UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Una Generalización de la Formulación del Método Lagrangeano Aumentado y la Prueba de su Buena Definición

por

Yna Consuelo Rezza Espinoza

Tesis para optar el
Título Profesional de:
Licenciado en Matemática

Dr. Pedro Canales García
Asesor

Lima –Perú
2008

A la genialidad y simpatía
de Clovis Caesar Gonzaga.

Gracias infinitas a Claude Lemaréchal y Jean - Baptiste Hiriart - Urruty, por haber publicado en el año 93 sus textos de Análisis Convexo. Sin ellos hubiera demorado más de la cuenta en culminar esta tesis.

Gracias también a Pedro Canales , por el apoyo recibido de su parte y a German Comina por los gráficos.

Resumen

En este trabajo presentamos una generalización de la formulación del Método Lagrangeano Aumentado y la demostración de su buena definición la cual incluye casi todas las formulaciones existentes en la literatura. La familia de penalidades $\mathcal{P}$ que describimos consideran dos subfamilias; una, continuamente diferenciable y estrictamente convexa (entre otras características) y la otra, continuamente diferenciable, estrictamente convexa en $]-b,+\infty[$, para algún $b>0$ y constante en $]-\infty,-b]$.

Formulaciones del Método realizadas por diversos investigadores tales como Rockafellar [12], Bertsekas [1], Polyak y Teboulle [8] y Gonzaga y Castillo [2] y las correspondientes pruebas de buena definición de los tres últimos, entre otros, vendrían a ser casos particulares.

Indice

Notación

$\mathbb{R}_+$ Conjunto de números reales no negativos.

$\mathbb{R}_{++}$ Conjunto de números reales positivos.

$\mathbb{R}^m_+$ Conjunto de puntos de $\mathbb{R}^m$ cuyas componentes son no negativas.

$\mathbb{R}^m_{++}$ Conjunto de puntos de $\mathbb{R}^m$ cuyas componentes son positivas.

$dom f$ Dominio de la función f

$int\ S$ Interior del conjunto S.

$\frac{\partial P}{\partial t}$ Derivada parcial de P respecto de la variable t.

Capítulo 1

Introducción

Problemas no lineales de optimización tales como:

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & f(x) \\ \text{s.a.} \quad & g_i(x) \leq 0, \qquad\qquad i = 1,..,m \\ & x \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

donde $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ o alguna $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(dom g_i = \mathbb{R}^n)$ para $i = 1, \ldots, m$ son funciones no lineales, surgen espontáneamente en muchos campos de aplicación.

Uno de los más estudiados es el siguiente:

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & f(x) \\ \text{s.a.} \quad & g_i(x) \leq 0, \qquad\qquad i = 1,..,m \\ & x \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

donde $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ es una función convexa y cerrada, $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(dom g_i = \mathbb{R}^n)$ para $i = 1, \ldots, m$ son funciones convexas.

Para resolver este problema de optimización convexa, apareció a fines de la década de los 70 un método que se ha venido aplicando con éxito hasta el día de hoy; estamos refiriéndonos al Método Lagrangeano Aumentado. Basado, como muchos otros, en la sustitución del problema inicial por una sucesión de subproblemas, este método tiene como primer objetivo garantizar **la buena definición** de la sucesión formada por alguna solución de cada subproblema.

Rockafellar [12], demostró esto mediante el uso de la penalidad Estándar; Bertsekas [1] la garantizó para la penalidad de tipo Exponencial. Otras pruebas de la buena definición del Método Lagrangeano Aumentado que utilizan penalidad Estrictamente creciente y penalidad con Cambio de variable se encuentran en [8] y [2] respectivamente.

La generalización de la formulación del método y la prueba de buena definición que presentamos en los Capítulos 2 y 4 respectivamente, incluyen estos y casi todos los casos existentes en la literatura. Nosotros definimos la familia de penalidades $\mathcal{P}$ considerando dos subfamilias, una continuamente diferenciable y estrictamente convexa y la otra, continuamente diferenciable, estrictamente convexa en $]-b, +\infty[$ para algún $b > 0$ y constante en $]-\infty, -b]$.

Capítulo 2

El Método Lagrangeano Aumentado

Antes de tratar el método en detalle (Sección 2.2), daremos algunas definiciones y probaremos algunos resultados que servirán para una comprensión más rápida de lo que será expuesto.

2.1 Nociones y resultados preliminares

Definición 2.1 *Un conjunto $C \subset \mathbb{R}^n$ se dice que es convexo si $\alpha\, x + (1-\alpha)\, x'$ está en C para todo par $(x, x') \in C \times C$ y para todo $\alpha \in\,]0,1[$ (o equivalentemente $\alpha \in [0,1]$)*

Definición 2.2 *Sea $C \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo. Una función $f : C \to \mathbb{R}$ se dice convexa en C si para todo par $(x, x') \in C \times C$ y para todo $\alpha \in\,]0,1[$ se tiene:*

$$f(\alpha x + (1-\alpha)x') \leq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(x')$$

Definición 2.3 *Se dice que la función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ no idénticamente $+\infty$ es convexa si para todo $(x, x') \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ y todo $\alpha \in\,]0,1[$ tenemos:*

$$f(\alpha x + (1-\alpha)x') \leq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(x')$$

considerando esta desigualdad en $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

A esta clase de funciones se le denota por $f \in Conv\mathbb{R}^n$.

Definición 2.4 *Sea $f \in Conv\mathbb{R}^n$; el dominio de f es el conjunto no vacío dom f dado por*

$$dom\ f = \{x \in \mathbb{R}^n : \ f(x) < +\infty\}$$

Observación 2.5 *Sea $f \in Conv\mathbb{R}^n$; el dominio de f es un conjunto convexo.*

Prueba:

Si $x_1, x_2 \in dom f$ entonces $f(x_1) < +\infty$ y $f(x_2) < +\infty$.

Además para $\alpha \in]0,1[$, $f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2)$ pues f es convexa y también $f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) < +\infty$.

Luego por la Definición 2.4 $\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 \in dom f$.

$\square$

Definición 2.6 *La función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ se dice cerrada si f es semicontinua inferior en todo punto de $\mathbb{R}^n$, o sea si para cada $x \in \mathbb{R}^n$ se verifica*

$$\liminf_{y \to x} f(y) \geq f(x).$$

Si $f \in Conv\mathbb{R}^n$ y además f es cerrada, denotaremos $f \in \overline{Conv}\mathbb{R}^n$.

Una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(dom f = \mathbb{R}^n)$ cerrada se define de manera similar.

Definición 2.7 *La función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ se dice semicontinua superior en $x \in \mathbb{R}^n$ si para $x \in \mathbb{R}^n$ se verifica*

$$\limsup_{y \to x} f(y) \leq f(x).$$

Observación 2.8 *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Para $x \in dom f$, f es continua en x si y solo si f es semicontinua superior y semicontinua inferior (cerrada) en x.*

Si $f : I\!R^n \to I\!R$, $(dom f = I\!R^n)$ la Observación anterior se verifica para $x \in I\!R^n$

Prueba:

Ver Afirmación, pag. 51 en [11].

Teorema 2.9 *Sea $S \subset I\!R^n$ un conjunto convexo y $f : S \subset I\!R^n \to I\!R$ convexa en S. Luego f es continua en el interior de S*

Prueba:

Sea $\bar{x} \in int(S)$ cualquiera. Entonces existe $\epsilon > 0$ tal que la bola cerrada

$$B(\bar{x}, \epsilon) = \Pi_{i=1}^{n}[\bar{x}_i - \epsilon, \bar{x}_i + \epsilon] \subset intS$$

donde se ha considerado en $I\!R^n$ la norma $\|x\|_\infty = max_i|x_i|$. Obviamente $B(\bar{x}, \epsilon)$ es convexo y compacto y posee 2^n (número finito) puntos extremos. Por tanto f posee máximo en B que alcanza en uno de sus puntos extremos.

Sea $q \in I\!N$ y $x \in B(\bar{x}, \frac{\epsilon}{q})$. Se tiene $qx - (q-1)\bar{x} \in B(\bar{x}, \epsilon)$ pues

$$\|qx - (q-1)\bar{x} - \bar{x}\|_\infty = q\|x - \bar{x}\|_\infty \leq q\ \frac{\epsilon}{q} = \epsilon$$

Ahora, x se puede expresar como

$$x = \frac{1}{q}(qx - (q-1)\bar{x}) + (\frac{q-1}{q})\bar{x}$$

y de la convexidad de f se tiene:

$$f(x) \leq \frac{1}{q}\ f(qx - (q-1)\bar{x}) + (\frac{q-1}{q})f(\bar{x}) \leq \frac{1}{q}\ \alpha + (\frac{q-1}{q})f(\bar{x})$$

donde $\alpha = max\{f(x),\ x \in B(\bar{x}, \epsilon)\}$. Así

$$f(x) - f(\bar{x}) \leq \frac{1}{q}(\alpha - f(\bar{x})),\ \forall\ x \in B(\bar{x}, \frac{\epsilon}{q}) \qquad (2.1)$$

Por otro lado $\bar{x}$ se puede expresar como $\bar{x} = \frac{1}{q+1}(\bar{x} - q(x - \bar{x})) + \frac{q}{q+1}\ x$ y ya que

$$\|\bar{x} - q(x - \bar{x}) - \bar{x}\|_\infty = q\|x - \bar{x}\|_\infty \leq \epsilon$$

se sigue que $(\bar{x} - q(x - \bar{x})) \in B(\bar{x}, \epsilon)$ y una vez más, de la convexidad de f :

$$f(\bar{x}) \leq \tfrac{1}{q+1} f(\bar{x} - q(x - \bar{x})) + \tfrac{q}{q+1} f(x)$$

entonces $$f(\bar{x}) \leq \tfrac{1}{q+1}\alpha + \tfrac{q}{q+1} f(x) \ \text{ y } \ (q+1)f(\bar{x}) \leq \alpha + qf(x).$$

Reacomodando esta última relación:

$$f(\bar{x}) - f(x) \leq \frac{1}{q}(\alpha - f(\bar{x})) \quad \forall\, x \in B(\bar{x}, \frac{\epsilon}{q}) \tag{2.2}$$

De (2.1) y (2.2) se tiene

$$|f(\bar{x}) - f(x)| \leq \frac{1}{q}(\alpha - f(\bar{x})) \quad \forall\, x \in B(\bar{x}, \frac{\epsilon}{q}).$$

Haciendo tender $q \to \infty$ resulta la continuidad de f en $\bar{x}$.

□

Observación 2.10 *Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(domf = \mathbb{R}^n)$ es convexa entonces f es continua (luego cerrada por la Observación 2.8).*

Prueba:

Se deduce inmediatamente del Teorema 2.9, para $S = \mathbb{R}^n$ convexo.

□

Definición 2.11 *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(domf = \mathbb{R}^n)$ una función convexa, llamamos el subdiferencial de f en $x \in \mathbb{R}^n$ al conjunto denotado $\partial f(x)$ y dado por:*

$$\partial f(x) = \{s \in \mathbb{R}^n : \ f(y) \geq f(x) + \langle s, y - x\rangle \quad \forall\, y \in \mathbb{R}^n\}$$

Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ es convexa y cerrada, el subdiferencial de f en $x \in \mathbb{R}^n$ se define de manera similar. En este caso $\partial f(x) = \emptyset$ si $x \notin domf$.

Definición 2.12 *Sea $f \in Conv\mathbb{R}^n$, decimos que f^* es la conjugada de la función f si:*

$$s \in \mathbb{R}^n \longmapsto f^*(s) = sup\ \{\langle s, x\rangle - f(x) : \ x \in domf\}$$

Consideremos el siguiente problema de optimización convexa:

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \;\; & f(x) \\ \text{s.a.} \;\; & g_i(x) \leq 0 \quad i = 1, \ldots, m \\ & x \in I\!R^n \end{aligned} \tag{$\hat{P}$}$$

donde $f \in \overline{Conv} I\!R^n$ y las funciones $g_i : I\!R^n \to I\!R$ $(dom g_i = I\!R^n)$ para $i = 1, \ldots, m$ son funciones convexas (luego cerradas por la Observación 2.10).

Hipótesis 2.13 *Supongamos que el conjunto de soluciones óptimas del problema $(\hat{P})$ es no vacío y acotado.*

Definición 2.14 *Dado $b > 0$ (posiblemente $+\infty$), denotemos por $\mathcal{P}$ a la familia de funciones* **penalidad** $P : I\!R \times I\!R_{++} \to I\!R$ *ó* $P : I\!R \times I\!R_{+} \to I\!R$ *que satisfacen lo siguiente:*

Si $b = +\infty$ *(respectivamente $0 < b < +\infty$)*

1.- $P(\cdot, u)$ es continuamente diferenciable en $I\!R$, estrictamente convexa en $]-b, +\infty[$ y constante en $]-\infty, -b]$

2.- $P(0, u) = 0, \;\; \dfrac{\partial P}{\partial t}(0, u) = u$

3.- $\lim\limits_{t \to -\infty} \dfrac{\partial P}{\partial t}(t, u) = 0$ *y*

4.- $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{\partial P}{\partial t}(t, u) = +\infty$

para cualquier $u > 0$ y $\forall\, t \in I\!R$ (respectivamente para cualquier $u \geq 0$ y $\forall\, t \in I\!R$).

Definición 2.15 *Asociada al problema $(\hat{P})$ definimos L, la función Lagrangeano Aumentado (con penalidad $P \in \mathcal{P}$) por:*

$$x \in I\!R^n, \mu \in I\!R^m_+, \lambda > 0 \longmapsto L(x, \mu, \lambda) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^{m} P\left(\frac{g_i(x)}{\lambda}, \mu_i\right) \tag{2.3}$$

donde la función $P : I\!R \times I\!R_{++} \to I\!R$ *(o $P : I\!R \times I\!R_+ \to I\!R$) llamada* **penalidad** *pertenecerá a la familia $\mathcal{P}$ definida antes.*

Definición 2.16 *Sea $C \subset \mathbb{R}^n$ convexo. La aplicación $F : C \to \mathbb{R}^n$ se dice monótona (estrictamente monótona) en C si para todo par $(x, x') \in C \times C$ se tiene:*

$$\langle F(x) - F(x'), x - x' \rangle \geq 0 \quad (\langle F(x) - F(x'), x - x' \rangle > 0 \text{ si } x \neq x')$$

Observación 2.17 *Sea $C \subset \mathbb{R}$ convexo. La aplicación $F : C \to \mathbb{R}$ es monótona (estrictamente monótona) en C si y solo si F creciente (estrictamente creciente) en C.*

Prueba:

Se deduce de inmediato de la Definición 2.16, para el caso $n = 1$.

$\square$

Teorema 2.18 *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función diferenciable en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ y sea $C \subset \Omega \cap$ dom$f$ un convexo. Luego f es convexa (estrictamente convexa) en C si y solo si ∇f es monótono (estrictamente monótono) en C.*

Prueba:

Ver Teorema 4.1.4, pag 185 en [3].

Corolario 2.19 *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dom$f = \mathbb{R}$, si f es convexa (estrictamente convexa) y diferenciable en $\mathbb{R}$ entonces f' es monótona (estrictamente monótona) en $\mathbb{R}$. En este caso la monotonicidad (monotonicidad estricta) de f' en $\mathbb{R}$ es equivalente a f' creciente (estrictamente creciente) en $\mathbb{R}$.*

Prueba:

Se deduce de inmediato del Teorema 2.18 y la Observación 2.17, considerando $n = 1$, $\Omega = \mathbb{R}$ y $C = \mathbb{R}$.

$\square$

Observación 2.20 *Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\mathrm{dom} f = \mathbb{R}$ convexa (respectivamente estrictamente convexa) y diferenciable en $\mathbb{R}$. Para $\mu \geq 0$ (respectivamente $\mu > 0$), si $f'(0) = \mu$ y $\lim_{t\to -\infty} f'(t) = 0$ entonces*

$$f'(t) \geq 0 \ \ (\textit{respectivamente } f'(t) > 0) \textit{ para todo } \ t \in \mathbb{R}.$$

Prueba:

a) Para f convexa. Dado que $f'(t) = \mu \geq 0$ para $t = 0$, analizaremos dos casos.

   i) Si $t \geq 0$ entonces por el Corolario 2.19 $f'(t) \geq f'(0)$. Así $f'(t) \geq \mu \geq 0$.

   ii) Caso $t < 0$. Supongamos que existe $\hat{t} < 0$ tal que $f'(\hat{t}\,) < 0$ entonces, para todo $t < \hat{t}$ tenemos $f'(t) \leq f'(\hat{t}\,) < 0$ por el mismo corolario. Haciendo tender $t \to -\infty$ obtenemos

$$\lim_{t\to -\infty} f'(t) \leq f'(\hat{t}\,) < 0$$

   lo que contradice la hipótesis. Luego, para todo $t < 0$, $f'(t) \geq 0$. Por tanto,

$$f'(t) \geq 0 \quad \forall\, t \in \mathbb{R}. \tag{2.4}$$

b) Para f estrictamente convexa. Supongamos que existe $\hat{t} \in \mathbb{R}$ tal que $f'(\hat{t}\,) = 0$. Entonces, para todo $t < \hat{t}$, nuevamente por el Corolario 2.19 (caso alternativo), tenemos $f'(t) < f'(\hat{t}\,)$. Así $f'(t) < f'(\hat{t}\,) = 0$.

   Por (2.4) sabemos que $f'(t) \geq 0 \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$. Luego, $0 \leq f'(t) < 0$, lo que es una contradicción. Por tanto, no existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $f'(t) = 0$, o sea, retiramos la igualdad en la conclusión de la Observación.

$\square$

Proposición 2.21 *Sean $f_1\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(\mathrm{dom} f_1 = \mathbb{R})$ convexa y creciente y $f_2\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(\mathrm{dom} f_2 = \mathbb{R}^n)$ convexa. La función compuesta $f_1 \circ f_2$ es convexa $(\mathrm{dom} f_1 \circ f_2 = \mathrm{dom} f_2 = \mathbb{R}^n)$. De la Observación 2.10 tendremos que $f_1 \circ f_2$ es cerrada.*

Prueba:

Para todo $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$,

$(f_1 \circ f_2)(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) = f_1(f_2(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leq f_1(\alpha f_2(x_1) + (1-\alpha)f_2(x_2))$ pues f_1 es creciente y f_2 es cerrada,

como f_1 es convexa

$$\leq \alpha f_1(f_2(x_1)) + (1-\alpha)f_1(f_2(x_2)) = \alpha(f_1 \circ f_2)(x_1) + (1-\alpha)(f_1 \circ f_2)(x_2)$$

O sea $f_1 \circ f_2$ es convexa.

□

Observación 2.22 *Para cada $u \geq 0$ y $\lambda > 0$ fijos. Considere $P \in \mathcal{P}$ y $g\colon \mathbb{R}^n \to R$ ($dom g = \mathbb{R}^n$) una función convexa. Entonces:*

i) $\dfrac{\partial P}{\partial t}(t,u) \geq 0 \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$. *O sea, $P_u = P(.,u)$ es creciente.*

ii) $P(g(\cdot)/\lambda, u) = P_u \circ g/\lambda$ *es convexa y* $dom P_u \circ g/\lambda = \mathbb{R}^n$ *(luego por la Observación 2.10 $P_u \circ g/\lambda$ es cerrada).*

Además, si $P \in \mathcal{P}$ es tal que para cualquier $u > 0$, $P(.,u)$ es estrictamente convexa (el caso en que $b = +\infty$), entonces $\dfrac{\partial P}{\partial t}(t,u) > 0$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$. O sea, P_u será estrictamente creciente.

Prueba:

i) Como $P \in \mathcal{P}$, para $u \geq 0$ fijo $P(\cdot,u) = P_u(\cdot)$ es convexa y diferenciable en $\mathbb{R}$ (ver Definición 2.14). Además de eso P_u verifica las condiciones de la Observación 2.20 entonces $\dfrac{\partial P}{\partial t}(t,u) \geq 0 \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$. Luego, P_u será creciente.

ii) Dado que g es convexa y *dom* $g = \mathbb{R}^n$ se tiene por la Observación 2.10 que g será cerrada. También tenemos que para $\lambda > 0$ fijo, g/λ será convexa (luego cerrada) Como P_u para $u \geq 0$ fijo es convexa y $dom P_u = \mathbb{R}$ tenemos (por un razonamiento análogo al anterior) que P_u también será cerrada. Dado que acabamos de probar que P_u es creciente, tenemos por la Proposición 2.21 que la compuesta $P_u \circ g/\lambda$ es convexa (luego cerrada).

La última afirmación se obtiene del caso alternativo en la Observación 2.20.

□

Proposición 2.23 *Sean $f_j \in Conv\mathbb{R}^n(\overline{Conv}\mathbb{R}^n)$, t_j números positivos para $j := 1, ..m$.*

$$Si \ \cap_{j=1}^{m} dom f_j \neq \emptyset \ entonces \ f = \sum_{j=1}^{m} t_j f_j \in Conv\mathbb{R}^n \ (\overline{Conv}\mathbb{R}^n)$$

Prueba:

Ver Proposición 2.1.1, pag. 158 en [3].

Observación 2.24 *Para $\mu \geq 0$ en $\mathbb{R}^m$ y $\lambda > 0$ fijos, consideremos la función Lagrangeano Aumentado con penalidad $P \in \mathcal{P}$ definida en (2.3). Entonces, $L_{\mu,\lambda}$ dada por*

$$x \in \mathbb{R}^n \mapsto L_{\mu,\lambda}(x) = L(x, \mu, \lambda) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^{m} P(\frac{g_i(x)}{\lambda}, \mu_i)$$

está en $\overline{Conv}\mathbb{R}^n$.

Prueba:

Para $\mu \geq 0$ en $\mathbb{R}^m$ fijo, tenemos $\mu_i \geq 0 \ \forall i = 1, \ldots, m$. Entonces, como $P \in \mathcal{P}$ y cada g_i son convexas y cerradas, por la Observación 2.22 parte (ii), $P\mu_i \circ g_i/\lambda$ será convexa y cerrada, para $\lambda > 0$ fijo.

Finalmente, como $L_{\mu,\lambda}$ es una combinación positiva de funciones convexas y cerradas ($dom L_{\mu,\lambda} = dom f \neq \emptyset$), por la Proposición 2.23 $L_{\mu,\lambda}$ también será convexa y cerrada. Así $L_{\mu,\lambda} \in \overline{Conv}\mathbb{R}^n$.

□

Teorema 2.25 *Para $f \in Conv\mathbb{R}^n$, se tiene:*

$$s \in \partial \ f(x) \ si \ y \ solo \ si \ f^*(s) + f(x) - \langle s, x \rangle \leq 0 \ para \ x \in dom f$$

Prueba:

Ver Teorema 1.4.1, pag. 47 en [4].

Proposición 2.26 *Para $f \in Conv\mathbb{R}^n$, se tiene:*

$$x \text{ minimiza } f \text{ si y solo si } 0 \in \partial f(x), \text{ para } x \in \ dom f.$$

Prueba:

Considerando $s = 0$ en el Teorema 2.25 tenemos,

$$0 \in \partial\ f(x) \text{ si y solo si } f(x) \leq -f^*(0), \text{ para } x \in dom f \tag{2.5}$$

Usando la Definición 2.12 para el mismo valor obtenemos

$$\begin{aligned} f^*(0) &= sup\{-f(\bar{x}) : \bar{x} \in dom f\} \\ &= -inf\{f(\bar{x}) : \bar{x} \in dom f\} \\ &= -inf\{f(\bar{x}) : \bar{x} \in \mathbb{R}^n\} \end{aligned}$$

Combinando este resultado con (2.5) deducimos que

$$0 \in \partial\ f(x) \text{ si y solo si } f(x) \leq f(\bar{x}) \ \ \forall\ \bar{x} \in \mathbb{R}^n, \text{ para } x \in dom f \text{ fijo}$$

$\square$

Definición 2.27 *Una combinación afín de k elementos de $\mathbb{R}^n$ tales como $x_1, x_2, ..., x_k$ es un elemento de la forma: $\sum_{i=1}^k \alpha_i x_i$ donde los coeficientes α_i para $i = 1, .., k$ satisfacen $\sum_{i=1}^k \alpha_i = 1$*

Definición 2.28 *Una variedad afín de k elementos, es el subconjunto de $\mathbb{R}^n$ que contiene a todas sus combinaciones afines.*

Definición 2.29 *Sea $S \subset \mathbb{R}^n$ no vacío, llamamos capsula afín de S denotada $affS$, a la intersección de todas las variedades afines que contienen a S*

Definición 2.30 *Sea $C \subset \mathbb{R}^n$ convexo, el interior relativo ri C de C es el interior de C para la topología relativa a la cápsula afín de C. O sea: $x \in$ ri C si*

$$x \in \; affC \; y \; \exists \; \delta > 0 \; tal \; que \; (affC) \cap B(x, \delta) \subset C$$

Corolario 2.31 *Sean $f_1, f_2 \in \overline{Conv}\mathbb{R}^n$, para $x \in dom f_1 \cap dom f_2$, se tiene*

$$\partial(f_1 + f_2)(x) \supset \partial f_1(x) + \partial f_2(x)$$

Si $ridom f_1 \cap ridom f_2 \neq \emptyset$ entonces

$$\partial(f_1 + f_2)(x) = \partial f_1(x) + \partial f_2(x) \; para \; todo \; x \in dom f_1 \cap dom f_2$$

Prueba:

Ver Corolario 3.1.2, pag. 114 en [4].

Observación 2.32 *Sean $f_1 \in \overline{Conv}\mathbb{R}^n$ y $f_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(dom f_2 = \mathbb{R}^n)$ convexa. Si $ridom f_1 \neq \emptyset$ entonces*

$$\partial(f_1 + f_2)(x) = \partial f_1(x) + \partial f_2(x) \; para \; todo \; x \in dom f_1$$

Prueba:

Se deriva inmediatamente del Corolario 2.31.

□

Teorema 2.33 *Sean $f_1, \ldots f_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funciones convexas que definen una aplicación F dada por:*

$$x \in \mathbb{R}^n \mapsto F(x) = (f_1(x), \ldots f_m(x)) \in \mathbb{R}^m.$$

Sea $g \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ convexa y creciente componente a componente, o sea,

$$si \quad y_i \geq z_i \quad para \; i = 1, \ldots, m \quad entonces \quad g(y) \geq g(z).$$

Luego, para todo $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\partial(g \circ F)(x) = \left\{ \sum_{i=1}^{m} \rho_i s^i : (\rho_i, \ldots, \rho_m) \in \partial g(F(x)), s^i \in \partial f_i(x) \quad para\, i = 1, \ldots, m \right\}.$$

Si además de eso g es diferenciable en $F(x)$ la relación anterior puede expresarse por:

$$\partial(g \circ F)(x) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial y_i}(F(x))\partial f_i(x) \quad donde \quad y_i = f_i(x)$$

Prueba:

Ver Teorema 4.3.1, pags. 264 y 265, en [3].

Teorema 2.34 *Sean $f_1 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(dom f_1 = \mathbb{R})$ convexa, creciente y diferenciable y $f_2 \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(dom f_2 = \mathbb{R}^n)$ convexa. Luego,*

$$\partial(f_1 \circ f_2)(x) = \frac{df_1(f_2(x))}{df_2}\partial f_2(x), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n$$

Prueba:

Se deduce de inmediato del Teorema 2.33, para el caso $m = 1$ y g diferenciable.

□

Definición 2.35 *Decimos que $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ es un punto de Karush Kuhn Tucker (K.K.T) para el problema $(\hat{P})$, si existe algún punto $\bar{u} \in \mathbb{R}^m$ tal que se verifica*

a) $0 \in \partial f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{m} \bar{u}_i \partial g_i(\bar{x})$

b) $\bar{u} \geq 0$

c) $g_i(\bar{x}) \leq 0 \quad \forall\, i = 1, \ldots, m$

d) $\bar{u}_i g_i(\bar{x}) = 0 \quad \forall\, i = 1, \ldots, m.$

Si se verifica apenas (a) diremos que $(\bar{x}, \bar{u})$ cumplen la condición de Lagrange.

Hipótesis 2.36 *Decimos que $(\hat{P})$ verifica la Hipótesis de Slater, si*

$$\exists\, x^o \in ridomf \text{ tal que } g_i(x^o) < 0 \quad para\ cada \quad i = 1, .., m$$

Teorema 2.37 *Supongamos que el problema $(\hat{P})$ satisface la Hipótesis de Slater, entonces $\bar{x} \in I\!R^n$ es un punto de Karush Kuhn Tucker para el problema $(\hat{P})$ si y solo si $\bar{x}$ es una solución del problema $(\hat{P})$.*

Prueba:
Ver Teorema 5.3.3, pag 188, en [4], para el caso $C_0 = I\!R^n$, A aplicación matricial nula de $I\!R^n$ a $I\!R^m$ y b vector nulo.

$\square$

2.2 Generalización de la Formulación del Método Lagrangeano Aumentado

Analogamente a lo desarrollado por Iusem en [6], consideremos la función Lagrangeano Aumentado con penalidad $P \in \mathcal{P}$ asociada al problema $(\hat{P})$ y $\{\lambda_k\} \subset I\!R$ una sucesión limitada de números reales positivos.

El Método Lagrangeano Aumentado para la optimización convexa intenta aproximar un punto de K.K.T. (que bajo las Hipótesis 2.13, 2.36 y por el Teorema 2.37, será también una solución del problema $(\hat{P})$) mediante la sucesión $\{x^k\} \subset I\!R^n$ generada al resolver iteractivamente, partiendo de algún punto $\mu^0 \in I\!R^m_+$ ($\mu^0 \in I\!R^m_{++}$) dado, problemas del tipo:

$$\begin{array}{l} \text{minimizar } \{ \; L(x, \mu_k, \lambda_k) = f(x) + \lambda_k \sum_{i=1}^m P(\frac{g_i(x)}{\lambda_k}, \mu_i^k)\} \\ x \in I\!R^n \end{array} \qquad (\hat{P}_k)$$

donde la actualización de μ^k se realiza por la fórmula:

$$\mu_i^{k+1} = \frac{\partial P}{\partial y_i}\left(y_i^{k+1}, \mu_i^k\right), \quad y_i^{k+1} = \frac{g_i(x^{k+1})}{\lambda_k}, \; \forall \, i = 1, \ldots, m \qquad (2.6)$$

(x^{k+1} denota una solución del problema $(\hat{P}_k)$)

La idea es verificar las condiciones dadas por la Definición 2.35.

Primero imponemos la verificación de la condición de Lagrange para todos los iterados. Expliquemos esto.

Para $x^{k+1} \in domL_{\mu^k,\lambda_k} = domf$, una solución del problema $(\hat{P}_k)$ (que por ahora supondremos que existe), tenemos por la Observación 2.24 y la Proposición 2.26

$$0 \in \partial L_{\mu^k,\lambda_k}(x^{k+1}) \tag{2.7}$$

Evaluando la relación (2.3) en $(x^{k+1}, \mu^k,\ \lambda_k)$ obtenemos:

$$L_{\mu^k,\lambda_k}(x^{k+1}) = f(x^{k+1}) + \lambda_k \sum_{i=1}^{m} (P\mu_i^k \circ \frac{g_i}{\lambda_k})(x^{k+1})),$$

usando ahora en (2.7) la Observación 2.32 (pues $ridomf \neq \emptyset$ por la Hipótesis 2.36):

$$0 \in \partial L_{\mu^k,\lambda_k}(x^{k+1}) = \partial f(x^{k+1}) + \lambda_k \sum_{i=1}^{m} \partial \left[(P\mu_i^k \circ \frac{g_i}{\lambda_k})(x^{k+1}) \right] \tag{2.8}$$

luego por el Teorema 2.34 (pues P es convexa, diferenciable por definición y creciente por la Observación 2.22 parte (i) y cada g_i es convexa):

$$0 \in \partial f(x^{k+1}) + \lambda_k \sum_{i=1}^{m} \underbrace{\frac{d\ P_{\mu_i^k}(\frac{g_i}{\lambda_k}(x^{k+1}))}{dy_i}}_{\mu_i^{k+1}} \partial(\frac{g_i}{\lambda_k}(x^{k+1})).$$

donde $y_i = \frac{g_i(x)}{\lambda_k}$.

Así (x^{k+1}, μ^{k+1}) verifican la condición de Lagrange, lo que garantiza que un punto límite de la sucesión $\{x^k, \mu^k\}$ (si existe) satisfacerá también dicha condición.

Por otro lado, usando la Observación 2.22 parte (i) (con $\mu = \mu^k \geq 0, \lambda = \lambda_k > 0$ y $\bar{x} = x^{k+1}$, para un $k \in I\!N$ dado) y la fórmula (2.6) obtenemos $\mu^{k+1} \geq 0$ (respectivamente $\mu^{k+1} > 0$ para todo $k \in I\!N$, para la penalidad $P(., \mu_i^k)$ estrictamente convexas).

Luego, la viabilidad dual se verifica para un punto límite $\bar{u}$ de la sucesión $\{\mu^k\}$ Viabilidad primal y complementaridad (items (c) y (d) de la Definición 2.35 respectivamente), no se satisfacen a lo largo de los iterados. No obstante deberán verificarse en un punto límite $(\bar{x}, \mu)$.

Para conseguir estos objetivos, así como para garantizar la convergencia de las sucesiones $\{x^k\}$ y $\{\mu^k\}$, deberemos asumir algunas hipótesis, pero ese no es nuestro objetivo. Nosotros estamos interesados específicamente en probar la buena definición de la sucesión $\{x^k\} \subset I\!R^n$ generada por el Algoritmo Lagrangeano Aumentado con penalidad $P \in \mathcal{P}$. Ésta será realizada bajo condiciones similares a las consideradas por Polyak y Teboulle en [8].

Antes creemos necesario presentar las subfamilias de la familia $\mathcal{P}$ definida en la Sección (2.1) que incluyen a casi todas las penalidades utilizadas por el Método Lagrangeano Aumentado hasta el día de hoy. Eso es lo que haremos en el siguiente capítulo.

Capítulo 3

La penalidad $P \in \mathcal{P}$ usada por el Método Lagrangeano Aumentado

Para comprender mejor el porqué decimos que la Generalización de la Formulación del Mtodo Lagrangeano Aumentado que acabamos de presentar y la demostración que presentaremos en el Capítulo 4 incluyen casi todos los casos existentes en la literatura, detallaremos los tipos de penalidades usadas por el Método Lagrangeano Aumentado con penalidad $P \in \mathcal{P}$. Las dos posibilidades respecto de $b > 0$ (ver Definición 2.14) darán lugar a dos subfamilias la primera de las cuales puede a su vez ser subdividida en dos casos como veremos en la Sección 3.2.

Antes veremos algunas definiciones.

3.1 Nociones Preliminares

Definición 3.1 *Sea* $\psi : I\!R \rightarrow I\!R$ *una función de clase* C^2 *en* $]a, \infty[$, $a \in [-\infty, 0[$ *donde* $\psi(a) = -\infty, \psi'(a) = \infty$, *para* $a \neq -\infty$. *Decimos que* ψ *es una función de Polyak y Teboulle si satisface:*

i) $\psi(0) = 0, \psi'(0) = 1$

ii) ψ *es estrictamente creciente*

iii) $\psi''(t) > 0 \quad \forall\, t \in\,]a, \infty[$.

iv) $lim_{t \to -\infty} \psi'(t) = 0$.

v) $lim_{t \to 0^+}\ t\ \psi(\frac{z}{t}) = \infty \quad \forall\ z \geq\ 0$.

Definición 3.2 *Sea* $f \in \overline{Conv} I\!R^n$. *La función de recesión de* f, f'_∞ *es dada por:*

$$d \in I\!R^n \mapsto f'_\infty(d) = \lim_{\lambda \to \infty} \frac{f(x + \lambda d) - f(x)}{\lambda}, \quad donde\ x \in domf$$

Cuando $f : I\!R^n \longrightarrow I\!R$ *convexa* ($domf = I\!R^n$) *la función de recesión se define de manera similar para* $x \in I\!R^n$.

Definición 3.3 *Sea* $\theta : I\!R \longrightarrow I\!R$ *una función estrictamente convexa y continuamente diferenciable en* $]-\infty, b[$, $b \in]0, \infty]$. *Decimos que* θ *es una función de Gonzaga y Castillo si verifica:*

1.- $\theta'_\infty(1) = +\infty$

2.- $\lim_{t \to -\infty} \theta'(t) = 0$

3.- $\theta(0) = 0$

4.- $\theta(.)$ *es limitada inferiormente*

Teorema 3.4 *Si* $f : I\!R \longrightarrow I\!R$ *es estrictamente monótona en su dominio entonces* f *tiene inversa en su domino.*

Prueba:

Ver Teorema A, pag. 336 dado en [10].

Observación 3.5 *Si* θ *es una función de Gonzaga y Castillo estrictamente convexa y continuamente diferenciable en* $I\!R$ *entonces su derivada posee inversa en su dominio.*

Prueba:

Se deduce de inmediato del Corolario 2.19 y del Teorema 3.4.

$\square$

3.2 Tipo de penalidad usada por el Método Lagrangeano Aumentado

3.2.1 Penalidad Tipo I ($b = +\infty$)

P_1 es una penalidad Tipo I, si $\forall u > 0$ se satiface:

1.- $P_1(.,u)$ es continuamente diferenciable y estrictamente convexa en $I\!R$,

2.- *a*) $P_1(.,u)$ es ilimitada o

b) $P_1(.,u)$ es limitada inferiormente

3.- $P_1(0,u) = 0, \quad P_1'(0,u) = u$

4.- $\lim_{t\to-\infty} P_1'(t,u) = 0$

5.- $\lim_{t\to+\infty} P_1'(t,u) = +\infty$.

a) Ejemplo: Para el caso ilimitado es la penalidad Estrictamente creciente asociada a la penalidad exponencial con función barrera modificada (EPMBF) estudiada en [8] y dada por la regla:

$$P_1(t,u) = \frac{1}{u}\,\psi(\frac{t}{u}) \text{ para } u > 0$$

donde ψ es una función de Polyak y Teboulle de clase C^2 en $I\!R$.

En la Figura 1 mostramos la penalidad $P_1(t,1) = \psi(t)$ (para $u = 1 > 0$) donde la función de Polyak y Teboulle es dada por:

$$\psi(t) = \begin{cases} exp(2t-1) - 1 + log\ 2, & \text{para } \ t \geq \frac{1}{2}, \\ -\ log(1-t), & \text{para } \ t \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

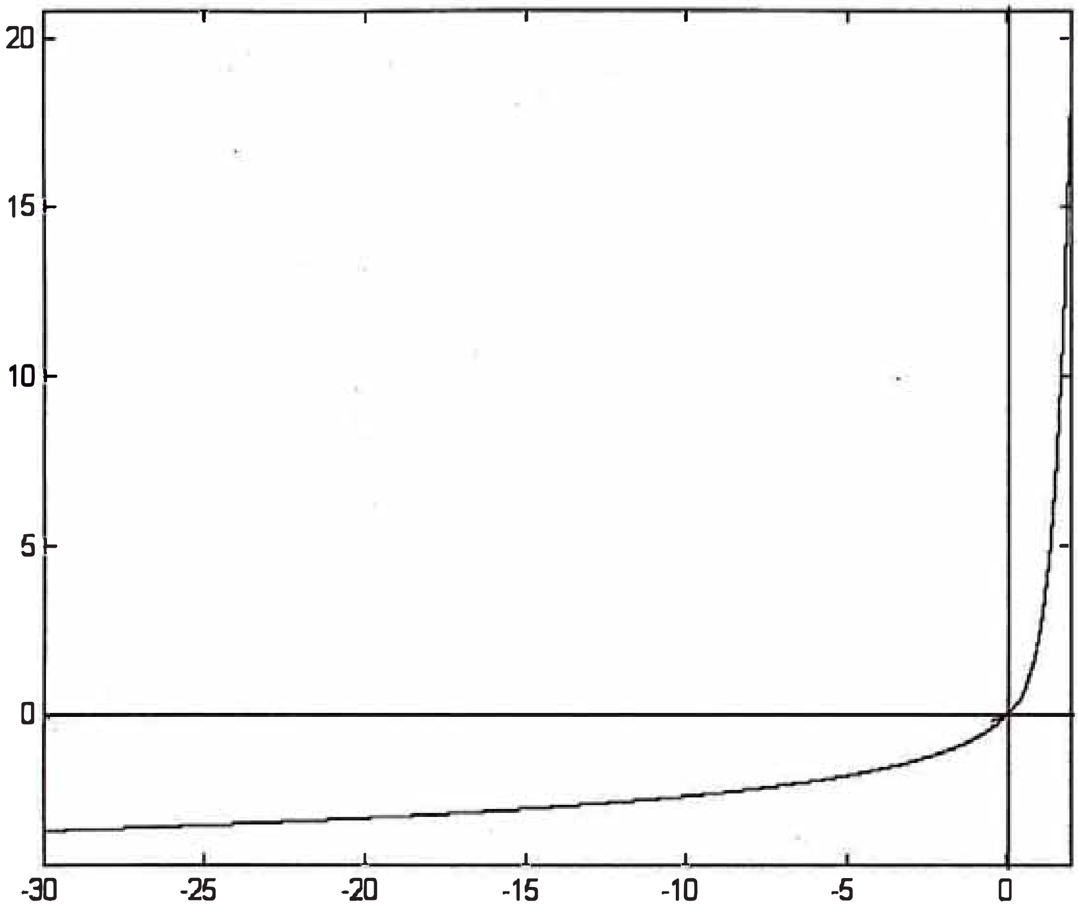

Figura 1

b.1) Ejemplo: Para el caso limitado es la penalidad con Cambio de variable o Shifts presentada en [2] y dada por la regla:

$$P_1(t, u) = \theta(t + t_u) - \theta(t_u), \text{ para } u > 0$$

donde θ es una función de Gonzaga y Castillo estrictamente convexa y continuamente diferenciable en $I\!R$ y $t_u = (\theta')^{-1}(u)$ (la existencia de θ' está garantizada por la Observación 3.5).

En la Figura 2 mostramos la penalidad $P_1(t, 1) = \theta(t + t_1) - \theta(t_1)$ (para $u = 1 > 0$) donde la función de Gonzaga y Castillo es dada por:

$$\theta(t) = \begin{cases} t + \frac{2}{5}t^2 \,, & \text{para } \ t \geq -\frac{1}{2}, \\ \frac{27}{20}\frac{1}{(1-t)} - \frac{13}{10}, & \text{para } \ t \leq -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Así

$$P_1(t,1) = \begin{cases} t + \frac{2}{5}t^2, & \text{para } \ t \geq -\frac{1}{2}, \\ \frac{27}{20}\frac{1}{(1-t)} - \frac{13}{10}, & \text{para } \ t \leq -\frac{1}{2} \end{cases}$$

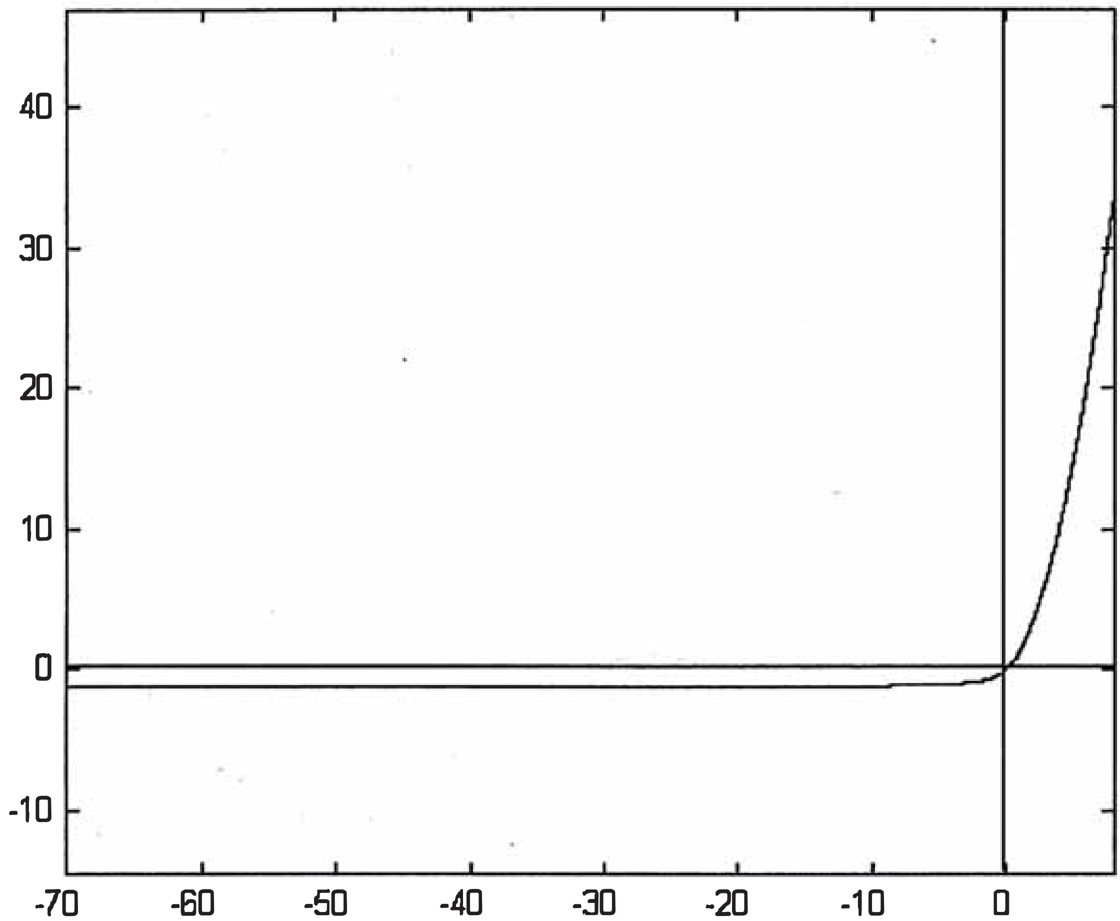

Figura 2

b.2) Ejemplo: También para el caso limitado es:

$$P_1(t,u) = u(exp(t) - 1) \text{ para } \quad u > 0$$

conocida como la penalidad Exponencial la cual fue ampliamente estudiada por Bertsekas en [1].

En la Figura 3 mostramos la penalidad

$$P_1(t,1) = exp(t) - 1.$$

Aquí, $u = 1 > 0$.

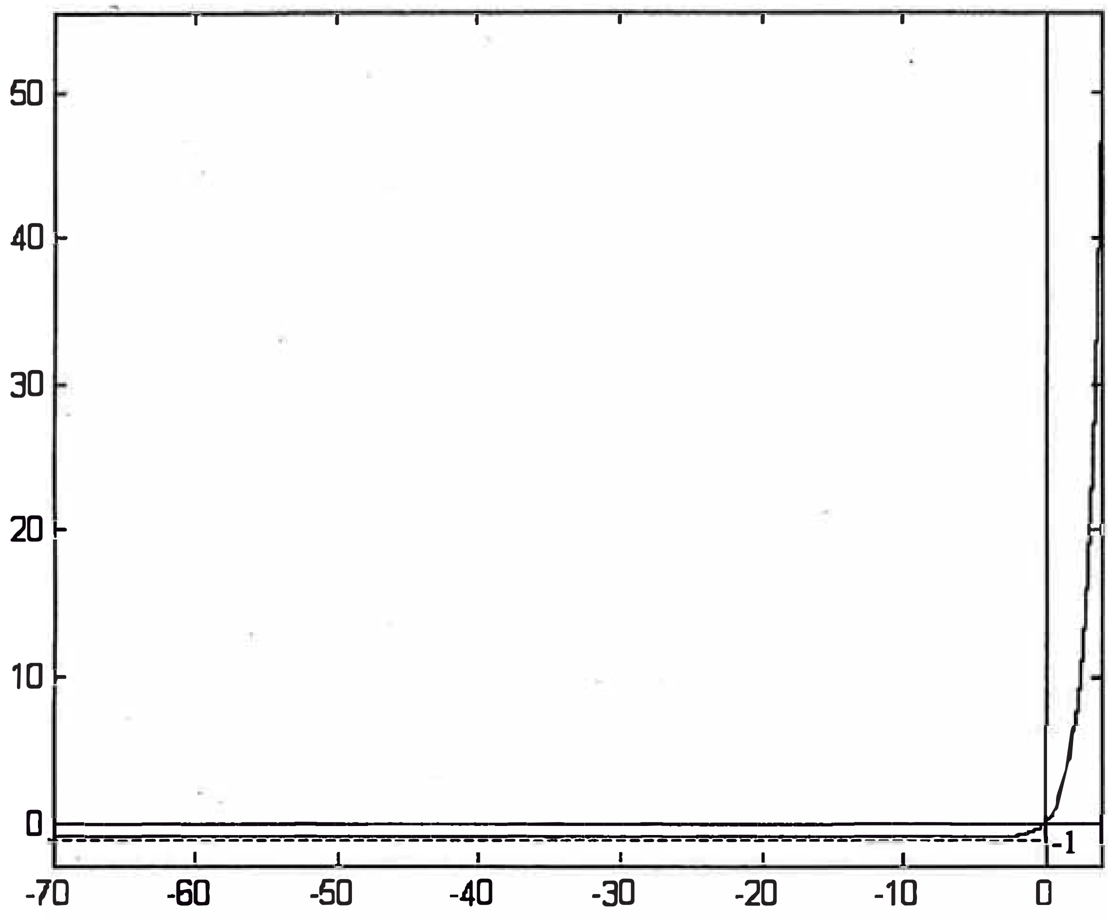

Figura 3

3.2.2 Penalidad Tipo II ($b > 0$ finito)

P_2 es una penalidad Tipo II, si $\forall u \geq 0$ se satiface:

1.- $P_2(.,u)$ es continuamente diferenciable en $I\!R$, estrictamente convexa en $[-b, +\infty[$ y constante en $]-\infty, -b]$

2.- $P_2(0,u) = 0, \ P_2'(0,u) = u$

3.- $\lim_{t\to-\infty} P_2'(t,u) = 0$

4.- $\lim_{t\to+\infty} P_2'(t,u) = +\infty$

Ejemplo: Para este segundo caso es la llamada Penalidad Estándar dada por la regla:

$$P(t,u) = \frac{1}{2}[(max\{0, u+t\})^2 - u^2], \text{ para } u \geq 0$$

e introducida por Rockafellar en [11].

En la Figura 4 mostramos la penalidad P dada por:

$$P(t,1) = \begin{cases} \frac{1}{2}t^2 + t, & \text{para } t \geq -1, \\ -\frac{1}{2}, & \text{para } t < -1 \end{cases}$$

Aquí, $u = 1 \geq 0$.

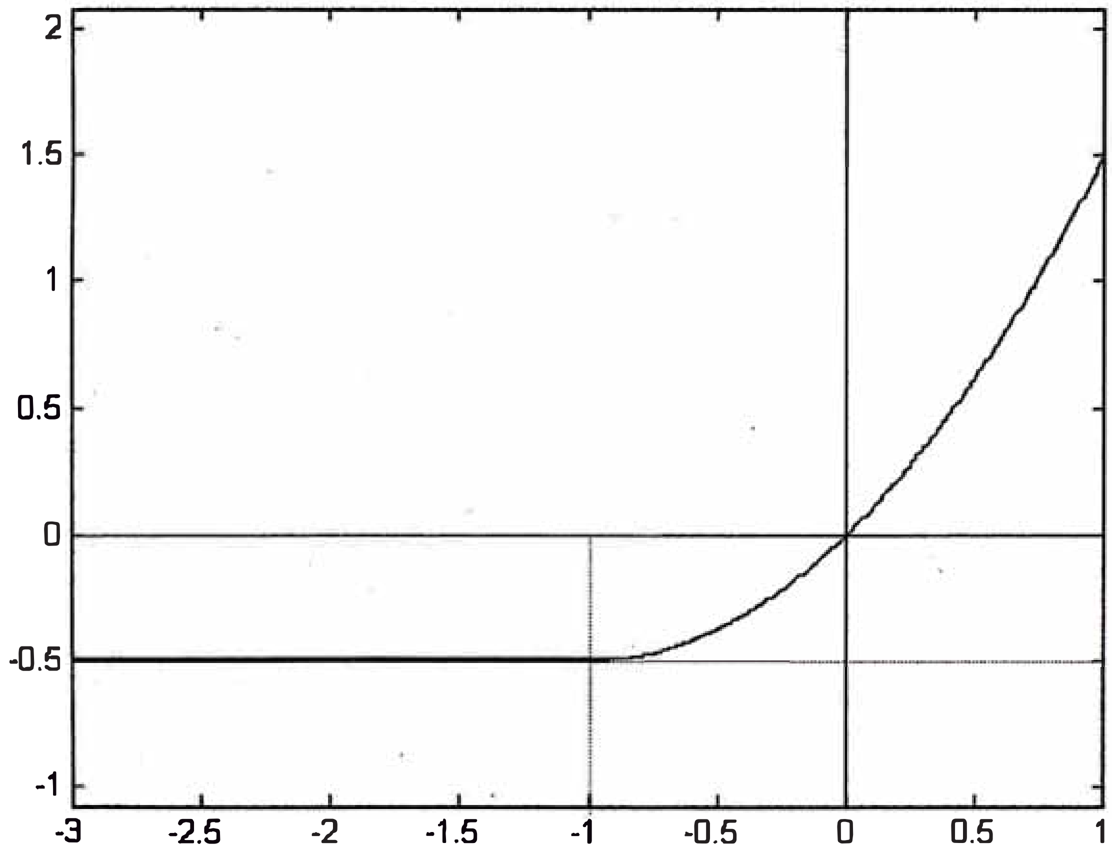

Figura 4

Capítulo 4

La Buena Definición del Método Lagrangeano Aumentado

4.1 Definiciones y resultados preliminares

Definición 4.1 *Sea* $f : I\!R^n \to I\!R$ *(*$dom f = I\!R^n$*) una función convexa. Llamamos derivada direccional de* f *en* x *en la dirección* h *al valor real denotado* $f^{'}(x,h)$ *dado por:*

$$f^{'}(x,h) = inf_{\lambda>0}\frac{f(x+\lambda h) - f(x)}{\lambda} = lim_{\lambda\to 0}\{\frac{f(x+\lambda h) - f(x)}{\lambda}\}$$

Observación 4.2 *Basada en esta Definición, podemos también expresar el subdiferencial de* f *en* x *dado en la Sección 2.1, como:*

$$\partial f(x) = \{s \in I\!R^n : \ \langle s,d\rangle \leq f'(x,d) \ \ \forall\ d \in I\!R^n\}$$

Teorema 4.3 *Sea* $f \in Conv\, I\!R^n$*. Si* $x \in ridom f$ *entonces* $\partial f(x) \neq \emptyset$*.*

Prueba:

Ver Teorema 1.4.2, pag. 47 en [4].

Proposición 4.4 *Para* $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *(*$dom f = \mathbb{R}^n$*) convexa,* $f'(x,.)$ *para* $x \in \mathbb{R}^n$ *fijo, es finita (* $\exists\ L > 0/ \quad |f'(x,d)| \leq L\|d\| \quad \forall\ d \in \mathbb{R}^n$*) y sublineal.*

Prueba:

Ver Proposición 1.1.2, pag. 238 en [3].

Observación 4.5 *Sea* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *(*$dom f = \mathbb{R}^n$*) una función convexa. Luego para todo* $x \in \mathbb{R}^n$

i) $\partial f(x)$ *es no vacío y convexo*

ii) $\partial f(x)$ *es cerrado y acotado.*

Prueba:

i.1) Se deduce de inmediato del Teorema 4.3. En este caso $ridom f = \mathbb{R}^n$.

i.2) Para $s_1, s_2 \in \partial f(x)$ tenemos:

$$f(y) \geq f(x) + \langle s_1, y - x \rangle \quad \forall\ y \in \mathbb{R}^n$$

$$f(y) \geq f(x) + \langle s_2, y - x \rangle \quad \forall\ y \in \mathbb{R}^n$$

y para $\alpha \in [0,1]$:

$$\alpha f(y) + (1-\alpha) f(y) \geq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(x) + \langle \alpha s_1 + (1-\alpha) s_2, y - x \rangle$$

$$f(y) \geq f(x) + \langle \alpha s_1 + (1-\alpha) s_2, y - x \rangle \ \forall\ y \in \mathbb{R}^n$$

o sea $\partial f(x)$ es un conjunto convexo.

ii.1) Para $\{s_i\} \subset \partial f(x)$ tal que $s_i \to s$ tenemos:

$$f(y) \geq f(x) + \langle s_i, y - x \rangle \quad \forall\ y \in \mathbb{R}^n$$

tomando límite cuando $i \to \infty$

$$f(y) \geq f(x) + lim_{i \to \infty} \langle s_i, y - x \rangle \quad \forall\ y \in \mathbb{R}^n$$

$$f(y) \geq f(x) + \langle lim_{i \to \infty} s_i, y - x \rangle \quad \forall\ y \in \mathbb{R}^n$$

$$f(y) \geq f(x) + \langle s, y - x \rangle \quad \forall\ y \in \mathbb{R}^n$$

o sea $\partial f(x)$ es un conjunto cerrado.

ii.2) Para $s \in \partial f(x)$ tenemos por la Observación 4.2:

$$\langle s, d\rangle \leq f'(x,d) \quad \forall\, d \in I\!R^n$$

Como además por la Proposición 4.4 f' es finita:

$$\exists\, L > 0 / \ \langle s, d\rangle \leq \ L\|d\| \quad \forall\, d \in I\!R^n$$

Haciendo $d = s$, obtenemos $\|s\| \leq L$ para algún $L > 0$.

□

Corolario 4.6 *Para S un conjunto convexo cerrado no vacio y σ una función sublineal cerrada, los siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) σ es la función soporte de S.

ii) $S = \{s : \langle s, d\rangle \leq \sigma(d)\ \forall\, d \in X\}$ donde X puede ser $I\!R^n$, la bola unitaria $B(0,1)$ o su clausura o el dominio de σ.

Prueba:

Ver Corolario 3.1.2, pag. 219 en [3]

Proposición 4.7 *Para $f\colon I\!R^n \to I\!R$ una función convexa (dom$f$ = $I\!R^n$), para cada $x \in I\!R^n$ fijo, $f'(x, .)$ es cerrada.*

Prueba:

$$\begin{aligned}
\liminf_{h\to\bar h} f'(x,h) &= \liminf_{h\to\bar h}\ (lim_{\lambda\to 0}\frac{f(x+\lambda h)-f(x)}{\lambda}) \\
&= lim_{\lambda\to 0}(\liminf_{h\to\bar h}\frac{f(x+\lambda h)-f(x)}{\lambda}) \\
&= lim_{\lambda\to 0}(\frac{\liminf_{h\to\bar h} f(x+\lambda h)-f(x)}{\lambda}) \\
&\geq lim_{\lambda\to 0}\frac{f(x+\lambda\bar h)-f(x)}{\lambda}
\end{aligned}$$

pues f es cerrada y $x+\lambda h \to x+\lambda\bar h$ cuando $h \to \bar h$

Así $$\liminf_{h\to\bar{h}} f'(x,h) \geq f'(x,\bar{h})$$

$\square$

Corolario 4.8 *(Weierstrass) Sea $f : K \to \mathbb{R}$ función real continua, definida en un compacto $K \subset \mathbb{R}^n$. Luego f alcanza su máximo y su mínimo en K; o sea existen puntos $x_0, x_1 \in K$ tales que $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$ para cualquier $x \in K$.*

Prueba:

Ver Corolario 1, pags. 44 y 45 en [7]

Observación 4.9 *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, (dom f = \mathbb{R}^n)$ convexa, entonces para cada $x \in \mathbb{R}^n$ y cada $h \in \mathbb{R}^n$,*

$$f'(x,h) = \max_{s\in\partial f(x)}\{\langle s,h\rangle\} = \langle \bar{s},h\rangle, \ \textit{para algún } \bar{s} \in \partial f(x)$$

Prueba:

Para probar esta igualdad usaremos el Corolario 4.6.

Previamente debemos ver que, para $x \in \mathbb{R}^n$ fijo:

i) $\partial f(x)$ es un conjunto convexo y cerrado.

ii) $f'(x,.)$ es sublineal cerrada

i) Estos primeros hechos están garantizados por la Observación 4.5.

ii.1) Por la Proposición 4.4, $f'(x,.)$ es sublineal.

ii.2) Por el Teorema 4.7, $f'(x,.)$ es cerrada.

Considerando ahora la Observación 4.2 y por el Corolario 4.6 tendremos que $f'(x,.)$ resulta ser la función soporte del subdiferencial $\partial f(x)$, o sea

$$f'(x,h) = sup_{s\in\partial f(x)}\{\langle s,h\rangle\}$$

Como $\partial f(x)$ es compacto (Observación 4.5 parte (ii)) y el supremo de números reales es una función continua por el Corolario 4.8:

$$f'(x,h) = max_{s\in\partial f(x)}\{\langle s,h\rangle\} = \langle \bar{s},h\rangle \text{ para algún } \bar{s}\in\partial f(x)$$

□

Observación 4.10 *Sea $P\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función convexa diferenciable y creciente. Sea $g\colon \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ ($domg = \mathbb{R}^n$) una función convexa, definimos $f = P\circ g$ la función compuesta: $x\in\mathbb{R}^n\mapsto f(x) = P(g(x))$ entonces*

$$f'(x,h) = P'(g(x))g'(x,h) \quad \textit{para } h\in\mathbb{R}^n \textit{ y } x\in\mathbb{R}^n$$

Prueba:

Para $x\in\mathbb{R}^n$ y $h\in\mathbb{R}^n$ fijos, de la Observación 4.9, tenemos:

$$\begin{aligned} f'(x,h) &= \max\{\langle s,h\rangle, s\in\partial f(x)\} \\ &= \max\{s^th\colon s = P'(g(x))\gamma,\ \gamma\in\partial g(x)\} \quad \text{por el Teorema 2.34} \\ &= \max\{P'(g(x))\gamma^th\colon \gamma\in\partial g(x)\} \\ &= P'(g(x))\max\{\gamma^th\colon \gamma\in\partial g(x)\} \quad \text{pues } P'(g(x)) \text{ es un valor constante} \end{aligned}$$

usando nuevamente la Observación 4.9 ahora con g:

$$f'(x,h) = P'(g(x))g'(x,h), \text{ para } x\in\mathbb{R}^n$$

que es lo que queriamos probar.

□

Definición 4.11 *Sea $f\in\overline{Conv}\mathbb{R}^n$, una dirección $d\neq 0$ en $\mathbb{R}^n$ es una dirección de recesión de f si $f'_\infty(d)\leq 0$.*

Proposición 4.12 *La funcion $f\in\overline{Conv}\mathbb{R}^n$ es lipschitziana en todo $\mathbb{R}^n$ si y solo si f'_∞ es finita en todo el espacio $\mathbb{R}^n$.*

Prueba:

Ver Proposición 3.2.7, pags. 181-182, en [3].

Observación 4.13 *Si el conjunto de soluciones óptimas del problema $(\hat{P})$ es no vacío y acotado (Hipótesis 2.13), entonces las funciones* $f, g_1, \ldots, g_m$ *involucradas en $(\hat{P})$ no tienen ninguna dirección de recesión común.*

Prueba:

Supongamos que h es una dirección de recesión común . O sea

$$f'_{\infty}(h) \leq 0 \quad y \quad g'_{i\infty}(h) \leq 0 \quad \text{para cada} \quad i := 1,..,m. \tag{4.1}$$

entonces por la Definición 3.2 aplicada a f y a g_i para cada $i := 1,..m$ tendremos:

$$\text{para cada } \epsilon_1 > 0 \ \exists \ N_1 / \ \left|\frac{f(x+\lambda h) - f(x)}{\lambda} - f'_{\infty}(h)\right| < \epsilon_1 \text{ para todo } \lambda > N_1,$$

donde $x \in domf$ y

$$\text{para cada } \epsilon_2^i > 0 \ \exists \ N_2^i / \quad \left|\frac{g_i(x+\lambda h) - g_i(x)}{\lambda} - g'_{i\infty}(h)\right| < \epsilon_2^i \text{ para todo} \lambda > N_2^i$$

donde $x \in domg_i$ para cada $i := 1,..m$

Tomando solo una desigualdad en cada caso:

$$\frac{f(x+\lambda h) - f(x)}{\lambda} < \epsilon_1 + f'_{\infty}(h)$$

$$\frac{g_i(x+\lambda h) - g_i(x)}{\lambda} < \epsilon_2^i + g'_{i\infty}(h)$$

Como esto vale para todo ϵ_1 y todo ϵ_2^i para cada $i := 1,..m$:

$$\frac{f(x+\lambda h) - f(x)}{\lambda} \leq f'_{\infty}(h)$$

$$\frac{g_i(x+\lambda h) - g_i(x)}{\lambda} \leq g'_{i\infty}(h), \quad \text{para cada } i := 1,..,m$$

Considerando (4.1):

$$f(x+\lambda h) \leq f(x)$$

$$g_i(x+\lambda h) \leq g_i(x)$$

para todo $\lambda > N$ donde $N = max_{i=1,...m}\{N_1, N_2^i\}$ para cada $i := 1,..m$ y $x \in domf$

Si $x = x^*$, es la solución óptima del problema $(\hat{P})$ tenemos que:

$$f(x^* + \lambda h) < f(x^*) < f(x) \ \forall \ x \in I\!R^n$$

$$g_i(x^* + \lambda h) \leq g_i(x^*) \leq 0 \text{ para cada } i := 1, ..m$$

o sea $x^* + \lambda h$, para todo $\lambda > N$ para algún N también es solución óptima para $(\hat{P})$. Además, cuando $\lambda \rightarrow \infty$ alguna componente de $x^* + \lambda h$ también tenderá a ∞, luego $\|x^* + \lambda h\| \rightarrow \infty$, lo que es una contradicción, pues por la Hipótesis 2.13 el conjunto óptimo es acotado

Luego no existe dirección de recesión común.

□

Proposición 4.14 *Sean $f_1, \ldots, f_m$ m funciones en $\overline{Conv}\mathbb{R}^n$ y $t_1, \ldots, t_m$ m números positivos. Asumamos que $\bigcap_{i=1}^m domf_j \neq \emptyset$. Luego, para $f = \sum_{j=1}^m t_j f_j$ tenemos*

$$f'_\infty = \sum_{j=1}^m t_j f'_{j\infty}.$$

Prueba:

Ver Proposición 3.2.9, pag 182 en [3].

Esta Proposición también se verifica cuando alguna función f_j para $j = 1, .., m$ es convexa de valores reales y dominio $\mathbb{R}^n$.

Observación 4.15 *Sea $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función convexa ($domf = \mathbb{R}^n$), luego*

$$f'_\infty(h) = \lim_{t \rightarrow \infty} f'(\bar{x} + th, h) \quad \forall\, \bar{x} \in \mathbb{R}^n \textit{ y para cada } h \in \mathbb{R}^n$$

Prueba:

Para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y para cualquier $h \in \mathbb{R}^n$ tal que $h \neq 0$, por la Definición 4.1 que considera el ínfimo sobre valores λ positivos tenemos

$$f(x + \lambda h) \geq f(x) + \lambda f'(x, h) \quad \forall\, \lambda > 0.$$

Entonces

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{f(x + \lambda h) - f(x)}{\lambda} \geq f'(x, h)$$

O sea,

$$f'_\infty(h) \geq f'(x, h)$$

Haciendo $\quad x = \bar{x} + th \quad$ para $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ fijo y $\forall\, t > 0$ tenemos:

$$f'_\infty(h) \geq f'(\bar{x} + th, h)\ \forall\, t > 0.$$

Tomando límite cuando $t \to \infty$

$$f'_\infty(h) \geq \lim_{t \to \infty} f'(\bar{x} + th, h) \tag{4.2}$$

Para $y = \bar{x} + th \in \mathbb{R}^n \quad \forall\, t > 0$ entonces $\quad f(\bar{x}) \geq f(y) + tf'(y, -h)$. Sustituyendo y,

$$f(\bar{x}) \geq f(\bar{x} + th) + tf'(y, -h).$$

Por ser f convexa se verifica también

$$f'(y, h) \geq -f'(y, -h).$$

Sustituyendo esto en la relación anterior:

$$f(\bar{x} + th) - f(\bar{x}) \leq tf'(\bar{x} + th, h) \quad \forall\, t > 0.$$

Tomando límite cuando $t \to \infty$:

$$\lim_{t \to \infty} \frac{f(\bar{x} + th) - f(x)}{t} \leq \lim_{t \to \infty} f'(\bar{x} + th, h)$$

o sea,

$$f'_\infty(h) \leq \lim_{t \to \infty} f'(\bar{x} + th, h) \tag{4.3}$$

Luego de (4.2) y (4.3) tenemos probada la igualdad.

$\square$

Observación 4.16 *Sea $f \in \overline{Conv}\mathbb{R}^n$. Si $f'_\infty(d) < 0$ para algún $d \neq 0$ entonces*

$$lim_{t \to +\infty} f(x_o + td) = -\infty,\ \forall\ x_0 \in dom f.$$

Prueba:

Ver Observación 3.2.8, pag.182 en [3].

Observación 4.17 *Sea $f\colon I\!R^n \to I\!R$ una función convexa ($dom f = I\!R^n$):*

i) *Si $f'_\infty(z) > 0$ para $z \in I\!R^n$ $(z \neq 0)$ entonces $lim_{t\to\infty} f(x+tz) = \infty \quad \forall\, x \in I\!R^n$*

ii) *Si $f'_\infty(z) = 0$ para $z \in I\!R^n$ $(z \neq 0)$ entonces $lim_{t\to\infty} f(x+tz) = A \quad \forall\, x \in I\!R^n$*

iii) *Si $f'_\infty(z) < 0$ para $z \in I\!R^n$ $(z \neq 0)$ entonces $lim_{t\to\infty} f(x+tz) = -\infty \quad \forall\, x \in I\!R^n$*

Prueba:

i) Si $f'_\infty(z) > 0$ para $z \in I\!R^n$ $(z \neq 0)$, por la convexidad de f, tenemos tres alternativas respecto de $lim_{t\to\infty} f(x+tz)$ $\forall\, x \in I\!R^n$, este límite puede ser finito, ∞ ó $-\infty$

i.1) Supongamos que $lim_{t\to\infty} f(x+tz) = A$, A finito, luego

$$\forall\, \epsilon > 0\ \exists\, \delta > 0/ \text{ si } t > \delta \text{ entonces } |f(x+tz) - A| < \epsilon$$

dividiendo por $|t|$

$$\frac{|f(x+tz) - A|}{|t|} < \frac{\epsilon}{|t|}.$$

Por la desigualdad triangular:

$$|\frac{f(x+tz) - f(x)}{t}| < \frac{\epsilon}{|t|} + \frac{|f(x) - A|}{|t|}$$

y también

$$\frac{f(x+tz) - f(x)}{t} < \frac{\epsilon}{|t|} + \frac{|f(x) - A|}{|t|}$$

Escogiendo ahora $\epsilon = 1$ y tomando límite $t \to \infty$

$$f'_\infty(z) \leq 0 \quad \text{pues} \quad \frac{1}{|t|} < \frac{1}{\delta}$$

lo que contradice la hipótesis.

i.2) Supongamos que $lim_{t\to\infty} f(x+tz) = -\infty$

$$\forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0/ \text{ si } t > \delta \text{ entonces } f(x+tz) < -\epsilon$$

$$f(x+tz) - f(x) < -\epsilon - f(x)$$

$$\frac{f(x+tz) - f(x)}{t} < \frac{-\epsilon - f(x)}{t}, \text{ pues } t > 0$$

Escogiendo $\epsilon = 1$ y tomando límite $t \to \infty$

$$f'_\infty(z) \leq 0 \quad \text{pues} \quad \frac{1}{t} < \frac{1}{\delta}$$

Por tanto $\qquad lim_{t\to\infty} f(x+tz) = \infty \ \ \forall\, x \in I\!R^n$

ii) Si $f'_\infty(z) = 0$ para $z \in I\!R^n$ $(z \neq 0)$ entonces por la Observación 4.15

$$lim_{t\to\infty} f'(x+tz, z) = 0 \quad \forall\, x \in I\!R^n$$

Como $f'(x+tz, .)$ es positiva homogenea :

$$lim_{t\to\infty} f'(x+tz, \hat{t}z) = \hat{t}.0 = 0 \quad \forall\, \hat{t} > 0,\ \forall\, x \in I\!R^n;$$

usando la Observación 4.9

$$lim_{t\to\infty} \langle \bar{s}, \hat{t}z \rangle = 0 \quad \forall\, \hat{t} > 0, \text{ para algún } \bar{s} \in \partial f(x+tz)\ \forall\, x \in I\!R^n \tag{4.4}$$

para $t > \delta$ para algún δ

considerando ahora la definición de subdiferencial:

$$f(y) \geq f(x+tz) + \langle \bar{s}, y - (x+tz) \rangle\ \forall\, y \in I\!R^n\ \forall\, x \in I\!R^n \text{ para } t > \delta \text{ para algún } \delta$$

Si $y = x$ tenemos:

$$f(x) \geq f(x+tz) + \langle \bar{s}, -tz \rangle\ \forall\, x \in I\!R^n \text{ para } t > \delta \text{ para algún } \delta$$

Como esto también se verifica $\forall\, t > 0$, tomando límite cuando $t \to \infty$:

$$lim_{t\to\infty} f(x+tz) \leq f(x) + lim_{t\to\infty} \langle \bar{s}, tz \rangle$$

Usando (4.4) para $\hat{t} = t > 0$ concluimos que

$$lim_{t\to\infty} f(x+tz) \leq f(x) \quad \forall\, x \in I\!R^n \tag{4.5}$$

Como (4.5) se verifica $\forall\, x \in I\!R^n$, si hacemos $x = \hat{x} - tz$, $\hat{x} \in I\!R^n$ ahora

$$s \in \partial f(\hat{x}) \text{ para } t > \delta \text{ para algún } \delta \text{ para } \hat{x} \in I\!R^n$$

Considerando la definición de subdiferencial :

$$f(y) \geq f(\hat{x}) + \langle s, y - \hat{x} \rangle\ \forall\, y \in I\!R^n$$

Para $y = \hat{x} + tz$:

$$f(\hat{x}+tz) \geq f(\hat{x}) + \langle s, tz \rangle \text{ para } t > \delta \text{ para algún } \delta$$

Como esto también se verifica $\forall\, t > 0$, tomando límite cuando $t \to \infty$:

$$lim_{t\to\infty} f(\hat{x} + tz) \geq f(x) + lim_{t\to\infty}\langle s, tz\rangle$$

Usando (4.4) para $\hat{t} = t > 0$ concluimos que

$$lim_{t\to\infty} f(\hat{x} + tz) \geq f(\hat{x}) \quad \forall\, \hat{x} \in I\!R^n \tag{4.6}$$

De (4.5) y (4.6) concluimos que

$$lim_{t\to\infty} f(\hat{x} + tz) = f(\hat{x}) \quad \forall\, \hat{x} \in I\!R^n$$

iii) Se deduce de inmediato de la Observación 4.16, con $x_0 = x \in I\!R^n$ y $d = z \neq 0$.

□

Teorema 4.18 *Sea $f \in \overline{Conv}\, I\!R^n$. Si f no tiene dirección de recesión entonces el ínfimo de f es alcanzado, o sea $\exists\, x^* \in I\!R^n$ tal que $f(x^*) = min\{f(x)\ \forall\, x \in I\!R^n\}$.*

Prueba:

Ver Teorema 27. 2, pag. 265 en [11].

4.2 Demostración de la Buena Definición del Algoritmo Lagrangeano Aumentado con penalidad $P \in \mathcal{P}$ de Tipo I

Sea $\{x^k\} \subset I\!R^n$ una sucesión generada por el algoritmo Lagrangeano Aumentado con penalidad $P \in \mathcal{P}$ de Tipo I siguiente:

$$\begin{aligned}
\mu^0 &\in I\!R^m_+ \ (\ \mu^0 \in I\!R^m_{++}) && (4.7)\\
x^{k+1} &= \text{argmin}_{x\in I\!R^n}\{L_{\mu^k,\lambda_k}(x)\} && (4.8)\\
\mu_i^{k+1} &= \frac{\partial P}{\partial y_i}(y_i^{k+1}, \mu_i^k) \ \ \forall i = 1, \ldots, m \ \ \forall k \in I\!N && (4.9)
\end{aligned}$$

donde $\{\lambda_k\}$ es una sucesión limitada de números reales positivos, L es la función Lagrangeano Aumentado con penalidad $P \in \mathcal{P}$ de Tipo I y $y_i^{k+1} = \frac{g_i(x^{k+1})}{\lambda_k}$ para $i = 1, \ldots, m$.

Afirmación 4.19 *Bajo las Hipótesis 2.13 y 2.36, la sucesión* $\{x^k\}$ *generada por el algoritmo Lagrangeano Aumentado con penalidad* $P \in \mathcal{P}$ *de Tipo I (relaciones* (4.7)*,* (4.8) *y* (4.9)*) está bien definida.*

Prueba:

i) Dados $\lambda_k > 0$ y $\mu^k \geq 0$ ($\mu^k > 0$), para $k \in I\!N$ arbitrario, probaremos que L_{μ^k,λ_k} no tiene dirección de recesión, luego por la Observación 2.26 y el Teorema 4.18, L_{μ^k,λ_k} alcanzará su mínimo en $I\!R^n$.

Por definición del problema $(\hat{P})$, $f \in \overline{Conv}\, I\!R^n$ además $P\mu_i^k \circ g_i/\lambda_k \ \ \forall i = 1,..,m$ son convexas (Observación 2.22 parte(ii)). Por otro lado teniendo en cuenta la Proposición 4.14 (pues $dom f \neq \emptyset$ ya que $f \in Conv I\!R^n$) tenemos:

$$L_{\mu^k,\lambda_k}{}'_{\infty}(z) = f'_{\infty}(z) + \lambda_k \sum_{i=1}^{m} h_{i\infty}^{k}{}'(z) \quad \forall z \in I\!R^n$$

donde $h_i{}^k(x) = P(g_i(x)/\lambda_k, \mu_i^k) \ \ \forall i = 1, \ldots, m$ ó también usando la Observación 4.15:

$$L_{\mu^k,\lambda_k}{}'_{\infty}(z) = f'_{\infty}(z) + \lambda_k \sum_{i=1}^{m} \lim_{t \to \infty} h_i{}^{k'}(x + tz, z) \quad \forall z \in I\!R^n \ \forall x \in I\!R^n \qquad (4.10)$$

Además por la Observación 4.10

$$h_i{}^{k'}(x + tz, z) = P'(g_i(x + tz)/\lambda_k, \mu_i^k) \ [\ g_i'(x + tz, z)/\lambda_k] \qquad (4.11)$$

para cada $i = 1,..,m \ \ \forall\, z \in I\!R^n, \forall\, x \in I\!R^n$, para $t > \delta$ para algún δ.

Por otro lado, sabemos por la Proposición 4.12 que la función de recesión de cada g_i es finita en todo $I\!R$ (pues cada g_i es continua luego lipschitziana en $I\!R^n$), luego tenemos tres alternativas para $g_{i\infty}'(z)$ con $z \neq 0$ en $I\!R^n$

i) Si $g_{i\infty}'(z) > 0$ entonces por la Observación 4.17 parte(i), $g_i(x + tz) \to \infty$ cuando $t \to \infty$, además de la Definición 2.14 parte (4) también

$$P'(g_i(x + tz)/\lambda_k, \mu_i^k) \to \infty \text{ cuando } t \to \infty$$

lo que lleva a concluir, al tomar límite en (4.11) que:

$$\lim_{t \to \infty} h_i{}^{k'}(x + tz, z) = \infty.$$

ii) Si ${g_i}'_{\infty}(z) = 0$ entonces por la Observación 4.17 parte (ii), $g_i(x+tz) \rightarrow A$ (A real) cuando $t \rightarrow \infty$, además de la Definición 2.14 parte (1),

$$P'(g_i(x+tz)/\lambda_k, \mu_i^k) \rightarrow P'(A/\lambda_k, \mu_i^k) \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

Por la Observación 4.15, al tomar límite en (4.11) tenemos:

$$\lim_{t\rightarrow\infty} {h_i^k}'(x+tz, z) = 0$$

iii) Si ${g_i}'_{\infty}(z) < 0$ entonces por la Observación 4.17 parte (iii) $g_i(x+tz) \rightarrow -\infty$ cuando $t \rightarrow \infty$, además de la Definición 2.14 parte (3),

$$P'(g_i(x+tz)/\lambda_k, \mu_i^k) \rightarrow 0 \text{ cuando } t \rightarrow \infty$$

lo que lleva a concluir, tomando límite en (4.11) que:

$$\lim_{t\rightarrow\infty} {h_i^k}'(x+tz, z) = 0.$$

Sustituyendo estos resultados en (4.10), tenemos:

$$L_{\mu^k,\lambda_k}{}'_{\infty}(z) = \begin{cases} f'_{\infty}(z) & \text{si z es dirección de recesión de } g_i,\ \forall i := 1,..m \\ \infty & \text{caso contrario.} \end{cases} \tag{4.12}$$

Finalmente:

Supongamos que existe $z^o \neq 0$ dirección de recesión de L_{μ^k,λ_k}. Luego, de (4.12),

$$L_{\mu^k,\lambda_k}{}'_{\infty}(z^0) = f'_{\infty}(z^0) \leq 0$$

(o sea, z^0 es dirección de recesión de todas las funciones g_i y de f), lo que contradice la Observación 4.13.

Por tanto, $$L_{\mu^k,\lambda_k}{}'_{\infty}(z) > 0 \quad \forall z \neq 0 \text{ en } I\!R^n.$$

ii) La unicidad del punto mínimo se obtiene de inmediato de la convexidad estricta en $I\!R$ de L_{μ^k,λ_k} (ver parte última de la Observación 2.22).

□

Capítulo 5

Conclusiones

i) Como podemos observar, asumir las Hipótesis 2.13 y 2.36 fue clave para demostrar la Afirmación 4.19.

Notar que la Hipótesis 2.36 que usamos considera $x^0 \in ri dom f$ como lo exige el Teorema 2.37. Gracias también a la Hipótesis de Slater pudimos hacer uso de la Observación 2.32 que necesitabamos para verificar la condición de Lagrange para el problema $(\hat{P}_k)$ (Sección 2.2 donde generalizamos la formulación del Método Lagrangeano Aumentado).

La demostración previa de la Observación 4.13, a la cual no podremos contradecir en la Afirmación 4.19 se basa en considerar que el conjunto de soluciones óptimas del problema $(\hat{P})$ es no vacío y acotado (Hipótesis 2.13).

ii) Penalidades usadas por el Método Lagrangeano Aumentado que verifican:

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{\partial P}{\partial t}(t, u) = a > 0$$

no están incluidas en este trabajo, pues es precisamente la condición (4) en la Definición 2.14, la que nos permite llegar a la relación (4.12) en la Afirmación 4.19 y finalmente demostrarla. Tampoco las penalidades de tipo II pues son solo convexas en $I\!R$.

iii) Al comenzar nuestra labor de generalización no sabíamos que tipo de problema de optimización convexa considerar, vale decir, no sabíamos hasta dónde sería posible generalizar el problema planteado.

Una primera alternativa era el planteamiento más ideal:

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & f(x) \\ \text{s.a.} \quad g_i(x) &\leq 0, \qquad\qquad i = 1, .., m \\ x &\in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

donde $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ($dom f = \mathbb{R}^n$) y $g_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ($dom g_i = \mathbb{R}^n$) para $i = 1, \ldots, m$ son funciones convexas y diferenciables.

Una segunda opción era considerar una función objetivo más moderna:

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & f(x) \\ \text{s.a.} \quad g_i(x) &\leq 0, \qquad\qquad i = 1, .., m \\ x &\in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

donde $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ es convexa y cerrada y $g_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ($dom g_i = \mathbb{R}^n$) para $i = 1, \ldots, m$ son funciones convexas (luego cerradas).
bigskip

Una tercera, contemplaba además restricciones con valores extendidos

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & f(x) \\ \text{s.a.} \quad g_i(x) &\leq 0, \qquad\qquad i = 1, .., m \\ x &\in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

donde $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ y $g_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ para $i = 1, \ldots, m$ son funciones convexas y cerradas.

Debido a que el Teorema 2.37 garantiza la verificación de las condiciones de K.K.T. en $\bar{x}$ solución del problema $(\hat{P})$ solo para un planteamiento con restricciones g_i de valores finitos, concluimos que nuestra alternativa era la segunda.

Bibliografía

[1] Bertsekas, D. P., *Constrained Optimization and Lagrange Multiplier Methods*, Academic Press, New York, 1982.

[2] Gonzaga, C. y Castillo, R., "Métodos de Lagrangeano Aumentado usando Penalidades Generalizadas para Programacão não linear " Tesis, COPPE, UFRJ 1998.

[3] Hiriart-Urruty, J.-B. y Lemarechal, C., *Convex Analysis and Minimization Algorithms I*, 1 ed. New York, Springer-Verlag, 1993.

[4] Hiriart-Urruty, J.-B. y Lemarechal, C., *Convex Analysis and Minimization Algorithms II*, 1 ed. New York, Springer-Verlag, 1993.

[5] Hestenes, M., "Multiplier and Gradient Methods", JOTA, vol. 4, pp.303–320, 1969.

[6] Iusem, A., *Augmented Lagrangian methods and proximal point methods for convex optimization*, Minicurso I workshop en Optimización , Florianópolis, Brasil, Diciembre 1997.

[7] Lima, Elon Lages, *Curso de Analise*, Conselho Nacional de Desenvolvimento Cientifico e Tecnologico, Brasilia, 1981.

[8] Polyak, R. y Teboulle, M., "Nonlinear rescaling and proximal-like methods in convex programming", 76, pp. 697–739, 1995.

[9] Powell, M., "A method for nonlinear constraints in minimizations problems", in Optimization, R.Fletcher, Ed.,Academic Press, N.Y, pp.283–298, 1969.

[10] Purcell, Edwin y Varberg, Dale, 6ta Edición. Prentice Hall Hispanoamericana S.A., Juarez, México, 1993.

[11] Rockafellar, R. T., *Convex Analysis*, 1 ed. Princeton University Press, Princeton, N.J.1970.

[12] Rockafellar R. T., "Augmented Lagrangians and applications of the proximal point algorithm in convex programming", Mathematics of Operations Researchs 1, pp. 97–116, 1976.