

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA



**Análisis Estructural Global de  
Algunos Sistemas Cuadráticos  
sin Ciclos Límites**

por

**Elva Flor Reyes Muñoz**

Tesis para Optar  
el Título Profesional de  
**LICENCIADO en MATEMÁTICA**

Prof. Félix Escalante Del Águila  
Asesor

UNI, abril del 2007.

## CIP - CATALOGO DE PUBLICACIÓN

Reyes Muñoz, Elva Flor

Análisis Estructural Global de Algunos Sistemas Cuadráticos sin Ciclos Límites / Elva Flor Reyes Muñoz. – EPM - FC - UNI, 2007.

140 p.: il.

Tesis (Licenciatura)—Universidad Nacional de Ingeniería, Facultad de Ciencias, Escuela Profesional de Matemática, Lima, 2007. Asesor: Félix Escalante Del Águila

Palabras claves: Sistemas autónomos, linealización, puntos singulares no elementales, puntos singulares en el infinito, teoría del índice, estabilidad estructural.

A MI MADRE.

Agradezco al Profesor Félix Escalante del Águila por la orientación y sus sabios consejos para el desarrollo y culminación del presente trabajo, también deseo agradecer a mis profesores W. Echegaray, por sus asesorías en la redacción; a A. Hidalgo por su amistad y estímulo, a todos mis profesores y a todas aquellas personas que de una u otra manera me ayudaron a terminar este trabajo.

Un agradecimiento especial a mi familia, en particular a mis hijos Iván y Alexandra.

# RESUMEN

El presente trabajo realiza la clasificación topológica global de algunos sistemas cuadráticos sin ciclos límites, encontrando todas las estructuras topológicas posibles, considerando como uno si dos sistemas tienen orientación opuesta. Para hallar los puntos singulares en el infinito utilizamos la proyección central, el cual consiste en representar el plano en la esfera, los puntos del Ecuador serán los puntos del infinito; para conocer el comportamiento de las trayectorias cerca de estos puntos utilizamos la inversa de la proyección central, es decir hallamos el plano tangente en dicho punto singular y analizamos según los teoremas de Hartman-grobman, si es un punto hiperbólico o utilizamos los teoremas apropiados en el caso de ser un punto singular no elemental; este trabajo está dividido en cuatro capítulos:

En el capítulo 1 hacemos una breve exposición de los temas necesarios para el mejor entendimiento de los capítulos posteriores.

En el capítulo 2 hacemos la clasificación topológica global de sistemas cuadráticos homogéneos, es decir sin parte lineal; para ello hacemos uso de las direcciones excepcionales, luego se demuestra que estos sistemas no tienen ciclos límites.

En el capítulo 3 hacemos la clasificación topológica global de sistemas cuadráticos cuando uno de sus puntos singulares finitos es un punto nodo estelar, en este capítulo demostraremos una relación entre la forma del cuadrilátero que forman los 4 puntos singulares y el tipo de singularidad que estos presentan. Este tipo de sistemas no poseen ciclos límites.

En el capítulo 4 hacemos la clasificación topológica global de sistemas cuadráticos estructuralmente estables sin ciclos límites.

# Indice general

<b>1. DEFINICIONES PREVIAS . . . . .</b>	
<b>1</b>	
<b>1.1. Sistemas Autónomos . . . . .</b>	<b>1</b>
1.1.1. Curvas Integrales. Propiedades . . . . .	1
1.1.2. Trayectorias. Espacio de Fase. Punto singular . . . . .	2
1.1.3. Cambio de parametrización. Trayectoria Singular . . . . .	4
<b>1.2. Linealización . . . . .</b>	<b>6</b>
<b>1.3. Puntos Singulares Simples en <math>\mathbb{R}^2</math>. . . . .</b>	<b>9</b>
<b>1.4. El Sistema Homogéneo . . . . .</b>	<b>12</b>
1.4.1. Rayo Invariante. Dirección Excepcional. Nodo Estelar . . . . .	13
1.4.2. El Centro y el Foco . . . . .	16
<b>1.5. Puntos Singulares no Simples en <math>\mathbb{R}^2</math> . . . . .</b>	<b>17</b>
<b>1.6. Puntos Singulares en el Infinito . . . . .</b>	<b>23</b>
<b>1.7. Teoría del Índice . . . . .</b>	<b>32</b>
<b>1.8. Estabilidad Estructural . . . . .</b>	<b>40</b>
<b>2. CLASIFICACIÓN TOPOLÓGICA GLOBAL DE SISTEMAS CUADRÁTICOS HOMOGÉNEOS . . . . .</b>	

2.1. El sistema no tiene factor común . . . . .	43
2.2. El sistema tiene factor común. . . . .	64
<b>3. ESTRUCTURA GLOBAL DE SISTEMAS CUADRÁTICOS CON UN PUNTO NODO ESTELAR . . . . .</b>	
<b>71</b>	
3.1. El sistema tiene cuatro puntos singulares . . . . .	72
3.2. El sistema tiene tres puntos singulares . . . . .	83
3.3. El sistema tiene dos puntos singulares . . . . .	91
3.3.1. $A_1(1, 0)$ es un punto singular doble . . . . .	92
3.3.2. $A_1$ es un punto singular simple . . . . .	98
3.4. El sistema tiene un sólo punto singular . . . . .	112
<b>4. CLASIFICACIÓN TOPOLÓGICA DE SISTEMAS CUADRÁTICOS ESTRUCTURALMENTE ESTABLES SIN CICLOS LÍMITES . . . . .</b>	
<b>121</b>	
<b>BIBLIOGRAFÍA . . . . .</b>	
<b>139</b>	

# 1 DEFINICIONES PREVIAS

## 1.1. Sistemas Autónomos

Una clase muy importante de sistemas de ecuaciones diferenciales son aquellas del tipo

$$\dot{x} = X(x) \tag{1.1}$$

tales sistemas son llamados **sistemas autónomos** porque su segundo miembro es independiente del tiempo  $t$ .

$X(x)$  es una función matricial de  $x$ , de orden  $n \times 1$ , definida en un dominio  $D$  del espacio euclideo  $\mathbb{R}^n$ . Si no afirmamos lo contrario podemos asumir que  $D$  es el espacio total  $\mathbb{R}^n$  y  $X(x)$  es continua ahí.

### 1.1.1. *Curvas Integrales. Propiedades*

Las soluciones de la ecuación (1.1), esto es, las aplicaciones diferenciables  $\varphi : I \rightarrow D$  ( $I$  es un intervalo de recta) tal que

$$\frac{d\varphi}{dt}(t) = X(\varphi(t))$$

para todo  $t \in I$ , son llamadas **curvas integrales**.

Las curvas integrales de sistemas autónomos tienen las siguientes importantes propiedades. Sean  $P_1 = (t_1, \bar{x})$  y  $P_2 = (t_2, \bar{x})$  dos puntos dados; entonces si hacemos una traslación  $t = \tau - (t_2 - t_1)$  a lo largo del eje  $t$ , cada una de las curvas integrales de (1.1) en  $P_1$  se traslada a una curva integral de (1.1) en  $P_2$ . Por lo tanto si  $x = \varphi(t)$  es una solución de (1.1) en un intervalo dado  $[t_0, t_1)$ , la función

solución  $\varphi(t + c)$  donde  $c$  es una constante arbitraria, es también una solución de (1.1) en  $[t_0 + c, t_1 + c)$ . Esto es debido a que  $dt = d\tau$  y  $X$  es independiente de  $t$ .

Si las condiciones de unicidad<sup>1</sup> son satisfechas, entonces para que una curva integral de (1.1) sea periódica es suficiente que exista distintos valores  $t_1, t_2$  de  $t$  para el cual

$$x(t_2) = x(t_1)$$

en efecto, la traslación  $t = \tau - (t_2 - t_1)$  transforma la curva integral  $\Gamma$  de  $(t_1, x(t_1))$  en uno de  $(t_2, x(t_2))$ , luego por unicidad, es  $\Gamma$  mismo; entonces tenemos que para cada  $t$ :  $x(t + t_2 - t_1) = x(t)$ , consecuentemente  $t_2 - t_1$  es el periodo.

Para los sistemas autónomos, la curva integral  $x(t) = c$ , para el valor constante  $c \in \mathbb{R}^n$ , existe si y sólo si  $X(c) = O$ , donde  $O$  es la matriz nula de orden  $n \times 1$ .

### 1.1.2. Trayectorias. Espacio de Fase. Punto singular

Asumamos que  $X(x)$  de (1.1) satisface las condiciones del teorema de existencia y unicidad<sup>2</sup> en una vecindad de un punto arbitrario  $P_0$  de  $\mathbb{R}^n$ . Entonces las curvas integrales de (1.1) cubren todo el espacio  $\mathbb{R}^{n+1}$  de puntos  $(t, x)$ . Si proyectamos una curva integral arbitraria  $\Gamma$ :

$$x = x(t), \quad t^- < t < t^+ \tag{1.2}$$

ortogonalmente sobre  $\mathbb{R}^n$  cuya ecuación es  $t = 0$ , entonces dos puntos distintos de  $\Gamma$  pueden tener la misma imagen si y sólo si  $\Gamma$  es una solución periódica, en particular, una constante.

---

<sup>1</sup>ver apéndice

<sup>2</sup>ver apéndice

Esta proyección de la curva integral será llamada la **trayectoria** del sistema (1.1). La ecuación (1.2) es llamada una representación paramétrica con parámetro  $t$  de la trayectoria. La dirección positiva de la trayectoria es la dirección correspondiente al incremento de  $t$ .

Si hacemos una traslación  $t = \tau + a$ , donde  $a$  es una constante dada, la curva integral  $\Gamma$  es transformada a otra  $\Gamma_a$ . La trayectoria correspondiente a  $\Gamma_a$  coincide con la imagen de  $\Gamma$ . Por lo tanto,

$$\bar{x}(\tau) = x(\tau + a), \quad t^- - a < t < t^+ - a$$

dá otra representación paramétrica de la misma trayectoria; entonces, cada trayectoria es la imagen de infinitas curvas integrales de (1.1), congruentes por traslación a lo largo del eje  $t$ ,

A través de cada punto del plano  $t = 0$  pasa sólo una trayectoria, la cual es la proyección de cierta curva integral y de todas las curvas congruentes a ella, por la traslación a lo largo del eje  $t$ .

El hiperplano  $t = 0$ , (o cualquier hiperplano  $t = \text{constante}$ ) es llamado el **espacio de fase** del sistema (1.1). El espacio de fase es un espejo del espacio de curvas integrales de un sistema autónomo. La estructura de la curva integral y consecuentemente la vecindad de las soluciones de un sistema autónomo puede ser deducido de la configuración de las trayectorias en el espacio de fase. Esto nos dá una mejor noción, acerca de las soluciones del sistema, especialmente en el caso  $n = 2$ .

Llamemos ahora  $\varphi_p(t)$ , la trayectoria sobre el hiperplano  $t = 0$ , el cual pasa a través del punto  $p$  y escogemos una de las infinitas representaciones paramétricas  $x = x(t)$ ,  $t^- < t < t^+$  la cual tiene coordenadas  $x_1(0), x_2(0), \dots, x_n(0)$ . Decimos brevemente que  $\varphi_p(t)$  representa la trayectoria a través de  $p$  en el tiempo  $t = 0$ . Si  $q$  es el punto de  $\varphi_p(t)$  correspondiente a  $t = \bar{t}$ , escribiremos  $\varphi_p(\bar{t}) = q$ , y entonces por definición  $\varphi_p(0) = p$ .

Sea  $\Gamma$  una curva integral constante,  $x(t) = x_0$ , de (1.1) entonces la correspondiente trayectoria se reduce a un punto  $x_0$  en el espacio de fase donde  $x_0$  es una solución de la ecuación

$$X(x) = 0 \quad (1.3)$$

recíprocamente cualquier solución de este sistema es la imagen de una curva integral constante. Cada solución del sistema (1.3) es llamado un **punto singular** o **trayectoria singular**.

Si existe un  $\delta > 0$  de tal manera que  $x_0$  es el único punto singular del sistema (1.1) en una vecindad  $V_\delta(x_0)$ , se dice que  $x_0$  es un **punto singular aislado**.

### 1.1.3. Cambio de parametrización. Trayectoria Singular

Consideremos el sistema

$$\dot{x} = -X(x) \quad (1.4)$$

es fácil notar que si  $x = \varphi(t)$  es una solución del sistema (1.1) entonces  $x = \varphi(-t)$  es una solución de (1.4). Es evidente que (1.1) y (1.4) tienen las mismas trayectorias, pero de dirección opuesta. Entonces pasar del sistema (1.1) al sistema (1.4) puede ser interpretado como un cambio de parametrización sobre las trayectorias.

Ahora consideremos un cambio más general de parametrización sobre las trayectorias del sistema (1.1).

Sea  $\lambda(x)$  una función de clase  $C^1$  definido en  $D$ . Asumimos que  $\lambda(x)$  no se anula en  $D$ , excepto en los puntos singulares del sistema (1.1); además no cambia de signo en  $D$ . Consideremos el sistema

$$\frac{dx}{d\tau} = \lambda(x)X(x) \quad (1.5)$$

es claro que los puntos singulares de (1.1) coinciden con los de (1.5).

Del punto de vista analítico, de cada solución de (1.1) se puede obtener una solución de (1.5) por una integración (siempre que  $\lambda(x) \neq 0$ ) y recíprocamente. En efecto, si  $\varphi(t)$  es una solución de (1.1) entonces  $\varphi(t(\tau))$  es una solución de (1.5), donde  $t(\tau)$  es definido por  $\tau = \int dt/\lambda(\varphi(t))$ .

Este resultado significa que  $\varphi(t)$  y  $\varphi(t(\tau))$  son ecuaciones paramétricas diferentes de una misma trayectoria, al pasar de un sistema al otro, las direcciones sobre la trayectoria permanecen si  $\lambda(x) > 0$  y se invierten si  $\lambda(x) < 0$ .

Supongamos ahora que  $\lambda(x)$  puede anularse en otros puntos diferentes a los puntos singulares del sistema (1.1), por lo tanto puede cambiar de signo en  $D$ ; entonces los puntos singulares de (1.5) serán obviamente los de (1.1) además todos los puntos de  $D$  los cuales no son puntos singulares de (1.1) que satisfacen  $\lambda(x) = 0$ . La curva  $\lambda(x) = 0$  es la denominada anteriormente **trayectoria o curva singular** del sistema (1.5) (cada punto de esta curva es un punto singular de (1.5)).

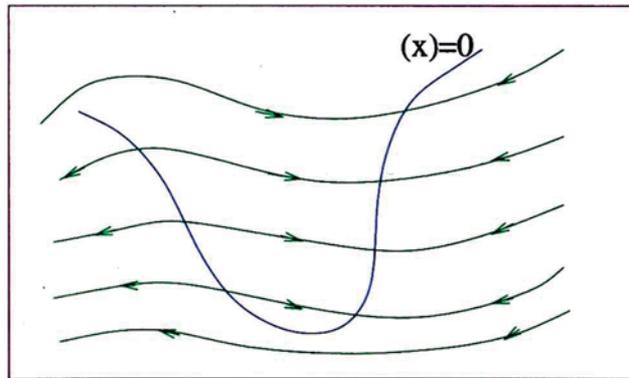


Figura 1.1: Una Trayectoria Singular

Sea  $\Gamma$  una trayectoria del sistema (1.1), diferente a un punto singular, si  $\lambda(x) \neq 0$  sobre  $\Gamma$ , como en el caso anterior,  $\Gamma$  es una trayectoria del sistema (1.5), generalmente con una parametrización diferente; pero si hay puntos de la curva  $\lambda(x) = 0$  sobre  $\Gamma$ , ellos dividen a la trayectoria  $\Gamma$ , en curvas suaves finitas o

contables las cuales son trayectorias del sistema (1.5) (Figura 1.1). La dirección de esta trayectoria coincide con la dirección de  $\Gamma$  si  $\lambda(x) > 0$  y se invierte si  $\lambda(x) < 0$ .

Por lo tanto, cada trayectoria del sistema (1.1) es una trayectoria del sistema (1.5) o la unión finita o contable de trayectorias del sistema (1.5)

## 1.2. Linealización

Consideremos el sistema (1.1)

$$\dot{x} = X(x)$$

además el sistema

$$\dot{x} = Ax \tag{1.6}$$

**Definición 1.2.1.** *Sea  $p$  un punto singular de (1.1). Si  $DX(p)$  es una matriz no singular, decimos que  $p$  es un **punto singular simple**.*

*Si  $DX(p)$  tiene autovalores con parte real no nula entonces  $p$  es llamado **punto singular hiperbólico**.*

*El sistema lineal (1.6) con la matriz  $A = DX(p)$  es llamada la **linealización** de (1.1) en  $p$ ; a la matriz  $A$  la denominamos **matriz de linealización** del sistema (1.1) en  $p$ .*

Sea  $p = 0$ , un punto singular de (1.1), entonces  $X(0) = 0$  y por el teorema de Taylor

$$X(x) = DX(0)x + \frac{1}{2}D^2X(0)(x, x) + \dots$$

la función lineal  $DX(0)x$  es una buena aproximación del sistema no lineal  $X(x)$  cerca de  $x = 0$ .

El siguiente teorema nos muestra la relacion que existe entre las soluciones de (1.1) y (1.6), cuando el punto singular es hiperbólico.

**Definición 1.2.2.** *Dos sistemas autónomos de euaciones diferenciales tales como (1.1) y (1.6) se dicen **topológicamente equivalentes** en una vecindad del origen o tienen la misma estructura cualitativa cerca del origen, si existe un homeomorfismo  $H : U \rightarrow V$ , donde  $U$  y  $V$  son vecindades del origen, el cual mapea trayectorias de (1.1) en  $U$  sobre trayectorias de (1.6) en  $V$  y preserva su orientación en el tiempo, en el sentido que si una trayectoria es direccionada de  $p_1$  a  $p_2$  en  $U$  entonces su imagen es dirigida de  $H(p_1)$  a  $H(p_2)$  en  $V$ .*

*Si el homeomorfismo  $H$  preserva la parametrización en el tiempo entonces los sistemas (1.1) y (1.6) se dicen ser **topológicamente conjugados** en una vecindad del origen.*

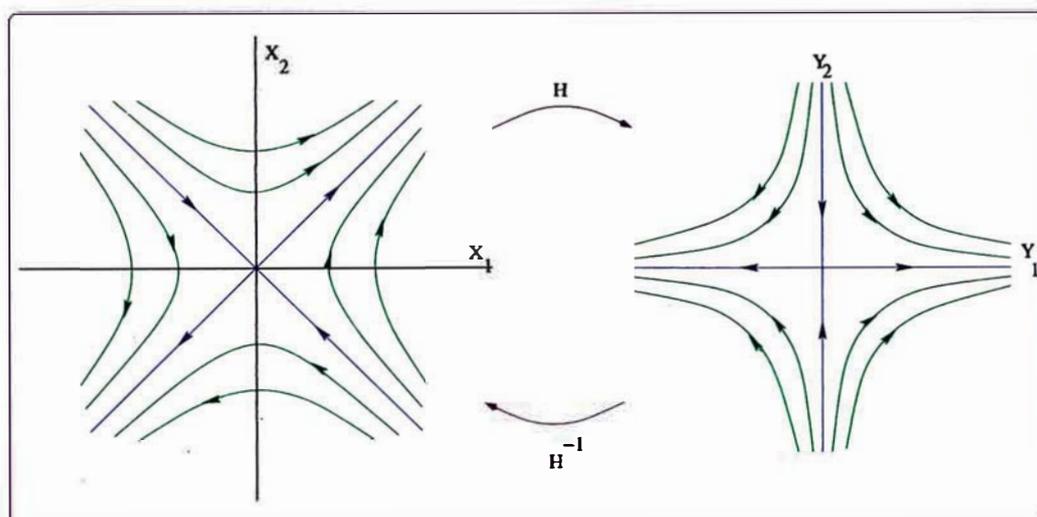


Figura 1.2: Sistemas Topológicamente Conjugados

**Ejemplo 1.1.** Considere los sistemas lineales  $\dot{x} = Ax$  y  $\dot{y} = By$  con

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$$

Sea  $H(x) = Rx$ , donde la matriz

$$R = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad R^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

entonces  $B = RAR^{-1}$  y sea  $y = H(x) = Rx$  o  $x = R^{-1}y$  entonces nos resulta  $\dot{y} = RAR^{-1}y = By$  luego si  $x(t) = e^{At}x_0$  es solución del primer sistema, a través de  $x_0$  entonces  $y(t) = H(x(t)) = Rx(t) = Re^{At}x_0 = e^{Bt}Rx_0$  es la solución del segundo sistema a través de  $Rx_0$ ; es decir  $H$  mapea trayectorias del primer sistema sobre trayectorias del segundo sistema y preserva la parametrización puesto que  $He^{At} = e^{Bt}H$ . El mapeo  $H(x) = Rx$  es simplemente una rotación a través de un ángulo de  $45^\circ$  y es claramente un homeomorfismo. Los retratos de fase de estos dos sistemas son mostrados en la figura 1.2.

La prueba del siguiente teorema se encuentra en Perko [7] Pag. 121.

**Teorema 1.2.1.** *(Teorema de Hartman-Grobman) Sea  $D$  un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$  conteniendo el origen, sea  $X \in C^1(D)$  y sea  $\varphi_t$  el flujo del sistema no lineal (1.1). Supongamos que el origen  $0$  es un punto singular hiperbólico de (1.1) y la matriz  $A = DX(0)$  es hiperbólica. Entonces existe un homeomorfismo  $H$  de un conjunto abierto  $U$  que contiene al origen  $0$  sobre un conjunto abierto  $V$  conteniendo al origen tal que  $\forall p_0 \in U$ , existe un intervalo abierto  $I_0 \subset \mathbb{R}^n$  conteniendo el origen tal que para todo  $p_0 \in U$  y  $t \in I_0$*

$$H \circ \varphi_t(x_0) = e^{At}H(x_0)$$

*es decir mapea trayectorias de (1.1) cerca del origen sobre trayectorias de (1.6) cerca del origen y preserva la parametrización por el tiempo.*

**Ejemplo 1.2.** Considere los sistemas

$$\begin{array}{ll} \dot{x} = -x & \dot{x} = -x \\ \dot{y} = y + x^2 & \dot{y} = y \end{array}$$

la solución  $x(0) = x_0, y(0) = y_0$  del primer sistema es dada por

$$\begin{aligned}x(t) &= x_0 e^{-t} \\y(t) &= y_0 e^t + \frac{x_0^2}{3}(e^t - e^{-2t})\end{aligned}$$

entonces en el contexto  $H(x, y) = (x, y + \frac{x^2}{3})$ . Los diagramas de fase para ambos sistemas se muestran en la figura 1.3.

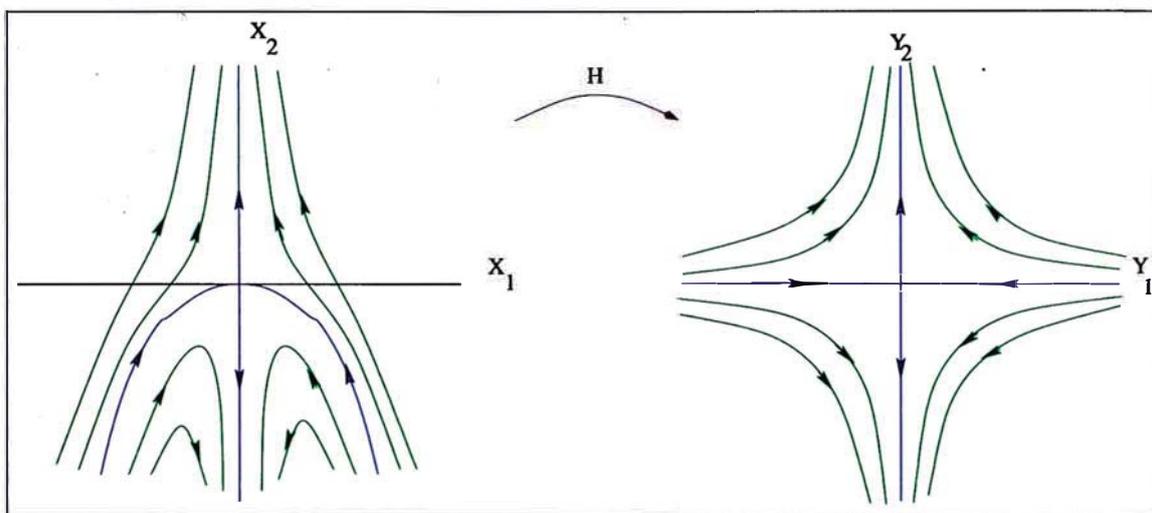


Figura 1.3: Sistemas Topológicamente Equivalentes

De ahora en adelante, nos dedicaremos a estudiar únicamente sistemas autónomos planos, salvo se manifieste lo contrario.

### 1.3. Puntos Singulares Simples en $\mathbb{R}^2$ .

Para el sistema (1.1), un punto singular  $P_0$  de este sistema se define como una **silla**, **sumidero**, **fuelle**, si  $DX(P_0)$  tiene autovalores con parte real positiva y negativa, si sus autovalores tienen parte real negativa y si sus autovalores tienen parte real positiva, respectivamente.

Si consideramos el sistema (1.1) en el plano, éste se puede escribir como

$$\begin{aligned}\dot{x} &= P(x, y) \\ \dot{y} &= Q(x, y)\end{aligned}\tag{1.7}$$

llevando a coordenadas polares el sistema se convierte en

$$\begin{aligned}\dot{r} &= P(r \cos \theta, r \sin \theta) \cos \theta + Q(r \cos \theta, r \sin \theta) \sin \theta \\ r\dot{\theta} &= Q(r \cos \theta, r \sin \theta) \cos \theta - P(r \cos \theta, r \sin \theta) \sin \theta\end{aligned}\tag{1.8}$$

Asumimos que  $p_0 \in \mathbb{R}^2$  es un punto singular aislado del sistema no lineal (1.8), el cual ha sido trasladado al origen.  $r(t, r_0, \theta_0)$  y  $\theta(t, r_0, \theta_0)$  denotará la solución del sistema no lineal (1.8) con  $r(0) = r_0$  y  $\theta(0) = \theta_0$

**Definición 1.3.1.** El origen es llamado un centro (figura 1.4(a)) para el sistema no lineal (1.8) si existe un  $\delta > 0$  tal que cada solución de (1.8) en una vecindad reducida  $V_\delta(0) - \{0\}$  es una curva cerrada con el origen en su interior.

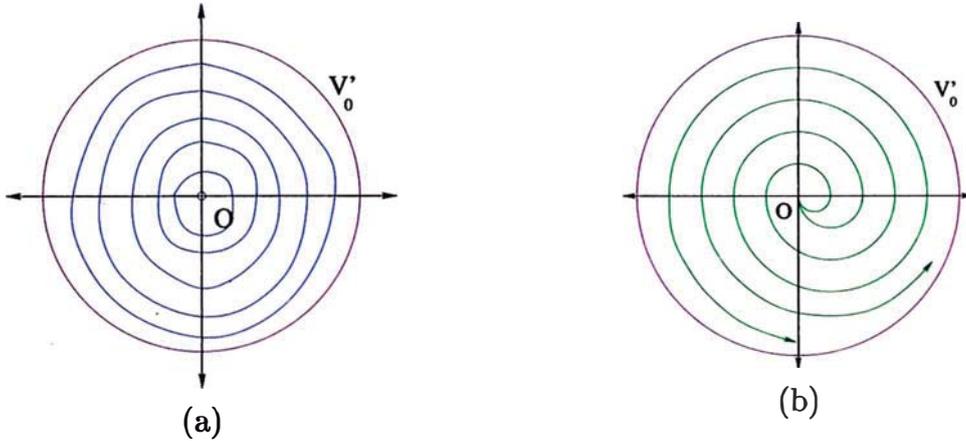


Figura 1.4: (a) Centro, (b) Foco Inestable.

**Definición 1.3.2.** El origen es llamado un foco estable para el sistema no lineal (1.8) si existe un  $\delta > 0$  tal que para  $0 < r_0 < \delta$  y  $\theta_0 \in \mathbb{R}$ ,  $r(t, r_0, \theta_0) \rightarrow 0$  y  $|\theta(t, r_0, \theta_0)| \rightarrow \infty$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .

Es llamado foco inestable (figura 1.4(b)) si  $r(t, r_0, \theta_0) \rightarrow 0$  y  $|\theta(t, r_0, \theta_0)| \rightarrow \infty$  cuando  $t \rightarrow -\infty$ .

Cualquier trayectoria de (1.8) el cual satisface  $r(t) \rightarrow 0$  y  $|\theta(t)| \rightarrow \infty$  cuando  $t \rightarrow \pm\infty$  se dice que espirala en torno al origen cuando  $t \rightarrow \pm\infty$ .

**Definición 1.3.3.** El origen es llamado un nodo estable para el sistema no lineal (1.8) si existe un  $\delta > 0$  tal que para  $0 < r_0 < \delta$  y  $\theta_0 \in \mathbb{R}$ ,  $r(t, r_0, \theta_0) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$  y  $\lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t, r_0, \theta_0)$  existe; es decir cada trayectoria en una vecindad reducida del origen se aproxima al origen a lo largo de una línea tangente bien definida cuando  $t \rightarrow \infty$ .

El origen es llamado un nodo inestable (figura 1.5(a)) si  $r(t, r_0), \theta_0 \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow -\infty$  y  $\lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t, r_0, \theta_0)$  existe para todo  $r_0 \in \langle 0, \delta \rangle$  y  $\theta_0 \in \mathbb{R}$ .

El origen es llamado un nodo propio para (1.8) si es un nodo y si cada rayo que atraviesa el origen es tangente a alguna trayectoria de (1.8).

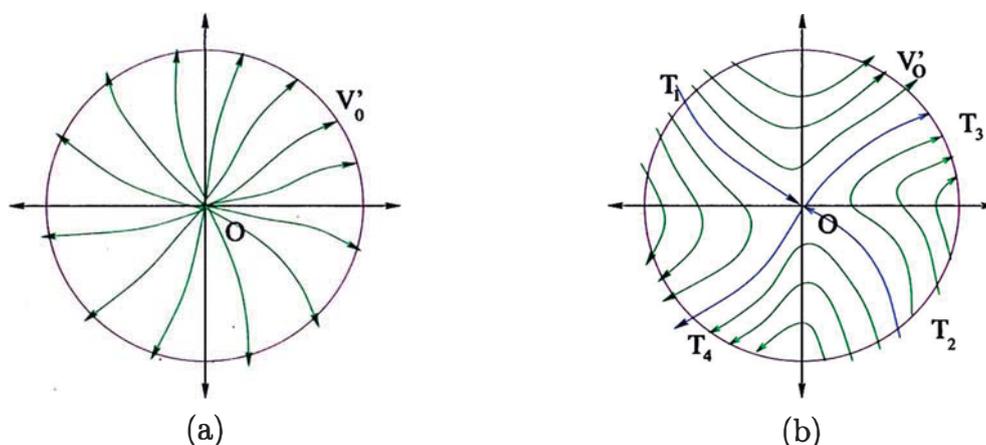


Figura 1.5: (a) Nodo Inestable, (b) Silla.

**Definición 1.3.4.** El origen es llamado una silla topológica (figura 1.5(b)) para el sistema no lineal (1.8) si existe dos trayectorias  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$  las cuales se aproximan al origen cuando  $t \rightarrow \infty$  y dos trayectorias  $\Gamma_3$  y  $\Gamma_4$  las cuales se aproximan al origen cuando  $t \rightarrow -\infty$  además si existe un  $\delta > 0$  tal que todas las otras trayectorias las

cuales empiezan en una vecindad reducida del origen  $V_\delta(0) - \{0\}$  dejan  $V_\delta(0) - \{0\}$  cuando  $t \rightarrow \pm\infty$ .

Las trayectorias especiales  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$  y  $\Gamma_4$  son llamadas **separatrices**.

La prueba del siguiente teorema se encuentra en Sansone [8].

**Teorema 1.3.1.** *Sea  $E$  un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^2$  conteniendo el origen y sea  $X \in C^1(E)$  con  $X(0) = 0$ , supongamos que el origen es un centro para el sistema lineal (1.8) con  $A = DX(0)$ . Entonces el origen es un centro ó un centro-foco ó un foco para el sistema no lineal (1.1).*

**Corolario 1.3.1.** *Sea  $E$  un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^2$  conteniendo el origen y sea  $X$  analítico en  $E$  con  $X(0) = 0$ , supongamos que el origen es un centro para el sistema lineal (1.6) con  $A = DX(0)$ . Entonces el origen es un centro ó un foco para el sistema no lineal (1.1)*

## 1.4. El Sistema Homogéneo

**Definición 1.4.1.** *Consideremos el sistema*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= P_m(x, y) \\ \dot{y} &= Q_m(x, y) \end{aligned} \tag{1.9}$$

donde  $P_m(x, y)$  y  $Q_m(x, y)$  son funciones reales definidas en  $\mathbb{R}^2$ , homogéneas de orden  $m, m \geq 1$ , es decir

$$P_m(\lambda x, \lambda y) = \lambda^m P_m(x, y), \quad Q_m(\lambda x, \lambda y) = \lambda^m Q_m(x, y), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

el sistema (1.9) se denomina **sistema homogéneo de orden  $m$** .

Supongamos que el origen  $O$  es un punto singular aislado, entonces integrando podemos conseguir una representación paramétrica de las trayectorias

del sistema (1.9)

$$\begin{aligned} x &= c \exp \left( \int_0^u \frac{P_m(1, v)}{Q_m(1, v) - vP_m(1, v)} dv \right) \\ y &= cv \exp \left( \int_0^u \frac{P_m(1, v)}{Q_m(1, v) - vP_m(1, v)} dv \right) \end{aligned} \quad (c = \text{cte.})$$

pero como después sucede, la representación explícita no dá muchas ideas acerca del comportamiento de las trayectorias, en particular sobre el comportamiento en la vecindad del punto singular  $O$  (y de aquellos en el infinito).

#### 1.4.1. *Rayo Invariante. Dirección Excepcional. Nodo Estelar*

Si introducimos un sistema coordenadas polares  $r - \theta$ , con polo en  $O$ , el sistema (1.9) es cambiado a

$$\begin{aligned} \dot{r} &= r^m Z(\theta) \\ \dot{\theta} &= r^{m-1} N(\theta) \end{aligned} \quad (1.10)$$

donde

$$\begin{aligned} Z(\theta) &= Q_m(\cos \theta, \text{sen } \theta) \text{sen } \theta + P_m(\cos \theta, \text{sen } \theta) \cos \theta \\ N(\theta) &= Q_m(\cos \theta, \text{sen } \theta) \cos \theta - P_m(\cos \theta, \text{sen } \theta) \text{sen } \theta \end{aligned}$$

Una solución  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  del sistema (1.9) puede también ser considerada como una solución de  $r = r(t)$ ,  $\theta = \theta(t)$  de (1.10) ( $\theta \in [0, 2\pi)$ ).

Puesto que se cumple  $Z^2(\theta) + N^2(\theta) = P_m^2(\cos \theta, \text{sen } \theta) + Q_m^2(\cos \theta, \text{sen } \theta)$ , y suponiendo que el origen  $O$  es el único punto singular aislado de (1.9), obtenemos

$$Z^2(\theta) + N^2(\theta) > 0 \quad (1.11)$$

Para cualquier punto  $P$  distinto de  $O$ , de argumento  $\theta$ , indicamos con  $\alpha$ ,  $\alpha \in [0, 2\pi)$ , el ángulo que el radio vector  $\overrightarrow{OP}$  forma con la tangente positiva en  $P$  a la trayectoria de (1.9) que pasa por  $P$  (la tangente positiva significa, orientada de acuerdo al mismo sentido en que la trayectoria crece). Podemos ver que tal ángulo no depende del módulo de  $\overrightarrow{OP}$  pero si del argumento  $\theta$ , puesto que

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= Z(\theta)[P_m^2(\cos \theta, \operatorname{sen} \theta) + Q_m^2(\cos \theta, \operatorname{sen} \theta)]^{-\frac{1}{2}} \\ \operatorname{sen} \alpha &= N(\theta)[P_m^2(\cos \theta, \operatorname{sen} \theta) + Q_m^2(\cos \theta, \operatorname{sen} \theta)]^{-\frac{1}{2}}\end{aligned}\tag{1.12}$$

De (1.12) vemos que los rayos que parten de  $O$ , sin considerar el origen, son isoclinas (líneas de igual pendiente) para la familia de trayectorias del sistema (1.9). Si para uno de tales rayos conseguimos  $\alpha = 0$ , el rayo mismo será una trayectoria y lo llamaremos **rayo invariante**; también el rayo en la dirección opuesta es un rayo invariante. Por (1.12) el argumento de los rayos invariantes son obtenidos de la ecuación

$$N(\theta) = 0\tag{1.13}$$

**Definición 1.4.2.** *La dirección con ángulo polar  $\theta_0$ ,  $\theta_0 \in [0, 2\pi)$  es llamada una **dirección excepcional** para el sistema (1.8)*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= P(x, y) \\ \dot{y} &= Q(x, y)\end{aligned}$$

*relativo al punto singular aislado 0, si existe una sucesión  $A_n = (r_n, \theta_n)$ , ( $n = 1, 2, \dots$ ) de puntos, tales que  $r_n \rightarrow 0$ ,  $\theta_n \rightarrow \theta_0$  y tal que si  $\tan \alpha_n$  denota la tangente del ángulo  $\alpha_n$  entre la dirección de  $\overrightarrow{OA_n}$  y la dirección del vector  $(P, Q)$  en el punto  $A_n$ , entonces  $\tan \alpha_n \rightarrow 0$ .*

Los puntos  $A_n$  no necesariamente todos pertenecen a la misma trayectoria; pero si existe una trayectoria de (1.8) el cual tiende a  $O$  con una tangente tendiendo a cierta dirección, entonces esta dirección es excepcional.

De otro lado, si la ecuación (1.13) es idénticamente satisfecha entonces todos los rayos de  $O$  son rayos invariantes, el punto  $O$  será llamado **nodo estelar**. En este caso, por (1.11),  $Z(\theta)$  nunca se anula, entonces cuando  $t$  crece, si  $Z(\theta)$  es negativa, de (1.10), todos los radios se dirigen a  $O$ ; pero si  $Z(\theta)$  es positivo, todos los radios se dirigen a  $O$  pero en la dirección opuesta. El nodo estelar será llamado respectivamente **estable o inestable**.

Si suponemos que  $P_m(x, y)$  y  $Q_m(x, y)$  son de la forma

$$\begin{aligned} P_m(x, y) &= a_0x^m + a_1x^{m-1}y + \cdots + a_{m-1}xy^{m-1} + a_my^m \\ Q_m(x, y) &= b_0x^m + b_1x^{m-1}y + \cdots + b_{m-1}xy^{m-1} + b_my^m \end{aligned}$$

donde  $a_i, b_i$  son constantes reales, la ecuación correspondiente a (1.13) es

$$xQ_m(x, y) - yP_m(x, y) = 0 \quad (1.14)$$

esta ecuación puede ser escrito como:

$$b_0x^{m+1} + (b_1 - a_0)x^m y + (b_2 - a_1)x^{m-1}y^2 + \cdots + (b_m - a_{m-1})xy^m - a_my^{m+1} = 0$$

Por lo tanto, si esto es idénticamente satisfecho,  $P_m$  y  $Q_m$  tienen la forma

$$\begin{aligned} P_m(x, y) &= xA_{m-1} \\ Q_m(x, y) &= yA_{m-1} \\ A_{m-1} &= a_0x^{m-1} + a_1x^{m-2}y + \cdots + a_{m-1}y^{m-1} \end{aligned}$$

Si, como fue asumido, el origen  $O$  es un punto singular aislado,  $A_{m-1}$  no puede admitir divisores reales de primer grado y (1.14) puede ser idénticamente satisfecho sólo si  $m$  es impar.

### 1.4.2. El Centro y el Foco

Para que el origen  $O$  sea un centro es necesario que (1.13) no tenga raíces reales, en otras palabras que  $N(\theta)$  tenga siempre el mismo signo y entonces debe existir un número  $d > 0$  tal que  $|N(\theta)| \geq d$ ,  $\theta \in [0, 2\pi)$ . Podemos asumir sin pérdida de generalidad que  $N(\theta)$  es positivo; si fuera negativo debemos cambiar  $t$  por  $-t$ . Cada trayectoria del sistema (1.10) puede ser representada en su totalidad en la forma  $r = r(\theta)$ , donde  $r(\theta)$  es una solución de la ecuación

$$r^{-1} \frac{dr}{d\theta} = \frac{Z(\theta)}{N(\theta)}$$

integrando entre 0 y  $\theta$  tenemos

$$r(\theta) = r(0) \exp \left( \int_0^\theta \frac{Z(\alpha)}{N(\alpha)} d\alpha \right)$$

y consecuentemente, cuando  $\theta \rightarrow \infty$ , las trayectorias giran alrededor del origen infinitamente; pero desde que  $O$  es un centro tenemos  $r(2\pi) = r(0)$ , es decir

$$\int_0^{2\pi} \frac{Z(\alpha)}{N(\alpha)} d\alpha = 0 \quad (1.15)$$

Esta condición, junto con la otra  $N(\theta) \neq 0$ , es también suficiente para que  $O$  sea un centro.

Si (1.15) no es válido, puesto que se cumple

$$r(2n\pi) = r(0) \exp \left( n \int_0^{2\pi} \frac{Z(\alpha)}{N(\alpha)} d\alpha \right)$$

entonces la sucesión  $r(2n\pi)$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$  se aproxima a cero si la última integral es menor que cero y se aproxima a  $+\infty$  si esta integral es mayor que cero.

Las trayectorias tienen el comportamiento de espirales como en el caso del foco para el sistema lineal; por esta razón podemos decir otra vez que  $O$  es un

foco para el sistema homogéneo (1.9). Lo llamaremos estable si espirala en torno de  $Q$  cuando  $t \rightarrow +\infty$ , inestable si espirala en torno al origen cuando  $t \rightarrow -\infty$ . Los dos casos corresponden respectivamente a la primera y segunda desigualdad

$$N(\theta) \int_0^{2\pi} \frac{Z(\alpha)}{N(\alpha)} d\alpha < 0, \quad N(\theta) \int_0^{2\pi} \frac{Z(\alpha)}{N(\alpha)} d\alpha > 0$$

Si  $P_m$  y  $Q_m$  son polinomios homogéneos de grado par, la ecuación (1.13) tiene al menos una raíz real; por lo tanto podemos tener un centro o un foco, cuando  $P_m$  y  $Q_m$  son polinomios homogéneos sólo si su grado común es impar..

## 1.5. Puntos Singulares no Simples en $\mathbb{R}^2$

Asumamos que el origen  $O$  es un punto singular aislado del sistema plano (1.8)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= P(x, y) \\ \dot{y} &= Q(x, y) \end{aligned}$$

donde  $P$  y  $Q$  son funciones analíticas en una vecindad del origen. Sea  $A$  la matriz de linealización del sistema (1.8) en el origen ( $A \neq 0$ ).

En esta sección veremos el caso cuando el punto singular no es simple, es decir  $\det(A) = 0$ ; a estas singularidades también se les denomina **singularidades múltiples**.

Cuando esto sucede, tenemos dos posibilidades, primero que la matriz  $A$  tenga un autovalor nulo y segundo que sus dos autovalores sean nulos.

Antes de empezar el análisis, definamos nuevos puntos singulares, los cuales se presentan en este caso.

**Definición 1.5.1.** *Un sector el cual es topológicamente equivalente al sector mostrado en la figura 1.6(a) es llamado un **sector hiperbólico**.*

Un sector el cual es topológicamente equivalente al sector mostrado en la figura 1.6(b) es llamado un **sector parabólico**.

Un sector el cual es topológicamente equivalente al sector mostrado en la figura 1.6(c) es llamado un **sector elíptico**.

Las trayectorias las cuales descansan sobre la frontera de un sector hiperbólico son llamadas **separatrices**.

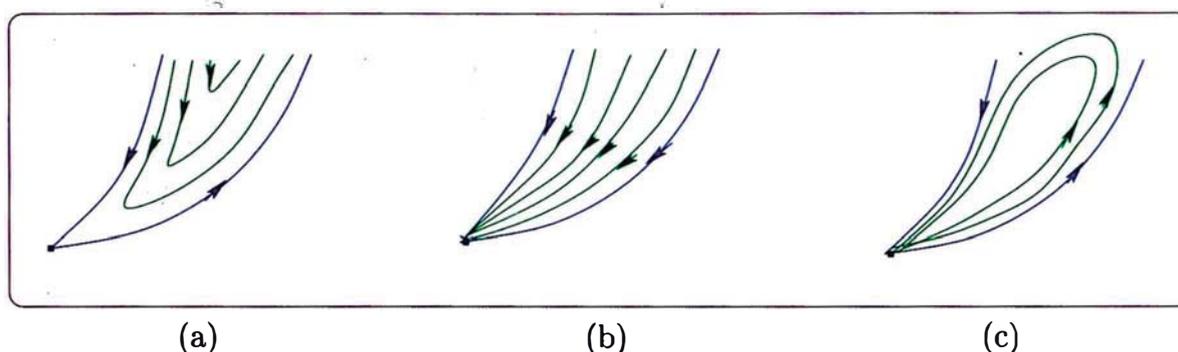


Figura 1.6: Sectores: (a) Hiperbólico, (b) Parabólico, (c) Helíptico

**Definición 1.5.2.** Si tenemos una vecindad reducida del origen que consiste de un sector elíptico, un sector hiperbólico, dos sectores parabólicos y dos separatrices, entonces el origen es llamado un **punto singular con un dominio elíptico**.

Una **Silla-nodo** consiste de dos sectores hiperbólicos y un sector parabólico (como también las tres separatrices y el punto singular).

Si tenemos una vecindad reducida del origen que consiste de dos sectores hiperbólicos y dos separatrices, entonces el origen es llamado una **cúspide**.

Analicemos primero el caso cuando la matriz  $A$  tiene un autovalor cero, es decir  $\text{tra}A \neq 0$ . En este caso, el sistema (1.8) puede ponerse de la forma

$$\begin{aligned} \dot{x} &= p_2(x, y) \\ \dot{y} &= y + q_2(x, y) \end{aligned} \tag{1.16}$$

donde  $p_2$  y  $q_2$  son analíticas en una vecindad del origen y tiene expansiones que empiezan en términos de segundo grado en  $x$  e  $y$ ; el siguiente teorema es probado en Andronov [1] Pag. 340.

**Teorema 1.5.1.** *Sea el origen un punto singular aislado para el sistema analítico (1.16). Sea  $y = \phi(x)$  la solución de la ecuación  $y + q_2(x, y) = 0$  en una vecindad del origen y considere la expansión de la función  $\varphi(x) = p_2(x, \phi(x))$  en una vecindad de  $x = 0$  tiene la forma  $\varphi(x) = a_m x^m + \dots$  donde  $m \geq 2$  y  $a_m \neq 0$ . Entonces*

- 1.) *Cuando  $m$  es impar y  $a_m > 0$ , el origen es un nodo inestable.*
- 2.) *Cuando  $m$  es impar y  $a_m < 0$ , el origen es una silla (topológica).*
- 3.) *Cuando  $m$  es par el origen es una silla nodo. Si  $a_m < 0$  los sectores hiperbólicos están a ambos lados del eje  $x^+$  y si  $a_m > 0$  están a ambos lados del eje  $x^-$ .*

Consideremos el caso cuando  $A$  tiene dos autovalores cero; es decir  $\text{tra}A = 0$ , pero  $A \neq 0$ . Este caso es mostrado en [1] pag. 356; el sistema (1.8) puede ponerse de la forma “normal”

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= a_k x^k [1 + h(x)] + b_n x^n y [y + g(x)] + y^2 R(x, y) \end{aligned} \tag{1.17}$$

donde  $h(x)$ ,  $g(x)$  y  $R(x, y)$  son analíticas en una vecindad del origen,  $h(0) = g(0) = 0$ ,  $k \geq 2$ ,  $a_k \neq 0$  y  $n \geq 1$ . Los dos siguientes teoremas son probados en [1] pag. 357-382

**Teorema 1.5.2.** *Sea  $k = 2m + 1$  con  $m \geq 1$  en (1.17) y sea  $\lambda = b_n^2 + 4(m + 1)a_k$ . Entonces si  $a_k > 0$  el origen es una silla topológica. Si  $a_k < 0$ , el origen es:*

- 1.) *Un foco o un centro si  $b_n = 0$  y también si  $b_n \neq 0$  y  $n > m$  o si  $n = m$  y  $\lambda < 0$ .*

2.) Un nodo si  $b_n \neq 0$ ,  $n$  es un número par  $n < m$  y también si  $b_n \neq 0$ ,  $n$  es un número par  $n = m$  y  $\lambda \geq 0$ .

3.) Un punto crítico con dominio elíptico si  $b_n \neq 0$ ,  $n$  es un número impar  $n < m$  y también si  $b_n \neq 0$ ,  $n$  es un número impar  $n = m$  y  $\lambda \geq 0$ .

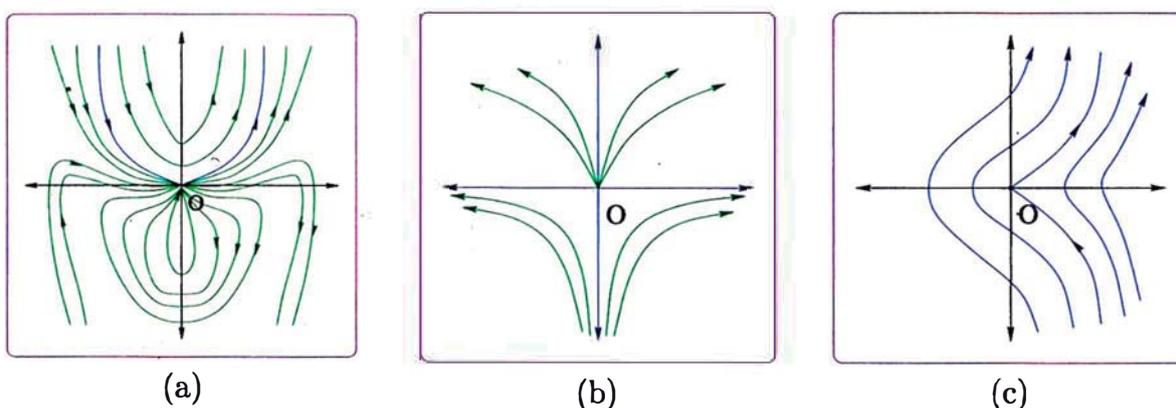


Figura 1.7: (a) Dominio elíptico, (b) Silla nodo, (c) Cúspide.

**Teorema 1.5.3.** Sea  $k = 2m$  con  $m \geq 1$  en (1.17). Entonces el origen es

1.) Una cúspide si  $b_n = 0$  y también si  $b_n \neq 0$  y  $n \geq m$ .

2.) Una silla nodo si  $b_n \neq 0$  y  $n < m$ .

Ahora consideremos el caso cuando la matriz de linealización del sistema (1.8) es la matriz nula (el sistema (1.8) no tiene parte lineal). En este caso el sistema (1.8) puede ser escrito de la forma

$$\begin{aligned} \dot{x} &= P_m(x, y) + \phi(x, y) \\ \dot{y} &= Q_m(x, y) + \varphi(x, y) \end{aligned} \tag{1.18}$$

donde  $m \geq 2$ ;  $P_m(x, y)$  y  $Q_m(x, y)$  son polinomios homogéneos de orden  $m$ ;  $\phi(x, y)$  y  $\varphi(x, y)$  son de grado mayor que  $m$  y  $O$  es un punto singular aislado.

El siguiente teorema es demostrado en [1] pag. 331.

**Teorema 1.5.4.** *Cualquier semitrayectoria del sistema (1.18), el cual tiende al punto singular  $O$  es una espiral o tiende a  $O$  en una dirección bien definida  $\theta$ .*

*Si al menos una semitrayectoria del sistema es una espiral tendiendo a  $O$  cuando  $t \rightarrow +\infty$  (ó cuando  $t \rightarrow -\infty$ ) entonces toda trayectoria pasando a través de cada punto de una vecindad de  $O$  son también espirales ( $O$  es un foco estable o inestable).*

*Si  $xQ_m(x, y) - yP_m(x, y) \neq 0$ , toda dirección  $\theta$  a lo largo del cual las semitrayectorias tienden a  $O$  satisfacen la ecuación*

$$Q_m(\cos \theta, \sin \theta) \cos \theta - P_m(\cos \theta, \sin \theta) \sin \theta = 0$$

*Si  $xQ_m(x, y) - yP_m(x, y) \equiv 0$ , el sistema toma la forma*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= xA_{m-1}(x, y) + \phi(x, y) \\ \dot{y} &= yA_{m-1}(x, y) + \varphi(x, y) \end{aligned} \quad (A_{m-1}(x, y) \neq 0)$$

*En este caso, para toda dirección no singular  $\theta$  (es decir, la dirección no satisface la ecuación  $A_{m-1}(x, y) = 0$ ), existe exactamente una trayectoria tendiendo a  $O$  en la dirección  $\theta$ .*

*Si  $\theta$  es una dirección singular, puede ser que no exista ó puede haber un número finito ó infinitas semitrayectorias tendiendo a  $O$  en la dirección  $\theta$*

**Ejemplo 1.3.** Determine el tipo de singularidad que presentan los puntos singulares del siguiente sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(1 - x + by) \\ \dot{y} &= y(1 - x - y) \end{aligned} \quad b \neq -1.$$

Puesto que  $b \neq -1$ , el sistema no tiene factor común. Los puntos singulares del sistema son

$$A_1 = (0, 0), \quad A_2 = (1, 0), \quad y \quad A_3 = (0, 1),$$

Los respectivos determinantes de las matrices de linealización,  $D_i$  en cada punto singular  $A_i$  son

$$D_1 = 1, \quad D_2 = 0, \quad y \quad D_3 = -(1 + b) \neq 0.$$

Por lo tanto  $A_1$  es un nodo estelar; si  $b > -1$ ,  $A_3$  es una silla en caso contrario es de tipo nodal. Veamos qué singularidad presenta  $A_2 = (1, 0)$ .

Para usar el teorema 1.5.1, trasladamos  $A_2 = (1, 0)$  al origen (hacemos  $u = x - 1, v = y$ ); el sistema anterior se puede escribir como

$$\begin{aligned} \dot{v} &= -v(u + v) \\ \dot{u} &= -(u + 1)(u - bv) \end{aligned}$$

el segundo miembro de la segunda ecuación diferencial tiene parte lineal en términos de  $u$ , así que igualamos a cero y hallamos  $u = f(v)$ .

Los casos posibles son  $u = -1$  y  $u = bv$ .

Para  $u = -1$  el segundo miembro de la primera ecuación diferencial resulta  $g(v) = v - v^2$  lo cual no puede ser puesto que  $g(v)$  debe ser de grado mayor o igual a dos.

Para  $u = bv$  conseguimos  $g(v) = -(1 + b)v^2$  lo que nos indica que el punto singular  $A_2 = (1, 0)$  es un punto semisilla nodal. Por lo tanto tenemos:

- Si  $b > -1$  el eje positivo  $v^+$  de  $A_2$  es una región parabólica y el eje negativo  $v^-$  es una región hiperbólica.

- Si  $b < -1$  el eje positivo  $v^+$  de  $A_2$  es una región hiperbólica y el eje negativo  $v^-$  es una región parabólica.

## 1.6. Puntos Singulares en el Infinito

Consideremos el sistema plano (1.8)

$$\begin{aligned}\dot{x} &= P(x, y) \\ \dot{y} &= Q(x, y)\end{aligned}$$

donde  $P(x, y)$  y  $Q(x, y)$  son polinomios en  $x$  e  $y$  con coeficientes reales; para estudiar sistemáticamente el comportamiento de una trayectoria en el infinito es conveniente, según Poincaré, representar el plano  $x - y$  sobre la esfera  $\Sigma$ .

Consideremos para este propósito un sistema de ejes cartesianos ortogonales  $u - v - z$  donde el plano  $x - y$  es el plano  $z = 1$  en este sistema. Los ejes  $u - v$  son paralelos a los ejes  $x - y$  los cuales suponemos tienen su origen en el punto  $(0, 0, 1)$ .

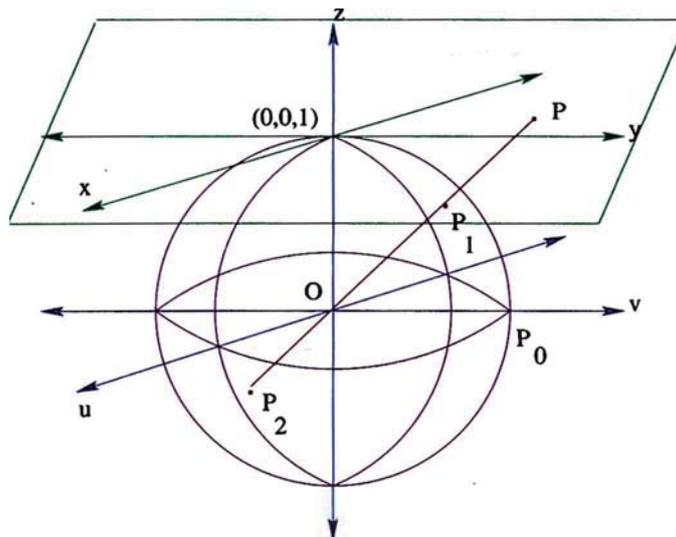


Figura 1.8: La Proyección Central.

Tomamos la esfera  $\Sigma$  del espacio  $u - v - z$  con centro en el origen de coordenadas y radio 1.

$$u^2 + v^2 + z^2 = 1 \quad (1.19)$$

su intersección con el plano  $z = 0$  es el círculo mayor, llamado el Ecuador, el cual divide a la esfera  $\Sigma$  en dos hemisferios  $H_1$  y  $H_2$  caracterizados por  $z > 0$  y  $z < 0$  respectivamente.

Si  $P = (x, y, 1)$  es un punto del plano  $x - y$  a una distancia finita y  $P_1 = (u_1, v_1, z_1)$  y  $P_2 = (u_2, v_2, z_2)$  son respectivamente los puntos donde el rayo  $\overrightarrow{OP}$  corta a  $H_1$  y  $H_2$ , entonces

$$\frac{u_i}{x} = \frac{v_i}{y} = z_i, \quad (i = 1, 2)$$

y por (1.19) se cumple que  $u_i^2 + v_i^2 + z_i^2 = 1$  si ponemos  $r = (x^2 + y^2 + 1)^{\frac{1}{2}}$ , ( $r > 0$ ), entonces

$$u_1 = \frac{x}{r}, \quad v_1 = \frac{y}{r}, \quad z_1 = \frac{1}{r}; \quad u_2 = -\frac{x}{r}, \quad v_2 = -\frac{y}{r}, \quad z_2 = -\frac{1}{r}$$

es decir  $x = \frac{u_i}{z_i}$ ,  $y = \frac{v_i}{z_i}$ , ( $i = 1, 2$ ).

Llamamos a  $P_1$  y  $P_2$  la imagen de  $P$  sobre  $H_1$  y  $H_2$  respectivamente, esta transformación puede ser representada como:

$$x = \frac{u}{z}, \quad y = \frac{v}{z}, \quad u^2 + v^2 + z^2 = 1 \quad (1.20)$$

Por esta representación cualquier curva  $\gamma$  a una distancia finita del plano  $x - y$  tiene por imagen dos curvas  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  simétricas con respecto al centro de  $\Sigma$ , las cuales no cortan al Ecuador; los puntos en el infinito del plano  $x - y$  tienen su imagen sobre el Ecuador y recíprocamente.

Una línea del plano  $x - y$  es representada por dos semicírculos de  $H_1$  y  $H_2$  con extremos sobre el Ecuador; un sistema de líneas paralelas en el plano  $x - y$  por un sistema de semicírculos de  $H_1$  y  $H_2$ .

Ahora supongamos que en el sistema (1.8),  $P(x, y)$  y  $Q(x, y)$  son dos polinomios en  $x, y$  de grado 2, con coeficientes reales y sin factor común real.

Aplicando (1.20) tenemos

$$P\left(\frac{u}{z}, \frac{v}{z}\right) = \frac{P_2(u, v, z)}{z^2}; \quad y \quad Q\left(\frac{u}{z}, \frac{v}{z}\right) = \frac{Q_2(u, v, z)}{z^2} \quad (1.21)$$

donde  $P_2(u, v, z)$  y  $Q_2(u, v, z)$  son polinomios homogéneos de grado 2 en  $u, v$  y  $z$ .

De (1.8) tenemos  $-Q(x, y)dx + P(x, y)dy = 0$ , además por (1.20)

$$dx = \frac{zdu - udz}{z^2} \quad dy = \frac{zdv - vdz}{z^2}$$

y considerando (1.21) obtenemos

$$-zQ_2(u, v, z)du + zP_2(u, v, z)dv + [uQ_2(u, v, z) - vP_2(u, v, z)]dz = 0 \quad (1.22)$$

Si  $uQ(u, v, z) - vP(u, v, z)$  no es divisible por  $z$  sean

$$A = -zQ(u, v, z), \quad B = zP(u, v, z) \quad y \quad C = uQ(u, v, z) - vP(u, v, z).$$

Si  $uQ(u, v, z) - vP(u, v, z)$  es divisible por  $z$  sean

$$A = -Q(u, v, z), \quad B = P(u, v, z) \quad y \quad C = z^{-1}[uQ(u, v, z) - vP(u, v, z)].$$

hechas estas denominaciones la ecuación (1.22) se puede escribir como

$$A(u, v, z)du + B(u, v, z)dv + C(u, v, z)dz = 0 \quad (1.23)$$

considerando el sistema (1.23) la asociamos con

$$udu + vdv + zdz = 0 \quad (1.24)$$

además (1.24) admite la solución  $z = 0, u^2 + v^2 = 1$ .

Por otro lado, en los puntos donde la matriz

$$\begin{bmatrix} A(u, v, z) & B(u, v, z) & C(u, v, z) \\ u & v & z \end{bmatrix} \quad (1.25)$$

tiene rango 2 y por consiguiente en la vecindad de estos puntos, obtenemos de (1.23) y (1.24) el sistema

$$du : dv : dz = \begin{vmatrix} B & C \\ v & z \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} C & A \\ z & u \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} A & B \\ u & v \end{vmatrix}$$

en el cual, si introducimos un parámetro  $\tau$ , también puede ser escrito como

$$\begin{aligned} \frac{du}{d\tau} &= B(u, v, z)z - C(u, v, z)v \\ \frac{dv}{d\tau} &= C(u, v, z)u - A(u, v, z)z \\ \frac{dz}{d\tau} &= A(u, v, z)v - B(u, v, z)u \end{aligned} \quad (1.26)$$

Las trayectorias de este sistema cubren el espacio  $u - v - z$ . Cada uno de ellos descansa completamente sobre una esfera concéntrica con  $\Sigma$ . Por (1.20) cada trayectoria del sistema (1.8) tiene por imagen sobre  $\Sigma$ , dos arcos de trayectoria del sistema (1.26) simétrica con respecto a  $O = (0, 0, 0)$  sin puntos sobre el Ecuador.

Llamaremos **puntos singulares del sistema** (1.23), (1.24) a los puntos  $(u, v, z)$  los cuales son simultáneamente raíces de  $A, B$  y  $C$ . Aquellos puntos donde

$z \neq 0$  son imágenes de puntos singulares del sistema (1.8) y aquellos puntos para los cuales  $z = 0$ , por lo tanto están sobre el Ecuador, serán llamados imágenes de los **puntos singulares en el infinito** del sistema (1.8).

Así, en nuestro sistema tenemos:

- a) Si  $uQ_2(u, v, z) - vP_2(u, v, z)$  no es divisible por  $z$ , los puntos singulares sobre el Ecuador son los puntos para los cuales se cumple

$$uQ_2(u, v, 0) - vP_2(u, v, 0) = 0, \quad u^2 + v^2 = 1, \quad z = 0 \quad (1.27)$$

- b) Si  $uQ_2(u, v, z) - vP_2(u, v, z)$  es divisible por  $z$ , los puntos singulares sobre el Ecuador son los puntos para los cuales se cumple

$$\begin{aligned} z^{-1}[uQ_2(u, v, z) - vP_2(u, v, z)]_{z=0} &= 0, \quad u^2 + v^2 = 1, \quad z = 0 \\ P_2(u, v, 0) &= 0, \quad Q_2(u, v, 0) = 0. \end{aligned} \quad (1.28)$$

Si un punto  $(u_0, v_0, 0)$ ,  $(u_0^2 + v_0^2 = 1)$  sobre el Ecuador no es singular para los sistemas (1.23), (1.24) la única solución del sistema que lo cruza es  $z = 0$ ; en efecto la matriz de (1.25) tiene rango 2 en el punto  $(u, v, 0)$  y por lo tanto (1.23) y (1.24) es reducible al sistema (1.26) para el cual el teorema de la unicidad es válido.

Si los puntos singulares sobre el Ecuador no lo cubren completamente, entonces ellos son finitos en número y son llamados **puntos singulares aislados**.

Sea  $P_0$  un punto singular aislado sobre el Ecuador. Entonces dos arcos de trayectorias del sistema (1.26) se encuentran en  $P_0$  y ellos son precisamente dos arcos del Ecuador. Del teorema de la unicidad mencionado se sigue que las trayectorias de (1.26) en una vecindad de  $P_0$  nunca podrían presentar las configuraciones de foco o centro. Por otro lado, podemos tener configuraciones de tipo nodal (nodo con una o dos tangentes o nodo estelar), punto silla o de otros tipos.

Para conocer el comportamiento de las trayectorias en la vecindad de un punto singular aislado  $P_0$  sobre el Ecuador es conveniente proyectar las trayectorias del sistema (1.26) de centro  $O$  de la esfera  $\Sigma$  sobre el plano  $\pi$  tangente a  $\Sigma$  en  $P_0$  y entonces analizar el comportamiento de esta proyección sobre  $\pi$  en la vecindad de  $P_0$ . Si es necesario, por rotación sobre el eje  $Z$ , podemos suponer que  $P_0$  coincide con  $(1,0,0)$  ó  $(0,1,0)$ .

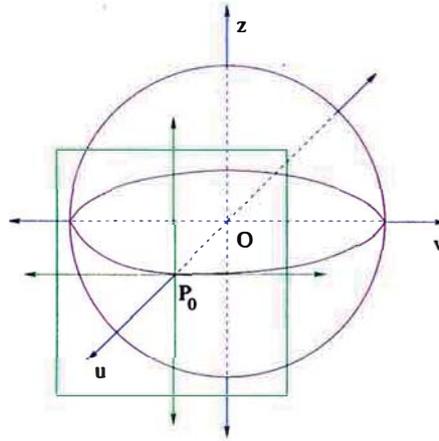


Figura 1.9: La Proyección Inversa

Asumimos primero que  $P_0 = (1, 0, 0)$  es el origen sobre el plano  $\pi$  de un nuevo sistema ortogonal de coordenadas  $\eta - \zeta$ , con ejes paralelos y en la misma orientación de los ejes  $v$  y  $z$ . Entonces tenemos

$$\eta = \frac{v}{u}, \quad \zeta = \frac{z}{u} \quad u^2 = (1 + \eta^2 + \zeta^2)^{-1} \quad (1.29)$$

además como se cumple que  $Au + Bv + Cz = 0$ , obtenemos

$$\frac{d\eta}{d\tau} = u^{-2}C(u, v, z) \quad (1.30)$$

$$\frac{d\zeta}{d\tau} = -u^{-2}B(u, v, z)$$

por consiguiente para estudiar el comportamiento de las trayectorias de (1.26) en la vecindad de (1,0,0) (y por el análisis anterior, el comportamiento de las trayectorias de (1.8) en la vecindad del punto en el infinito sobre el eje  $x$ ) es suficiente estudiar el comportamiento de la trayectoria de (1.30) en la vecindad del origen.

Análogamente, si  $P_0 = (0, 1, 0)$ , y asumimos en  $\pi$  un sistema ortogonal de coordenadas  $(\xi, \zeta)$ , con origen en  $P_0$  y con los ejes  $\xi$  y  $\zeta$  paralelos y con la misma orientación que los ejes  $u$  y  $z$ , tenemos

$$\xi = \frac{u}{v}, \quad \zeta = \frac{z}{v}, \quad v^2 = (1 + \xi^2 + \zeta^2)^{-1} \quad (1.31)$$

y en este caso será suficiente estudiar en una vecindad del origen del plano  $\xi$ - $\zeta$ , la vecindad de las trayectorias del sistema

$$\frac{d\xi}{d\tau} = -v^{-2}C(u, v, z) \quad (1.32)$$

$$\frac{d\zeta}{d\tau} = v^{-2}A(u, v, z)$$

Actualmente sólo es necesario proyectar el hemisferio con  $x > 0$  sobre el plano  $x = 1$  y proyectar el hemisferio con  $y > 0$  sobre el plano  $y = 1$  para determinar el comportamiento del flujo en una vecindad de un punto singular sobre Ecuador de  $S^2$ . Esto es porque el flujo sobre  $S^2$  definido por (1.8) en puntos antipodales de  $S^2$  son topológicamente equivalentes cuando  $m$  es impar y son topológicamente equivalentes con la dirección invertida del flujo cuando  $m$  es par ( $m$  denota el grado máximo de los términos en  $x$  e  $y$ ). Estos resultados son resumidos en el siguiente teorema.

**Teorema 1.6.1.** *El flujo definido por (1.8) en una vecindad de cualquier punto singular de (1.8) sobre el ecuador de la esfera de Poincaré  $S^2$ , excepto los puntos*

$(0, \pm 1, 0)$  es topológicamente equivalente al flujo definido por el sistema

$$\begin{aligned}\pm \dot{y} &= yz^m P\left(\frac{1}{z}, \frac{y}{z}\right) - z^m Q\left(\frac{1}{z}, \frac{y}{z}\right) \\ \pm \dot{z} &= z^{m+1} P\left(\frac{1}{z}, \frac{y}{z}\right)\end{aligned}\tag{1.33}$$

Similarmenete el flujo definido por (1.8) en una vecindad de cualquier punto singular de (1.8) sobre el ecuador, excepto los puntos  $(\pm 1, 0, 0)$  es topológicamente equivalente al flujo definido por el sistema

$$\begin{aligned}\pm \dot{x} &= xz^m Q\left(\frac{1}{z}, \frac{y}{z}\right) - z^m P\left(\frac{1}{z}, \frac{y}{z}\right) \\ \pm \dot{z} &= z^{m+1} Q\left(\frac{1}{z}, \frac{y}{z}\right)\end{aligned}\tag{1.34}$$

**Ejemplo 1.4.** Determine el flujo sobre la esfera de Poincaré  $S^2$  definido por el sistema plano

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x^2 + y^2 - 1 \\ \dot{y} &= 5(xy - 1)\end{aligned}$$

Este sistema es considerado originalmente por Poincaré. Puesto que la circunferencia unitaria y la hipérbola  $xy = 1$  no se intersectan, no hay puntos singulares finitos.

Los puntos singulares en el infinito son determinados por

$$xQ_2(x, y) - yP_2(x, y) = y(4x^2 - y^2) = 0, \quad x^2 + y^2 = 1$$

Esto es, los puntos singulares en el infinito son

$$P_1 = (1, 0, 0), P_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2, 0) \text{ y } P_3 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, -2, 0)$$

y sus respectivas antípodas  $P'_1, P'_2$  y  $P'_3$ . De acuerdo al teorema 1.6.1, el comportamiento cerca de cada singular  $P_i$  está determinado por el comportamiento del sistema

$$\begin{aligned}\dot{y} &= 4y - 5z^2 - y^3 + yz^2 \\ \dot{z} &= -z - zy^2 + z^3\end{aligned}$$

cerca del punto singular  $Q_1 = (0, 0)$ ,  $Q_2 = (2, 0)$  y  $Q_3 = (-2, 0)$  respectivamente.

Note que los puntos singulares en el infinito corresponden a puntos singulares sobre el eje  $y$ , los cuales son determinados haciendo  $z = 0$ .

Para el sistema anterior tenemos

$$Df(0, 0) = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad Df(\pm 2, 0) = \begin{bmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$$

Entonces de  $Q_1 = (0, 0)$  es un punto silla y  $Q_2 = (2, 0)$  y  $Q_3 = (-2, 0)$  son nodos (impropios) estables. Puesto que  $m = 2$  es par, en este ejemplo, el comportamiento cerca de los puntos antipodales  $P'_1, P'_2$  y  $P'_3$  es topológicamente equivalente al comportamiento cerca de  $P_1, P_2$  y  $P_3$  respectivamente con la dirección del flujo invertido, es decir  $P'_1$  es una silla y  $P'_2$  y  $P'_3$  son nodos (impropios) inestables. El diagrama de fase se muestra en la figura 1.10.

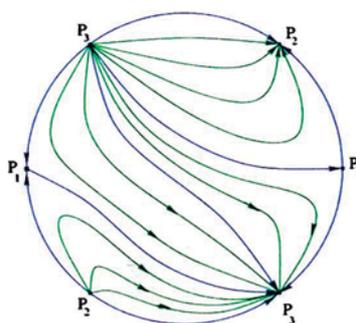


Figura 1.10: Sistema con 3 Puntos Singulares en el Infinito.

## 1.7. Teoría del Índice

En esta sección definimos el índice de un punto singular de un campo vectorial  $\mathbf{f}$  de clase  $C^1$  sobre  $\mathbb{R}^2$  o de un campo vectorial  $\mathbf{f}$  sobre una superficie bidimensional. Por una superficie bidimensional, queremos decir una variedad diferenciable, bidimensional compacta de clase  $C^2$ . Para un campo vectorial dado  $\mathbf{f}$  sobre una superficie bidimensional  $S$ , si  $\mathbf{f}$  tiene un número finito de puntos singulares  $p_1, \dots, p_m$ , el índice de la superficie  $S$  relativa al campo vectorial  $\mathbf{f}$ ,  $I_{\mathbf{f}}(S)$ , es definido como la suma de los índices de cada punto crítico  $p_1, \dots, p_m$  en  $S$ . Uno de los hechos más interesantes de la teoría de índices es que el índice de la superficie  $S$ ,  $I_{\mathbf{f}}(S)$  es independiente del campo vectorial  $\mathbf{f}$  y como veremos, sólo depende de la topología de la superficie  $S$ ; en particular,  $I_{\mathbf{f}}(S)$  es igual a la característica de Euler-Poincaré de la superficie  $S$ . Este resultado es el famoso teorema del índice de Poincaré.

Empezemos esta sección con la definición de Poincaré del índice de una curva  $C$  de Jordan (es decir, una curva  $C$  cerrada suave por partes) relativo a un campo vectorial  $\mathbf{f}$  de clase  $C^1$  sobre  $\mathbb{R}^2$ .

**Definición 1.7.1.** *El índice  $I_{\mathbf{f}}(C)$  de una curva de Jordan  $C$  relativo a un campo vectorial  $\mathbf{f} \in C^1(\mathbb{R}^2)$ , donde  $\mathbf{f}$  no tiene puntos singulares sobre  $C$ , es definido como el entero*

$$I_{\mathbf{f}}(C) = \frac{\Delta\Theta}{2\pi}$$

donde  $\Delta\Theta$  es el cambio total en el ángulo  $\Theta$  que el vector  $\mathbf{f} = (P, Q)^T$  hace con respecto al eje  $x$ , es decir,  $\Delta\Theta$  es el cambio en

$$\Delta\Theta(x, y) = \arctan \frac{Q(x, y)}{P(x, y)}$$

cuando el punto  $(x, y)$  atraviesa  $C$  exactamente una vez en la dirección positiva.

El índice  $I_f(C)$  puede ser calculado usando la fórmula

$$\begin{aligned} I_f C &= \frac{1}{2\pi} \oint_C d \arctan \frac{dy}{dx} \\ &= \frac{1}{2\pi} \oint_C d \arctan \frac{Q(x,y)}{P(x,y)} \\ &= \frac{1}{2\pi} \oint_C \frac{PdQ - QdP}{P^2 + Q^2} \end{aligned}$$

**Ejemplo 1.5.** Sea  $C$  el círculo de radio uno, centrado en el origen y calculemos el índice de  $C$  relativo a los campos vectoriales

$$\mathbf{g}(x) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \mathbf{h}(x) = \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{k}(x) = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$$

Estos campos vectoriales definen flujos teniendo nodos inestables, un centro y una silla en el origen respectivamente. El retrato de fase para los flujos generados por estos cuatro campos vectoriales son mostrados en la Fig.1.11. De acuerdo a la definición, tenemos

$$I_g C = 1 \quad I_h C = 1, \quad \text{y} \quad I_k C = -1$$

Estos índices pueden también ser calculados usando la fórmula mencionada.

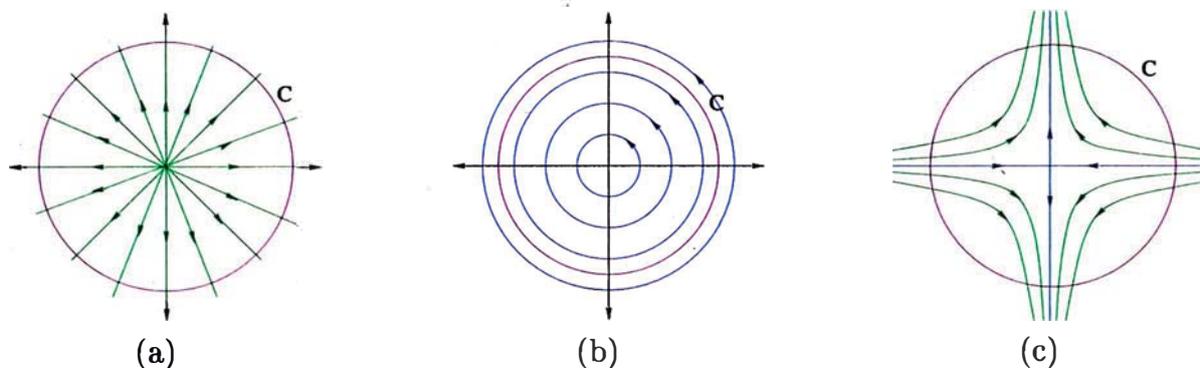


Figura 1.11: Los flujos definidos por los campos vectoriales del Ejemplo 1.5.

**Lema 1.1.** Si la curva de Jordan  $C$  es descompuesta en dos curvas de Jordan,  $C = C_1 + C_2$ , como en la figura 1.12, entonces

$$I_f C = I_f (C_1) + I_f (C_2)$$

con respecto de cualquier campo vectorial  $\mathbf{f}$  de clase  $C^1(\mathbb{R}^2)$ .

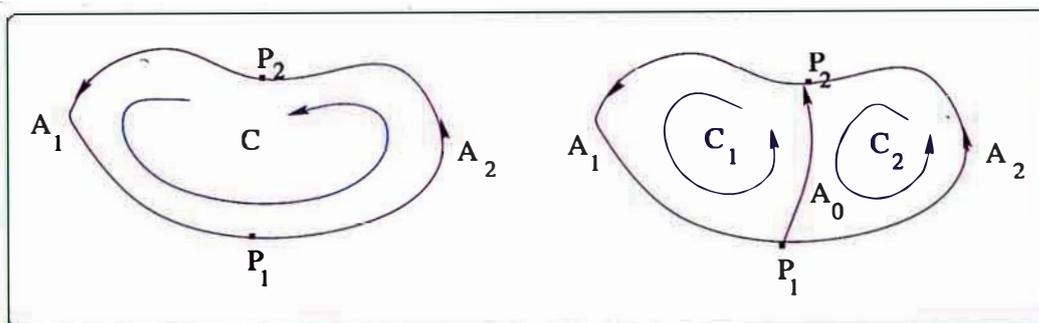


Figura 1.12: La descomposición de la curva de Jordan en  $C_1 + C_2$ .

**Prueba .**

Sean  $p_1$  y  $p_2$  dos puntos distintos sobre  $C$  el cual particiona  $C$  en dos arcos  $A_1$  y  $A_2$  como muestra la Fig. 1.12,  $A_0$  denota un arco en el interior de  $C$  de  $p_1$  a  $p_2$  y  $-A_0$  denota el arco de  $p_2$  a  $p_1$  en la dirección opuesta. Sea  $C_1 = A_1 + A_0$  y sea  $C_2 = A_2 - A_0$ , si  $\Delta\Theta|_A$  denota el cambio en el ángulo  $\Theta(x, y)$  definido por el vector  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ , como el punto  $\mathbf{x} = (x, y)^T$  se mueve a lo largo del arco  $A$  en una dirección bien definida, entonces  $\Delta\Theta|_{-A} = -\Delta\Theta|_A$  y

$$\begin{aligned} I_f C &= \frac{1}{2\pi} [\Delta\Theta|_{A_1} + \Delta\Theta|_{A_2}] \\ &= \frac{1}{2\pi} [\Delta\Theta|_{A_1} + \Delta\Theta|_{A_0} + \Delta\Theta|_{-A_0} + \Delta\Theta|_{A_2}] \\ &= \frac{1}{2\pi} [\Delta\Theta|_{A_1+A_0} + \Delta\Theta|_{A_2-A_0}] \\ &= \frac{1}{2\pi} [\Delta\Theta|_{C_1} + \Delta\Theta|_{C_2}] \end{aligned}$$

**Teorema 1.7.1.** *Supongamos que  $\mathbf{f} \in C^1(E)$  donde  $E$  es un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^2$  el cual contiene una curva de Jordan  $C$  y no hay puntos singulares de  $\mathbf{f}$  sobre  $C$  o en su interior. Entonces se cumple que  $I_{\mathbf{f}} C = 0$*

### Prueba

Puesto que  $\mathbf{f} = (P, Q)^T$  es continua sobre  $E$  y es uniformemente continua sobre cualquier subconjunto compacto de  $E$ , entonces, dado  $\epsilon = 1$ , existe un  $\delta > 0$  tal que sobre cualquier curva de Jordan  $C_\alpha$  el cual está contenido dentro de un cuadrado de lado  $\delta$  en  $E$ .

Tenemos  $0 \leq I_{\mathbf{f}}(C_\alpha) < \epsilon$ , entonces puesto que  $I_{\mathbf{f}}(C_\alpha)$  es un entero positivo, ello implica que  $I_{\mathbf{f}}(C_\alpha) = 0$  para cualquier curva de Jordan  $C_\alpha$  contenida dentro de un cuadrado de lado  $\delta$ .

Podemos cubrir el interior de  $C$ ,  $\text{Int } C$ , así como  $C$  con un cuadrado enrejado donde los cuadrados  $S_\alpha$  y la reja tiene lado de longitud  $\delta/2$ . Escojemos  $\delta > 0$  suficientemente pequeño que cualquier cuadrado  $S_\alpha$  con  $S_\alpha \cap \text{Int } C \neq \emptyset$  permanece completamente en  $E$  y que  $I_{\mathbf{f}}(C_\alpha) = 0$  donde  $C_\alpha$  es la frontera de  $S_\alpha \cap \text{Int } C$ .

Puesto que la clausura de  $\text{Int } C$  es un conjunto compacto, un número finito de los cuadrados  $S_\alpha$  cubren  $\overline{\text{Int } C}$ , digamos  $S_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, N$ . y por el lema 1.1, tenemos:

$$I_{\mathbf{f}}(C) = \sum I_{\mathbf{f}}(C_j) = 0$$

**Corolario 1.7.1.** *Bajo las hipótesis del Teorema 1.7.1, si  $C_1$  y  $C_2$  son curvas de Jordan contenidos en  $E$  con  $C_1 \subset C_2$  y si además no hay puntos singulares de  $\mathbf{f}$  en  $\text{Int } C_2 \cap \text{Ext } C_1$ , entonces  $I_{\mathbf{f}}(C_1) = I_{\mathbf{f}}(C_2)$ .*

**Definición 1.7.2.** *Sea  $\mathbf{f} \in C^1(E)$  donde  $E$  es un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^2$  y  $x_0 \in E$  es un punto singular aislado de  $\mathbf{f}$ . Sea  $C$  una curva de Jordan contenida en  $E$  y conteniendo a  $x_0$  y ningún punto singular de  $\mathbf{f}$  en su interior. Entonces el*

índice del punto singular  $x_0$  con respecto a  $f$

$$I_f(x_0) = I_f(C)$$

**Teorema 1.7.2.** *Supongamos que  $f \in C^1(E)$  donde  $E$  es un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^2$  conteniendo una curva de Jordan  $C$ . Entonces si hay sólo un número finito de puntos singulares,  $x_1, \dots, x_n$  de  $f$  en el interior de  $C$ , se cumple que*

$$I_f(C) = \sum_{i=1}^n I_f(x_i)$$

La demostración del teorema 1.7.2 y de los siguientes se pueden encontrar en Perko [7] páginas 297-305.

**Teorema 1.7.3.** *Suponga que  $f \in C^1(E)$  donde  $E$  es un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^2$  y que  $E$  contiene un ciclo  $\Gamma$  del sistema*

$$x' = f(x) \tag{1.35}$$

entonces se cumple que  $I_f(\Gamma) = 1$

**Observación 1.1.** *Para un ciclo separatriz  $S$  de (1.35) podemos tomar una sucesión de curvas de Jordan aproximándose a  $S$  y usando el hecho que sólo tenemos sectores hiperbólicos sobre su interior o exterior, podemos probar que  $I_f(C_n) = 1$ , para  $n$  suficientemente grande,  $I_f(S) = I_f(C_n)$  entonces  $I_f(S) = 1$ .*

**Corolario 1.7.2.** *Bajo las hipótesis del teorema 1.7.3,  $\Gamma$  contiene al menos un punto singular de (1.35). Asumiendo que hay sólo un número finito de puntos singulares de (1.35) sobre el interior de  $\Gamma$ , la suma de estos puntos críticos es igual a 1.*

El siguiente teorema muestra la relación entre el índice de un punto singular  $x_0$  de (1.35) con respecto al campo vectorial  $f$  y con respecto a su linealización  $Df(x_0)$  en  $x_0$ . Antes veamos el siguiente lema.

**Lema 1.2.** *Si  $v$  y  $w$  son dos campos vectoriales continuos definidas sobre una curva de Jordan  $C$ , los cuales nunca tienen dirección opuesta o son cero sobre  $C$ , entonces  $I_v(C) = I_w(C)$ .*

Consideremos a  $\mathbf{x} = (x, y)^T$  y

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = D\mathbf{f}(\mathbf{0})\mathbf{x} + \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1(x, y) \\ g_2(x, y) \end{bmatrix}$$

Decimos que  $\mathbf{0}$  es un punto singular no degenerado de (1.35) si  $\det D\mathbf{f}(\mathbf{0}) \neq 0$ , es decir si  $ad - bc \neq 0$  y decimos que  $|\mathbf{g}(\mathbf{x})| = o(r)$  cuando  $r \rightarrow 0$  si  $|\mathbf{g}(\mathbf{x})|/r \rightarrow 0$  cuando  $r \rightarrow 0$ .

**Teorema 1.7.4.** *Supongamos que  $\mathbf{f} \in C^1(E)$  donde  $E$  es un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^2$  conteniendo al origen. Si  $\mathbf{0}$  es un punto singular no degenerado de (1.35) y  $|\mathbf{g}(\mathbf{x})|/r \rightarrow 0$  cuando  $r \rightarrow 0$  entonces  $I_{\mathbf{f}}(\mathbf{0}) = I_v(\mathbf{0})$  donde  $v(\mathbf{x}) = D\mathbf{f}(\mathbf{0})\mathbf{x}$ , la linealización de  $\mathbf{f}$  en  $\mathbf{0}$ .*

Puesto que el índice de un campo vectorial es invariante bajo transformaciones lineales no singulares, el siguiente teorema es una consecuencia inmediata del teorema 1.7.4.

**Teorema 1.7.5.** *Bajo las hipótesis del teorema 1.7.4,  $I_{\mathbf{f}}(\mathbf{0})$  es  $-1$  o  $+1$  de acuerdo cuando el origen es o no una silla topológica para (1.35) o equivalente a cuando el origen es o no una silla para la linealización de (1.35) en el origen.*

De acuerdo al teorema 1.7.5, el índice de cualquier punto singular no degenerado de (1.35) es  $\pm 1$ . Qué podemos decir acerca del índice de un punto singular  $\mathbf{x}_0$  de (1.35) cuando  $\det D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = 0$ .

El siguiente teorema, dado por Bendixon, responde la pregunta para sistemas analíticos.

En el teorema 1.7.6,  $e$  denota el número de sectores elípticos y  $h$  denota el número de sectores hiperbólicos de denota el número de sectores elípticos de (1.35) en el origen. La prueba de este teorema puede ser encontrada en Andronov [1] página 511.

**Teorema 1.7.6. (Bendixson).** *Sea el origen un punto singular aislado del sistema analítico plano (1.35). Entonces*

$$I_f(0) = 1 + \left( \frac{e - h}{2} \right)$$

### Ejemplo 1.6

El índice de una silla nodo es cero.

El índice de un punto singular con dominio elíptico es 1.

El índice de una cúspide es 0.

Ahora veamos la teoría del índice para una superficie bidimensional. Por una **superficie bidimensional** entendemos a una variedad diferenciable, bidimensional, compacta de clase  $C^2$ .

Ahora definamos el índice de  $S$  con respecto al campo vectorial  $f$  sobre  $S$ . Supongamos que el campo  $f$  tiene sólo un número finito de puntos singulares sobre  $S$ :  $p_1, p_2, \dots, p_n$ .

**Definición 1.7.3.** *El índice de la superficie  $S$  con respecto al campo vectorial  $f$  sobre  $S$  es igual a la suma de índices en cada punto singular de  $S$ :*

$$I_f(S) = \sum_{i=1}^n I_f(p_i)$$

Luego veremos que el índice de una superficie  $S$  con respecto al campo vectorial  $\mathbf{f}$  sobre la superficie es independiente del campo vectorial  $\mathbf{f}$  y sólo depende de la topología de la superficie.

Usando el hecho que cualquier superficie bidimensional  $S$  puede ser descompuesta en un número finito triángulos curvilíneos. Esto es referido a la triangulación de  $S$ . Para una triangulación de  $S$ , sea  $v$  el número de vértices,  $l$  el número de bordes y  $T$  el número de triángulos en la triangulación.

La **característica de Euler-Poincaré** de  $S$  es definido como el entero

$$\chi(S) = T + v - l.$$

Se puede demostrar que  $\chi(S)$  es una invariante topológica el cual es independiente de la triangulación y está relacionada al genus de una superficie  $S$  por la fórmula

$$\chi(S) = 2(1 - p)$$

Para superficies orientables el genus  $p$  es igual al número de “asas” en la superficie.

Por ejemplo  $p = 0$  para la esfera bidimensional  $s^2$  y  $p = 1$  para el toro bidimensional  $T^2$ . Por tanto  $\chi(S^2) = 2$  y  $\chi(T^2) = 0$ .

La característica de Euler también se mantiene para superficies no orientables tales como el plano proyectivo  $P$  y la botella de Klein  $K$ . En este caso, el genus  $p = q/2$  donde la superficie no orientable es topológicamente equivalente a la esfera bidimensional con  $q$  asas a lo largo de cuya frontera los puntos antipodales son identificados.

Por ejemplo la característica del plano proyectivo  $\chi(P) = 1$  y la característica de la botella de Klein  $\chi(K) = 0$ .

**Teorema 1.7.7.** *(El Teorema del índice de Poincaré) El índice  $I_f(S)$  de una superficie bidimensional relativa a cualquier campo vectorial  $f \in C^1(S)$  el cual tiene a lo más un número finito de puntos singulares es independiente del campo vectorial y es igual a la característica de Euler-Poincaré; es decir*

$$I_f(S) = \chi(S)$$

Este teorema trae como consecuencia directa que el índice del plano proyectivo respecto a cualquier campo vectorial  $f$  es igual a 1

$$I_f(P) = 1$$

## 1.8. Estabilidad Estructural

Sea el sistema plano (1.8) (en esta sección será llamado (I))

$$\begin{aligned} \dot{x} &= P(x, y) \\ \dot{y} &= Q(x, y) \end{aligned} \tag{I}$$

definido en una región  $D$  del plano  $x - y$ , sea  $P, Q \in C^1$  (es decir continuamente diferenciable) y sea la frontera de  $D$  una curva cerrada simple sin puntos de contacto con respecto a (I). Por definición, podemos asumir que las trayectorias de (I) cruzando la frontera de  $D$  lo hace de afuera hacia adentro. Todos los sistemas cuyos campos  $(P, Q)$  satisfacen estas condiciones forman un conjunto  $\mathcal{X}$ . Ahora en  $\mathcal{X}$  introducimos una métrica  $\rho$  como sigue:

Sea otro sistema en  $\mathcal{X}$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= P(x, y) + p(x, y) \\ \dot{y} &= Q(x, y) + q(x, y) \end{aligned} \tag{II}$$

Entonces definimos la distancia entre (I) y (II) en  $X$  como sigue

$$\rho(I, II) = \max_D \left( |p| + |q| + \left| \frac{\partial p}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial p}{\partial y} \right| + \left| \frac{\partial q}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial q}{\partial y} \right| \right)$$

Podemos probar que, bajo tal definición de métrica,  $X$  viene a ser un espacio de Banach.

**Definición 1.8.1.** *Si existe un  $\delta > 0$  tal que hay un mapeo topológico de  $B$  en si mismo el cual lleva trayectorias de (I) en trayectorias de (II) de tal manera que  $\rho(I, II) < \delta$ , entonces diremos que el sistema (I) es un **sistema estructuralmente estable** y al sistema (II) un **sistema perturbado permisible de (I)**; y  $p$  y  $q$  son llamados **perturbaciones**.*

Denotemos con  $\Sigma_n$  el conjunto de los sistemas polinomiales de grado no mayor que  $n$  estructuralmente estables en  $X$  y sea  $X_s$  el conjunto de todos los sistemas que satisfacen las 3 siguientes condiciones:

1. Hay sólo un número finito de puntos singulares en el interior de  $\overline{H}$  (hemisferio incluyendo el Ecuador,  $E$ ) y sobre  $E$ ; todos ellos son puntos singulares hiperbólicos.
2. En el interior de  $\overline{H}$  hay sólo un número finito de trayectorias cerradas;  $E$  también puede considerarse una trayectoria cerrada cuando no tiene ningún punto singular.
3. No hay trayectorias que conectan dos puntos sillas, excepto, quizás sobre  $E$ .

Enunciaremos dos teorema cuyas demostraciones se pueden encontrar en Ye [11] Pag. 175-189.

**Teorema 1.8.1.**  $X_s$  es un subconjunto abierto y denso de  $\mathcal{X}$ .

**Teorema 1.8.2.** Una condición necesaria y suficiente para que un sistema  $\alpha$  pertenesca a  $X_s$  es que  $\alpha$  pertenesca a  $\Sigma_n$ .

## 2 CLASIFICACIÓN TOPOLÓGICA GLOBAL DE SISTEMAS CUADRÁTICOS HOMOGÉNEOS

En este capítulo vamos a clasificar a los sistemas homogéneos de grado dos. Los sistemas de este tipo no presentan singularidades de tipo nodo estelar, foco ni centro, como vimos en la sección 1.4; es decir si la singularidad es simple sólo pueden ser de tipo silla (para la cual consideraremos que el determinante de la matriz de linealización es negativa) o de tipo nodal (nodo de una o dos tangentes)(donde el determinante de la matriz de linealización es positivo).

Para ello consideremos el sistema cuadrático homogéneo

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{22}y^2 \\ \frac{dy}{dt} &= b_{11}x^2 + b_{12}xy + b_{22}y^2\end{aligned}\tag{2.1}$$

En este capítulo introduciremos todas las posibles estructuras para el sistema (2.1) teniendo en cuenta si el segundo miembro de (2.1) tiene o no factor común; que de ahora en adelante diremos simplemente con o sin factor común.

### 2.1. El sistema no tiene factor común

Si suponemos que el segundo miembro de (2.1) no tiene factor común, tenemos que el único punto singular es el origen, éste es un punto singular aislado.

Empezaremos haciendo un trabajo preparatorio utilizando la teoría cualitativa :

Sabemos que el sistema (2.1) tiene dirección excepcional  $\theta = \theta_0$ , ella debe satisfacer la ecuación ( 1.13 )

$$N(\theta) = Q_2(\cos \theta, \text{sen } \theta) \cos \theta - P_2(\cos \theta, \text{sen } \theta) \text{sen } \theta = 0$$

con  $P_2(x, y) = a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{22}y^2$  y  $Q_2(x, y) = b_{11}x^2 + b_{12}xy + b_{22}y^2$  obteniendo

$$N(\theta) = -a_{22} \text{sen}^3 \theta + (b_{22} - a_{12}) \text{sen}^2 \theta \cos \theta + (b_{12} - a_{11}) \text{sen } \theta \cos^2 \theta + b_{11} \cos^3 \theta = 0 \quad (2.2)$$

note que si  $\theta_0$  es una raíz de  $N(\theta)$  entonces  $\theta_0 + \pi$  también es raíz de  $N(\theta)$ , este resultado lo consideraremos en forma implícita.

Puesto que  $N$  es de tercer grado, admite al menos una raíz  $\theta = \theta_0$  ( $\theta = \theta_0 + \pi$ ); sin pérdida de generalidad podemos asumir que  $\theta_0$  es cero ( $\theta_0 = \pi$ ); reemplazando en (2.2) obtenemos  $b_{11} = 0$ , el nuevo valor de  $N(\theta)$  es

$$N(\theta) = \text{sen } \theta [-a_{22} \text{sen}^2 \theta + (b_{22} - a_{12}) \text{sen } \theta \cos \theta + (b_{12} - a_{11}) \cos^2 \theta] \quad (2.3)$$

el discriminante del factor cuadrático es igual a

$$\Delta = (b_{22} - a_{12})^2 + 4a_{22}(b_{12} - a_{11}) \quad (2.4)$$

Reemplazando el valor de  $b_{11} = 0$  en el sistema inicial (2.1), éste se reduce a

$$\frac{dx}{dt} = a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{22}y^2 \quad (2.5)$$

$$\frac{dy}{dt} = b_{12}xy + b_{22}y^2$$

De otro lado introducimos coordenadas polares a (2.5) obteniendo

$$\frac{dr}{rd\theta} = \frac{a_{11} \cos^3 \theta + a_{12} \cos^2 \theta \sen \theta + (b_{12} + a_{22}) \cos \theta \sen^2 \theta + b_{22} \sen^3 \theta}{(b_{12} - a_{11}) \cos^2 \theta \sen \theta + (b_{22} - a_{12}) \cos \theta \sen^2 \theta - a_{22} \sen^3 \theta}$$

note que el denominador es  $N(\theta)$  y  $Z(\theta)$  es el numerador, ambos definidos en la subsección 1.4.1.

$$Z(\theta) = a_{11} \cos^3 \theta + a_{12} \cos^2 \theta \sen \theta + (b_{12} + a_{22}) \cos \theta \sen^2 \theta + b_{22} \sen^3 \theta \quad (2.6)$$

obteniendo

$$\frac{dr}{rd\theta} = \frac{Z}{N}(\theta)$$

integrando la última igualdad obtenemos

$$\int_{r_1}^r \frac{dr}{r} = \int_{\theta_1}^{\theta} \frac{Z}{N}(\theta) d\theta$$

de ahí que

$$r = r_1 \exp \left( \int_{\theta_1}^{\theta} \frac{Z}{N}(\theta) d\theta \right) \quad \text{con } r_1 \neq 0 \text{ y } N(\theta_1) \neq 0 \quad (2.7)$$

de otro lado, para hallar los puntos singulares en el infinito utilizamos las ecuaciones (1.21) y (1.27)

$$u Q_2(u, v, 0) - v P_2(u, v, 0) = 0, \quad u^2 + v^2 = 1, \quad z = 0$$

con

$$P \left( \frac{u}{z}, \frac{v}{z} \right) = \frac{a_{11} u^2 + a_{12} uv + a_{22} v^2}{z^2} = \frac{P_2(u, v, z)}{z^2}$$

$$Q \left( \frac{u}{z}, \frac{v}{z} \right) = \frac{b_{12} uv + b_{22} v^2}{z^2} = \frac{Q_2(u, v, z)}{z^2}$$

resolviendo tenemos la ecuación

$$v[(b_{12} - a_{11})u^2 + (b_{22} - a_{12})uv - a_{22}v^2] = 0, \quad u^2 + v^2 = 1, \quad z = 0 \quad (2.8)$$

la cual nos permite encontrar todos los puntos singulares en el infinito del sistema (2.5); observe que el discriminante del factor cuadrático es  $\Delta = (b_{22} - a_{12})^2 + 4a_{22}(b_{12} - a_{11})$  el cual es igual al factor cuadrático de  $N(\theta)$  dado en (2.4).

Para conocer el comportamiento de las trayectorias en el infinito cerca del punto singular en el infinito de la forma  $(1, \eta, \zeta) = (1, \eta, 0)$  utilizamos (1.29) y (1.30).

$$\eta = \frac{v}{u}, \quad \zeta = \frac{z}{u} \quad u^2 = (1 + \eta^2 + \zeta^2)^{-1}$$

$$\frac{d\eta}{d\tau} = u^{-2}C(u, v, z)$$

$$\frac{d\zeta}{d\tau} = -u^{-2}B(u, v, z)$$

donde  $B = zP_2(u, v, z)$  y  $C = uQ_2(u, v, z) - vP_2(u, v, z)$ .

Reemplazando estos valores obtenemos el sistema

$$\frac{d\eta}{d\tau} = u\eta[b_{12} - a_{11} + (b_{22} - a_{12})\eta - a_{22}\eta^2]$$

$$\frac{d\zeta}{d\tau} = -u\zeta[a_{11} + a_{12}\eta + a_{22}\eta^2]$$

puesto que  $u > 0$  y por lo visto en la sección 1.1.3, tiene trayectorias coincidentes con las del sistema

$$\frac{d\eta}{d\tau} = \eta[b_{12} - a_{11} + (b_{22} - a_{12})\eta - a_{22}\eta^2] \tag{2.9}$$

$$\frac{d\zeta}{d\tau} = -\zeta[a_{11} + a_{12}\eta + a_{22}\eta^2]$$

la matriz de linealización del sistema (2.9) en  $(1, \eta, \zeta)$  es

$$A(\eta, \zeta) = \begin{bmatrix} (b_{12} - a_{11}) + 2(b_{22} - a_{12})\eta - 3a_{22}\eta^2 & 0 \\ -\zeta(a_{12} + 2a_{22}\eta) & -(a_{11} + a_{12}\eta + a_{22}\eta^2) \end{bmatrix} \tag{2.10}$$

puesto que el producto de las raíces  $\lambda_1 \lambda_2$  de la ecuación característica de  $A(\eta, \zeta)$  es igual a su determinante, tenemos

$$\lambda_1 \lambda_2 = - [(b_{12} - a_{11}) + 2(b_{22} - a_{12})\eta - 3a_{22}\eta^2] (a_{11} + a_{12}\eta + a_{22}\eta^2) \quad (2.11)$$

De la misma manera la utilizamos las ecuaciones (1.31) y (1.32) para conocer el comportamiento de las trayectorias cerca de los puntos singulares en el infinito de la forma  $(\xi, 1, \zeta) = (\xi, 1, 0)$ .

$$\xi = \frac{u}{v}, \quad \zeta = \frac{z}{v} \quad v^2 = (1 + \eta^2 + \zeta^2)^{-1}$$

$$\frac{d\xi}{d\tau} = -v^{-2}C(u, v, z)$$

$$\frac{d\zeta}{d\tau} = v^{-2}A(u, v, z)$$

donde  $A = -zQ_2(u, v, z)$  y  $C = uQ_2(u, v, z) - vP_2(u, v, z)$ .

Reemplazando estos valores obtenemos el sistema

$$\frac{d\xi}{d\tau} = -v[(b_{12} - a_{11})\xi^2 + (b_{22} - a_{12})\xi - a_{22}]$$

$$\frac{d\zeta}{d\tau} = -v\zeta(b_{12}\xi + b_{22})$$

como en el caso anterior, este sistema tiene trayectorias coincidentes (a excepción de la dirección) con el sistema

$$\frac{d\xi}{d\tau} = -a_{22} + (b_{22} - a_{12})\xi + (b_{12} - a_{11})\xi^2 \quad (2.12)$$

$$\frac{d\zeta}{d\tau} = \zeta(b_{22} + b_{12}\xi)$$

La matriz de linealización del sistema (2.12) en  $(\xi, 1, \zeta)$  es

$$A(\xi, \zeta) = \begin{bmatrix} b_{22} - a_{12} + 2(b_{12} - a_{11})\xi & 0 \\ b_{12}\zeta & b_{22} + b_{12}\xi \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

luego es sencillo determinar el producto de las raíces  $\lambda_1\lambda_2$  de la ecuación característica de  $A(\xi, \zeta)$  en el punto singular en el infinito de la forma  $(\xi, 1, \zeta)$

$$\lambda_1\lambda_2 = [b_{22} - a_{12} + 2(b_{12} - a_{11})\xi][b_{22} + b_{12}\xi] \quad (2.14)$$

Ahora podemos empezar con nuestro análisis:

**Teorema 2.1.1.** *Dado el sistema (2.5) sin factor común, con  $\Delta = (b_{22} - a_{12})^2 + 4a_{22}(b_{12} - a_{11}) < 0$ . Sea  $A = a_{11}(b_{12} - a_{11})$ , entonces si  $A > 0$  el diagrama de fase global es como se muestra en la figura 2.2(a) y si  $A < 0$  el diagrama de fase global es como se muestra en la figura 2.2(b).*

### Prueba

Tenemos el sistema (2.5)

$$\frac{dx}{dt} = a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{22}y^2$$

$$\frac{dy}{dt} = b_{12}xy + b_{22}y^2$$

observe que  $a_{11} \neq 0$ , pues de lo contrario tendría factor común, además el sistema tiene una línea integral  $y = 0$ , por lo tanto no tiene ciclos límites.

Puesto que  $\Delta = (b_{22} - a_{12})^2 + 4a_{22}(b_{12} - a_{11}) < 0$  trae como consecuencia que  $a_{22}(b_{12} - a_{11}) < 0$  y en particular que  $b_{12} - a_{11} \neq 0$ ; como  $a_{11} \neq 0$  entonces  $A = a_{11}(b_{12} - a_{11}) \neq 0$ .

De la ecuación (2.3) tenemos que  $N(\theta)$  tiene una sola raíz  $\theta_0 = 0$  ( $\theta_0 = \pi$ ), esto significa que nuestro sistema tiene un par de direcciones excepcionales.

Expandimos  $N(\theta)$  y  $Z(\theta)$  en series de potencias de  $\theta$ , en una vecindad de cero, de las ecuaciones (2.3) y (2.6) tenemos

$$\begin{aligned} N(\theta) &= \operatorname{sen} \theta [-a_{22} \operatorname{sen}^2 \theta + (b_{22} - a_{12}) \operatorname{sen} \theta \cos \theta + (b_{12} - a_{11}) \cos^2 \theta] \\ &= (b_{12} - a_{11}) \theta + (b_{22} - a_{12}) \theta^2 - a_{22} \theta^3 + \dots \\ Z(\theta) &= a_{11} \cos^3 \theta + a_{12} \cos^2 \theta \operatorname{sen} \theta + (b_{12} + a_{22}) \cos \theta \operatorname{sen}^2 \theta + b_{22} \operatorname{sen}^3 \theta \\ &= a_{11} + a_{12} \theta + (b_{12} + a_{22}) \theta^2 + b_{22} \theta^3 + \dots \end{aligned}$$

puesto que  $a_{11} \neq 0$  y  $b_{12} - a_{11} \neq 0$ , obtenemos

$$\frac{Z}{N}(\theta) = \frac{Z(\theta)}{N(\theta)} = \frac{a_{11}}{(b_{12} - a_{11}) \theta} [1 + \dots]$$

De la ecuación (2.7) tenemos

$$r = r_1 \exp \left( \int_{\theta_1}^{\theta} \frac{Z}{N}(\theta) d\theta \right) \cong r_1 \exp \left( \int_{\theta_1}^{\theta} \frac{a_{11}}{(b_{12} - a_{11}) \theta} d\theta \right) = r_1 \theta^{\frac{a_{11}}{b_{12} - a_{11}}}$$

esta relación nos permite conocer el comportamiento de las trayectorias cerca de la dirección excepcional  $\theta_0 = 0$  ( $\theta_0 = \pi$ ). Tenemos dos casos:

- 1.) Si  $A = a_{11}(b_{12} - a_{11}) > 0$  entonces  $\lim_{\theta \rightarrow 0} r = \infty$ . En este caso  $\theta_0 = 0$  es un **rayo llamado tipo nodal**
- 2.) Si  $A < 0$  entonces  $\lim_{\theta \rightarrow 0} r = 0$ . En este caso  $\theta_0 = 0$  es un **rayo llamado tipo aislado**

Puesto que  $\frac{Z}{N}(\theta + \pi) = \frac{Z}{N}(\theta)$ , respecto a  $r$ , todos resultados en  $\theta$  también son válidos para  $\theta + \pi$ .

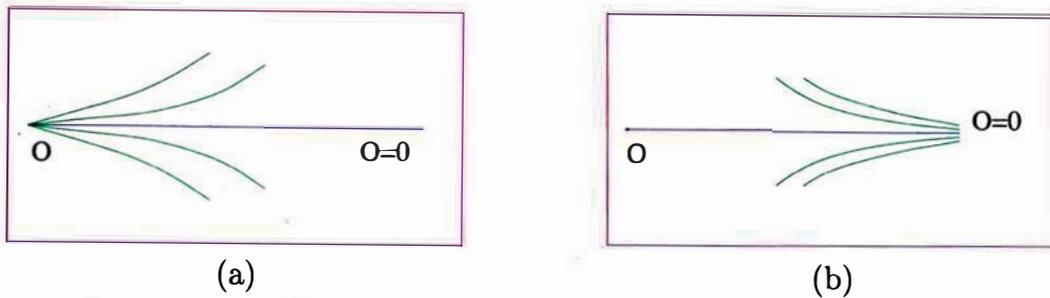


Figura 2.1: Rayos de Tipo Nodal (a) y de Tipo Aislado (b).

Los puntos singulares en el infinito son dados por las raíces de la ecuación (2.8)

$$v[(b_{12} - a_{11})u^2 + (b_{22} - a_{12})uv - a_{22}v^2] = 0, \quad u^2 + v^2 = 1, \quad z = 0$$

desde que  $\Delta < 0$  el punto singular en el infinito es único e igual  $P = (1, 0, 0)$ . Por la ecuación (2.11) el producto de las raíces características en  $P = (1, 0, 0)$  es  $\lambda_1 \lambda_2 = -a_{11}(b_{12} - a_{11}) = -A \neq 0$ ; con lo cual obtenemos

- 1.) Si  $A > 0$  entonces  $P = (1, 0, 0)$  es un punto tipo silla.
- 2.) Si  $A < 0$  entonces  $P = (1, 0, 0)$  es un punto tipo nodal.

Si  $A > 0$  entonces el diagrama de fase es como muestra la figura 2.2(a); pero si  $A < 0$  entonces el diagrama de fase es como muestra la figura 2.2(b).♦

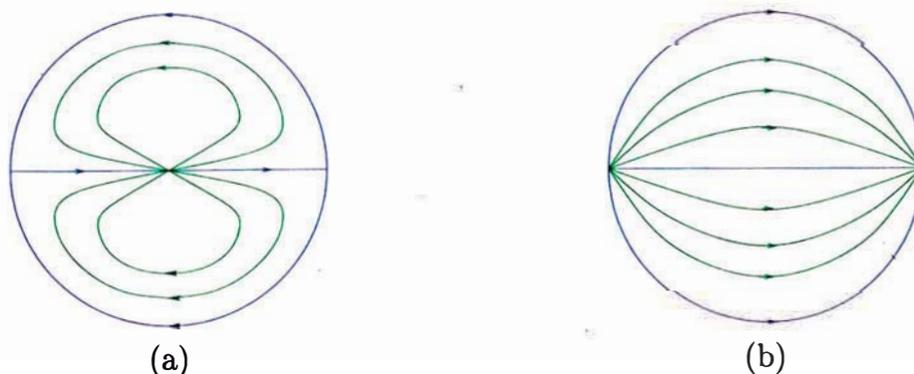


Figura 2.2: Sistemas con una Dirección Excepcional

**Teorema 2.1.2.** *Sea el sistema (2.5) sin factor común. Si  $b_{22} - a_{12} = b_{12} - a_{11} = 0$  entonces cuando  $a_{11}a_{22} > 0$  el diagrama de fase global es como la figura 2.2(b), pero si  $a_{11}a_{22} < 0$  el diagrama de fase global es como la figura 2.2(a).*

### Prueba

Con las condiciones dadas, el sistema (2.5) se puede escribir como

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{22}y^2 \\ \frac{dy}{dt} &= y(a_{11}x + a_{12}y)\end{aligned}\tag{2.15}$$

note que para que no exista factor común se debe cumplir que  $a_{11} \cdot a_{22} \neq 0$ ; además  $y = 0$  es una línea integral.

De la ecuación (2.3), el nuevo valor de  $N(\theta)$  es

$$N(\theta) = -a_{22}\text{sen}^3\theta$$

$N(\theta)$  tiene una única raíz  $\theta_0 = 0$  ( $\theta_0 = \pi$ ) triple. Esto significa que nuestro sistema tiene un par de direcciones excepcionales.

Expandimos  $N(\theta)$  y  $Z(\theta)$  en series de potencias de  $\theta$  en una vecindad de cero, de la ecuación (2.6) tenemos

$$\begin{aligned}N(\theta) &= -a_{22} \text{sen}^3 \theta \\ &= -a_{22}\theta^3 + \dots \\ Z(\theta) &= a_{11} \cos^3 \theta + a_{12} \cos^2 \theta \text{sen} \theta + (b_{12} + a_{22}) \cos \theta \text{sen}^2 \theta + b_{22} \text{sen}^3 \theta \\ &= a_{11} + a_{12}\theta + (b_{12} + a_{22})\theta^2 + b_{22}\theta^3 + \dots\end{aligned}$$

puesto que  $a_{11} \cdot a_{22} \neq 0$ , obtenemos

$$\frac{Z}{N}(\theta) = \frac{Z(\theta)}{N(\theta)} = \frac{a_{11}}{-a_{22}\theta^3} [1 + \dots]$$

De la ecuación (2.7) tenemos

$$r = r_1 \exp \left( \int_{\theta_1}^{\theta} \frac{Z}{N}(\theta) d\theta \right) \cong r_1 \exp \left( \int_{\theta_1}^{\theta} -\frac{a_{11}}{a_{22}\theta^3} d\theta \right) = r_1 \exp \left( \frac{a_{11}}{2a_{22}\theta^2} \right)$$

De estos resultados podemos conocer el comportamiento de las trayectorias del sistema cerca de la dirección excepcional  $\theta_0 = 0$  ( $\theta_0 = \pi$ ). Por lo tanto tenemos:

- 1.) Si  $a_{11}a_{22} > 0$  entonces  $\lim_{\theta \rightarrow 0} r = \infty$ . En este caso  $\theta_0 = 0$  ( $\theta_0 = \pi$ ) es un rayo tipo aislado.
- 2.) Si  $a_{11}a_{22} < 0$  entonces  $\lim_{\theta \rightarrow 0} r = 0$ . En este caso  $\theta_0 = 0$  ( $\theta_0 = \pi$ ) es un rayo tipo nodal.

Los puntos singulares en el infinito son hallados en la ecuación (2.8), que en nuestro caso es

$$a_{22}v^3 = 0, \quad u^2 + v^2 = 1, \quad z = 0$$

el único punto es  $P = (1, 0, 0)$ . Por la ecuación (2.11) sabemos que el producto de las raíces características en  $P = (1, 0, 0)$  es  $\lambda_1\lambda_2 = 0$ ; veamos que sucede en  $P = (1, 0, 0)$ .

Para ello estudiemos el sistema (2.9), el cual en nuestro caso es

$$\frac{d\eta}{d\tau} = -a_{22}\eta^3$$

$$\frac{d\zeta}{d\tau} = -\zeta[a_{11} + a_{12}\eta + a_{22}\eta^2]$$

la matriz de linealización en  $(0, 0)$  es

$$A(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -a_{11} \end{bmatrix}$$

el determinante de  $A$  es cero pero su traza es diferente de cero, para aplicar el teorema 1.5.1, llevamos el sistema a su forma estandar

$$\frac{d\eta}{d\tau} = \frac{a_{22}}{a_{11}}\eta^3$$

$$\frac{d\zeta}{d\tau} = \zeta \left[ 1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}\eta + \frac{a_{22}}{a_{11}}\eta^2 \right]$$

por el teorema 1.5.1, obtenemos dos casos

- 1.) Si  $a_{11}a_{22} > 0$  entonces  $P(1, 0, 0)$  es de tipo nodal.
- 2.) Si  $a_{11}a_{22} < 0$  entonces  $P(1, 0, 0)$  es tipo silla.

Los diagramas de fase son como muestra la figura 2.2.♦

**Teorema 2.1.3.** *Sea el sistema (2.5) sin factor común. Sea  $B = b_{22}(a_{12} - b_{22})$ , si  $a_{22} = 0$  y  $b_{12} = a_{11}$  entonces cuando  $B > 0$ , el diagrama de fase global es como se muestra en la figura 2.4(a) y si por el contrario  $B < 0$ , el diagrama de fase global es como se muestra en la figura 2.4(b).*

### Prueba

Con las condiciones dadas el sistema (2.5) se convierte en

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x(a_{11}x + a_{12}y) \\ \frac{dy}{dt} &= y(a_{11}x + b_{22}y) \end{aligned} \tag{2.16}$$

notamos que  $a_{11} \cdot b_{22} \neq 0$  y  $a_{12} \neq b_{22}$ , de lo contrario el sistema tendría factor común, luego  $B = b_{22}(a_{12} - b_{22}) \neq 0$ ; además el sistema tiene dos líneas integrales  $x = 0$  e  $y = 0$ .

De la ecuación (2.3) el nuevo valor de  $N(\theta)$  es

$$N(\theta) = (b_{22} - a_{12}) \text{sen}^2 \theta \cos \theta$$

el cual tiene dos raíces  $\theta_0 = 0$  ( $\theta_0 = \pi$ )  $\theta_1 = \pi/2$  ( $\theta_0 = 3\pi/2$ ), esto significa que el sistema posee dos pares de direcciones excepcionales.

Expandimos  $N(\theta)$  y  $Z(\theta)$  en series de potencias de  $\theta$  en una vecindad de cero, de la ecuación (2.6) tenemos:

$$\begin{aligned} N(\theta) &= (b_{22} - a_{12}) \text{sen}^2 \theta \cos \theta \\ &= (b_{22} - a_{12})\theta^2 + \dots \\ Z(\theta) &= a_{11} \cos^3 \theta + a_{12} \cos^2 \theta \text{sen} \theta + (b_{12} + a_{22}) \cos \theta \text{sen}^2 \theta + b_{22} \text{sen}^3 \theta \\ &= a_{11} \cos^3 \theta + a_{12} \cos^2 \theta \text{sen} \theta + b_{12} \cos \theta \text{sen}^2 \theta + b_{22} \text{sen}^3 \theta \\ &= a_{11} + a_{12}\theta + b_{12}\theta^2 + b_{22}\theta^3 + \dots \end{aligned}$$

puesto que  $a_{11} \neq 0$  y  $b_{22} \neq a_{12}$ , obtenemos

$$\frac{Z}{N}(\theta) = \frac{Z(\theta)}{N(\theta)} = \frac{a_{11}}{(b_{22} - a_{12})\theta^2} [1 + \dots]$$

De la ecuación (2.7) tenemos

$$r = r_1 \exp \left( \int_{\theta_1}^{\theta} \frac{Z}{N}(\theta) d\theta \right) \cong r_1 \exp \left( \int_{\theta_1}^{\theta} \frac{a_{11}}{(b_{22} - a_{12})\theta^2} d\theta \right) = r_1 \exp \left( -\frac{a_{11}}{(b_{22} - a_{12})\theta} \right)$$

Ahora podemos conocer el comportamiento de las trayectorias cerca de la dirección excepcional  $\theta_0 = 0$  ( $\theta_0 = \pi$ ). Por lo tanto tenemos:

1.) Si  $a_{11}(a_{12} - b_{22}) > 0$  entonces  $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} r = \infty$  y  $\lim_{\theta \rightarrow 0^-} r = 0$

Por esto decimos que  $\theta_0 = 0$  es llamado **rayo alterado de primera clase**.

2.) Si  $a_{11}(a_{12} - b_{22}) < 0$  entonces  $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} r = 0$  y  $\lim_{\theta \rightarrow 0^-} r = \infty$

Por esto decimos que  $\theta_0 = 0$  es llamado **rayo alterado de segunda clase**.

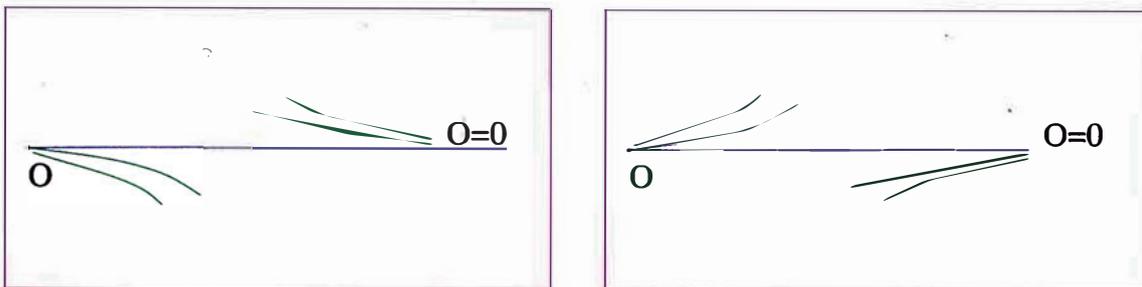


Figura 2.3: Rayo Alterado de Primera y Segunda Clase

Expandimos  $N(\theta)$  y  $Z(\theta)$  en series de potencias de  $\theta$  en una vecindad de  $\pi/2$ , de la ecuación (2.6) tenemos:

$$\begin{aligned}
 N(\theta) &= (b_{22} - a_{12}) \operatorname{sen}^2 \theta \cos \theta \\
 &= -(b_{22} - a_{12}) \cos^2(\theta - \pi/2) \operatorname{sen}(\theta - \pi/2) \\
 &= -(b_{22} - a_{12})(\theta - \pi/2) + \dots \\
 Z(\theta) &= a_{11} \cos^3 \theta + a_{12} \cos^2 \theta \operatorname{sen} \theta + b_{12} \cos \theta \operatorname{sen}^2 \theta + b_{22} \operatorname{sen}^3 \theta \\
 &= b_{22} \cos^3(\theta - \pi/2) - b_{12} \operatorname{sen}(\theta - \pi/2) \cos^2(\theta - \pi/2) \\
 &\quad + a_{12} \operatorname{sen}^2(\theta - \pi/2) \cos(\theta - \pi/2) - a_{11} \operatorname{sen}^3(\theta - \pi/2) \\
 &= b_{22} - b_{12}(\theta - \pi/2) + a_{12}(\theta - \pi/2)^2 - a_{11}(\theta - \pi/2)^3 + \dots
 \end{aligned}$$

puesto que  $B = b_{22}(a_{12} - b_{22}) \neq 0$  tenemos

$$\frac{Z}{N}(\theta) = \frac{Z(\theta)}{N(\theta)} = -\frac{b_{22}}{(b_{22} - a_{12})(\theta - \pi/2)} [1 + \dots]$$

De la ecuación (2.7) tenemos que

$$\begin{aligned} r &= r_1 \exp \left( \int_{\theta_1}^{\theta} \frac{Z}{N}(\theta) d\theta \right) \cong r_1 \exp \left( \int_{\theta_1}^{\theta} \frac{b_{22}}{(a_{12} - b_{22})(\theta - \pi/2)} d\theta \right) \\ &= r_1 (\theta - \pi/2)^{\left( \frac{b_{22}}{a_{12} - b_{22}} \right)} \end{aligned}$$

Tenemos los siguientes casos:

- 1.) Si  $B = b_{22}(a_{12} - b_{22}) > 0$  entonces  $\lim_{\theta \rightarrow \pi/2} r = 0$ , luego  $\theta = \pi/2$  es un rayo tipo nodal.
- 2.) Si  $B < 0$  entonces  $\lim_{\theta \rightarrow \pi/2} r = \infty$ , luego  $\theta = \pi/2$  es un rayo tipo aislado.

De otro lado de la ecuación (2.8) tenemos que hay dos puntos singulares en el infinito  $P_0 = (1, 0, 0)$  y  $P_1 = (0, 1, 0)$ .

Por la ecuación (2.11), el producto de las raíces características en  $P_0$  es  $\lambda_1 \lambda_2 = 0$ ; veamos que ocurre en  $P_0 = (1, 0, 0)$ . Usamos el resultado (2.9) con lo cual obtenemos

$$\frac{d\eta}{d\tau} = (b_{22} - a_{12})\eta^2$$

$$\frac{d\zeta}{d\tau} = -(a_{11} + a_{12}\eta)\zeta$$

la matriz de linealización en  $P_0$  es

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -a_{11} \end{bmatrix}$$

la cual tiene determinante nula, pero traza igual a  $-a_{11} \neq 0$ ; por el teorema 1.5.1 sabemos que  $P_0 = (1, 0, 0)$  es un punto semisilla nodal.

- 1.) Si  $a_{11}(a_{12} - b_{22}) > 0$ , el eje positivo  $\eta$  de  $(1, 0, 0)$  es una región parabólica y el eje negativo  $\eta$  de  $(1, 0, 0)$  es una región hiperbólica.

- 2.) Si  $a_{11}(a_{12}-b_{22}) < 0$ , el eje positivo  $\eta$  de  $(1,0,0)$  es una región hiperbólica y el eje negativo  $\eta$  de  $(1,0,0)$  es una región parabólica.

Para conocer el comportamiento de las trayectorias en una vecindad del punto  $P_0 = (0, 1, 0)$  utilizamos la ecuación (2.14), con lo cual obtenemos que  $\lambda_1\lambda_2 = (b_{22} - a_{12})b_{22} = -B \neq 0$ , luego podemos decir:

- 1.) Si  $B > 0$  entonces  $P_1 = (0, 1, 0)$  es un punto silla.  
 2.) Si  $B < 0$  entonces  $P_1 = (0, 1, 0)$  es un punto nodo.

Combinando los dos casos  $a_{11}(a_{12} - b_{22}) > 0$  o  $< 0$  y los dos casos  $B > 0$  o  $B < 0$ , conseguimos cuatro casos; sin embargo sólo hay dos estructuras topológicamente diferentes. Cuando  $B > 0$  el diagrama de fase es como se muestra en la figura 2.4(a) y si  $B < 0$  el diagrama de fase es como se muestra en la figura 2.4(b).♦

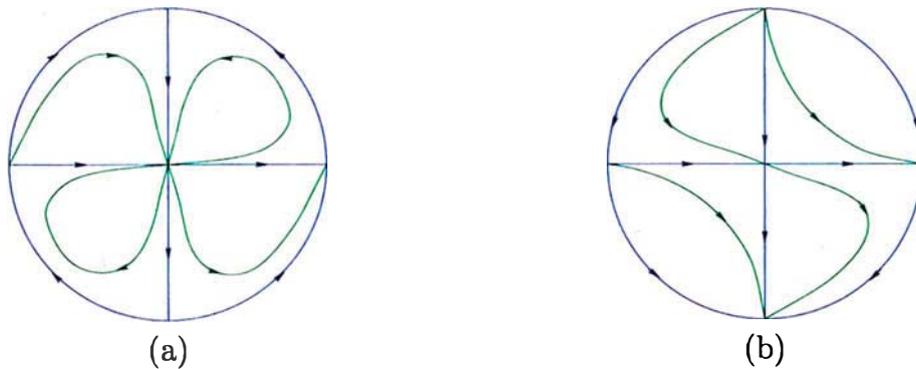


Figura 2.4: Sistemas con dos Direcciones Excepcionales

**Teorema 2.1.4.** *Sea el sistema (2.5) sin factor común. Si  $a_{22} = 0$  y  $(b_{12} - a_{11})(a_{12} - b_{22}) > 0$  entonces cuando  $A \equiv a_{11}(b_{12} - a_{11})$ ,  $B \equiv b_{22}(a_{12} - b_{22})$  y  $C \equiv a_{11}b_{22} - a_{12}b_{12}$  son todos negativos, el diagrama de fase global es como muestra la figura 2.5(a); cuando dos de ellos son negativos y el otro es positivo, el diagrama de fase global es como muestra la figura 2.5(b) y cuando dos de ellos son positivos, el diagrama de fase global es como muestra la figura 2.5(c).*

## Prueba

Reemplazando el valor de  $a_{22} = 0$  en el sistema (2.5) obtenemos

$$\frac{dx}{dt} = x(a_{11}x + a_{12}y)$$

$$\frac{dy}{dt} = y(b_{12}x + b_{22}y)$$

note que  $a_{11} \cdot b_{22} \neq 0$  para no tener factor común, además existe tres líneas integrales  $x = 0$ ,  $y = 0$  e  $y = \frac{b_{12} - a_{11}}{a_{12} - b_{22}}x$ .

De la ecuación (2.3) tenemos

$$N(\theta) = \text{sen}\theta \cos\theta [(b_{22} - a_{12})\text{sen}\theta + (b_{12} - a_{11})\cos\theta]$$

de donde debido a que  $(b_{12} - a_{11})(a_{12} - b_{22}) > 0$  entonces  $N(\theta)$  tiene tres raíces:  $\theta_1 = 0$  ( $\theta_1 = \pi$ ),  $\theta_2 = \pi/2$  ( $\theta_2 = 3\pi/2$ ) y  $\theta_0$  ( $\theta_0 + \pi$ ) tal que  $\tan\theta_0 = \frac{b_{12} - a_{11}}{a_{12} - b_{22}}$  con  $\theta_0$  perteneciendo a  $\langle 0, \pi/2 \rangle$ .

Por el análisis realizado anteriormente, tenemos:

Si  $A = a_{11}(b_{12} - a_{11})$  es mayor que cero entonces  $\theta_1 = 0$  es un rayo tipo nodal y  $P = (1, 0, 0)$  es un punto singular en el infinito tipo silla; pero si es menor que cero tenemos que  $\theta_1 = 0$  es un rayo tipo aislado y  $P = (1, 0, 0)$  es un punto singular en el infinito de tipo nodo.

Si  $B = b_{22}(a_{12} - b_{22})$  es mayor que cero tenemos que  $\theta_2 = \pi/2$  es un rayo tipo nodal y  $P = (1, 0, 0)$  es un punto singular en el infinito de tipo silla; pero si es menor que cero tenemos que  $\theta_2 = \pi/2$  es un rayo tipo aislado y  $P = (1, 0, 0)$  es un punto singular en el infinito de tipo nodo.

De las euaciones (2.6) y (2.3) tenemos que  $Z(\theta)$  y  $N(\theta)$  son

$$Z(\theta) = a_{11} \cos^3 \theta + a_{12} \cos^2 \theta \operatorname{sen} \theta + b_{12} \cos \theta \operatorname{sen}^2 \theta + b_{22} \operatorname{sen}^3 \theta$$

$$N(\theta) = \cos \theta \operatorname{sen} \theta [(b_{12} - a_{11}) \cos \theta + (b_{22} - a_{12}) \operatorname{sen} \theta]$$

Desarrollamos  $Z(\theta)$  y  $N(\theta)$  en su polinomio de taylor al rededor de  $\theta_0$

$$Z(\theta) = Z(\theta_0) + Z'(\theta_0)(\theta - \theta_0) + \dots$$

$$\begin{aligned} Z(\theta_0) &= a_{11} \cos^3 \theta_0 + a_{12} \cos^2 \theta_0 \operatorname{sen} \theta_0 + b_{12} \cos \theta_0 \operatorname{sen}^2 \theta_0 + b_{22} \operatorname{sen}^3 \theta_0 \\ &= \cos^3 \theta_0 [a_{11} + a_{12} \tan \theta_0 + b_{12} \tan^2 \theta_0 + b_{22} \tan^3 \theta_0] \\ &= \cos^3 \theta_0 \left[ a_{11} + a_{12} \frac{(b_{12} - a_{11})}{(a_{12} - b_{22})} + b_{12} \left( \frac{(b_{12} - a_{11})}{(a_{12} - b_{22})} \right)^2 + b_{22} \left( \frac{(b_{12} - a_{11})}{(a_{12} - b_{22})} \right)^3 \right] \\ &= \cos^3 \theta_0 \left[ \frac{a_{12} b_{12} - a_{11} b_{22}}{a_{12} - b_{22}} + \frac{(b_{12} - a_{11})^2}{(a_{12} - b_{22})^3} (b_{12}(a_{12} - a_{22}) + b_{22}(b_{12} - a_{11})) \right] \end{aligned}$$

$$Z(\theta_0) = \cos^3 \theta_0 \frac{a_{12} b_{12} - a_{11} b_{22}}{(a_{12} - b_{22})^3} [(a_{12} - b_{22})^2 + (b_{12} - a_{11})^2] \neq 0$$

de la misma manera para  $N(\theta)$

$$N(\theta) = N(\theta_0) + N'(\theta_0)(\theta - \theta_0) + \dots$$

$$= 0 + N'(\theta_0)(\theta - \theta_0) + \dots$$

$$\begin{aligned} N'(\theta) &= -\operatorname{sen}^2 \theta [(b_{12} - a_{11}) \cos \theta + (b_{22} - a_{12}) \operatorname{sen} \theta] + \\ &\quad \cos^2 \theta [(b_{12} - a_{11}) \cos \theta + (b_{22} - a_{12}) \operatorname{sen} \theta] + \\ &\quad \cos \theta \operatorname{sen} \theta [-(b_{12} - a_{11}) \operatorname{sen} \theta + (b_{22} - a_{12}) \cos(\theta)] \\ &= (b_{12} - a_{11}) \cos^3 \theta + 2(b_{22} - a_{12}) \cos^2 \theta \operatorname{sen} \theta - \\ &\quad 2(b_{12} - a_{11}) \cos \theta \operatorname{sen}^2 \theta - (b_{22} - a_{12}) \operatorname{sen}^3 \theta \end{aligned}$$

desde que  $(a_{12} - b_{22})\text{sen}\theta_0 = (b_{12} - a_{11})\text{cos}\theta_0$ , tenemos

$$\begin{aligned}
 N'(\theta_0) &= (a_{12} - b_{22})\text{sen}\theta_0 \cos^2 \theta_0 + 2(b_{22} - a_{12}) \cos^2 \theta_0 \text{sen}\theta_0 - \\
 &\quad 2(b_{12} - a_{11}) \cos \theta_0 \text{sen}^2 \theta_0 + (b_{12} - a_{11}) \cos \theta_0 \text{sen}^2 \theta_0 \\
 &= -(a_{12} - b_{22}) \cos^2 \theta_0 \text{sen}\theta_0 - (b_{12} - a_{11}) \cos \theta_0 \text{sen}^2 \theta_0 \\
 &= -(a_{12} - b_{22}) \cos^2 \theta_0 \text{sen}\theta_0 - (b_{12} - a_{11}) \cos \theta_0 \frac{b_{12} - a_{11}}{a_{12} - b_{22}} \cos \theta_0 \text{sen}\theta_0 \\
 &= -\cos^2 \theta_0 \text{sen}\theta_0 \left[ \frac{(a_{12} - b_{22})^2 + (b_{12} - a_{11})^2}{(a_{12} - b_{22})} \right] \neq 0
 \end{aligned}$$

luego considerando

$$\begin{aligned}
 \frac{Z}{N}(\theta) &= \frac{Z(\theta)}{N(\theta)} = \frac{Z(\theta_0)}{N'(\theta_0)(\theta - \theta_0)} [1 + \dots] \\
 &= \frac{\cos \theta_0 (a_{11}b_{22} - a_{12}b_{12})}{\text{sen}\theta_0 (a_{12} - b_{22})^2 (\theta - \theta_0)} [1 + \dots] \\
 &= \frac{a_{11}b_{22} - a_{12}b_{12}}{\tan \theta_0 (a_{12} - b_{22})^2 (\theta - \theta_0)} [1 + \dots]
 \end{aligned}$$

De la ecuación (2.7) tenemos

$$\begin{aligned}
 r &= r_1 \exp \left[ \int_{\theta_1}^{\theta} \frac{Z}{N}(\theta) d\theta \right] \cong r_1 \exp \left[ \int_{\theta_1}^{\theta} \left( \frac{a_{11}b_{22} - a_{12}b_{12}}{\tan \theta_0 (a_{12} - b_{22})^2} \right) \frac{d\theta}{(\theta - \theta_0)} \right] \\
 r &= r_1 (\theta - \theta_0) \frac{a_{11}b_{22} - a_{12}b_{12}}{\tan \theta_0 (a_{12} - b_{22})^2}
 \end{aligned}$$

Por lo tanto podemos decir que:

- 1.) Si  $C = a_{11}b_{22} - a_{12}b_{12} > 0$  entonces  $\lim_{\theta \rightarrow \theta_0} r = 0$ . Por tanto,  $\theta_0$  es un rayo tipo nodal.
- 2.) Si  $C < 0$  entonces  $\lim_{\theta \rightarrow \theta_0} r = \infty$ . Por tanto,  $\theta_0$  es un rayo tipo aislado.

Ahora hallemos los puntos singulares en el infinito, la ecuación (2.8) en nuestro caso es

$$uv[(b_{12} - a_{11})u + (b_{22} - a_{12})v] = 0, \quad u^2 + v^2 = 1, \quad z = 0$$

con lo cual obtenemos tres puntos singulares

$$P_0 = (1, 0, 0), \quad P_1 = (0, 1, 0) \quad \text{y} \quad P_2 = (1, \tan \theta_0, 0)$$

las conclusiones para los puntos  $P_0$  y  $P_1$  ya fueron realizados; por lo tanto sólo nos ocuparemos de  $P_2 = (1, \tan \theta_0, 0)$ .

De la ecuación (2.11) obtenemos que el producto de las raíces característica en  $P_2 = (1, \tan \theta_0, 0)$  es  $\lambda_1 \lambda_2 = -(a_{11}b_{22} - a_{12}b_{12}) \tan \theta_0 = -C \tan \theta_0 \neq 0$  y dado que  $\tan \theta_0 > 0$  tenemos:

- 1.) Si  $C > 0$  entonces  $P_2 = (1, \tan \theta_0, 0)$  es de tipo silla.
- 2.) Si  $C < 0$  entonces  $P_2 = (1, \tan \theta_0, 0)$  es de tipo nodal.

Antes de continuar consideremos lo siguiente

**Afirmación 2.1.** *Las expresiones  $A = a_{11}(b_{12} - a_{11})$ ,  $B = b_{22}(a_{12} - b_{22})$  y  $C = a_{11}b_{22} - a_{12}b_{12}$  no son todas positivas a la vez.*

### Prueba

Suponiendo que  $A > 0$ ,  $B > 0$  y  $C > 0$ , además sabemos que  $(b_{12} - a_{11})(a_{12} - b_{22}) > 0$ .

Si  $a_{11} > 0$  dado que  $A = a_{11}(b_{12} - a_{11}) > 0$  entonces  $(b_{12} - a_{11}) > 0$  esto implica que  $a_{12} - b_{22} > 0$  pero  $B = b_{22}(a_{12} - a_{22}) > 0$  entonces  $b_{22} > 0$ , por lo tanto

tenemos

$$b_{12} > a_{11} > 0 \quad \text{y} \quad a_{12} > b_{22} > 0 \Rightarrow a_{12}b_{12} > a_{11}b_{22} > 0 \Rightarrow C = a_{11}b_{22} - a_{12}b_{12} < 0$$

lo cual contradice lo supuesto.

Si  $a_{11} < 0$ , la prueba es análoga. ●

Por la afirmación 2.1.1 y combinando todas las posibilidades para las expresiones podemos hallar los diagramas de fase global del sistema, los cuales son mostrados en la figura 2.5. ♦

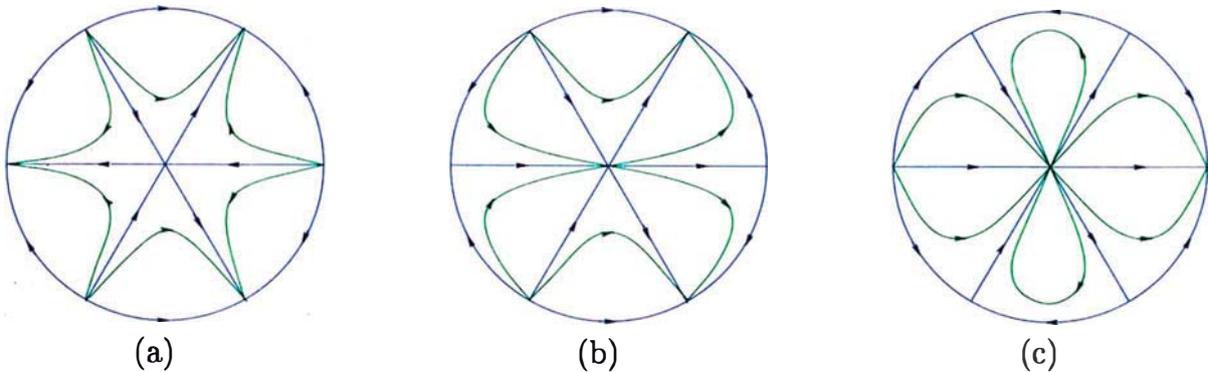


Figura 2.5: Sistemas con tres Direcciones Excepcionales.

Para garantizar que un sistema cuadrático homogéneo sin factor común no posee más diagramas de fase que los ya presentados, tenemos el siguiente teorema.

**Teorema 2.1.5.** *El diagrama de fase global para sistemas cuadráticos homogéneos sin factor común tiene siete diferentes estructuras topológicas.*

### Prueba

Las raíces de la ecuación  $N(\theta) = 0$  nos indica todas las direcciones excepcionales que puede tener el sistema (2.1). Recalcamos que las raíces de  $N(\theta)$  vienen en pares  $(\theta \text{ y } \theta + \pi)$ .

Por el análisis realizado al inicio del capítulo, el sistema (2.1) se puede llevar a la forma del sistema (2.5). Por tanto es suficiente hacer el análisis para el sistema (2.5).

Veamos todas las posibles raíces de  $N(\theta)$ ; de la ecuación (2.3), tenemos

$$N(\theta) = \text{sen}\theta [-a_{22}\text{sen}^2\theta + (b_{22} - a_{12})\text{sen}\theta \cos\theta + (b_{12} - a_{11}) \cos^2\theta]$$

1)  $N(\theta)$  tiene una sólo raíz.

$N$  ya tiene una raíz, para que ésta sea la única debemos tener que

$$\Delta < 0 \quad \text{ó} \quad a_{22} \neq 0, \quad b_{22} - a_{12} = 0 \quad \text{y} \quad b_{12} - a_{11} = 0$$

por los teoremas 2.1.1 y 2.1.2 obtenemos dos diagramas de fase.

2)  $N(\theta)$  tiene dos raíces.

sin pérdida de generalidad podemos asumir que la otra raíz sea  $\theta = \pi/2$ ; reemplazando este valor en la ecuación de  $N(\theta) = 0$  obtenemos  $a_{22} = 0$ , el nuevo valor de  $N(\theta)$  es

$$N(\theta) = \text{sen}\theta \cos\theta [(b_{22} - a_{12}) \text{sen}\theta + (b_{12} - a_{11}) \cos\theta] \quad (2.17)$$

tenemos dos casos

2.1) si  $b_{22} - a_{12} \neq 0$  y  $b_{12} - a_{11} = 0$ , en este caso  $\theta = 0$  sería una raíz doble y  $\theta = \pi/2$  una raíz simple; corresponde al caso desarrollado en el teorema 2.1.3, con lo cual obtenemos dos diagramas de fase más.

2.2) si  $b_{22} - a_{12} = 0$  y  $b_{12} - a_{11} \neq 0$ , en este caso  $\theta = 0$  sería una raíz simple y  $\theta = \pi/2$  una raíz doble; el cual tendría el mismo resultado del teorema 2.1.3, puesto que sólo se intercambian los resultados entre  $\theta = 0$  y  $\theta = \pi/2$ .

3)  $N(\theta)$  tiene tres raíces.

De la ecuación (2.17) se desprende que  $(b_{22} - a_{12})(b_{12} - a_{11}) \neq 0$  tenemos dos casos:

3.1)  $(b_{22} - a_{12})(b_{12} - a_{11}) < 0$ , la tercera raíz es  $\theta_0$ , tal que  $\tan \theta_0 = \frac{b_{22} - a_{12}}{a_{11} - b_{12}}$  el cual fue desarrollado en el teorema 2.4, con lo cual tenemos tres diagramas más.

3.2)  $(b_{22} - a_{12})(b_{12} - a_{11}) > 0$ , la tercera raíz es  $\pi - \theta_0$ , de la misma manera que en el teorema 2.4 tenemos los mismos diagramas de fase. ♦

## 2.2. El sistema tiene factor común.

En el teorema 2.1.1 se tiene que para que el sistema no tenga factor común se debe cumplir  $a_{11} \neq 0$ ; en los siguientes teoremas también restringen el valor de algunos coeficientes del sistema, pero todos son casos particulares de la restricción del teorema 2.1.1; entonces para conocer el diagrama de fase para el sistema con factor común tan sólo debemos estudiar el caso del sistema (2.5) cuando  $a_{11} = 0$

**Teorema 2.2.1.** *Dado el sistema (2.5), si  $a_{11} = 0$  entonces el diagrama de fase global para este sistema tiene diez estructuras topológicas diferentes.*

### Prueba

Tenemos el sistema (2.5)

$$\frac{dx}{dt} = a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{22}y^2$$

$$\frac{dy}{dt} = b_{12}xy + b_{22}y^2$$

reemplazando el valor de  $a_{11} = 0$ , en el sistema (2.5) obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= y(a_{12}x + a_{22}y) \\ \frac{dy}{dt} &= y(b_{12}x + b_{22}y)\end{aligned}\tag{2.18}$$

$y = 0$  es una trayectoria singular. Si consideramos el sistema

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= a_{12}x + a_{22}y \\ \frac{dy}{dt} &= b_{12}x + b_{22}y\end{aligned}\tag{2.19}$$

por lo visto en la sección 1.1.3, el diagrama de fase de (2.18) puede ser fácilmente determinado a partir del diagrama de fase de (2.19). Por tanto sólo es necesario estudiar el sistema (2.19).

Sea  $\Delta = a_{12}b_{22} - a_{22}b_{12}$ . Tenemos dos casos:

1)  $\Delta \neq 0$

El sistema (2.19) es lineal, puede ser llevado a 6 configuraciones las cuales son:

1.1)  $\dot{x} = \lambda x \quad \dot{y} = \mu y, \quad (\lambda\mu < 0)$

El punto singular (0,0) es un punto silla: sus puntos singulares en el infinito son  $P_1(1, 0, 0)$  y  $P_2(0, 1, 0)$ , ambos son tipo nodal.

1.2)  $\dot{x} = \lambda x \quad \dot{y} = \mu y, \quad (\lambda\mu > 0, \quad \lambda \neq \mu)$

El punto singular (0,0) es llamado nodo con dos tangentes: sus puntos singulares en el infinito son  $P_1(1, 0, 0)$  y  $P_2(0, 1, 0)$ , uno es tipo silla y el otro tipo nodal.

1.3)  $\dot{x} = \lambda x + \lambda y \quad \dot{y} = \lambda y, \quad (\lambda \neq 0)$

El punto singular (0,0) es llamado nodo con una tangente: su único punto singular en el infinito es  $P_1(1, 0, 0)$ , es de tipo semisilla nodal.

$$1.4) \quad \dot{x} = \lambda x \quad \dot{y} = \lambda y, \quad (\lambda \neq 0)$$

El punto singular  $(0,0)$  es llamado nodo estelar, todos los puntos en el infinito son puntos singulares.

$$1.5) \quad \dot{x} = \lambda x - \mu y \quad \dot{y} = \mu x + \lambda y, \quad (\lambda\mu \neq 0)$$

El punto singular  $(0,0)$  es llamado foco, no tiene puntos singulares en el infinito.

$$1.6) \quad \dot{x} = -\mu y \quad \dot{y} = \mu x, \quad (\mu \neq 0)$$

El punto singular  $(0,0)$  es llamado centro, no tiene puntos singulares en el infinito.

Usando el hecho que  $y = 0$  es una curva singular se puede hallar el diagrama de fase para el sistema (2.18) las cuales son mostradas en la figura 2.6.

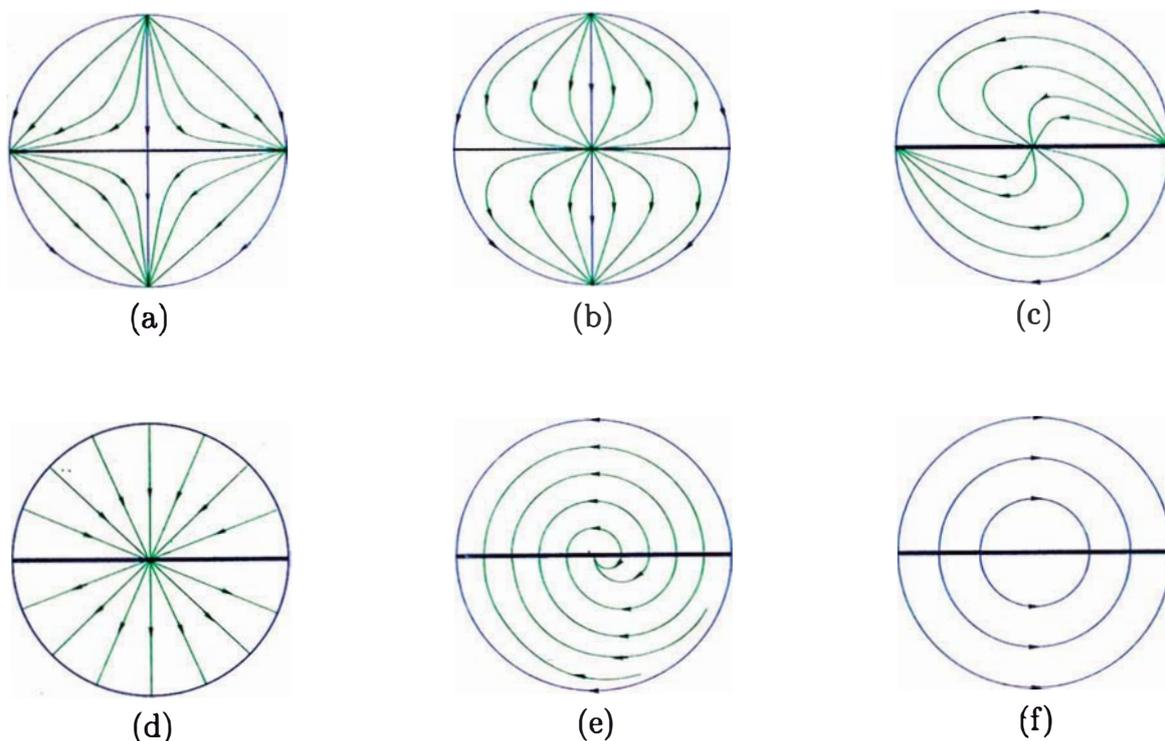


Figura 2.6: Sistemas Cuadráticos con Factor Común  $y = 0$ .

2)  $\Delta = 0$ . Tenemos dos subcasos:

2.1)  $a_{2,2} = 0$ .

El sistema (2.18) se puede escribir como

$$\frac{dx}{dt} = a_{12}xy \tag{2.20}$$

$$\frac{dy}{dt} = (b_{12}x + b_{22}y)y$$

$y = 0$  es una trayectoria singular; podemos simplemente estudiar el sistema

$$\frac{dx}{dt} = a_{12}x \tag{2.21}$$

$$\frac{dy}{dt} = b_{12}x + b_{22}y$$

además  $\Delta = a_{12}b_{22} = 0$ , entonces tenemos tres casos:

2.1.1)  $a_{12} = 0$  y  $b_{22} \neq 0$

El sistema (2.21) se puede escribir como

$$\frac{dx}{dt} = 0$$

$$\frac{dy}{dt} = b_{12}x + b_{22}y$$

Si  $b_{12} = 0$ ,  $y^2 = 0$  es una curva singular además el sistema tiene un punto singular en el infinito  $(1, 0, 0)$  y el diagrama de fases de este sistema está formado por líneas verticales paralelas como se muestra en la figura 2.7(a).

Si  $b_{12} \neq 0$ , el sistema tiene 2 trayectorias singulares:  $y = 0$  y  $b_{12}x + b_{22}y$ , el diagrama de fase del sistema (2.20) está formado por líneas paralelas como se muestra en la figura 2.8(a).

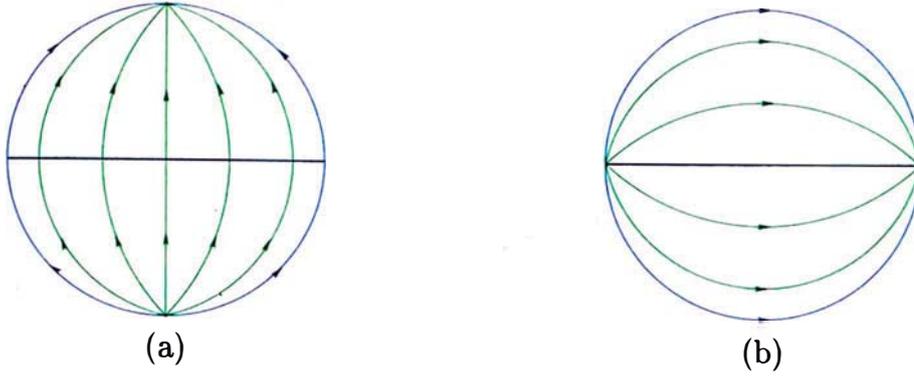


Figura 2.7: Sistemas Cuadráticos con una Línea Singular

2.1.2)  $a_{12} \neq 0$  y  $b_{22} = 0$ .

El sistema (2.21) se puede escribir como

$$\frac{dx}{dt} = a_{12}x$$

$$\frac{dy}{dt} = b_{12}x$$

tenemos otra trayectoria singular  $x = 0$ .

Si  $b_{12} = 0$  el diagrama de fases de (2.20) está formado por líneas horizontales paralelas, topológicamente equivalente a como muestra la figura 2.8(a).

Si  $b_{12} \neq 0$  el diagrama de fases de (2.20) está formado por líneas oblicuas paralelas como se muestra en la figura 2.8(b).

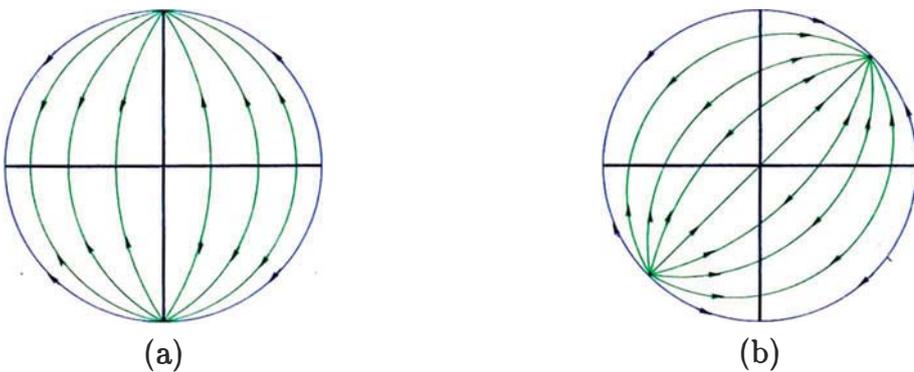


Figura 2.8: Sistemas Cuadráticos con dos Líneas Singulares

2.1.3)  $a_{12} = 0$  y  $b_{22} = 0$ .

El sistema (2.21) se puede escribir como

$$\frac{dx}{dt} = 0$$

$$\frac{dy}{dt} = b_{12}xy$$

este sistema tiene dos líneas integrales  $x = 0$  e  $y = 0$ .

El diagrama de fases de (2.20) está formado por líneas verticales paralelas, como muestra la figura 2.8(a).

2.2)  $a_{2,2} \neq 0$ . El sistema (2.18) se puede escribir como

$$\frac{dx}{dt} = (a_{12}x + a_{22}y)y \tag{2.22}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{b_{22}}{a_{22}}(a_{12}x + a_{22}y)y$$

este sistema tiene como trayectorias singulares a  $y = 0$  y  $a_{12}x + a_{22}y = 0$ . Por lo visto en la sección 1.1.3 sólo es necesario estudiar el sistema

$$\frac{dx}{dt} = 1$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{b_{22}}{a_{22}}$$

Si  $b_{22} \cdot a_{12} \neq 0$  el diagrama de fase de (2.22) está formado por líneas oblicuas paralelas topológicamente equivalente a como muestra la figura 2.8(b).

Si  $a_{12} = 0$  el diagrama de fase de (2.22) está formado por líneas oblicuas paralelas, topológicamente equivalente al de la figura 2.7(a).

Si  $b_{22} = 0$  entonces el sistema (2.22) se escribe como

$$\frac{dx}{dt} = (a_{12}x + a_{22}y)y$$

$$\frac{dy}{dt} = 0$$

el diagrama de fases para el sistema (2.22) está formado por líneas horizontales paralelas, topológicamente a como muestra la figura 2.7(b).

Si  $a_{12} = 0$  y  $b_{22} = 0$  el sistema (2.22) se escribe como

$$\frac{dx}{dt} = a_{22}y^2$$

$$\frac{dy}{dt} = 0$$

este sistema tiene una línea integral  $y^2 = 0$ , el diagrama de fase para el sistema (2.22) está formado por líneas horizontales paralelas, como en la figura 2.7(b).

De todos estos casos tenemos diez estructuras topológicas diferentes.♦

**Observación:** En todas las figuras dadas en este capítulo se consideraron en una sola orientación, también se debe considerar con la orientación opuesta.

### 3 ESTRUCTURA GLOBAL DE SISTEMAS CUADRÁTICOS CON UN PUNTO NODO ESTELAR

En este capítulo describiremos todas las diferentes estructuras topológicas que puede presentar un sistema cuadrático que tiene un punto singular de tipo nodo estelar.

Consideremos los siguientes lemas:

**Lema 3.1.** *El sistema de la forma*

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x + b_0x^2 + b_1xy + b_2y^2 \\ \frac{dy}{dt} &= y + a_0x^2 + a_1xy + a_2y^2\end{aligned}\tag{3.1}$$

*no cambia después de cualquier transformación lineal no singular.*

La prueba de este lema es un resultado de la teoría de sistemas de Jordan.

**Lema 3.2.** *Una condición necesaria y suficiente para que el origen, en un sistema cuadrático, sea un punto estrella nodal es que el sistema posea la forma (3.1)*

La prueba de este lema es una aplicación del teorema de Hartman Grobman.

En adelante llevaremos a cabo nuestra discusión por separado, de acuerdo al número de puntos singulares finitos (o puntos singulares simplemente).

### 3.1. El sistema tiene cuatro puntos singulares

Supongamos un sistema cuadrático general que tenga cuatro puntos singulares finitos; al formar un cuadrilátero con estos puntos como vértices existe una relación entre el cuadrilátero resultante (cóncavo o convexo) y las propiedades del punto singular, como lo muestra el siguiente lema.

**Lema 3.3.** *Consideremos un sistema cuadrático con cuatro puntos singulares simples. Si el cuadrilátero formado con estos puntos como vértices es convexo, entonces dos puntos singulares opuestos son puntos sillas, y las otras dos no son puntos silla (nodal, foco o centro). Si el cuadrilátero es cóncavo, entonces los tres puntos singulares externos son puntos sillas (puntos no sillas) y el punto singular interior en punto no silla (punto silla)*

**Prueba.**

Supongamos un sistema cuadrático general

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= a_1x + a_2y + a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{22}y^2 \\ \frac{dy}{dt} &= b_1x + b_2y + b_{11}x^2 + b_{12}xy + b_{22}y^2\end{aligned}\tag{3.2}$$

con cuatro puntos singulares:

$$O(0, 0), \quad A_1(1, 0), \quad A_2(\alpha, \beta) \quad \text{y} \quad A_3(0, 1)$$

sin pérdida de generalidad podemos suponer que los puntos singulares son los vértices de un cuadrilátero, entonces  $\alpha, \beta > 0$ ,  $\alpha + \beta \neq 1$ ; reemplazando estos valores en

(3.2) se debe satisfacer las siguientes relaciones

$$\text{Por } A_1 \quad a_1 + a_{11} = 0 \quad \text{y} \quad b_1 + b_{11} = 0$$

$$\text{Por } A_2 \quad a_1\alpha + a_2\beta + a_{11}\alpha^2 + a_{12}\alpha\beta + a_{22}\beta^2 = 0$$

$$b_1\alpha + b_2\beta + b_{11}\alpha^2 + b_{11}\alpha\beta + b_{22}\beta^2 = 0$$

$$\text{Por } A_3 \quad a_2 + a_{22} = 0 \quad \text{y} \quad b_2 + b_{22} = 0$$

de donde reemplazando las igualdades

$$a_{11} = -a_1, \quad b_{11} = -b_1$$

$$a_{22} = -a_2, \quad b_{22} = -b_2$$

se tiene

$$a_{12} = a_1 \frac{(\alpha - 1)}{\beta} + a_2 \frac{(\beta - 1)}{\alpha}$$

$$b_{12} = b_1 \frac{(\alpha - 1)}{\beta} + b_2 \frac{(\beta - 1)}{\alpha}$$

según esto el sistema (3.2) se transforma en

$$\frac{dx}{dt} = -a_1x(x - 1) - a_2y(y - 1) + a_{12}xy \tag{3.3}$$

$$\frac{dy}{dt} = -b_1x(x - 1) - b_2y(y - 1) + b_{12}xy$$

luego si hacemos en el sistema (3.3)

$$p_1 = -a_1 \quad p_2 = -a_2 \quad p_3 = a_{12} = -p_2 \frac{\beta - 1}{\alpha} - p_1 \frac{\alpha - 1}{\beta}$$

$$q_1 = -b_1 \quad q_2 = -b_2 \quad q_3 = b_{12} = -q_2 \frac{\beta - 1}{\alpha} - q_1 \frac{\alpha - 1}{\beta} \tag{3.4}$$

el sistema (3.3) en términos de  $p_i$  y  $q_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) viene a ser

$$\frac{dx}{dt} = p_1x(x - 1) + p_2y(y - 1) + p_3xy \tag{3.5}$$

$$\frac{dy}{dt} = q_1x(x - 1) + q_2y(y - 1) + q_3xy$$

La matriz de linealización de (3.5) en el origen  $O$  es

$$A(0, 0) = \begin{bmatrix} -p_1 & -p_2 \\ -q_1 & -q_2 \end{bmatrix}$$

la cual tiene determinante  $D_0 = p_1 q_2 - p_2 q_1 = a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$ , pues los puntos singulares son simples.

Similarmente encontramos la matriz de linealización del sistema (3.5) en el punto singular  $(x, y)$

$$A(x, y) = \begin{bmatrix} -p_1 + 2p_1x + p_3y & 2p_2y - p_2 + p_3x \\ 2q_1x - q_1 + q_3y & 2q_2y - q_2 + q_3x \end{bmatrix}$$

evaluando  $A(x, y)$  en  $A_1$  se obtiene la matriz

$$A(1, 0) = \begin{bmatrix} p_1 & -p_2 + p_3 \\ q_1 & -q_2 + q_3 \end{bmatrix}$$

la cual tiene determinante  $D_1 = -p_1q_2 + p_1q_3 + p_2q_1 - p_3q_1$ ; reemplazando los valores  $p_3$  y  $q_3$  de (3.4) obtenemos

$$D_1 = -\frac{\alpha + \beta - 1}{\alpha} D_0$$

operando de igual modo en los otros puntos, obtenemos

$$\begin{aligned} D_0 &= a_1 b_2 - a_2 b_1 \\ D_1 &= -\frac{\alpha + \beta - 1}{\alpha} D_0 \\ D_2 &= (\alpha + \beta - 1) D_0 \\ D_3 &= -\frac{\alpha + \beta - 1}{\beta} D_0 \end{aligned} \tag{3.6}$$

aquí se ve claramente que para saber si el punto singular  $A_i$  es una silla o no, basta con conocer el signo de  $D_i$ , pero vemos que esto depende de como es el valor de  $\alpha + \beta$  con respecto a 1 y de  $D_0$ . Veamos

- 1.) Si  $\alpha + \beta > 1$  entonces el cuadrilátero que forman  $O, A_1, A_2$  y  $A_3$  es convexo, los signos de  $D_0$  y  $D_2$  son iguales, y los signos de  $D_1, D_3$  también son iguales pero opuestos al de  $D_0$ . Por tanto, si  $A_1$  y  $A_3$  son puntos silla (no sillars), entonces  $O$  y  $A_2$  no son puntos sillars (son sillars).
- 2.) Si  $\alpha + \beta < 1$  entonces el cuadrilátero que forman  $O, A_1, A_2$  y  $A_3$  es cóncavo. Es más,  $O, A_1$  y  $A_3$  son puntos externos y sus correspondientes  $D_i$  tienen el mismo signo pero opuestos al de  $D_2$ . Por tanto, si  $O, A_1$  y  $A_3$  son puntos silla (no sillars), entonces  $A_2$  no es un punto silla (es un punto silla). •

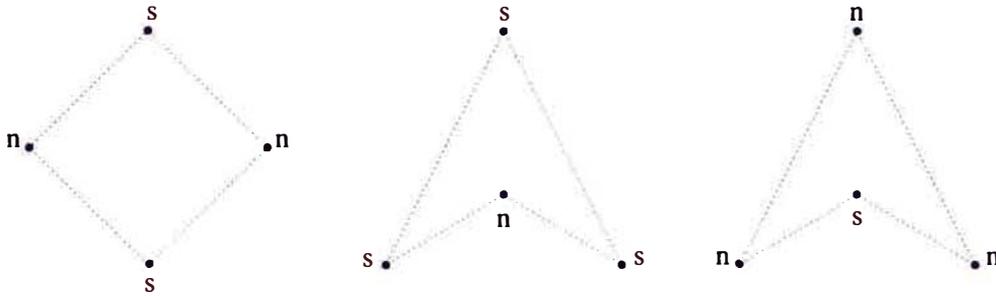


Figura 3.1: Puntos Singulares formando un Cuadrilátero

Considerando el sistema cuadrático general (3.2)

$$\frac{dx}{dt} = a_1x + a_2y + a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{22}y^2$$

$$\frac{dy}{dt} = b_1x + b_2y + b_{11}x^2 + b_{12}xy + b_{22}y^2$$

usando el método descrito en el lema 3.1, el sistema (3.2) se puede escribir como el sistema (3.5)

$$\frac{dx}{dt} = p_1x(x - 1) + p_2y(y - 1) + p_3xy$$

$$\frac{dy}{dt} = q_1x(x - 1) + q_2y(y - 1) + q_3xy$$

donde los valores de los  $p_i$  y  $q_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) son dados en la ecuación (3.4), además  $\alpha \neq 0$ ,  $\beta \neq 0$  y  $\alpha + \beta \neq 1$ .

Asumiendo que el origen  $O$  es un nodo estelar, por el lema (3.2) se debe cumplir que

$$a_1 = b_2 = 1 \quad \text{y} \quad a_2 = b_1 = 0$$

reemplazando estos valores en (3.4) hallamos los valores de los  $p_i$  y  $q_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ); luego reemplazando estos valores en el sistema (3.5) obtenemos

$$\frac{dx}{dt} = x \left[ 1 - x + \frac{\alpha - 1}{\beta} y \right]$$

$$\frac{dy}{dt} = y \left[ 1 - y + \frac{\beta - 1}{\alpha} x \right]$$

y convirtiendo otra vez  $\frac{\alpha - 1}{\beta} = b$  y  $\frac{\beta - 1}{\alpha} = a$ , sucede que el sistema anterior puede ser escrito como

$$\frac{dx}{dt} = x(1 - x + by)$$

$$\frac{dy}{dt} = y(1 + ax - y)$$

(3.7)

puesto que  $\alpha + \beta \neq 1$  se debe cumplir que  $a \neq -1$ ,  $b \neq -1$  y  $ab \neq -1$ .

**Teorema 3.1.1.** *Para el sistema cuadrático (3.7) con cuatro puntos singulares, uno de los cuales es un punto nodo estelar, entonces:*

- 1.) *Si  $ab > 1$  y  $a < 0$ , los cuatro puntos singulares forman los vértices de un cuadrilátero cóncavo, el nodo estelar es un vértice exterior y los otros puntos singulares son punto nodal, punto silla (el vértice interior) y punto nodal. El diagrama de fase es como se muestra en la figura 3.4(a).*
- 2.) *Si  $ab > 1$  y  $a > 0$ , los cuatro puntos singulares forman los vértices de un cuadrilátero cóncavo, el nodo estelar es un vértice interior y los*

otros puntos singulares son puntos sillas. El diagrama de fase es como se muestra en la figura 3.4(b).

3.) Si  $ab < 1$ , los cuatro puntos singulares forman los vértices de un cuadrilátero cóncavo, los otros puntos singulares son punto silla, punto nodal y punto silla. El diagrama de fase es como se muestra en la figura 3.4(c).

### Prueba

Los puntos singulares del sistema (3.7), ahora en términos de  $a$  y  $b$  son

$$O(\text{punto estrella nodal}), \quad A_1(1, 0), \quad A_2\left(\frac{1+b}{1-ab}, \frac{1+a}{1-ab}\right) \quad \text{y} \quad A_3(0, 1).$$

El sistema (3.7) tiene tres líneas integrales:  $x = 0$ ,  $y = 0$  e  $y = \frac{1+a}{1+b}x$ ; así podemos ver que para cada punto singular hay una línea integral pasando a través de él, luego el sistema (3.7) no tiene ciclos límites.

De los resultados dados en (3.6) obtenemos

$$D_0 = 1, \quad D_1 = -(1+a), \quad D_2 = \frac{(1+a)(1+b)}{1-ab} \quad \text{y} \quad D_3 = -(1+b)$$

así, para saber cuando  $A_1$ ,  $A_2$  y  $A_3$  son puntos sillas o puntos nodos depende de cuando las cantidades  $D_1, D_2$  y  $D_3$ , son menores o mayores que cero.

Veamos los puntos singulares en el infinito de nuestro sistema. Para esto llevamos el sistema (3.7) a coordenadas homogéneas ( $u = x/z$  y  $v = y/z$ ) obtenemos

$$z \frac{du}{dt} - u \frac{dz}{dt} = u(-u + bv + z)$$

$$z \frac{dv}{dt} - v \frac{dz}{dt} = v(au - v + z)$$

(3.8)

para hallar los puntos singulares en el infinito de la forma  $(1, v_i, 0)$  hacemos  $u = 1$  en el sistema (3.8), reduciendo se transforma en

$$\begin{aligned}\frac{dv}{d\tau} &= v(1 + a - (1 + b)v) \\ \frac{dz}{d\tau} &= z(1 - bv - z)\end{aligned}\tag{3.9}$$

este sistema tiene como puntos singulares a

$$B_1(1, 0, 0) \quad \text{y} \quad B_2\left(1, \frac{1+a}{1+b}, 0\right)$$

De igual modo, para hallar los puntos singulares en el infinito de la forma  $(u_i, 1, 0)$  hacemos  $v = 1$  en (3.8), obteniendo

$$\begin{aligned}\frac{du}{d\tau} &= u(1 + b - (1 + a)u) \\ \frac{dz}{d\tau} &= z(1 - au - z)\end{aligned}\tag{3.10}$$

el sistema tiene como puntos singulares a

$$B_3(0, 1, 0) \quad \text{y} \quad B_4\left(\frac{1+b}{1+a}, 1, 0\right) = B_2$$

se concluye que los puntos singulares infinitos para el sistema (3.7) son

$$B_1(1, 0, 0), \quad B_2\left(1, \frac{1+a}{1+b}, 0\right) \quad \text{y} \quad B_3(0, 1, 0)$$

La matriz de linealización del sistema (3.9) en el punto  $(v, z)$  es:

$$M_1(v, z) = \begin{bmatrix} 1 + a - 2(b+1)v & 0 \\ -bz & 1 - bv - 2z \end{bmatrix}$$

evaluando en  $B_1$  para  $(u, v, z) = (1, 0, 0)$  obtenemos

$$M_1(0, 0) = \begin{bmatrix} a + 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

luego  $J_1 = \det(M_1(0, 0)) = a + 1 \neq 0$ .

De igual modo evaluando en  $B_2$  para  $(u, v, z) = (1, \frac{1+a}{1+b}, 0)$  obtenemos

$$M_1\left(\frac{1+a}{1+b}, 0\right) = \begin{bmatrix} -1-a & 0 \\ 0 & \frac{1-ab}{1+b} \end{bmatrix}$$

luego  $J_2 = \det\left(M_1\left(\frac{1+a}{1+b}, 0\right)\right) = -\frac{1+a}{1+b}(1-ab) \neq 0$

La matriz de linealización del sistema (3.10) en el punto  $(u, z)$  es:

$$M_2(u, z) = \begin{bmatrix} b + 1 - 2(a + 1)u & 0 \\ -az & 1 - au - 2z \end{bmatrix}$$

evaluando en  $B_3$  para  $(u, v, z) = (0, 1, 0)$  obtenemos:

$$M_2(0, 0) = \begin{bmatrix} b + 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

luego  $J_3 = \det(M_2(0, 0)) = b + 1 \neq 0$ .

De otro lado dado que  $O, A_1$  y  $A_3$  son fijos, si conocemos la posición del punto  $A_2$ , por medio del lema 3.3, podemos conocer que tipo de singularidades presentan los otros puntos singulares; además  $A_2$  debe ser el vértice de un cuadrilátero, de ahí que  $A_2$  no satisface las ecuaciones  $x + y = 1$ ,  $x = 0$  e  $y = 0$ . Las tres líneas rectas:  $x = 0$ ,  $y = 0$  y  $x + y = 1$ , dividen al plano  $x - y$  en siete regiones (figura 3.2). Hagamos variar  $A_2 = \left(\frac{1+b}{1-ab}, \frac{1+a}{1-ab}\right)$  en cada región.

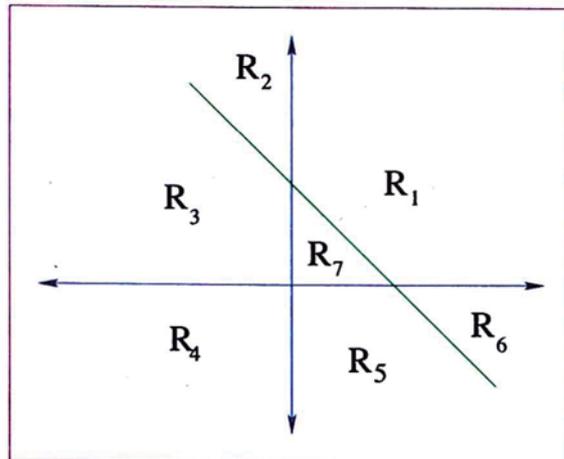


Figura 3.2: Las 7 Regiones

1) Si  $A_2$  pertenece a la región  $R_1$ , entonces tenemos que:

$$x = \frac{1+b}{1-ab} > 0, y = \frac{1+a}{1-ab} > 0 \text{ y } x+y-1 = \frac{(1+a)(1+b)}{1-ab} > 0.$$

De ahí que tenemos dos casos:

- i)  $1-ab > 0$  esto implica que  $1+b > 0$  y  $1+a > 0$  lo que conlleva a la región  $S_1 = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 / ab < 1, a > -1 \text{ y } b > -1\}$ .
- ii)  $1-ab < 0$  esto implica que  $1+b < 0$  y  $1+a < 0$  lo que conlleva a que  $(1+b)(1+a) > 0$  que contradice la relación de arriba.

Además el cuadrilátero que forman  $O$ ,  $A_1$ ,  $A_2$  y  $A_3$  es convexo,

2) Si  $A_2$  pertenece a la región  $R_2$ , entonces tenemos que:  $\frac{1+b}{1-ab} < 0$  y

$$\frac{(1+a)(1+b)}{1-ab} > 0.$$

De ahí que tenemos dos casos:

- i)  $1-ab > 0$  esto implica que  $1+b < 0$  y  $1+a < 0$  lo que conlleva a que  $S_2 = \phi$
- ii)  $1-ab < 0$  esto implica que  $1+b > 0$  y  $1+a < 0$  lo que con lleva a la región  $S_2 = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 / ab > 1, a < -1 \text{ y } b > -1\}$ .

Además el cuadrilátero que forman  $O$ ,  $A_1$ ,  $A_2$  y  $A_3$  es cóncavo y el origen es un vértice exterior.

De manera similar para los otros casos:

3) Si  $A_2$  pertenece a la región  $R_3$ , entonces tenemos que:

$$S_3 = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 / ab < 1, a > -1 \text{ y } b < -1\}.$$

Además el cuadrilátero que forman  $O$ ,  $A_1$ ,  $A_2$  y  $A_3$  es convexo,

4) Si  $A_2$  pertenece a la región  $R_4$ , entonces tenemos que:

$$S_4 = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 / ab > 1, a > -1 \text{ y } b > -1\}.$$

Además el cuadrilátero que forman  $O$ ,  $A_1$ ,  $A_2$  y  $A_3$  es cóncavo y el origen es un vértice interior.

5) Si  $A_2$  pertenece a la región  $R_5$ , entonces tenemos que:

$$S_5 = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 / ab < 1, a < -1 \text{ y } b > -1\}.$$

Además el cuadrilátero que forman  $O$ ,  $A_1$ ,  $A_2$  y  $A_3$  es convexo,

6) Si  $A_2$  pertenece a la región  $R_6$ , entonces tenemos que:

$$S_6 = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 / ab > 1, a > -1 \text{ y } b < -1\}.$$

Además el cuadrilátero que forman  $O$ ,  $A_1$ ,  $A_2$  y  $A_3$  es cóncavo y el origen es un vértice exterior.

7) Si  $A_2$  pertenece a la región  $R_7$ , entonces tenemos que:

$$S_7 = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 / ab > 1, a < -1 \text{ y } b < -1\}.$$

Además el cuadrilátero que forman  $O$ ,  $A_1$ ,  $A_2$  y  $A_3$  es cóncavo y el origen es un vértice exterior.

Llevando estos resultados al plano  $a - b$  concluimos que:

1) Si  $ab > 1$  y  $a < 0$ , el cuadrilátero formado por los puntos singulares es cóncavo y el origen es un vértice exterior.

2) Si  $ab > 1$  y  $a > 0$ , el cuadrilátero formado por los puntos singulares es cóncavo y el origen es un vértice interior.

3) Si  $ab < 1$ , el cuadrilátero formado por los puntos singulares es convexo.

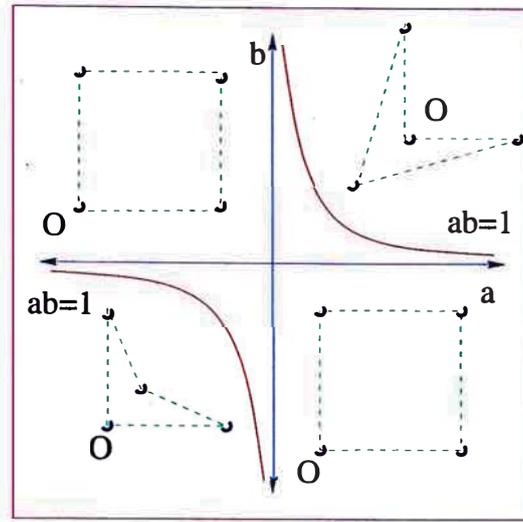


Figura 3.3: Disposición de los Puntos Singulares en el Plano  $a - b$

Finalmente comparando  $D_i$  y  $J_i$  vemos que  $J_i = -D_i$ , ( $i = 1, 2, 3$ ) de ahí que si  $A_i$  es punto nodal (silla), entonces  $B_i$  es punto silla (nodal).

Por el Lema 3.3 y puesto que las otras líneas integrales no pueden cruzar las tres líneas integrales  $x = 0$ ,  $y = 0$  y  $y = \frac{a+1}{b+1}x$  fuera de  $O$ ,  $A_1$ ,  $A_2$  y  $A_3$  el retrato de fase global puede ser completamente determinado y fácilmente dibujado. Los diagramas de fase para estos casos son como se muestra en la figura 3.4. ♦

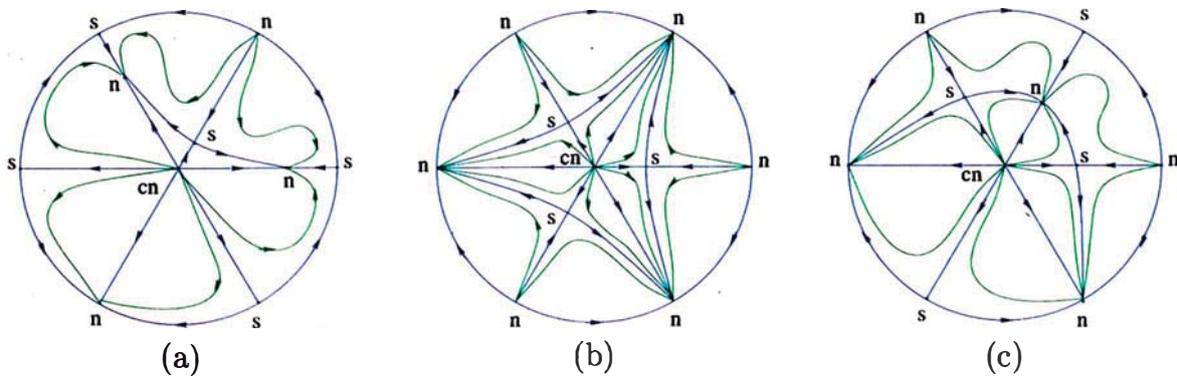


Figura 3.4: Sistemas Cuadráticos con 4 Puntos Singulares

## 3.2. El sistema tiene tres puntos singulares

Consideremos el sistema cuadrático general (3.2)

$$\frac{dx}{dt} = a_1x + a_2y + a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{22}y^2$$

$$\frac{dy}{dt} = b_1x + b_2y + b_{11}x^2 + b_{12}xy + b_{22}y^2$$

con 3 puntos singulares; sin pérdida de generalidad podemos suponer que éstos son  $O = (0, 0)$ ,  $A_1 = (1, 0)$  y  $A_2 = (0, 1)$ , entonces se debe verificar lo siguiente

$$\text{por } A_1 : a_1 + a_{11} = 0 \text{ y } b_1 + b_{11} = 0$$

$$\text{por } A_2 : a_2 + a_{22} = 0 \text{ y } b_2 + b_{22} = 0$$

Asumiendo que el origen es un nodo estelar, por el lema (3.1) se debe cumplir que

$$a_1 = b_2 = 1 \quad \text{y} \quad a_2 = b_1 = 0$$

reemplazando estos valores en nuestro sistema obtenemos

$$\frac{dx}{dt} = x + a_{12}xy - x^2$$

$$\frac{dy}{dt} = y + b_{12}xy - y^2$$

si hacemos  $a = b_{12}$  y  $b = a_{12}$ , obtenemos el sistema (3.7) considerado en la sección 3.1; en la cual por el teorema 3.1.1 si  $a \neq -1, b \neq -1$  y  $ab \neq 1$  obtenemos cuatro puntos singulares; así cuando  $a = 1, b = 1$  o  $ab = 1$  tenemos tres puntos singulares.

El siguiente teorema especifica el tipo de singularidad que presenta cada punto singular.

**Teorema 3.2.1.** *Para un sistema cuadrático (3.7) que tiene un punto estrella nodal, si sólo tiene tres puntos singulares finitos entonces los otros puntos singulares sólo pueden ser:*

- 1) *Si  $a = -1$  y  $b < -1$  o  $a < -1$  y  $b = -1$ ; un punto nodal y un punto semisilla nodal.*
- 2) *Si  $a = -1$  y  $b > -1$  o  $a > -1$  y  $b = -1$ ; un punto silla y un punto semisilla nodal.*
- 3) *Si  $ab = 1$  y  $a < 0$ ,  $a \neq -1$ ; un punto silla y un punto nodal.*
- 4) *Si  $ab = 1$  y  $a > 0$ ; un punto silla y un punto silla.*

### Prueba

Considerando el sistema (3.7), haremos un estudio más detallado, por separado:

- 1.) **Si  $a = -1$**

El sistema (3.7) se convierte en:

$$\frac{dx}{dt} = x(1 - x + by) \tag{3.11}$$

$$\frac{dy}{dt} = y(1 - x - y)$$

notamos que debemos tener  $b \neq -1$ , pues de lo contrario habría factor común, lo cual generaría una curva singular ( $1 - x - y = 0$ ) y ya no tendríamos sólo tres puntos singulares.

El sistema tiene dos líneas integrales  $x = 0$  e  $y = 0$ , además de los resultados obtenidos en la sección 3.1 tenemos  $D_1 = -(1 + a) = 0$  y  $D_2 = -(1 + b) \neq 0$ .

Veamos qué singularidad presenta  $A_1 = (1, 0)$ .

Para usar el teorema 1.5.1, trasladamos  $A_1 = (1, 0)$  al origen (hacemos  $u = x - 1, v = y$ ); el sistema (3.11) se puede escribir como

$$\frac{dv}{dt} = -v(u + v)$$

$$\frac{du}{dt} = -(u + 1)(u - bv)$$

el segundo miembro de la segunda ecuación diferencial tiene parte lineal en términos de  $u$ , así que igualamos a cero y hallamos  $u = f(v)$ , los casos posibles son  $u = -1$  y  $u = bv$ ; para  $u = -1$  el segundo miembro de la primera ecuación diferencial resulta  $g(v) = v - v^2$  lo cual no puede ser puesto que  $g(v)$  debe ser de grado mayor o igual a dos, para  $u = bv$  conseguimos  $g(v) = -(1 + b)v^2$  lo que nos indica que el punto singular  $A_1 = (1, 0)$  es un punto semisilla nodal. Por lo tanto tenemos:

- a) Si  $b > -1$  el eje positivo  $v^+$  de  $A_1$  es una región parabólica y el eje negativo  $v^-$  es una región hiperbólica.
- b) Si  $b < -1$  el eje positivo  $v^+$  de  $A_1$  es una región hiperbólica y el eje negativo  $v^-$  es una región parabólica.

Ahora veamos los puntos singulares en el infinito, de los resultados obtenidos en la sección 3.1 tenemos que éstos puntos son  $B_1 = (1, 0, 0)$  y  $B_2 = (0, 1, 0)$ , los respectivos determinantes de las linealizaciones en dichos puntos son  $J_1 = 1 + a = 0$  y  $J_2 = 1 + b \neq 0$ .

Veamos que ocurre en  $B_1 = (1, 0, 0)$ , para ello utilicemos el sistema (3.9) haciendo  $a = -1$  obtenemos

$$\frac{dv}{d\tau} = -(1 + b)v^2$$

$$\frac{dz}{d\tau} = z(1 - z - bv)$$

el segundo miembro de la primera ecuación diferencial resulta  $g(v) = -(1+b)v^2$ , por el teorema 1.5.1 implica que  $B_1 = (1, 0, 0)$  es un punto semisilla nodal. Por lo tanto tenemos:

- a) Si  $b > -1$  el eje positivo  $v^+$  de  $B_1$  es una región parabólica y el eje negativo  $v^-$  es una región hiperbólica.
- b) Si  $b < -1$  el eje positivo  $v^+$  de  $B_1$  es una región hiperbólica y el eje negativo  $v^-$  es una región parabólica.

Para los puntos singulares  $A_2$  y  $B_2$  tenemos:

- 1.1) Si  $b > -1$  entonces  $A_2$  es un punto silla y  $B_2$  es un punto nodal. El diagrama de fase global es como muestra la figura 3.5(a).
- 1.2) Si  $b < -1$  entonces  $A_2$  es un punto nodal y  $B_2$  es un punto silla. El diagrama de fase global es como muestra la figura 3.5(b).

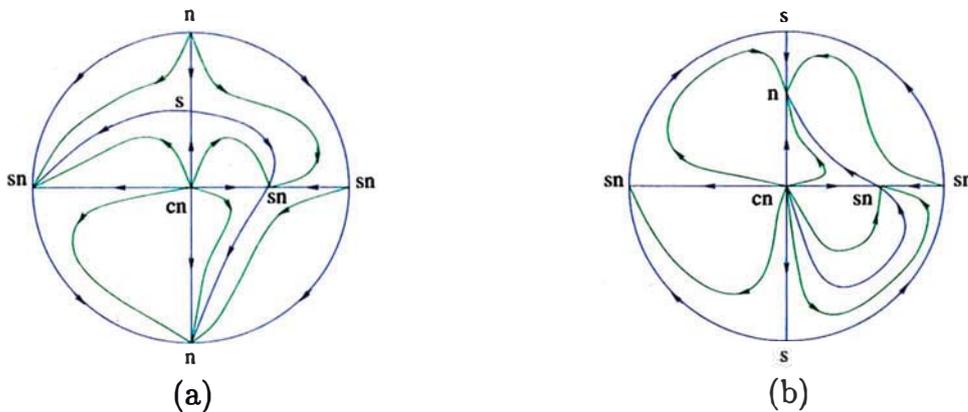


Figura 3.5: Sistemas con 3 Puntos Singulares y 2 Líneas Integrales

2) Si  $b = -1$

Entonces, de (3.7), el sistema correspondiente es

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x(1 - x - y) \\ \frac{dy}{dt} &= y(1 + ax - y) \end{aligned} \tag{3.12}$$

por lo mismo que en el caso anterior debemos tener que  $a \neq -1$ . El sistema tiene dos líneas integrales  $x = 0$  e  $y = 0$ ; además los determinantes de las matrices de linealización son  $D_1 = -(1 + a) \neq 0$  y  $D_2 = -(1 + b) = 0$ .

Veamos qué clase de punto singular es  $A_2 = (0, 1)$ . Para utilizar el teorema 1.5.1, trasladamos  $A_2 = (0, 1)$  al origen (hacemos  $u = x, v = y - 1$ ) el sistema (3.12) se transforma en

$$\frac{du}{dt} = -u(u + v)$$

$$\frac{dv}{dt} = (1 + v)(au - v)$$

El segundo miembro de la segunda ecuación diferencial tiene parte lineal en términos de  $v$ , así que igualamos a cero y hallamos  $v = f(u)$ , los casos posibles son  $v = -1$  y  $v = au$ ; para  $v = -1$  el segundo miembro de la primera ecuación diferencial resulta  $g(u) = u - u^2$  lo cual no puede ser puesto que  $g(u)$  debe ser de grado mayor o igual a dos, para  $v = au$  conseguimos  $g(v) = -(1 + a)u^2$  lo que nos indica que el punto singular  $A_3 = (0, 0)$  es un punto semisilla nodal. Por lo tanto tenemos:

- a) Si  $a > -1$  el eje positivo  $u^+$  de  $A_3$  es una región hiperbólica y el eje negativo  $u^-$  de  $A_3$  es una región parabólica.
- b) Si  $a < -1$  el eje positivo  $u^+$  de  $A_3$  es una región parabólica y el eje negativo  $v^-$  es una región hiperbólica.

Ahora veamos los puntos singulares en el infinito, de los resultados obtenidos en la sección 3.1 tenemos que éstos puntos son  $B_1 = (1, 0, 0)$  y  $B_2 = (0, 1, 0)$  los respectivos determinantes de las linealizaciones en dichos puntos son  $J_1 = 1 + a \neq 0$  y  $J_2 = 1 + b = 0$ .

Veamos que ocurre en el punto singular  $B_2 = (0, 1, 0)$ , para ello utilicemos el sistema (3.10) haciendo  $b = -1$  obtenemos

$$\frac{du}{d\tau} = -(1+a)u^2$$

$$\frac{dz}{d\tau} = z(1-z-au)$$

el segundo miembro de la primera ecuación diferencial resulta  $g(u) = -(1+a)u^2$ , el teorema 1.5.1 indica que el punto singular  $B_2 = (0, 1, 0)$  es un punto semisilla nodal. Por lo tanto tenemos:

- a) Si  $a > -1$  el eje positivo  $u^+$  de  $B_2$  es una región hiperbólica y el eje negativo  $v^-$  es una región parabólica.
- b) Si  $a < -1$  el eje positivo  $u^+$  de  $B_2$  es una región parabólica y el eje negativo  $v^-$  es una región hiperbólica.

Para los puntos singulares  $A_1$  y  $B_1$  tenemos

2.1) Si  $a > -1$  entonces  $A_1$  es un punto silla y  $B_1$  es un punto nodal.

El diagrama de fase global es topológicamente equivalente como se muestra en la figura 3.5(a).

2.2) Si  $a < -1$  entonces  $A_1$  es un punto nodal y  $B_1$  es un punto silla.

El diagrama de fase global es es topológicamente equivalente como se muestra en la figura 3.5(b).

3) Si  $ab = 1$

El sistema (3.7) considerado es

$$\frac{dx}{dt} = x(1-x+by)$$

$$\frac{dy}{dt} = y(1+ax-y)$$

análogamente debemos tener que  $a \neq -1$  y  $b \neq -1$ , para tener sólo tres puntos singulares.

Este sistema tiene tres líneas integrales:

$$x = 0, \quad y = 0 \quad \text{y} \quad y = \frac{1+a}{1+b}x$$

además los respectivos determinantes de las linealizaciones son:

$$D_1 = -(1+a) \neq 0 \quad \text{y} \quad D_2 = -(b+1) \neq 0$$

Los puntos singulares en el infinito son:

$$B_1 = (1, 0, 0), \quad B_2 = \left(1, \frac{1+a}{1+b}, 0\right) \quad \text{y} \quad B_3 = (0, 1, 0)$$

los respectivos determinantes de las linealizaciones del sistema en estos puntos son:

$$J_1 = 1+a \neq 0 \quad J_2 = -(1-ab)\frac{1+a}{1+b} = 0 \quad \text{y} \quad J_3 = 1+b \neq 0$$

Veamos que ocurre en  $B_2 = \left(1, \frac{1+a}{1+b}, 0\right)$ , para ello utilizamos el sistema (3.9)

$$\frac{dv}{d\tau} = v(a+1 - (1+b)v)$$

$$\frac{dz}{d\tau} = z(1 - z - bv)$$

para utilizar el teorema 1.5.1 trasladamos  $B_2 = (1, \frac{1+a}{1+b}, 0)$  al origen (hacemos  $x = v - \frac{1+a}{1+b}$ ,  $y = z$ ), obteniendo el siguiente sistema

$$\frac{dx}{d\tau} = x(1+a+(1+b)x)$$

$$\frac{dy}{d\tau} = y(y+bx)$$

el segundo miembro de la primera ecuación diferencial tiene término lineal en términos de  $x$ , así igualando a cero esta ecuación hallamos  $x = f(y)$ , los casos posibles son  $x = 0$  y  $x = -\frac{1+a}{1+b}$ ; para  $x = -\frac{1+a}{1+b}$ , resulta que  $g(y) = -y \left( y - b \left( \frac{1+a}{1+b} \right) \right)$  lo cual no puede ser puesto que  $g(y)$  debe ser de grado mayor o igual a dos; para  $x = 0$  el segundo miembro de la segunda ecuación resulta  $g(y) = y^2$ , lo cual implica que el punto singular  $B_2 = (1, \frac{1+a}{1+b}, 0)$  es semisilla nodal. Por lo tanto tenemos que el eje positivo  $y^+$  de  $B_2$  es una región parabólica y el eje negativo  $v^-$  es una región hiperólica.

Para los puntos singulares  $A_1$  y  $B_1$  tenemos

- Si  $a > -1$  entonces  $A_1$  es un punto silla y  $B_1$  es un punto nodal.
- Si  $a < -1$  entonces  $A_1$  es un punto nodal y  $B_1$  es un punto silla.

De la misma manera para  $A_2$  y  $B_2$  tenemos

- Si  $b > -1$  entonces  $A_2$  es un punto silla y  $B_2$  es un punto nodal.
- Si  $b < -1$  entonces  $A_2$  es un punto nodal y  $B_2$  es un punto silla.

Combinando estas opciones y usando el hecho que  $b = 1/a$ , concluimos lo siguiente

3.1)  $a < -1$  entonces  $A_1$  es un punto nodal y  $A_2$  es un punto silla.

3.2)  $-1 < a < 0$  entonces  $A_1$  es un punto silla y  $A_2$  es un punto nodal.

3.3)  $a > 0$  entonces  $A_1$  es un punto silla y  $A_2$  es un punto silla.

Los diagramas de fases para 3,1) y 3,2) presentan las mismas topologías, así que sólo tenemos dos diagramas de fase, cuando  $a > 0$  el diagrama de fase es como muestra la figura 3.6(a) en caso contrario es como muestra la figura 3.6(b).

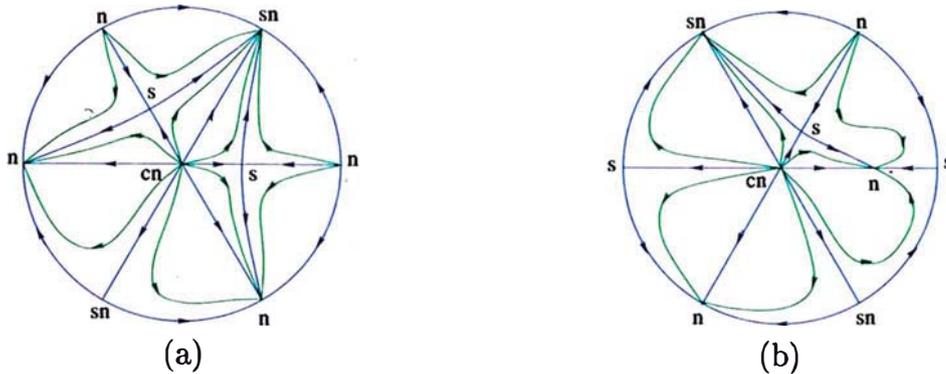


Figura 3.6: Sistemas con 3 Puntos Singulares y 3 Líneas Integrales.

### 3.3. El sistema tiene dos puntos singulares

**Teorema 3.3.1.** *Si un sistema cuadrático con dos puntos singulares finitos, uno de los cuales es punto estrella nodal y si hay sólo una línea integral pasando a través del origen, entonces el otro punto singular es un punto silla o un punto nodal. Los diagramas de fase global son como muestran la figura 3.7.*

*Si este sistema tiene dos líneas integrales pasando a través del origen, entonces el otro punto singular es punto semisilla nodal, punto silla o punto nodal. Los diagramas de fase global son como muestran las figura 3.8 y 3.9.*

*Si el sistema tiene tres líneas integrales pasando a través del origen, entonces el otro punto singular debe ser un punto silla y su diagrama de fase global es como se muestra en la figura 3.10. En todos estos casos no hay ciclos límites.*

#### Prueba

Consideremos el sistema (3.1), el cual tiene un nodo estelar en el origen y asumir que el otro punto singular es  $A_1 = (1, 0)$ , luego se debe cumplir que  $a_0 = 0$  y  $b_0 = -1$  entonces el sistema (3.1) puede ser escrito como

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x - x^2 + b_1xy + b_2y^2 \\ \frac{dy}{dt} &= y(1 + a_1x + a_2y)\end{aligned}\tag{3.13}$$

Denominemos  $L_1$  a la recta  $y = 0$ ,  $L_2$  a la curva  $x - x^2 + b_1xy + b_2y^2 = 0$  y  $L_3$  a la línea recta  $1 + a_1x + a_2y = 0$ .

Dividimos nuestro análisis en dos casos:

3.3.1)  $A_1 = (1, 0)$  es un punto singular doble.

3.3.2)  $A_1 = (1, 0)$  es un punto singular simple.

Ahora empezemos.

### 3.3.1. $A_1(1, 0)$ es un punto singular doble

Observe que  $L_2$  pasa por el origen y  $A_1$ , para que  $A_1$  sea punto doble,  $L_3$  debe pasar por  $A_1$  y sólo por  $A_1$  pues de no ser así, ya que  $L_3$  no pasa por el origen, originaría otro punto singular diferente a los dados, entonces  $A_1 \in L_3$  de lo cual tenemos  $a_1 = -1$ , además la ecuación de  $L_3$  ahora es  $1 - x + a_2y = 0$ . Entonces tenemos dos alternativas

1)  $L_3$  intersecta a  $L_2$  en  $A_1$  tangencialmente.

2)  $L_3$  intersecta a  $L_2$  en  $A_1$  no tangencialmente.

Veamos el primer caso

1)  $L_3$  interseca a  $L_2$  en  $A_1$  tangencialmente.

La pendiente de la recta tangente a  $L_2$  en  $A_1$  es  $1/b_1$ , la pendiente de  $L_3$  es  $1/a_2$  ( $a_2 \neq 0$  para que exista la pendiente); por lo tanto se debe cumplir  $a_2 = b_1$ . De  $L_3$  despejamos  $x = 1 + a_2y$  y reemplazamos este valor en la ecuación de  $L_2$  y obtenemos  $b_2y^2 = 0$  por la unicidad de  $A_1$  debemos tener que  $b_2 \neq 0$ .

Reemplazando estos valores en el sistema (3.13) obtenemos

$$\frac{dx}{dt} = x - x^2 + b_1xy + b_2y^2$$

$$\frac{dy}{dt} = y(1 - x + b_1y)$$

puesto que  $b_2 \neq 0$ , este sistema no tiene factor común; además tiene una línea integral  $y = 0$ .

Hacemos la transformación  $u = 1 - x + b_1y$  y  $v = y$ , luego el punto singular  $A_1 = (1, 0)$  es trasladado al origen, obteniendo

$$\frac{du}{dt} = -u + u^2 - b_2v^2 \tag{3.14}$$

$$\frac{dv}{dt} = uv$$

La matriz de linealización en  $(0, 0)$  es

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

la cual tiene determinante igual a cero; pero traza  $-1$ , por el teorema 1.5.1 obtenemos

- Si  $b_2 > 0$ , entonces  $A_1$  es un punto nodal.
- Si  $b_2 < 0$ , entonces  $A_1$  es un punto silla.

Veamos lo que ocurre en el infinito, para ello llevamos el sistema (3.14) a coordenadas homogéneas, ( $u = x/z, v = y/z$ ) obteniendo

$$z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt} = xz - x^2 + b_2 y^2$$

$$z \frac{dy}{dt} - y \frac{dz}{dt} = -xy$$
(3.15)

para conocer los puntos singulares en el infinito de la forma  $(1, y_i, 0)$ , hacemos  $x = 1$  en (3.15), obtenemos

$$\frac{dy}{d\tau} = -y(z + b_2 y^2)$$

$$\frac{dz}{d\tau} = z(1 - z - b_2 y^2)$$

este sistema tiene como punto singular a  $(1,0,0)$ . La matriz de linealización del sistema anterior en este punto es

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

la cual tiene determinante nulo; pero traza igual a 1, por el teorema 1.5.1 concluimos que

- Si  $b_2 > 0$  entonces  $(1, 0, 0)$  es un punto silla.
- Si  $b_2 < 0$  entonces  $(1, 0, 0)$  es un punto nodal.

Para conocer los puntos singulares en el infinito de la forma  $(x_i, 1, 0)$  hacemos  $y = 1$  en el sistema (3.15) y reduciendo se consigue

$$\frac{dx}{d\tau} = xz + b_2$$

$$\frac{dz}{d\tau} = xz$$

puesto que  $b_2 \neq 0$ , no existe puntos singulares de la forma  $(x_i, 1, 0)$ . El diagrama de fase global cuando  $b_2 > 0$  es mostrado en la figura 3.7(a) y cuando  $b_2 < 0$  es mostrado en la figura 3.7(b).

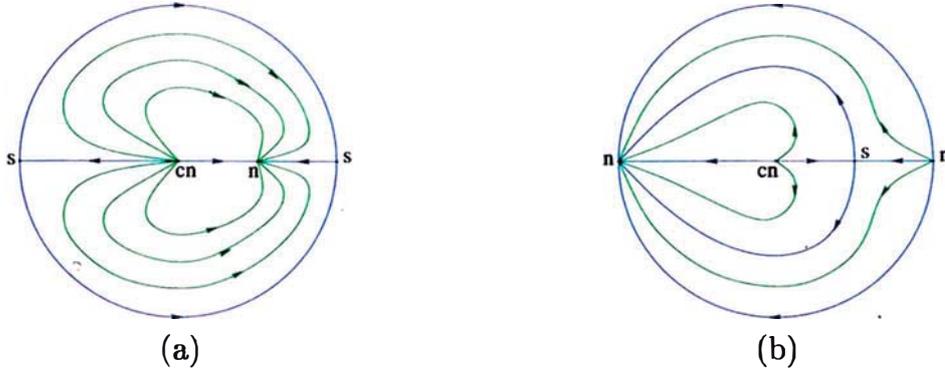


Figura 3.7: Sistemas con 1 Línea Integral

2)  $L_3$  interseca a  $L_2$  en  $A_1$  no tangencialmente.

La pendiente de  $L_3$  debe ser diferente a la pendiente de  $L_2$  en  $A_1$  entonces se debe cumplir que  $a_2 \neq b_1$ . De la ecuación de  $L_3$  despejamos  $x = 1 + a_2y$  y reemplazamos en la ecuación de  $L_2$  obteniendo

$$y[b_1 - a_2 - (a_2^2 - a_2b_1 - b_2)y] = 0$$

puesto que  $a_2 \neq b_1$ , por la unicidad de  $A_1$  debemos tener que  $a_2^2 - a_2b_1 - b_2 = 0$ . Si hacemos  $b_1 - a_2 = a$  entonces  $a \neq 0$ , además se cumple que  $b_2 = a_2(a_2 - b_1) = -a_2a$

El sistema (3.13) se convierte en

$$\frac{dx}{dt} = x - x^2 + (a + a_2)xy - aa_2y^2$$

$$\frac{dy}{dt} = y(1 - x + a_2y)$$

puesto que  $a \neq 0$ , nos garantiza que no hay factor.

Hacemos la transformación  $u = x - a_2y - 1$  y  $v = y$ , luego el punto singular  $A_1 = (1, 0)$  es trasladado al origen, obteniendo

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= (u + 1)(u - av) \\ \frac{dv}{dt} &= uv\end{aligned}\tag{3.16}$$

La matriz de linealización en  $(0, 0)$  es

$$A = \begin{bmatrix} -1 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

la cual tiene determinante igual a cero; pero traza igual a  $-1$ , pero por el teorema 1.5.1 concluimos que  $A_1$  es un punto semisilla nodal. Por lo tanto tenemos:

- a) Si  $a > 0$  el eje positivo  $v^+$  de  $A_1$  es una región parabólica y el eje negativo  $v^-$  es una región hiperbólica.
- b) Si  $a < 0$  el eje positivo  $v^+$  de  $B_2$  es una región hiperbólica y el eje negativo  $v^-$  es una región parabólica.

Veamos lo que ocurre en el infinito, para ello llevamos el sistema (3.16) a coordenadas homogéneas, ( $u = x/z, v = y/z$ ) obteniendo

$$\begin{aligned}z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt} &= -xz + ayz + axy - x^2 \\ z \frac{dy}{dt} - y \frac{dz}{dt} &= -xy\end{aligned}\tag{3.17}$$

para conocer los puntos singulares en el infinito de la forma  $(1, y_i, 0)$  hacemos  $x = 1$  en el sistema (3.17), reduciendo obtenemos

$$\frac{dy}{d\tau} = y(z - ay - ayz)$$

$$\frac{dz}{d\tau} = z(1 + z)(1 - ay)$$

tiene como punto singular a  $(1, 0, 0)$ . La matriz de linealización en  $(1, 0, 0)$  es

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

la cual tiene determinante nulo; pero traza igual a 1, pero por el teorema 1.5.1 concluimos que  $(1, 0, 0)$  es un punto semisilla nodal. Por lo tanto tenemos:

- a) Si  $a > 0$  el eje positivo  $y^+$  de  $(1, 0, 0)$  es una región hiperbólica y el eje negativo  $y^-$  es una región parabólica.
- b) Si  $a < 0$  el eje positivo  $y^+$  de  $(1, 0, 0)$  es una región parabólica y el eje negativo  $v^-$  es una región hiperólica.

Para conocer los puntos singulares en el infinito de la forma  $(x_i, 1, 0)$  hacemos  $y = 1$  en el sistema (3.17) y reduciendo se consigue

$$\frac{dx}{d\tau} = ax + az - xz$$

$$\frac{dz}{d\tau} = xz$$

tiene como punto singular a  $(0, 1, 0)$ . La matriz de linealización en  $(0, 1, 0)$  es

$$B = \begin{bmatrix} a & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

esta matriz tiene determinante nulo; pero traza igual a  $a \neq 0$  por el teorema 1.5.1 concluimos que  $(0, 1, 0)$  es un punto semisilla nodal.

El diagrama de fase global es mostrado en la figura 3.8.

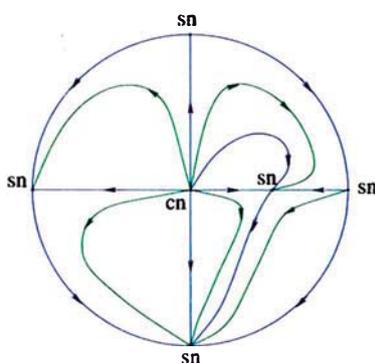


Figura 3.8: Sistema con 2 Líneas Integrales

### 3.3.2. $A_1$ es un punto singular simple

Tengamos en consideración el sistema (3.13)

$$\frac{dx}{dt} = x - x^2 + b_1xy + b_2y^2$$

$$\frac{dy}{dt} = y(1 + a_1x + a_2y)$$

Para que  $A_1 = (1, 0)$  sea un punto singular simple  $L_3$  no debe pasar por  $A_1$ , esto implica que  $a_1 \neq -1$ .

Consideremos dos casos:

1.)  $a_2 \neq 0$ .

De la ecuación de  $L_3$  despejamos  $y = -\frac{1 + a_1x}{a_2}$  este valor no debe satisfacer la ecuación de  $L_2$ , pues originaría otro punto singular; pero si reemplazamos este valor en la ecuación de  $L_2$ , ésta debe ser diferente de cero y si además hacemos

$$a = a_1 \neq -1, \quad b = -\frac{b_1}{a_2} \quad y \quad c = \frac{b_2}{a_2^2}$$

simplificando, obtenemos

$$(ca^2 + ab - 1)x^2 + (2ac + b + 1)x + c \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

obtenemos dos casos

$$1.1) \Delta = (2ac + b + 1)^2 - 4(ca^2 + ab - 1)c < 0$$

$$1.2) ca^2 + ab - 1 = 0, \quad 2ac + b + 1 = 0 \quad y \quad c \neq 0$$

resolviendo estas ecuaciones estos casos son equivalentes a

$$1.1) (b + 1)^2 + 4c(1 + a) < 0$$

$$1.2) a \neq 0 \quad b = \frac{a + 2}{a} \quad y \quad c = -\frac{a + 1}{a} \neq 0$$

Desarrollemos cada uno de estos casos:

$$1.1) (b + 1)^2 + 4c(1 + a) < 0$$

El sistema (3.13) se convierte en

$$\frac{dx}{dt} = x - x^2 - ba_2xy + ca_2^2y^2$$

$$\frac{dy}{dt} = y(1 + ax + a_2y)$$

hacemos un cambio de variables a este sistema  $u = x$  y  $v = -a_2y$ ; el punto singular  $A_1 = (1, 0)$  se mantiene, obtenemos nuevamente

en términos de  $x - y$

$$\frac{dx}{dt} = x - x^2 + bxy + cy^2 \quad (3.18)$$

$$\frac{dy}{dt} = y(1 + ax - y)$$

este sistema tiene a  $y = 0$  como una línea integral. La matriz de linealización del sistema en  $A_1$  es

$$A = \begin{bmatrix} -1 & b \\ 0 & 1 + a \end{bmatrix}$$

esta matriz tiene determinante  $-(1 + a)$ , lo cual indica

- Si  $a > -1$  entonces  $A_1$  es punto silla.
- Si  $a < -1$  entonces  $A_1$  es punto nodal.

Veamos si el sistema tiene puntos singulares en el infinito, pasando el sistema (3.18) a coordenadas homogéneas obtenemos

$$z \frac{du}{dt} - u \frac{dz}{dt} = uz - u^2 + buv + cv^2 \quad (3.19)$$

$$z \frac{dv}{dt} - v \frac{dz}{dt} = v(z + au - v)$$

Para hallar los puntos singulares en el infinito de la forma  $(1, v_i, 0)$ , hacemos  $u = 1$  en (3.19) y obtenemos

$$\frac{dv}{d\tau} = v(1 + a - (1 + b)v - cv^2)$$

$$\frac{dz}{d\tau} = z(1 - z - bv - cv^2)$$

puesto que  $(b + 1)^2 + 4c(1 + a) < 0$  el único punto singular es  $(1, 0, 0)$ . La matriz de linealización en este punto singular es

$$B = \begin{bmatrix} 1 + a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

el determinante de esta matriz es  $1 + a$  con lo cual concluimos que

- Si  $a > -1$  entonces  $(1, 0, 0)$  es un punto nodal.
- Si  $a < -1$  entonces  $(1, 0, 0)$  es un punto silla.

Ahora hallamos los puntos singulares en el infinito de la forma  $(u_i, 1, 0)$ , haciendo  $v = 1$  en (3.19) y obtenemos

$$\frac{du}{dt} = -(1 + a)u^2 + (1 + b)u + c$$

$$\frac{dz}{dt} = z(1 - z - au)$$

desde que  $(b + 1)^2 + 4c(1 + a) < 0$  este sistema no tiene puntos singulares. EL diagrama de fase global cuando  $a > -1$  se muestra en la figura 3.7(a), pero si  $a < -1$  se muestra en la figura 3.7(b).

$$1.2) \quad a \neq 0 \quad b = \frac{a + 2}{a} \quad \text{y} \quad c = -\frac{a + 1}{a} \neq 0$$

Efectuando estos cambios en el sistema (3.18) obtenemos

$$\frac{dx}{dt} = x - x^2 + \left(\frac{a + 2}{a}\right)xy - \left(\frac{a + 1}{a^2}\right)y^2 \tag{3.20}$$

$$\frac{dy}{dt} = y(1 + ax - y)$$

puesto que  $a \neq -1$ , este sistema no tiene factor común; además tiene tres líneas integrales  $y = 0$ ,  $y = ax$  e  $y = a(x - 1)$ , dos de los cuales pasan por el origen.

La matriz de linealización del sistema en  $A_1$  es

$$A = \begin{bmatrix} -1 & \frac{a+2}{a} \\ 0 & a+1 \end{bmatrix}$$

el determinante de esta matriz es  $-(a+1)$ , con lo cual concluimos

- Si  $a > -1$  entonces  $A_1$  es punto silla.
- Si  $a < -1$  entonces  $A_1$  es punto nodal.

Veamos si el sistema tiene puntos singulares en el infinito. llevando a coordenadas homogéneas el sistema (3.20), obtenemos el sistema

$$z \frac{du}{dt} - u \frac{dz}{dt} = uz - u^2 + \frac{(a+2)}{a}uv - \frac{(a+1)}{a^2}v^2 \quad (3.21)$$

$$z \frac{dv}{dt} - v \frac{dz}{dt} = v(z + au - v)$$

Para hallar los puntos singulares en el infinito de la forma  $(1, v_i, 0)$  hacemos en (3.21)  $u = 1$  y obtenemos el sistema

$$\frac{dv}{d\tau} = \frac{(a+1)}{a^2}v(v-a)^2$$

$$\frac{dz}{d\tau} = z\left(1 - z - \frac{(a+2)}{a}v + \frac{(a+1)}{a^2}v^2\right)$$

este sistema tiene por puntos singulares a  $(1, 0, 0)$  y  $(1, a, 0)$ .

La matriz de linealización de este sistema en el punto singular  $(1, 0, 0)$  es

$$B = \begin{bmatrix} a+1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

el determinante de esta matriz es  $a+1 \neq 0$ , por tanto concluimos

- Si  $a > -1$  entonces  $(1, 0, 0)$  es un punto nodal.
- Si  $a < -1$  entonces  $(1, 0, 0)$  es un punto silla.

La matriz de linealización de este sistema en el punto singular  $(1, a, 0)$  es

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

nos da como resultado la matriz nula, veamos que sucede en  $(1, a, 0)$ .

Trasladamos  $(1, a, 0)$  al origen ( $y = v - a$ ,  $z = z$ ) obteniendo

$$\frac{dy}{d\tau} = \frac{(a+1)}{a^2}(y+a)y^2$$

$$\frac{dz}{d\tau} = z\left(-z + \frac{(2-a^2)}{a^2}y + \frac{(a+1)}{a^2}y^2\right)$$

según el teorema 1.5.4 es suficiente considerar el sistema

$$\frac{dy}{d\tau} = \frac{a+1}{a}y^2$$

$$\frac{dz}{d\tau} = z\left(-z + \frac{(2-a^2)}{a^2}y\right)$$

el cual es un sistema cuadrático homogéneo, por el teorema 2.1.4, el diagrama de fase en el punto  $(1, a, 0)$  es como muestra la figura 2.5(b); concluimos que el punto singular  $(1, a, 0)$  es un punto semisilla nodal.

Para hallar los puntos singulares en el infinito de la forma  $(u_i, 1, 0)$  hacemos en (3.21)  $v = 1$  y obtenemos el sistema

$$\frac{du}{d\tau} = \frac{(a+1)}{a^2}(1-au)^2$$

$$\frac{dz}{d\tau} = z(1-z-au)$$

este sistema posee por punto singular a  $(1/a, 1, 0)$  el cual es igual a  $(1, a, 0)$ .

El diagrama de fase cuando  $a > -1$  es como muestra la figura 3.9(a) y cuando  $a < -1$  es como muestra la figura 3.9(b).

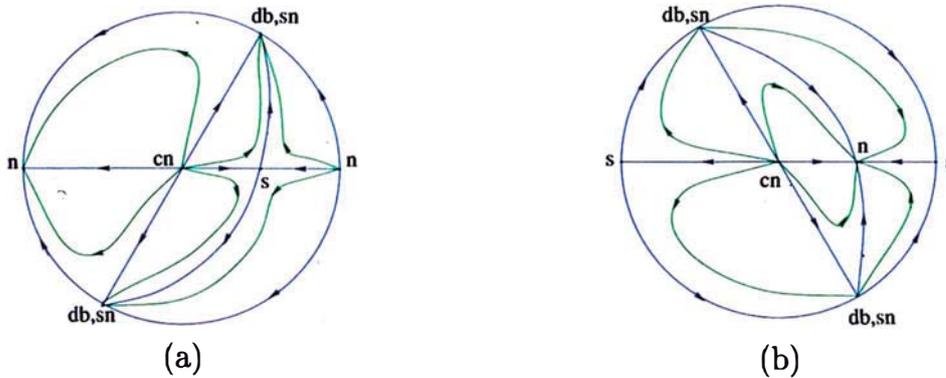


Figura 3.9: Sistemas con 3 Líneas Integrales 2 de ellas pasando por el Origen

2.)  $a_2 = 0$ .

El sistema considerado (3.13) se convierte en

$$\frac{dx}{dt} = x - x^2 + b_1xy + b_2y^2$$

$$\frac{dy}{dt} = y(1 + a_1x)$$

recordemos que  $A_1 \notin L_3$  entonces  $a_1 \neq -1$ . Haciendo  $a = a_1$ ,  $b = b_1$  y  $c = b_2$  el sistema puede escribirse de la forma

$$\frac{dx}{dt} = x - x^2 + bxy + cy^2 \tag{3.22}$$

$$\frac{dy}{dt} = y(1 + ax)$$

Usando el hecho que  $L_3$  no debe intersectar a  $L_2$ , para que  $A_1$  sea simple, conseguimos tres casos, veamos:

$$2.1) \ a = a_1 \neq 0, \ b^2 + 4c(1 + a) < 0$$

El sistema (3.22) tiene una línea integral  $y = 0$ .

La matriz de linealización del sistema en  $A_1$  es

$$A = \begin{bmatrix} -1 & b \\ 0 & a + 1 \end{bmatrix}$$

el determinante de esta matriz es  $-(a + 1) \neq 0$  por lo cual concluimos

- Si  $a > -1$  entonces  $A_1$  es un punto silla.
- Si  $a < -1$  entonces  $A_1$  es un punto nodal.

Veamos si el sistema tiene puntos singulares en el infinito; llevando a coordenadas homogéneas el sistema (3.22), obtenemos

$$z \frac{du}{dt} - u \frac{dz}{dt} = uz - u^2 + buv + cv^2 \tag{3.23}$$

$$z \frac{dv}{dt} - v \frac{dz}{dt} = v(z + au)$$

Para hallar los puntos singulares en el infinito de la forma  $(1, v_i, 0)$  hacemos en (3.23)  $u = 1$  y obtenemos el sistema

$$\frac{dv}{d\tau} = v(a + 1 - bv - cv^2)$$

$$\frac{dz}{d\tau} = z(1 - z - bv - cv^2)$$

puesto que  $b^2 + 4c(a + c) < 0$  este sistema tiene un único punto singular  $(1, 0, 0)$ . La matriz de linealización en  $(1, 0, 0)$  es

$$B = \begin{bmatrix} a + 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

el determinante de esta matriz es  $a + 1 \neq 0$ , con lo cual concluimos

- Si  $a > -1$  entonces  $(1, 0, 0)$  es un punto nodal.
- Si  $a < -1$  entonces  $(1, 0, 0)$  es un punto silla.

Para hallar los puntos singulares en el infinito de la forma  $(u_i, 1, 0)$  hacemos en (3.23)  $v = 1$  y obtenemos el sistema

$$\frac{du}{d\tau} = c + bu - (a + 1)u^2$$

$$\frac{dz}{d\tau} = -z(z + au)$$

este sistema no tiene puntos singulares de la forma requerida, puesto que  $b^2 + 4c(a + 1) < 0$ .

Concluimos que para este caso tenemos dos diagramas de fase los cuales son mostrados en la figura 3.7.

2.2)  $a = a_1 \neq 0$ ,  $a \neq -1$ ,  $b = 0$  y  $c = 0$ .

El sistema (3.22) se transforma en

$$\frac{dx}{dt} = x - x^2 \tag{3.24}$$

$$\frac{dy}{dt} = y(1 + ax)$$

puesto que  $a \neq -1$ , no hay factor común. Este sistema tiene tres líneas integrales  $x = 0$ ,  $x = 1$  e  $y = 0$ .

La matriz de linealización de este sistema en  $A_1$  es

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & a + 1 \end{bmatrix}$$

el determinante de esta matriz es  $-(a + 1)$ , con lo cual concluimos

- Si  $a > -1$  entonces  $A_1$  es un punto silla.
- Si  $a < -1$  entonces  $A_1$  es un punto nodal.

Veamos si el sistema tiene puntos singulares en el infinito; llevando a coordenadas homogéneas el sistema (3.24), obtenemos

$$z \frac{du}{dt} - u \frac{dz}{dt} = uz - u^2$$

$$z \frac{dv}{dt} - v \frac{dz}{dt} = v(z + au)$$
(3.25)

Para hallar los puntos singulares en el infinito de la forma  $(1, v_i, 0)$  hacemos en (3.25)  $u = 1$  y obtenemos el sistema

$$\frac{dv}{d\tau} = (a + 1)v$$

$$\frac{dz}{d\tau} = z(1 - z)$$

este sistema tiene como punto singular a  $(1, 0, 0)$ . La matriz de linealización en  $(1, 0, 0)$  es

$$B = \begin{bmatrix} a + 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

el determinante de esta matriz es  $a + 1$ , con lo cual concluimos

- Si  $a > -1$  entonces  $(1, 0, 0)$  es un punto nodal.
- Si  $a < -1$  entonces  $(1, 0, 0)$  es un punto silla.

Para hallar los puntos singulares en el infinito de la forma  $(u_i, 1, 0)$  hacemos en (3.25)  $v = 1$  y obtenemos el sistema

$$\frac{du}{d\tau} = -(a + 1)u^2$$

$$\frac{dz}{d\tau} = -z(z + au)$$

este sistema tiene por punto singular a  $(0, 1, 0)$ , es un sistema cuadrático homogéneo desarrollado en el capítulo 2. Por el teorema 2.1.4 concluimos que  $(0, 1, 0)$  es un punto semisilla nodal.

Para este caso tenemos dos diagramas de fase mostrados en la figura 3.9.

2.3)  $a = a_1 = 0$ .

El sistema (3.22) viene a ser

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x - x^2 + bxy + cy^2 \\ \frac{dy}{dt} &= y \end{aligned} \tag{3.26}$$

este sistema tiene una línea integral  $y = 0$ .

La matriz de linealización en  $A_1 = (1, 0)$  es

$$A = \begin{bmatrix} -1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

el determinante de esta matriz es  $-1$ , por lo tanto  $A_1$  es un punto silla.

Veamos si el sistema tiene puntos singulares en el infinito. llevando el sistema (3.26) a coordenadas homogéneas, obtenemos

$$\begin{aligned} z \frac{du}{dt} - u \frac{dz}{dt} &= uz - u^2 + buv + cv^2 \\ z \frac{dv}{dt} - v \frac{dz}{dt} &= vz \end{aligned} \tag{3.27}$$

Para hallar los puntos singulares en el infinito de la forma  $(1, v_i, 0)$  hacemos en (3.27)  $u = 1$  y obtenemos el sistema

$$\frac{dv}{d\tau} = v(1 - bv - cv^2)$$

$$\frac{dz}{d\tau} = z(1 - z - bv - cv^2)$$

Para hallar los puntos singulares en el infinito de la forma  $(u_i, 1, 0)$  hacemos en (3.27)  $v = 1$  y obtenemos el sistema

$$\frac{du}{d\tau} = c + bu - u^2$$

$$\frac{dz}{d\tau} = -z^2$$

Tenemos 3 casos. Veamos cada caso por separado

2.3.1)  $\Delta = b^2 + 4c < 0$

El sistema tiene un único punto singular:  $(1, 0, 0)$ . La matriz de linealización del sistema correspondiente en  $(1, 0, 0)$  es

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

el determinante de esta matriz es 1, lo cual indica que  $(1, 0, 0)$  es un punto nodal. El retrato de fase global es como muestra la figura 3.7(b).

2.3.2)  $\Delta = b^2 + 4c = 0$

El sistema (3.26) tiene tres líneas integrales

$$y = 0, \quad by - 2x = 0 \quad y \quad by - 2(x - 1) = 0$$

Los puntos singulares en el infinito son  $(1, 0, 0)$  y  $(b/2, 1, 0)$ . La matriz de linealización del sistema correspondiente en  $(1, 0, 0)$  es

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

el determinante de esta matriz es 1, lo cual indica que  $(1, 0, 0)$  es un punto nodal.

La matriz de linealización del sistema correspondiente en  $(b/2, 1, 0)$  es

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

veamos que ocurre en  $(b/2, 1, 0)$ , el sistema lineal correspondiente es

$$\frac{du}{d\tau} = -\frac{b^2}{4} + bu - u^2$$

$$\frac{dz}{d\tau} = -z^2$$

trasladamos  $(b/2, 1, 0)$  al origen y el sistema se escribe como

$$\frac{du}{d\tau} = -u^2$$

$$\frac{dz}{d\tau} = -z^2$$

resulta un sistema cuadrático homogéneo, el cual a sido resuelto en el capítulo 2, por el teorema 2.1.4 concluimos que  $(b/2, 1, 0)$  es un punto semisilla nodal. El retrato de fase global es como muestra la figura 3.9(a).

$$2.3.3) \Delta = b^2 + 4c > 0$$

Este sistema tiene tres líneas integrales  $y = 0$ ,  $y = v_1x$  y  $y = v_2x$ , donde  $v_1$  y  $v_2$  son raíces de la ecuación  $1 - bv - cv^2 = 0$ .

Los puntos singulares en el infinito son  $(1, 0, 0)$ ,  $(1, v_1, 0)$  y  $(1, v_2, 0)$ , además tiene como puntos singulares a  $(u_1, 1, 0)$  y  $(u_2, 1, 0)$ , donde  $u_1$  y  $u_2$  son raíces de la ecuación  $c + bu - u^2 = 0$ ; pero observamos que  $u_i = 1/v_i$ , es decir los puntos singulares  $(u_1, 1, 0)$  y  $(u_2, 1, 0)$  son los mismos que  $(1, v_1, 0)$  y  $(1, v_2, 0)$

La matriz de linealización de este sistema en  $(1, 0, 0)$  es

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

el determinante de esta matriz es 1, lo cual indica que  $(1, 0, 0)$  es un punto nodal.

La matriz de linealización del sistema correspondiente a  $(1, v_1, 0)$  es

$$B = \begin{bmatrix} 1 - 2bv_1 - 3v_1^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

el determinante de esta matriz es cero, pero la traza es diferente de cero, por el teorema 1.5.1 concluimos que  $(1, v_1, 0)$  es un punto semisilla nodal.

La matriz de linealización de este sistema en  $(1, v_2, 0)$  es

$$B = \begin{bmatrix} 1 - 2bv_2 - 3v_2^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

el determinante de esta matriz es cero, pero la traza es diferente de cero, por el teorema 1.5.1 concluimos que  $(1, v_2, 0)$  es un punto semisilla

nodal. En conclusión este caso tiene un sólo diagrama de fase, mostrado en la figura 3.10.

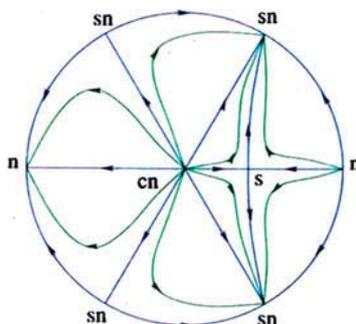


Figura 3.10: Sistema con 3 Líneas Integrales pasando por el Origen

### 3.4. El sistema tiene un sólo punto singular

**Teorema 3.4.1.** *Si un sistema cuadrático tiene un único punto singular, el cual es un punto estrella nodal, entonces hay tres y sólo tres casos.*

- 1.) *Tiene una sola línea integral pasando a través del origen.*
- 2.) *Tiene sólo dos líneas integrales, una de las cuales pasa por el origen.*
- 3.) *Tiene sólo dos líneas integrales, ambas pasan por el origen.*

*Este sistema no tiene ciclos límites. La estructura global se muestra en la figuras 3.11, 3.12 y 3.13.*

#### Prueba

Si asumimos que el único punto singular es  $O = (0, 0)$  y consideramos el sistema (3.1); por medio de una rotación de ejes podemos hacer que  $b_2 = 0$ , con

lo cual conseguimos que (3.1) tenga la forma

$$\frac{dx}{dt} = x + b_0x^2 + b_1xy$$

$$\frac{dy}{dt} = y + a_0x^2 + a_1xy + a_2y^2$$

por la unicidad del punto singular  $O$ , tenemos  $a_2 = 0$ ; por lo tanto tenemos

$$\frac{dx}{dt} = x(1 + b_0x + b_1y) \tag{3.28}$$

$$\frac{dy}{dt} = y + a_0x^2 + a_1xy$$

Denominemos  $L_1$  a la línea  $1 + b_0x + b_1y = 0$  y  $L_2$  a la curva  $y + a_0x^2 + a_1xy = 0$ . Notemos que  $L_1$  no pasa por el origen, de ahí que  $L_1$  no debe intersectarse con  $L_2$ , de lo contrario generaría otro punto singular distinto de  $O$ ; este análisis trae como consecuencia dos casos:

$$1) \ b_1 \neq 0 \text{ y } (b_0 - a_1)^2 + 4a_0b_1 < 0$$

$$2) \ b_1 = 0$$

Analizamos ambos casos por separado

$$1) \ b_1 \neq 0 \text{ y } (b_0 - a_1)^2 + 4a_0b_1 < 0$$

Veamos si el sistema tiene puntos singulares en el infinito. llevando a coordenadas homogéneas el sistema (3.28), obtenemos el sistema

$$z \frac{du}{dt} - u \frac{dz}{dt} = u(z + b_0u + b_1v) \tag{3.29}$$

$$z \frac{dv}{dt} - v \frac{dz}{dt} = vz + a_0u^2 + a_1uv$$

Para hallar los puntos singulares en el infinito de la forma  $(1, v_i, 0)$  hacemos en (3.29)  $u = 1$  y obtenemos el sistema

$$\frac{dv}{d\tau} = a_0 + (a_1 - b_0)v - b_1v^2$$

$$\frac{dz}{d\tau} = -z(b_0 + z + b_1v)$$

puesto que  $(b_0 - a_1)^2 + 4a_0b_1 < 0$ , este sistema no tiene puntos singulares.

Para hallar los puntos singulares en el infinito de la forma  $(u_i, 1, 0)$  hacemos en (3.29)  $v = 1$  y obtenemos el sistema

$$\frac{du}{d\tau} = u(b_1 + (b_0 - a_1)u - a_0u^2)$$

$$\frac{dz}{d\tau} = -z(z + a_1u + a_0u^2)$$

puesto que  $(b_0 - a_1)^2 + 4a_0b_1 < 0$ , este sistema tiene como único punto singular a  $(0, 1, 0)$ . La matriz de linealización de este sistema es

$$B = \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

el determinante de esta matriz es cero; pero la traza es  $b_1 \neq 0$ , por el teorema 1.5.1 concluimos que  $(0, 1, 0)$  es un punto semisilla nodal. El diagrama de fase global es mostrado en la figura 3.11.

2)  $b_1 = 0$

El sistema (3.28) se reduce a

$$\frac{dx}{dt} = x(1 + b_0x) \tag{3.30}$$

$$\frac{dy}{dt} = y + a_1xy + a_0x^2$$

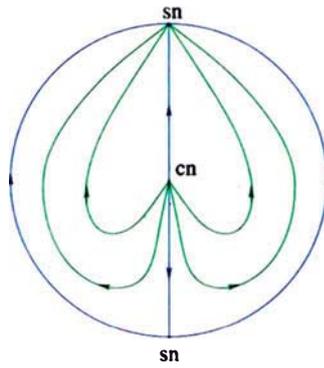


Figura 3.11: Sistema con 1 Línea Integral pasando por el Origen.

este sistema tiene una línea integral  $y = 0$ . Consideremos dos casos:

2.1)  $b_0 \neq 0$

Considerando que  $L_1$  no interseca a  $L_2$ , conseguimos  $b_0 = a_1$  y  $a_0 \neq 0$  con esto, el sistema (3.30) puede ser escrito como

$$\frac{dx}{dt} = x(1 + a_1x) \tag{3.31}$$

$$\frac{dy}{dt} = y + a_1xy + a_0x^2$$

puesto que  $a_0 \neq 0$ , entonces el sistema no tiene factor común. El sistema tiene dos líneas integrales  $x = 0$  y  $a_1x + 1 = 0$ .

Llevamos el sistema (3.31) a coordenadas homogéneas para saber si tiene puntos singulares en el infinito, obtenemos

$$z \frac{du}{dt} - u \frac{dz}{dt} = uz + a_1u^2 \tag{3.32}$$

$$z \frac{dv}{dt} - v \frac{dz}{dt} = vz + a_0u^2 + a_1uv$$

para encontrar los puntos singulares en el infinito de la forma  $(1, v_i, 0)$  hacemos  $u = 1$  en el sistema (3.32) y conseguimos

$$\frac{dv}{d\tau} = a_0$$

$$\frac{dz}{d\tau} = -z(a_1 + z)$$

este sistema no tiene puntos singulares de esta forma.

Para encontrar los puntos singulares en el infinito de la forma  $(u_i, 1, 0)$  hacemos  $v = 1$  en el sistema (3.32) y conseguimos

$$\frac{du}{d\tau} = -a_0u^3$$

$$\frac{dz}{d\tau} = -z(z + a_1u + a_0u^2)$$

el punto singular es  $(0, 1, 0)$ . La matriz de linealización en este punto es

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

por el análisis realizado en la sección 1.5 y según el teorema 1.5.4 concluimos que el punto  $(0, 1, 0)$  es un punto semisilla nodal.

Por lo tanto el diagrama de fase está totalmente determinado y es como muestra la figura 3.12.

## 2.2) $b_0 = 0$

El sistema (3.30) es cambiado a

$$\frac{dx}{dt} = x \tag{3.33}$$

$$\frac{dy}{dt} = y + a_0x^2 + a_1xy$$

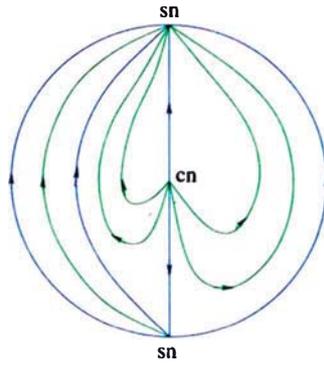


Figura 3.12: Sistema con 2 Líneas Integrales una de ellas pasando por el Origen

Este sistema tiene dos líneas integrales  $x = 0$  y  $a_0x + a_1y = 0$ .

Pasamos el sistema (3.33) a coordenadas homogéneas para saber si tiene puntos singulares en el infinito, obtenemos

$$z \frac{d u}{d t} - u \frac{d z}{d t} = uz \tag{3.34}$$

$$z \frac{d v}{d t} - v \frac{d z}{d t} = vz + a_0u^2 + a_1uv$$

para encontrar los puntos singulares en el infinito de la forma  $(1, v_i, 0)$  hacemos  $u = 1$  en el sistema (3.34) y conseguimos

$$\frac{d v}{d \tau} = a_0 + a_1v$$

$$\frac{d z}{d \tau} = -z^2$$

para encontrar los puntos singulares en el infinito de la forma  $(u_i, 1, 0)$  hacemos  $v = 1$  en el sistema y conseguimos

$$\frac{d u}{d \tau} = -u^2(a_1 + a_0u)$$

$$\frac{d z}{d \tau} = -z(z + a_1u + a_0u^2)$$

considerando que los coeficientes  $a_0$  y  $a_1$  pueden ser nulos o no (pero no ambos a la vez, si no el sistema ya no sería cuadrático) tenemos tres casos:

2.2.1)  $a_0 \neq 0$  y  $a_1 \neq 0$

Los puntos singulares en el infinito son  $(1, -a_0/a_1, 0)$  y  $(0, 1, 0)$ . La respectiva matriz de linealización en  $(1, -a_0/a_1, 0)$  es

$$B = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

el determinante de esta matriz es cero, pero su traza es  $a_1 \neq 0$ ; por el teorema 1.5.1 concluimos que  $(1, -a_0/a_1, 0)$  es un punto semisilla nodal.

La respectiva matriz de linealización en  $(0, 1, 0)$  es

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

veamos que sucede en  $(0, 1, 0)$ ; por el análisis realizado en la sección 1.5 es suficiente considerar el sistema

$$\frac{du}{d\tau} = -a_1 u^2$$

$$\frac{dz}{d\tau} = -z^2 - a_1 uz$$

el cual resulta un sistema cuadrático homogéneo desarrollado en el capítulo 2; por el teorema 2.1.3 el diagrama de fase en  $(0, 1, 0)$  es como el diagrama de fase en el origen de la figura 2.4(b); concluimos que  $(0, 1, 0)$  es un punto semisilla nodal. El diagrama de fase global es como muestra la figura 3.13.

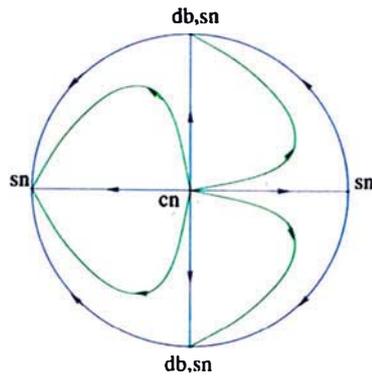


Figura 3.13: Sistema con 2 Líneas Integrales pasando por el Origen

2.2.2)  $a_0 \neq 0$  y  $a_1 = 0$

El único punto singular es  $(0, 1, 0)$ . La matriz de linealización en  $(0, 1, 0)$  es

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

pero por el análisis realizado en la sección 1.5 y según el teorema 1.5.4 concluimos que  $(0, 1, 0)$  es un punto semisilla nodal. El diagrama de fase global es como muestra la figura 3.12.

2.2.3)  $a_0 = 0$  y  $a_1 \neq 0$

Los puntos singulares en el infinito son  $(1, 0, 0)$  y  $(0, 1, 0)$ . La matriz de linealización respectiva en  $(1, 0, 0)$  es

$$B = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

el determinante de esta matriz es cero, por el teorema 1.5.1 concluimos que  $(1, 0, 0)$  es un punto semisilla nodal.

La matriz de linealización respectiva en  $(0, 1, 0)$  es

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

veamos que sucede  $(0, 1, 0)$ ; el sistema correspondiente es

$$\frac{du}{d\tau} = -a_1 u^2$$

$$\frac{dz}{d\tau} = -a_1 uz - z^2$$

el cual resulta un sistema homogéneo cuadrático, desarrollado en el capítulo 2, según el teorema 2.1.3  $(0, 1, 0)$  es un punto semisilla nodal.

El diagrama de fase global es como muestra la figura 3.13.♦

El siguiente teorema globaliza los resultados hallados.

**Teorema 3.4.2.** *Los puntos singulares de un sistema cuadrático con un punto estrella nodal, cuyo lado derecho no tenga factor común son puntos sillas, puntos nodal y puntos semisilla nodal. Este sistema no tiene ciclos límites. El diagrama de fase global tiene diecisis y sólo diecisis estructuras topológicas diferentes.*

**Observación:** En todas las figuras dadas se tiene la siguiente notación:

s=punto silla.

n=punto nodal.

cn=punto nodo estelar.

sn=punto semisillanodal.

db=punto singular doble (multiplicidad).

## 4 CLASIFICACIÓN TOPOLÓGICA DE SISTEMAS CUADRÁTICOS ESTRUCTURALMENTE ESTABLES SIN CICLOS LÍMITES

Para estudiar la clasificación topológica de este tipo de sistemas, primero tenemos que estudiar todas las posibles combinaciones de sus puntos singulares en el interior de la superficie hemisférica cerrada  $\overline{H}$  (equivalente al espacio euclideo) y sobre el Ecuador,  $E$ ; después hallaremos ejemplos para cada caso, con esto demostraremos que el caso dado es realizable, por tanto existe.

En lo sucesivo adoptaremos esta notación:

$s$  : punto silla en el interior de  $\overline{H}$ .

$p$  : punto no silla en el interior de  $\overline{H}$  (punto hiperbólico de índice +1).

$S$  : punto silla en  $E$ .

$F$  : fuente en  $E$ .

$P$  : sumidero en  $E$ .

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$  y  $\epsilon$  elementos de  $\Sigma_2$ .

Veamos ciertas características que presentan los puntos singulares en las siguientes proposiciones:

**Proposición 4.1.** *Sobre el Ecuador no puede haber sólo dos puntos singulares hiperbólicos.*

### Prueba

Suponiendo que sobre  $E$  hay dos puntos singulares hiperbólicos  $P_1$  y  $P_2$ , sus respectivas antípodas  $P'_1$  y  $P'_2$ , también están sobre  $E$ .

Asumiendo que  $P_1$  es una fuente entonces  $P'_1$  debe ser un sumidero; pero  $P_2$  está ubicado entre  $P_1$  y  $P'_1$ , así  $P_2$  tiene una trayectoria que viene de  $P_1$  a él y otra trayectoria que sale de él y va hacia  $P'_1$  lo cual conlleva a que  $P_2$  no es un punto elemental.

Si  $P_1$  es un sumidero, la prueba es semejante. •

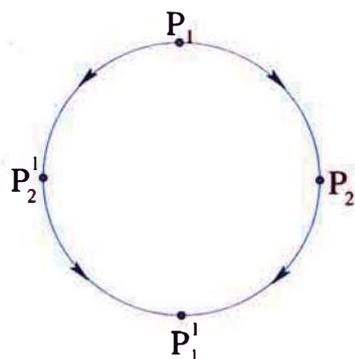


Figura 4.1: Sistema con dos P. S. sobre el Ecuador

**Proposición 4.2.**  $\alpha$  no puede tener tres puntos singulares tipo silla sobre  $E$ .

### Prueba

Suponiendo que  $\alpha$  tiene tres puntos singulares  $P_1, P_2$  y  $P_3$  sobre  $E$  tipo silla, la suma de índices de estos puntos es -3, por lo cual  $\alpha$  debe tener cuatro puntos singulares en el interior de  $\overline{H}$  tipo no silla, es decir de tipo nodal; pero por el lema 3.3 esto es imposible, puesto que si un sistema cuadrático tiene cuatro puntos singulares simples entonces al menos uno de ellos es punto silla. •

Consideremos a  $\mathbf{X}$  como el espacio de todos los campos vectoriales polinomiales de grado no mayor que 2, sobre el plano

$$\mathbf{X} = \{X(x, y) = (P(x, y), Q(x, y)), \text{ donde el grado de } P \text{ y } Q \text{ es no mayor de } 2\}$$

además  $\Sigma_n$  es el conjunto de los sistemas polinomiales de grado no mayor que  $n$ .

Si  $X \in \mathbf{X}$ , denotaremos por  $\pi(X)$  la extensión a  $S^2$  de la proyección central de  $X$ .

La siguiente proposición es consecuencia de la clasificación afín de cuádricas, la cual está demostrada en Struik [10].

**Proposición 4.3.**  $C = \{X = (P, Q), P^{-1}(0) \text{ y } Q^{-1}(0) \text{ son elipses o hipérbolas}\}$  es abierto y denso en  $\mathbf{X}$ .

Consideremos a  $\Sigma_2(i) = \{X \in \Sigma_2 \mid \pi(X) \text{ tiene } (i) \text{ singularidades en } \overline{\mathbb{H}} \setminus E\}$

**Proposición 4.4.**  $\Sigma_2 = \Sigma_2(0) \cup \Sigma_2(2) \cup \Sigma_2(4)$ .

### Prueba

Supongamos que  $P^{-1}(0) \cap Q^{-1}(0)$  tiene uno o tres puntos singulares. Por la proposición 4.3, podemos tomar  $X \in C$ .

Si uno de los puntos en  $P^{-1}(0)$  y  $Q^{-1}(0)$  es tangente podemos hacer una traslación y modificar el número de singularidades de  $X$ , lo cual no es posible puesto que  $X \in \Sigma_2$ .

Ninguno de  $P^{-1}$  o  $Q^{-1}$  son elipses, puesto que si fuera tendríamos necesariamente: cero, dos o cuatro puntos en la intersección de  $P^{-1} \cap Q^{-1}$ .

Ahora si  $P^{-1}$  y  $Q^{-1}$  son hipérbolas, el número de puntos en  $P^{-1} \cap Q^{-1}$  es el mismo que en la intersección de sus asíntotas.

Puesto que este número es par, podría existir 2 asíntotas paralelas, entonces con una pequeña perturbación podemos incrementar el número de singularidades de  $X$ , lo cual es imposible. •

Tomando en cuenta las proposiciones dadas enunciaremos el siguiente teorema:

**Teorema 4.0.3.** *Si  $\alpha$  pertenece a  $\Sigma_2$ , entonces las combinaciones de los puntos singulares de  $\alpha$  sobre  $\overline{H}$  debe ser uno de los siguientes doce casos:*

*tipo a : (1)  $F$ ; (2)  $psF$ ; (3)  $p_1p_2s_1s_2F$ .*

*tipo b : (1)  $p_1p_2S$ ; (2)  $p_1p_2p_3sS$ .*

*tipo c : (1)  $s_1s_2F_1PF_2$ ; (2)  $ps_1s_2s_3F_1PF_2$ .*

*tipo d : (1)  $SPF$ ; (2)  $psSPF$ ; (3)  $p_1p_2s_1s_2SPF$ .*

*tipo e : (1)  $p_1p_2S_1S_2F$ ; (2)  $p_1p_2p_3sS_1S_2F$ .*

### Prueba

Puesto que  $X_s = \Sigma_2$ , cuando  $n = 2$ , entonces por el teorema 1.8.1  $\alpha$  sólo tiene puntos singulares hiperbólicos en el interior de  $\overline{H}$  y sobre  $E$ .

Las coordenadas de un punto singular sobre  $E$  son raíces de una ecuación cúbica entonces sólo existe a lo más tres puntos singulares sobre  $E$ ; pero por la proposición 4.1, tenemos que sobre  $E$  sólo existe uno o tres puntos singulares.

La suma de índices del punto singular sobre  $\overline{H}$  es igual a 1.

Suponiendo que  $\alpha$  tiene un único punto singular  $P_1$  sobre  $E$ , el cual puede sólo ser fuente ( $P_1 = F$ ), sumidero ( $P_1 = P$ ) o silla ( $P_1 = S$ ).

En el caso que  $P_1$  sea fuente (si fuera sumidero el diagrama de fase es el mismo que cuando es fuente sólo que invierte su orientación), puesto que el índice de  $P_1$  es 1, puede suceder que  $\alpha$  no tenga puntos singulares en el interior de  $\overline{H}$  (tipo a (1)), o si los tiene la suma de índices debe ser cero y por la proposición 4.4 el número de puntos singulares en el interior de  $\overline{H}$  pueden ser dos (tipo a (2)) o cuatro (tipo a (3)).

En el caso que  $P_1$  sea silla, puesto que el índice de  $P_1$  es -1, por la prop 4.4 debe suceder que  $\alpha$  tenga al menos dos puntos singulares en el interior de  $\overline{H}$  de

tipo no silla (tipo b (1)); más aún es posible agregar un par de puntos singulares en el interior de  $\overline{H}$  cuya suma de índices sea cero (tipo b (2)).

Suponiendo que  $\alpha$  tiene tres puntos singulares  $P_1, P_2$  y  $P_3$  sobre  $E$ , por la proposición 4.2 tenemos tres casos:

1. Ninguno de los  $P_1, P_2$  y  $P_3$ , es un punto silla.

También sucede que los tres  $P_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) no pueden ser todos sumideros o fuentes a la vez (topológicamente es imposible); por lo tanto al menos un  $P_i$  es sumidero, luego tenemos dos fuentes y un sumidero (en el caso de tener dos sumideros y una fuente el diagrama de fase es el mismo que cuando tenemos dos fuentes y un sumidero pero de orientación invertida). Por otro lado tenemos que la suma de índices de estos puntos singulares es tres, si  $\alpha$  tiene dos puntos singulares finitos éstos deben ser tipo silla (tipo c (1)); si  $\alpha$  tiene cuatro puntos singulares finitos éstos deben ser tres de tipo silla y uno de tipo nodal.(tipo c(2)).

2. Uno de los  $P_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) es un punto silla.

Si ocurre esto los otros puntos pueden ser sumideros (topológicamente es imposible), fuentes (topológicamente es imposible) ó sumidero y fuente. La suma de índices de estos tres puntos es 1; puede suceder que  $\alpha$  no tenga puntos singulares finitos (tipo d (1)); ó que  $\alpha$  tenga 2 puntos singulares finitos, los cuales deberán ser uno punto silla y el otro punto nodal (tipo d (2)); por último que  $\alpha$  tenga 4 puntos singulares finitos, los cuales deberán ser dos puntos sillas y dos puntos nodales (tipo d (3)).

3. Dos de los  $P_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) es un punto silla.

Si esto ocurre el otro punto singular puede ser una fuente o un sumidero (en este caso el diagrama de fase es el mismo que cuando es fuente, sólo que la orientación es invertida). La suma de índices de estos tres puntos

singulares es  $-1$ , por lo tanto la suma de índices de los puntos singulares finitos de  $\alpha$  debe ser  $2$ , por lo tanto  $\alpha$  necesariamente debe tener puntos singulares finitos. Si  $\alpha$  tiene dos puntos singulares finitos, éstos deben ser de tipo nodal (tipo e (1)); si  $\alpha$  tiene cuatro puntos singulares finitos, éstos deben ser tres de tipo nodal y uno de tipo silla (tipo e (2)).♦

En lo sucesivo, por conveniencia de presentación, adoptaremos la notación  $s(p_1, p_2, p_3, P)$  para representar cuatro separatrices ( $L_1^+, L_2^+, L_1^-, L_2^-$ ) de un punto silla  $s$  conectando los puntos singulares  $p_1, p_2, p_3$  y  $P$  respectivamente, en el cual las dos separatrices empiezan de los dos primeros puntos  $p_1$  y  $p_2$  entran a  $s$ , y las otras dos separatrices empiezan de  $s$  y entran a  $p_3$  y  $P$  respectivamente (Fig. 4.2(a)) y usamos la notación  $S(F, p)$  para un punto silla sobre  $E$  usando separatrices  $l^+$  y  $l^-$  no a lo largo del ecuador para conectar los puntos singulares  $F$  y  $p$  respectivamente (Fig. 4.2(b)). La otra notación tiene similar significado.

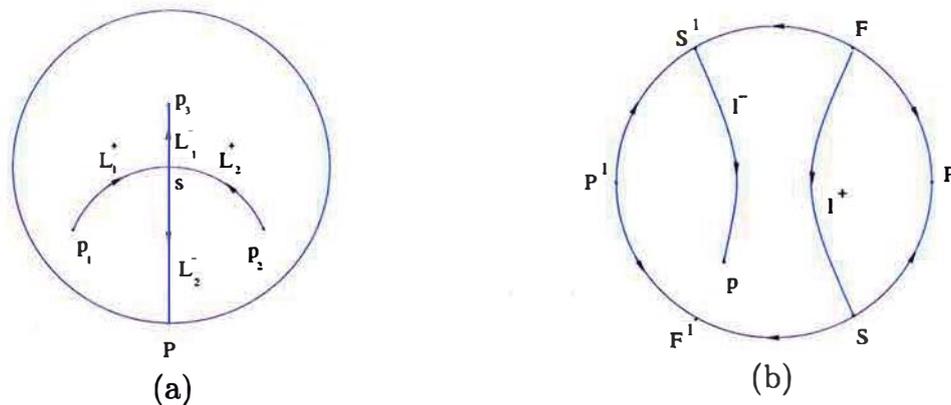


Figura 4.2: (a): Sistema  $s(p_1, p_2, p_3, P)$  y (b): Sistema  $S(F, p)$

Puesto que el sistema en discusión no tiene ciclos límites y no es posible usar una separatriz para conectar dos puntos sillas, de conectar las separatrices de puntos sillas y los puntos singulares cuyos índices son  $+1$ , podemos determinar la estructura topológica de los correspondientes diagramas de fase. Llevamos a cabo nuestra discusión de acuerdo a los cinco tipos y veinte formas dados en el teorema 4.0.3.

1.) Tipo a(1). Forma F. Es fácil ver que sólo hay una estructura topológica como muestra la Fig. 4.3(a). El ejemplo realizable es:

$$\alpha_1 : \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2xy \\ \frac{dy}{dt} = x^2 + y^2 + \epsilon \end{cases} \quad (\epsilon > 0)$$

Este sistema no tiene puntos singulares finitos puesto que  $x^2 + y^2 + \epsilon > 0$ ; tiene como punto singular en el infinito a  $F(0, 1, 0)$  el cual es una fuente.

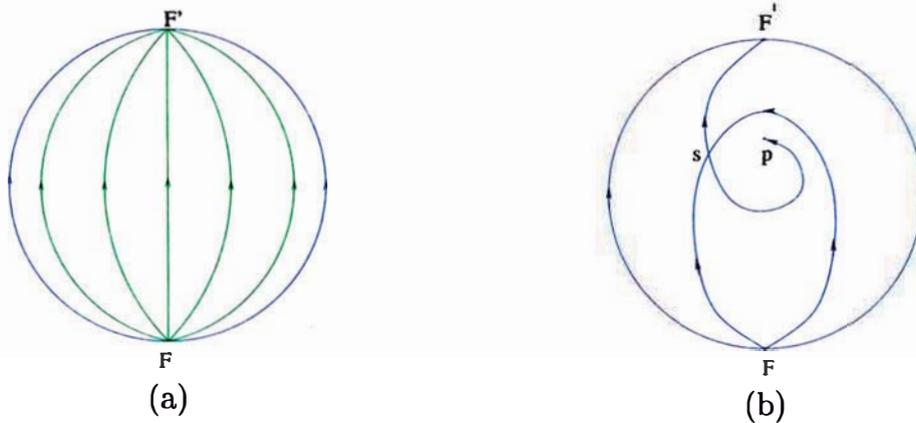


Figura 4.3:

Antes de continuar veamos el siguiente lema.

**Lema 4.1.** Sea  $X = (P, Q) \in X$  y  $X^\theta = (P - \theta Q, Q + \theta P)$ ,  $0 < \theta < \epsilon$ , con  $\epsilon$  pequeño.

- Si  $p$  es un centro para  $X$  entonces  $p$  es una singularidad hiperbólica para  $X^\theta$ ,
- Dentro de las regiones donde los centros de  $X$  son definidos,  $X^\theta$  no tiene ciclos limites.

**Prueba**

- a) Si hacemos una traslación del origen de  $\mathbb{R}^2$  a  $p$ , entonces podemos escribir  $X = (\alpha y + h_1(x, y), -\alpha x + h_2(x, y))$ , donde  $h_1$  y  $h_2$  son polinomios homogéneos de segundo grado tales que

$$h_i(0, 0) = \frac{\partial h_i}{\partial x_j(0, 0)} = 0, \quad i, j = 1, 2$$

luego

$$X^\theta = (\alpha\theta x + \alpha y + h_1(x, y) - \theta h_2(x, y), -\alpha x + \alpha\theta y + h_2(x, y) + \theta h_1(x, y))$$

entonces la matriz de linealización para  $X^\theta$  en  $(0, 0)$  es

$$\begin{bmatrix} \alpha\theta & \alpha \\ -\alpha & \alpha\theta \end{bmatrix}$$

el cual implica que  $(0, 0)$  es una singularidad hiperbólica para  $X^\theta$ .

- b) Las órbitas de  $X$  y  $X^\theta$  son transversales. •

2.) *Tipo a(2). Forma psF.* Es fácil ver que este caso tiene una única forma, la cual se muestra en la Fig. 4.3(b). El ejemplo realizable es

$$\alpha_2 : \begin{cases} \frac{dx}{dt} = P - \theta Q \\ \frac{dy}{dt} = Q + \theta P \end{cases}$$

el cual es obtenido rotando un ángulo  $\theta$  ( $0 < \theta \ll 1$ ) de

$$\alpha : \begin{cases} \frac{dx}{dt} = P \equiv -y(\nu + 2x) \\ \frac{dy}{dt} = Q \equiv (x + \frac{\mu}{2})^2 + y^2 - \frac{\mu^2}{4} \end{cases} \quad (\mu < 0 < \nu)$$

En efecto el sistema  $\alpha$  tiene como puntos singulares finitos a  $p_1(0, 0)$ , el cual es un punto silla y a  $p_2(-\mu, 0)$ , cuya raíz característica tiene parte real cero. Puesto que existe una primera integral

$$\varphi(x, y) = x\left(\frac{x^2}{3} + y^2\right) + \frac{\mu x^2}{2} + \frac{\nu y^2}{2}$$

donde  $p_2$  es un centro; los puntos singulares del sistema  $\alpha$  pertenecen a la forma  $psF$ . Después de rotar un ángulo  $\theta$ , el centro viene a ser un foco aquí  $\alpha_2$  no tiene un ciclo límite.  $\alpha_2$  todavía pertenece a la forma  $psF$ . El diagrama de fase global se muestra el figura 4.3(b).

3.) *Tipo a(3) Forma.*  $p_1p_2s_1s_2F$ . Para este tipo tenemos el siguiente teorema:

**Teorema 4.0.4.** *Los sistemas cuadráticos estructuralmente estables sin ciclos límites de la forma  $p_1p_2s_1s_2F$  tienen cinco y sólo cinco tipos diferentes de estructuras topológicas, cuyas características son:*

$$\alpha_3 : s_1(F, F, p_1, p_2), s_2(F, F, p_2, F'),$$

$$\alpha_4 : s_1(F, F, p_1, F'), s_2(F, p_2, F', F'),$$

$$\alpha_5 : s_1(F, F, p_1, F'), s_2(F, F, p_2, F'),$$

$$\alpha_6 : s_1(F, p_2, p_1, F'), s_2(F, p_2, p_1, F'),$$

$$\alpha_7 : s_1(F, p_2, p_1, p_1), s_2(F, F, p_2, F').$$

### Prueba

Primero probaremos que hay a lo más cinco tipos diferentes de topologías.

Supongamos que  $p_1$  y  $p_2$  son sumideros (fuentes) entonces las direcciones de las separatrices de un punto silla  $s_1$  puede sólo tener las siguientes tres posibilidades (si es una fuente, entonces intercambiamos los dos primeros elementos

y los dos últimos elementos en el siguiente):

$$s_1(F, F, p_1, p_2), \quad s_1(F, F, p_1, F'), \quad s_1(F, F, p_2, F')$$

Obtenemos las mismas posibilidades para  $s_2$ . Después combinando  $s_1$  y  $s_2$ , es claro que podemos tener sólo dos diferentes de estructuras topológicas,  $\alpha_3$  y  $\alpha_5$ .

Supongamos que uno de los  $p_1$  y  $p_2$  es un sumidero y el otro es una fuente entonces las direcciones de las separatrices de  $s_1$  puede sólo ser de los siguientes cinco tipos:

$$s_1(F, F, p_1, F'), \quad s_1(F, p_2, p_1, p_1), \quad s_1(F, p_2, p_1, F'),$$

$$s_1(F, p_2, F', F'), \quad s_1(p_2, p_2, p_1, F')$$

Son las mismas cinco posibilidades para  $s_2$ .

Después de combinar todas las posibilidades para  $s_1$  y  $s_2$ , obtenemos que sólo tres tipos estructuras topológicas distintas  $\alpha_4$ ,  $\alpha_6$  y  $\alpha_7$  son posibles.

Un ejemplo realizable para  $s_1(F, F, p_1, p_2), s_2(F, F, p_2, F')$  es

$$\alpha_3 : \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x(\lambda + 2y) + \epsilon x \\ \frac{dy}{dt} = x^2 + (y + \frac{\lambda}{2})^2 - \frac{\lambda^2}{4} \end{cases} \quad (\epsilon > 0, \quad \lambda < 0)$$

cuyo diagrama de fase se muestra en la Fig. 4.4(a).

Un ejemplo realizable para  $s_1(F, F, p_1, F'), s_2(F, p_2, F', F')$  es

$$\alpha_4 = \alpha_\epsilon^\theta \quad (0 < \theta \ll 1), \quad \text{donde}$$

$$\alpha_{\epsilon, \lambda} : \begin{cases} \frac{dx}{dt} = (\epsilon y - x)(\lambda + 2y) \\ \frac{dy}{dt} = x^2 + \left(y + \frac{\lambda}{2}\right)^2 - \frac{\lambda^2}{4} \end{cases} \quad (\epsilon > 0, \lambda < 0)$$

cuyo diagrama de fase se muestra en la Fig. 4.4(b).

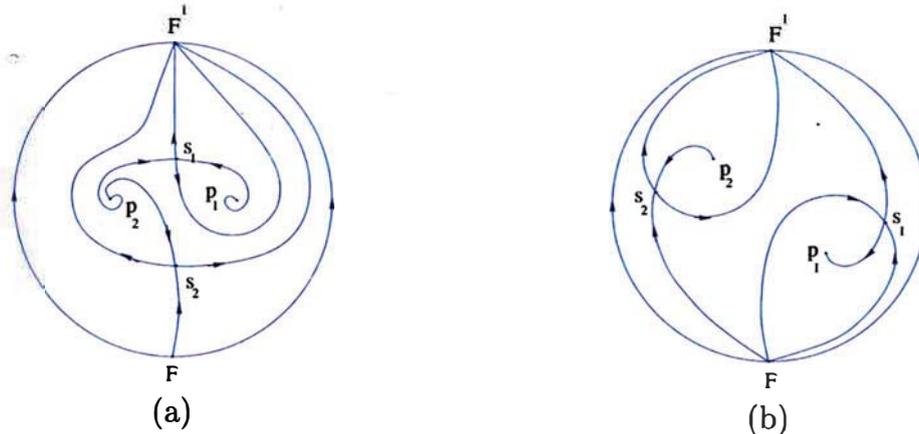


Figura 4.4:

4. Tipo b(1) Forma.  $p_1 p_2 S$ . Es fácil ver que este caso tiene sólo una estructura topológica, cuya característica es  $S(p_1, p_2)$ , como se muestra en la Fig. 4.5. Un ejemplo realizable es

$$\beta_1 = \beta_\epsilon^\theta \quad (0 < \theta \ll 1). \quad \text{donde} \quad \beta_\epsilon : \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2xy \\ \frac{dy}{dt} = y^2 - x^2 + \epsilon \end{cases} \quad (\epsilon > 0)$$

En efecto, los puntos singulares finitos de  $\beta_\epsilon$  son  $p_1(-\sqrt{\epsilon}, 0)$  y  $p_2(\sqrt{\epsilon}, 0)$ , ambos son centros;  $x = 0$  es una línea integral; el único punto singular en el infinito de  $\beta_\epsilon$  es  $P(0, 1, 0)$  es de tipo silla; por lo tanto  $\beta_\epsilon$  pertenece a la forma  $p_1 p_2 S$ . Después de una rotación de ángulo  $\theta$  obtenemos  $\beta_1$ , los centros vienen a ser focos, y no tiene ciclos límites ni ninguna curva conectando dos puntos sillan;  $\beta_1$  aún pertenece a la forma  $p_1 p_2 S$ . Su diagrama de fase es mostrado en la Fig. 4.5.

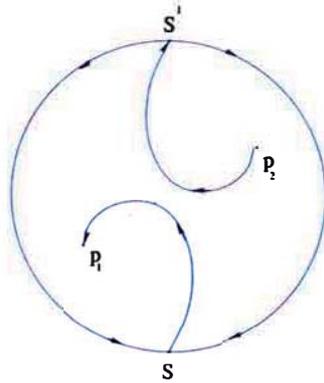


Figura 4.5:

5.) *Tipo b(2) Forma  $p_1p_2p_3sS$ .* Es fácil ver este caso tiene sólo una estructura topológica, cuyas características son  $s(p_1, p_2, p_3, p_3)$  y  $S(p_1, p_3)$ , como muestra la Fig. 4.6(a). Un ejemplo realizable es

$$\beta_2 = \beta_\lambda^\theta \quad (0 < \theta \ll 1). \quad \text{donde} \quad \beta_\lambda : \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\lambda x + 2xy \\ \frac{dy}{dt} = \lambda y + y^2 - x^2 \end{cases} \quad (\lambda > 0)$$

En efecto,  $\beta_\lambda$  tiene cuatro puntos singulares finitos  $p_1(0, 0)$ ,  $p_2(0, -\lambda)$ ,  $p_3(\frac{\sqrt{3}\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2})$  y  $p_4(\frac{\sqrt{3}\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2})$ ;  $p_1$  es una silla,  $p_2$  es un nodo,  $p_3$  y  $p_4$  son centros;  $x = 0$  es una línea integral; el único punto singular en el infinito es  $S(0, 1, 0)$ , el cual es una silla; por lo tanto el sistema  $\beta_\lambda$  pertenecen a la forma  $p_1p_2p_3sS$ , cuyo valor de divergencia es  $4y$ ; pero  $x = 0$  es una línea sin contacto (excepto el origen) y así  $\beta_\lambda$  no tiene un ciclo límite. Después una rotación del ángulo  $\theta$  ( $0 < \theta \ll 1$ ) se obtiene  $\beta_2$ , aún tiene cuatro puntos singulares:  $p_1$  sigue siendo una silla,  $p_2$  sigue siendo un nodo atractor,  $p_3$  y  $p_4$  ahora son focos.  $\beta_1$  aún tiene la forma  $p_1p_2p_3sS$  y no tiene ciclos límites como muestra la Fig. 4.6(a).

6.) *Tipo c(1) Forma  $s_1s_2F_1PF_2$ .* Es fácil ver que este caso tiene sólo una estructura topológica, cuyas características son  $s_1(F_1, F_2, P, F_1')$  y  $s_2(F_1, P', F_2', F_1')$ , y su retrato

de fase es como muestra la Fig. 4.6(b). Un ejemplo realizable es

$$\gamma_1 : \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x^2 + 2xy \\ \frac{dy}{dt} = -2xy - y^2 - \epsilon \end{cases} \quad (\epsilon > 0)$$

En efecto  $\gamma_1$  tiene dos puntos singulares finitos:  $p_1(-2\sqrt{\frac{\epsilon}{3}}, \sqrt{\frac{\epsilon}{3}})$  y  $p_2(2\sqrt{\frac{\epsilon}{3}}, -\sqrt{\frac{\epsilon}{3}})$ , los cuales son puntos sillas;  $x = 0$  es una línea integral; tiene tres puntos singulares en el infinito:  $P_1(1, 0, 0)$ , el cual es un sumidero,  $F_1(1, -1, 0)$  y  $F_2(0, 1, 0)$  los cuales son fuentes. El diagrama de fase es mostrado en la Fig. 4.6(b).

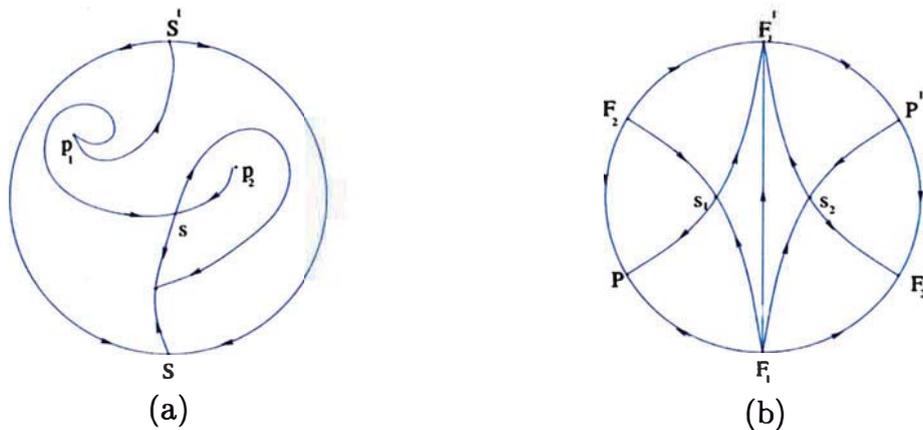


Figura 4.6:

Antes de continuar necesitamos la siguiente definición.

**Definición 4.0.1.** *Un punto  $p \in \mathbb{R}^2$  es un contacto entre  $X \in \mathbf{X}$  y la línea recta  $L$  si  $X(p)$  es tangente a  $L$ .*

Consideremos el siguiente lema.

**Lema 4.2.** *Cualquier línea recta puede tener a lo más dos puntos de contacto con la trayectoria de un sistema cuadrático (el cual puede incluir el punto singular) a menos que la línea misma sea una trayectoria del sistema.*

**Prueba**

Supongamos un sistema diferencial cuadrático

$$\begin{aligned}\dot{x} &= P(x, y) \\ \dot{y} &= Q(x, y)\end{aligned}$$

y que la línea dada es  $ax + by + c = 0$ . Entonces las coordenadas del punto de contacto deben satisfacer

$$ax + by + c = 0, \quad \frac{-a}{b} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)}$$

El sistema en general tiene dos soluciones  $(x_i, y_i)$  ( $i = 1, 2$ ) a menos que la primera ecuación sea parte de la segunda ecuación, en cuyo caso  $ax + by + c = 0$  es una trayectoria. En particular, si

$$Q(x_i, y_i) = P(x_i, y_i) = 0, \quad ax_i + by_i + c = 0$$

entonces  $(x_i, y_i)$  es un punto singular de la línea  $ax + by + c = 0$ . •

7.) Tipo c(2) Forma  $ps_1s_2s_3F_1PF_2$ . Para este tipo tenemos el siguiente teorema.

**Teorema 4.0.5.** *Los sistemas cuadráticos estructuralmente estables sin ciclos límites de la forma  $ps_1s_2s_3F_1PF_2$  tienen cuatro y sólo cuatro diferentes estructuras topológicas, cuyas características son:*

$$\gamma_2 : s_1(F_1, p, P, F'_2), s_2(P', p, F'_1, F'_2), s_3(F_2, p, P, F'_1),$$

$$\gamma_3 : s_1(F_1, p, P, P), s_2(F_1, P', P, F'_2), s_3(F_2, P', P, F'_1),$$

$$\gamma_4 : s_1(F_1, F_2, P, F'_2), s_2(P', p, F'_1, F'_2), s_3(F_2, p, F'_1, F'_2),$$

$$\gamma_5 : s_1(F_1, F_2, P, F'_2), s_2(F_2, P', F'_1, F'_2), s_3(F_2, p, P, P).$$

**Prueba**

Por lo expuesto en el lema 4.2 los siguientes dos casos no pueden ser realizados por sistemas cuadráticos:

- (1)  $s_1(F_1, p, F_2', F_2')$ ,  $s_2(F_1, P', P, F_2')$ ,  $s_3(F_2, P', P, F_1')$ , como muestra la Fig. 4.7(a) y
- (2)  $s_1(P', p, P, P)$ ,  $s_2(F_1, P', P, F_2')$ ,  $s_3(F_2, P', P, F_1')$ , como muestra la Fig. 4.7(b).

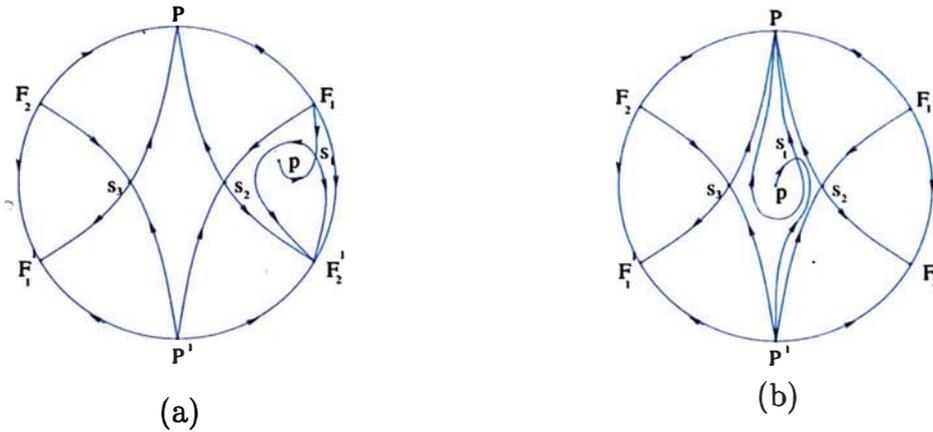


Figura 4.7:

De una discusión similar al teorema 4.0.4, sabemos que en el presente caso sólo hay cuatro diferentes estructuras topológicas  $\gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$  y  $\gamma_5$  posibles.

Podemos probar que ellos pueden ser realizados por sistemas cuadráticos; los ejemplos pueden ser encontrados en Tavares [11]. Un ejemplo realizable es:

$$\gamma_2 = \gamma_\epsilon^\theta \quad (0 < \theta \ll 1). \quad \text{donde} \quad \gamma_\epsilon : \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\delta x + x^2 + 2xy + \epsilon xy \\ \frac{dy}{dt} = \delta y - 2xy - y^2 \end{cases} \quad (\epsilon > 0)$$

Un ejemplo realizable es

$$\gamma_3 = \gamma_\epsilon^\theta \quad (\theta < 0). \quad \text{donde} \quad \gamma_\epsilon : \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\delta x + x^2 + 2xy + \epsilon xy \\ \frac{dy}{dt} = \delta y - 2xy - y^2 \end{cases} \quad (\epsilon > 0)$$

Sus diagramas de fase global se muestran en la figura 4.8.

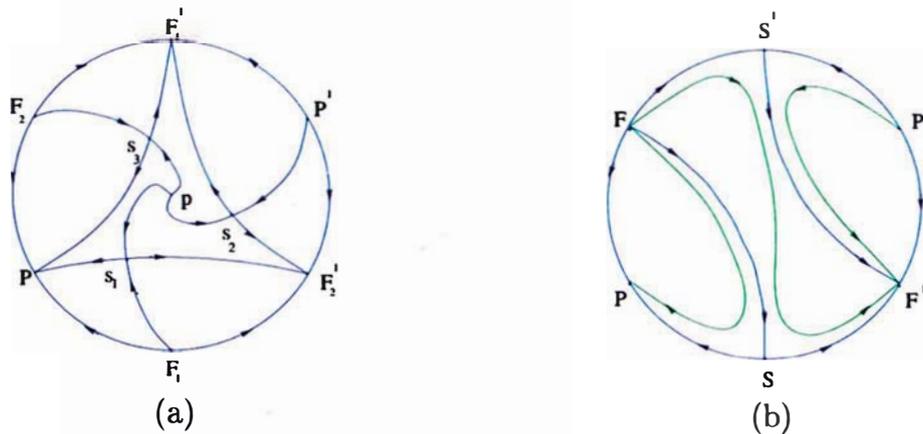


Figura 4.8:

8.) *Tipo d(1) Forma.SPF*. Es fácil ver que este caso tiene sólo una estructura topológica  $S(F, F')$ .

Un ejemplo realizable es

$$\delta_1 = \delta_\epsilon^\theta \quad (0 < \theta \ll 1). \quad \text{donde} \quad \delta_\epsilon : \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x^2 + y^2 + \epsilon \\ \frac{dy}{dt} = 2xy \end{cases} \quad (\epsilon > 0)$$

Su diagrama de fase global se muestran en la figura 4.9(a).

9.) *Tipo d(2) Forma psSPF*. Este caso puede tener tres diferentes estructuras topológicas , cuyas características son:

$$\delta_2 : s(F, P', p, P), S(P', p),$$

$$\delta_3 : s(F, F, p, P), S(P', P),$$

$$\delta_4 : s(F, F, p, P), S(F, F').$$

Entonces todos pueden ser realizados.

Un ejemplo realizable es

$$\delta_2 = \delta_\epsilon^\theta \quad (0 < \theta \ll 1). \quad \text{donde } \delta_\epsilon : \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x^2 + y^2 - \epsilon \\ \frac{dy}{dt} = 2(x + \alpha)y \end{cases} \quad (\epsilon > 0, \quad \alpha + \epsilon < 0)$$

Su diagrama de fase global se muestran en la figura 4.9(b).

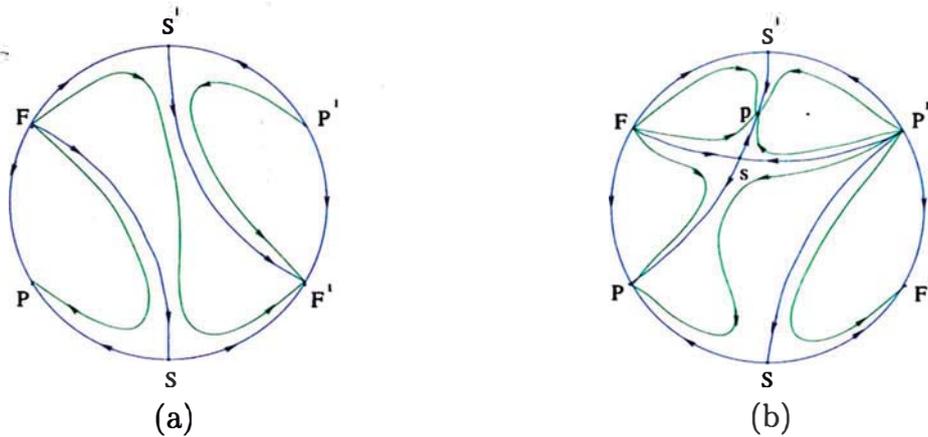


Figura 4.9:

10.) *Tipo d(3) Forma.  $p_1, p_2, s_1, s_2, SPF$ .* Para este puede haber sólo a lo más 30 diferentes estructuras topológicas de los cuales hay 8 tipos los cuales han sido realizados. Los 22 tipos restantes aún está por realizarse o eliminarse. Todas estas formas se puede encontrar en Tabares [11].

11.) *Tipo e(1) Forma.  $p_1 p_2 S_1 S_2 F$ .* Es fácil ver que este caso tiene sólo tres diferentes estructuras topológicas, cuyos características son:

$$\epsilon_1 : S_1(p_1, p_2), S_2(F, F'),$$

$$\epsilon_2 : S_1(p_1, F'), S_2(p_2, F'),$$

$$\epsilon_3 : S_1(p_1, p_2), S_2(p_1, p_2).$$

Todos ellos tienen ejemplos realizables. Un ejemplo realizable es

12.) Tipo e(2) Forma.  $p_1, p_2, p_3, s, S_1, S_2, F$ . Para esto hay a lo más 9 diferentes tipos de estructuras topológicas<sup>1</sup>. Hay cuatro tipos los cuales han sido realizados, y los cinco restantes aún están por realizarse o eliminarse. Un ejemplo realizable es

$$\epsilon_1 = \epsilon_\lambda^\theta \quad (0 < \theta \ll 1). \quad \text{donde} \quad \epsilon_\lambda : \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(\lambda + x + 2y) \\ \frac{dy}{dt} = y(-\lambda + 2x + y) \end{cases} \quad (\lambda > 0.)$$

Su diagrama de fase global se muestra en la figura 4.10.

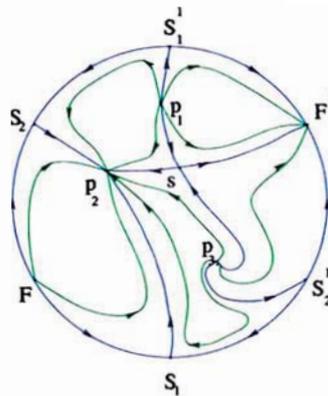


Figura 4.10:

Resumiendo el análisis anterior, conseguimos

**Teorema 4.0.6.** *Los sistemas cuadráticos estructuralmente estables sin cilos límites pueden tener a lo más 60 diferentes tipos de estructuras topológicas, de las cuales al menos 33 pueden ser realizables<sup>2</sup>.*

<sup>1</sup>ver [Ta]

<sup>2</sup>Recientemente D. M. Zhu ha probado que el numero de estructuras topológicas diferentes posibles es menos de 60, pero al menos 36 pueden ser realizados.

## Bibliografía

- [1] A. A. Andronov, E. A. Leontovich, I. I. Gordon y A. G. Maier; Qualitative Theory of Second Order Dynamic Systems. Israel Program for Scientific Translations Ltda. 1973.
- [2] A. A. Andronov, E. A. Leontovich, I. I. Gordon y A. G. Maier; Theory of Bifurcations of Dynamic Systems on a Plane. Israel Program for Scientific Translations. Jerusalem 1971.
- [3] H. S. Dumas, K. R. Meyer. D. S. Schimidt. Hamiltonian Dynamical Systems History, Theory, and Applications. IMA Volumen 63. Springer Verlag. 1995.
- [4] Morris W. Hirsch. Stephen Smale. Ecuaciones Diferenciales, Sistemas Dinámicos y Algebra Lineal. Alianza Editorial, S. A. Madrid, 1983.
- [5] S. Lefschetz, Differential Equations: Geometric Theory. Second Edition. Interscience Publishers.
- [6] J. Palis, w. de Melo. Introducao aos Sistemas Dinamicos. Instituto de Matematica Pura y Aplicada. CNPq. Proyecto Euclides. 1978.
- [7] L. Perko, Differential Equations and Dynamical Systems, Second Edition, Springer-Verlag New York, Inc.1996
- [8] G. Sansone and R. Conti. Non Linear Differential Equations. The Macmillan Company . New York. 1964.
- [9] J. Sotomayor. Licoes de Equacoes Diferenciais Ordinarias. Proyecto Euclides. 1979.
- [10] D. J. Struik. Análisis y Projective Geometry. Addison wesley.1953

- [11] G. Tavares dos Santos. Classification of Generic Quadratic Vector Fields with no Limit Cycles. *Geometry and Topology* (Rio de Janeiro, Julio 1976), *Lecture Notes in Math.* Vol. 597. Springer Verlag. 1977. pp. 605-640.
- [12] Ye Yan-Qian. *Theory of Limit Cycles.* Translations of Mathematical Monographs. Volumen 66. American Mathematical Society. 1986.
- [13] J. Sotomayor. *Curvas definidas por Equacoes Diferenciais no Plano.*