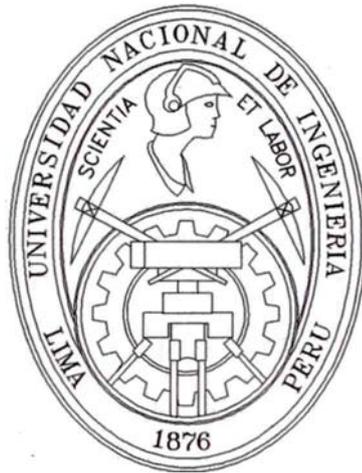


**UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA  
FACULTAD DE CIENCIAS**

*Escuela Profesional de Matemática*



**TESIS PARA OPTAR EL TITULO PROFESIONAL  
DE LICENCIATURA EN MATEMATICA**

**TITULADA:**

**METODOS DE EXTRAPOLACION PARA LA SOLUCION DE  
ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS RIGIDAS**

**PRESENTADA POR:**

**GUTIERREZ GARAY, Elías**

**LIMA - PERU  
1998**

## CIP - CATALOGO DE PUBLICACIÓN

Gutierrez Garay, Elias

Método de Extrapolación para Ecuaciones Diferenciales Rígidas / Elias Gutierrez Garay. – EPM-FC UNI, 1998.

74 p.: il.

Disertación (Licenciatura)—Universidad Nacional de Ingeniería, Facultad de Ciencias, Escuela Profesional de Matemática, Lima, 1998. Orientador: Rolf Schroeder

Disertación: Métodos Numéricos, y Ecuaciones Diferenciales

*Palabras llave: Métodos Numéricos, Ecuaciones Rígidas, Ecuaciones Diferenciales*

En memoria de mi Padre Nolberto, a mi Madre Constanza, a mi hija Ana, mis hermanos Edgardo, Ysabel, Guillermo, Esteban y César; y mis tios Abraham y Alicia.

# AGRADECIMIENTOS

Mis más sinceros agradecimientos al Dr. Rolf Schroeder por su asesoría y dirección en el presente trabajo, y por darme la oportunidad y los medios para poder desarrollarlo.

Asimismo a las personas que indirectamente me brindaron todo su apoyo y me motivaron para poder culminar este trabajo, en forma especial a los profesores de la Escuela Profesional de Matemática de la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional de Ingeniería que siempre me incentivaron para ello.

No puedo dejar de mencionar a mi Madre, mis hermanos y mis tios, que siempre me motivaron y apoyaron en todo momento, brindándome todo su comprensión y amor.

# RESUMEN

El propósito del presente trabajo es dar a conocer los métodos de extrapolación para solucionar numéricamente en forma eficiente las ecuaciones diferenciales ordinarias rígidas

Estudiaremos los métodos numéricos de un paso, de manera especial los métodos de Runge-Kutta, y el desarrollo asintótico de su error global; con una mención especial a los métodos simétricos. Definiremos el método de extrapolación para E.D.O., la rigidez y la estabilidad de los métodos numéricos.

La aplicación de la Extrapolación a los métodos simétricos, la regla del punto medio linealmente implícito, al método de Euler implícito y linealmente implícito. Las regiones de de la función de estabilidad y las implementaciones numérica de los mencionados métodos.

# INDICE

<b>RESUMEN</b> . . . . .	<b>v</b>
<b>1 CONCEPTOS FUNDAMENTALES</b> . . . . .	<b>2</b>
1.1 Introducción . . . . .	2
1.2 Métodos de un paso . . . . .	5
1.3 Métodos Adjuntos y Simétricos . . . . .	13
<b>2 EL MÉTODO DE EXTRAPOLACIÓN</b> . . . . .	
2.1 Introducción . . . . .	18
2.2 Definición del Método . . . . .	22
2.3 El Método de Gragg/Bulirsch/Stoer o GBS . . . . .	26
<b>3 ANÁLISIS DE ESTABILIDAD</b> . . . . .	<b>30</b>
<b>4 EXTRAPOLACIÓN DE MÉTODOS SIMÉTRICOS PARA LA RESOLUCIÓN DE E.D.O. RÍGIDAS</b> . . . . .	<b>41</b>
4.1 Extrapolación de Métodos Simétricos . . . . .	41
4.2 La Regla de Punto Medio Implícito Linealizado . . . . .	45
<b>5 RESULTADOS NUMÉRICOS</b> . . . . .	<b>58</b>
<b>6 CONCLUSIONES</b> . . . . .	<b>70</b>

<b>7 ANEXOS</b> . . . . .	<b>71</b>
<b>BIBLIOGRAFIA</b> . . . . .	<b>74</b>

# INTRODUCCION

El propósito del presente trabajo es dar a conocer el uso de la extrapolación para desarrollar procedimientos eficientes para aproximar la solución de un problema de valores iniciales de una Ecuación Diferencial Ordinaria (E.D.O.). Los métodos de extrapolación solucionan eficientemente un tipo particular de E.D.O.s. las que llamamos rígidas, ya que en ellas los métodos clásicos no dan buenos resultados.

Las ecuaciones diferenciales rígidas surgen en una gran variedad de problemas de la Ciencia e Ingeniería. Mencionaremos algunos de ellos como la cinética química, la teoría de los circuitos eléctricos, en el estudio de los sistemas amortiguados de resortes, en el análisis de los sistemas de control y otros.

La idea principal para el desarrollo de los métodos de extrapolación es la misma desarrollada para la integración numérica. De trabajos realizados por Stoer, Deuffhard, Hairer, Wanner, y otros, obtuvieron muy buenos resultados para su implementación en forma eficiente.

Estudiaremos especialmente la regla trapezoidal, la regla del punto medio implícito linealizado, los cuales tienen un desarrollo en  $h^2$  de su error global. Además aplicamos la extrapolación a los métodos implícito y linealmente implícito de Euler los cuales tienen un desarrollo en  $h$  de su error global.

# 1 CONCEPTOS FUNDAMENTALES

En el presente capítulo mencionaremos los teoremas de existencia y unicidad de una Ecuación Diferencial Ordinaria (E.D.O) de Primer Orden, y los métodos numéricos de un paso que solucionan una E.D.O. Entre ellos se encuentran los métodos RUNGE-KUTTA de m-etapas. Luego mencionaremos los métodos adjuntos y simétricos. El método simétrico tiene como error global un desarrollo asintótico en  $h^2$  el cual nos será muy útil en los métodos de Extrapolación.

## 1.1 Introducción

Muchos Problemas en matemáticas aplicadas pueden ser modelados por una Ecuación Diferencial Ordinaria. El caso más simple es de E.D.O. de 1<sup>er</sup> orden satisfaciendo una condición inicial.

$$\begin{cases} y' & = f(x, y) \\ y(x_0) & = y_0. \end{cases} \quad (1.1)$$

Una función  $y(x)$  es solución de (1.1) si  $y'(x) = f(x, y(x))$  y  $y(x_0) = y_0$ . Ahora, si tenemos la siguiente Ecuación Diferencial Ordinaria:

$$\begin{cases} y'' & = f(x, y, y') \\ y(x_0) & = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \end{cases} \quad (1.2)$$

y hacemos:  $y_1(x) = y(x)$ ,  $y_2(x) = y'(x)$ , resulta en (1.2)

$$\begin{cases} y'_1 & = y_2, & y_1(x_0) = y_0 \\ y'_2 & = f(x, y_1, y_2), & y_2(x_0) = y'_0. \end{cases} \quad (1.3)$$

Más generalmente, consideremos un sistema de  $n$  ecuaciones diferenciales ordinarias de 1<sup>er</sup> orden:

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, \dots, y_n), & y_1(x_0) = y_{10} \\ y_2' = f_2(x, y_1, \dots, y_n), & y_2(x_0) = y_{20} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ y_n' = f_n(x, y_1, \dots, y_n), & y_n(x_0) = y_{n0}. \end{cases} \quad (1.4)$$

Podemos escribir con las notaciones:

$y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$ ,  $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T$ ,  $y(x_0) = y_0 = (y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0})^T$  el sistema (1.4) como:

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0.$$

En adelante, trabajaremos con problemas de valores iniciales:

$$(P) \quad \begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = \alpha \end{cases} \quad x_0 \in \mathbb{R}, \quad x \in [x_0, \bar{x}]; \quad y, \alpha \in \mathbb{R}^n$$

Antes de discutir los métodos numéricos aptos para la solución de este problema, hay que averiguar, si existe una solución única. Mencionaremos los siguientes teoremas:

**Teorema 1.1. (Cauchy-Peano)** *Supongamos que  $f : D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , donde  $D$  es un entorno de  $(x_0, y_0)$ . Entonces existe un intervalo  $[x_0 - r, x_0 + r]$  alrededor de  $x_0$  y una función  $y(x)$ , definida en él y con gráfica contenida en  $D$ , de tal manera que  $y(x_0) = y_0$  y que  $y(x)$  es derivable en  $[x_0 - r, x_0 + r]$  con*

$$y'(x) = f(x, y(x)).$$

Si  $R = \{(x, y) / |x - x_0| \leq a, \|y - y_0\| \leq b\} \subset D$  y  $M = \max_{(x, y) \in R} \|f(x, y)\|$ , entonces se puede tomar  $r = \min\{a, \frac{b}{M}\}$

**Prueba:** Ver Novo/Rojo/Obaya (1995), Pag. 110.

**Definición 1.1.** Sea  $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$  y  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Decimos que  $f$  es Lipschitziana respecto a la variable  $y$  en  $D$  cuando existe una constante  $L \geq 0$  tal que, si  $(x, y), (x, z) \in D$ , entonces

$$\|f(x, y) - f(x, z)\| \leq L\|y - z\|. \quad L \text{ es llamado la constante de Lipschitz.}$$

**Teorema 1.2 (Picard Lindelöf).** Supongamos que  $f(x, y)$  es una función continua y Lipschitziana respecto a  $y$  en un entorno  $D$  de  $(x_0, y_0)$ . Entonces existe un intervalo  $[x_0 - r, x_0 + r]$  y una función  $y(x)$ , definida en él y con gráfica contenida en  $D$ , tal que  $y(x_0) = y_0$ ,  $y(x)$  es derivable en  $[x_0 - r, x_0 + r]$  y

$$y'(x) = f(x, y(x)).$$

Si  $R = \{(x, y) / |x - x_0| \leq a, \|y - y_0\| \leq b\} \subset D$  y  $M = \max_{(x, y) \in R} \|f(x, y)\|$ , entonces se puede tomar  $r = \min\{a, \frac{b}{M}\}$ . Además, si  $w(x)$  es otra solución de (P) (Problema de Cauchy), entonces coincide con  $y(x)$ .

**Prueba:** Ver Novo/Rojo/Obaya (1995), Pag. 124.

## 1.2 Métodos de un paso

**Definición 1.2.** *Un método numérico de un paso que soluciona el problema (P) tiene la forma:*

$$\begin{cases} y_{j+1} = y_j + h\Phi(x_j, y_j, h) \\ y_0 = \alpha \\ x_{j+1} = x_j + h \end{cases} \quad j = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

Escogiendo una longitud de paso  $h \neq 0$ , empezando con un valor inicial  $x_0, y_0 = \alpha = y(x_0)$  se obtienen puntos equidistantes  $x_j = x_0 + jh, j = 1, 2, \dots, n$ , obteniéndose las aproximaciones  $y_j$  de  $y(x_j)$ .

A veces también denotaremos a  $y_{j+1} = y_h(x + h)$ . ✓

**Ejemplo 1.1.** *Método de Euler:  $y_{j+1} = y_j + hf(x_j, y_j)$*

**Ejemplo 1.2.** *Método de Euler mejorado:  $y_{j+1} = y_j + hf(x_j + \frac{h}{2}, y_j + \frac{h}{2}f(x_j, y_j))$*

**Definición 1.3.** *El error de truncamiento local de un método de un paso es definido como:*

$$\tau_h(x, y) = \frac{1}{h}\{y(x+h) - y(x)\} - \Phi(x, y(x), h), \quad x \in [a, b], \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad h \in \mathbb{R},$$

el cual es un error relativo respecto al error local:

$$e_j(h) = y(x_{j+1}) - y(x_j) - h\Phi(x_j, y_j, h).$$

**Definición 1.4.** *El error de truncamiento global está definido por:*

$$g_j(h) = y(x_j) - y_j, \quad j = 0, 1, \dots.$$

El método de un paso es convergente de orden  $p$ , si:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|g_j(h)\| = 0, \text{ donde } g_j(h) = O(h^p).$$

**Definición 1.5.** Se dice que un método de un paso es consistente con el problema (P) si  $\Phi(x, y, 0) = f(x, y) = y'(x)$ ,  $\forall (x, y) \in [a, b] \times \mathbb{R}^n$ , lo que es equivalente con  $\lim_{h \rightarrow 0} \|\tau_h(x, y)\| = 0$ . El método tiene orden de consistencia  $p$ , si  $\tau_h(x, y) = O(h^p)$ .

Se puede verificar que el método de Euler tiene orden de consistencia  $p = 1$ , y el método de Euler mejorado tiene orden de consistencia  $p = 2$ .

**Definición 1.6.** Un método de un paso pertenece a la clase de los métodos Runge-Kutta Explícitos si:

$$\Phi(x_j, y_j, h) = \sum_{i=1}^m c_i K_i(x_j, y_j, h),$$

donde

$$K_1(x_j, y_j, h) = f(x_j, y_j),$$

$$K_i(x_j, y_j, h) = f(x_j + a_i h, y_j + h \sum_{l=1}^{i-1} b_{il} K_l(x_j, y_j, h)); \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Por lo general, los  $a_i$  satisfacen la condición:

$$a_i = \sum_{l=1}^{i-1} b_{il}, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

### Esquema

0					
$a_2$	$b_{2,1}$				
$a_3$	$b_{3,1}$	$b_{3,2}$			
$a_4$	$b_{4,1}$	$b_{4,2}$	$b_{4,3}$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		
$a_m$	$b_{m,1}$	$b_{m,2}$	$b_{m,3}$	$\dots$	$b_{m,m-1}$
	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$\dots$	$c_{m-1} \quad c_m$

**Lema 1.3.** *Un método explícito de Runge-Kutta es consistente con (P)  $\iff$*

$$\sum_{i=1}^m c_i = 1.$$

**Prueba:**

$$\begin{aligned} \Phi(x, y, h) &= \sum_{i=1}^m c_i K_i(x, y, h) = \sum_{i=1}^m c_i f\left(x + a_i h, y + h \sum_{l=1}^{i-1} b_{il} K_l\right), \\ \implies (\Phi(x, y, 0) &= \sum_{i=1}^m c_i f(x, y) = f(x, y) \sum_{i=1}^m c_i = f(x, y) \iff \sum_{i=1}^m c_i = 1). \quad \square \end{aligned}$$

**Ejemplo 1.3.** *Construyamos un método Runge-Kutta explícito de orden  $p = 3$ .*

$$\left. \begin{aligned} K_1 &= f(x_j, y_j) \\ K_2 &= f(x_j + a_2 h, y_j + h b_{2,1} K_1) \\ K_3 &= f(x_j + a_3 h, y_j + h(b_{3,1} K_1 + b_{3,2} K_2)) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} a_2 &= b_{2,1} \\ a_3 &= b_{3,1} + b_{3,2} \end{aligned}$$

$$y_{j+1} = y_j + h(c_1 K_1 + c_2 K_2 + c_3 K_3) = y_j + h\Phi(x_j, y_j, h),$$

$$K_1 = f,$$

$$K_2 = f + a_2 h \underbrace{(f_x + f f_y)}_F + \frac{1}{2} a_2^2 h^2 \underbrace{(f_{xx} + 2f f_{xy} + f^2 f_{yy})}_G + O(h^3)$$

$$\implies K_2 = f + a_2 h F + \frac{1}{2} a_2^2 h^2 G + O(h^3)$$

$$\begin{aligned} K_3 &= f + a_3 h f_x + h(b_{3,1} K_1 + b_{3,2} K_2) f_y + \frac{1}{2} a_3^2 h^2 f_{xx} + a_3 h^2 (b_{3,1} K_1 + b_{3,2} K_2) f_{xy} + \\ &\quad \frac{h^2}{2} (b_{3,1} K_1 + b_{3,2} K_2)^2 f_{yy} + O(h^3) \\ &= f + h[a_3 f_x + (b_{3,1} + b_{3,2}) f f_y] + h^2 [a_2 b_{3,2} F f_y + \frac{1}{2} a_3^2 f_{xx} + a_3 (b_{3,1} + b_{3,2}) f_{xy} f + \\ &\quad \frac{1}{2} (b_{3,1} + b_{3,2})^2 f^2 f_{yy}] + O(h^3) \\ &= f + h a_3 F + h^2 [a_2 b_{3,2} F f_y + \frac{1}{2} a_3^2 G] + O(h^3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \implies \tau_h(x, y) &= \frac{1}{h} [y(x+h) - y(x)] - \{c_1 K_1 + c_2 K_2 + c_3 K_3\} \\ &= \frac{1}{h} [h f + \frac{h^2}{2} F + \frac{h^3}{6} (G + F f_y)] - \{c_1 f + c_2 (f + a_2 h F + \frac{1}{2} a_2^2 h^2 G) + \\ &\quad c_3 [f + h a_3 F + h^2 (a_2 b_{3,2} F f_y + \frac{1}{2} a_3^2 G)]\} + O(h^3) \\ &= (1 - c_1 - c_2 - c_3) f + h F (\frac{1}{2} - a_2 c_2 - a_3 c_3) + h^2 [F f_y (\frac{1}{6} - a_2 c_3 b_{3,2}) + \end{aligned}$$

$$G\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2}a_2^2c_2 - \frac{1}{2}a_3^2c_3\right) + O(h^3).$$

Así tenemos:

$$\left. \begin{aligned} c_1 + c_2 + c_3 &= 1 \\ a_2c_2 + a_3c_3 &= \frac{1}{2} \\ a_2c_3b_{3,2} &= \frac{1}{6} \\ a_2^2c_2 + a_3^2c_3 &= \frac{1}{3} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Hay 6 incógnitas} \\ \text{y 4 ecuaciones.} \\ \text{Por tanto no hay solución única.} \end{array}$$

Una solución es:

$$a_2 = \frac{1}{2}, a_3 = 1, \implies c_2 = \frac{2}{3}, c_3 = \frac{1}{6}, c_1 = \frac{1}{6}$$

$$b_{2,1} = a_2 = \frac{1}{2}, b_{3,2} = 2, b_{3,1} = a_3 - b_{3,2} = -1.$$

Tenemos el método de R-K-E de orden  $p = 3$ :

$$\left\{ \begin{aligned} K_1 &= f(x_j, y_j) \\ K_2 &= f\left(x_j + \frac{h}{2}, y_j + \frac{h}{2}K_1\right) \\ K_3 &= f\left(x_j + h, y_j - hK_1 + 2hK_2\right) \\ y_{j+1} &= y_j + \frac{h}{6}(K_1 + 4K_2 + K_3). \end{aligned} \right.$$

**Teorema 1.4.** Dado un método de un paso:  $y_{j+1} = y_j + h\Phi(x_j, y_j, h)$

$$\text{para la solución de (P)} \quad \left\{ \begin{array}{l} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = \alpha \end{array} \right. \quad , x \in [a, b]$$

con las siguientes condiciones:

- (1)  $\|\Phi(x, y, h) - \Phi(x, z, h)\| \leq M\|y - z\|, \forall (x, y, h), (x, z, h) \in [a, b] \times \mathbb{R}^n, M \in \mathbb{R},$
- (2)  $\|\tau_h(x, y)\| \leq Nh^p, \forall x \in [a, b], h \in [0, h_0], N \in \mathbb{R}.$

Entonces el método de un paso es convergente del orden  $p$  con la estimación del error de truncamiento global:

$$\|y_j(h)\| \leq h^p N \frac{e^{jhM} - 1}{M}, \quad \forall x \in [a, b], \quad h \leq h_0, \quad h = \frac{x - a}{j}.$$

**Prueba:** Ver Stoer/Bulirsch (1993), Pag. 432.

**Teorema 1.5 (Gragg 1964).** Sea  $f \in C^{N+2}([a, b])$  y sea  $y_h$  la solución aproximada obtenida por un método de un paso de orden  $p$ ,  $p \leq N$ , de la solución  $y(x)$  del problema de valores iniciales:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = \alpha, \quad x \in [a, b] \end{cases}$$

Entonces el error de truncamiento global tiene un desarrollo asintótico de la forma:

$$y_h(x) - y(x) = h^p e_p(x) + h^{p+1} e_{p+1}(x) + \dots + h^N e_N(x) + h^{N+1} E_{N+1}(x) \quad (1.5)$$

con  $e_i(x_0) = 0$ ,  $i = p, p+1, \dots$

$\forall x \in [a, b]$ ,  $\forall h = h_j = \frac{x - x_0}{j}$ ,  $j = 1, 2, \dots$  Las funciones  $e_i(x)$  son independientes de  $h$ , y el resto  $E_{N+1}(x)$  es acotado (para  $x$  fijo y  $h$  arbitrario).

**Prueba:**

La prueba del teorema de Gragg fue realizada en 1964 y era muy extensa y complicada. La siguiente es la realizada por Hairer y Lubich en el año 1984, ver Stoer/Bulirsch (1993). Supongamos que el método de un paso es dado por  $\Phi(x, y, h)$ . Como el método tiene el orden  $p$ , y  $f \in C^{N+2}([a, b])$ , entonces:

$$y(x+h) - y(x) - h\Phi(x, y(x), h) = d_{p+1}(x)h^{p+1} + O(h^{p+2}). \quad (1.6)$$

Vamos a buscar una función  $e_p(x)$  diferenciable tal que:

$$y_h(x) - y(x) = e_p(x)h^p + O(h^{p+1}).$$

Para ello consideremos la función:

$$\tilde{y}_h(x) := y_h(x) - e_p(x)h^p \quad (1.7)$$

donde  $e_p(x)$  todavía no es determinada.

Como la solución numérica del nuevo método está dado por:

$$\tilde{y}_h(x+h) = \tilde{y}_h(x) + h\tilde{\Phi}(x, \tilde{y}_h(x), h)$$

de (1.7):

$$\begin{aligned} \tilde{y}_h(x+h) &= y_h(x+h) - e_p(x+h)h^p \\ &= y_h(x) + h\Phi(x, y_h(x), h) - e_p(x+h)h^p \\ &= y_h(x) - e_p(x)h^p + h\Phi(x, y_h(x), h) - e_p(x+h)h^p + e_p(x)h^p \\ &= y_h(x) - e_p(x)h^p + h\Phi(x, \tilde{y}_h(x) + e_p(x)h^p, h) - e_p(x+h)h^p + e_p(x)h^p \\ &= \tilde{y}_h(x) + h[\Phi(x, \tilde{y}_h(x) + e_p(x)h^p, h) - (e_p(x+h) - e_p(x))h^{p-1}] \end{aligned}$$

$$\implies \tilde{\Phi}(x, \tilde{y}_h(x), h) = \Phi(x, \tilde{y}_h(x) + e_p(x)h^p, h) - (e_p(x+h) - e_p(x))h^{p-1}.$$

Nuestro objetivo es determinar  $e_p(x)$ , con  $e_p(x_0) = 0$  tal que  $\tilde{\Phi}$  sea de orden  $p+1$ .

Veamos que:  $\tilde{y}_h(x) - y(x) = O(h^{p+1})$ .

Expandiendo en serie de Taylor el error local de un método de un paso  $\tilde{\Phi}$  en potencia de  $h$ , tenemos con

$$C(x, h) := y(x+h) - y(x) - \tilde{\Phi}(x, y(x), h):$$

$$\begin{aligned} C(x, h) &= y(x+h) - y(x) - h[\Phi(x, y(x), h) + \frac{\partial\Phi(x, y, h)}{\partial y}e_p(x)h^p + \\ &\quad -(e_p(x+h) - e_p(x))h^{p-1} + \dots] \\ &= y(x+h) - y(x) - h\Phi(x, y(x), h) - \frac{\partial\Phi(x, y, h)}{\partial y}e_p(x)h^{p+1} + \\ &\quad (e_p(x+h) - e_p(x))h^p + \dots] \\ &= d_{p+1}(x)h^{p+1} - \frac{\partial\Phi(x, y, 0)}{\partial y}e_p(x)h^{p+1} + e'_p(x)h^{p+1} + O(h^{p+2}) \\ &= [d_{p+1}(x) - \frac{\partial f(x, y(x))}{\partial y}e_p(x) + e'_p(x)]h^{p+1} + O(h^{p+2}) \end{aligned}$$

Luego  $\tilde{\Phi}$  tiene orden  $p + 1$  si  $e_p(x)$  es solución del P.V.I. :

$$\begin{cases} e'_p(x) = f_y(x, y(x))e_p(x) - d_{p+1}(x) \\ e_p(x_0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \implies \tilde{y}_h(x) - y(x) &= y_h(x) - y(x) - e_p(x)h^p \\ &= O(h^{p+1}) \end{aligned}$$

$$\implies y_h(x) - y(x) = e_p(x)h^p + O(h^{p+1}).$$

Para  $e_{p+1}(x)$  se procede en forma análoga al anterior, es decir consideramos

$$\tilde{\tilde{y}}_h(x) := \tilde{y}_h(x) - e_{p+1}(x)h^{p+1},$$

donde  $e_{p+1}(x)$  es desconocido. □

**Definición 1.7.** *El método*

$$\begin{aligned} y_{j+1} &= y_j + h \sum_{i=1}^m c_i K_i \\ \text{donde } K_i &= f(x_j + a_i h, y_j + h \sum_{l=1}^m b_{il} K_l), \quad i = 1, 2, \dots, m \end{aligned} \tag{1.8}$$

*es llamado el método de R-K de m-etapas.*

- ) Si  $b_{il} = 0$ , para  $i \leq l$ , tenemos un método explícito de R-K.
- ) Si  $b_{il} = 0$ , para  $i < l$  y al menos un  $b_{ii} \neq 0$ , tenemos un método diagonal implícito de R-K (DIRK).  
Si adicionalmente todos los elementos de la diagonal son idénticos ( $b_{ii} = \gamma$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ ), tenemos un método estrictamente diagonal implícito de R-K (SDIRK).
- ) En todos los demás casos se tendrá un método implícito de R-K (IRK).

**Teorema 1.6. Teorema del punto fijo de Banach**

Sean  $D \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto cerrado,  $F : D \rightarrow D$ , con  $F(D) \subset D$  y  $\|F(x) - F(y)\| \leq \beta\|x - y\|$ ,  $\forall x, y \in D$ ,  $0 < \beta < 1$ . Entonces  $x^{(k+1)} = F(x^{(k)})$  converge a un punto fijo único  $x^*$  con  $x^* = F(x^*)$ .

**Prueba:** Ver Chumpitaz (1993), Pag. 62.

**Teorema 1.7.** Sea  $f : \mathbb{R}_x \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función continua que satisface la condición de Lipschitz respecto a la segunda componente con una constante  $L$ . Si

$$h < \frac{1}{L \max_{i=1, \dots, m} \left\{ \sum_{l=1}^m |b_{il}| \right\}}$$

entonces existe una solución única de (1.8).

Además, si  $f(x, y)$  es de clase  $C^p$ , entonces las funciones  $K_i$  son de clase  $C^p$ .

**Prueba:**

$$\text{Sea } K_i = f(x_j + a_i h, y_j + h \sum_{l=1}^m b_{il} K_l), \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

$$\mathbf{K} := (K_1, K_2, \dots, K_m)^T, \quad \mathbf{K} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad \|\mathbf{K}\| := \max_{i=1, \dots, m} (\|K_i\|),$$

$$F_i(\mathbf{K}) := f(x_j + a_i h, y_j + h \sum_{l=1}^m b_{il} K_l), \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad F_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

$$\text{Definamos } R := \|F(\mathbf{K}^{(1)}) - F(\mathbf{K}^{(2)})\|,$$

$$\begin{aligned} R &= \max_{i=1, \dots, m} \|f(x_j + a_i h, y_j + h \sum_{l=1}^m b_{il} K_l^{(1)}) - f(x_j + a_i h, y_j + h \sum_{l=1}^m b_{il} K_l^{(2)})\| \\ &\leq \max_{i=1, \dots, m} Lh \left\| \sum_{l=1}^m b_{il} K_l^{(1)} - \sum_{l=1}^m b_{il} K_l^{(2)} \right\| \\ &\leq \max_{i=1, \dots, m} Lh \sum_{l=1}^m |b_{il}| \|K_l^{(1)} - K_l^{(2)}\| \\ &\leq \max_{i=1, \dots, m} Lh \sum_{l=1}^m |b_{il}| \|K_1 - K_2\| \\ &\leq q \|K_1 - K_2\|, \end{aligned}$$

$$\text{donde } h < \frac{1}{L \max_{i=1, \dots, m} \left\{ \sum_{l=1}^m |b_{il}| \right\}}, \quad 0 < q < 1.$$

Sea  $\Phi(h, \mathbf{K}) = \mathbf{K} - F(\mathbf{K}) = 0$ .

La matriz de las derivadas parciales  $\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{K}}$ , para  $h = 0$ , es la matriz identidad y por lo tanto la solución de  $\Phi(h, \mathbf{K}) = 0$ . Por el teorema de la función implícita en  $h = 0$

es  $K_i = f(x, y)$ , el cual es continuamente diferenciable en una vecindad de  $h = 0$ .  $\square$

### 1.3 Métodos Adjuntos y Simétricos

Dado un método numérico de un paso  $y_{j+1} = y_j + h\Phi(x_j, y_j, h)$ , sea  $y_j = y_h(x)$  la solución numérica en  $x = x_0 + jh$ . Los algoritmos de extrapolación mas importantes que se utilizan tienen un desarrollo asintótico con potencias pares de  $h$ ; para tener una base teórica de éstos métodos, necesitamos tener  $y_h(x)$  para  $h$  negativo.

Lo que sigue es el trabajo realizado por Hairer, Norsett y Wanner, ver Hairer/Norsett/Wanner (1993).

Dado un método numérico de un paso:

$$y_h(x + h) = y_h(x) + h\Phi(x, y_h(x), h). \quad (1.9)$$

Reemplazando  $h$  por  $-h$  tenemos

$$y_{-h}(x - h) = y_{-h}(x) - h\Phi(x, y_{-h}(x), -h), \quad (1.10)$$

y reemplazando  $x$  por  $x + h$ :

$$y_{-h}(x) = y_{-h}(x + h) - h\Phi(x + h, y_{-h}(x + h), -h) \quad (1.11)$$

Esta es una ecuación implícita para la  $y_{-h}(x + h)$ , la cual posee una solución única para  $h$  suficientemente pequeño (teorema de la función implícita),

$$y_{-h}(x + h) = y_{-h}(x) + h\Phi^*(x, y_{-h}(x), h). \quad (1.12)$$

**Definición 1.8.** Sea  $\Phi(x, y, h)$  la función de un método numérico. Definimos la función  $\Phi^*(x, y, h)$  del método adjunto por las fórmulas siguientes:

$$\begin{aligned} y_{-h}(x) &= y_{-h}(x+h) - h\Phi(x+h, y_{-h}(x+h), -h) \\ y_{-h}(x+h) &= y_{-h}(x) + h\Phi^*(x, y_{-h}(x), h). \end{aligned}$$

**Ejemplo 1.4.** El método implícito de Euler es el método adjunto del método explícito de Euler.

Sea  $y_{j+1} = y_j + h\Phi(x_j, y_j)$ , (método explícito de Euler).

Hallamos su adjunto:

$$\begin{array}{ll} y_{j+1} \longleftrightarrow y_j & : \quad y_j = y_{j+1} + h\Phi(x_j, y_{j+1}), \\ h \longleftrightarrow -h & : \quad y_j = y_{j+1} - h\Phi(x_j, y_{j+1}), \\ x \longleftrightarrow x+h & : \quad y_j = y_{j+1} - h\Phi(x_{j+1}, y_{j+1}), \end{array}$$

$$\Rightarrow y_{j+1} = y_j + h\Phi(x_{j+1}, y_{j+1}), \text{ (método implícito de Euler).}$$

**Teorema 1.8.** Sea  $\Phi$  la función de un método de R-K con coeficientes  $b_{il}$ ,  $a_i$  y  $c_i$ , donde  $i, l = 1, 2, \dots, m$ .

Entonces la función del método adjunto  $\Phi^*$  es equivalente al método de R-K con coeficientes:

$$\begin{aligned} a_i^* &= 1 - a_{m+1-i}, \\ b_{il}^* &= c_{m+1-l} - b_{m+1-i, m+1-l}, \\ c_i^* &= c_{m+1-l}, \end{aligned} \quad i, l = 1, 2, \dots, m.$$

**Prueba:**

Para calcular el método adjunto, cambiamos  $y_j$  por  $y_{j+1}$ ,  $x_j$  por  $x_{j+1}$ , y  $h$  por  $-h$ .

$$\begin{aligned} y_{j+1} &= y_j + h \sum_{i=1}^m c_i K_i, \quad K_i = f(x_j + a_i h, y_j + h \sum_{l=1}^m b_{il} K_l) \\ &\Rightarrow K_i = f(x_j + h(1 - a_i), y_j + h \sum_{l=1}^m (c_l - b_{il}) K_l) \end{aligned}$$

$$y_{j+1} = y_j + h \sum_{i=1}^m c_i K_i^*$$

Para que tengamos la secuencia natural de los  $a_i^*$ , permutamos los valores de los  $K_i^*$  y reemplazamos todos los índices  $i$  por  $m + 1 - i$ .  $\square$

**Corolario 1.9.**  $\Phi^{**} = \Phi$

**Prueba:** *Obvia.*

**Teorema 1.10.** *El método adjunto tiene el mismo orden que el método original  $\Phi$ . El término principal del error local es el mismo término del error del método original multiplicado por  $(-1)^p$ .*

**Prueba:**

Tenemos que:

$$y(x+h) - y(x) - h\Phi(x, y(x), h) = d_{p+1}(x)h^{p+1} + O(h^{p+2})$$

Reemplazando  $h$  por  $-h$ ,  $x$  por  $x+h$  tenemos por  $d_{p+1}(x+h) = d_{p+1}(x) + O(h)$

$$y(x) - y(x+h) + h\Phi(x+h, y(x+h), -h) = d_{p+1}(x)(-h)^{p+1} + O(h^{p+2})$$

$$\implies y(x+h) = y(x) + d_{p+1}(x)(-1)^p h^{p+1} + h\Phi(x+h, y(x+h), -h) + O(h^{p+2})$$

$$\implies y(x+h) - y(x) - h\Phi^*(x, y(x), h) = d_{p+1}(x)(-1)^p h^{p+1} + O(h^{p+2}). \quad \square$$

**Teorema 1.11.** *El método adjunto tiene el mismo desarrollo asintótico del error global del método original si se reemplaza  $h$  por  $-h$ .*

**Prueba:**

Vamos a utilizar el teorema 1.5 (Teorema de Gragg).

Por el referido teorema tenemos que:

$$y_h(x) - y(x) = e_p(x)h^p + O(h^{p+1}), \text{ con } e_p(x_0) = 0.$$

Reemplazando  $h$  por  $-h$  tenemos:

$$y_{-h}(x) - y(x) = e_p(x)(-h)^p + O(h^{p+1}),$$

lo cual establece el primer término.

Para continuar, necesitamos probar que  $\tilde{\Phi}$  del método

$$\tilde{y}_h(x+h) = \tilde{y}_h(x) + h\tilde{\Phi}(x, \tilde{y}_h(x), h), \quad (1.13)$$

donde:

$$\tilde{y}_h(x) = y_h(x) + e_p(x)h^p, \quad (1.14)$$

$$\tilde{\Phi}(x, \tilde{y}_h(x), h) = \Phi(x, \tilde{y}_h(x) - e_p(x)h^p, h) + (e_p(x+h) - e_p(x))h^{p-1},$$

conmuta con la operación adjunta, es decir  $\tilde{\Phi}^* = \tilde{\Phi}^*$ .

De la definición de  $\tilde{\Phi}$ , resulta:

$$y_h(x+h) + e_p(x+h)h^p = y_h(x) + e_p(x)h^p + h\tilde{\Phi}(x, y_h(x) + e_p(x)h^p, h).$$

Reemplazando  $h$  por  $-h$ ,  $x$  por  $x+h$  tenemos:

$$y_{-h}(x) + e_p(x)(-h)^p = y_{-h}(x+h) + e_p(x+h)(-h)^p - h\tilde{\Phi}(x+h, y_{-h}(x+h) + e_p(x+h)(-h)^p, -h).$$

Por la definición del método adjunto tenemos:

$$y_{-h}(x+h) + e_p(x+h)(-h)^p = y_{-h}(x) + e_p(x)(-h)^p + h\tilde{\Phi}^*(x, y_{-h}(x) + e_p(x)(-h)^p, h). \quad (1.15)$$

Ahora, utilizando el método original resulta:

$$\begin{aligned} y_h(x+h) &= y_h(x) + h\Phi(x, y_h(x), h) \\ \implies y_{-h}(x) &= y_{-h}(x+h) - h\Phi(x+h, y_{-h}(x+h), -h) \\ \implies y_{-h}(x+h) &= y_{-h}(x) + h\Phi^*(x, y_{-h}(x), h). \end{aligned}$$

Utilizando la ecuación (1.14) con  $-h$ , tenemos en la ecuación anterior, lo siguiente:

$$\tilde{y}_{-h}(x+h) + e_p(x+h)(-h)^p = \tilde{y}_{-h}(x) + e_p(x)(-h)^p + h\tilde{\Phi}^*(x, \tilde{y}_{-h}(x) + e_p(x)(-h)^p, h).$$

Por tanto  $\tilde{\Phi}^* = \tilde{\Phi}^*$ . □

**Definición 1.9.** *Un método es simétrico si  $\Phi^* = \Phi$ .*

**Ejemplo 1.5.** *Los siguientes métodos son simétricos :*

*Regla Trapezoidal:*

$$y_{j+1} = y_j + \frac{h}{2}[f(x_j, y_j) + f(x_{j+1}, y_{j+1})].$$

*Método Implícito del punto intermedio:*

$$y_{j+1} = y_j + hK_1, \quad K_1 = f\left(x_j + \frac{h}{2}, y_j + \frac{h}{2}K_1\right).$$

**Teorema 1.12.** *Un método simétrico tiene solamente exponentes pares en el desarrollo asintótico de su error global, es decir:*

$$y(x) - y_h(x) = e_{2q}(x)h^{2q} + e_{2q+2}(x)h^{2q+2} + O(h^{2q+4}), \text{ con } e_{2j}(x_0) = 0.$$

**Prueba:**

Si  $\Phi^* = \Phi$ , entonces:

$$y(x) - y_h(x) = e_p(x)h^p + e_{p+1}(x)h^{p+1} + O(h^{p+2}), \quad (1)$$

$$y(x) - y_{-h}(x) = e_p(x)(-h)^p + e_{p+1}(x)(-h)^{p+1} + O((-h)^{p+2}). \quad (2)$$

Sumando (1) y (2) tenemos:

$$2(y(x) - y_h(x)) = e_p(x)[h^p + (-1)^p h^p] + e_{p+1}(x)[h^{p+1} + (-h)^{p+1}] +$$

$$O(h^{p+2}) + O((-h)^{p+2})$$

$$\implies y(x) - y_h(x) = e_p(x) \frac{[h^p + (-1)^p h^p]}{2} + \frac{e_{p+1}(x)[h^{p+1} + (-h)^{p+1}]}{2} +$$

$$\frac{O(h^{p+2}) + O((-h)^{p+2})}{2}$$

$$\text{Si } p = 2q \implies y(x) - y_h(x) = e_{2q}(x)h^{2q} + O(h^{2q+2}).$$

$$\text{Si } p = 2q + 1 \implies y(x) - y_h(x) = e_{2q+2}(x)h^{2q+2} + O(h^{2q+4}). \quad \square$$

## 2 EL MÉTODO DE EXTRAPOLACIÓN

### 2.1 Introducción

Sea  $\Pi_n$  el conjunto de todos los polinomios reales o complejo  $P$  de grado  $\leq n$ :  $P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ .

Las demostraciones de los siguientes teoremas de ésta sección pueden verlas en Stoer/Bulirsch (1983).

**Teorema 2.1.** Para  $n + 1$  puntos arbitrarios  $(x_i, f(x_i))$ , donde  $f$  es una función definida en dichos puntos para  $i = 0, 1, \dots, n$ ,  $x_i \neq x_k$ , para  $i \neq k$ , existe un polinomio único  $P \in \Pi_n$  con  $P(x_i) = f(x_i)$  para  $i = 0, 1, \dots, n$ .

Este polinomio se escribe en la forma de Lagrange :

$$P(x) = \sum_{i=0}^n f_i L_i(x) = \sum_{i=0}^n f_i \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n \frac{x - x_k}{x_i - x_k}, \quad \text{donde } f_i := f(x_i) \quad (2.1)$$

**Teorema 2.2.** Si  $x_0, x_1, \dots, x_n$  son distintos en el intervalo  $[a, b]$  y si  $f \in C^{n+1}[a, b]$ , entonces para cada  $x \in [a, b]$ , existe un número  $\xi(x) \in \langle a, b \rangle$  tal que

$$f(x) = P(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)$$

donde  $P$  es el polinomio interpolante dado en la ecuación (2.1)

**Definición 2.1.** Sea  $f$  una función definida en  $x_0, x_1, \dots, x_n$  y supongamos  $i_0, i_1, \dots, i_j$ ,  $j = 0, 1, \dots, k$  son  $(k + 1)$  enteros distintos con  $0 \leq i_j \leq n$  para cada  $j$ . El polinomio de Lagrange de grado  $\leq k$  que coincide con  $f$  en  $x_{i_0}, x_{i_1}, \dots, x_{i_j}, \dots, x_{i_k}$  se denota por  $P_{i_0, i_1, \dots, i_k}$ .

**Teorema 2.3.** Sean  $n + 1$  puntos  $(x_i, f(x_i))$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ , denotamos por  $P_{i_0, i_1, \dots, i_k} \in \Pi_n$ , un polinomio para el cual  $P_{i_0, i_1, \dots, i_k}(x_{i_j}) = f_{i_j}$ ,  $j = 0, 1, \dots, k$ .

Dichos polinomios están dados por la siguiente recursión:

$$P_i(x) = f_i ,$$

$$P_{i_0, i_1, \dots, i_k}(x) = \frac{(x - x_{i_0})P_{i_1, i_2, \dots, i_k}(x) - (x - x_{i_k})P_{i_0, i_1, \dots, i_{k-1}}(x)}{x_{i_k} - x_{i_0}} \quad (2.2)$$

Basados en la recursión (2.2) construimos un algoritmo Aitken-Neville, que sirve para evaluar el polinomio interpolante en el punto  $x$ . Usando la siguiente abreviación:

$$T_{i+k, k} := P_{i, i+1, \dots, i+k},$$

tenemos para  $k = 3$ :

	$k = 0$	1	2	3
$x_0$	$f_0 = T_{0,0}$			
$x_1$	$f_1 = T_{1,0}$	$T_{1,1}$		
$x_2$	$f_2 = T_{2,0}$	$T_{2,1}$	$T_{2,2}$	
$x_3$	$f_3 = T_{3,0}$	$T_{3,1}$	$T_{3,2}$	$T_{3,3}$

La recursión (2.2) puede ser modificada para una evaluación más eficiente, de la manera siguiente:

$$T_{i,0} := f_i,$$

$$T_{i,k} := \frac{(x - x_{i-k})T_{i,k-1} - (x - x_i)T_{i-1,k-1}}{x_i - x_{i-k}}$$

$$= \frac{(x - x_i + x_i - x_{i-k})T_{i,k-1} - (x - x_i)T_{i-1,k-1}}{x_i - x_{i-k}}$$

$$= \frac{(x_i - x_{i-k})T_{i,k-1} + (x - x_i)T_{i,k-1} - (x - x_i)T_{i-1,k-1}}{x_i - x_{i-k}}$$

$$= T_{i,k-1} + \frac{T_{i,k-1} - T_{i-1,k-1}}{\frac{x - x_{i-k}}{x - x_i} - 1}, \quad 1 \leq k \leq i, \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (2.3)$$

Notar finalmente que para  $x = 0$  la recursión dada por (2.3) tiene la forma siguiente:

$$T_{i,0} := f_i,$$

$$T_{i,h} = T_{i,k-1} + \frac{T_{i,k-1} - T_{i-1,k-1}}{\frac{x_{i-k}}{x_i} - 1} \quad 1 \leq k \leq i, \quad i = 0, 1, \dots, m. \quad (2.4)$$

En lo siguiente mostraremos como se puede aplicar las fórmulas de Aitken-Neville a la integración numérica. Para un intervalo  $[a, b]$  y para una partición regular de  $[a, b]$  dado por:

$x_i = a + ih, i = 0, 1, \dots, N, x_0 = a, x_N = b, h = \frac{b-a}{N}$  se tiene:

$$T(h) = \int_a^b f(t)dt + \sum_{l=1}^m h^{2l} \frac{B_{2l}}{(2l)!} (f^{(2l-1)}(b) - f^{(2l-1)}(a)) +$$

$$h^{2m+2} \frac{B_{2m+2}}{(2m+2)!} (b-a) f^{(2m+2)}(\xi), \quad a < \xi < b, \quad (2.5)$$

donde :

$T(h) = h(\frac{f(a)}{2} + f(a+h) + \dots + f(b-h) + \frac{f(b)}{2})$  es la suma trapezoidal y los  $B_k$  son los números de Bernoulli.

El resto de  $T(h) - \int_a^b f(t)dt$  es llamado fórmula de Euler-Mclaurin. Obsérvese que el resto tiene un desarrollo en  $h^2$ . Sea  $f \in C^{2m+2}[a, b]$  una función real integrable sobre  $[a, b]$ , entonces la expansión (2.5) de la suma trapezoidal  $T(h)$  de  $f$  en términos de la longitud de paso  $h = \frac{b-a}{n}$  es de la forma:

$$T(h) = \alpha_0 + \alpha_1 h^2 + \alpha_2 h^4 + \dots + \alpha_m h^{2m} + \alpha_{m+1} h^{2m+2}, \quad (2.6)$$

donde:

$$\alpha_0 = \int_a^b f(t)dt, \quad \alpha_k = \frac{B_{2k}}{(2k)!} (f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a)) \quad k = 1, 2, \dots, m$$

$$\alpha_{m+1}(h) = \frac{B_{2m+2}}{(2m+2)!} (b-a) f^{(2m+2)}(\xi(h)), \quad a < \xi = \xi(h) < b$$

y  $\alpha_{m+1}(h)$  es el coeficiente del error.

Siendo  $f^{(2m+2)}$  continua en  $[a, b]$ , existe  $K > 0$  tal que  $|f^{(2m+2)}(x)| \leq K, \forall x \in [a, b]$ .

Por tanto existe una constante  $M_{m+1}$  tal que

$$|\alpha_{m+1}(h)| \leq M_{m+1}, \quad \forall h = \frac{b-a}{n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Ahora determinamos  $\alpha_0$ , como sigue:

Para cada longitud de paso  $h_i$  de la secuencia

$h_0 = b - a, h_1 = \frac{h_0}{n_1}, h_2 = \frac{h_0}{n_2}, \dots, h_m = \frac{h_0}{n_m}$ , donde  $n_1, n_2, \dots, n_m$  son enteros positivos estrictamente crecientes, los siguientes valores de la regla trapezoidal:

$$T_{i0} := T(h_i), \quad i = 0, 1, \dots, m.$$

Definimos

$$\tilde{T}_{mn}(h) := a_0 + a_1 h^2 + \dots + a_m h^{2m},$$

y tomamos el valor extrapolado  $\tilde{T}(0)$  como la aproximación deseada de la integral  $\alpha_0$ .

Este método de integración es conocido como la integración de Romberg, la cual fue introducido por Romberg (1965) para una secuencia especial:

$$h_i = \frac{b-a}{2^i}, \quad i = 0, 1, \dots, m.$$

El algoritmo de interpolación de Aitken-Neville es muy adecuado para aproximar  $\tilde{T}(0)$ .

Sea  $\tilde{T}_{ik}(h)$  el polinomio de grado al menos  $k$  en  $h^2$  para el cual

$$\tilde{T}_{ik}(h_j) = T(h_j) \quad j = i - k, i - k + 1, \dots, i, \quad 1 \leq k \leq i \leq m,$$

y sea  $T_{ik} := \tilde{T}_{ik}(0)$ .

Reemplazando en la fórmula (2.4) con  $x_i = h_i^2$  obtenemos:

$$T_{ik} = T_{i,k-1} + \frac{T_{i,k-1} - T_{i-1,k-1}}{\left[\frac{h_{i-k}}{h_i}\right]^2 - 1}$$

Resulta el siguiente esquema de Romberg (Aitken-Neville) ( $m = 3$ )

$$\begin{array}{l|l} h_0^2 & T(h_0) = T_{0,0} \\ h_1^2 & T(h_1) = T_{1,0} \quad T_{1,1} \\ h_2^2 & T(h_2) = T_{2,0} \quad T_{2,1} \quad T_{2,2} \\ h_3^2 & T(h_3) = T_{3,0} \quad T_{3,1} \quad T_{3,2} \quad T_{3,3} \end{array}$$

De ésta manera se puede mejorar la aproximación numérica de la integral  $\int_a^b f(x)dx$  por la regla trapezoidal notablemente con una simple extrapolación.

## 2.2 Definición del Método

En la presente sección vamos a definir el método de extrapolación para la solución de una ecuación diferencial ordinaria. Aplicamos la misma idea que hemos desarrollado para la integración numérica.

$$\text{Dado el P.V.I } \begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

y  $H > 0$  un tamaño de paso básico.

Escogemos una sucesión de enteros positivos.

$$n_0 < n_1 < n_2 < n_3 < \dots \tag{2.7}$$

y definamos los correspondientes tamaños de pasos:

$$h_0 > h_1 > h_2 > h_3 \dots \text{ por } h_i = \frac{H}{n_i}, i = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Escojamos un método numérico de orden  $p$  y calculemos los resultados numéricos de nuestro P.V.I. para un  $n_i$  pasos con tamaño de paso  $h_i$ .

Definimos:

$$T_{i,0} := y_{h_i}(x_0 + h), \quad i = 0, 1, 2, \dots, n_i. \quad (2.8)$$

Utilizando el Teorema de Gragg (Teorema 1.5) y en especial la ecuación (1.5), eliminando algunos términos, el polinomio interpolante es:

$$p(h) = \hat{y} - e_p h^p - e_{p+1} h^{p+1} - \dots - e_{p+k-1} h^{p+k-1}, \quad (2.9)$$

donde  $\hat{y} = y_h(x_0 + H) + e_p(x_0 + H)h^p + \dots + e_{p+k-1}(x_0 + H)h^{p+k-1}$ , tal que

$$p(h_i) = T_{i,0} = y_{h_i}(x_0 + H), \quad i = j - k, \dots, j - 1, j. \quad (2.10)$$

Extrapolamos para  $h = 0$  y usamos:  $p(0) = \hat{y} =: T_{j,k}$  como resultado numérico.

La condición (2.10) consiste de  $k + 1$  ecuaciones lineales para  $k + 1$  incógnitas  $\hat{y}, e_p, \dots, e_{p+k-1}$ .

El siguiente teorema puede verlo en Hairer/Norsett/Wanner (1993).

**Teorema 2.4.** *El valor  $T_{j,k}$  representa un método numérico de orden  $p + k$ .*

**Prueba:**

Del Teorema (1.5) tenemos:

$$y(x) - y_h(x) = e_p(x)h^p + e_{p+1}(x)h^{p+1} + \dots + e_N(x)h^N + E_{N+1}(x)h^{N+1}.$$

Eligiendo  $N = p + k$ , resulta:

$$T_{i,0} = y(x_0 + H) - e_p(x_0 + H)h_i^p - \dots - e_{p+k-1}(x_0 + H)h_i^{p+k-1} - \Delta_i,$$

donde  $\Delta_i = e_{p+k}(x_0 + H)h_i^{p+k} + E_{p+k+1}(x_0 + H)h_i^{p+k+1} = O(H^{p+k+1})$ ,

$$e_{p+k}(x_0) = 0 \text{ y } h_i = \frac{H}{n_i} \leq H.$$

Resulta, un sistema lineal con incógnitas:

$$y(x_0 + H), H^p e_p(x_0 + H), \dots, H^{p+k-1} e_{p+k-1}(x_0 + H)$$

Definimos

$$A := \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{n_j^p} & \frac{1}{n_j^{p+1}} & \cdots & \frac{1}{n_j^{p+k-1}} \\ 1 & \frac{1}{n_{j-1}^p} & \frac{1}{n_{j-1}^{p+1}} & \cdots & \frac{1}{n_{j-1}^{p+k-1}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \frac{1}{n_{j-k}^p} & \frac{1}{n_{j-k}^{p+1}} & \cdots & \frac{1}{n_{j-k}^{p+k-1}} \end{bmatrix},$$

$$A \begin{bmatrix} y(x_0 + H) \\ -e_p(x_0 + H)H^p \\ \vdots \\ -e_{p+k-1}(x_0 + H)H^{p+k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{j,0} \\ T_{j-1,0} \\ \vdots \\ T_{j-k,0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta_j \\ \Delta_{j-1} \\ \vdots \\ \Delta_{j-k} \end{bmatrix}.$$

Poniendo en función de  $\hat{y}$ : (aproximación numérica en  $h = 0$ )

$$A \begin{bmatrix} \hat{y} \\ -e_p(x_0 + H)H^p \\ \vdots \\ -e_{p+k-1}(x_0 + H)H^{p+k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{j,0} \\ T_{j-1,0} \\ \vdots \\ T_{j-k,0} \end{bmatrix}$$

La matriz  $A$  es de tipo Vandermonde, luego es invertible, entonces

$$\|y(x_0 + H) - \hat{y}\| \leq \|A^{-1}\|_{\infty} \max_{i=j, j-1, \dots, j-k+1} \|\Delta_i\| = O(H^{p+k+1})$$

Pero  $y(x_0 + H) - \hat{y} = y(x_0 + H) - y(x_0) - H\Phi = H\tau_H(x, y, H)$ ,  $\hat{y} = y(x_0) + H\Phi$

$$\implies \|\tau_H(x, y, H)\| \leq O(H^{p+k}). \quad \square$$

Una gran ventaja de este método es que provee una tabla completa de los resultados numéricos. Esquema de Romberg (Aitken-Neville),  $m=3$

$$\begin{aligned}
P(h_0) &= T_{0,0} \\
P(h_1) &= T_{1,0} \quad T_{1,1} \\
P(h_2) &= T_{2,0} \quad T_{2,1} \quad T_{2,2} \\
P(h_3) &= T_{3,0} \quad T_{3,1} \quad T_{3,2} \quad T_{3,3}
\end{aligned}
\tag{2.11}$$

Varias sucesiones de números-pasos son usadas para (2.7):  
la secuencia de Romberg (1955),

$$1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, \dots \tag{2.12}$$

la secuencia de Bulirsch,

$$1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32, \dots \tag{2.13}$$

y la secuencia armónica (Deuffhard 1983):

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \dots$$

### EL ALGORITMO DE AITKEN-NEVILLE

Para el caso  $p = 2$ , (2.8) y (2.9) nos da un problema de interpolación clásica:

$$T_{j,k+1} = T_{j,k} + \frac{T_{j,k} - T_{j-1,k}}{\frac{n_j}{n_{j-k}} - 1}$$

Si el método es simétrico, para  $p = 2$ , tenemos un desarrollo en  $h^2$ , entonces

$$T_{j,k+1} = T_{j,k} + \frac{T_{j,k} - T_{j-1,k}}{\left(\frac{n_j}{n_{j-k}}\right)^2 - 1}$$

## 2.3 El Método de Gragg/Bulirsch/Stoer o GBS

Una desarrollo en  $h^2$  del error global es muy importante para los métodos de extrapolación. En 1963 Gragg probó que el valor  $S_h(x)$ ,  $x = x_0 + 2nh$ , producida por el método de Gragg-Bulirsch-Stoer (GBS),

$$(*) \begin{cases} y_1 &= y_0 + hf(x_0, y_0) \\ y_{j+1} &= y_{j-1} + 2hf(x_j, y_j), \quad j = 1, 2, \dots, 2n, \quad x_j = x_0 + jh \\ S_h(x) &= \frac{1}{4}[y_{2n-1} + 2y_{2n} + y_{2n+1}], \quad (\text{Función de Gragg}), \end{cases} \quad (2.14)$$

posee una expansión asintótica en potencias pares de  $h$  y con propiedades de estabilidad muy satisfactorias.

Las pruebas desarrolladas por Gragg de estas propiedades eran muy largas y complicadas, hasta que Stetter en el año 1970 tuvo una interesante idea de interpretar la ecuación (2.14) como un método simétrico algoritmo de un paso reescribiéndolo en términos de índices pares e impares. Ver Hairer/Norsett/Wanner (1993).

**Teorema 2.5.** *El método GBS dado en (2.14) es simétrico.*

**Prueba:**

Definimos:

$$h^* = 2h, \quad x_j^* = x_0 + jh^*, \quad u_0 = v_0 = y_0$$

$$u_j = y_{2j}, \quad v_j = y_{2j+1} - hf(x_{2j}, y_{2j}) = \frac{1}{2}(y_{2j+1} + y_{2j-1})$$

Reescribiendo (2.14) tenemos:

$$u_j = y_{2j} \Rightarrow u_{j+1} = y_{2(j+1)} = y_{(2j+1)+1} = y_{(2j+1)-1} + 2hf(x_{2j+1}, y_{2j+1}),$$

$$u_{j+1} = y_{2j} + 2hf(x_{2j+1}, y_{2j+1})$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow u_{j+1} &= u_j + 2hf(x_0 + (2j+1)h, v_j + hf(x_{2j}, y_{2j})) \\ &= u_j + h^*f(x_0 + 2jh + h, v_j + \frac{h^*}{2}f(x_0 + 2jh, u_j)) \\ &= u_j + h^*f(x_0 + jh^* + \frac{h^*}{2}, v_j + \frac{h^*}{2}f(x_0 + jh^*, u_j)) \\ &= u_j + h^*f(x_j^* + \frac{h^*}{2}, v_j + \frac{h^*}{2}f(x_j^*, u_j)) \end{aligned}$$

$$v_j = y_{2j+1} - hf(x_{2j}, y_{2j}) \implies v_{j+1} = y_{2(j+1)+1} - hf(x_{2(j+1)}, y_{2(j+1)})$$

$$\begin{aligned} \implies v_{j+1} &= y_{2j+2} - hf(x_{2j+2}, y_{2j+2}) \\ &= y_{2j+1} + hf(x_{2j+2}, y_{2j+2}) - hf(x_{2j+2}, y_{2j+2}) \\ &= y_{2j+1} + hf(x_{2j+2}, y_{2j+2}) \\ &= y_{2j+1} - hf(x_{2j}, y_{2j}) + hf(x_{2j}, y_{2j}) + hf(x_{2j+2}, y_{2j+2}) \\ &= v_j + \frac{h^*}{2}[f(x_0 + 2jh, u_j) + f(x_0 + 2jh + 2h, u_{j+1})] \\ &= v_j + \frac{h^*}{2}[f(x_j^*, u_j) + f(x_j^* + h^*, u_{j+1})]. \end{aligned}$$

Entonces el método (2.14) puede ser reescrito de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} u_{j+1} \\ v_{j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_j \\ v_j \end{bmatrix} + h^* \begin{bmatrix} f(x_j^* + \frac{h^*}{2}, v_j + \frac{h^*}{2}f(x_j^*, u_j)) \\ \frac{1}{2}[f(x_j^* + h^*, u_{j+1}) + f(x_j^*, u_j)] \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

Para ver la simetría de (2.15) hacemos lo siguiente:

$$u_{j+1} \longleftrightarrow u_j, \quad v_{j+1} \longleftrightarrow v_j, \quad h^* \longleftrightarrow -h^*, \quad x_j^* \longleftrightarrow x_j^* + h^*$$

$$\implies \begin{bmatrix} u_j \\ v_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{j+1} \\ v_{j+1} \end{bmatrix} - h^* \begin{bmatrix} f(x_j^* + h^* - \frac{h^*}{2}, v_{j+1} - \frac{h^*}{2}f(x_j^* + h^*, u_{j+1})) \\ \frac{1}{2}[f(x_j^* + h^* - h^*, u_j) + f(x_j^* + h^*, u_{j+1})] \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} u_{j+1} \\ v_{j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_j \\ v_j \end{bmatrix} + h^* \begin{bmatrix} f(x_j^* + \frac{h^*}{2}, v_{j+1} - \frac{h^*}{2}f(x_j^* + h^*, u_{j+1})) \\ \frac{1}{2}[f(x_j^* + h^*, u_{j+1}) + f(x_j^*, u_j)] \end{bmatrix}. \quad (2.16)$$

Como se cumple

$$\begin{aligned} v_{j+1} - \frac{h^*}{2}f(x_j^* + h^*, u_{j+1}) &= y_{2(j+1)+1} - hf(x_{2j+2}, y_{2j+2}) - \frac{h^*}{2}f(x_j^* + h^*, u_{j+1}) \\ &= v_j + \frac{h^*}{2}[f(x_j^*, u_j) + f(x_j^* + h^*, u_{j+1})] - \frac{h^*}{2}f(x_j^* + h^*, u_{j+1}) \\ &= v_j + \frac{h^*}{2}f(x_j^*, u_j) \end{aligned}$$

tenemos reemplazando en (2.16):

$$\begin{bmatrix} u_{j+1} \\ v_{j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_j \\ v_j \end{bmatrix} + h^* \begin{bmatrix} f(x_j^* + \frac{h^*}{2}, v_j + \frac{h^*}{2} f(x_j^*, u_j)) \\ \frac{1}{2}[f(x_j^* + h^*, u_{j+1}) + f(x_j^*, u_j)] \end{bmatrix},$$

lo cual prueba que la ecuación (2.15) es simétrica.  $\square$

**Teorema 2.6.** *Sea  $f(x, y) \in C^{2l+2}$ , entonces la solución numérica, del método GBS definida en (2.14) tiene para  $x = x_0 + 2nh$  un desarrollo asintótico de la forma:*

$$y(x) - S_h(x) = \sum_{k=1}^l e_{2k}(x)h^{2k} + h^{2l+2}C(x, h),$$

donde  $e_{2k}(x_0) = 0$  y  $C(x, h)$  es acotado para  $x \in [x_0, \bar{x}]$ ,  $h \in [0, h_0]$ .

**Prueba:**

Haciendo las sustituciones

$$h^* = 2h, \quad x_j^* = x_0 + jh^*, \quad u_0 = v_0 = y_0$$

$$u_j = y_{2j},$$

$$v_j = y_{2j+1} - hf(x_{2j}, y_{2j}) = \frac{1}{2}(y_{2j+1} + y_{2j-1}),$$

obtenemos el método numérico simétrico :

$$\begin{bmatrix} u_{j+1} \\ v_{j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_j \\ v_j \end{bmatrix} + h^* \begin{bmatrix} f(x_j^* + \frac{h^*}{2}, v_j + \frac{h^*}{2} f(x_j^*, u_j)) \\ \frac{1}{2}[f(x_j^* + h^*, u_{j+1}) + f(x_j^*, u_j)] \end{bmatrix},$$

que es consistente con el P.V.I.

$$\begin{cases} u' = f(x, v), & u(x_0) = y_0 \\ v' = f(x, u), & v(x_0) = y_0, \end{cases}$$

cuando  $h^* \rightarrow 0$ .

Como el método es simétrico, tenemos por el teorema 1.12, los siguientes desarrollos

asintóticos de los errores:

$$(\alpha) : \quad y(x) - u_{h^*} = \sum_{k=1}^l a_{2k}(x)(h^*)^{2k} + (h^*)^{2l+2}A(x, h^*), \quad a_{2k}(x_0) = 0,$$

$$(\beta) : \quad y(x) - v_{h^*} = \sum_{k=1}^l b_{2k}(x)(h^*)^{2k} + (h^*)^{2l+2}B(x, h^*), \quad b_{2k}(x_0) = 0,$$

con  $A(x, h^*)$ ,  $B(x, h^*)$  acotados. Para  $x = x_0 + 2nh$  obtenemos:

$$y(x) - y_h(x) = \sum_{k=1}^l \hat{a}_{2k}(x)(h^*)^{2k} + (h^*)^{2l+2}\hat{A}(x, h),$$

donde  $\hat{a}_{2k}(x) = 2^{2k}a_{2k}(x)$  y  $\hat{A}(x, h) = 2^{2l+2}A(x, h)$ .

Por  $S_h(x_0 + 2nh) = \frac{1}{4}[y_{2n-1} + 2y_{2n} + y_{2n+1}] = \frac{1}{2}[u_n + v_n]$ ,

obtenemos con  $h^* = 2h$ , sumando  $(\alpha)$  y  $(\beta)$ ,

$e_{2k}(x) = (a_{2k}(x) + b_{2k}(x))2^{2k-1}$ ,  $C(x, h) = (A(x, h) + B(x, h))2^{2l+1}$  es acotado, y

$$y(x) - S_h(x) = \sum_{k=1}^l e_{2k}(x)h^{2k} + h^{2l+2}C(x, h), \quad \text{donde } e_{2k}(x_0) = 0.$$

□

### 3 ANÁLISIS DE ESTABILIDAD

En el presente capítulo vamos a definir cuando un sistema de ecuaciones diferenciales es rígido, lo que es la estabilidad, y la función de estabilidad de un método numérico. Podemos revisar Hairer/Wanner (1991).

Veamos el siguiente ejemplo:

**Ejemplo 3.1.** *El método implícito de Euler:*

$$y_{j+1} = y_j + hf(x_{j+1}, y_{j+1}),$$

*aplicado a la ecuación de Dahlquist:*

$$y' = \lambda y, \quad y(0) = 1, \quad \operatorname{Re}(\lambda) < 0.$$

*Tenemos:*

$$y_{j+1} = y_j + h(\lambda)y_{j+1} \implies y_{j+1}(1 - h\lambda) = y_j \implies y_{j+1} = \frac{1}{1 - z}y_j.$$

$$\text{Sea } F(h\lambda) = \frac{1}{1 - h\lambda}, \text{ y si } z = h\lambda \text{ se tiene } F(z) = \frac{1}{1 - z}.$$

$$\implies |F(z)| < 1 \iff \left| \frac{1}{1 - z} \right| < 1 \iff |z - 1| > 1.$$

*Los valores que satisfacen la desigualdad anterior, están en la región del plano complejo exterior al círculo centrado en 1 y radio 1.*

**Definición 3.1.** *Para un método de un paso con las aproximaciones:*

$$y_{j+1} = F(h\lambda)y_j,$$

*respecto a la ecuación :*

$$y' = \lambda y, \quad y(0) = 1, \quad \operatorname{Re}(\lambda) < 0, \quad z = h\lambda \text{ (ecuación test de Dahlquist),}$$

*se denomina al conjunto*

$$B = \{z \in \mathbb{C} / |F(z)| < 1\}$$

región de estabilidad absoluta. La función  $F(z)$  se llama la función de estabilidad del método.

En el ejemplo anterior, la región de estabilidad absoluta del método implícito de Euler es casi todo el plano complejo excepto el círculo centrado en 1 y radio 1. El método implícito de Euler, es por eso muy estable.

**Ejemplo 3.2.** El algoritmo GBS, aplicado a :

$$y' = \lambda y, \quad y(0) = 1,$$

nos conduce con  $z = H\lambda$  a lo siguiente:

$$\begin{aligned} y_0 &= 1, & y_1 &= 1 + \frac{z}{n_j} \\ y_{l+1} &= y_{l-1} + 2\frac{z}{n_j}y_l, & l &= 1, 2, \dots, n_j \\ T_{j,0} &= \frac{1}{4}(y_{n_j-1} + 2y_{n_j} + y_{n_j+1}) \\ T_{j,k} &= T_{j,k-1} + \frac{T_{j,k-1} - T_{j-1,k-1}}{\left(\frac{n_j}{n_{j-k+1}}\right)^2 - 1} \end{aligned}$$

Las regiones de estabilidad para los términos  $T_{22}$ ,  $T_{33}$ ,  $T_{44}$ , y  $T_{55}$  para la sucesión  $\{n_j\} = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$  son mostrados en los gráficos (2.3) del libro de Hairer/Wanner (1991), Pag.21.

**Definición 3.2.** Un sistema lineal no homogéneo  $y'(x) = Ay(x) + b(x)$ ,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $b \in \mathbb{R}^n$ , es denominado rígido, si los valores propios de  $A$  tienen la parte real negativa muy distintas.

Se calcula  $S := \frac{\max_j |(\operatorname{Re}(\lambda_j))|}{\min_j |(\operatorname{Re}(\lambda_j))|}$ . Por lo general, valores de  $S$  mayor que

$10^3$  indican una rigidez fuerte.

Sabemos que una E.D.O. no lineal se puede aproximar por una E.D.O. lineal en una vecindad. Apliquemos la definición anterior al siguiente ejemplo.

**Ejemplo 3.3.** Dado el sistema de E.D.O.

$$\begin{cases} y_1' = -0.1y_1 + 1000y_2y_3 \\ y_2' = -0.1y_1 - 1000y_2y_3 - 500y_2^2, \\ y_3' = 500y_2^2 - 0.5y_3 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \\ y_3(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

$$J(x) = \begin{pmatrix} -0.1 & 100y_3 & 100y_2 \\ 0 & -100y_3 - 1000y_2 & -100y_2 \\ 0 & 1000y_2 & -0.5 \end{pmatrix}, J(0) = \begin{pmatrix} -0.1 & 50 & 200 \\ 0 & -2050 & -200 \\ 0 & 2000 & -0.5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 \approx 0.000249$$

$$\lambda_2 \approx -219.0646$$

$$\lambda_3 \approx -1031.535$$

$$\Rightarrow S = 7.35 \times 10^6$$

Stoer/Bulirsch (1993) pag. 488, presenta un ejemplo de una ecuación diferencial rígida de una reacción cinética química.

**Proposición 3.1.** Los métodos de R-K de  $m$  etapas

$$y_{j+1} = y_j + h \sum_{i=1}^m c_i K_i, \quad K_i = f(x_j + a_i h, y_j + \sum_{l=1}^m b_{il} K_l), \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

dados también por:

$$y_{j+1} = y_j + h \sum_{i=1}^m c_i f(x_j + a_i h, g_i), \quad g_i = y_j + h \sum_{l=1}^m b_{il} f(x_j + a_l h, g_l),$$

tienen la función de estabilidad  $F(z) = 1 + z^T (I - zB)^{-1} e$ , donde

$$g = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_m \end{pmatrix}, \quad e = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B = (b_{il})_{i,l=1,2,\dots,m} \quad c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$$

**Prueba:**

Aplicando el método R-K a la ecuación de Dahlquist,  $y' = \lambda y$ , tenemos:

$$\begin{aligned}
 y_{j+1} &= y_j + h\lambda \sum_{i=1}^m c_i g_i, & g_i &= y_j + h\lambda \sum_{l=1}^m b_{il} g_l, & i &= 1, 2, \dots, m, \\
 \implies g &= y_j e + h\lambda B g \implies (I - h\lambda B)g = y_j e \implies g = y_j (I - zB)^{-1} e \\
 \implies y_{j+1} &= y_j + zc^T g = y_j + zc^T y_j (I - zB)^{-1} e = y_j (1 + zc^T (I - zB)^{-1} e) \\
 \implies F(z) &= 1 + zc^T (I - zB)^{-1} e
 \end{aligned}$$

□

**Proposición 3.2.** *La función de estabilidad de los métodos implícitos de R-K satisface:*

$$F(z) = \frac{\det(I - zB + zec^T)}{\det(I - zB)}$$

**Prueba:**

$$\begin{cases} (I - h\lambda B)g = y_j \\ y_{j+1} = y_j + zc^T g \end{cases} \implies \begin{pmatrix} (I - zB) & 0 \\ -zc^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g \\ y_{j+1} \end{pmatrix} = y_j \begin{pmatrix} e \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por la regla de Cramer obtenemos :

$$y_{j+1} = \frac{1}{\det(I - zB)} \det \begin{pmatrix} (I - zB) & e \\ -zc^T & 1 \end{pmatrix} y_j. \quad (3.1)$$

Al lado derecho de la ecuación (3.1) se cumple:

$$\det \begin{pmatrix} I - zB & e \\ -zc^T & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} I - zB + zec^T & 0 \\ -zc^T & 1 \end{pmatrix} = \det(I - zB + zec^T) \quad (3.2)$$

Reemplazando la ecuación (3.2) en la ecuación (3.1) tenemos:

$$y_{j+1} = \frac{\det(I - zB + zec^T)}{\det(I - zB)} y_j$$

$$\implies F(z) = \frac{\det(I - zB + zec^T)}{\det(I - zB)} \quad \square$$

Vamos a aplicar las proposiciones anteriores a algunos métodos. Sea  $F(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ ,  $\text{grado}(P) = k$ ,  $\text{grado}(Q) = j$ , donde  $k, j \leq m$ .

**Ejemplo 3.4.** 1). *Punto medio implícito:*

$$y_{j+1} = y_j + K_1, \quad K_1 = f(x_j + \frac{h}{2}, y_j + \frac{h}{2}K_1)$$

$$\implies K_1 = \lambda(y_j + \frac{h}{2}K_1) \implies K_1 - \frac{h\lambda}{2}K_1 = \lambda y_j \implies K_1 = \frac{\lambda}{\left(1 - \frac{h\lambda}{2}\right)} y_j$$

$$\implies y_{j+1} = y_j + \frac{h\lambda}{\left(1 - \frac{h\lambda}{2}\right)} y_j \implies y_{j+1} = \left(\frac{1 + \frac{h\lambda}{2}}{1 - \frac{h\lambda}{2}}\right) y_j \implies F(z) = \frac{1 + \frac{z}{2}}{1 - \frac{z}{2}}$$

2). *La regla Trapezoidal:*

$$y_{j+1} = y_j + \frac{h}{2}[f(x_j, y_j) + f(x_{j+1}, y_{j+1})]$$

$$\implies y_{j+1} = y_j + \frac{h}{2}(\lambda y_j + \lambda y_{j+1}) \implies y_{j+1} \left(1 - \frac{h\lambda}{2}\right) = \left(1 + \frac{h\lambda}{2}\right) y_j$$

$$\implies F(z) = \frac{1 + \frac{z}{2}}{1 - \frac{z}{2}}$$

3). *Método de Hammer & Hollingsworth (orden 4)*

$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{6}$
$1 + \frac{\sqrt{3}}{6}$	$\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{6}$	$\frac{1}{4}$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$a_1$	$b_{11}$	$b_{12}$	$\cdots$	$b_{1m}$
$a_2$	$b_{21}$	$b_{22}$	$\cdots$	$b_{2m}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$
$a_m$	$b_{m1}$	$b_{m2}$	$\cdots$	$b_{mm}$
	$c_1$	$c_2$	$\cdots$	$c_m$

Usando la Proposición (3.2) obtenemos:

$$\begin{aligned}
 I - zB + zec^T &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - z \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{6} \\ \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 + \frac{z}{2} - \frac{z}{2} & -\frac{z}{4} + \frac{z\sqrt{3}}{6} + \frac{z}{2} \\ -\frac{z}{4} - \frac{z\sqrt{3}}{6} + \frac{z}{3} & 1 - \frac{z}{4} + \frac{z}{2} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 + \frac{z}{4} & \frac{z\sqrt{3}}{6} + \frac{z}{4} \\ \frac{z}{4} - \frac{z\sqrt{3}}{6} & 1 + \frac{z}{4} \end{bmatrix}, \\
 I - zB &= \begin{bmatrix} 1 - \frac{z}{4} & -\frac{z}{4} + \frac{z\sqrt{3}}{6} \\ -\frac{z}{4} - \frac{z\sqrt{3}}{6} & 1 - \frac{z}{4} \end{bmatrix}, \\
 \det(I - zB + zec^T) &= \left(1 + \frac{z}{4}\right)^2 - \left(\frac{z}{4} - \frac{z\sqrt{3}}{6}\right)\left(\frac{z}{4} + \frac{z\sqrt{3}}{6}\right) = 1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{12}, \\
 \det(I - zB) &= \left(1 - \frac{z}{4}\right)^2 - \left(-\frac{z}{4} - \frac{z\sqrt{3}}{6}\right)\left(-\frac{z}{4} + \frac{z\sqrt{3}}{6}\right) = 1 - \frac{z}{2} + \frac{z^2}{12} \\
 \Rightarrow F(z) &= \frac{1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{12}}{1 - \frac{z}{2} + \frac{z^2}{12}}
 \end{aligned}$$

**Definición 3.3 (Dahlquist 1963).** Un método cuya región de estabilidad satisfice:

$$B \supset \mathbb{C}^- = \{z \in \mathbb{C} / \operatorname{Re}(z) \leq 0\}$$

es llamado *A-estable*.

**Ejemplo 3.5.** El método implícito de Euler:

$$y_{j+1} = y_j + hf(x_{j+1}, y_{j+1}).$$

tiene como función de estabilidad:

$$F(z) = \frac{1}{1-z},$$

por tanto es A-estable.

**Teorema 3.3.** Un método de R-K con función de estabilidad  $F(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$  es A-estable si y solo si

- 1)  $|F(iy)| \leq 1, \forall y \in \mathbb{R}$
- 2)  $F(z)$  es analítica para  $Re(z) < 0$ .

**Prueba:**

$\implies$ ) Para todos los  $z \in \mathbb{C}$ , con  $Re(z) \leq 0$  se tiene  $|F(z)| \leq 1$ , entonces se cumple (1) y (2).

$\impliedby$ ) Por el principio del máximo es  $|F(z)|$  constante  $\forall z \in \mathbb{C}$ , con  $Re(z) < 0$  de (2), y por (1)  $F(z)$  es continua para el eje complejo, entonces  $|F(z)| \leq 1 \forall z \in \mathbb{C}$ , con  $Re(z) < 0$ .  $\square$

**Definición 3.4.** Se dice que un método implícito de R-K es I-estable si cumple solamente la condición (1) del (3.3)

**Observación 3.1.** Un método implícito de R-K es I-estable, si el polinomio  $E(y) := |Q(iy)|^2 - |P(iy)|^2 = Q(iy)Q(-iy) - P(iy)P(-iy)$ , satisface  $E(y) \geq 0, \forall y \in \mathbb{R}$ .

**Proposición 3.4.** La función  $E(y) = |Q(iy)|^2 - |P(iy)|^2$  es un polinomio de grado par menor o igual a  $2\max\{\text{grad}(P), \text{grad}(Q)\}$ . Si  $F(z)$  es una aproximación de orden  $p$ , entonces  $E(y) = O(y^{p+1})$  cuando  $y \rightarrow 0$ .

**Prueba:**

$$\text{Sea } F(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}, \quad \text{grad}(P) = k, \quad \text{grad}(Q) = j,$$

$$E(y) = |Q(iy)|^2 - |P(iy)|^2 = Q(iy)Q(-iy) - P(iy)P(-iy),$$

entonces

$$\begin{aligned} \text{grad}(E) &\geq \max\{\text{grad}(2j), \text{grad}(2k)\} = 2\max\{\text{grad}(j), \text{grad}(k)\} \\ &\geq 2\max\{\text{grad}(P), \text{grad}(Q)\} \end{aligned}$$

Como  $F(z)$  es una aproximación de orden  $p$ , entonces:

$$|e^z| - \frac{|P(z)|}{|Q(z)|} = O(z^{p+1}).$$

Tomando  $z = iy$  y como  $|e^{iy}| = 1$  tenemos  $|e^{iy}|^2 = e^{iy}e^{-iy} = 1$ ,

$$\Rightarrow |e^{iy}| - \frac{|P(iy)|}{|Q(iy)|} = O(y^{p+1})$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{|P(iy)|}{|Q(iy)|} = O(y^{p+1})$$

$$\Rightarrow |Q(iy)| - |P(iy)| = O(y^{p+1}),$$

$$E(y) = (|Q(iy)| + |P(iy)|)(|Q(iy)| - |P(iy)|) = O(y^{p+1}), \text{ cuando } y \rightarrow 0. \quad \square$$

**Ejemplo 3.6.** a). Para el método implícito del punto medio / Regla Trapezoidal, tenemos

$$F(z) = \frac{1 + \frac{z}{2}}{1 - \frac{z}{2}} = \frac{P(z)}{Q(z)}.$$

1)  $|F(iy)| \leq 1, \quad \forall y \in \mathbb{R}$ , porque  $Q(z) = P(-z) \Rightarrow$

$$E(y) = |Q(z)|^2 - |P(z)|^2 = 0.$$

2)  $F(z)$  es analítica para  $\operatorname{Re}(z) < 0$ , pues su denominador solo se anula en  $z = 2$ .

Entonces el método es A-estable.

b). El método de Hammer-Hollingsworth es de orden  $p = 4$ ,

$$F(z) = \frac{1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{12}}{1 - \frac{z}{2} + \frac{z^2}{12}}.$$

Se tiene que :

$$Q(z) = P(-z) \Rightarrow E(y) = |Q(z)|^2 - |P(z)|^2 = 0.$$

Las raíces de su denominador se hallan al lado derecho del plano complejo. Se tiene que el método es A-estable.

**Proposición 3.5.** La función racional  $F(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$  de orden  $p \geq 2j - 2$  es I-estable si, y solo, si  $|F(\infty)| \leq 1$ .

**Prueba:**

$$\text{Sea } \operatorname{grad}(P) = k \text{ y } \operatorname{grad}(Q) = j.$$

$|F(\infty)| \leq 1$  implica  $k \leq j$  y por la proposición (3.4) se tiene  $E(y) = Ky^{2j}, y \rightarrow 0$ .

Así tenemos que  $|F(\infty)| \leq 1$  se cumple si y solo, si  $K \geq 0$ . □

**Definición 3.5.** (Ehle 1969) Un método es llamado *L-estable*, si es *A-estable* y además  $\lim_{z \rightarrow \infty} F(z) = 0$ .

**Ejemplo 3.7.** Método de Radau IIA (orden 5)  $F(z) = \frac{1 + \frac{2z}{5} + \frac{z^2}{20}}{1 - \frac{3z}{50} + \frac{3z^2}{20} - \frac{z^3}{30}}$ .

Es *A-estable* y además  $\lim_{z \rightarrow \infty} F(z) = 0$ , por tanto es *L-estable*.

**Proposición 3.6.** Si un método *R-K implícito* con  $B$  no-singular satisface una de las condiciones siguientes:

$$(1) \quad b_{ml} = c_l, \quad l = 1, 2, \dots, m,$$

$$(2) \quad b_{i1} = c_1, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

entonces  $F(\infty) = 0$  y un método *A-estable* es *L-estable*.

**Prueba:**

$$F(z) = 1 + zc^T(I - zB)^{-1}e = 1 + c^T(z^{-1}I - B)^{-1}e$$

$$\implies F(\infty) = 1 - c^T B^{-1}e.$$

De (1) obtenemos:  $B^T e_m = c$ , donde

$$e_m = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad e = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B = (b_{il}), \quad i, l = 1, 2, \dots, m.$$

$$\implies F(\infty) = 1 - e_m^T B B^{-1} e = 1 - e_m^T e = 1 - 1 = 0.$$

De (2) se tiene  $B e_1 = c_1 e$ , lo que implica también  $F(\infty) = 0$ . □

**Definición 3.6 (Widlund 1967).** Se dice que un método es  $A(\alpha)$ -estable si el sector  $S_\alpha = \{z/ | \arg(-z) | \leq \alpha, z \neq 0\}$ ,  $\alpha \leq \frac{\pi}{2}$  es un subconjunto de la región de estabilidad.

**Definición 3.7 (Padé 1892).** Sea  $g(z)$  analítica alrededor de  $z = 0$ . Entonces la función racional:

$$R_{jk}(z) = \frac{P_{jk}(z)}{Q_{jk}(z)} = \frac{\sum_{l=0}^k a_l z^l}{\sum_{l=0}^j b_l z^l}, \quad b_0 = 1,$$

es llamado la aproximación de **Padé** del índice  $(j, k)$  para  $g(z)$  alrededor  $z = 0$ , si  $R_{jk}^{(l)}(0) = g^{(l)}(0)$ ,  $l = 0, 1, \dots, j+k$ . En este caso  $R_{jk}(z) = g(z) + O(z^{j+k+1})$ ,  $z \rightarrow 0$ .

**Lema 3.7.** La aproximación de Padé, si existe, es única.

**Prueba:**

Sean  $R_{jk}$  y  $R_{jk}^*$  dos aproximaciones de Padé del mismo índice.

Entonces se cumple  $\frac{P_{jk}(z)}{Q_{jk}(z)} = \frac{P_{jk}^*(z)}{Q_{jk}^*(z)} + O(z^{j+k+1})$

$$w(z) := P_{jk}(z)Q_{jk}^*(z) - P_{jk}^*(z)Q_{jk}(z) = O(z^{j+k+1}).$$

Como  $w(z)$  es un polinomio de grado  $\leq j+k$ , se tiene  $w(z) = 0$ , lo que significa que  $R_{jk} = R_{jk}^*$ . □

#### Cálculo de la aproximación de Padé

$g(z) = \sum_{l=0}^{\infty} c_l z^l$  obtenemos:

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{\rho} c_{r-l} b_l &= a_r, & r &= 0, \dots, k, & \rho &= \min\{j, r\} \\ \sum_{l=0}^{\sigma} c_{j+k-\mu-l} b_l &= 0, & \mu &= 0, 1, \dots, j-1, & \sigma &= \min\{j, j+k-\mu\}. \end{aligned}$$

**Teorema 3.8.** *La aproximación de Padé para  $e^z$  existe para cada índice es dado por:*

$$P_{jk}(z) = \sum_{l=0}^k \frac{k!(j+k-l)!}{(k-l)!(j+k)!!} z^l, \quad Q_{jk}(z) = \sum_{l=0}^j \frac{k!(j+k-l)!}{(k-l)!(j+k)!!} (-z)^l$$

**Prueba:** La prueba puede verla en Hairer [2], pag. 50

**Teorema 3.9.** *Una aproximación de Padé  $R_{jk}$  es I-estable si  $j - 2 \leq k \leq j$*

**Prueba:**

Sea  $j - 2 \leq k \leq j$ , entonces  $E(y)$  tiene grado máximo de  $2j$ , para  $k = j$  se tiene que  $E(y) = 0$  porque  $P(z) = Q(-z)$ .

Para  $k = j - 1, k = j - 2$  se tiene que  $k < j$ , esto implica que  $|F(\infty)| \leq 1$ .

$p = j + k \geq 2j - 2$  lo cual implica que es I-estable. □

**Ejemplo 3.8.** 1). *La aproximación de Padé del índice  $(i, j) = (2, 2)$  es:*

$$R_{2,2}(z) = \frac{1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{12}}{1 - \frac{z}{2} + \frac{z^2}{12}},$$

*el cuál coincide con la función de estabilidad del método de Hammer-Hollingsworth (orden 4).*

2). *La aproximación de Padé del índice  $(j, k) = (1, 1)$  es:*

$$R_{1,1}(z) = \frac{1 + \frac{z}{2}}{1 - \frac{z}{2}},$$

*el cuál coincide con la función de estabilidad del método implícito del punto medio y la regla trapezoidal.*

## 4 EXTRAPOLACIÓN DE MÉTODOS SIMÉTRICOS PARA LA RESOLUCIÓN DE E.D.O. RÍGIDAS

En el presente capítulo analizaremos la extrapolación de métodos simétricos de un paso, la regla trapezoidal, la regla del punto medio implícito linealizado, los cuales tienen un desarrollo en  $h^2$  de su error global. Además aplicamos la extrapolación a los métodos implícito y linealmente implícito de Euler los cuales tienen un desarrollo en  $h$  de su error global. Ver Hairer/Wanner (1991).

### 4.1 Extrapolación de Métodos Simétricos

Consideremos como el método simétrico de un paso, la regla Trapezoidal:

$$y_{j+1} = y_j + \frac{h}{2}(f(x_j, y_j) + f(x_{j+1}, y_{j+1})) \quad (4.1)$$

y el método implícito del punto intermedio:

$$y_{j+1} = y_j + hf \left( x_j + \frac{h}{2}, \frac{1}{2}(y_{j+1} + y_j) \right). \quad (4.2)$$

Como se ha visto en el Capítulo 2 ambos métodos son simétricos y tienen un desarrollo asintótico de su error global en  $h^2$ .

Basándonos en los resultados del Capítulo 2 para la implementación del método de extrapolación, tomamos una sucesión de números-pasos  $\{n_j\} = \{n_1, n_2, \dots, n_j, \dots\}$ . Sea  $\frac{H}{n_j}$ , donde  $H > 0$  un tamaño de paso básico.

Definimos

$$T_{j,1} = y_{h_j}(x_0 + H). \quad (4.3)$$

La solución numérica, obtenida en  $n_j$  pasos con tamaño  $h_j$ , es

$$T_{j,k+1} = T_{j,k} + \frac{T_{j,k} - T_{j-1,k}}{\left(\frac{n_j}{n_{j-k}}\right)^2 - 1}. \quad (4.4)$$

Aplicando la ecuación test  $y' = \lambda y$ , al método dado en (4.1), obtenemos:

$$y_{j+1} = y_j + \frac{h}{2}\lambda(y_{j+1} + y_j) \implies y_{j+1} \left(1 - \frac{h\lambda}{2}\right) = \left(1 + \frac{h\lambda}{2}\right) y_j$$

$$\implies y_{j+1} = \frac{\left(1 + \frac{h\lambda}{2}\right)}{\left(1 - \frac{h\lambda}{2}\right)} y_j.$$

La función de estabilidad es entonces:  $F(z) = \frac{\left(1 + \frac{z}{2}\right)}{\left(1 - \frac{z}{2}\right)},$

Análogamente obtenemos para (4.2) :  $F(z) = \frac{\left(1 + \frac{z}{2}\right)}{\left(1 - \frac{z}{2}\right)}.$

De este modo, la función de estabilidad  $F_{jk}(z)$  del método  $T_{jk}$  es dada recursivamente por:

$$F_{j1}(h\lambda) = \left(\frac{1 + \frac{h\lambda}{2n_j}}{1 - \frac{h\lambda}{2n_j}}\right)^{n_j} \implies F_{j1}(z) = \left(\frac{1 + \frac{z}{2n_j}}{1 - \frac{z}{2n_j}}\right)^{n_j},$$

$$F_{j,k+1}(z) = F_{j,k}(z) + \frac{F_{j,k}(z) - F_{j-1,k}(z)}{\left(\frac{n_j}{n_{j-k}}\right)^2 - 1}. \quad (4.5)$$

Dahlquist (1963), ver Hairer/Wanner (1991), obtuvo para  $n_1 = 1$  y  $n_2 = 2$ :

$$F_{22}(z) = \frac{1}{3} \left( 4 \left( \frac{1 + \frac{z}{4}}{1 - \frac{z}{4}} \right)^2 - \left( \frac{1 + \frac{z}{2}}{1 - \frac{z}{2}} \right) \right) \rightarrow \frac{5}{2} > 1, \text{ cuando } z \rightarrow \infty, \quad (4.6)$$

lo que es una propiedad no deseada cuando solucionamos problemas rígidos. Stetter (1973) propuso tomar solo números pares o impares en la sucesión de números-pasos  $\{n_j\}$ , entonces todas las funciones de estabilidad de la tabla de extrapolación tienden para  $z \rightarrow \infty$  a 1 ó -1, respectivamente.

La Fig. 4.1 muestra los dominios de estabilidad  $\{z \in \mathbb{C} / |F_{jj}(z)| \leq 1\}$  para la sucesión de números-pasos  $\{n_j\} = \{1, 3, 5, 7, 9, \dots\}$ .

### SUAVIDAD

Otra posibilidad para evitar la dificultad encontrada en (4.6) es la suavidad, Lindberg (1971). La idea es reemplazar la definición (4.3) por el paso de suavidad de Gragg:

$$\begin{aligned} \widehat{T}_{j1} &= S_{h_j}(x_0 + H) \\ S_h(x) &= \frac{1}{4}(y_h(x-h) + 2y_h(x) + y_h(x+h)) \end{aligned}$$

donde  $y_h(x)$ ,  $S_h(x)$  (método trapezoidal) poseen una expansión asintótica en potencias pares de  $h$ .

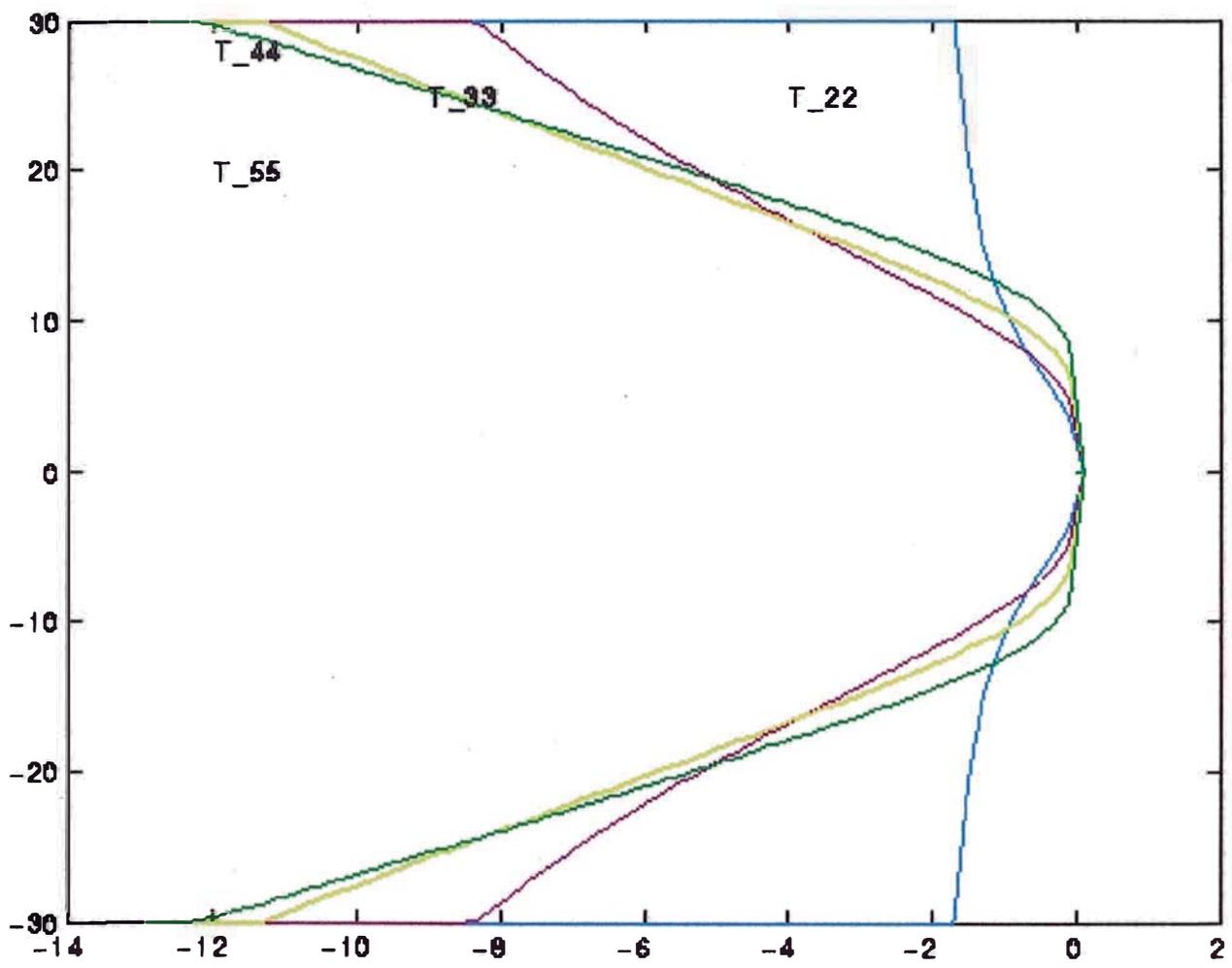


Fig.4.1. Dominios de Estabilidad para la regla trapezoidal extrapolada.

Para la función de estabilidad de  $\widehat{T}_{j1}$  tenemos:

$$\begin{aligned}\widehat{F}_{j1}(z) &= \frac{1}{4} \left\{ \left( \frac{1 + \frac{z}{2n_j}}{1 - \frac{z}{2n_j}} \right)^{n_j - 1} + 2 \left( \frac{1 + \frac{z}{2n_j}}{1 - \frac{z}{2n_j}} \right)^{n_j} + \left( \frac{1 + \frac{z}{2n_j}}{1 - \frac{z}{2n_j}} \right)^{n_j + 1} \right\} \\ &= \frac{1}{\left(1 - \frac{z}{2n_j}\right)^2} \left(1 + \frac{z}{2n_j}\right)^{n_j}\end{aligned}\quad (4.7)$$

Se trata de una aproximación L-estable a la función exponencial.

La función de estabilidad  $\widehat{F}_{jk}(z)$  obtenida de (4.5) todas satisfacen  $\widehat{F}_{jk}(z) = O(z^{-2})$ , cuando  $z \rightarrow \infty$ .

La Fig. 4.2 muestra los dominios de estabilidad  $\{z \in \mathbb{C} \mid |\widehat{F}_{jj}(z)| \leq 1\}$  para la sucesión de números-pasos  $\{n_j\} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ .

## 4.2 La Regla de Punto Medio Implícito Linealizado

Los códigos de extrapolación basados sobre métodos puramente implícito son muy dificultosos de implementar eficientemente. Después de extensivos cálculos numéricos, Bader/Deuhflhard (1983), ver Hairer/Wanner (1991) hallaron que un método linealmente implícito, que era la extensión de los métodos **GBS** dado en el Capítulo 3, da muy buenos resultados para ecuaciones rígidas. La motivación para el método de Bader & Deuhflhard es basado en la transformación de Lawson:

$$y(x) = e^{Jx}C(x), \quad (4.8)$$

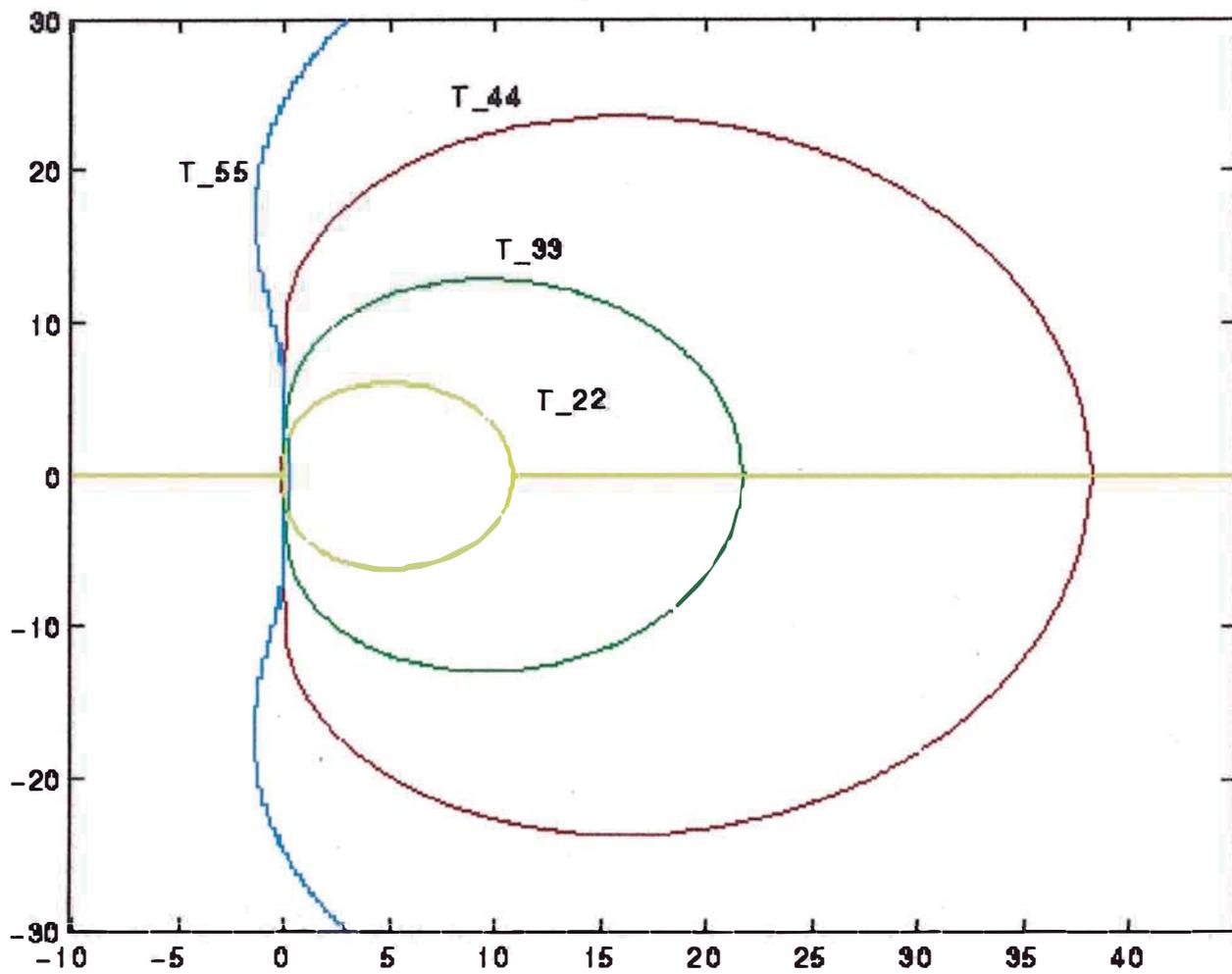


Fig. 4.2. Dominios de Estabilidad de  $\widehat{F}_{jj}(z)$ .

donde esperamos que la matriz  $J \approx f'(y)$  neutralice la rigidez.

Diferenciando la ecuación (4.8) obtenemos:

$$\begin{aligned} y'(x) &= Je^{Jx}C(x) + e^{Jx}C'(x) \\ \implies f(x, y) &= Jy(x) + e^{Jx}C'(x) \\ \implies C'(x) &= e^{-Jx}[f(x, y) - Jy(x)] \\ \implies C'(x) &= e^{-Jx}g(x, e^{Jx}C), \end{aligned}$$

$$\text{donde } g(x, y) = f(x, y) - Jy(x). \quad (4.9)$$

Resolviendo lo anterior por el algoritmo GBS

$$\begin{cases} y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0), \\ y_{i+1} = y_{i-1} + 2hf(x_i, y_i), & i = 1, 2, \dots, 2m, \\ S_h(x) = \frac{1}{4}(y_{2m-1} + 2y_{2m} + y_{2m+1}), \end{cases}$$

resulta:

$$C_{i+1} = C_{i-1} + 2he^{-Jx_i}g(x_i, e^{Jx_i}C_i).$$

Por (4.8) tenemos:

$$\begin{aligned} e^{-Jx_{i+1}}y_{i+1} &= e^{-Jx_{i-1}}y_{i-1} + 2he^{-Jx_i}g(x_i, y_i) \\ \implies e^{-J(x_i+h)}y_{i+1} &= e^{-J(x_i-h)}y_{i-1} + 2he^{-Jx_i}g(x_i, y_i) \\ \implies e^{-J(x_i)}e^{-Jh}y_{i+1} &= e^{-J(x_i)}e^{Jh}y_{i-1} + 2he^{-Jx_i}g(x_i, y_i) \\ \implies e^{-Jh}y_{i+1} &= e^{Jh}y_{i-1} + 2hg(x_i, y_i) \end{aligned}$$

Por razones evidentes de cálculo, reemplazamos  $e^{\pm hJ}$  por la aproximación  $I \pm hJ$  y obtenemos:

$$\begin{cases} (I - hJ)y_1 = y_0 + hg(x_0, y_0) \\ (I - hJ)y_{i+1} = (I + hJ)y_{i-1} + 2hg(x_i, y_i) \\ S_h(x) = \frac{1}{2}(y_{2m-1} + y_{2m+1}), & x = x_0 + 2mh. \end{cases}$$

Sustituyendo  $g$  de (4.9) obtenemos ( con  $x = x_0 + 2mh$ ,  $x_i = x_0 + ih$  )

$$\begin{cases} (I - hJ)(y_1 - y_0) = hf(x_0, y_0), \\ (I - hJ)(y_{i+1} - y_i) = -(I + hJ)(y_i - y_{i-1}) + 2hf(x_i, y_i), \\ S_h(x) = \frac{1}{2}(y_{2m-1} + y_{2m+1}), \end{cases} \quad (4.10)$$

donde  $J$  es una aproximación del jacobiano  $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ .

Si tomamos  $J = 0$ , en las dos primeras ecuaciones de (4.10), estos son equivalentes al método GBS.

Ahora vamos a probar uno de los teoremas fundamentales de éste Capítulo

**Teorema 4.1. Bader & Deuffhard 1983** (*Ver Hairer/Wanner (1991)*)

*Sea  $f(x, y)$  suficientemente diferenciable y sea  $J$  una matriz arbitraria, entonces la solución numérica definida en (4.10) posee un desarrollo asintótico de la forma:*

$$y(x) - S_h(x) = \sum_{j=1}^l e_j(x)h^{2j} + h^{2l+2}C(x, h)$$

donde  $C(x, h)$  es acotado para  $x_0 \leq x \leq \bar{x}$  y  $0 \leq h \leq h_0$ .

Para  $J \neq 0$  tenemos en general  $e_j(x_0) \neq 0$ .

**Prueba:**

Como en la prueba de Stetter para el algoritmo GBS, teorema 1.5, introducimos las variables:

$$h^* = 2h, \quad x_k^* = x_0 + kh^*, \quad u_0 = v_0 = y_0, \quad u_k = y_{2k}$$

$$v_k = (I - hJ)y_{2k+1} + hJy_{2k} - hf(x_{2k}, y_{2k}). \quad (4.11)$$

De la segunda ecuación de (4.10) tenemos:

$$(I - hJ)(y_{2k+1} - y_{2k}) = -(I + hJ)(y_{2k} - y_{2k-1}) + 2hf(x_{2k}, y_{2k})$$

$$\implies (I - hJ)(y_{2k+1} - y_{2k}) = -(I + hJ)y_{2k} + (I + hJ)y_{2k-1} + 2hf(x_{2k}, y_{2k})$$

$$\implies (I - hJ)y_{2k+1} + hJy_{2k} - hf(x_{2k}, y_{2k}) = -hJy_{2k} + (I + hJ)y_{2k-1} + hf(x_{2k}, y_{2k}). \quad (4.12)$$

Reemplazando (4.12) en (4.11) resulta:

$$v_k = (I + hJ)y_{2k-1} - hJy_{2k} + hf(x_{2k}, y_{2k}). \quad (4.13)$$

Como  $u_k = y_{2k}$ ,  $u_{k+1} = y_{2(k+1)} = y_{2k+2}$ , en la segunda ecuación de (4.10):

$$(I - hJ)(y_{2k+2} - y_{2k+1}) = -(I + hJ)y_{2k+1} + (I + hJ)y_{2k} + 2hf(x_{2k+1}, y_{2k+1}),$$

$$y_{2k+2} - hJy_{2k+2} - y_{2k+1} + hJy_{2k+1} = -y_{2k+1} - hJy_{2k+1} + y_{2k} + hJy_{2k} + 2hf(x_{2k+1}, y_{2k+1}),$$

$$u_{k+1} = hJu_{k+1} - 2hJy_{2k+1} + u_k + hJu_k + 2hf(x_{2k+1}, y_{2k+1})$$

$$= u_k + 2hf(x_{2k+1}, y_{2k+1}) - 2hJy_{2k+1} + 2hJ \left( \frac{u_k + u_{k+1}}{2} \right)$$

$$= u_k + h^* \left[ f\left(x_k^* + \frac{h^*}{2}, y_{2k+1}\right) - Jy_{2k+1} + J \left( \frac{u_k + u_{k+1}}{2} \right) \right] \quad (4.14)$$

$$v_{k+1} = (I + hJ)y_{2k+1} - hJy_{2k+2} + f(x_{2k+2}, y_{2k+2})$$

$$= y_{2k+1} - hJy_{2k+1} + 2hJy_{2k+1} - hJy_{2k+2} + hf(x_{2k+2}, y_{2k+2})$$

$$= (I - hJ)y_{2k+1} + hJy_{2k} - hf(x_{2k+2}, y_{2k+2}) + 2hJy_{2k+1} - hJy_{2k} - hJy_{2k+2} + h[f(x_{2k+2}, y_{2k+2}) + f(x_{2k+2}, y_{2k+2})]$$

$$\begin{aligned}
&= v_k + h[f(x_{2k}, y_{2k}) + f(x_{2k+2}, y_{2k+2})] + 2hJy_{2k+1} - 2hJ\left(\frac{y_{2k} + y_{2k+2}}{2}\right) \\
&= v_k + \frac{h^*}{2}[f(x_k^*, u_{k+1}) + f(x_k^* + h^*, u_k)] + h^*Jy_{2k+1} - h^*J\left(\frac{u_k + u_{k+1}}{2}\right) \\
&= v_k + h^*\left[\frac{1}{2}(f(x_k^*, u_k) + f(x_k^* + h^*, u_{k+1})) + Jy_{2k+1} - \frac{J}{2}(u_k + u_{k+1})\right]. \quad (4.15)
\end{aligned}$$

De (4.14) y (4.15) resulta:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} u_{k+1} \\ v_{k+1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} u_k \\ v_k \end{bmatrix} + \\
&h^* \begin{bmatrix} f(x_k^* + \frac{h^*}{2}, y_{k+1}) - Jy_{2k+1} + J\left(\frac{u_k + u_{k+1}}{2}\right) \\ \frac{1}{2}(f(x_k^* + h^*, u_{k+1}) + f(x_k^*, u_k)) + Jy_{2k+1} - \frac{J}{2}(u_k + u_{k+1}) \end{bmatrix}. \quad (4.16)
\end{aligned}$$

De (4.11) tenemos:

$$\begin{aligned}
v_k &= (I - hJ)y_{2k+1} + hJy_{2k} - hf(x_{2k}, y_{2k}) \\
\implies v_k &= y_{2k+1} - hJy_{2k+1} + hJy_{2k} - hf(x_{2k}, y_{2k}) \\
\implies y_{2k+1} &= v_k + hJy_{2k+1} - hJy_{2k} + hf(x_{2k}, y_{2k}) \\
\implies y_{2k+1} &= v_k + \frac{h^*}{2}Jy_{2k+1} - \frac{h^*}{2}Ju_k + \frac{h^*}{2}f(x_k^*, u_k), \quad (4.17)
\end{aligned}$$

y de (4.15) tenemos:

$$h^*Jy_{2k+1} = v_{k+1} - v_k - \frac{h^*}{2}f(x_k^*, u_k) - \frac{h^*}{2}f(x_{k+1}^*, u_{k+1}) + \frac{h^*}{2}Ju_k + \frac{h^*}{2}Ju_{k+1}. \quad (4.18)$$

Reemplazando (4.18) en (4.17) se tiene:

$$\begin{aligned}
y_{2k+1} &= v_k + \frac{1}{2} \left[ v_{k+1} - v_k - \frac{h^*}{2} f(x_k^*, u_k) - \frac{h^*}{2} f(x_{k+1}^*, u_{k+1}) + \frac{h^*}{2} J(u_k + u_{k+1}) \right] - \\
&\quad \frac{h^*}{2} J u_k + \frac{h^*}{2} f(x_k^*, u_k) \\
&= \frac{v_{k+1} + v_k}{2} - \frac{h^*}{4} f(x_k^*, u_k) - \frac{h^*}{4} f(x_{k+1}^*, u_{k+1}) + \frac{h^*}{4} J u_k + \frac{h^*}{4} J u_{k+1} - \\
&\quad \frac{h^*}{2} J u_k + \frac{h^*}{2} f(x_k^*, u_k) \\
&= \frac{v_{k+1} + v_k}{2} + \frac{h^*}{4} \left( f(x_k^*, u_k) - f(x_{k+1}^*, u_{k+1}) \right) + \frac{h^*}{4} J(u_{k+1} - u_k) \\
&= \frac{v_{k+1} + v_k}{2} + h^* J \left( \frac{u_{k+1} - u_k}{4} \right) - \frac{h^*}{4} \left( f(x_{k+1}^*, u_{k+1}) - f(x_k^*, u_k) \right). \quad (4.19)
\end{aligned}$$

Veamos ahora la simetría del método (4.16).

Realizamos los siguientes cambios:

$u_{k+1} \longleftrightarrow u_k$ ,  $v_{k+1} \longleftrightarrow v_k$ ,  $h^* \longleftrightarrow -h^*$  y  $x_k^* \longleftrightarrow x_k^* + h^*$ , y observado la simetría de (4.19), obtenemos de (4.16):

$$\begin{aligned}
u_k &= u_{k+1} - h^* \left[ f(x_k^* + h^* - \frac{h^*}{2}, y_{2k+1}) - J y_{2k+1} + J \left( \frac{u_k + u_{k+1}}{2} \right) \right] \\
\implies u_{k+1} &= u_k + h^* \left[ f(x_k^* + \frac{h^*}{2}, y_{2k+1}) - J y_{2k+1} + J \left( \frac{u_{k+1} + u_k}{2} \right) \right], \\
v_k &= v_{k+1} - h^* \left[ \frac{1}{2} (f(x_k^* + h^* - h^*, u_k) + f(x_k^* + h^*, u_{k+1})) + J y_{2k+1} - J \left( \frac{u_k + u_{k+1}}{2} \right) \right] \\
\implies v_{k+1} &= v_k + h^* \left[ \frac{1}{2} (f(x_k^* + h^*, u_{k+1}) + f(x_k^*, u_k)) + J y_{2k+1} - J \left( \frac{u_{k+1} + u_k}{2} \right) \right]
\end{aligned}$$

De lo anterior vemos que el método (4.16) es simétrico.

El método (4.16) es consistente cuando  $h^* \rightarrow 0$  con la siguiente ecuación diferencial

ordinaria:

$$\begin{cases} u' = f(x, v) - J(v - u), & u(x_0) = y_0 \\ v' = f(x, u) + J(v - u), & v(x_0) = y_0, \end{cases}$$

con la solución exacta:  $u(x) = v(x) = y(x)$ ,

donde  $y(x)$  es la solución original de  $y' = f(x, y)$ .

Aplicando el teorema 2.2, tenemos lo siguiente:

$$\left. \begin{aligned} y(x) - u_{h^*}(x) &= \sum_{j=1}^l a_j(x) h^{2j} + h^{2l+1} A(x, h) \\ y(x) - v_{h^*}(x) &= \sum_{j=1}^l b_j(x) h^{2j} + h^{2l+1} B(x, h) \end{aligned} \right\} \quad (4.20)$$

con  $a_j(x_0) = b_j(x_0) = 0$ ; y  $A(x, h)$  y  $B(x, h)$  son acotadas.

La solución numérica dada por la tercera ecuación de (4.10) puede ser expresada en términos de  $u_m$  y  $v_m$  como sigue:

$$\begin{cases} v_m = (I - hJ)y_{2m+1} + hJy_{2m} - hf(x_{2m}, y_{2m}) \\ v_m = (I + hJ)y_{2m-1} - hJy_{2m} + hf(x_{2m}, y_{2m}) \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} (I + hJ)v_m = (I + hJ)(I - hJ)y_{2m+1} + h(I + hJ)Jy_{2m} - h(I + hJ)f(x_{2m}, y_{2m}) \\ (I - hJ)v_m = (I + hJ)(I - hJ)y_{2m-1} - h(I - hJ)Jy_{2m} + h(I - hJ)f(x_{2m}, y_{2m}) \end{cases}$$

Sumando obtenemos:

$$\begin{aligned} 2v_m &= (I - h^2 J^2)(y_{2m+1} + y_{2m-1}) + 2h^2 Jy_{2m} - 2h^2 Jf(x_{2m}, y_{2m}) \\ \implies \frac{1}{2}(y_{2m+1} + y_{2m-1}) &= (I - h^2 J^2)^{-1}(v_m + h^2 J(f(x_{2m}, u_m) - Ju_m)) \end{aligned}$$

Para  $x = x_0 + 2mh$ , tenemos:

$$\begin{aligned}
y(x) - S_h(x) &= y(x) - (I - h^2 J^2)^{-1} [v_{h^*}(x) + h^2 J (f(x, u_{h^*}(x)) - Ju_{h^*}(x))] \\
&= (I - h^2 J^2)^{-1} [(I - h^2 J^2)y(x) - v_{h^*}(x) - h^2 J (f(x, u_{h^*}(x)) - Ju_{h^*}(x))] \\
&= (I - h^2 J^2)^{-1} [(y(x) - v_{h^*}(x)) - h^2 J (f(x, u_{h^*}(x)) + J(y(x) - u_{h^*}(x)))].
\end{aligned}$$

Utilizando la ecuación (4.20) tenemos:

$$\begin{aligned}
y(x) - S_h(x) &= (I - h^2 J^2)^{-1} \left[ \sum_{j=1}^l b_j(x) h^{2j} + h^{2l+2} B(x, h) - h^2 J f(x, u_{h^*}(x)) - \right. \\
&\quad \left. h^2 J^2 \left( \sum_{j=1}^l a_j(x) h^{2j} + h^{2l+2} A(x, h) \right) \right] \\
&= (I - h^2 J^2)^{-1} \left[ \sum_{j=1}^l b_j(x) h^{2j} + h^{2l+2} B(x, h) - h^2 J f(x, u_{h^*}(x)) - \right. \\
&\quad \left. h^2 J^2 \left( \sum_{j=1}^l a_j(x) h^{2j} + h^{2l+2} A(x, h) \right) \right]
\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}
y(x) - S_h(x) &= (I - h^2 J^2)^{-1} \left[ \sum_{j=1}^l [b_j(x) - h^2 J^2 a_j(x)] h^{2j} - h^2 J f(x, u_{h^*}(x)) + \right. \\
&\quad \left. (B(x, h) - h^2 J^2 A(x, h)) h^{2l+2} \right] \quad \square
\end{aligned}$$

Para un análisis de estabilidad, aplicamos al método (4.10), con  $J = \lambda$  a la ecuación test  $y' = \lambda y$ , entonces:

$$\begin{aligned}
(1 - h\lambda)(y_{i+1} - y_i) &= -(1 + h\lambda)(y_i - y_{i-1}) + 2h\lambda y_i \\
(1 - h\lambda)y_{i+1} - y_i + h\lambda y_i &= -y_i + y_{i-1} - h\lambda y_i + h\lambda y_{i-1} + 2h\lambda y_i \\
(1 - h\lambda)y_{i+1} &= (1 + h\lambda)y_{i-1},
\end{aligned}$$

$$\implies y_{i+1} = \frac{(1 + h\lambda)}{(1 - h\lambda)} y_{i-1}$$

El resultado numérico es dado por:

$$S_h(x_0 + 2mh) = \frac{1}{(1 - h\lambda)^2} \left( \frac{1 + h\lambda}{1 - h\lambda} \right)^{m-1} y_0, \quad (4.21)$$

que es la misma que fue obtenida para la regla trapezoidal con suavidad, ver la fórmula (4.7). Escogemos una sucesión de números-pasos  $(n_j)$ ,  $n_j = 2m_j$ . Bader & Deuffhard (1983), ver Hairer/Wanner (1991), propusieron sólo números impares para  $m_j$ , de este modo  $S_h(x_0 + 2m_j h)$  en (4.21) tiene el mismo signo como la solución exacta:  $e^{\lambda 2m_j h} y_0$ , para todos  $Re(h\lambda) \leq 0$ . Así obtuvieron:  $\{n_j\} = \{2, 6, 10, 14, 22, 34, 50, \dots\}$ .

Tomando  $T_{j1} = S_{h_j}(x_0 + H)$ , con  $h_j = \frac{H}{n_j}$  y definiendo  $T_{jk}$  por (4.4).

La función de estabilidad de  $T_{j1}$  está dada por :

$$F_{j1}(z) = \frac{1}{\left(1 - \frac{z}{n_j}\right)^2} \left( \frac{1 + \frac{z}{n_j}}{1 - \frac{z}{n_j}} \right)^{\frac{n_j}{2} - 1}, \quad (4.22)$$

y los de  $T_{jk}$  pueden ser calculados por la recursión (4.5).

Los dominios de estabilidad de  $T_{jj}$  son mostrados en el gráfico 5.3.

Por el gráfico, ver Hairer/Wanner (1991), hacemos la tabla siguiente:

$A(\alpha)$ -estabilidad de la regla de punto-medio linealmente implícita extrapolada.

90°						
90°	90°					
90°	90°	90°				
90°	89.34°	87.55°	87.34°			
90°	88.80°	86.87°	86.10°	86.02°		
90°	88.49°	87.30°	86.61°	86.36°	86.33°	
90°	88.43°	87.42°	87.00°	86.78°	86.70°	86.69°

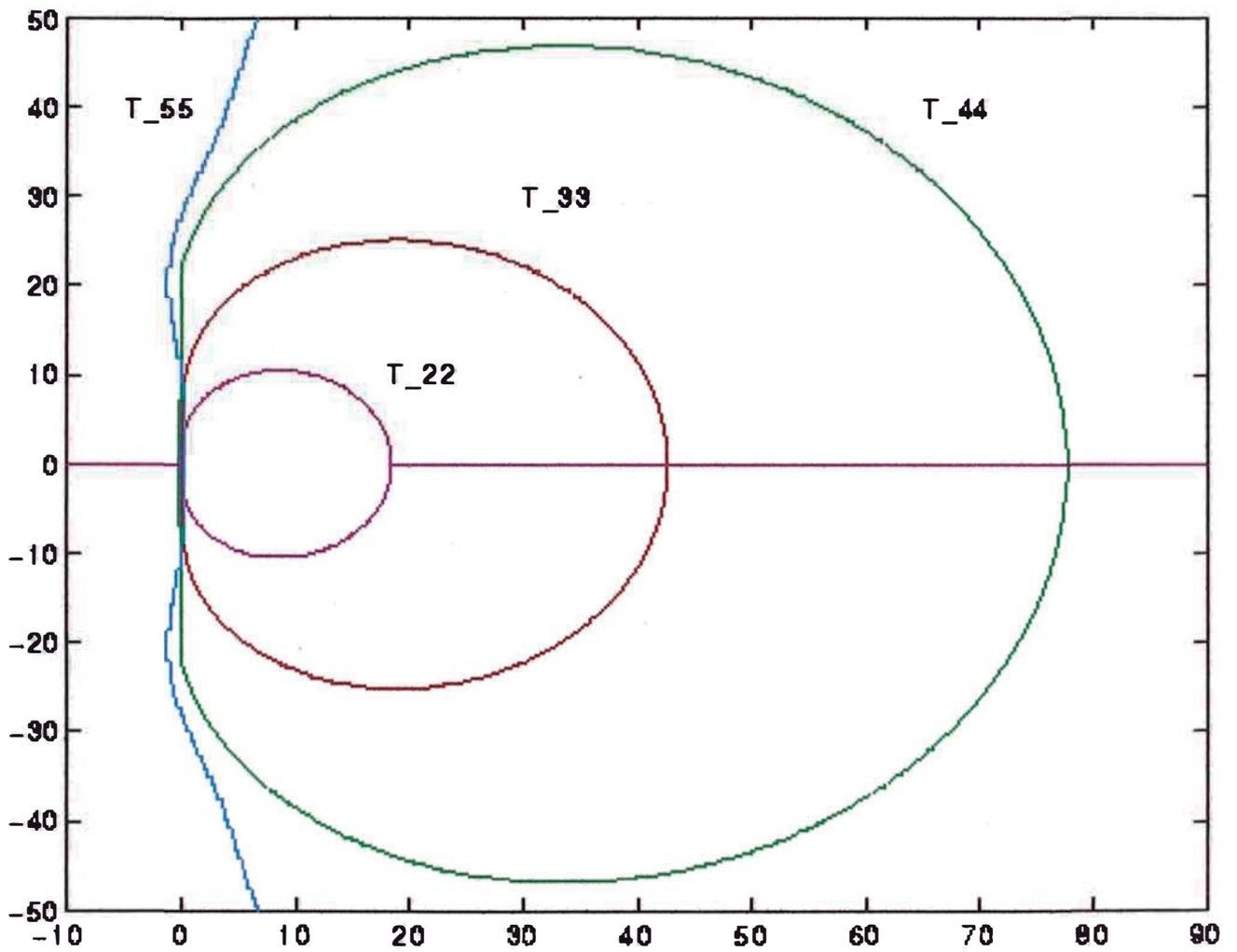


Fig. 4.3. Dominios de Estabilidad de la regla del punto medio linealmente implícito extrapolado.

## METODO IMPLICITO Y LINEALMENTE IMPLICITO DE EULER

Deuffhard (1985), ver Hairer/Wanner (1991), reportó sus experimentos de extrapolación de los métodos implícitos de Euler :

$$y_{j+1} = y_j + hf(x_{j+1} + y_{j+1}) \quad (4.23)$$

y del método linealmente implícito de Euler:

$$(I - hJ)(y_{j+1} - y_j) = hf(x_j + y_j), \quad (4.24)$$

donde  $J$  es una aproximación del jacobiano  $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ . Los métodos mencionados, no son simétricos y tienen solo un  $h$ - expansión de su error global. Extrapolando la solución numérica en  $x_0 + H$  resulta:

$$T_{j,k+1} = T_{j,k} + \frac{T_{j,k} - T_{j-1,k}}{\left(\frac{n_j}{n_{j-k}}\right) - 1}. \quad (4.25)$$

De esta manera los  $T_{j,k}$  representa un método de orden  $k$ .

para los métodos (4.23) y (4.24), la función de estabilidad de  $T_{j,k}$  es la misma y definida recursivamente por:

$$F_{j,1}(z) = \left(1 - \frac{z}{n_j}\right)^{n_j}$$

$$F_{j,k+1}(z) = F_{j,k} + \frac{F_{j,k}(z) - F_{j-1,k}}{\left(\frac{n_j}{n_{j-k}}\right) - 1}.$$

Tomando la secuesion números-pasos  $\{n_j\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \cdot\}$  mostramos los dominios de estabilidad del método.

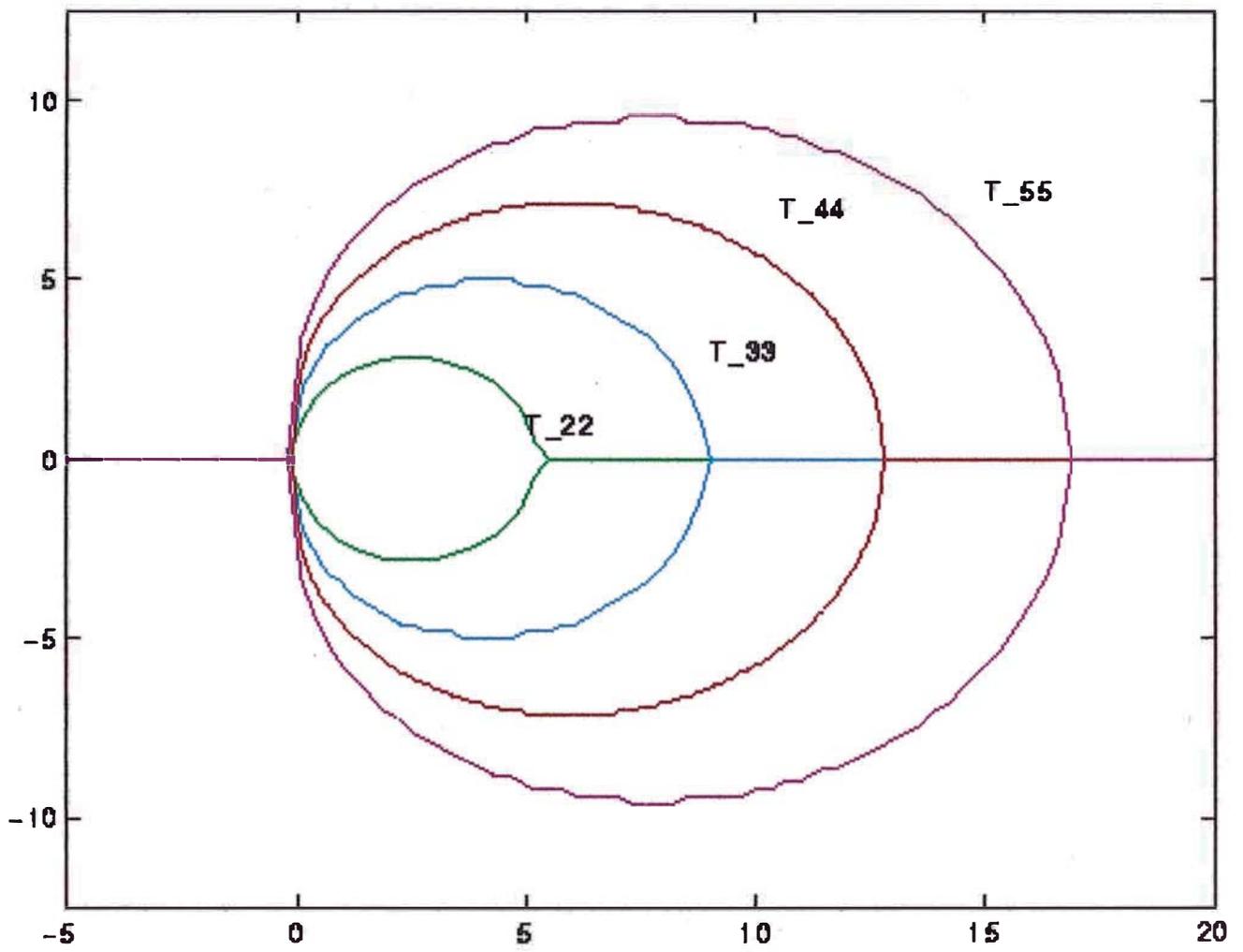


Fig. 4.4. Dominios de estabilidad de Euler Extrapolado.

## 5 RESULTADOS NUMÉRICOS

Las ecuaciones diferenciales ordinarias rígidas surgen en una gran variedad de situaciones. Por ejemplo, al controlar un vehículo espacial se espera que su trayectoria no tenga alteraciones bruscas, pero, en caso de que se detecten desviaciones respecto de la trayectoria de vuelo programada, de inmediato se pueden hacer las correcciones necesarias. Otras situaciones donde aparecen estos problemas es en el monitoreo de procesos de cinética química, en el estudio de sistemas amortiguados de resortes, en el análisis de sistemas de control y otros.

El siguiente ejemplo pueden verlo en Burden/Faires (1985).

**Ejemplo 5.1.** *El P.V.I. siguiente:*

$$\begin{cases} y_1' = 9y_1 + 24y_2 + 5\cos x - \frac{1}{3}\operatorname{sen}x, & y_1(0) = \frac{4}{3}; \\ y_2' = -24y_1 - 51y_2 - 9\cos x + \frac{1}{3}\operatorname{sen}x, & y_2(x_0) = \frac{2}{3}; \end{cases} \quad (5.1)$$

*tiene por solución única*

$$\begin{cases} y_1(x) = 2e^{-3x} - e^{-39x} + \frac{1}{3}\cos x, \\ y_2(x) = -e^{-3x} + 2e^{-39x} - \frac{1}{3}\cos x. \end{cases}$$

El término  $e^{-39x}$  en la solución ocasiona que el sistema sea rígido. Aplicamos el método clásico Runge-Kutta de orden  $p = 4$ :

$$\begin{cases} K_1 = f(x_j, y_j) \\ K_2 = f(x_j + \frac{h}{2}, y_j + \frac{h}{2}K_1) \\ K_3 = f(x_j + \frac{h}{2}, y_j + \frac{h}{2}K_2) \\ K_4 = f(x_j + h, y_j + hK_3) \\ y_{j+1} = y_j + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4). \end{cases}$$

La estabilidad resulta cuando  $h = 0.05$ , pero cuando  $h = 0.1$  claramente no ocurre así.

x	$y_1$	$y_1$	$y_1(x)$	$y_2$	$y_2$	$y_2(x)$
	$h = 0.05$	$h = 0.1$		$h = 0.05$	$h = 0.1$	
0.1	1.712219	-2,645169	1.793061	-0.8703152	7.844527	-1.032001
0.2	1.414070	-18.45158	1.423901	-0.8550148	38.87631	-0.8746809
0.3	1.130523	-87.47221	1.131575	-0.7228910	176.4828	-0.7249984
0.4	0.909276	-934.0722	0.909408	-0.6079475	789.3540	-0.6082141
0.5	0.738750	-1760.016	0.738787	-0.5155810	3520.999	-0.5156757
0.6	0.605683	-7848.550	0.605709	-0.4403558	15697.84	-0.4404108
0.7	0.499836	-34989.63	0.499860	-0.3773540	69979.87	-0.3774038
0.8	0.413649	-155979.4	0.413671	-0.3229078	311959.5	-0.3229535
0.9	0.341593	-695332.0	0.341614	-0.2743673	1390664.	-0.2744088
1.0	0.279656	-3099671.	0.279674	-0.2298511	6199352.	-0.2298877

### Implementación

Los métodos de extrapolación basados en discretizaciones implícitas son difíciles de implementar, y en general son menos eficientes que los basados en discretizaciones linealmente implícitas. Sin embargo, buenos resultados se pueden obtener con la regla del punto-medio linealmente implícito (Deuffhard & Bader). La razón es que los sistemas no lineales tienen que ser solucionados muy exactamente, de modo que su desarrollo asintótico de su error global no se destruya.

El primer código de extrapolación para ecuaciones diferenciales ordinarias rígidas es METAN1 de Deuffhard & Bader (1983), ver Hairer/Wanner (1991), el cual imple-

menta la regla del punto-medio linealmente implícito:

$$\left\{ \begin{array}{l} (I - hJ)(y_1 - y_0) = hf(x_0, y_0), \quad x_i = x_0 + ih, \\ (I - hJ)(y_{i+1} - y_i) = -(I + hJ)(y_i - y_{i-1}) + 2hf(x_i, y_i), \\ S_h(x) = \frac{1}{2}(y_{2m-1} + y_{2m+1}), \quad x = x_0 + 2mh. \end{array} \right. \quad (5.2)$$

donde J es una aproximación del jacobiano.

La segunda fórmula de (5.2) es reemplazada por la formulación equivalente:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta y_i = \Delta y_{i-1} + 2(I - hJ)^{-1}(hf(x_i, y_i) - \Delta y_{i-1}), \\ \Delta y_i = y_{i+1} - y_i, \end{array} \right. \quad (5.3)$$

en la cual evitamos una multiplicación de un vector-matriz. La longitud de paso y el orden seleccionado de este código es descrito en Deuffhard (1983). Las modificaciones en el control de la longitud de paso y el orden son propuestas por Shampine (1987), ver Hairer/Wanner (1991).

El SODEX , ver Hairer/Wanner (1991), es basado en la regla del punto-medio linealmente implícito , ecuación (5.2), utilizando la secuencia de números-pasos  $\{n_j\} = \{2, 6, 10, 14, 22, 34, 50, \dots\}$ , y corresponde matemáticamente a METAN1. La longitud de paso y el orden seleccionado en SODEX corresponden con algunos pequeños cambios al código para sistemas no-rígidos ODEX, ver Hairer/Norsett/Wanner (1993).

El SEULEX, ver Hairer/Norsett/Wanner (1993), es una implementación del método linealmente implícito de Euler:

$$(I - hJ)(y_{i+1} - y_i) = hf(x_i, y_i), \quad (5.4)$$

utilizando la secuencia de números-pasos  $\{n_j\} = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots\}$  (se pueden escoger opcionalmente otras secuencias internamente). La longitud de paso y el orden seleccionado corresponde al programa SODEX.

Una gran dificultad en los métodos de extrapolación es el uso de longitudes de paso

”grandes” . Durante el calculo de los  $T_{j1}$  se puede conseguir rapidamente un overflow cuando evaluamos el lado derecho de la ecuación diferencial. Como una alternativa, ver Hairer/Wanner (1991), se propone la siguiente estrategia:

a) En el tableo de extrapolación , comparamos el error estimado  $err_j = \|T_{j,j-1}T_{j,j}\|$ , con el precedente. Cuando  $err_j \geq err_{j-1}$ , para algún  $j \geq 3$  , reniciamos los cálculos con un  $H$  pequeño, por decir  $H = 0.5 * H$ .

b) Para poder interrumpir los cálculos despues de las primeras evaluaciones de  $f$ , nosotros requerimos que la longitud de paso  $h = H/n_i$  (para  $i = 1$  y  $i = 2$ ) sea lo suficientemente pequeño de modo que una simplificación de la iteración de Newton aplicada al método de Euler implícito  $y = y_0 + f(x, y)$ ,  $x = x_0 + h$  converja. Las primeras dos iteraciones son:

$$\begin{aligned} (I - hJ)\Delta_0 &= hf(x_0, y_0), & y^{(1)} &= y_0 + \Delta_0 \\ (I - hJ)\Delta_1 &= hf(x_0 + h, y^{(1)}) - \Delta_0. \end{aligned} \tag{5.5}$$

Los calculos para el paso son reiniciados con un  $H$  pequeño, si  $\|\Delta_1\| \geq \|\Delta_0\|$  (divergencia de la iteración).

Para mayores detalles del control de orden y la longitud de paso para los métodos de extrapolación, se puede revisar los artículos de Deuffhard (1983) y (1985).

### Performance Numérica

Los programas mas utilizados para la solución de sistemas de ecuaciones diferenciales rígidas son el SODEX y el SEULEX, las cuales se encuentran implementados en FORTRAN, y se hallan disponibles en el INTERNET en las siguientes direcciones:

- <ftp://ftp.unige.ch/pub/doc/math/stiff/>
- <ftp://elib.zib.de/pub/netlib/ode/>
- <ftp.unige.ch/pub/doc/math/stiff/>
- <http://www.netlib.org>

A continuación, utilizando una SunOS 5.3, compararemos el codigo SODEX con uno de Runge-Kutta clásico.

El siguiente es un ejemplo de Stoer/Bulirsch (1993), de un modelo de física química.

$$\begin{cases} y_1' = -y_1 - y_1 y_2^2 + 294y_2, & y_1(0) = 1, \quad t \geq 0 \\ y_2' = (y_1 - y_1 y_2)/98 - 3y_2, & y_2(0) = 0, \end{cases} \quad (5.6)$$

Resultados obtenidos por SODEX en una SunOS 5.3.

$x$	$y_1$	$y_2$	$pasos$
0.00	0.1000000000E + 01	0.0000000000E + 00	0
0.17	0.8776892189E + 00	0.1246983116E - 02	7
0.72	0.7638112020E + 00	0.2399989264E - 02	8
2.00	0.7478673749E + 00	0.2537812936E - 02	9
3.49	0.7456628447E + 00	0.2531461072E - 02	10
5.00	0.7435282665E + 00	0.2524219303E - 02	11

Resultados obtenidos por RUNGE-KUTTA clásico.

$x$	$y_1$	$y_2$	$pasos$
0	1.0000e + 000	0	0
3.0106e - 002	9.7163e - 001	2.8941e - 004	1
6.0212e - 002	9.4649e - 001	5.4590e - 004	2
9.1555e - 002	9.2333e - 001	7.8199e - 004	3
1.2418e - 001	9.0211e - 001	9.9820e - 004	4
1.5821e - 001	8.8275e - 001	1.1955e - 003	5
1.9375e - 001	8.6514e - 001	1.3747e - 003	6
2.3095e - 001	8.4921e - 001	1.5369e - 003	7
2.6995e - 001	8.3485e - 001	1.6828e - 003	8
3.1094e - 001	8.2199e - 001	1.8135e - 003	9
3.5413e - 001	8.1052e - 001	1.9297e - 003	10
3.9974e - 001	8.0038e - 001	2.0325e - 003	11
4.4806e - 001	7.9146e - 001	2.1227e - 003	12

$x$	$y_1$	$y_2$	$pasos$
$4.9942e - 001$	$7.8368e - 001$	$2.2012e - 003$	13
$5.5420e - 001$	$7.7695e - 001$	$2.2689e - 003$	14
$6.1287e - 001$	$7.7119e - 001$	$2.3266e - 003$	15
$6.7599e - 001$	$7.6632e - 001$	$2.3752e - 003$	16
$7.4426e - 001$	$7.6224e - 001$	$2.4155e - 003$	17
$8.1854e - 001$	$7.5887e - 001$	$2.4484e - 003$	18
$8.9991e - 001$	$7.5614e - 001$	$2.4748e - 003$	19
$9.8977e - 001$	$7.5396e - 001$	$2.4953e - 003$	20
$1.0900e + 000$	$7.5225e - 001$	$2.5108e - 003$	21
$1.2030e + 000$	$7.5093e - 001$	$2.5221e - 003$	22
$1.3322e + 000$	$7.4993e - 001$	$2.5297e - 003$	23
$1.4826e + 000$	$7.4918e - 001$	$2.5346e - 003$	24
$1.6615e + 000$	$7.4858e - 001$	$2.5371e - 003$	25
$1.8809e + 000$	$7.4808e - 001$	$2.5380e - 003$	26
$2.1613e + 000$	$7.4759e - 001$	$2.5375e - 003$	27
$2.4738e + 000$	$7.4712e - 001$	$2.5363e - 003$	28
$2.7863e + 000$	$7.4667e - 001$	$2.5348e - 003$	29
$3.0988e + 000$	$7.4622e - 001$	$2.5333e - 003$	30
$3.4113e + 000$	$7.4578e - 001$	$2.5318e - 003$	31
$3.7238e + 000$	$7.4534e - 001$	$2.5303e - 003$	32
$4.0363e + 000$	$7.4489e - 001$	$2.5288e - 003$	33
$4.3488e + 000$	$7.4445e - 001$	$2.5273e - 003$	34
$4.6613e + 000$	$7.4401e - 001$	$2.5258e - 003$	35
$4.9738e + 000$	$7.4357e - 001$	$2.5243e - 003$	36
$5.0000e + 000$	$7.4353e - 001$	$2.5242e - 003$	37

Los resultados anteriores están representados en las figuras 5.1 y 5.2

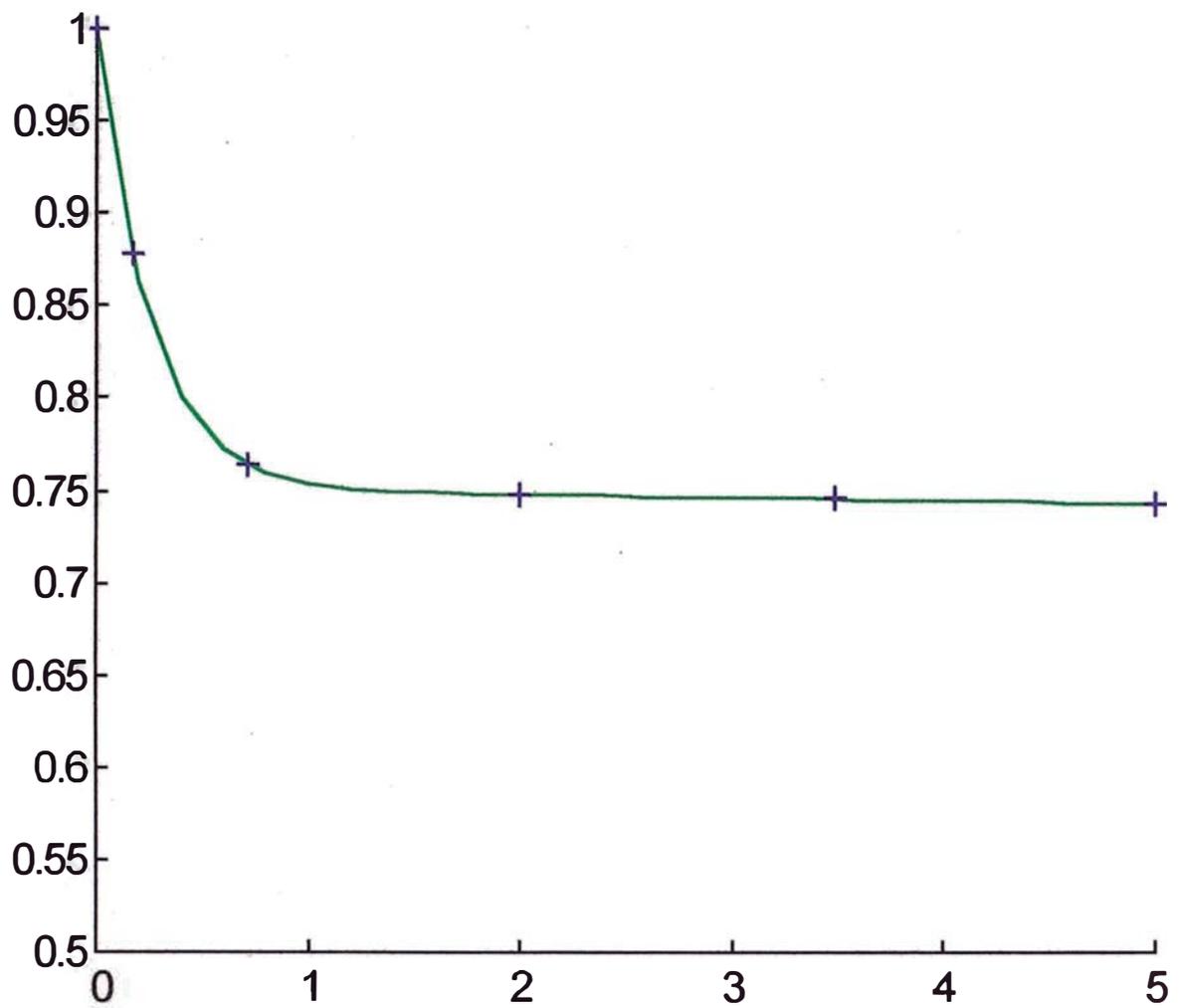


Fig. 5.1. Gráfico de la solución numérica de la ecuación 5.6  
— método Runge-Kutta  
+ método de Extrapolación

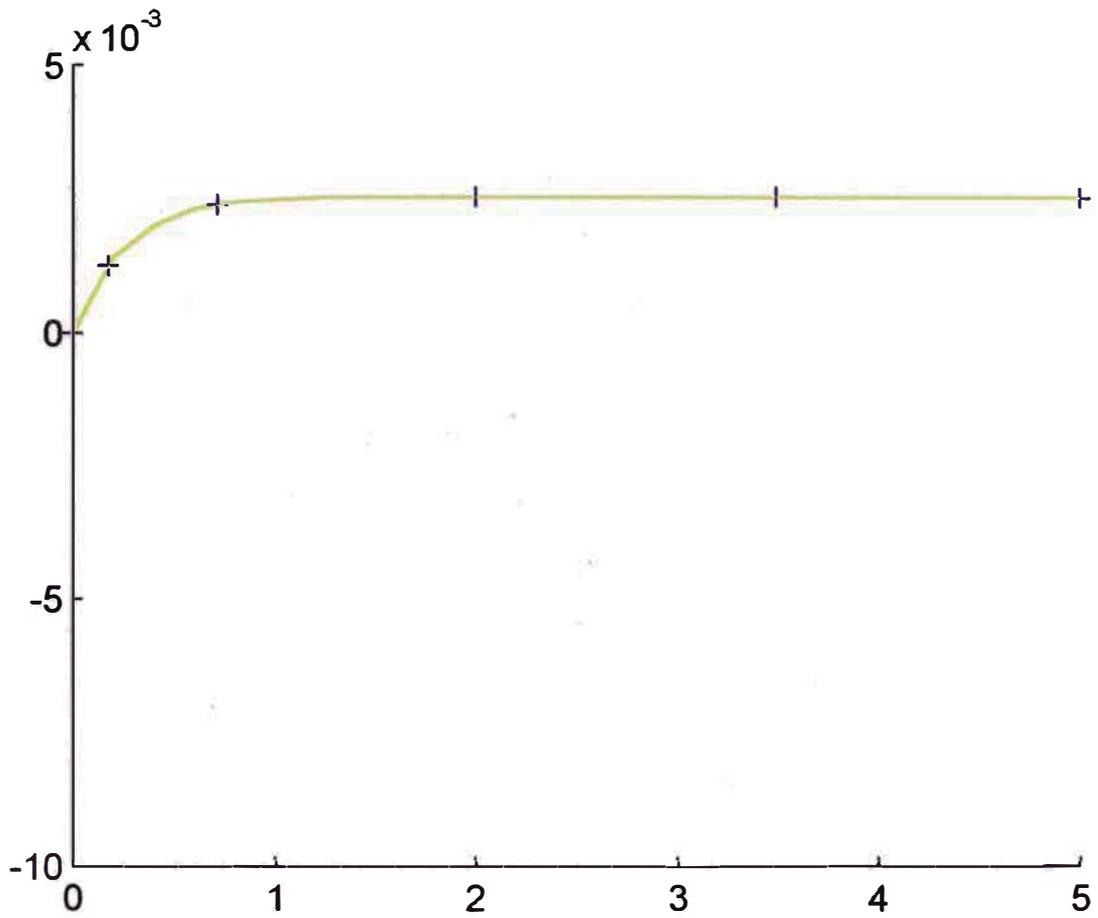


Fig. 5.2. Gráfico de la solución numérica de la ecuación 5.6  
método de Runge-Kutta  
+ método de Extrapolación

El siguiente ejemplo es de un circuito eléctrico , en cual lleva a una ecuación de Van Der Pol, ver Hairer/Wanner (1991).

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2, & y_1(0) &= 2 \\ y_2' &= 10^6((1 - y_1^2)y_2 - y_1), & y_2(0) &= 0 \end{aligned} \tag{5.7}$$

Resultados obtenidos por SODEX en una SunOS 5.3.

$x$	$y_1$	$y_2$	$pasos$
0.00	2	0	0
0.28	0.1796408397E + 01	-0.8065457153E + 00	13
0.49	0.1608694987E + 01	-0.1012995444E + 01	14
0.69	0.1364356254E + 01	-0.1583363977E + 01	16
0.80	0.1077789639E + 01	-0.6664565262E + 01	23
1.04	-0.1829429034E + 01	0.7795298323E + 00	60
1.24	-0.1665190261E + 01	0.9391201741E + 00	61
1.42	-0.1464978903E + 01	0.1277491551E + 01	62
1.60	-0.1115523664E + 01	0.4563340107E + 01	68
1.92	0.1778235025E + 01	-0.8223732860E + 00	107
2.00	0.1706179743E + 01	-0.8927773810E + 00	108

Resultados obtenidos por RUNGE-KUTTA clásico.

$x$	$y_1$	$y_2$	$pasos$
0.00	2	0	0
$1.000e - 01$	$1.8351842243e + 00$	$1.6800659982e - 03$	1
$2.000e - 01$	$1.7246152621e + 00$	$2.8041892586e - 03$	2
$3.000e - 01$	$1.6503694881e + 00$	$3.5562743857e - 03$	3
$4.000e - 01$	$1.6004490690e + 00$	$4.0593069433e - 03$	4
$5.000e - 01$	$1.5668208112e + 00$	$4.3955793375e - 03$	5
$6.000e - 01$	$1.5441051685e + 00$	$4.6201760161e - 03$	6
$7.000e - 01$	$1.5286992508e + 00$	$4.7699784225e - 03$	7
$7.999e - 01$	$1.5181898849e + 00$	$4.8696844743e - 03$	8
$8.999e - 01$	$1.5109606764e + 00$	$4.9358351829e - 03$	9
$9.998e - 01$	$1.5059288939e + 00$	$4.9795094536e - 03$	10
$1.100e + 00$	$1.5023692607e + 00$	$5.0081281392e - 03$	11
$1.200e + 00$	$1.4997959370e + 00$	$5.0266620328e - 03$	12
$1.300e + 00$	$1.4978834704e + 00$	$5.0384408533e - 03$	13
$1.400e + 00$	$1.4964138469e + 00$	$5.0456950694e - 03$	14
$1.500e + 00$	$1.4952410225e + 00$	$5.0499188143e - 03$	15
$1.600e + 00$	$1.4942671643e + 00$	$5.0521129758e - 03$	16
$1.700e + 00$	$1.4934267353e + 00$	$5.0529480304e - 03$	17
$1.800e + 00$	$1.4926758327e + 00$	$5.0528731195e - 03$	18
$1.900e + 00$	$1.4919850466e + 00$	$5.0521891161e - 03$	19
$2.000e + 00$	$1.4913346752e + 00$	$5.0510975706e - 03$	20

Los resultados anteriores están representados en las figuras 5.3 y 5.4

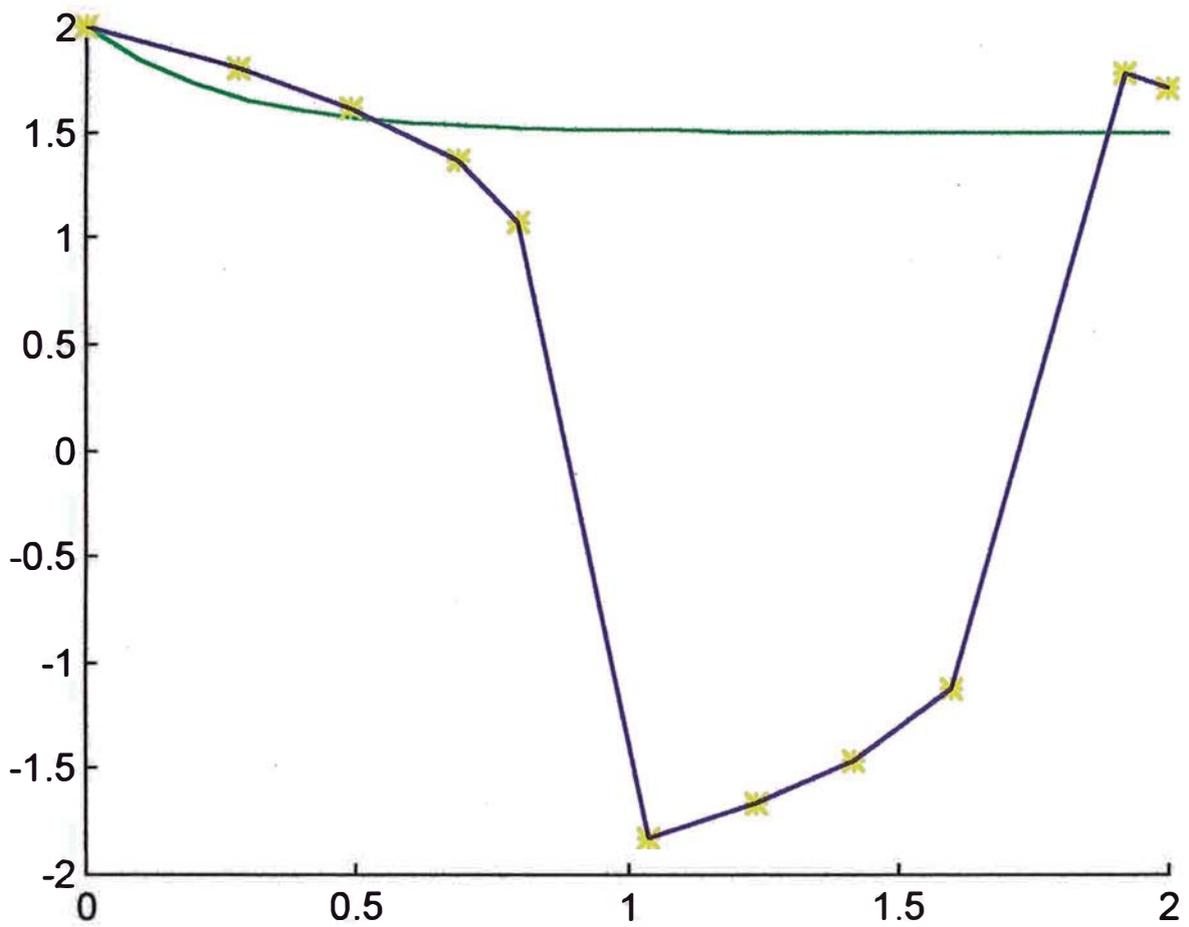


Fig. 5.3. Gráfico de la solución numérica de la ecuación 5.7

— método de Runge-Kutta  
 - - método de Extrapolación

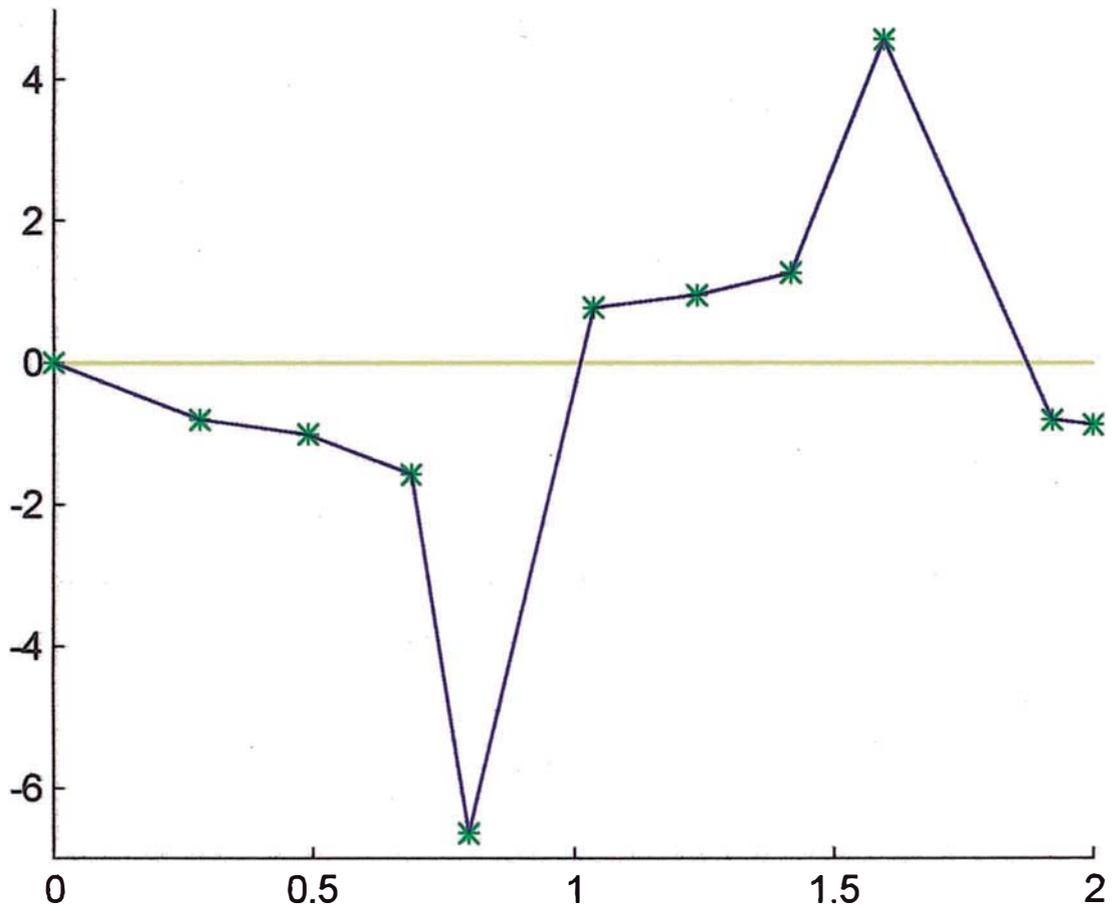


Fig. 5.4. Gráfico de la solución numérica de la ecuación 5.7  
 método de Runge-Kutta  
 -- \*- método de Extrapolación

## 6 CONCLUSIONES

Los métodos de extrapolación solucionan eficientemente un problema de valores iniciales de una Ecuación Diferencial Ordinaria (E.D.O.) rígida, ya que en ellas los métodos clásicos no nos proporcionan buenos resultados numéricos, como es el caso de la ecuación de Van Der Pol.

$$\begin{aligned}y_1' &= y_2, & y_1(0) &= 2 \\y_2' &= 10^6((1 - y_1^2)y_2 - y_1), & y_2(0) &= 0\end{aligned}$$

los resultados obtenidos comparados con un método clásico de Runge-Kutta son mostrados en las figuras 5.3 y 5.4.

Dichos métodos se pueden utilizar eficientemente en problemas de la Ciencia e Ingeniería, como por ejemplo en cinética química, la teoría de los circuitos eléctricos, en el estudio de los sistemas amortiguados de resortes, en el análisis de los sistemas de control y otros. También se pueden usar para solucionar eficientemente Ecuaciones Diferenciales Ordinarias no-rígidas, como por ejemplo, la ecuación de modelo de física química siguiente:

$$\begin{cases}y_1' = -y_1 - y_1 y_2^2 + 294 y_2, & y_1(0) = 1, \quad t \geq 0 \\y_2' = (y_1 - y_1 y_2)/98 - 3 y_2, & y_2(0) = 0,\end{cases}$$

los resultados obtenidos comparados con un método clásico de Runge-Kutta son mostrados en las figuras 5.1 y 5.2.

Por eso los métodos de extrapolación se pueden utilizar eficientemente para obtener muy buenos resultados numéricos, no solo para E.D.O. rígidas sino también para no-rígidas.

## 7 ANEXOS

### PROGRAMAS EN MATHLAB

```
% GRAFI T33
n=0;
x=-10.1;
AA=[];
BB=[];
AA1=[];
BB1=[];
pasox=0.3;
pasoy=0.2;
while x<=90
    y=0.0;
    while y<=50.0
        z=x+i*y;
        t=zeros(3,3);
        nj=[2 6 10];
        for r=1:1:3
            ww=z/nj(r);
            t(r,1)=(1/(1-ww))^2*((1+ww)/(1-ww))^(nj(r)/2-1);
        end
        for r=2:1:3
            for k=1:1:r-1
                t(r,k+1)=t(r,k)+(t(r,k)-t(r-1,k))/((nj(r)/nj(r-k))^2-1);
            end
        end
        end
        w=abs(t(3,3));
        if w<=1
            n=n+1;
            AA1(n)=x;
            BB1(n)=y;
            break
        end
        y=y+pasoy;
    end
    x=x+pasox;
end
plot(AA1,BB1,'r')
axis([-10 90 -50 50 ]);
BB=-BB1;
hold on
plot(AA1,BB,'r')
text(30,30,'T_33')

% grafica T44
n=0;
x=-10.1;
AA=[];
BB=[];
AA1=[];
BB1=[];
pasox=0.3;
pasoy=0.2;
while x<=90
```

```

y=0.0;
while y<=50.0
    z=x+i*y;
    t=zeros(4,4);
    nj=[2 6 10 14];
    for r=1:1:4
        ww=z/nj(r);
        t(r,1)=(1/(1 - ww))^2*((1+ww)/(1-ww))^(nj(r)/2-1);
    end
    for r=2:1:4
        for k=1:1:r-1
            t(r,k+1)=t(r,k)+(t(r,k)-t(r-1,k))/((nj(r)/nj(r-k))^2-1);
        end
    end
    end
w=abs(t(4,4));
if w<=1
    n=n+1;
    AA1(n)=x;
    BB1(n)=y;
    break
end
y=y+pasoy;
end
x=x+pasox;
end
hold on
plot(AA1,BB1,'g')
BB=-BB1;
hold on
plot(AA1,BB,'g')
text(65,40,'T_44')

% grafica T22
n=0;
x=-10.1;
AA=[];
BB=[];
AA1=[];
BB1=[];
pasox=0.2;
pasoy=0.2;
while x<=90
    y=0.0;
    while y<=50.0
        z=x+i*y;
        t=zeros(2,2);
        nj=[2 6];
        for r=1:1:2
            ww=z/nj(r);
            t(r,1)=(1/(1 - ww))^2*((1+ww)/(1-ww))^(nj(r)/2-1);
        end
        for r=2:1:2
            for k=1:1:r-1
                t(r,k+1)=t(r,k)+(t(r,k)-t(r-1,k))/((nj(r)/nj(r-k))^2-1);
            end
        end
        end
w=abs(t(2,2));
if w<=1

```

```

                n=n+1;
                AA1(n)=x;
                BB1(n)=y;
                break
            end
            y=y+pasoy;
        end
        x=x+pasox;
    end
    hold on
    plot(AA1,BB1,'m')
    BB=-BB1;
    hold on
    plot(AA1,BB,'m')
    text(18,10,'T_22')

% GRAFI T55
n=0;
y=-50.1;
AA=[];
BB=[];
AA1=[];
BB1=[];
pasox=0.3;
pasoy=0.2;
while y<=50
    x=-10.0;
    while x<=90.0
        z=x+i*y;
        t=zeros(5,5);
        nj=[2 6 10 14 22];
        for r=1:1:5
            ww=z/nj(r);
            t(r,1)=(1/(1 - ww))^2*((1+ww)/(1-ww))^(nj(r)/2-1);
        end
        for r=2:1:5
            for k=1:1:r-1
                t(r,k+1)=t(r,k)+(t(r,k)-t(r-1,k))/((nj(r)/nj(r-k))^2-1);
            end
        end
        end
        w=abs(t(5,5));
        if w>1
            n=n+1;
            AA1(n)=x;
            BB1(n)=y;
            break
        end
        x=x+pasox;
    end
    y=y+pasoy;
end
hold on
plot(AA1,BB1,'c')
BB=-BB1;
hold on
plot(AA1,BB,'c')
text(-5,40,'T_55')

```

## BIBLIOGRAFIA

- [1] Chumpitaz M. (1987): Analisis Funcional. WH Editores, Lima-Perú.
- [2] Deuffhard P. (1983): Order and Stepsize Control in Extrapolation Methods. Numer. Math., vol 41, Pag. 399-422.
- [3] Deuffhard P. (1985): Recent Progress in Extrapolation Methods for Ordinary Differential Equations, SIAM Review.
- [4] Hairer E., Norsett S., Wanner G.(1993): Solving Ordinary Differential Equations I, Springer-Verlag, New York.
- [5] Hairer E., Wanner G. (1991): Solving Ordinary Differential Equations II, Springer-Verlag, New York.
- [6] Novo S., Obaya R., Rojo J. (1995): Ecuaciones y Sistemas Diferenciales, Mc. Graw Hill.
- [7] Stoer J., Bulirsch R. (1993): Introduction to Numerical Analysis, Springer-Verlag, Berlin.