu (L_m - L)}{\omega(2-s)} \right| \right| \bar{I}_-^r \end{aligned} \quad (6.41d)$$

Finalmente la matriz de impedancia \underline{Z}_{+-}^{sr} con la que vamos a trabajar está dada por (6.42).

$$R_s + j\omega \left(L_{sr} + L \right) + \frac{\omega L_m (L_m - L)}{\omega}$$

$$j\omega \left(L + \frac{\omega L_m (L_m - L)}{\omega} \right)$$

0

$$R_s + j\omega \left(\frac{L_{sr} + L}{s} \right) - \frac{\omega L_m (L_m - L)}{\omega}$$

0

$$j\omega \left(L - \frac{\omega L_m (L_m - L)}{\omega} \right)$$

$Z_{+-}^{sr} =$

$$j\omega \left(\frac{L}{s} - \frac{(1-s)L_m}{s} + \frac{\omega L_m (L_m - L)}{s\omega} \right)$$

0

$$\frac{R_r}{s} + j\omega \left(\frac{L_{rr} + L}{s} + \frac{(1-s)L_r + \frac{\omega L_m (L_m - L)}{s\omega}}{s} \right)$$

0

$$j\omega \left(\frac{L}{(2-s)} + \frac{(1-s)L_m}{(2-s)} - \frac{\omega L_m (L_m - L)}{(2-s)\omega} \right)$$

0

0

$$\frac{R_r}{(2-s)} + j\omega \left(\frac{L_{rr} + L}{(2-s)} + \frac{(1-s)L_r}{(2-s)} - \frac{\omega L_m (L_m - L)}{(2-s)\omega} \right)$$

donde $L_r = L_{rr} + L_m$

Ecuación (6.42)

6.3. RELACIONES DE PAR

La ecuación (6.43) expresa el par total medio de origen eléctrico, en función de las corrientes complejas directa y en cuadratura, para el modelo bifásico de máquina:

$$T_{e,med} = R_e \left| \eta L_m (\bar{I}_d^s \bar{I}_q^{r*} - \bar{I}_q^s \bar{I}_d^{r*}) \right| \quad (6.43)$$

donde R_e significa que solo consideramos la parte real de la expresión compleja encerrada entre corchetes. Usando la transformación inversa de componentes simétricas, dada por:

$$\bar{I}_{dq}^{sr} = (\underline{G}_{+-,dq}^{sr})^{-1} \bar{I}_{+-}^{sr} \quad (6.44)$$

podemos eliminar las corrientes directa y en cuadratura en favor de las corrientes de secuencia positiva y negativa, luego obtenemos:

$$\bar{I}_d^s = \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{I}_+^s + \bar{I}_-^s) \quad \bar{I}_q^s = \frac{1}{\sqrt{2}} (-j \bar{I}_+^s + j \bar{I}_-^s) \quad (6.45)$$

$$\bar{I}_d^r = \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{I}_+^r + \bar{I}_-^r) \quad \bar{I}_q^r = \frac{1}{\sqrt{2}} (-j \bar{I}_+^r + j \bar{I}_-^r) \quad (6.46)$$

Realizando ahora los dos productos de la ecuación (6.43):

$$\bar{I}_d^s \bar{I}_q^{r*} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{I}_+^s + \bar{I}_-^s) \frac{1}{\sqrt{2}} (j \bar{I}_+^{r*} - j \bar{I}_-^{r*})$$

$$\bar{I}_q^s \bar{I}_d^{r*} = \frac{1}{\sqrt{2}} (-j \bar{I}_+^s + j \bar{I}_-^s) \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{I}_+^{r*} + \bar{I}_-^{r*})$$

tenemos:

$$\bar{I}_d^s \bar{I}_q^{r*} - \bar{I}_q^s \bar{I}_d^{r*} = j (\bar{I}_+^s \bar{I}_+^{r*} - \bar{I}_-^s \bar{I}_-^{r*}) \quad (6.47)$$

Sustituída la ecuación (6.47) en la ecuación (6.43) logra mos obtener el par total medio de origen eléctrico como función de las corrientes de secuencia positiva y negativa.

$$T_{e,med} = R_e \left| j\eta L_m (\bar{I}_+^s \bar{I}_+^{r*} - \bar{I}_-^s \bar{I}_-^{r*}) \right| \quad (6.48)$$

De las ecuaciones (6.41c) y (6.41d), podemos escribir las dos relaciones siguientes:

$$\bar{I}_+^r = - \frac{j\omega \left| L - (1-s)L_m + \frac{\omega \mu}{\omega} (L_m - L) \right|}{\left| R_r + j\omega \left| (L_{r1} + L) + (1-s)\frac{L_r}{\eta} + \frac{\omega \mu}{\omega} (L_m - L) \right| \right|} \bar{I}_+^s \quad (6.49)$$

$$\bar{I}_-^r = - \frac{j\omega \left| L - (1-s)L_m - \frac{\omega \mu}{\omega} (L_m - L) \right|}{\left| R_r + j\omega \left| (L_{r1} + L) + (1-s)\frac{L_r}{\eta} - \frac{\omega \mu}{\omega} (L_m - L) \right| \right|} \bar{I}_-^s \quad (6.50)$$

Despejando \bar{I}_+^s e \bar{I}_-^s y reemplazándolos en (6.48) logramos obtener la expresión del par eléctrico total medio:

$$T_{e,med} = - \frac{\eta R_r}{s\omega} \left| \frac{L_m}{\left| \frac{L}{s} - \frac{(1-s)}{s\eta} L_m + \frac{\omega \mu}{s\omega} (L_m - L) \right|} \right| (I_+^r)^2 +$$

$$\frac{\eta R_r}{(2-s)\omega} \left| \frac{L_m}{\left| \frac{L}{(2-s)} + \frac{(1-s)}{(2-s)\eta} L_m - \frac{\omega \mu}{\omega(2-s)} (L_m - L) \right|} \right| (I_-^r)^2 \quad (6.51)$$

Expresión que consta de dos términos, de los cuales el primero depende de la corriente de secuencia positiva del rotor y el segundo de la corriente de secuencia negativa.

Según el convenio de signos que se ha venido usando, un par eléctrico negativo significa que la máquina genera un par en el sentido angular positivo; por tanto, la parte de secuencia positiva del circuito genera un par en el sentido angular positivo.

6.4. MAGNITUDES PARA UNA FASE

La ecuación (6.52) expresa el par medio total de origen eléctrico, generado por las dos fases del modelo bifásico d-q. Puesto que la máquina está conectada a un colector infinito bifásico compensado, podemos dividir (6.52) por un factor 2 y obtener el par eléctrico medio, por fase como:

$$T_{e\phi} = - \frac{\eta R_r}{2s \omega} \left| \frac{L_m}{\left| \frac{L}{s} - \frac{(1-s)}{s\eta} L_m + \frac{\omega \mu}{\omega} (L_m - L) \right|} \right| (I_+^r)^2 + \frac{\eta R_r}{2(2-s)\omega} \times \left| \frac{L_m}{\left| \frac{L}{(2-s)} + \frac{(1-s)}{(2-s)\eta} L_m - \frac{\omega \mu}{\omega(2-s)} (L_m - L) \right|} \right| (I_-^r)^2 \quad (6.52)$$

Tanto la transformación de componentes simétricas como la que convierte a-b en d-q, dejan invariante la potencia, - por lo que la ecuación (6.52) representa el par eléctrico generado por fase, tanto para el modelo a-b, como para el d-q. La transformación de tres a dos fases, α -z- γ a a-b se realiza de manera que se mantengan invariantes las cantidades de potencia, y par, por fase; entonces (6.52) representa también el par eléctrico por fase para la máquina trifásica original.

La potencia transformada en una fase de la máquina viene dada por:

$$P_{e\phi} = - T_{e\phi} (1-s) \omega / \eta \quad (6.53)$$

Sustituyendo (6.52) en (6.53), tendremos:

$$P_{e\phi} = \left| \frac{R_r (1-s)}{2s} \right| \left| \frac{L_m}{\left| \frac{L}{s} - \frac{(1-s)}{s\eta} L_m + \frac{\omega \mu}{s\omega} (L_m - L) \right|} \right| \left| (I_+^r)^2 - \right.$$

$$\left| \frac{R_r (1-s)}{2 (2-s)} \right| \left| \frac{L_m}{\left| \frac{L}{(2-s)} + \frac{(1-s)}{(2-s)\eta} L_m - \frac{\omega \mu}{(2-s)} (L_m - L) \right|} \right| \left\| (I_r^-)^2 \right. \quad (6.54)$$

Las resistencias en el rotor siempre podrán desdoblarse en dos partes:

$$\frac{R_r}{s} = R_r + R_r \frac{(1-s)}{s} \quad \text{y} \quad \frac{R_r}{(2-s)} = R_r - \frac{R_r (1-s)}{(2-s)} \quad (6.55)$$

Para excitaciones compensadas en el estator tenemos que:

$$\frac{\bar{V}_+^s}{\sqrt{2}} \quad \text{ó} \quad \frac{\bar{V}_-^s}{\sqrt{2}}$$

tienen una magnitud igual a la tensión verdadera \sqrt{s} aplicada a cada fase del estator, tanto para la máquina bifásica como para la trifásica. En función del modelo d-q, podemos identificar la potencia media por fase, pérdida en calentamiento óhmico de los devanados del estator, con la expresión:

$$\text{Pérdida de potencia por fase del estator} = \frac{1}{2} R_s (\bar{I}_d^s \bar{I}_d^{s*} + \bar{I}_q^s \bar{I}_q^{s*}) \quad (6.56)$$

Como no aparecen términos imaginarios, las pérdidas en el estator se transforman en:

$$\begin{aligned} \text{Pérdidas por fase en el cobre del estator} &= \frac{1}{2} R_s (\bar{I}_+^s \bar{I}_+^{s*} + \bar{I}_-^s \bar{I}_-^{s*}) = \\ &R_s \left(\frac{\bar{I}_+^s}{\sqrt{2}} \right)^2 + R_s \left(\frac{\bar{I}_-^s}{\sqrt{2}} \right)^2 \quad (6.57) \end{aligned}$$

Puede demostrarse de manera análoga que, para el rotor:

$$\text{Pérdidas por fase en el cobre del rotor} = R_r \left(\frac{I_r^-}{\sqrt{2}} \right)^2 + R_r \left(\frac{I_r^+}{\sqrt{2}} \right)^2 \quad (6.58)$$

6.5. CONTRIBUCION DE SECUENCIA POSITIVA, POR FASE, AL -
PAR DE ORIGEN ELECTRICO, COMO FUNCION DEL DESLIZA -
MIENTO

A la máquina de inducción se ha impuesto un conjunto de ligaduras de régimen estacionario. Las dos ligaduras que implicaban el cortocircuito de las puertas del rotor fueron incorporadas a las ecuaciones que conducen al circuito equivalente de la máquina.

El par de origen eléctrico, por fase, se halla a partir de la relación:

$$T_{e\phi} = - \frac{\eta P_{e\phi}}{(1-s)\omega} \quad (6.59)$$

donde $P_{e\phi}$ es la potencia transformada en una fase de la máquina dada por la ecuación (6.54).

Para niveles bajos de saturación podemos utilizar la siguiente fórmula obtenida en ref {4} - ecuación 12-141:

$$\frac{\bar{I}_+^r}{\sqrt{2} a} = \frac{-V^s/\sqrt{2}}{|R_s + a^2 R_r/s| + j(X_s + a^2 X_r)} \quad (6.60)$$

$$\frac{\bar{I}_-^r}{\sqrt{2} a} = \frac{-V_-^s/\sqrt{2}}{|R_s + a^2 R_r/(2-s)| + j(X_s + a^2 X_r)}$$

Sustituyendo las ecuaciones de (6.60) en (6.54) y (6.59) obtenemos:

$$T_{e\phi} = T_{e\phi}^+ + T_{e\phi}^- \quad (6.61)$$

donde:

$$T_{e\phi}^+ = - \frac{\eta (a^2 R_r/s) (V_+^s)^2 (\alpha)}{2\omega | (R_s + a^2 R_r/s)^2 + (X_s + a^2 X_r)^2 |} \quad (6.62)$$

$$\alpha = \frac{L_m}{\left| \frac{L}{s} - \frac{(1-s)}{\eta s} L_m + \frac{\omega \mu}{\omega s} (L_m - L) \right|}$$

$$T_{e\emptyset}^- = \frac{\eta (a^2 R_r / (2-s)) (V_-^s)^2 (z)}{2\omega \left| (R_s + a^2 R_r / (2-s))^2 + (X_s + a^2 X_r)^2 \right|} \quad (6.63)$$

$$z = \frac{L_m}{\left| \frac{L}{(2-s)} + \frac{(1-s)}{\eta (2-s)} L_m - \frac{\omega \mu}{\omega (2-s)} (L_m - L) \right|}$$

$T_{e\emptyset}^+$ da el valor medio del par de origen eléctrico para una fase que pretende impulsar el rotor en el sentido angular positivo.

$T_{e\emptyset}^-$ representa la parte por fase que tiende a impulsar al rotor en el sentido angular negativo.

Como es normal tener en el estator una excitación compensada que produce un campo magnético uniforme que gira en el sentido positivo; reemplazamos la condición de compensación ya establecida en las ecuaciones (6.62) y (6.63), para obtener:

$$T_{e\emptyset}^+ = \frac{(\eta a^2 R_r (V^s)^2 / s\omega) L_m}{\left| \frac{L}{s} - \frac{(1-s)}{\eta s} L_m + \frac{\omega \mu}{s\omega} (L_m - L) \right| \left| (R_s + a^2 R_r / s) + (X_s + a^2 X_r)^2 \right|} \quad (6.64)$$

$$T_{e\emptyset}^- = 0 \quad (6.65)$$

Luego para excitación compensada en el sentido positivo, resulta un par eléctrico sólo en el sentido positivo. A

FELI FORTRAN A1 F 80 TRUNC=72 SIZE=84 LINE=43 COL=1 ALT=0
====>

```
YMI=Y(1)
YMA=YMI
DO 20 I=2,N
IF(Y(I)-YMA) 14,14,15
15 YMA=Y(I)
GO TO 20
14 IF(Y(I)-YMI) 16,16,20
16 YMI=Y(I)
20 CONTINUE
IF(YMI.GT.0.) YMI=0
IF(YMA.LT.0.) YMA=0
DELY=(YMA-YMI)/100.
WRITE(6,24)
24 FORMAT('1',2X,'&DESLIZAMIENTO&$TE$$',108('X'))
N1=IFIX(ABS(YMI/DELY)+0.5)+1
IF(N1.GT.101) N1=101
DO 25 I=1,102
Z=Y(I)
DO 5 J=1,101
5 LINE(J)=IB
XE=XE+DELX
M=IFIX((Y(I)-YMI)/DELY+0.5)+1
```

FELI FORTRAN A1 F 80 TRUNC=72 SIZE=84 LINE=64 COL=1 ALT=0
====>

```
M=IFIX((Y(I)-YMI)/DELY+0.5)+1
IF(M.GT.101) M=101
IF(M-N1) 28,29,30
30 DO 32 J=N1,M
IF(J.EQ.M) LINE(J)=IA
IF(J.EQ.N1) LINE(J)=ID
32 CONTINUE
GO TO 44
29 LINE(M)=ID
GO TO 44
28 DO 40 J=M,N1
IF(J.EQ.M) LINE(J)=IA
IF(J.EQ.N1) LINE(J)=ID
40 CONTINUE
44 WRITE(6,34) I,XE,Z,LINE
34 FORMAT(' ',I3,1X,F7.3,1X,F9.3,2X,'X',1X,101A1,4X,'X')
25 CONTINUE
WRITE(6,60)
60 FORMAT(' ',23X,108('X'))
STOP
END
```

* * * END OF FILE * * *

Para valores del deslizamiento comprendidos entre cero y la unidad, la velocidad angular del rotor es positiva y menor que la velocidad de sincronismo ω_s . Puesto que $T_{e\phi}^+$ también es positivo para estos valores del deslizamiento, la máquina trabaja como motor de inducción y convierte energía eléctrica en mecánica, tal como se observa en la gráfica mostrada en el Capítulo VII-4. Si el deslizamiento es mayor que la unidad, la velocidad angular del rotor tendrá que ser negativa, aunque el par eléctrico sea todavía positivo, y como consecuencia, la potencia se proporciona a la puerta mecánica.

Para valores negativos del deslizamiento, la velocidad angular del rotor es positiva y mayor que la velocidad de sincronismo. Cuando el par eléctrico es negativo, la potencia se suministra de nuevo a la puerta mecánica, aunque siendo negativo el deslizamiento la energía fluye hacia el exterior de las puertas eléctricas y la máquina trabaja como generador de inducción.