

**UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA**  
**FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA**  
**ESCUELA PROFESIONAL DE INGENIERÍA NAVAL**



**“ELIMINACIÓN DE LA RESONANCIA PARAMÉTRICA EN  
BARCOS PESQUEROS UTILIZANDO LA TEORÍA DEL  
TANQUE DE ESTABILIZACIÓN PASIVO TIPO U”**

**PROYECTO DE TESIS**  
**PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE**  
**INGENIERO NAVAL**

**JORGE ANTONIO MERINO MUÑOZ**

**LIMA - PERÚ**

**2007**

DEDICATORIA:

A Dios por la fuerza espiritual.

A mis padres Jorge y Maria por el  
constante apoyo, amor y comprensión  
en cada etapa de mi vida.

A mi hijo Jorgito por la  
fuerza y motivación que me ayuda  
a luchar a cada momento.

# TABLA DE CONTENIDO

Prólogo	01
<b>CAPITULO 1</b>	
INTRODUCCIÓN	03
1.1 Objetivo de la Tesis	05
<b>CAPITULO 2</b>	
GENERALIDADES SOBRE LA RESONANCIA PARAMÉTRICA Y SISTEMAS DE ESTABILIZACIÓN	06
2.1 Generalidades y motivación del presente trabajo	06
2.1.1 Rolido Resonante Clásico	06
2.1.2 Rolido Paramétrico	07
2.2 Estabilización del Movimiento de Rolido	10
2.3 Clasificación de los Tanques de Estabilización	13
2.3.1 Según la Naturaleza del Trabajo	14
2.3.2 Según la Geometría	14
2.4 Antecedentes y Escenario Actual	16
<b>CAPITULO 3</b>	
MODELO MATEMÁTICO	24
3.1 Sistemas de Referencia	24
3.2 Ecuación del Movimiento de Fluido dentro del Tanque	28
3.2.1 Reservorio de Babor	28
3.2.2 Tubería de Conexión Horizontal	37
3.2.3 Reservorio de Estribor	42
3.2.4 Ecuación No-Lineal del Tanque	46
3.2.5 Fuerzas y Momentos ejercidos sobre el Barco debido al Movimiento del Fluido dentro del Tanque	52
3.2.6 Ecuación Lineal del Tanque	59

3.3	Movimiento del Barco en Olas	61
3.3.1	Ecuaciones Lineales del Comportamiento del Barco en Olas	64
3.3.2	Coefficientes Hidrodinámicos y las Fuerzas de Excitación	66
3.3.3	Coefficientes de Amortiguamiento en Rolido	67
3.3.4	Ecuaciones No-Lineales del Comportamiento del Barco en Olas	69
3.4	Ecuaciones Acopladas del Sistema Barco-Tanque con Coeficientes de Cuarta Orden	71

## CAPITULO 4

	ANÁLISIS Y RESULTADOS	74
4.1	Generalidades	74
4.2	Ensayos Experimentales – Resultados	76
4.3	Respuestas de Rolido SIN Tanque de Estabilización	80
4.3.1	Efecto de la Frecuencia Natural de Rolido ( $\omega_{n4}$ )	80
4.3.2	Efecto de la Velocidad de Avance, Número de Froude ( $Fn$ )	84
4.3.3	Efecto de la Inclinación de la Ola ( $H_w/L_w$ )	86
4.3.4	Efecto de la Amplitud de Ola ( $A_w$ )	89
4.3.5	Análisis en el Plano $\omega_e/\omega_{n4}$ vs. $A_w$	92
4.4	Proyecto y Sintonización del Tanque	105
4.5	Respuestas de Rolido CON Tanque de Estabilización	110
4.5.1	Influencia de la Frecuencia del Tanque ( $\omega_t$ )	111
4.5.2	Influencia de la Masa del Fluido dentro del Tanque ( $m_t$ )	113
4.5.3	Influencia del Amortiguamiento del Tanque ( $\eta_t$ )	115
4.5.4	Influencia de la Posición Vertical ( $L_z$ ) del Tanque	117

4.5.5	Simulaciones en el Tiempo	119
-------	---------------------------	-----

## **CAPITULO 5**

	CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	124
--	--------------------------------	-----

5.1	Conclusiones y Recomendaciones Generales	124
-----	--	-----

5.2	Trabajos Futuros	127
-----	------------------	-----

	<b>REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>	129
--	-----------------------------------	-----

	<b>APÉNDICE I</b>	137
--	-------------------	-----

	<b>APÉNDICE II</b>	148
--	--------------------	-----

# LISTA DE SÍMBOLOS

## GENERAL

- $g$  - aceleración de la gravedad;
- $\vec{g}_u$  - vector unitario en la dirección de la aceleración de la gravedad;
- $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$  - ejes del sistema de coordenadas móvil (fijo al barco);
- $X, Y, Z$  - ejes del sistema de coordenadas inercial (fijo a tierra);

## BARCO Y OLA

- $A_w$  - amplitud de la ola (m);
- $Fn$  - número de Froude;
- $L_w$  - longitud de la ola (m);
- $k$  - número de ola;
- $\chi(\text{ksi})$  - ángulo de incidencia de la ola ( $^\circ$ );
- $m$  - masa del barco;
- $J_{xx}, J_{yy}$  - momentos de inercia del barco con respecto a los ejes  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$  respectivamente;
- $\omega_w$  - frecuencia de la ola (rad/s);
- $\omega_e$  - frecuencia de encuentro (rad/s);
- $\omega_{n4}$  - frecuencia natural de rolido (rad/s);
- $x, y, z$  - desplazamiento del barco en la dirección de los ejes,  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ , respectivamente (avance, desvío y arfada);

- $u, v, w$  - velocidad del barco en la dirección de los ejes  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$  respectivamente;
- $\phi, \theta, \psi$  - desplazamientos angulares del barco en la dirección de los ejes,  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ , respectivamente (rolido, cabeceo y guiñada);
- $\Omega, p, q, r$  - velocidad angular del barco y las componentes en la dirección de los ejes  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ , respectivamente;
- $\dot{p}, \dot{q}, \dot{r}$  - aceleración angular del barco en la dirección de los ejes  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ , respectivamente;
- $V_0, a_0$  - velocidad y aceleración absoluta del origen de coordenadas O, respectivamente;
- U - velocidad del barco;
- $Z_w, K_w, M_w$  - excitación externa ejercida sobre el barco debido a las olas en los movimientos de arfada, rolido y cabeceo;

## TANQUE DE ESTABILIZACIÓN

- $a_A$  - aceleración absoluta del volumen diferencial de fluido;
- $A_r, A_d$  - área de la sección transversal del reservorio y de la tubería, respectivamente;
- $B_t$  - amortiguamiento debido a las paredes dentro del tanque;
- $B_w, H_d, W_r, H_2$  - parámetros geométricos del tanque (ver Figura 2.2);
- $\tilde{B}_w, C_1, C_2$  - constantes;
- $b, db$  - posición y ancho del volumen diferencial de fluido en la tubería horizontal, con respecto al punto O;

- $h, dh$  - posición y altura del volumen diferencial de fluido en los reservorios, con respecto a la posición de equilibrio;
- $H_r$  - altura de equilibrio de fluido dentro del tanque;
- $dVol_r, dVol_d$  - volumen diferencial del fluido, en los reservorios y en la tubería, respectivamente;
- $\eta_t$  - amortiguamiento adimensional del tanque;
- $L_t$  - medida longitudinal del tanque en la dirección del eje  $\bar{x}$  (m);
- $\tau_r, \tau_d$  - esfuerzos tangenciales en las paredes del reservorio y de la tubería, respectivamente;
- $N_x, N_y$  - componentes normales de las acciones que las paredes del tanque ejercen sobre el fluido, en las direcciones del eje  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$ , respectivamente;
- $E$  - potencia entregada por la bomba;
- $F_{\text{acel}}$  - fuerza ejercida sobre el fluido debido a la aceleración absoluta y de la gravedad;
- $F_{\text{tanque}}, X_{ta}, Y_{ta}, Z_{ta}$  - fuerza que el fluido del tanque ejerce sobre el barco, y sus componentes en la dirección de los ejes  $\bar{x}, \bar{y}$  y  $\bar{z}$ , respectivamente;
- $M_{\text{tanque}}, K_{ta}, M_{ta}, N_{ta}$  - momento que el fluido del tanque ejerce sobre el barco y sus componentes en la dirección de los ejes  $\bar{x}, \bar{y}$  y  $\bar{z}$  respectivamente;
- $K$  - coeficiente de pérdida de carga en las uniones internas del tanque;
- $L_x, L_z$  - componentes del vector posición del centro de la tubería con respecto al punto O, en la dirección de los ejes  $\bar{x}$  y  $\bar{z}$ , respectivamente;
- $r_B, v_B, a_B$  - posición, velocidad y aceleración absoluta del volumen diferencial, respectivamente;



$dF_{\text{peso}}, dF_{\text{pressao}}, dF_{\text{paredes}}$  - fuerzas debido al peso, a la presión y a las paredes del tanque sobre el volumen diferencial;

$dm_t$  - masa del volumen diferencial;

$m_t$  - masa del fluido dentro del tanque;

$\rho_t$  - densidad del fluido dentro del tanque;

$P, dP$  - presión y diferencial de presión ejercido sobre el volumen diferencial;

$P_p, P_s$  - presión interna al tanque en los reservorios de babor y estribor, respectivamente;

$P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$  - presiones internas en diferentes secciones del tanque (ver Figura 2.2).

$Pe_r, Pe_d$  - perímetro de la sección transversal del reservorio y de la tubería, respectivamente;

$R$  - relación entre las áreas del reservorio y de la tubería, respectivamente;

$\omega_t$  - frecuencia natural del tanque (rad/s);

$Z_{(t)}, \dot{Z}_{(t)}, \ddot{Z}_{(t)}$  - posición, velocidad y aceleración relativa del fluido dentro del tanque;

### **Coeficientes debido al Tanque**

$T_{\ddot{z}}, T_{\ddot{\theta}}, T_{\ddot{z}\tau}, T_{\ddot{\theta}\tau}, T_{\dot{x}\dot{\theta}\tau}, T_{\dot{y}\dot{\phi}\tau}, T_{\dot{\phi}\dot{\theta}\tau}, T_{\dot{\theta}\dot{\theta}\tau}, T_{\dot{\phi}\dot{\psi}\tau},$   
 $T_{\text{ext}}, T_{\phi\theta}, T_{\ddot{y}}, T_{\dot{x}\dot{y}}, T_{z\dot{\phi}}, T_{\dot{\psi}}, T_{\dot{\phi}\dot{\theta}}, T_{\dot{\phi}}, T_{\dot{\theta}\dot{\psi}}$  - de la ecuación del TANQUE en los seis grados de libertad del barco

$Z_{\tau\ddot{z}}, Z_{\tau\ddot{\theta}}, Z_{\dot{\phi}\dot{\tau}}, Z_{\tau\dot{\phi}\dot{\phi}}, Z_{\tau\dot{\theta}\dot{\theta}}, Z_{\tau\phi\theta}, Z_{\dot{\phi}\tau}, Z_{\tau\ddot{\tau}},$   
 $Z_{\dot{\phi}\dot{\phi}\tau\tau}, Z_{\dot{\theta}\dot{\theta}\tau\tau}$  - de las fuerzas debido al tanque en la ecuación de ARFADA

$$K_{\ddot{x}}, K_{\ddot{\phi}}, K_{\ddot{z}}, K_{\ddot{\theta}}, K_{\tau\dot{z}}, K_{\tau\dot{\phi}}, K_{\tau\dot{\theta}},$$

$$K_{\dot{\theta}\dot{\tau}}, K_{\dot{\phi}\dot{\tau}}, K_{\dot{\tau}\dot{z}}, K_{\dot{\phi}\dot{\tau}}, K_{\dot{\theta}\dot{\tau}}, K_{\dot{z}\dot{\phi}\dot{\tau}}, K_{\dot{\phi}\dot{\theta}\dot{\tau}}$$

- de los momentos debido al tanque en la ecuación de ROLIDO

$$M_{\tau\ddot{z}}, M_{\tau\ddot{\theta}}, M_{\tau\dot{\theta}}, M_{\dot{\phi}\dot{\tau}}, M_{\dot{\phi}\dot{z}}, M_{\tau\dot{\phi}\dot{\theta}}, M_{\tau\dot{z}\dot{\theta}}, M_{\tau\dot{\phi}\dot{\theta}},$$

$$M_{\tau\ddot{x}}, M_{\dot{\theta}\dot{\tau}}, M_{\dot{\theta}\dot{\tau}}, M_{\dot{\theta}\dot{\tau}}, M_{\dot{\phi}\dot{\theta}\dot{\tau}}, M_{\dot{\phi}\dot{\phi}\dot{\tau}}, M_{\dot{\theta}\dot{z}\dot{\tau}}$$

- de los momentos debido al tanque en la ecuación de CABECEO

## COEFICIENTES DE MASA ADICIONAL Y AMORTIGUAMIENTO

$Z_{\ddot{z}}, K_{\ddot{\phi}}, M_{\ddot{\theta}}$  - Coeficientes de masa adicional en arfada, rolido y cabeceo, respectivamente;

$Z_{\dot{\theta}}, M_{\dot{z}}$  - Coeficientes de masa adicional entre los modos acoplados de arfada y cabeceo;

$Z_{\dot{z}}, K_{\dot{\phi}}, M_{\dot{\theta}}$  - Coeficientes de amortiguamiento lineal en arfada, rolido y cabeceo, respectivamente;

$K_{|\dot{\phi}|^2}$  - Coeficientes de amortiguamiento cuadrático en rolido;

## COEFICIENTES DE RESTAURACIÓN

### Lineal

$Z_{\ddot{z}}, K_{\ddot{\phi}}, M_{\ddot{\theta}}$  - Coeficientes de restauración lineal en arfada, rolido y cabeceo, respectivamente;

$Z_{\dot{\theta}}, M_{\dot{z}}$  - Coeficientes de restauración lineal entre los modos acoplados de arfada y cabeceo;

### Segunda orden

- $Z_{zz}, Z_{z\theta}, Z_{\phi\phi}, Z_{\theta\theta}$  - Coeficientes de restauración en arfada;
- $K_{z\phi}, K_{\phi\theta}$  - Coeficientes de restauración en roloido;
- $M_{zz}, M_{z\theta}, M_{\phi\phi}, M_{\theta\theta}$  - Coeficientes de restauración en cabeceo;

### Tercera orden

- $Z_{zzz}, Z_{zz\theta}, Z_{\phi\phi z}, Z_{\phi\phi\theta}, Z_{\theta\theta z}, Z_{\theta\theta\theta}$  - Coeficientes de restauración en arfada;
- $K_{zz\phi}, K_{\phi\phi\phi}, K_{\theta\theta\phi}$  - Coeficientes de restauración en roloido;
- $M_{zzz}, M_{zz\theta}, M_{\phi\phi z}, M_{\phi\phi\theta}, M_{\theta\theta z}, M_{\theta\theta\theta}$  - Coeficientes de restauración en cabeceo;
- $K_{z\phi\theta}$  - Coeficientes de restauración entre los modos acoplados de arfada, roloido y cabeceo;

### Debido al Paso de la Ola

#### Segunda Orden

- $Z_{\zeta z}, Z_{\zeta\theta}$  - en arfada;
- $K_{\zeta\phi}$  - en roloido;
- $M_{\zeta z}, M_{\zeta\theta}$  - en cabeceo;

#### Tercera orden

- $Z_{\zeta\zeta z}, Z_{\zeta\zeta\theta}, Z_{\zeta\zeta\theta}, Z_{\zeta z\theta}, Z_{\phi\phi\zeta}, Z_{\theta\theta\zeta}$  - en arfada;
- $K_{\zeta\zeta\phi}, K_{\zeta z\phi}, K_{\zeta\theta\phi}$  - en roloido;
- $M_{\zeta\zeta z}, M_{\zeta\zeta\theta}, M_{\zeta\zeta\theta}, M_{\zeta z\theta}, M_{\phi\phi\zeta}, M_{\theta\theta\zeta}$  - en cabeceo

## PRÓLOGO

En el Capítulo 2, como parte de la motivación de este trabajo, se define y explica la dinámica del Roldo Resonante Clásico y del Roldo Paramétrico, asimismo se presenta un resumen sobre los principales sistemas de estabilización en barcos, también una definición y clasificación de los tanques de estabilización. Se resume algunos trabajos realizados sobre tanques de estabilización en barcos con la intención de estabilizar el movimiento de roldo.

En el Capítulo 3 se desarrolla el modelo matemático utilizado para definir el movimiento del fluido dentro del tanque y las fuerzas y momentos que este movimiento entrega al barco. Se presenta las ecuaciones del movimiento del barco a nivel lineal y no lineal. Son introducidos los términos de acoplamiento entre los movimientos de arfada, cabeceo y roldo en el barco sin tanque. Posteriormente, se presenta el sistema barco-tanque, donde se muestra los términos de acoplamiento

entre los tres grados de libertad del barco y el movimiento del fluido dentro del tanque.

En el Capítulo 4, se aplica un procedimiento para el proyecto del tanque, en el cual son escogidos los parámetros geométricos más adecuados que serán utilizados para alcanzar la máxima eficiencia del tanque. Se presenta los resultados numéricos de las respuestas del barco con y sin tanque de estabilización utilizando diagramas de estabilidad  $\omega_e/\omega_{n4}$  vs.  $A_w$ , y respuestas en función del tiempo y de la frecuencia. También se presenta las respuestas del movimiento de rolido en función de la amplitud de ola, del amortiguamiento, de la geometría y de la posición del tanque dentro do barco.

En el Capítulo 5, se presenta las conclusiones y observaciones obtenidas en el desarrollo de este trabajo. Se analiza la importancia de la frecuencia del tanque pasivo tipo U en la estabilización del movimiento de rolido, específicamente sobre o Rolido Paramétrico. Al final son hechas las recomendaciones para trabajos futuros para continuar con esta línea de investigación.

En forma especial el autor gustaría agradecer al profesor Ph.D. Marcelo de Almeida Santos Neves (Universidade Federal do Rio de Janeiro – Brasil), por la ayuda y orientación en la elaboración del presente trabajo asimismo al Ingeniero Víctor N. Acosta Pastor, por la asesoría brindada.

# **CAPÍTULO 1**

## **INTRODUCCIÓN:**

El control de los movimientos del barco ha sido interés de varios investigadores e ingenieros durante muchas décadas. Un barco en el mar estará susceptible a la influencia de olas y viento que pueden ocasionar movimientos de grandes amplitudes, afectando el confort y, lo que es peor, poniendo en riesgo la vida de la tripulación y de los pasajeros a bordo. Por este motivo, desde el punto de vista de seguridad, la eliminación de los movimientos del barco es un punto importante a ser analizado.

En los barcos porta contenedores se ha tratado de evitar los grandes movimientos, que puedan ocasionar daños a la carga y embarque de agua en la

cubierta y que pueden ser tan intensos al punto de lanzar los contenedores fuera de bordo, como es descrito por France et al (2003). Además, eliminándose los grandes movimientos puede reducirse la resistencia al avance y consecuentemente el consumo de combustible, aumentando la eficiencia y las ganancias del barco.

Para el caso de los barcos utilizados para el lanzamiento de tuberías submarinas y barcos de perforación, los grandes movimientos pueden afectar su desempeño. En las plataformas offshore, barcos militares y de soporte, es recomendable una estabilidad eficiente para que no ocurra un mal aterrizaje de los helicópteros y otros ítems cuyas operaciones sean limitadas por los altos niveles de aceleración. Lo mismo se aplica para barcos de pasajeros, donde el criterio de confort a bordo es exigente. Para disminuir los grandes movimientos que el barco sufre en el mar, el capitán o patrón se ve forzado a alterar el rumbo o disminuir la velocidad; esto puede producir indeseables limitaciones en la misión de los barcos militares o reducir las ganancias de los barcos comerciales.

Este trabajo tiene una gran importancia debido al estudio del rolido en barcos pesqueros, como los que existen en toda la costa peruana utilizados tanto para la pesca artesanal como industrial. Grandes amplitudes de rolido pueden afectar directamente la seguridad de la tripulación y la faena de pesca, puede ocasionar daños a los equipos y aparejos de pesca, trayendo consecuentemente grandes pérdidas de tiempo, trabajo y dinero. En este tipo de tareas de ingeniería la reducción y/o eliminación de los movimientos del barco es la característica más importante que debe ser estudiada.

Por otro lado, se ha descubierto en los últimos años el fenómeno de resonancia paramétrica en la estabilidad dinámica de barcos. Este fenómeno puede llevar al barco a alcanzar grandes ángulos de rolido en pocos segundos (rolido paramétrico. Ver Neves, 2002), no por la excitación directa de las olas, sino por una excitación interna debido a las variaciones periódicas de ciertos parámetros del sistema oscilatorio (excitación paramétrica).

### **1.1 Objetivo de la Tesis**

En vista de los problemas y necesidades resumidos anteriormente, este trabajo de investigación une la teoría del tanque de estabilización pasivo tipo U y la teoría sobre resonancia paramétrica, para desarrollar un modelo matemático que permita eliminar la resonancia paramétrica y en general estabilizar el movimiento de rolido en el barco.

Es así que este trabajo tiene como objetivo principal demostrar que se puede reducir y hasta eliminar teóricamente el rolido paramétrico utilizando un tanque de estabilización pasivo tipo U, estudiando la influencia de la posición y de la geometría del tanque sobre la resonancia paramétrica. Los parámetros de ola serán modificados para estudiar la influencia de estos sobre la respuesta del barco.

Para obtener los resultados serán utilizados dos barcos pesqueros de pequeño porte y propensos a fuerte resonancia paramétrica, ambos similares, con la diferencia



de tener la forma de popa diferente. O modelo matemático propuesto será resuelto numéricamente utilizando o método de integración de Runge Kutta de cuarta orden.

## **CAPÍTULO 2**

# **GENERALIDADES SOBRE LA RESONANCIA PARAMÉTRICA Y SISTEMAS DE ESTABILIZACIÓN**

### **1.1 Generalidades y Motivación del Presente Trabajo**

Dentro de los movimientos del barco, el más crítico corresponde al movimiento de rolido, debido a los bajos momentos de inercia y amortiguamiento asociados. El movimiento de rolido es propenso a alcanzar grandes amplitudes, sea en el caso de *Rolido Resonante Clásico* o de *Rolido Paramétrico*.

#### **1.1.1 Rolido Resonante Clásico**

El *Rolido Resonante Clásico* es debido a la excitación directa de las olas del mar sobre el barco. Si las olas alcanzan al barco con cierta frecuencia y ángulo de

incidencia, determinando una frecuencia de encuentro próxima a la frecuencia natural de rolo, pueden ocurrir condiciones resonantes que lleven al barco a alcanzar movimientos con grandes amplitudes. Ese rolo resonante clásico puede ocurrir en olas de través u olas oblicuas. En olas *estrictamente* longitudinales **no** es posible el movimiento de rolo causado por la *excitación directa* de las olas (Bhattacharyya, 1978, Lewis, 1989).

### **1.1.2 Rolito Paramétrico**

Cuando el barco alcanza ciertas frecuencias de encuentro, en mar de proa o popa (olas longitudinales), el movimiento de rolo puede ser *excitado indirectamente* y alcanzar grandes amplitudes. Ese movimiento de excitación indirecta, denominado “movimiento excitado auto-paramétricamente” es usualmente conocido como “rolo paramétrico” y es debido a una excitación interna causada por las variaciones periódicas de ciertos parámetros del sistema oscilatorio. Froude (1863) fue uno de los primeros en darse cuenta de la existencia del fenómeno de resonancia paramétrica.

El Rolito Paramétrico se origina de la variación periódica del momento de restauración como resultado de la modificación de la forma sumergida producida por las olas, principalmente cuando el barco navega en olas longitudinales. Este tipo de fenómeno da origen a una excitación interna del sistema barco-ola, que para algunos valores de frecuencia de encuentro induce ángulos de rolo que aumentan progresivamente. Dependiendo de la amplitud de la excitación interna, ese proceso de amplificación de rolo puede provocar la zozobra del barco en pocas oscilaciones

(Pérez, 1985, Valério, 1994). En el caso de barcos de pequeño porte, como es el caso de un gran número de pesqueros que operan en el litoral de Brasil y de Perú, la inestabilidad paramétrica se vuelve potencialmente mas peligrosa, con la característica que puede desarrollarse en condiciones de mar moderadas (Neves, 2002). Con la intención de analizar la resonancia paramétrica, (Pérez y Sanguinetti, 1995) fueron realizados ensayos experimentales con modelos de barcos pesqueros. Los resultados de esos ensayos muestran que la inestabilidad paramétrica puede ocurrir para valores de altura metacéntrica transversal dentro de los valores exigidos por las entidades internacionales.

Por otro lado, con la finalidad de estudiar la estabilidad de la ecuación de rolo y reproducir las características dinámicas de la resonancia paramétrica, fueron desarrollados varios modelos matemáticos (analíticos y numéricos). Un estudio analítico de la ecuación de rolo permite analizar sistemáticamente varios parámetros del sistema dinámico que influyen en el comportamiento del barco.

Utilizando estos modelos matemáticos pueden obtenerse los límites de estabilidad, generalmente por medio de la ecuación variacional lineal desarrollada a partir de la ecuación no lineal de rolo. Sanguinetti (1985) estudió analíticamente la estabilidad del rolo paramétrico, para el barco sin velocidad y con tres grados de libertad (arfada, rolo y cabeceo), utilizando un modelo no lineal de segunda orden, en ese trabajo fueron utilizados dos barcos pesqueros semejantes con forma de popa diferentes. Posteriormente, Pernambuco (1990) mejora el modelo anterior considerando seis grados de libertad e incorpora el amortiguamiento no lineal en

rolido así como la velocidad de avance en mar de popa. Salas (1991) analiza los límites de estabilidad de los mismos barcos utilizados por Sanguinetti (1985), confirmando la existencia de rolo paramétrico en zonas de baja frecuencia, característica de la condición de mar de popa.

Siguiendo con la misma línea de investigación, Valério (1994) estudió la estabilidad de esos barcos pesqueros incorporando términos de restauración debido al efecto del paso de la ola, mejorando así el modelo analítico desarrollado anteriormente. Posteriormente, Neves *et al.* (1999) estudiaron analítica, numérica y experimentalmente la estabilidad de esos barcos pesqueros, analizando la influencia de las formas de popa en la estabilidad paramétrica de rolo. El estudio analítico fue basado en la ecuación de Mathieu utilizando un modelo de segunda orden. Valério (2000) mejoró el modelo de Valério (1994) adicionando no linealidades en las ecuaciones de arfada y cabeceo y analizando los límites de estabilidad, compara los resultados numéricos obtenidos con los experimentales, obteniendo limitaciones en los resultados para grandes ángulos de rolo. Lorca (2001) estudió analítica y experimentalmente la influencia de la velocidad del barco sobre la resonancia paramétrica en rolo en mar de proa, obteniendo los respectivos límites de estabilidad basados en la ecuación de Mathieu.

La desventaja de hacer un análisis de estabilidad a partir de la ecuación de Mathieu (modelo con términos de segunda orden en la restauración) es que en el caso de movimientos de rolo muy intensos este modelo no reproduce eficientemente la dinámica de la resonancia paramétrica (Rodrigues, 2004). Por este motivo Rodrigues

(2004) desarrolló un modelo no lineal de tercera orden para el barco con tres grados de libertad. Los resultados obtenidos reproducen eficientemente la dinámica de la resonancia paramétrica, obteniendo respuestas numéricas de rolido que presentan buena concordancia con los resultados experimentales. La existencia de términos de tercera orden da origen a términos bi-harmónicos en la ecuación variacional de rolido, haciendo inaplicable la ecuación de Mathieu para el análisis de estabilidad, cayendo este análisis ahora en la ecuación de Hill, con características propias del modelo de tercera orden. El modelo de tercera orden es capaz de reproducir adecuadamente las respuestas del barco cuando alcanza grandes ángulos de rolido paramétrico (Neves y Rodrigues, 2004), en mar de proa.

Otros trabajos relacionados al desarrollo de modelos matemáticos y ensayos experimentales para reproducir la resonancia paramétrica pueden ser encontrados en Skomedal (1982), Dallinga *et al.* (1998), Spyrou (2000), Bulian *et al.* (2003), ABS (2004), Munif *et al.* (2006), Ahmed *et al.* (2006), Harukuni *et al.* (2006).

## **1.2 Estabilización del Movimiento de Rolido**

Para reducir los movimientos que se producen en el barco, son comúnmente empleados mecanismos estabilizadores. Con la ayuda de esos estabilizadores, las amplitudes de los movimientos, en general el movimiento de rolido, pueden ser reducidos considerablemente. En el estudio de la estabilización de barcos es importante saber el tipo y magnitud de las fuerzas que deberían ser aplicadas para obtener una reducción significativa en las amplitudes y en las aceleraciones de los

movimientos. Algunos estabilizadores y otros medios usualmente empleados en el control del movimiento de rolido son presentados a continuación:

*La quilla de balance* puede ser el dispositivo más simple empleado para disminuir el movimiento de rolido. Ella actúa generando fuerzas de arrastre, aumentando considerablemente la disipación de energía debido al flujo viscoso. Esas fuerzas de arrastre se oponen al movimiento de rolido, aumentando el amortiguamiento y consecuentemente disminuyendo ese movimiento. En tanto, la eficiencia de la quilla de balance puede ser limitada por razones de tamaño y fijación en la parte externa del casco, aumentando la resistencia al avance.

*Aletas de estabilización activas.* Este sistema de estabilización trabaja fuera del casco y generalmente es compuesto por lo menos de un par de aletas móviles en la parte sumergida, una en cada lado del barco. El ángulo de incidencia de las aletas es continuamente ajustado por un sistema de control que es gobernado por los movimientos del barco. Las aletas ejercen fuerzas de sustentación que aplican a la vez momentos en rolido. Esos momentos son calculados para oponerse al momento de excitación de las olas, consecuentemente disminuyendo el movimiento. La gran desventaja de la quilla de balance y de la aleta de estabilización es que la eficiencia depende de la velocidad de avance del barco y en el caso de las aletas de estabilización, la instalación y el mantenimiento tienen costos elevados.

*El giroscopio* es un mecanismo que, en general, consiste en un pesado anillo que gira en torno de su propio eje, encerrado por un marco externo que nuevamente

gira libre sobre un eje perpendicular al eje del anillo. Esta masa giratoria produce una mayor oposición contra las excitaciones externas, trabajando para alterar la dirección del movimiento. La desventaja del giroscopio es que necesita de una gran masa para tener un desempeño aceptable, esto puede ocupar gran espacio dentro del barco, disminuyendo la capacidad de carga. Además de eso, es importante percibir que los cascos de los barcos, en la mayoría, no son construidos para llevar cargas altamente pesadas y concentradas. Esas cargas pueden ocasionar grandes esfuerzos de torción en el casco durante los movimientos de arfada, rolido y/o cabeceo.

*Movimiento de peso* transversal, en general en la cubierta del barco. Es un sistema dinámico que produce un momento que, sintonizado debidamente, se opone al momento externo ejercido por las olas. Las desventajas son que la respuesta del sistema puede no ser suficientemente rápida, el gran peso en la cubierta disminuye la estabilidad del barco y problemas mecánicos son producidos por el montaje y operación de los grandes pesos a bordo. Treacle *et al.* (2000) presenta un método, utilizando un controlador activo, para evaluar el movimiento de pesos la bordo en la reducción del movimiento de rolido.

*Acción del timón.* Cuando el plano diametral del timón está fuera de la línea centro del barco, el timón ejerce una fuerza de sustentación que generalmente actúa en un punto localizado abajo del centro de gravedad del barco. Esa fuerza aplica momentos en rolido y guiñada. Ese momento en rolido, debido al timón, puede ser empleado para contra-restar el momento debido a las fuerzas externas. Las desventajas son que los momentos aplicados por el timón son relativamente

pequeños y el movimiento del timón puede cambiar la ruta establecida para el barco. Baitis (1989) reporta los resultados que obtuvo la Marina Americana utilizando un sistema de estabilización de rolido por acción del timón.

*Tanques de estabilización.* Es un sistema dinámico que consiste en reservorios que contienen una cantidad determinada de fluido, generalmente agua. Las oscilaciones del fluido dentro de los reservorios pueden causar momentos que, sintonizados debidamente, se oponen a la excitación aplicada por las olas o por la excitación interna (excitación paramétrica). *Ventajas:*

- a) Reduce el movimiento de rolido, disminuyendo la resistencia al avance.
- b) Pueden trabajar eficientemente en bajas o sin velocidad.
- c) Fácil instalación y simple funcionamiento, casi no necesita de mantenimiento (en el caso de tanques pasivos).
- d) El espacio dentro de los tanques puede utilizarse para llevar fluidos consumibles.

En Sellars y Martin (1992) se puede encontrar una comparación de varios sistemas de estabilización de rolido donde quillas de balance, tanques pasivos, aletas activas, y la acción del timón fueron consideradas. En ese trabajo se describen y discuten procedimientos para la selección y evaluación de la eficiencia de diferentes sistemas de estabilización con el objetivo de disminuir el movimiento.



Otros detalles con respecto a esos estabilizadores son presentados por Vasta *et al.* (1961), Parker (1965), Bhattacharyya (1978).

### **1.3 Clasificación de los Tanques de Estabilización**

#### **1.3.1 Según la Naturaleza de Trabajo:**

- a) *Pasivos*: cuando el fluido dentro del tanque puede moverse libremente.
- b) *Pasivos controlados*: cuando el movimiento del fluido es controlado por el uso de obstructores de flujo o utilizando presión de aire, esto para aumentar el amortiguamiento interno del tanque.
- c) *Activos*: cuando se entrega energía para mover el fluido dentro del tanque, con la finalidad de obtener una respuesta mas rápida, aumentar el amortiguamiento y/o modificar la frecuencia natural del tanque.

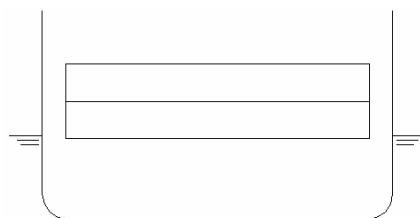
En general se tiene como referencia que los tanques de estabilización pasivos trabajan bien en barcos con bajas velocidades; sin embargo, ellos no son tan efectivos como los tanques de estabilización activos trabajando en barcos con altas velocidades, Lloyds (1989).

#### **1.3.2 Según la Geometría:**

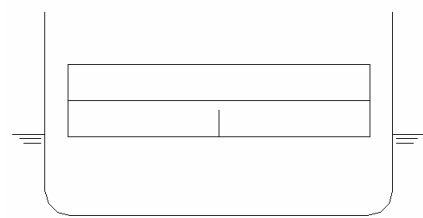
- a) *Superficie Libre o Flume*: comúnmente constituido de reservorios de agua en la parte superior de los barcos. La característica principal de este tanque es el amortiguamiento que produce contra el movimiento de rolido. En general no es muy eficiente en bajas frecuencias de ola, (olas

largas de gran periodo), además que reduce considerablemente la altura metacéntrica, y consecuentemente, la estabilidad del barco.

- b) *Tipo U*: generalmente consiste en dos reservorios, colocados en los dos lados del barco y conectados entre si, en la parte inferior, por una tubería horizontal transversal. La parte superior de los reservorios puede estar abierta a la atmósfera o conectada por una tubería horizontal de aire que puede controlar la frecuencia natural del tanque. Esta geometría es más eficiente, debido a la menor pérdida de estabilidad por superficie libre y a la gran capacidad de modificar sus parámetros geométricos en la fase de proyecto. Es siempre deseable incorporar al proyecto algún nivel de control sobre la frecuencia natural del tanque, de manera que se pueda alcanzar todas las frecuencias que el barco encuentra en su recorrido. La Figura 2.1 muestra los diferentes tipos de tanques según la clasificación presentada en este trabajo.

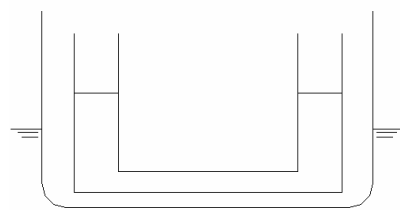


(a) *Superficie libre o Flume Simple*

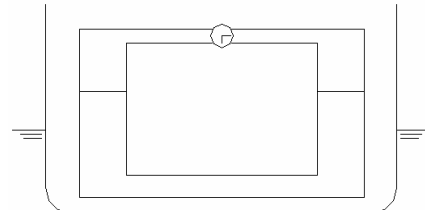


(b) *Superficie libre con obstructores*

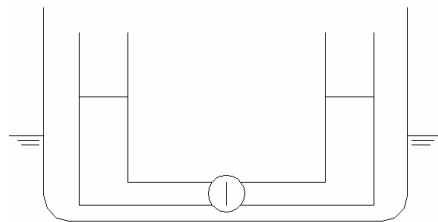
(baffles)



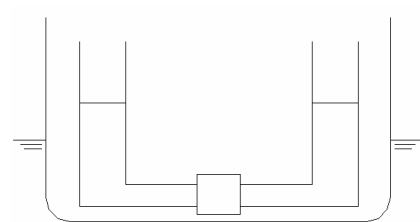
(c) Tipo U Simple



(d) Tipo U con tubería y válvula de aire



(e) Tipo U con válvula reguladora



(f) Tipo U activo con bomba

**Figura 2.1 Clasificación de los Tanques de Estabilización**

Debemos señalar que según la naturaleza de trabajo: las Figuras 2.1 (a) y (c) son tanques pasivos, las Figuras 2.1 (b), (d) y (e) son tanques pasivos controlados y la Figura 2.1 (f) es un tanque activo. Según la geometría: las Figuras 2.1 (a) y (b) son tanques de superficie libre o *Flume*, las Figuras 2.1 (c), (d), (e) y (f) son tanques tipo U.

#### 1.4 Antecedentes y Escenario Actual

La idea de utilizar tanques de superficie libre para estabilizar el movimiento de rolo fue introducida por primera vez por William Froude en 1862, seguida de una aplicación práctica de P. Watts en 1880. El tanque utilizado fue de sección transversal rectangular y ocupaba toda la manga de un barco de guerra. Obstructores

de flujo longitudinales daban amortiguamiento interno al fluido. Esos tanques de superficie libre, con diferentes geometrías, están todavía en uso.

En 1910, H. Frahm propuso la utilización de un tanque con forma de U para la estabilización de rolido y demostró que esa geometría es más eficiente que un sistema con tanque de superficie libre.

Vasta *et al.* (1961) presentaron un resumen de varios sistemas de estabilización y desarrollaron un sistema de ecuaciones, en el dominio de la frecuencia, para describir la dinámica de un barco con tanque de estabilización pasivo en forma de U. La derivación comienza a partir de las ecuaciones de Lagrange y o sistema tanque barco es considerado como un doble péndulo. La principal desventaja de ese trabajo es que fueron utilizadas técnicas de aproximación y simplificación para resolver directamente la ecuación del movimiento en el dominio de la frecuencia, considerando los movimientos del barco como movimientos desacoplados.

Webster *et al.* (1967) investigaron un sistema de control activo de un tanque en U para estabilizar el movimiento de rolido. En ese trabajo los autores formularon las ecuaciones del movimiento del barco, del tanque, y de la bomba que entrega energía al fluido. Las respuestas lineales para el movimiento del barco fueron desarrolladas y resueltas en el dominio de la frecuencia. Los autores describen la modelación del control de la bomba utilizando un tipo de controlador retroalimentado con la aceleración de rolido. Las ecuaciones del tanque activo fueron

desarrolladas con efectos de saturación y resueltas en el dominio del tiempo utilizando el método de integración de Runge Kutta. Debido a que la respuesta del barco fue calculada en el dominio de la frecuencia, se tuvo que calcular la respuesta del tanque, acoplado con rolido, desvío y guiñada, para cada frecuencia. Como conclusión de ese trabajo el tanque activo muestra resultados más favorables en la reducción del movimiento de rolido, cuando es comparado con el tanque pasivo.

Webster *et al.* (1988) discuten un método para evaluar el desempeño de tanques de estabilización externos de libre inundación. Un estudio de la eficiencia de esos tanques de libre inundación fue realizado en el barco USS Midway. Esos tanques externos se componen de dos reservorios, uno a estribor y otro a babor, y como principal característica es que tienen contacto directo con el mar. El modelo analítico utilizado es simplificado, y el amortiguamiento dentro del tanque es controlado utilizando tuberías de ventilación, libres a la atmósfera o presurizados. En ese trabajo se concluyó que esa forma de tanque no necesita tener una tubería que comunique los reservorios para disminuir el movimiento de rolido. En tanto, en la práctica, tiene la desventaja de que el tanque aumenta la resistencia al avance, además de necesitar de mayor mantenimiento debido a que los reservorios externos están en continuo contacto con el agua de mar que es altamente corrosiva.

Francescutto y Armenio (1990) estudiaron los límites de estabilidad para los movimientos anti-simétricos de desvío, rolido y guiñada, además del movimiento del agua en el tanque. Para este estudio consideraron los autovalores y autovectores de un sistema de ecuaciones diferenciales acopladas en forma lineal. En ese trabajo es

utilizado un modelo con tanque de estabilización pasivo tipo U, en una determinada condición de carga y velocidad en mar de través. Como conclusión de ese trabajo se muestra que el movimiento del agua dentro del tanque no tiene influencia considerable sobre los movimientos de desvío y guiñada.

Balcer (2001) analiza la respuesta del barco utilizando un tanque pasivo con superficie libre. En ese trabajo se deduce y compara un modelo analítico, desarrollado a partir de las ecuaciones de Lagrange de segunda orden, y un modelo físico del sistema barco-tanque basado en la idea de dos péndulos acoplados matemáticamente con dos grados de libertad. Se concluye que en ese tipo de tanque la eficiencia será mayor cuanto mayor sea el radio metacéntrico, o sea, que se encuentre localizado más encima del centro de gravedad del barco.

Gawad *et al.* (2001) utilizaron la teoría del tanque de estabilización pasivo tipo U, similar a la Lloyd (1989), para estudiar la influencia de la frecuencia, del amortiguamiento, de los parámetros geométricos y de la masa del fluido en la disminución del movimiento de rolido. Para obtener los resultados numéricos supuso que las respuestas de rolido y del tanque son armónicas, resolviendo las ecuaciones de movimiento a nivel lineal. Como resultado de ese trabajo se obtiene una metodología para el proyecto de tanque escogiendo los parámetros más adecuados, priorizando la sintonización del tanque en función de la altura de la columna de agua dentro de los reservorios. Los resultados presentados muestran que el tanque tipo U es un amortiguador eficiente del movimiento de rolido para un barco navegando en mar de través.

Youssef *et al.* (2002) utilizaron la teoría del tanque de estabilización pasivo tipo U presentada por Lloyds (1989), siendo que la ecuación del movimiento del agua dentro del tanque es presentada en forma lineal. Para obtener resultados numéricos utilizaron un barco carguero de la Serie 60 ( $C_b=0.7$ ) navegando en mar de través con velocidad constante. Utilizaron la teoría del fluido-potencial incomprensible para resolver las ecuaciones del movimiento, e integraron estas ecuaciones en el dominio del tiempo. Los resultados presentados fueron calculados para diferentes ángulos de incidencia de ola. Como parte de ese trabajo se analiza el amortiguamiento, la cantidad de la masa de agua y el efecto de la frecuencia natural del tanque en la disminución del movimiento de rolido. Los resultados muestran que se puede alcanzar hasta 95% de la reducción del movimiento de rolido. Posteriormente, Youssef *et al.* (2003) mejoran ese modelo matemático y modelan el movimiento del agua dentro del tanque a nivel no lineal, tomando en consideración las pérdidas de energía debido a las uniones internas del tanque. En ese trabajo son utilizados varios tubos en forma de U para distribuirlos simétricamente a lo largo de la eslora del barco. Son obtenidos resultados aceptables tanto para mar regular como irregular.

Harukuni *et al.* (2003) investigaron numérica y experimentalmente el movimiento de rolido de un pequeño barco pesquero con tanque de estabilización pasivo tipo U. El ensayo experimental es realizado en condiciones normales y de baja estabilidad con olas regulares en mar de través. En el modelo numérico, no linealidades son presentadas en el momento de restauración del barco. Se utiliza una expresión aproximada para definir la curva de estabilidad; esta expresión es incluida

en las ecuaciones acopladas entre rolido y el movimiento del agua dentro del tanque. Finalmente se presenta un análisis utilizando diagramas de Bifurcación para encontrar las zonas de inestabilidad en función de la frecuencia e inclinación (*steepness*) de la ola.

El trabajo de Jones *et al.* (2003) compara resultados numéricos y experimentales, utilizando un tanque en forma de U y otro de superficie libre, respectivamente; ambos en un barco pesquero de arrastre (Forever Grateful). En los ensayos experimentales, estudia la influencia del amortiguamiento del tanque utilizando diferentes formas de obstructores de flujo, probando diferentes ángulos de incidencia en relación a la línea de flujo del agua dentro do tanque. Para obtener los resultados numéricos fue utilizado un sistema de ecuaciones diferenciales acopladas linealmente con dos grados de libertad. En ese trabajo se demuestra la mayor eficiencia del tanque tipo U comparado con el de superficie libre, ambos pasivos, pudiéndose alcanzar una mayor eficiencia utilizando un tanque de estabilización de superficie libre con obstructores de flujo controlables. Webster *et al.* (2003) presentaron un análisis estadístico basado en un sistema de monitoración, hecho en el mismo barco pesquero en escala real, para evaluar las respuestas del barco con y sin tanque de estabilización.

Shin *et al.* (2004) presentaron criterios para análisis de la existencia de la resonancia paramétrica en mar de proa y popa y utilizaron un tanque de estabilización pasivo tipo tubo en U para disminuir el movimiento de rolido paramétrico. Para obtener la ecuación del movimiento, las fuerzas y momentos que el agua del tanque genera en el barco, utilizaron la teoría presentada por Youssef *et al.*



(2003). En ese trabajo se analiza la influencia de la masa de agua dentro del tanque para obtener la respuesta de rolido en un barco porta contenedores. Los resultados son presentados en función de la frecuencia de encuentro. Adicionalmente, presentaron diagramas polares para analizar la eficiencia del tanque pasivo, obteniendo resultados satisfactorios para diferentes ángulos de incidencia de ola y varias velocidades.

Con la intención de mejorar la rapidez de la respuesta en rolido, del barco en mar de través, con tanque de estabilización, Phairoh y Huang (2005) utilizaron un tanque de estabilización activo tipo tubo en U. Para esto entregaron energía al fluido utilizando una bomba de agua. Posteriormente estudiaron el efecto de los parámetros del tanque y de la bomba sobre el movimiento de rolido. Presentaron la derivación de un modelo no lineal para representar el movimiento del agua dentro del tanque, así como las fuerzas y momentos que ese movimiento ejerce sobre el barco. Para obtener los resultados numéricos el modelo matemático es linealizado. El autor muestra que el sistema activo es más eficiente en lo respecta a la rapidez de respuesta, comparado con el sistema pasivo. Así como también muestran la importancia de la sintonía y amortiguamiento del tanque para disminuir el movimiento de rolido.

Como puede verse, muchas investigaciones están siendo realizadas en el análisis de la estabilización de movimientos en el área naval y oceánica. Vale la pena mencionar que un área relativa a la estabilización de movimientos es el control de movimiento de edificios. En los últimos años, se ha utilizado el movimiento de pesos y sistemas tanque-fluido para la estabilización del movimiento de edificios debido al viento, terremotos y vibraciones de tráfico. Tamura *et al.* (1995) presentaron un

estudio sobre el control del movimiento de una torre en el aeropuerto de Nagasaki, donde es utilizada una columna amortiguadora sintonizada con líquido, para reducir la vibración inducida por viento sobre la torre. El autor muestra que los movimientos en la parte superior de la torre disminuyen en 35-50%, dependiendo de la velocidad y dirección del viento.

## **CAPÍTULO 3**

### **MODELO MATEMÁTICO**

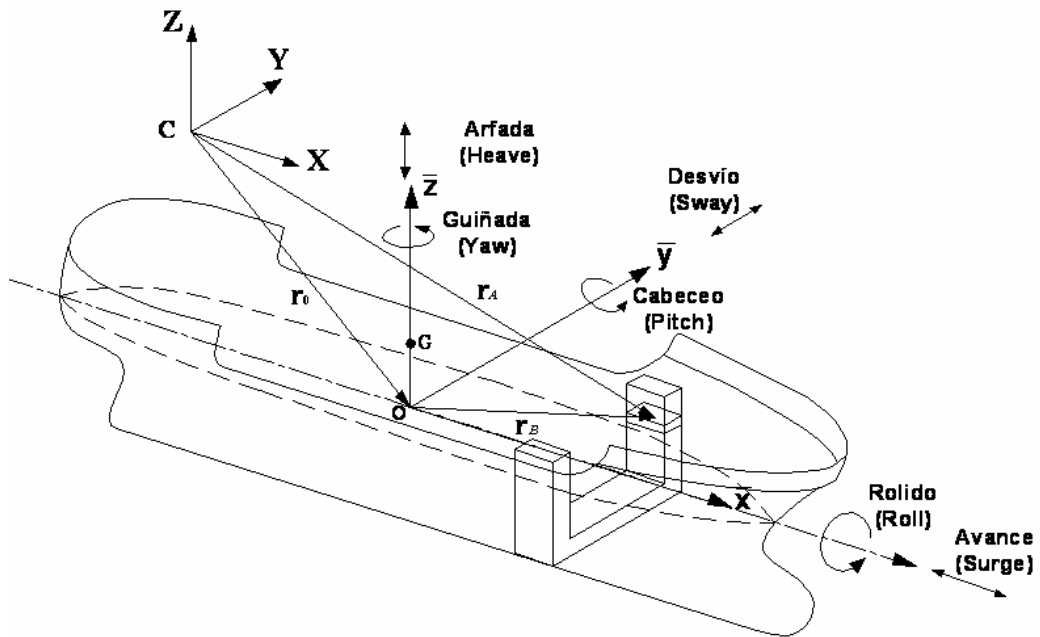
En el presente capítulo será desarrollada la ecuación diferencial no lineal que gobierna el movimiento del fluido dentro del tanque, así como las fuerzas y momentos que este movimiento genera en el barco en los seis grados de libertad. También será presentado el sistema de ecuaciones no lineales, hasta tercera orden, que gobierna el movimiento del barco en mar regular. Finalmente, se presentará el sistema acoplado barco-tanque con cuatro grados de libertad, tres para los movimientos del barco en arfada, rolido, cabeceo, y el movimiento del fluido dentro del tanque.

#### **3.1 Sistemas de Referencia**

Para describir el movimiento del fluido dentro del tanque y los movimientos del barco utilizaremos dos sistemas de referencia. Un sistema inercial **CXYZ** moviéndose con la misma velocidad del barco ( $U$ ), tal que en el instante  $t=0$ , el plano **XY** coincide con la superficie libre en aguas tranquilas, con el punto **C** en la misma vertical que el centro de gravedad **G** del barco. El segundo sistema de referencia es el

sistema móvil  $\overline{Oxyz}$ , utilizado para definir el movimiento del fluido dentro del tanque. Este sistema móvil está fijo en el casco y el plano  $\overline{xy}$  coincide inicialmente con el plano de flotación del barco en aguas tranquilas, el eje  $\overline{Ox}$  pertenece al plano diametral, siendo positivo en el sentido de avance, el eje  $\overline{Oy}$  apunta en la dirección de babor y el eje  $\overline{Oz}$  pasa siempre por el centro de gravedad  $\mathbf{G}$  del barco con sentido positivo para arriba.

Con los sistemas de referencia definidos, denominamos los movimientos de translación del barco en la dirección de los ejes  $\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{Y}$ ,  $\mathbf{Z}$  como **avance** (surge), **desvío** (sway), y **arfada** (heave), respectivamente. Definiremos  $\chi$  como el ángulo de incidencia de las olas en relación al avance del barco, notando que  $\chi = 0^\circ$  representa mar de popa y  $\chi = 180^\circ$  mar de proa. Los sistemas de referencia descritos anteriormente están ilustrados en la Figura 3.1, así como la convención de signos aplicada para los movimientos del barco, notando que estos sistemas son definidos por la regla de la mano derecha.



*Figura 3.1: Sistemas de referencia en equilibrio*

En el presente trabajo el tanque tipo U consiste en dos reservorios verticales unidos por una tubería horizontal en la parte inferior, todos de sección rectangular constante, como se muestra en la Figura 3.2. En esta figura puede verse las características geométricas del tanque, que posteriormente serán determinadas para sintonizar el sistema barco-tanque. Así mismo se puede ver que el movimiento del fluido dentro del tanque está definido inicialmente por el desplazamiento  $Z(t)$ , sendo  $\dot{Z}(t)$  la velocidad del fluido relativa al tanque. Vale la pena ver que el punto O no coincide necesariamente con el centro de gravedad  $G$  del barco.

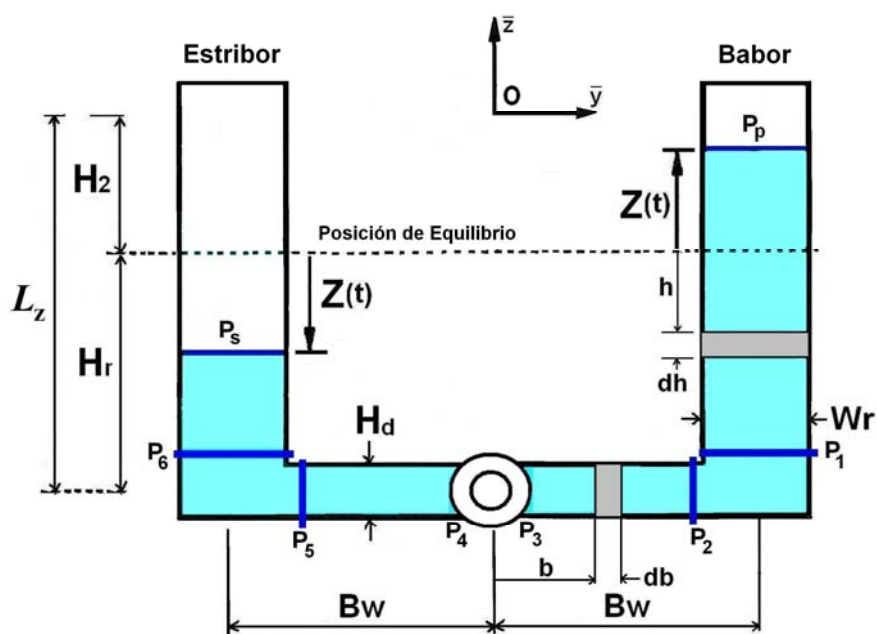
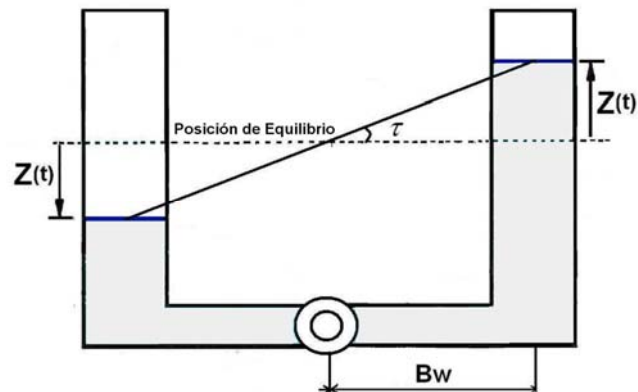


Figura 3.2: Representación esquemática del tanque en forma de U

Es importante indicar que en el desarrollo de las ecuaciones del tanque será presentado el movimiento del fluido en función del desplazamiento  $Z(t)$ , como se muestra en la Figura 3.2. Ya en la presentación final de la ecuación del tanque y obtención de los resultados en el Capítulo 4, será utilizado el desplazamiento angular  $\tau$ , el cual llamaremos ángulo del tanque. Puede observarse en la Figura 3.3 que las variables están relacionadas geoméricamente por la expresión:

$$\tan(\tau) = \frac{Z}{B_w} \quad (3.1)$$



*Figura 3.3: Definición del movimiento del fluido dentro del tanque*

### 3.2 Ecuación del Movimiento del Fluido dentro del Tanque.

A continuación desarrollaremos la ecuación que gobierna el movimiento del fluido dentro del tanque, sabiendo que esta ecuación es influida por los movimientos del barco. Con la intención de organizar el desarrollo de esa ecuación, consideramos el tanque en tres partes individualmente (los dos reservorios verticales y la tubería horizontal en la parte inferior).

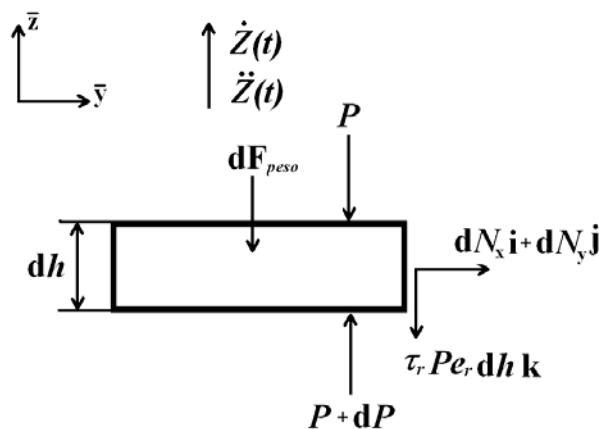
#### 3.2.1 Reservorio de Babor

Como vemos en la Figura 3.2, consideramos que el fluido dentro del tanque se mueve desde el reservorio de estribor hasta el reservorio de babor. Así podemos definir un volumen diferencial ( $dVol$ ) localizado en el reservorio de babor que es un paralelepípedo de dimensiones  $W_r$  por  $L_r$  con altura  $dh$ , donde  $L_r$  es la medida longitudinal del tanque en la dirección del eje x. Este parámetro geométrico tendrá gran importancia cuando busquemos definir la cantidad del fluido dentro del tanque. Por otro lado, debido a que el ancho del

reservorio ( $W_r$ ) es mucho menor comparada con las longitudes  $B_w$  y  $H_2$ , trataremos el volumen diferencial como un punto y consideraremos el flujo dentro del reservorio como unidimensional. Así, el volumen diferencial en los reservorios es definido como:

$$dVol_r = W_r L_t dh = A_r dh \quad (3.2)$$

Definido el volumen diferencial podemos construir el diagrama de cuerpo libre de éste, como se muestra en la Figura 3.4. Aquí vemos que las fuerzas que actúan en el volumen diferencial son: la fuerza de la gravedad (peso), la fuerza de la presión y la fuerza que las paredes del tanque ejercen sobre el fluido. Se puede ver que habrá un diferencial de presión ( $dP$ ) en la parte inferior del volumen diferencial ocasionado por la columna de fluido en la parte superior. Además, se ve que la tensión tangencial ( $\tau_r$ ) siempre se opone a la dirección del movimiento del fluido  $Z(t)$ .



*Figura 3.4: Diagrama de cuerpo libre del volumen diferencial del fluido en el reservorio de Babor.*

Aplicando la Segunda Ley de Newton en este volumen diferencial tenemos:

$$dF = dF_{\text{peso}} + dF_{\text{paredes}} + dF_{\text{pressao}} = \rho_t A_r a_A dh \quad (3.3)$$

Donde  $\rho_t$  es la densidad del fluido dentro del tanque,  $a_A$  es la aceleración absoluta del volumen diferencial, con los componentes expresados en el sistema móvil. En la Ecuación (3.2) se ve que la masa del volumen diferencial es  $dm_t = \rho_t A_r dh$ . A continuación, deduciremos la expresión que define la aceleración absoluta  $a_A$ .

Sea  $r_B$  el vector posición del volumen diferencial con relación al sistema móvil, y  $r_0$  el vector posición de este sistema móvil en relación al sistema inercial. Entonces el vector posición del volumen diferencial con relación al sistema inercial ( $r_A$ ) es definido (ver Figura 3.1) por:

$$r_A = r_0 + r_B \quad (3.4)$$

Sea  $v_0$  la velocidad absoluta del origen del sistema móvil (O), en relación al sistema inercial, definida por:

$$v_0 = \frac{dr_0}{dt} = ui + vj + wk \quad (3.5)$$



Derivando la Ecuación (3.5) podemos encontrar la aceleración absoluta del ponto O, expresada por:

$$\mathbf{a}_0 = \frac{d\mathbf{v}_0}{dt} = \dot{u}\mathbf{i} + \dot{v}\mathbf{j} + \dot{w}\mathbf{k} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_0 \quad (3.6)$$

Donde, definimos la velocidad y la aceleración angular del barco como:

$$\boldsymbol{\Omega} = p\mathbf{i} + q\mathbf{j} + r\mathbf{k} \quad (3.7)$$

$$\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \dot{p}\mathbf{i} + \dot{q}\mathbf{j} + \dot{r}\mathbf{k} \quad (3.8)$$

A continuación derivamos el vector posición del volumen diferencial ( $\mathbf{r}_A$ ) definido en la Ecuación (3.4), encontrando la velocidad absoluta:

$$\mathbf{v}_A = \frac{d\mathbf{r}_A}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_0}{dt} + \frac{d\mathbf{r}_B}{dt} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_B + (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_B) \quad (3.9)$$

Derivando  $\mathbf{v}_A$ , encontramos la aceleración absoluta del volumen diferencial:

$$\mathbf{a}_A = \frac{d\mathbf{v}_A}{dt} = \frac{d\mathbf{v}_0}{dt} + \frac{d\mathbf{v}_B}{dt} + \frac{d[(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_B)]}{dt} \quad (3.10)$$

Observando la Ecuación (3.9), la aceleración absoluta es definida por la siguiente expresión:

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_0 + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_B) + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_B + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_B + \mathbf{a}_B \quad (3.11)$$

Siguiendo con el análisis y con ayuda de la Figura 3.2, el vector posición del volumen diferencial localizado en el **reservorio de babor** es definido por:

$$\mathbf{r}_{B_1} = L_x \mathbf{i} + B_w \mathbf{j} - (H_2 + h) \mathbf{k} \quad (3.12)$$

Donde  $L_x$  es la posición longitudinal del tanque con respecto al origen del sistema móvil O, en la dirección del eje x (positivo à proa).

A velocidad y aceleración relativa del volumen diferencial localizado en el **reservorio del babor**, con los componentes expresados en el sistema móvil, son definidas por:

$$\mathbf{v}_{B_1} = \dot{Z}(t) \mathbf{k} \quad (3.13)$$

$$\mathbf{a}_{B_1} = \ddot{Z}(t) \mathbf{k} \quad (3.14)$$

Sustituyendo las Ecuaciones (3.12) à (3.14) en la ecuación (3.11) obtenemos la aceleración absoluta del volumen diferencial en el **reservorio de babor**:

$$\begin{aligned} a_{A_1} = & \left[ \dot{u} + qw - rv - (q^2 + r^2)L_x - (\dot{r} - pq)B_w + 2q\dot{Z}(t) - (\dot{q} + pr)(H_2 + h) \right] i \\ & + \left[ \dot{v} + ru - pw + (\dot{r} + pq)L_x - (p^2 + r^2)B_w - 2p\dot{Z}(t) + (\dot{p} - qr)(H_2 + h) \right] j \quad (3.15) \\ & + \left[ \dot{w} + pv - qu - (\dot{q} - pr)L_x + (\dot{p} + qr)B_w + \ddot{Z}(t) + (p^2 + q^2)(H_2 + h) \right] k \end{aligned}$$

En la Ecuación (3.15), para facilitar en los pasos de la integración, colocamos por último las partes que dependen de la posición vertical del volumen diferencial ( $h$ ), el cual será integrado a lo largo del reservorio. Las otras partes serán constantes en toda la integración.

A continuación serán definidos vectorialmente los componentes de cada una de las fuerzas representadas en la Ecuación (3.3). La fuerza peso con los componentes expresados en el sistema móvil es definida por:

$$\begin{aligned} dF_{peso_1} = & -\rho_t g A_r \bar{g}_u dh = \\ & -\rho_t g A_r (-\text{sen}\theta i + \text{sen}\phi \cos\theta j + \cos\phi \cos\theta k) dh \end{aligned} \quad (3.16)$$

Donde:

$\bar{g}_u = -\text{sen}\theta i + \text{sen}\phi \cos\theta j + \cos\phi \cos\theta k$  es el vector unitario, en la dirección de la fuerza de gravedad, con los componentes expresados en el sistema móvil.

La fuerza ejercida por las paredes del tanque será (ver Figura 3.4):

$$dF_{paredes_1} = dN_x i + dN_y j - \tau_r P e_r dhk \quad (3.17)$$

Donde:

$\tau_r$  es la tensión tangencial en las paredes del reservorio.

$P e_r = 2(W_r + L_r)$  es el perímetro de la sección transversal de los reservorios.

$N_x, N_y$  son los componentes normales que las paredes ejercen sobre el fluido.

Finalmente, se tiene la fuerza de la presión que la columna de fluido ejerce sobre el volumen diferencial; la presión es  $P$  sobre la parte superior de la superficie y  $P + dP$  en la superficie inferior (ver Figura 3.4). La fuerza de la presión resultante es dada como:

$$dF_{pressao_1} = A_r dPk \quad (3.18)$$

Sustituyendo las Ecuaciones (3.15), (3.16), (3.17) y (3.18) en la Ecuación (3.3), obtenemos las expresiones para  $dN_x, dN_y$  e  $dP$ .

Antes de integrar podemos indicar que una integral notable, para este reservorio y que ayudará a simplificar las operaciones, es:

$$\int_Z^{H_r} (H_2 + h)dh = \frac{1}{2} [L_z^2 - (H_2 + Z)^2] \quad (3.19)$$

Las integraciones serán calculadas separadamente, primero con los componentes relacionados al vector unitario  $i$ . Así vemos en la Ecuación (3.15) que podemos cambiar la parte de la aceleración absoluta con relación a  $i$ , e independiente de  $h$ , por:

$$a_{A_i} = [\dot{u} + qw - rv - (q^2 + r^2)L_x - (\dot{r} - pq)B_w + 2q\dot{Z}(t)] \quad (3.20)$$

Haciendo este cambio de variable, sustituimos los componentes relacionados a  $i$  de las Ecuaciones (3.16), (3.17), (3.18) y (3.15) en la Ecuación (3.3), obteniendo:

$$\rho_t g A_r \text{sen} \theta dh + dN_{x_1} = \rho_t A_r [a_{A_i} - (\dot{q} + pr)(H_2 + h)] dh \quad (3.21)$$

Luego, tomando como referencia la posición de equilibrio, integramos desde  $h = Z$  hasta  $h = H_r$ :

$$\rho_t g A_r \text{sen} \theta \int_Z^{H_r} dh + \int_Z^{H_r} dN_{x_1} = \rho_t A_r a_{A_i} \int_Z^{H_r} dh - \rho_t A_r (\dot{q} + pr) \int_Z^{H_r} (H_2 + h) dh \quad (3.22)$$

Notamos en la Ecuación (3.22), que las primeras tres integrales son simples de ser resueltas y además en la última parte se encuentra la integral notable, mostrada en la Ecuación (3.19). Después de resolver las integrales y sustituir la Ecuación (3.20), obtenemos la componente normal  $N_{x_1}$  :

$$N_{x_1} = \rho_t A_r \{ [-g \sin \theta + \dot{u} + qw - rv - (q^2 + r^2)L_x - (\dot{r} - pq)B_w + 2q\dot{Z}](H_r - Z) - \frac{1}{2}(\dot{q} + pr)[L_z^2 - (H_2 + Z)^2] \} \quad (3.23)$$

Repitiendo el procedimiento anterior, ahora para los componentes relacionados con j y k, obtenemos  $N_{y_1}$  y la diferencia de presión  $P_p - P_1$ , respectivamente:

$$N_{y_1} = \rho_t A_r \{ [g \sin \theta \cos \phi + \dot{v} + ru - pw - (p^2 + r^2)B_w + (\dot{r} + pq)L_x - 2p\dot{Z}](H_r - Z) + \frac{1}{2}(\dot{p} - qr)[L_z^2 - (H_2 + Z)^2] \} \quad (3.24)$$

$$P_p - P_1 = -\rho_t \left\{ \left[ \frac{\tau_r P e_r}{\rho_t A_r} + g \cos \phi \cos \theta + \dot{w} + pv - qu - (\dot{q} - pr)L_x + (\dot{p} + qr)B_w + \ddot{Z} \right] (H_r - Z) + \frac{1}{2}(p^2 + q^2)[L_z^2 - (H_2 + Z)^2] \right\} \quad (3.25)$$

Donde g es la magnitud de la aceleración debido a la gravedad y  $L_z = H_r + H_2$  es la distancia vertical entre la tubería y el ponto O, como se muestra en la Figura 3.2.

### 3.2.2 Tubería de Conexión Horizontal

El paso siguiente es considerar la tubería transversal que conecta los reservorios, como se muestra en la Figura 3.2. La altura de la tubería es  $H_d$  y el área de la sección transversal  $A_d$ . Se observa que el volumen diferencial en la tubería es definido por:

$$dVol_d = H_d L_d db = A_d db \quad (3.26)$$

A continuación integramos por separado primero la parte del lado de babor y posteriormente la parte de estribor, de la tubería.

En la **parte de babor**, el vector posición del volumen diferencial queda definido por (Ver Figura 3.2):

$$r_{B_2} = L_x i + b j - L_z k \quad (3.27)$$

Cuando asumimos que el movimiento del fluido dentro del tanque es unidimensional, podemos concluir que los **caudales** dentro de los reservorios y de la tubería son iguales. Así, la velocidad y la aceleración relativa del fluido dentro de la tubería son definidas por:

$$v_{B_2} = R \dot{Z}(t) j \quad (3.28)$$

$$a_{B_2} = R\ddot{Z}(t)\mathbf{j} \quad (3.29)$$

Donde:

$$R = \frac{A_r}{A_d} = \frac{W_r}{H_d} \quad (3.30)$$

Sustituyendo las Ecuaciones (3.27) hasta (3.29) dentro de la Ecuación (3.11), obtenemos la aceleración absoluta para la tubería en la **parte de babor**:

$$\begin{aligned} a_{A_2} = & \left[ \dot{u} + qw - rv - (q^2 + r^2)L_x - (\dot{q} + pr)L_z - 2rR\dot{Z}(t) - (\dot{r} - pq)b \right] \mathbf{i} \\ & + \left[ \dot{v} + ru - pw + (\dot{r} + pq)L_x + (\dot{p} - qr)L_z + R\ddot{Z}(t) - (p^2 + r^2)b \right] \mathbf{j} \quad (3.31) \\ & + \left[ \dot{w} + pv - qu - (\dot{q} - pr)L_x + (p^2 + q^2)L_z + 2pR\dot{Z}(t) + (\dot{p} + qr)b \right] \mathbf{k} \end{aligned}$$

Puede verse en la Ecuación (3.31) que en la última parte de cada componente se encuentra la variable  $b$  que cambia a lo largo de la integración.

Con la ayuda de la Figura 3.2 construimos el diagrama de cuerpo libre del volumen diferencial dentro de la tubería, como es mostrado en la Figura 3.5:



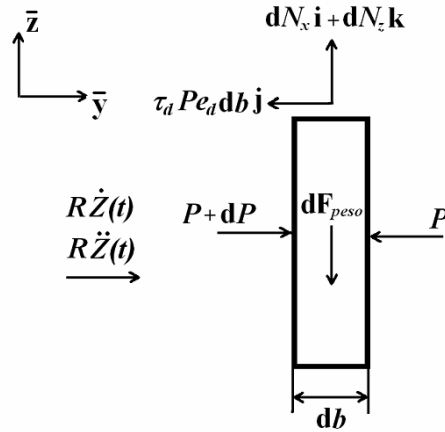


Figura 3.5: Diagrama de cuerpo libre del volumen diferencial en la tubería horizontal.

A continuación definimos vectorialmente las fuerzas que actúan en este volumen diferencial:

$$dF_{paredes_2} = dN_x i - \tau_d P e_t db j + dN_z k \quad (3.32)$$

$$dF_{pressao_2} = A_d dP j \quad (3.33)$$

$$\begin{aligned} dF_{peso_2} &= -\rho_t g A_d db \vec{g}_u \\ &= -\rho_t g A_d db (-\text{sen } \theta i + \text{sen } \phi \cos \theta j + \cos \phi \cos \theta k) \end{aligned} \quad (3.34)$$

Aplicando la Segunda Ley de Newton sobre el volumen diferencial, o sea, reemplazando la Ecuación (3.32), (3.33) y (3.34) en la Ecuación (3.3), podemos obtener las expresiones para  $dN_x, dN_z$  y  $dP$ . Para realizar la integración seguimos el mismo procedimiento presentado anteriormente para obtener la Ecuación (3.23) en el Ítem 3.2.1. Podemos ver que ahora los límites

de integración van desde  $b = 0$  hasta  $b = B_w$ , (observe que estamos integrando solamente la parte de babor de la tubería). Además, observe en la Ecuación (3.31) que no será necesario utilizar la integral notable. Así, después de la integración obtenemos:

$$N_{x_2} = \rho_t \frac{A_r}{R} \{ [-g \operatorname{sen} \theta + \dot{u} + qw - rv - (q^2 + r^2)L_x - (\dot{q} + pr)L_z - 2rR\dot{Z}]B_w - \frac{1}{2}(\dot{r} - pq)B_w^2 \} \quad (3.35)$$

$$P_2 - P_3 = \rho_t \left\{ \left[ \frac{\tau_d P e_d}{\rho_t A_d} + g \operatorname{sen} \phi \cos \theta + \dot{v} + ru - pw + (\dot{r} + pq)L_x + (\dot{p} - qr)L_z + R\ddot{Z} \right] B_w - \frac{1}{2}(p^2 + r^2)B_w^2 \right\} \quad (3.36)$$

$$N_{z_2} = \rho_t \frac{A_r}{R} \{ [g \cos \phi \cos \theta + \dot{w} + pv - qu - (\dot{q} - pr)L_x + (p^2 + q^2)L_z + 2pR\dot{Z}]B_w + \frac{1}{2}(\dot{p} + qr)B_w^2 \} \quad (3.37)$$

Donde  $P e_d = 2(H_d + L_t)$  es el perímetro de la sección transversal de la tubería.

Ahora, en la **parte de estribor**, con ayuda de la Figura 3.2, podemos observar que el vector posición es:

$$\mathbf{r}_{B_3} = L_x \mathbf{i} - b \mathbf{j} - L_z \mathbf{k} \quad (3.38)$$

Haciendo el mismo procedimiento que en la parte de babor, encontramos la aceleración absoluta para este volumen diferencial en la **parte de estribor**, quedando así:

$$\begin{aligned}
 a_{A_3} = & \left[ \dot{u} + qw - rv - (q^2 + r^2)L_x - (\dot{q} + pr)L_z - 2rR\dot{Z}(t) + (\dot{r} - pq)b \right] i \\
 & + \left[ \dot{v} + ru - pw + (\dot{r} + pq)L_x + (\dot{p} - qr)L_z + R\ddot{Z}(t) + (p^2 + r^2)b \right] j \quad (3.39) \\
 & + \left[ \dot{w} + pv - qu - (\dot{q} - pr)L_x + (p^2 + q^2)L_z + 2pR\dot{Z}(t) - (\dot{p} + qr)b \right] k
 \end{aligned}$$

Podemos observar que comparando esta aceleración absoluta de estribor, Ecuación (3.39), con la aceleración absoluta de babor, Ecuación (3.31), los componentes que multiplican la posición  $b$  cambian de signo, tanto el vector posición como la aceleración. Con las mismas fuerzas consideradas en la parte de babor podemos utilizar la Segunda Ley de Newton en la **parte de estribor**. Para la integración se utiliza el mismo procedimiento utilizado en la parte de babor con los mismos límites de integración desde  $b = 0$  hasta  $b = B_w$ , obtenemos así los componentes normales y la diferencia de presión:

$$\begin{aligned}
 N_{x_3} = & \rho_t \frac{A_r}{R} \left\{ [-g \sin \theta + \dot{u} + qw - rv - (q^2 + r^2)L_x - (\dot{q} + pr)L_z \right. \\
 & \left. - 2rR\dot{Z}] B_w + \frac{1}{2} (\dot{r} - pq) B_w^2 \right\} \quad (3.40)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_4 - P_5 = \rho_t \left\{ \left[ \frac{\tau_d P e_d}{\rho_t A_d} + g \sin \phi \cos \theta + \dot{v} + ru - pw + (\dot{r} + pq)L_x + (\dot{p} - qr)L_z \right. \right. \\
\left. \left. + R\ddot{Z} \right] B_w + \frac{1}{2} (p^2 + r^2) B_w^2 \right\}
\end{aligned} \tag{3.41}$$

$$\begin{aligned}
N_{z_3} = \rho_t \frac{A_r}{R} \left\{ [g \cos \phi \cos \theta + \dot{w} + pv - qu - (\dot{q} - pr)L_x + (p^2 + q^2)L_z \right. \\
\left. + 2pR\dot{Z}] B_w - \frac{1}{2} (\dot{p} + qr) B_w^2 \right\}
\end{aligned} \tag{3.42}$$

### 3.2.3 Reservorio de Estribor

Continuando con el análisis, consideramos la columna de fluido en el **reservorio de estribor**. La posición del volumen diferencial es definida por (ver Figura 3.2):

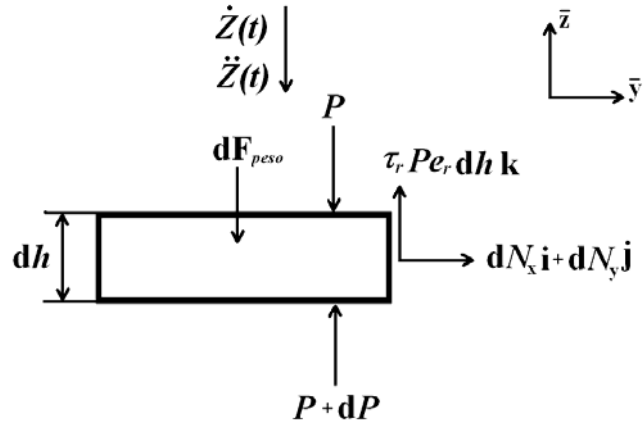
$$r_{B_4} = L_x i - B_w j - (H_2 + h) k \tag{3.43}$$

En esta parte, la velocidad y aceleración relativa del volumen diferencial son definidas por:

$$v_{B_4} = -\dot{Z}(t) k \tag{3.44}$$

$$a_{B_4} = -\ddot{Z}(t) k \tag{3.45}$$

El diagrama de cuerpo libre del volumen diferencial en el **reservorio de estribor** se muestra en la Figura 3.6.



*Figura 3.6: Diagrama de cuerpo libre del volumen diferencial en el Reservorio de Estribor.*

Vemos en la Figura 3.6 que en el **reservorio de estribor** la velocidad del fluido y las tensiones tangenciales cambian de dirección, cuando se compara con el reservorio de babor. Modificado el vector posición, se sustituye las Ecuaciones (3.43) hasta (3.45) en la Ecuación (3.11), definiendo la aceleración absoluta como:

$$\begin{aligned}
 a_{A_1} = & \left[ \dot{u} + qw - rv - (q^2 + r^2)L_x + (\dot{r} - pq)B_w - 2q\dot{Z}(t) - (\dot{q} + pr)(H_2 + h) \right] i \\
 & + \left[ \dot{v} + ru - pw + (\dot{r} + pq)L_x + (p^2 + r^2)B_w + 2p\dot{Z}(t) + (\dot{p} - qr)(H_2 + h) \right] j \quad (3.46) \\
 & + \left[ \dot{w} + pv - qu - (\dot{q} - pr)L_x - (\dot{p} + qr)B_w - \ddot{Z}(t) + (p^2 + q^2)(H_2 + h) \right] k
 \end{aligned}$$

Comparando la Ecuación (3.46) con la Ecuación (3.15) se observa que cambian de signo tanto el parámetro  $B_w$ , la velocidad  $\dot{Z}(t)$  y la aceleración  $\ddot{Z}(t)$ .

A continuación calculamos la fuerza ejercida por las paredes del reservorio sobre este volumen diferencial, así:

$$dF_{paredes_4} = dN_x i + dN_y j + \tau_r P e_r dhk \quad (3.47)$$

Las fuerzas restantes mostradas en las Ecuaciones (3.16) y (3.18) no cambian. Luego, aplicamos la Segunda Ley de Newton, sustituyendo las Ecuaciones (3.16), (3.18) y (3.47) en la Ecuación (3.3), obtenemos las expresiones para  $dN_x, dN_y, dP$  e integramos siguiendo el mismo procedimiento presentado para obtener la Ecuación (3.23), con la diferencia de que los límites de integración ahora son desde  $h = -Z$  hasta  $h = H_r$ . Por consiguiente, cambia la integral notable para:

$$\int_{-Z}^{H_r} (H_2 + h) dh = \frac{1}{2} [L_z^2 - (H_2 - Z)^2] \quad (3.48)$$

Después de realizar las integraciones, obtenemos:

$$N_{x_4} = \rho_t A_r \{ [-g \sin \theta + \dot{u} + qw - rv - (q^2 + r^2)L_x + (\dot{r} - pq)B_w - 2q\dot{Z}](H_r + Z) - \frac{1}{2}(\dot{q} + pr)[L_z^2 - (H_2 - Z)^2] \} \quad (3.49)$$

$$N_{y_4} = \rho_t A_r \{ [g \sin \theta \cos \phi + \dot{v} + ru - pw + (p^2 + r^2)B_w + (\dot{r} + pq)L_x + 2p\dot{Z}](H_r + Z) + \frac{1}{2}(\dot{p} - qr)[L_z^2 - (H_2 - Z)^2] \} \quad (3.50)$$

$$P_6 - P_s = \rho_t \left\{ \left[ -\frac{\tau_r P e_r}{\rho_t A_r} + g \cos \phi \cos \theta + \dot{w} + pv - qu - (\dot{q} - pr)L_x - (\dot{p} + qr)B_w - \ddot{Z} \right] (H_r + Z) + \frac{1}{2}(p^2 + q^2)[L_z^2 - (H_2 - Z)^2] \right\} \quad (3.51)$$

En las uniones entre los reservorios y la tubería hay pérdidas menores que pueden ser aproximadas por:

$$P_1 - P_2 = \rho_t K \dot{Z}^2 \quad (3.52)$$

$$P_5 - P_6 = \rho_t K \dot{Z}^2 \quad (3.53)$$

Donde  $K$  es el coeficiente de pérdida de carga en las uniones.

De forma general, se desarrollará una ecuación del movimiento para un tanque activo, colocando una bomba de agua en la parte central de la tubería, esto para entregar energía al fluido y aumentar la rapidez de la respuesta. Consideramos que en el centro de la tubería, la bomba aplica un diferencial de presión, dado por:

$$P_3 - P_4 = -\frac{E}{A_r \dot{Z}} \quad (3.54)$$

Donde  $E$  es la potencia entregada al fluido por la bomba.

### 3.2.4 Ecuación No-Lineal del Tanque

Con la intención de simplificar las operaciones, vemos en las Ecuaciones (3.25), (3.36), (3.41) y (3.51) que podemos hacer el siguiente cambio de variable:

$$\begin{aligned} X_* &= -g \operatorname{sen} \theta + \dot{u} + qw - rv - (q^2 + r^2)L_x \\ Y_* &= g \operatorname{sen} \theta \cos \phi + \dot{v} + ru - pw + (\dot{r} + pq)L_x \\ Z_* &= g \cos \theta \cos \phi + \dot{w} + pv - qu - (\dot{q} - pr)L_x \end{aligned} \quad (3.55)$$

Así, podemos sumar de una manera más simple la Ecuación (3.25) con (3.51), obteniendo para los reservorios:

$$\begin{aligned} P_p - P_1 + P_6 - P_s = \rho_t \{ & -2H_r \left[ \frac{\tau_r P e_r}{\rho_t A_r} + (\dot{p} + qr)B_w + \ddot{Z} \right] + \\ & 2Z_* Z + 2H_2 Z (p^2 + q^2) \} \end{aligned} \quad (3.56)$$

De la misma manera se suma la Ecuación (3.36) con (3.41), obteniéndose para la tubería horizontal:



$$P_2 - P_3 + P_4 - P_5 = 2\rho_t B_w \left[ \frac{\tau_d P e_d}{\rho_t A_d} + Y_* + (\dot{p} - qr)L_z + R\ddot{Z} \right] \quad (3.57)$$

Utilizando el procedimiento anterior se suma la Ecuación (3.52) con (3.53), obteniendo:

$$P_1 - P_2 + P_5 - P_6 = 2\rho_t K\dot{Z}^2 \quad (3.58)$$

Finalmente, sumamos las Ecuaciones (3.54), (3.56), (3.57) y (3.58), eliminamos las presiones de signo contrario del lado izquierdo y sustituimos la Ecuación (3.55), obteniendo la ecuación que gobierna el movimiento del fluido dentro del tanque en función de  $Z(t)$ :

$$\begin{aligned} & W_r \left( \frac{B_w}{H_d} - \frac{H_r}{W_r} \right) \ddot{Z} + \frac{P e_d}{\rho_t A_d} B_w \tau_d - \frac{P e_r}{\rho_t A_r} H_r \tau_r + K\dot{Z}^2 - \frac{E}{2\rho_t A_r \dot{Z}} \\ & + [g \cos \phi \cos \theta + \dot{w} + pv - qu - (\dot{q} - pr)L_x + (p^2 + q^2)H_2] Z \\ & = \frac{P_p - P_s}{2\rho_t} - [g \sin \phi \cos \theta + \dot{v} + ru - pw + (\dot{r} + pq)L_x + (\dot{p} - qr)L_z \\ & - (\dot{p} + qr)H_r] B_w \end{aligned} \quad (3.59)$$

Donde  $P_p$  y  $P_s$  son las presiones internas en los reservorios de babor y estribor, respectivamente. En general la diferencia de presión y la potencia entregada por la bomba son consideradas como acciones externas, ya sea para aumentar el amortiguamiento o entregar energía al fluido. Teniendo estas consideraciones, vamos a representar estas acciones externas como  $T_{ext}$ .

Es importante indicar que una de las maneras de evaluar las fuerzas de amortiguamiento interiores al tanque, que están directamente relacionadas con las tensiones tangenciales ( $\tau_r, \tau_d$ ) y mostradas en la Ecuación (3.59), es usando fórmulas semi-empíricas de la mecánica de los fluidos. Así, las tensiones tangenciales pueden ser relacionadas con el factor de rugosidad  $f$  utilizando la relación (ver White, 1999):

$$\tau_{r,d} = f \frac{\gamma \dot{Z}^2}{8g} \quad (3.60)$$

Aquí se puede ver que las tensiones tangenciales son proporcionales a la velocidad del fluido elevada al cuadrado, y el factor de rugosidad  $f$  depende del Número de Reynolds ( $Re$ ). Para evaluar  $Re$  utilizamos la siguiente expresión:

$$Re = \frac{\dot{Z} D_{r,d}}{\nu} \quad (3.61)$$

Donde  $D$  es el ancho del reservorio ( $W_r$ ) o la altura del tubería ( $H_d$ ), dependiendo en que lugar del tanque se esté evaluando  $Re$ ,  $\nu$  es la viscosidad cinemática del fluido. Con el cálculo de  $Re$  pueden utilizarse fórmulas para tuberías circulares con la intención de evaluar el factor de rugosidad  $f$ . La

fórmula a ser utilizada depende del régimen en la cual se encuentre el fluido, como se muestra a continuación:

- a) Si  $Re < 2000$  (**Régimen Laminar**)

$$f = \frac{64}{Re} \quad (3.62)$$

- b) Si  $2000 < Re < 4000 - 5000$  (**Régimen de Transición**)

Fórmula de Colebrook

$$\frac{1}{f} = 1.14 - 2 \log \left( \frac{e}{D} + \frac{9.35}{Re \sqrt{f}} \right) \quad (3.63)$$

- c) Si  $5000 < Re < 10^8$  (**Régimen Turbulento**)

(Swamee and Jain, 1976)

$$f = \frac{0.25}{\left[ \log \left( \frac{e}{3.7D} + \frac{5.74}{Re^{0.9}} \right) \right]^2} \quad (3.64)$$

Aquí  $e$  representa la rugosidad de las paredes internas al tanque.

Como vimos en la Ecuación (3.59) tenemos otra parte del amortiguamiento cuadrático relacionado con la pérdida de energía en las

uniones entre los reservorios y la tubería, los cuales son proporcionales al coeficiente de pérdida  $K$ , siendo determinado experimentalmente.

En el presente trabajo, suponemos que las fuerzas de amortiguamiento son proporcionales a la velocidad  $\dot{Z}$  y que existe un coeficiente de amortiguamiento equivalente ( $B_{\tau\tau}$ ). O sea, hacemos la siguiente aproximación:

$$\frac{Pe_d}{\rho_l A_d} B_w \tau_d - \frac{Pe_r}{\rho_l A_r} H_r \tau_r + K \dot{Z}^2 \approx B_{\tau\tau} \dot{Z} \quad (3.65)$$

Por otro lado, con la intención de observar mejor los acoplamientos en la Ecuación (3.59) y obtener una nomenclatura compatible con las ecuaciones del barco, asumimos la hipótesis de pequeños ángulos para el movimiento de fluido ( $\tan \tau \approx \tau$ ). Entonces, podemos definir a partir de ahora el movimiento fluido en función del ángulo del tanque ( $\tau$ ), sustituyendo  $Z = B_w \tau$  (ver Ecuación 3.1).

Además, sustituimos la Ecuación (3.65) en (3.59) y hacemos los siguientes cambios de variables para los movimientos del barco:

$$\begin{aligned}
u &= \dot{x} & p &= \dot{\phi} \\
\dot{u} &= \ddot{x} & \dot{p} &= \ddot{\phi} \\
v &= \dot{y} & q &= \dot{\theta} \\
\dot{v} &= \ddot{y} & \dot{q} &= \ddot{\theta} \\
w &= \dot{z} & r &= \dot{\psi} \\
\dot{w} &= \ddot{z} & \dot{r} &= \ddot{\psi}
\end{aligned} \tag{3.66}$$

Se puede definir una nueva nomenclatura para los coeficientes del tanque, transformando la Ecuación (3.59) a:

$$\begin{aligned}
&T_{\ddot{x}}\ddot{x} + T_{\dot{x}}\dot{x} + T_{\ddot{z}}\ddot{z} + T_{\ddot{\theta}}\ddot{\theta} + T_{\dot{x}\dot{\theta}}\dot{x}\dot{\theta} + T_{\dot{y}\dot{\phi}}\dot{y}\dot{\phi} + T_{\phi\theta}\cos\phi\cos\theta\tau + \\
&T_{\dot{\phi}\dot{\phi}}\dot{\phi}^2\tau + T_{\dot{\theta}\dot{\theta}}\dot{\theta}^2\tau + T_{\dot{\phi}\dot{\psi}}\dot{\phi}\dot{\psi}\tau = T_{ext} \\
&-[T_{\phi\theta}\sin\phi\cos\theta + T_{\dot{y}}\dot{y} + T_{\dot{x}\dot{\psi}}\dot{x}\dot{\psi} + T_{\dot{z}\dot{\phi}}\dot{z}\dot{\phi} + T_{\dot{\psi}}\dot{\psi} + T_{\dot{\phi}\dot{\theta}}\dot{\phi}\dot{\theta} + T_{\dot{\phi}}\dot{\phi} + T_{\dot{\theta}\dot{\psi}}\dot{\theta}\dot{\psi}]
\end{aligned} \tag{3.67}$$

En el presente trabajo se considera que los reservorios están abiertos en la parte superior, siendo las presiones iguales a la presión atmosférica. Además, se considera la bomba apagada ( $E = 0$ ), trabajando el tanque de estabilización como pasivo, Entonces  $T_{ext} = 0$ .

La definición de cada coeficiente de la Ecuación (3.67) se muestra en la Tabla

**Tabla 3.1 Coeficientes de la Ecuación del Tanque.**

<b>Primera Orden</b>			
$T_{\ddot{z}} = 2\rho_t A_r B_w^2 W_r \left( \frac{B_w}{H_d} - \frac{H_r}{W_r} \right)$	$T_{\ddot{t}} = 2\rho_t A_r B_w^2 B_{\tau\tau}$	$T_{\ddot{y}} = 2\rho_t A_r B_w^2$	
$T_{\ddot{\phi}} = 2\rho_t A_r B_w^2 (L_z - H_r)$	$T_{\ddot{\psi}} = 2\rho_t A_r B_w^2 L_x$		
<b>Segunda Orden</b>			
$T_{\dot{x}\dot{\psi}} = 2\rho_t A_r B_w^2$	$T_{\dot{z}\dot{\tau}} = 2\rho_t A_r B_w^2$	$T_{\dot{z}\dot{\phi}} = -2\rho_t A_r B_w^2$	$T_{\dot{\phi}\dot{\theta}} = 2\rho_t A_r B_w^2 g^*$
$T_{\dot{\theta}\dot{\tau}} = -2\rho_t A_r B_w^2 L_x$	$T_{\dot{\theta}\dot{\psi}} = -2\rho_t A_r B_w^2 (L_z + H_r)$	$T_{\dot{\phi}\dot{\phi}} = 2\rho_t A_r B_w^2 L_x$	
<b>Tercera Orden</b>			
$T_{\dot{x}\dot{\theta}\dot{\tau}} = -2\rho_t A_r B_w^2$	$T_{\dot{y}\dot{\phi}\dot{\tau}} = 2\rho_t A_r B_w^2$	$T_{\dot{\phi}\dot{\theta}\dot{\tau}} = 2\rho_t A_r B_w^2 g^*$	
$T_{\dot{\phi}\dot{\phi}\dot{\tau}} = 2\rho_t A_r B_w^2 H_2$	$T_{\dot{\theta}\dot{\theta}\dot{\tau}} = 2\rho_t A_r B_w^2 H_2$	$T_{\dot{\phi}\dot{\psi}\dot{\tau}} = 2\rho_t A_r B_w^2 L_x$	

\* Estos coeficientes cambian para primera orden cuando la ecuación del tanque es lineal.

Se debe ver que la Ecuación (3.67) es una ecuación con no linealidades de hasta tercera orden, en la cual se aprecia mejor los acoplamientos entre el movimiento del tanque y los seis grados de libertad del barco. Se debe indicar que para obtener los resultados numéricos en el presente trabajo se considerará que el barco puede moverse en arfada, rolido y cabeceo, sendo eliminados los coeficientes relacionados a los otros tres grados de libertad.

### **3.2.5 Fuerzas y Momentos ejercidos sobre el Barco debido al Movimiento del Fluido dentro del Tanque**

Después de desarrollar la ecuación que gobierna el movimiento del fluido dentro del tanque es necesario evaluar las fuerzas y momentos que el tanque ejerce sobre el barco. Estas fuerzas y momentos serán introducidos dentro de las ecuaciones del barco y trabajan como acciones externas, los cuales podrán estabilizar los movimientos del barco. A continuación presentamos el procedimiento para evaluar estas fuerzas y momentos debido al tanque.

De la Segunda Ley de Newton (ver Ecuación 3.3), la fuerza ejercida sobre cualquier volumen diferencial del fluido debido a las fuerzas superficiales (fuerzas debido a la presión y a las paredes del tanque) será igual a la fuerza debida a la aceleración absoluta menos la fuerza del peso:

$$dF_{\text{pressao}} + dF_{\text{paredes}} = dF_{\text{acel}} = (a_A + g\bar{g}_u)dm_t \quad (3.68)$$

Donde, recordemos (conforme la Ecuación 3.16)

$$\bar{g}_u = -\text{sen}\theta i + \text{sen}\phi \cos\theta j + \cos\phi \cos\theta k .$$

En la Ecuación (3.68) se ve que la fuerza del peso pasa para el otro lado de la igualdad con signo cambiado. De la Tercera Ley de Newton, la fuerza ejercida sobre el barco debido al volumen diferencial será dada por:

$$dF_{\text{tanque}} = -dF_{\text{acel}} \quad (3.69)$$

$$dF_{\text{tanque}} = -(\mathbf{a}_A + g\vec{g}_u)dm_t \quad (3.70)$$

Donde  $dm_t = \rho_t dVol$  es la masa del volumen diferencial. Integrando la ecuación (3.70) a lo largo de los reservorios y de la tubería, de la misma forma como fue hecho en los Ítems 3.2.1, 3.2.2 y 3.2.3, se obtiene la fuerza ejercida sobre el barco:

$$F_{\text{tanque}} = X_{ta}i + Y_{ta}j + Z_{ta}k \quad (3.71)$$

Donde:

$$X_{ta} = -\rho_t A_r \{C_1[-g \sin \theta + \dot{u} + qw - rv - L_x(q^2 + r^2)] + 2B_w(\dot{r} - pq)Z - C_2(\dot{q} + pr) - 4(B_w r + qZ)\dot{Z}\} \quad (3.72)$$

$$Y_{ta} = -\rho_t A_r \{C_1[g \sin \phi \cos \theta + \dot{v} + ru - pw + L_x(\dot{r} + pq)] + 4pZ\dot{Z} + C_2(\dot{p} - qr) + 2B_w(p^2 + r^2)Z + 2B_w\ddot{Z}\} \quad (3.73)$$

$$Z_{ta} = -\rho_t A_r \{C_1[g \cos \phi \cos \theta + \dot{w} + pv - qu - L_x(\dot{q} - pr)] + 4B_w p\dot{Z} + C_2(p^2 + q^2) - 2B_w(\dot{p} + qr)Z - 2Z\ddot{Z}\} \quad (3.74)$$

Donde:

$$\tilde{B}_w = \frac{B_w}{R}, \quad C_1 = 2(H_r + \tilde{B}_w) \quad \text{y} \quad C_2 = L_z^2 - H_2^2 - Z^2 + 2L_z \tilde{B}_w. \quad (3.75)$$



En seguida calculamos el momento ejercido por la fuerza diferencial en relación al ponto O:

$$dM_{\text{tanque}} = r_B \times dF_{\text{tanque}} \quad (3.76)$$

$$dM_{\text{tanque}} = -r_B \times (a_A + g\bar{g}_u) dm_t \quad (3.77)$$

Se integra la Ecuación (3.77) a lo largo de los reservorios y de la tubería. Así, el momento aplicado al barco debido al movimiento de fluido dentro del tanque será:

$$M_{\text{tanque}} = K_{ia}i + M_{ia}j + N_{ia}k \quad (3.78)$$

Donde:

$$\begin{aligned} K_{ia} = & -\rho_t A_r \{ 2B_w (H_r + L_z) \ddot{Z} + 4H_2 p Z \dot{Z} + 1/3 B_w^2 (C_1 + 4H_r) (\dot{p} + qr) \\ & - 2B_w [g \cos \phi \cos \theta + \dot{w} + pv - qu - L_x (\dot{q} - pr) + H_2 (q^2 - r^2)] Z \\ & + 2/3 (3\tilde{B}_w L_z^2 + 3H_2^2 H_r - 3H_2 Z^2 + 3H_2 H_r^2 + H_r^3) (\dot{p} - qr) \\ & + C_2 [g \sin \phi \cos \theta + \dot{v} - pw + ru + L_x (\dot{r} + pq)] \} \end{aligned} \quad (3.79)$$

$$\begin{aligned} M_{ia} = & -\rho_t A_r \{ 2L_x Z \ddot{Z} + 4(H_2 q Z + B_w L_z r - B_w L_x p) \dot{Z} \\ & - L_x C_1 [g \cos \phi \cos \theta + \dot{w} - qu + pv - L_x (\dot{q} - pr)] \\ & + 2/3 (3\tilde{B}_w L_z^2 + 3H_2^2 H_r - 3H_2 Z^2 + 3H_2 H_r^2 + H_r^3) (\dot{q} + pr) \\ & - 2B_w H_2 (\dot{r} - pq) Z + 2B_w L_x (\dot{p} + qr) Z \\ & - C_2 [-g \sin \theta + \dot{u} - rv + qw + L_x (p^2 - r^2)] \} \end{aligned} \quad (3.80)$$

$$\begin{aligned}
N_{ia} = & -\rho_r A_r \{ 2L_x B_w \ddot{Z} + 4(L_x pZ - B_w H_r q) \dot{Z} + 2/3 B_w^2 (\ddot{B}_w + 3H_r)(\dot{r} - pq) \\
& + 2B_w [-g \sin \theta + \dot{u} - rv + qw + L_x (p^2 - q^2) - H_2 (\dot{q} + pr)] Z \\
& + C_2 L_x (\dot{p} - qr) + 2C_1 L_x [g \sin \phi \cos \theta + \dot{v} + ru - pw + L_x (\dot{r} + pq)] \\
& + 2B_w L_x (p^2 + r^2) Z \}
\end{aligned} \quad (3.81)$$

Aplicando el mismo cambio de variables utilizado para desarrollar la Ecuación (3.67), podemos representar las fuerzas y momentos debido al tanque, en los grados de libertad de arfada, rolo y cabeceo, de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
Z_{ia} = & Z_{\tau z} \ddot{z} + Z_{\tau \theta} \ddot{\theta} \\
& + Z_{\dot{\phi} \dot{\tau}} \dot{\phi} \dot{\tau} + Z_{\tau \dot{\phi} \dot{\phi}} \dot{\phi}^2 + Z_{\tau \dot{\theta} \dot{\theta}} \dot{\theta}^2 + Z_{\tau \phi \theta} \cos \phi \cos \theta + Z_{\dot{\phi} \tau} \ddot{\phi} \tau + Z_{\tau \tau} \tau \ddot{\tau} \\
& + Z_{\dot{\phi} \dot{\phi} \tau \tau} \dot{\phi}^2 \tau^2 + Z_{\dot{\theta} \dot{\theta} \tau \tau} \dot{\theta}^2 \tau^2
\end{aligned} \quad (3.82)$$

$$\begin{aligned}
K_{ia} = & K_{\tau} \ddot{\tau} + K_{\tau \dot{\phi}} \ddot{\phi} + K_{\dot{z} \tau} \ddot{z} \tau + K_{\dot{\theta} \tau} \ddot{\theta} \tau + K_{\tau \dot{z} \dot{\phi}} \dot{z} \dot{\phi} + K_{\tau \dot{\phi} \dot{\theta}} \dot{\phi} \dot{\theta} + K_{\tau \phi \theta} \sin \phi \cos \theta + \\
& K_{\dot{\theta} \dot{\theta} \tau} \dot{\theta}^2 \tau + K_{\dot{\phi} \tau \tau} \ddot{\phi} \tau^2 + K_{\dot{\phi} \tau \tau} \dot{\phi} \tau \dot{\tau} + K_{\phi \theta \tau} \cos \phi \cos(\theta) \tau + \\
& K_{\phi \theta \tau \tau} \sin \phi \cos(\theta) \tau^2 + K_{\dot{z} \dot{\phi} \tau \tau} \dot{z} \dot{\phi} \tau^2 + K_{\dot{\phi} \dot{\theta} \tau \tau} \dot{\phi} \dot{\theta} \tau^2
\end{aligned} \quad (3.83)$$

$$\begin{aligned}
M_{ia} = & M_{\tau z} \ddot{z} + M_{\tau \theta} \ddot{\theta} + M_{\tau \theta} \sin \theta \\
& + M_{\dot{\phi} \tau} \ddot{\phi} \tau + M_{\dot{\phi} \tau} \dot{\phi} \dot{\tau} + M_{\tau \dot{\phi} \dot{\phi}} \dot{\phi}^2 + M_{\tau \dot{z} \dot{\theta}} \dot{z} \dot{\theta} + M_{\tau \phi \theta} \cos \phi \cos \theta + M_{\tau \tau} \tau \ddot{\tau} \\
& + M_{\dot{\theta} \tau \tau} \ddot{\theta} \tau \tau + M_{\dot{\theta} \tau \tau} \dot{\theta} \tau \dot{\tau} + M_{\theta \tau \tau} \sin \theta \tau^2 + M_{\dot{\phi} \dot{\theta} \tau} \dot{\phi} \dot{\theta} \tau \\
& + M_{\dot{\phi} \dot{\phi} \tau \tau} \dot{\phi}^2 \tau^2 + M_{\dot{\theta} \dot{z} \tau \tau} \dot{\theta} \dot{z} \tau^2
\end{aligned} \quad (3.84)$$

Donde cada coeficiente es definido en función de la orden de las variables. Estas variables pueden ser encontradas en las Tablas 3.2: (a), (b), (c),

(d). Así, podemos ver que en las Ecuaciones (3.82) a la (3.84) encontramos términos de hasta cuarta orden. Además, se debe indicar que en esta nomenclatura, en los coeficientes que incluyen como subíndice la variable  $\tau$  a la derecha de las variables  $z, \phi$  o  $\theta$ , representa un grado más de libertad. Si  $\tau$  está en el lado izquierdo, significa que ese coeficiente está relacionado con el tanque, pero no representa un grado de libertad adicional.

**Tabla 3.2 (a) Coeficientes de Primera Orden de las Fuerzas y Momentos debido al tanque en Arfada, Rolido y Cabeceo.**

Arfada	Rolido	Cabeceo
<b>Primera Orden</b>		
$Z_{\dot{\tau}} = 0$	$K_{\dot{\tau}} = 2\rho_t A_r B_w^2 (L_z + H_r)$	$M_{\dot{\tau}} = 0$
$Z_{\tau\dot{z}} = \rho_t A_r C_1$	$K_{\tau\dot{z}} = 0$	$M_{\tau\dot{z}} = -\rho_t A_r L_x C_1$
$Z_{\tau\ddot{\phi}} = 0$	$K_{\tau\ddot{\phi}} = 2\rho_t A_r [\tilde{B}_w L_z^2 + H_2^2 H_r + H_2 H_r^2 + H_r^3 / 3 + B_w^2 (C_1 + 4H_r) / 6]$	$M_{\tau\ddot{\phi}} = 0$
$Z_{\tau\dot{\theta}} = 0$	$K_{\tau\dot{\theta}} = 0$	$M_{\tau\dot{\theta}} = \rho_t A_r g (L_z^2 - H_2^2 + 2L_z \tilde{B}_w)$
$Z_{\tau\ddot{\theta}} = -\rho_t A_r C_1 L_x$	$K_{\tau\ddot{\theta}} = 0$	$M_{\tau\ddot{\theta}} = 2\rho_t A_r (\tilde{B}_w L_z^2 + H_2^2 H_r + H_2 H_r^2 + H_r^3 / 3 + L_x^2 C_1 / 2)$

**Tabla 3.2 (b) Coeficientes de Segunda Orden de las Fuerzas y Momentos debido al tanque en Arfada, Rolido y Cabeceo.**

Arfada	Rolido	Cabeceo
<b>Segunda Orden</b>		
$Z_{\tau\ddot{\tau}} = -2\rho_t A_r B_w^2$	$K_{\tau\ddot{\tau}} = 0$	$M_{\tau\ddot{\tau}} = 2\rho_t A_r B_w^2 L_x$
$Z_{\ddot{z}\tau} = 0$	$K_{\ddot{z}\tau} = -2\rho_t A_r B_w^2$	$M_{\ddot{z}\tau} = 0$
$Z_{\ddot{\phi}\tau} = -2\rho_t A_r B_w^2$	$K_{\ddot{\phi}\tau} = 0$	$M_{\ddot{\phi}\tau} = 2\rho_t A_r B_w^2 L_x$
$Z_{\ddot{\theta}\tau} = 0$	$K_{\ddot{\theta}\tau} = 2\rho_t A_r B_w^2 L_x$	$M_{\ddot{\theta}\tau} = 0$
$Z_{\phi\ddot{z}} = 4\rho_t A_r B_w^2$	$K_{\phi\ddot{z}} = 0$	$M_{\phi\ddot{z}} = -4\rho_t A_r B_w^2 L_x$
$Z_{\tau\phi\dot{\phi}} = \rho_t A_r (L_z^2 - H_2^2 + 2L_z \tilde{B}_w)$	$K_{\tau\phi\dot{\phi}} = 0$	$M_{\tau\phi\dot{\phi}} = -\rho_t A_r (L_z^2 - H_2^2 + 2L_z \tilde{B}_w)$
$Z_{\tau\dot{\theta}\dot{\theta}} = \rho_t A_r (L_z^2 - H_2^2 + 2L_z \tilde{B}_w)$	$K_{\tau\dot{\theta}\dot{\theta}} = 0$	$M_{\tau\dot{\theta}\dot{\theta}} = 0$
$Z_{\tau\phi\theta} = \rho_t A_r C_1 g$ **	$K_{\tau\phi\theta} = \rho_t A_r g (L_z^2 - H_2^2 + 2L_z \tilde{B}_w)$ **	$M_{\tau\phi\theta} = \rho_t A_r L_x C_1 g$ **
$Z_{\tau\dot{z}\dot{\phi}} = 0$	$K_{\tau\dot{z}\dot{\phi}} = -\rho_t A_r (L_z^2 - H_2^2 + 2L_z \tilde{B}_w)$	$M_{\tau\dot{z}\dot{\phi}} = 0$
$Z_{\tau\dot{\phi}\dot{\theta}} = 0$	$K_{\tau\dot{\phi}\dot{\theta}} = \rho_t A_r L_x (L_z^2 - H_2^2 + 2L_z \tilde{B}_w)$	$M_{\tau\dot{\phi}\dot{\theta}} = 0$
$Z_{\tau\dot{z}\dot{\theta}} = 0$	$K_{\tau\dot{z}\dot{\theta}} = 0$	$M_{\tau\dot{z}\dot{\theta}} = -\rho_t A_r (L_z^2 - H_2^2 + 2L_z \tilde{B}_w)$

\*\* Estos coeficientes cambian para primera orden cuando las fuerzas y momentos son lineales.

**Tabla 3.2 (c) Coeficientes de Tercera Orden de las Fuerzas y Momentos debido al tanque en Arfada, Rolido y Cabeceo.**

Arfada	Rolido	Cabeceo
<b>Tercería Orden</b>		
$Z_{\theta\tau\tau} = 0$	$K_{\theta\tau\tau} = 0$	$M_{\theta\tau\tau} = \rho_t A_r B_w^2 g$
$Z_{\dot{\theta}\tau\dot{\tau}} = 0$	$K_{\dot{\theta}\tau\dot{\tau}} = 0$	$M_{\dot{\theta}\tau\dot{\tau}} = 4\rho_t A_r B_w^2 H_2$
$Z_{\ddot{\theta}\tau\tau} = 0$	$K_{\ddot{\theta}\tau\tau} = 0$	$M_{\ddot{\theta}\tau\tau} = -2\rho_t A_r B_w^2 H_2$
$Z_{\dot{\theta}\dot{\theta}\tau} = 0$	$K_{\dot{\theta}\dot{\theta}\tau} = -2\rho_t A_r B_w^2 H_2$	$M_{\dot{\theta}\dot{\theta}\tau} = 0$
$Z_{\phi\tau\dot{\tau}} = 0$	$K_{\phi\tau\dot{\tau}} = 4\rho_t A_r B_w^2 H_2$	$M_{\phi\tau\dot{\tau}} = 0$
$Z_{\phi\theta\tau} = 0$	$K_{\phi\theta\tau} = -2\rho_t A_r B_w^2 g$ **	$M_{\phi\theta\tau} = 0$
$Z_{\dot{\phi}\dot{\theta}\tau} = 0$	$K_{\dot{\phi}\dot{\theta}\tau} = 0$	$M_{\dot{\phi}\dot{\theta}\tau} = 2\rho_t A_r B_w^2 H_2$
$Z_{\ddot{\phi}\tau\tau} = 0$	$K_{\ddot{\phi}\tau\tau} = -2\rho_t A_r B_w^2 H_2$	$M_{\ddot{\phi}\tau\tau} = 0$

\*\* Este coeficiente cambia para primera orden cuando las fuerzas y momentos son lineales.

**Tabla 3.2 (d) Coeficientes de Cuarta Orden de las Fuerzas y Momentos debido al tanque en Arfada, Rolido y Cabeceo.**

Arfada	Rolido	Cabeceo
<b>Cuarta Orden</b>		
$Z_{\dot{\phi}\dot{\phi}\tau\tau} = -\rho_t A_r B_w^2$	$K_{\dot{\phi}\dot{\phi}\tau\tau} = 0$	$M_{\dot{\phi}\dot{\phi}\tau\tau} = \rho_t A_r B_w^2 L_x$
$Z_{\dot{\theta}\dot{\theta}\tau\tau} = -\rho_t A_r B_w^2$	$K_{\dot{\theta}\dot{\theta}\tau\tau} = 0$	$M_{\dot{\theta}\dot{\theta}\tau\tau} = 0$
$Z_{z\dot{\phi}\tau\tau} = 0$	$K_{z\dot{\phi}\tau\tau} = \rho_t A_r B_w^2$	$M_{z\dot{\phi}\tau\tau} = 0$
$Z_{\phi\theta\tau\tau} = 0$	$K_{\phi\theta\tau\tau} = -\rho_t A_r B_w^2 g$ **	$M_{\phi\theta\tau\tau} = 0$
$Z_{\dot{\phi}\dot{\theta}\tau\tau} = 0$	$K_{\dot{\phi}\dot{\theta}\tau\tau} = -\rho_t A_r B_w^2 L_x$	$M_{\dot{\phi}\dot{\theta}\tau\tau} = 0$
$Z_{\dot{\theta}\dot{z}\tau\tau} = 0$	$K_{\dot{\theta}\dot{z}\tau\tau} = 0$	$M_{\dot{\theta}\dot{z}\tau\tau} = \rho_t A_r B_w^2$

\*\* Este coeficiente cambia para tercera orden cuando las fuerzas y momentos son lineales.

### 3.2.6 Ecuación Lineal del Tanque

Para evaluar las características dinámicas de la ecuación del tanque linealizamos la Ecuación (3.67), teniendo en consideración que el barco puede moverse en arfada, rolado y cabeceo; eliminamos las no linealidades y asumimos la hipótesis de pequeños ángulos,  $\cos \phi \approx \cos \theta \approx 1$ ,  $\sin \phi \approx \phi$ , obteniendo la siguiente ecuación lineal:

$$T_{\ddot{z}} \ddot{z} + T_{\dot{z}} \dot{z} + T_{\phi\theta\tau} \tau = -(T_{\phi\theta} \phi + T_{\ddot{\phi}} \ddot{\phi}) \quad (3.85)$$

Las fuerzas y momentos debido al tanque también pueden ser linealizados, de forma similar a la ecuación del tanque, obteniéndose las siguientes expresiones:

$$Z_{ta} = Z_{\tau\ddot{z}} \ddot{z} + Z_{\tau\ddot{\theta}} \ddot{\theta} + Z_{\tau\phi\theta} \quad (3.86)$$

$$K_{ta} = K_{\ddot{z}} \ddot{z} + K_{\tau\ddot{\phi}} \ddot{\phi} + K_{\tau\phi\theta} \phi + K_{\phi\theta\tau} \tau \quad (3.87)$$

$$M_{ta} = M_{\tau\ddot{z}} \ddot{z} + M_{\tau\ddot{\theta}} \ddot{\theta} + M_{\tau\theta} \theta + M_{\tau\phi\theta} \quad (3.88)$$

Aquí se debe ver que debido a la hipótesis de pequeños ángulos, los coeficientes no-lineales  $Z_{\tau\phi\theta}$ ,  $K_{\tau\phi\theta}$ ,  $K_{\phi\theta\tau}$ ,  $M_{\tau\phi\theta}$  pasaron a participar de términos lineales.

Un parámetro importante que será analizado en el Capítulo 4 es el amortiguamiento del tanque. Para obtener una evaluación comparativa precisamos adimensionalizar este coeficiente. Así, a partir de la Ecuación (3.85) podemos adimensionalizar el coeficiente de amortiguamiento  $B_{\tau\tau}$ , conforme es presentado por Lloyd, 1989:

$$\eta_t = \frac{T_{\dot{\tau}}}{2\sqrt{T_{\dot{\tau}}T_{\phi\theta\tau}}} = \frac{B_{\tau\tau}}{2\sqrt{gW_r\left(\frac{B_w}{H_d} - \frac{H_r}{W_r}\right)}} \quad (3.89)$$

Donde  $\eta_t$  es también conocido como coeficiente de decaimiento, el cual puede ser evaluado experimentalmente utilizando un modelo del tanque fijado en una plataforma de ensayos.

Otra característica importante a ser analizada es la frecuencia natural del tanque  $\omega_t$ . A partir de la Ecuación (3.85) puede aplicarse la definición de la frecuencia natural de un sistema dinámico encontrándose que la frecuencia natural del tanque es:

$$\omega_t = \sqrt{\frac{T_{\phi\theta\tau}}{T_{\dot{\tau}}}} = \sqrt{\frac{g}{\frac{W_r B_w}{H_d} - H_r}} \quad (3.90)$$

En esta Ecuación (3.90) es importante observar los parámetros geométricos de los cuales depende la frecuencia natural  $\omega_t$ . Así, en la práctica, cuando el tanque ya esté construido y se tenga la necesidad de cambiar la frecuencia natural del tanque, el único parámetro que puede modificarse es la altura del fluido en los reservorios ( $H_r$ ).

Finalmente, otro parámetro importante la ser analizado es la masa del fluido dentro del tanque. Esta masa será evaluada, en forma porcentual, en relación a la masa del barco ( $m$ ). Se puede ver en la Figura 3.2 que la masa del fluido dentro del tanque puede ser definida como:

$$m_t = 2\rho_t L_t (B_w H_d + H_r W_r) \quad (3.91)$$

### 3.3 Movimiento del Barco en Olas

La respuesta del barco moviéndose en un fluido, que además tiene el efecto de las olas, es un fenómeno muy complejo debido a que contiene la interacción entre la dinámica del barco, la hidrodinámica del fluido, la coexistencia entre dos medios diferentes, fluido y aire, y el efecto adicional de las olas. Utilizando la Teoría de las Fajas (ver Lloyd, 1989), pueden obtenerse los coeficientes hidrodinámicos de las ecuaciones diferenciales, a nivel lineal, que generan comportamiento muy semejante al comportamiento real del barco. Además, es bien conocido que el comportamiento real del barco es no lineal, por eso serán utilizados términos no lineales en el



amortiguamiento de rolo, en la restauración entre los movimientos acoplados de arfada, rolo y cabeceo y en la restauración adicional debido al paso de la ola.

La formulación presentada a continuación representa los movimientos del barco considerando las siguientes hipótesis:

- a. Casco intacto.
- b. Movimientos del barco como cuerpo rígido.
- c. Barco moviéndose con velocidad de avance constante.
- d. Olas incidentes longitudinales regulares correspondientes a las descritas por la Teoría Lineal de Olas.
- e. Emersión de la proa y popa asociada a la ocurrencia de cargas de *slamming* no consideradas.
- f. Efecto de agua en la cubierta despreciable.

A continuación se define la frecuencia de encuentro  $\omega_e$  como la frecuencia con la cual el barco, que se mueve a velocidad constante  $U$ , encuentra las olas de frecuencia  $\omega_w$  y ángulo de incidencia  $\chi$ . Esta frecuencia de encuentro tiene influencia directa sobre los movimientos del barco. Existe la siguiente relación entre las frecuencias de encuentro y de la ola:

$$\omega_e = \omega_w - \frac{U}{g} \omega_w^2 \cos(\chi) \quad (3.92)$$

En el caso de olas longitudinales y mar de proa ( $\chi = 180^\circ$ ), la Ecuación (3.92) se simplifica:

$$\omega_e = \omega_w + \frac{U}{g} \omega_w^2 \quad (3.93)$$

Otro parámetro importante es la ecuación de la superficie de la ola, que segundo la Teoría Lineal de Airy es definida por:

$$\zeta(x, y, t, \chi) = A_w \text{Cos}[kx \text{Cos}(\chi) + ky \text{Sen}(\chi) - \omega_e t] \quad (3.94)$$

Donde:

- $A_w$  - Amplitud de la ola;
- $k$  - Número de ola, dado por:  $k = \frac{\omega_w^2}{g} = \frac{2\pi}{L_w}$ ;
- $L_w$  - Longitud de la ola

Para olas longitudinales y mar de proa, la ecuación de la superficie de la ola quedará así:

$$\zeta(x, t) = A_w \text{Cos}[kx + \omega_e t] \quad (3.95)$$

### 3.3.1 Ecuaciones Lineales del Comportamiento del Barco en Olas

A continuación presentamos el sistema de ecuaciones diferenciales que representa el movimiento del barco en olas con tres grados de libertad; arfada, rolido

y cabeceo respectivamente. La nomenclatura es la misma empleada por Rodriguez (2004):

$$\begin{aligned}
 (m + Z_{\ddot{z}})\ddot{z} + Z_{\dot{z}}\dot{z} + Z_z z + Z_{\ddot{\theta}}\ddot{\theta} + Z_{\dot{\theta}}\dot{\theta} + Z_{\theta}\theta &= Z_w(t) \\
 (J_{xx} + K_{\ddot{\phi}})\ddot{\phi} + K_{\dot{\phi}}\dot{\phi} + K_{\phi}\phi &= K_w(t) \\
 M_{\ddot{z}}\ddot{z} + M_{\dot{z}}\dot{z} + M_z z + (J_{yy} + M_{\ddot{\theta}})\ddot{\theta} + M_{\dot{\theta}}\dot{\theta} + M_{\theta}\theta &= M_w(t)
 \end{aligned}
 \tag{3.96}$$

Donde:

$m$ : masa del barco

$J_{xx}, J_{yy}$ : inercias de masa del barco referida a los ejes  $x$  e  $y$ , respectivamente.

$Z_{\ddot{z}}, Z_{\ddot{\theta}}, K_{\ddot{\phi}}, M_{\ddot{\theta}}, M_{\ddot{z}}$ : términos de masa adicional

$Z_{\dot{z}}, Z_{\dot{\theta}}, K_{\dot{\phi}}, M_{\dot{\theta}}, M_{\dot{z}}$ : términos de amortiguamientos

$Z_z, Z_{\theta}, K_{\phi}, M_{\theta}, M_z$ : términos de restauración

$Z_w, K_w, M_w$  excitación externa debido a la ola, para los movimientos de arfada, rolido y cabeceo, respectivamente.

Se puede ver en la Ecuación (3.96) que las ecuaciones de arfada y cabeceo están mutuamente acopladas, en cuanto que la ecuación de rolido es independiente de ellas.

Es interesante analizar como se modifica la Ecuación (3.96) cuando se considera el tanque acoplado linealmente. Así, adicionamos las fuerzas y momentos

debidos al tanque representados en las Ecuaciones (3.86) hasta (3.88) y consideramos la Ecuación (3.85), llegando al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
(m + Z_{\ddot{z}})\ddot{z} + Z_{\dot{z}}\dot{z} + Z_z z + Z_{\ddot{\theta}}\ddot{\theta} + Z_{\dot{\theta}}\dot{\theta} + Z_{\theta}\theta + Z_{\tau\ddot{z}}\ddot{z} + Z_{\tau\dot{\theta}}\dot{\theta} + Z_{\tau\phi\theta} &= Z_w(t) \\
(J_{xx} + K_{\ddot{\phi}})\ddot{\phi} + K_{\dot{\phi}}\dot{\phi} + K_{\phi}\phi + K_{\ddot{\tau}}\ddot{\tau} + K_{\phi\theta\tau}\tau + K_{\tau\ddot{\phi}}\ddot{\phi} + K_{\tau\phi\theta}\phi &= K_w(t) \\
(J_{yy} + M_{\ddot{\theta}})\ddot{\theta} + M_{\dot{\theta}}\dot{\theta} + M_{\theta}\theta + M_{\ddot{z}}\ddot{z} + M_{\dot{z}}\dot{z} + M_z z + M_{\tau\ddot{\theta}}\ddot{\theta} + M_{\tau\theta}\theta + M_{\tau\ddot{z}}\ddot{z} + M_{\tau\phi\theta} &= M_w(t) \\
T_{\ddot{\tau}}\ddot{\tau} + T_{\dot{\tau}}\dot{\tau} + T_{\phi\theta\tau}\tau + T_{\ddot{\phi}}\ddot{\phi} + T_{\phi\theta}\phi &= 0
\end{aligned} \tag{3.97}$$

Podemos ver en la Ecuación (3.97) que la ecuación del tanque está directamente acoplada con rolo y que debido al tanque aparecen términos inerciales en los modos de arfada, rolo y cabeceo. Notamos también que el tanque introduce en las ecuaciones de arfada y cabeceo términos constantes debido al peso del fluido dentro del tanque ( $Z_{\tau\phi\theta}, M_{\tau\phi\theta}$ ).

Los acoplamientos lineales entre el rolo y el tanque pueden ser observados en la siguiente forma matricial:

$$\begin{bmatrix} J_{xx} + K_{\ddot{\phi}} + K_{\tau\ddot{\phi}} & K_{\ddot{\tau}} \\ T_{\ddot{\phi}} & T_{\ddot{\tau}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\phi} \\ \ddot{\tau} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{\dot{\phi}} & 0 \\ 0 & K_{\dot{\tau}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\tau} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{\phi} + K_{\tau\phi\theta} & K_{\phi\theta\tau} \\ T_{\phi\theta} & T_{\phi\theta\tau} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi \\ \tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_w \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.98}$$

Aquí las matrices de inercia y restauración muestran claramente los acoplamientos entre rolo y el tanque.

### 3.3.2 Coeficientes Hidrodinámicos y las Fuerzas de Excitación:

La evaluación de los coeficientes de masa adicional y amortiguamiento, así como las fuerzas y momentos de excitación debido a las olas pueden obtenerse utilizando la Teoría Potencial bidimensional. Se asume que el potencial de velocidad que caracteriza el campo de velocidades en el contorno del barco está dividido en una parte permanente asociada a la velocidad de avance del barco y otra parte no permanente (en función del tiempo) asociada a las olas incidentes y al movimiento permanente del barco. Para el análisis de comportamiento en olas este potencial no permanente es más importante y puede ser dividido en tres componentes: potencial de ola incidente, potencial de ola de difracción y potencial de irradiación, siendo un potencial para cada grado de libertad del barco. Con la solución numérica de los correspondientes problemas de valor de contorno (PVC) puede obtenerse el potencial total, para luego aplicar la ecuación de Bernoulli y obtener las presiones en la superficie del casco, y con esto, las fuerzas actuando en el barco. Las acciones que derivan del potencial incidente y difractado corresponden a las **fuerzas y momentos de excitación**, y las acciones asociadas al potencial de irradiación corresponden a las **fuerzas y momentos hidrodinámicos**.

Las **fuerzas y momentos hidrodinámicos** son compuestas por partes proporcionales a la aceleración y a la velocidad, donde se definen los coeficientes de masa adicional y amortiguamiento. Para obtener esos coeficientes se utiliza la Teoría de las Fajas definida por Salvesen, Tuck y Faltinsen (1971), que modela el problema tridimensional complejo como si fuera la integración de problemas bidimensionales. Además mediante la Teoría de las

Fajas pueden ser también calculadas las fuerzas y momentos de excitación, las cuales son compuestas por dos partes: fuerzas de Froude-Krilov y de difracción.

Para el caso de olas regulares, las fuerzas de excitación para los movimientos de arfada, rolido y cabeceo son expresadas de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}Z(\chi, t) &= Z_{wo} \cos(\omega_e t + \alpha_{w3}) \\K(\chi, t) &= K_{wo} \cos(\omega_e t + \alpha_{w4}) \\M(\chi, t) &= M_{wo} \cos(\omega_e t + \alpha_{w5})\end{aligned}\tag{3.99}$$

### 3.3.3 Coeficientes de Amortiguamiento en Rolido

Como fue mencionado anteriormente, la Teoría Potencial es incapaz de representar adecuadamente los fenómenos de origen viscoso, reconocidamente relevantes en el caso del amortiguamiento en rolido. Conocidas esas limitaciones, los efectos viscosos fueron tratados separadamente, con la utilización de métodos semi-empíricos, que fueron obtenidos a partir de experimentos con modelos en escala reducida y algunos resultados analíticos.

La formulación de Ikeda, presentada por Himeno (1981), puede adecuarse a una gran variedad de formas de barcos, además de llevar en cuenta el efecto de la quilla de balance y de velocidad de avance. Considerando los fenómenos físicos envueltos en el amortiguamiento de rolido relacionados a las propiedades del flujo de fluido en torno del casco, el amortiguamiento en rolido

puede ser subdividido en cinco componentes principales, que son expresados de la siguiente manera:

$$B_{\phi} = B_D + B_F + B_E + B_L + B_{BK} \quad (3.100)$$

Donde:

$B_{\phi}$  : Amortiguamiento total en rolo

$B_D$  : Amortiguamiento de ola del casco si quilla de balance (*wave damping*).

$B_F$  : Amortiguamiento de fricción.

$B_E$  : Amortiguamiento por formación de vórtices (*eddy damping*).

$B_L$  : Amortiguamiento debido a sustentación (*lift damping*).

$B_{BK}$  : Amortiguamiento debido a las quillas de balance (*bilge keel damping*)

El amortiguamiento debido a la presencia de quillas de balance no será evaluado, debido a que está fuera del objetivo de este trabajo.

Los diferentes componentes del amortiguamiento posibilitan la determinación de un coeficiente de amortiguamiento para un movimiento oscilatorio forzado de rolo para una dada frecuencia y amplitud máxima de rolo

El momento de amortiguamiento no lineal en rolo es definido como:

$$B_{\phi} = B_1 \dot{\phi} + B_2 \dot{\phi} |\dot{\phi}| \quad (3.101)$$

En el Apéndice I son presentados los coeficientes  $B_1$  y  $B_2$ , obtenidos por el Método de Ikeda, para los barcos analizados en este trabajo.

### 3.3.4 Ecuaciones No-Lineales del Comportamiento del Barco en Olas

Debido a que el modelo lineal clásico representado en la ecuación (3.100) tiene limitaciones para reproducir algunos fenómenos físicos de la resonancia paramétrica, fueron desarrollados varios modelos matemáticos para reproducir eficientemente estos fenómenos. Uno de esos modelos, que se compara satisfactoriamente con resultados experimentales, es presentado por Rodríguez (2004), que desarrolla ecuaciones no-lineales para describir los acoplamientos entre arfada, rolido y cabeceo, incorporando términos no-lineales hasta tercera orden. A continuación presentamos este sistema de ecuaciones no lineales incluyendo, en el lado derecho de las ecuaciones, las fuerzas y momentos debido al movimiento del fluido dentro del tanque

$Z_{ta}, K_{ta}, M_{ta}$ , así:

$$\begin{aligned}
 (m + Z_{\ddot{z}})\ddot{z} + Z_{\dot{z}}\dot{z} + Z_{\ddot{\theta}}\ddot{\theta} + Z_{\dot{\theta}}\dot{\theta} + Z_z z + Z_{\theta}\theta + \frac{1}{2}Z_{zz}z^2 + \frac{1}{2}Z_{\phi\phi}\phi^2 + \frac{1}{2}Z_{\theta\theta}\theta^2 + Z_{z\theta}z\theta + \\
 \frac{1}{6}Z_{zzz}z^3 + \frac{1}{2}Z_{zz\theta}z^2\theta + \frac{1}{2}Z_{\phi\phi z}\phi^2 z + \frac{1}{2}Z_{\phi\phi\theta}\phi^2\theta + \frac{1}{2}Z_{\theta\theta z}\theta^2 z + \frac{1}{6}Z_{\theta\theta\theta}\theta^3 + \\
 Z_{\zeta z}(t)z + Z_{\zeta\theta}(t)\theta + Z_{\zeta\zeta z}(t)z + Z_{\zeta\zeta z}(t)z^2 + Z_{\zeta\zeta\theta}(t)\theta + Z_{\zeta z\theta}(t)z\theta + Z_{\phi\phi\zeta}(t)\phi^2 + \\
 Z_{\theta\theta\zeta}(t)\theta^2 = Z_w(t) + Z_{ta} \quad (3.102)
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& (J_{xx} + K_{\ddot{\phi}})\ddot{\phi} + K_{\dot{\phi}}\dot{\phi} + K_{\phi|\dot{\phi}}|\dot{\phi}| + K_{\phi}\phi + K_{z\phi}z\phi + K_{\phi\theta}\phi\theta + \\
& \quad \frac{1}{2}K_{zz\phi}z^2\phi + \frac{1}{6}K_{\phi\phi\phi}\phi^3 + \frac{1}{2}K_{\theta\theta\phi}\theta^2\phi + K_{z\phi\theta}z\phi\theta + \\
& K_{\zeta\phi}(t)\phi + K_{\zeta\zeta\phi}(t)\phi + K_{\zeta z\phi}(t)z\phi + K_{\zeta\phi\theta}(t)\phi\theta = K_w(t) + K_{ta} \quad (3.103)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (J_{yy} + M_{\ddot{\theta}})\ddot{\theta} + M_{\dot{\theta}}\dot{\theta} + M_{z\ddot{z}}\ddot{z} + M_{z\dot{z}}\dot{z} + M_{zz}z + M_{\theta}\theta + \frac{1}{2}M_{zzz}z^2 + \frac{1}{2}M_{\phi\phi}\phi^2 + \frac{1}{2}M_{\theta\theta}\theta^2 + M_{z\theta}z\theta + \\
& \quad \frac{1}{6}M_{zzz}z^3 + \frac{1}{2}M_{zz\theta}z^2\theta + \frac{1}{2}M_{\phi\phi z}\phi^2z + \frac{1}{2}M_{\phi\phi\theta}\phi^2\theta + \frac{1}{2}M_{\theta\theta z}\theta^2z + \frac{1}{6}M_{\theta\theta\theta}\theta^3 + \\
& M_{\zeta z}(t)z + M_{\zeta\theta}(t)\theta + M_{\zeta\zeta z}(t)z + M_{\zeta\zeta z}(t)z^2 + M_{\zeta\zeta\theta}(t)\theta + M_{\zeta z\theta}(t)z\theta + M_{\phi\phi\zeta}(t)\phi^2 + \\
& \quad M_{\theta\theta\zeta}(t)\theta^2 = M_w(t) + M_{ta} \quad (3.104)
\end{aligned}$$

En las Ecuaciones (3.102), (3.103) y (3.104) puede verse, además de los términos lineales, el término cuadrático en el amortiguamiento de rolido, el cual ayuda a reproducir eficientemente el amortiguamiento debido a los efectos viscosos.

Los términos de segunda y tercera orden en la restauración, así como los términos de restauración debido al paso de la ola, incorporan los acoplamientos dinámicos del rolido con arfada y cabeceo, los cuales son fundamentales para reproducir los efectos de la resonancia paramétrica (Neves y Rodriguez, 2004, Neves y Rodriguez, 2005).

### 3.4 Ecuaciones Acopladas del Sistema Barco-Tanque con Coeficientes de Cuarta Orden

Sustituimos las Ecuaciones (3.82), (3.83) y (3.84) dentro de las Ecuaciones (3.102), (3.103) y (3.104), respectivamente. Además, consideramos el barco en mar de proa. Entonces, para el movimiento de rolido, la excitación debido a las olas es nula  $K_w(t) = 0$ .

Finalmente, con estas consideraciones el sistema de cuatro ecuaciones no lineales que representa el sistema dinámico barco-tanque con cuatro grados de libertad queda así:

$$\begin{aligned}
 & (m + Z_{\dot{z}})\ddot{z} + Z_{z\dot{z}}\dot{z} + Z_{\dot{\theta}}\ddot{\theta} + Z_{\theta\dot{\theta}}\dot{\theta} + Z_{zz}z + Z_{\theta\theta}\theta + \frac{1}{2}Z_{zz}z^2 + \frac{1}{2}Z_{\phi\phi}\phi^2 + \frac{1}{2}Z_{\theta\theta}\theta^2 + Z_{z\theta}z\theta + \\
 & \frac{1}{6}Z_{zzz}z^3 + \frac{1}{2}Z_{zz\theta}z^2\theta + \frac{1}{2}Z_{\phi\phi\phi}\phi^3 + \frac{1}{2}Z_{\phi\phi\theta}\phi^2\theta + \frac{1}{2}Z_{\theta\theta\theta}\theta^3 + \frac{1}{6}Z_{\theta\theta\theta}\theta^3 + \\
 & Z_{\zeta z}(t)z + Z_{\zeta\theta}(t)\theta + Z_{\zeta\zeta}(t)z + \\
 & Z_{\zeta z}(t)z^2 + Z_{\zeta\zeta}(t)\theta + Z_{\zeta z\theta}(t)z\theta + Z_{\phi\phi\zeta}(t)\phi^2 + Z_{\theta\theta\zeta}(t)\theta^2 + \\
 & Z_{\tau z}\ddot{z} + Z_{\dot{\theta}}\ddot{\theta} + Z_{\dot{\phi}\tau}\dot{\phi}\dot{\tau} + Z_{\dot{\theta}\tau}\dot{\theta}\dot{\tau} + Z_{\tau\dot{\phi}}\dot{\phi}^2 + Z_{\tau\dot{\theta}}\dot{\theta}^2 + Z_{\tau\phi\theta}\cos\phi\cos\theta + Z_{\dot{\phi}\tau}\dot{\phi}\dot{\tau} + Z_{\dot{\theta}\tau}\dot{\theta}\dot{\tau} + \\
 & Z_{\phi\phi\tau\tau}\dot{\phi}^2\tau^2 + Z_{\theta\theta\tau\tau}\dot{\theta}^2\tau^2 = Z_w(t)
 \end{aligned} \tag{3.105}$$

$$\begin{aligned}
 & (J_{xx} + K_{\dot{\phi}})\ddot{\phi} + K_{\phi}\dot{\phi} + K_{\phi|\dot{\phi}}|\dot{\phi}| + K_{\phi}\phi + K_{z\phi}z\phi + K_{\phi\theta}\phi\theta + \\
 & \frac{1}{2}K_{zz\phi}z^2\phi + \frac{1}{6}K_{\phi\phi\phi}\phi^3 + \frac{1}{2}K_{\theta\theta\phi}\theta^2\phi + K_{z\phi\theta}z\phi\theta + \\
 & K_{\zeta\phi}(t)\phi + K_{\zeta\zeta}(t)\phi + K_{\zeta z\phi}(t)z\phi + K_{\zeta\phi\theta}(t)\phi\theta + \\
 & K_{\dot{\tau}}\ddot{\tau} + K_{\dot{\phi}\tau}\dot{\phi}\dot{\tau} + K_{z\tau}\ddot{z}\tau + K_{\dot{\theta}\tau}\dot{\theta}\dot{\tau} + K_{\tau z\dot{\phi}}z\dot{\phi} + K_{\tau\dot{\theta}}\dot{\theta}\dot{\tau} + K_{\tau\phi\theta}\sin\phi\cos\theta + \\
 & K_{\dot{\theta}\tau}\dot{\theta}^2\tau + K_{\dot{\phi}\tau\tau}\dot{\phi}\dot{\tau}^2 + K_{\dot{\phi}\tau\dot{\tau}}\dot{\phi}\dot{\tau}\dot{\tau} + K_{\phi\theta\tau}\cos\phi\cos(\theta)\tau +
 \end{aligned} \tag{3.106}$$

$$K_{\phi\theta\tau\tau}\text{sen}\phi\cos(\theta)\tau^2 + K_{z\dot{\phi}\tau\tau}\dot{z}\dot{\phi}\tau^2 + K_{\dot{\phi}\dot{\theta}\tau\tau}\dot{\phi}\dot{\theta}\tau^2 = 0$$

$$\begin{aligned} & (J_{yy} + M_{\ddot{\theta}})\ddot{\theta} + M_{\dot{\theta}}\dot{\theta} + M_{\ddot{z}}\ddot{z} + M_{\dot{z}}\dot{z} + M_z z + M_{\theta}\theta + \frac{1}{2}M_{zz}z^2 + \frac{1}{2}M_{\phi\phi}\phi^2 + \frac{1}{2}M_{\theta\theta}\theta^2 + M_{z\theta}z\theta + \\ & \frac{1}{6}M_{zzz}z^3 + \frac{1}{2}M_{zz\theta}z^2\theta + \frac{1}{2}M_{\phi\phi z}\phi^2 z + \frac{1}{2}M_{\phi\phi\theta}\phi^2\theta + \frac{1}{2}M_{\theta\theta z}\theta^2 z + \frac{1}{6}M_{\theta\theta\theta}\theta^3 + \\ & M_{\zeta z}(t)z + M_{\zeta\theta}(t)\theta + M_{\zeta\zeta z}(t)z + \\ & M_{\zeta zz}(t)z^2 + M_{\zeta\zeta\theta}(t)\theta + M_{\zeta z\theta}(t)z\theta + M_{\phi\phi\zeta}(t)\phi^2 + M_{\theta\theta\zeta}(t)\theta^2 + \\ & M_{\tau\ddot{z}}\ddot{z} + M_{\tau\ddot{\theta}}\ddot{\theta} + M_{\tau\theta}\text{sen}\theta + \\ & M_{\dot{\phi}\tau}\dot{\phi}\tau + M_{\dot{\theta}\tau}\dot{\theta}\tau + M_{\tau\dot{\phi}\dot{\phi}}\dot{\phi}^2 + M_{\tau\dot{z}\dot{\theta}}\dot{z}\dot{\theta} + M_{\tau\phi\theta}\cos\phi\cos\theta + M_{\tau\tau}\tau\dot{\tau} + \\ & M_{\ddot{\theta}\tau\tau}\ddot{\theta}\tau\tau + M_{\dot{\theta}\tau\tau}\dot{\theta}\tau\tau + M_{\theta\tau\tau}\text{sen}(\theta)\tau^2 + M_{\dot{\phi}\dot{\theta}\tau}\dot{\phi}\dot{\theta}\tau + \\ & M_{\dot{\phi}\dot{\phi}\tau\tau}\dot{\phi}^2\tau^2 + M_{\dot{\theta}\dot{z}\tau\tau}\dot{\theta}\dot{z}\tau^2 = M_w(t) \end{aligned} \quad (3.107)$$

$$\begin{aligned} & T_{\ddot{\tau}}\ddot{\tau} + T_{\dot{\tau}}\dot{\tau} + T_{\ddot{\phi}}\ddot{\phi} + T_{\ddot{z}\tau}\ddot{z}\tau + T_{\ddot{\theta}\tau}\ddot{\theta}\tau + T_{\phi\theta}\text{sen}\phi\cos\theta + T_{z\dot{\phi}}\dot{z}\dot{\phi} + T_{\dot{\phi}\dot{\theta}}\dot{\phi}\dot{\theta} + \\ & T_{\dot{\phi}\dot{\phi}\tau}\dot{\phi}^2\tau + T_{\dot{\theta}\dot{\theta}\tau}\dot{\theta}^2\tau + T_{\phi\theta\tau}\cos\phi\cos(\theta)\tau = 0 \end{aligned} \quad (3.108)$$

Se debe observar que los coeficientes  $Z_{\tau\phi\theta}$ ,  $K_{\tau\phi\theta}$ ,  $K_{\phi\theta\tau}$ ,  $K_{\phi\theta\tau\tau}$ ,  $M_{\tau\theta}$ ,  $M_{\tau\phi\theta}$  y  $M_{\theta\tau\tau}$  representan las influencias del peso del fluido dentro del tanque. Además, notamos que este sistema no lineal incluye términos de hasta cuarta orden debido a los acoplamientos del tanque con los otros movimientos. Este sistema será resuelto numéricamente y los resultados serán presentados en el Capítulo 4.

## **CAPÍTULO 4**

### **ANÁLISIS Y RESULTADOS**

En este capítulo se presentan los resultados numéricos obtenidos en este trabajo. Dos barcos pesqueros similares, Round - Stern (RS) y Transom Stern (TS) son utilizados para obtener las respuestas numéricas. Fue demostrado experimental y numéricamente que los dos barcos son propensos a la resonancia paramétrica, (Pérez et al., 2000, Neves et al., 2002). Inicialmente serán presentadas las respuestas de rolido sin tanque de estabilización.

En seguida será proyectado el tanque capaz de proporcionar una eficiente sintonía con el barco. Posteriormente, serán presentadas las respuestas de los barcos con tanque de estabilización y estas serán comparadas con las respuestas de los barcos sin tanque. Se variarán los diferentes parámetros del tanque con el objetivo de verificar como influyen sobre la resonancia paramétrica. Las respuestas presentadas serán para el movimiento de rolido con las olas incidiendo por la proa del barco.

#### **4.1 Generalidades**

Como fue presentado en el Capítulo 1, el objetivo del presente trabajo es disminuir el rolido paramétrico utilizando un tanque estabilizador pasivo tipo U. Para alcanzar este objetivo necesitamos inicialmente determinar y analizar las respuestas de los barcos sin tanque de estabilización, en diferentes condiciones de mar y velocidad de avance.

En general sabemos que los movimientos del barco pueden ser definidos linealmente por ecuaciones diferenciales ordinarias, siendo fácilmente resueltas en forma analítica, obteniendo resultados en función de la frecuencia. En tanto, para reproducir la dinámica de la resonancia paramétrica precisamos usar ecuaciones no lineales. Una de esas ecuaciones no lineales, comparadas satisfactoriamente con resultados experimentales, fue desarrollada por Rodríguez (2004) y presentada en el Capítulo 3. Estas ecuaciones no lineales no tienen soluciones analíticas conocidas, y para ser solucionadas debemos integrarlas numéricamente en función del tiempo. Así, en el presente trabajo fue utilizado un algoritmo de integración, basado en el método de Runge Kutta de 4a orden, para solucionar el sistema de ecuaciones diferenciales no lineales que representan los movimientos del barco en arfada, rolido y cabeceo, obteniéndose las soluciones en función del tiempo. Así pueden obtenerse las respuestas para un intervalo de frecuencias, a partir del régimen permanente de cada serie temporal. Una de las principales ventajas de obtener resultados numéricos, que representan los movimientos del barco, es que pueden ser analizadas otras zonas de inestabilidad para diferentes sintonías, con tiempo y costos muy menores cuando son comparados con los ensayos experimentales.

#### **4.2 Ensayos experimentales – resultados**

Es importante resaltar que los barcos RS y TS ya fueron ensayados experimentalmente con modelos reducidos en el Canal de Pruebas Hidrodinámicas de la Universidad Austral de Chile, con el objetivo de identificar algunas características dinámicas relacionadas con la resonancia paramétrica. Serán considerados aquí esos resultados experimentales para tenerlos como referencia al momento de obtener los resultados numéricos cuando consideramos el barco

trabajando sin tanque de estabilización. Debe indicarse que los resultados experimentales fueron realizados solamente para la sintonía  $\omega_e = 2\omega_{n4}$ , que es la primera región de inestabilidad, donde se ha mostrado gran posibilidad de encontrar resonancia paramétrica. Informaciones adicionales referentes a estos ensayos pueden ser encontrados en Pérez *et al.* (2000) y Neves *et al.* (2002). A continuación se presentan los resultados de los ensayos experimentales para los dos barcos en dos condiciones de carga, para diferentes velocidades y amplitudes de ola.

**Tabla 4.1**

**Resultados Experimentales: Barco RS, mar de proa, y  $\omega_e = 2\omega_{n4}$**

<b>GMt [m]</b>	<b>Fn</b>	<b>Aw [m]</b>	<b>Ww [rad/s]</b>	<b>Wave Slope = <math>H_w/L_w</math></b>	<b><math>\bar{\phi}</math> [deg]</b>
<b>We = 1.417 rad/s</b>					
0.34	0.10	0.59	1.203	1/36	7
		0.69		1/31	14
		0.84		1/25	30
	0.14	0.51	1.145	1/46	3
		0.80		1/29	20
		0.84		1/28	24
	0.20	0.75	1.075	1/36	5
		0.87		1/31	7
		0.96		1/28	17
	0.34	0.90	0.957	1/37	0
		1.02		1/33	5
	<b>We = 1.775 rad/s</b>				
0.54	0.10	0.48	1.460	1/30	10
		0.66		1/22	20
		0.90		1/16	32
	0.14	0.54	1.381	1/30	9
		0.66		1/25	18
		0.90		1/18	30
	0.20	0.48	1.286	1/39	5
		0.66		1/28	16
		0.90		1/21	20

		1.02		1/18	21
	0.34	0.90	1.131	1/27	0
		1.02		1/24	0

La Tabla 4.1 presenta los resultados de los ensayos experimentales del barco RS. Aquí se puede observar que, para los dos valores de GM y en todas las velocidades ensayadas, la amplitud del rolido paramétrico aumenta con la amplitud de ola. Y en la mayoría de los casos puede verse que el RS alcanza mayores valores de rolido paramétrico con el mayor GM=0.54m.

**Tabla 4.2**

**Resultados Experimentales: Barco TS, mar de proa, y  $\omega_r = 2 \omega_{n4}$**

<b>GMt</b> [m]	<b>Fn</b>	<b>Aw</b> [m]	<b>Ww</b> [rad/s]	<b>Wave Slope</b> $= H_w / L_w$	<b><math>\bar{\phi}</math></b> [deg]
<b>We = 1.717 rad/s</b>					
0.37	0.11	0.30	1.396	1/53	15
		0.66		1/24	27
	0.15	0.45	1.323	1/39	18
		1.02		1/17	28
	0.20	0.45	1.249	1/44	4
		0.60		1/33	19
	0.30	0.60	1.136	1/40	5
		0.78		1/31	38
<b>We = 1.968 rad/s</b>					
0.50	0.11	0.39	1.564	1/32	19
		0.63		1/20	22
		1.02		1/12	27
	0.15	0.39	1.477	1/36	2
		0.60		1/24	13
		1.08		1/13	16.5
	0.20	1.02	1.389	1/16	0
	0.30	1.02	1.257	1/19	0

Donde  $\bar{\phi}$  es el régimen permanente de las respuestas temporales en rolido.

Considerando los resultados experimentales del TS (Tabla 4.2) se puede observar las mismas tendencias de las respuestas, cuando son comparados el aumento del rolido paramétrico con la amplitud de ola.

Para obtener un mejor estudio de la resonancia paramétrica en función de la velocidad del barco, analizamos de la Tabla 4.1 las respuestas experimentales del RS para las dos condiciones de carga, manteniendo la amplitud de la ola constante.

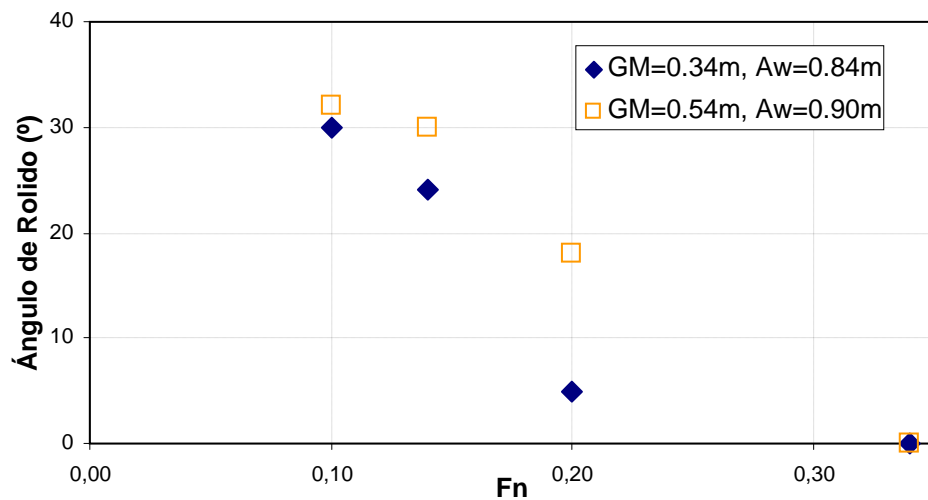


Figura 4.1 Barco RS: Respuesta en Rolido (experimental), sintonía ( $We=2Wn4$ ).

De la Figura 4.1 podemos ver que para una amplitud de ola constante, la amplitud del rolido paramétrico disminuye con la velocidad. Esta tendencia se mantiene para las dos condiciones de carga. Esto posiblemente es debido al amortiguamiento lineal ( $K_{\phi}$ ) que aumenta con la velocidad, aumentando la disipación de energía. La dependencia de este coeficiente con la velocidad y



frecuencia es presentada en el Apéndice I. Otra característica importante es que para una misma velocidad, la respuesta de rolido incrementa para el mayor GM.

Con ayuda de la Tabla 4.2 repetimos el procedimiento anterior, ahora para el TS. Así, presentamos las respuestas experimentales en dos condiciones de carga manteniendo la amplitud de ola constante y para diferentes números de Froude. Debemos señalar que con el objetivo de mantener la amplitud constante para diferentes velocidades y suponiendo que el rolido paramétrico aumenta con la amplitud de la ola, fueron interpoladas algunas amplitudes de rolido. Esta interpolación puede traer errores en las respuestas reales, por eso estas respuestas experimentales serán comparadas posteriormente con las respuestas numéricas obtenidas en el presente trabajo.

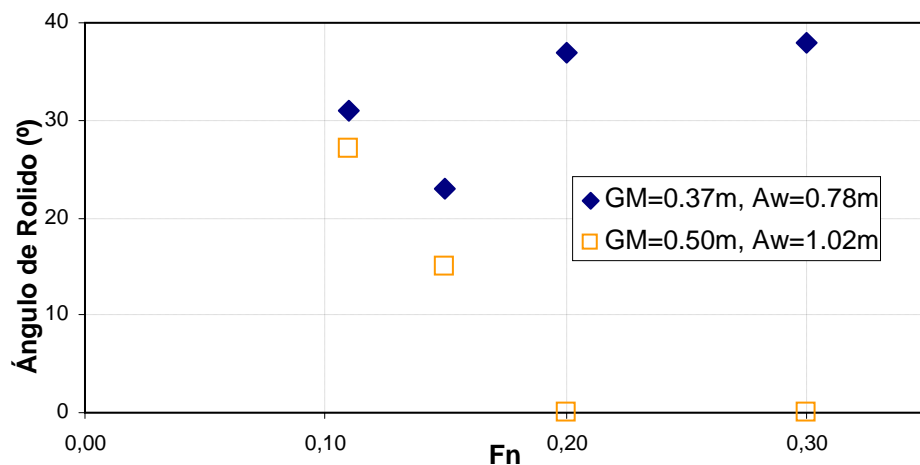


Figura 4.2 Barco TS: Respuesta en Rolido (experimental), sintonía ( $\omega_e = 2\omega_{n4}$ ).

En la Figura 4.2 se debe observar que con GM y amplitud de ola menor, se alcanza mayores amplitudes de rolido, esta tendencia es contraria al RS. Así también

se puede ver, para el  $GM= 0.50m$  (mayor), que la amplitud de rolo disminuye con el aumento de la velocidad. Esta tendencia se puede observar para todas las velocidades experimentadas. Ya para el  $GM=0.37m$  (menor) se mantiene la misma tendencia para bajas velocidades ( $Fn \leq 0.15$ ) y por el contrario, para altas velocidades el rolo paramétrico aumenta. Como veremos mas adelante, esta configuración no siempre se mantiene en todas las sintonías y las respuestas dependen de otros parámetros del sistema oscilatorio.

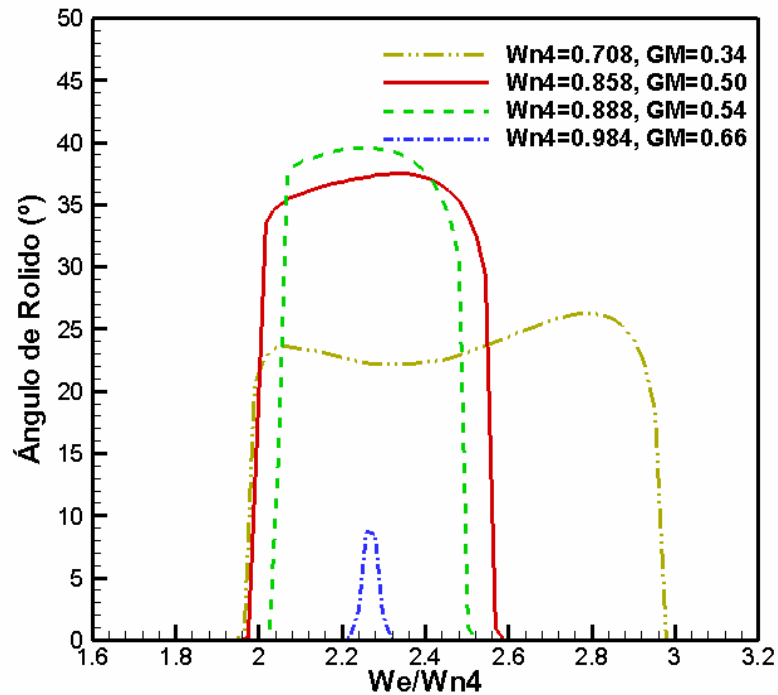
### **4.3 Respuestas de Rolido SIN Tanque de Estabilización**

A continuación presentamos los resultados numéricos para los barcos sin tanque de estabilización. Con la intención de comparar las respuestas en iguales condiciones, comenzamos las simulaciones numéricas para los barcos avanzando con  $Fn = 0.20$ .

#### **4.3.1 Efecto de la Frecuencia Natural de Rolido ( $\omega_{n4}$ )**

Cuando el barco modifica de masa, ya sea por el consumo de combustible el por variación de la carga, varía la posición del centro de gravedad del barco, varia el  $GM$  y consecuentemente varía la frecuencia natural de rolo. De ahí la importancia de analizar las respuestas de los barcos para diferentes condiciones de carga.

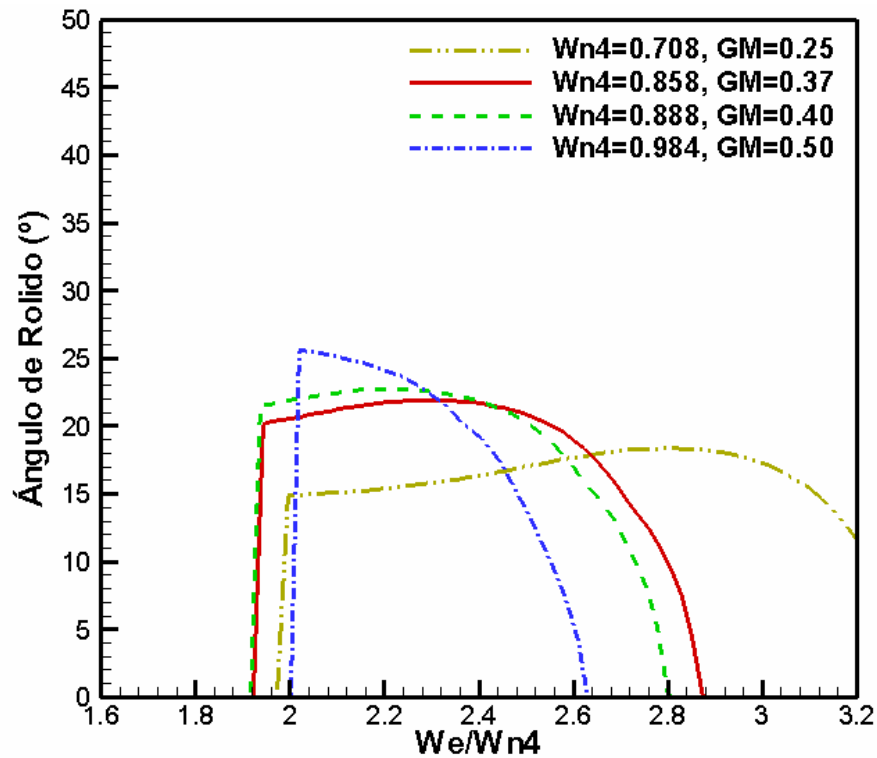
Para el barco RS obtenemos las respuestas, para amplitud de ola  $A_w = 0.69m$ , mostradas en la Figura 4.3 para diferentes GMs y frecuencias naturales de rolido.



*Figura 4.3 Respuestas de Rolido SIN tanque  
Barco RS:  $F_n=0.20$ , Ola:  $A_w=0.69m$ ,  $\kappa=180^\circ$*

Es interesante observar en la Figura 4.3 que las máximas respuestas no ocurren siempre para el menor GM, sin embargo la región de frecuencias que excitan el rolido paramétrico sea más amplia (ver respuesta para  $GM=0.34m$ ). Por el contrario, las mayores amplificaciones ocurren para el mayor GM en una región de frecuencias menor.

A continuación son presentadas las respuestas de rolido para el barco TS para las mismas condiciones de carga para una amplitud de ola de  $A_w = 0.60m$ , estas respuestas son presentadas en la Figura 4.4.



*Figura 4.4 Respuestas de Rolido SIN tanque  
Barco TS:  $Fn=0.20$ , Ola:  $A_w=0.60m$ ,  $\kappa_i=180^\circ$*

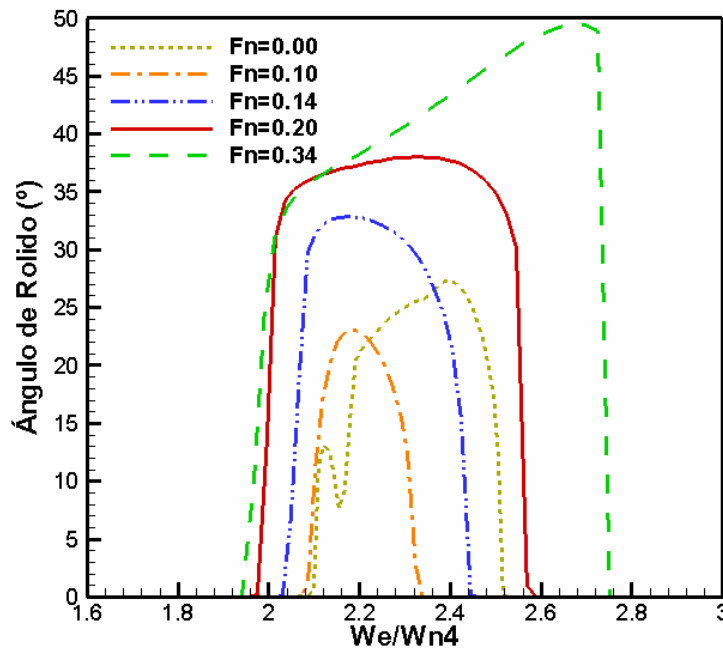
En el caso del barco TS (Figura 4.4) las variaciones no son tan evidentes, a pesar que se mantienen las mismas tendencias, obteniéndose respuestas menores para el barco TS con una mayor región de frecuencias. Debemos recordar que estas respuestas de rolido son obtenidas para  $Fn = 0.20$ .

Otra característica importante es que comprobamos el inicio del rolido paramétrico siempre próximo a la sintonía de resonancia

$\omega_e = 2\omega_{n4}$ , para todas las condiciones de carga analizadas. Así, notamos que el rolido paramétrico no se limita solamente a esta sintonía de resonancia, sino que alcanza otras sintonías mayores; estas características de inestabilidad no fueron observadas en los ensayos experimentales debido a que la sintonía ensayada fue limitada a un único valor.

#### **4.3.2 Efecto de la Velocidad de Avance, Número de Froude ( $F_n$ )**

Como notamos en las Figuras 4.1 y 4.2, otro parámetro importante a ser analizado es la velocidad de avance del barco (número de Froude). Paralelamente, después de analizar las respuestas del barco para diferentes condiciones de carga, se decide continuar con el análisis utilizando un GM alto para el barco RS (GM=0.50m) y un GM bajo para el TS (GM=0.37m), esto con la intención de obtener mayores amplitudes de rolido y al mismo tiempo obtener una misma frecuencia natural ( $\omega_{n4} = 0.858$  rad/s), permitiendo sintonizarse un mismo tanque para los dos barcos.



*Figura 4.5 Respuestas de Rolido SIN tanque,  
Barco RS:  $GM=0.50m$ , Ola:  $A_w=0.69m$ ,  $ksi=180^\circ$*

La Figura 4.5 muestra la respuesta del RS para diferentes números de Froude. La tendencia es que la amplitud del rolido aumenta con la velocidad en todo el intervalo de frecuencias, a excepción de las respuestas para  $Fn = 0.00$ , que alcanza amplitudes de rolido mayores cuando se compara con  $Fn = 0.10$  y  $Fn = 0.14$ . Es interesante observar que este comportamiento es diferente a los resultados de los ensayos experimentales mostrados en la Figura 4.1, donde la amplitud de rolido disminuye con el aumento del número de Froude. Esto es debido a que analizamos las respuestas para otro GM y con amplitud de ola menor ( $A_w = 0.69m$ ). A continuación repetimos el mismo análisis para el TS, llegando a los resultados de la Figura 4.6.

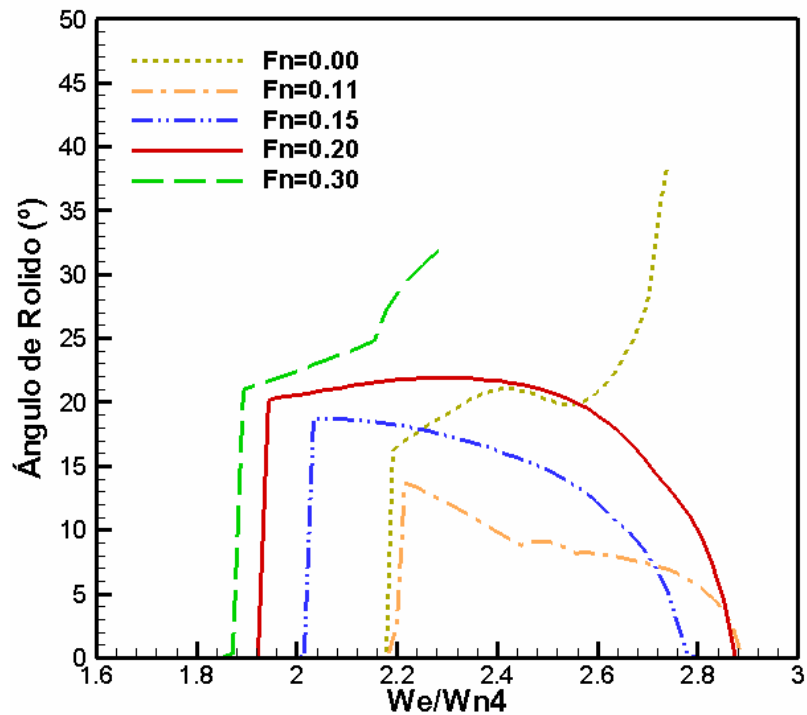


Figura 4.6 Respuestas de Roldo SIN tanque,  
Barco TS:  $GM=0.37m$ , Ola:  $Aw=0.60m$ ,  $ksi=180^\circ$

Las respuestas del barco TS para diferentes números de Froude (Figura 4.6) mantienen las mismas tendencias que el barco RS (Figura 4.5). Pero puede verse que algunas respuestas no coinciden con la física del problema, alcanzando valores de roldo muy por encima de lo esperado, inclusive aumentando para el infinito. Esto puede ser visto en la Figura 4.6 para las respuestas con  $Fn = 0.00$  y  $Fn = 0.30$ . Ese problema será discutido en el siguiente Ítem.

#### 4.3.3 Efecto de la Inclinación de la Ola ( $H_w/L_w$ )

Un motivo por el cual se alcanza grandes amplitudes de roldo, es que en los resultados analizados la amplitud de ola se mantiene constante

para todas las frecuencias. Al mantener la amplitud de ola constante y alcanzar altas frecuencias, el perfil de la ola se deforma considerablemente, llegando a configuraciones muy diferentes de las olas reales.

Para solucionar este problema, se cuantifica el perfil de la ola en función del adimensional *steepness* (o inclinación de la ola), que relaciona altura ( $H_w$ ) y longitud de la ola ( $L_w$ ). Suponiendo que el barco navega en aguas profundas, la longitud de ola puede ser relacionada fácilmente con la frecuencia de la ola ( $\omega_w$ ). Este análisis es importante porque al mantener el *steepness* constante a lo largo de la frecuencia, se representa mejor el perfil de la ola. Así, para **bajas frecuencias** habrá **altas amplitudes de ola** y para **altas frecuencias** habrá **bajas amplitudes de ola** manteniendo un perfil de ola proporcional a lo largo de la frecuencia.

Teniendo esta consideración hacemos los cálculos anteriores para diferentes velocidades y mantenemos el *steepness* constante ( $H_w / L_w = 1/40$ ), obteniendo las siguientes respuestas de rolido.



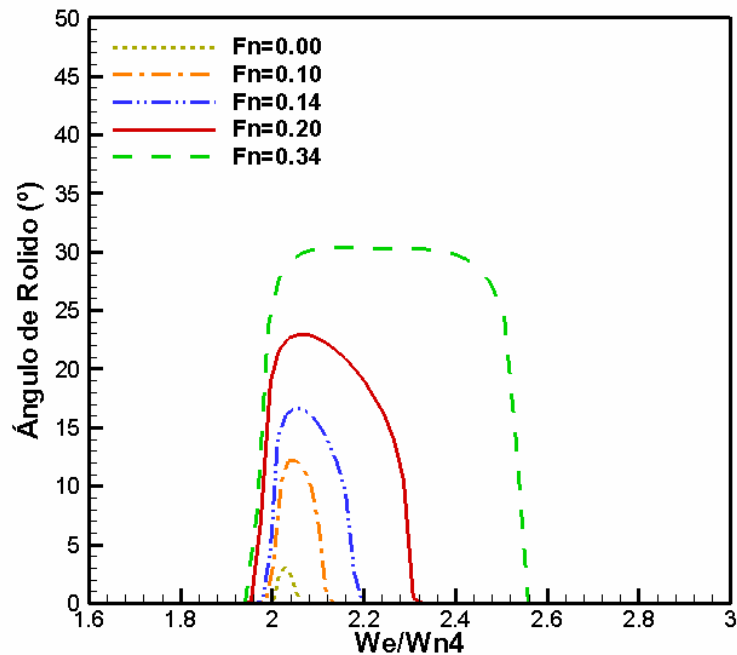


Figura 4.7 Respuestas de Rolido SIN tanque,  
Barco RS:  $GM=0.50m$ , Ola:  $H_w / L_w = 1/40$ ,  $\kappa=180^\circ$

En Figura 4.7 son presentadas las respuestas del barco RS. Aquí se observa como disminuyen las amplitudes máximas de rolido, principalmente en altas frecuencias. Ahora, notamos que el rolido aumenta proporcionalmente para todas las velocidades. Este fenómeno no puede ser visto cuando se mantiene la amplitud de ola constante. En general, comparando la Figura 4.5 con la Figura 4.7, se observa que manteniendo un *steepness* constante, o sea, modificando la amplitud de la ola para cada frecuencia, la respuesta de rolido se comporta mucho mejor.

Con la intención de mejorar las respuestas del barco TS, cuando analizamos la respuesta de rolido para diferentes velocidades, se repite el procedimiento anterior manteniendo el mismo *steepness* constante, obteniendo las respuestas presentadas en la Figura 4.8.

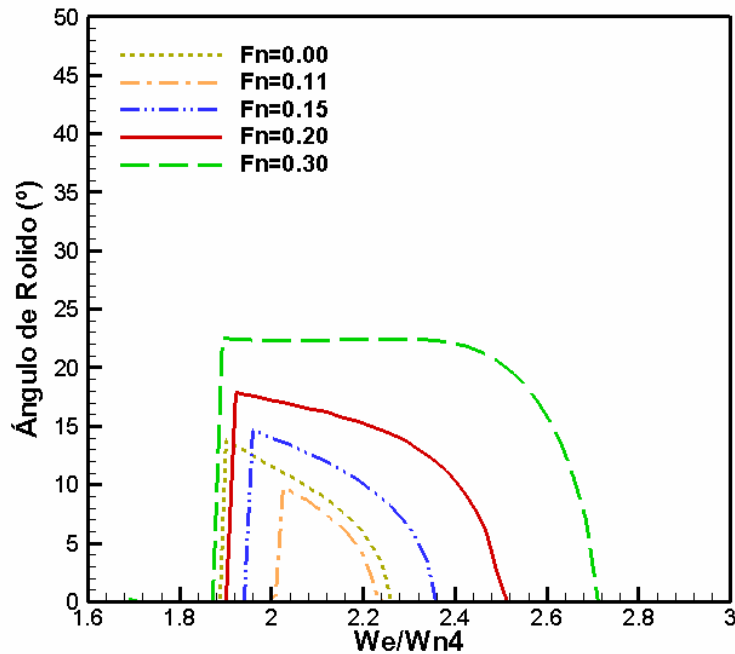


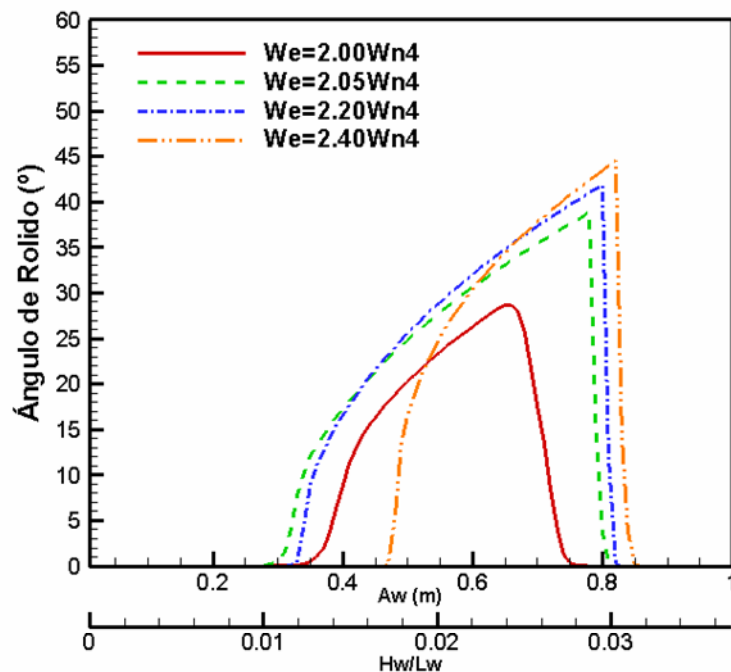
Figura 4.8 Respuestas de Rolido SIN tanque,  
Barco TS:  $GM=0.37m$ , Ola:  $H_w / L_w = 1/40$ ,  $ksi=180^\circ$

En la Figura 4.8 puede verse como los resultados coinciden con la física del problema, eliminando los casos en que el rolido tiende al infinito y suavizando las curvas de respuesta.

Comparando las Figuras 4.6 y 4.8 Una vez mas, notamos que la amplitud del movimiento de rolido es proporcional a la velocidad del barco, a excepción de la respuesta sin velocidad ( $Fn = 0.00$ ), que incrementa la amplitud de rolido cuando se compara con  $Fn = 0.11$ . Este fenómeno es debido a que las fuerzas de sustentación ayudan a una mayor disipación de energía con el barco avanzando. Estas fuerzas de sustentación están relacionadas con  $K_\phi$ . Este fenómeno también puede verse en los resultados experimentales (Figura 4.1).

#### 4.3.4 Efecto de la Amplitud de Ola ( $A_w$ )

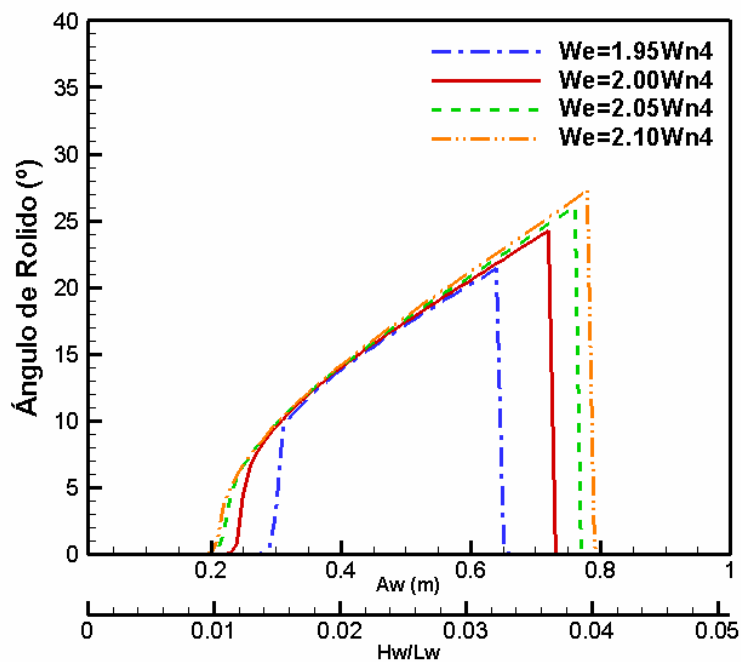
Otro parámetro importante que debemos analizar es la amplitud de la ola. Para esto repetimos el procedimiento similar al Ítem 4.3.1, con la diferencia de que ahora mantenemos la frecuencia de ola constante y mudamos la amplitud de ola. Con la intención de analizar el desarrollo de la resonancia paramétrica, las respuestas serán calculadas para sintonías próximas a la sintonía de resonancia  $\omega_e = 2\omega_{n4}$ . Con estas consideraciones obtenemos los siguientes resultados, para los dos barcos con  $Fn = 0.20$ , presentados en las Figuras 4.9 y 4.10.



*Figura 4.9 Respuestas de Rolido SIN tanque, Barco RS:  $GM=0.50m, Fn=0.20, Ola: ksi=180^\circ$*

En la Figura 4.9 se presentan las respuestas del barco RS. Aquí también puede verse como el rolido paramétrico se inicia próximo a la

sintonía  $\omega_e = 2\omega_{n4}$ , desarrollándose para una pequeña región de amplitudes de ola, además de tener una suave línea de tendencia. Conforme incrementamos la sintonía, puede verse que aumentan las amplitudes de rolido en una mayor región de amplitudes de ola. Así comprobamos nuevamente que la resonancia paramétrica no se limita a la sintonía  $\omega_e = 2\omega_{n4}$ .



**Figura 4.10 Respuestas de Rolido SIN tanque, Barco TS:  $GM=0.37m$ ,  $Fn=0.20$ , Ola:  $k_{si}=180^\circ$**

Notamos en las Figuras 4.9 y 4.10 que en la mayoría de las respuestas, la amplitud del movimiento de rolido incrementa con la amplitud de la ola (esta tendencia fue notada en los ensayos experimentales), llegando a un valor de amplitud donde las respuestas decrecen muy rápidamente. Esta característica es propia del modelo de

tercera orden presente en la primera zona de inestabilidad, donde la amplitud de rolo tiende a estabilizarse para altas amplitudes de ola (Neves y Rodríguez, 2006). Esto será analizado posteriormente utilizando el diagrama  $\omega_e / \omega_{n4}$  vs.  $A_w$ .

Se observa que en estas últimas respuestas se presentan, en el eje de las abscisas, los diferentes *steepness* atingidos para cada amplitud de ola. Cabe señalar que los *steepness* encontrados en un mar real están en la orden de 0.016 (1/60) até 0.05 (1/20), los cuales son mostrados en los resultados anteriores.

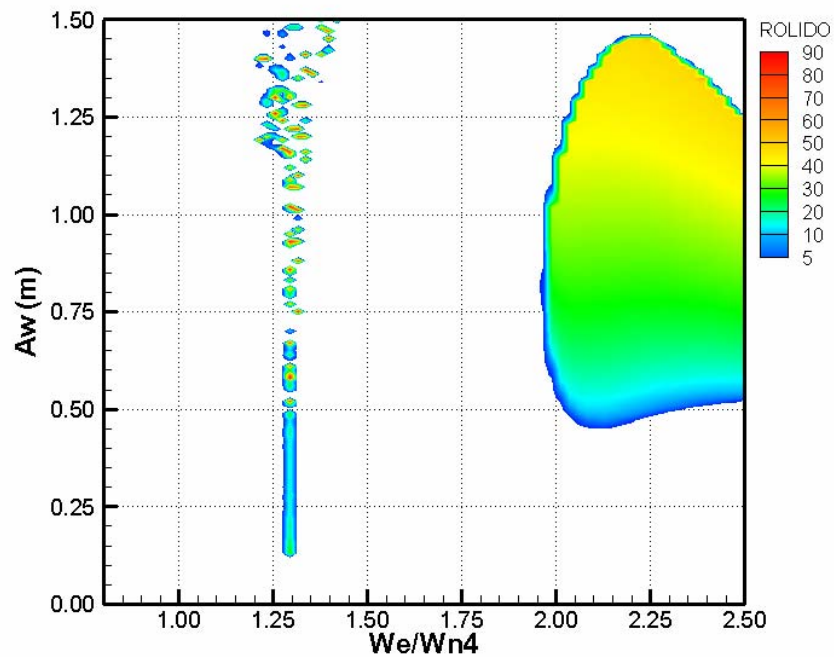
#### **4.3.5 Respuestas en el Plano $\omega_e / \omega_{n4}$ vs. $A_w$**

Como fue visto en los Ítems 4.3.1 hasta 4.3.4 los parámetros más importantes a ser analizados con respecto a la ola son amplitud y frecuencia. Para un análisis más detallado de la influencia de estos parámetros construimos los gráficos  $\omega_e / \omega_{n4}$  vs.  $A_w$ , donde las amplitudes de rolo son presentadas en función de colores conforme las legendas mostradas. Esos gráficos representan las zonas de inestabilidad en rolo. Los límites de sintonía ( $\omega_e / \omega_{n4}$ ) y amplitud de ola ( $A_w$ ) fueron escogidos tratando de no alcanzar valores de *steepness* donde la ola revienta ( $H_w / L_w \leq 1/11$ ).

Estas zonas de inestabilidad fueron analizadas por Valério (1994), que mostró que los límites de estabilidad de la ecuación no lineal de segunda orden de rizado pueden ser obtenidos por expansión de la ecuación de Mathieu utilizando el método de las perturbaciones. De ese trabajo podemos resaltar que de la ecuación no lineal de rizado (de segunda orden) podemos encontrar dos zonas relevantes de inestabilidad: la **primera zona de inestabilidad** próxima a la sintonía  $\omega_e = 2\omega_{n4}$  con una mayor región inestable, y la **segunda zona de inestabilidad** próxima a la sintonía  $\omega_e = \omega_{n4}$ . El autor concluye que la segunda zona de inestabilidad es más sensible al amortiguamiento comparado con la primera zona.

El modelo anterior fue mejorado por Rodrigues (2004), que presentó el modelo no lineal de tercera orden y mostró que este modelo tiene mejor concordancia con los ensayos experimentales. También analizó los límites de estabilidad analíticamente, basado en la metodología presentada por Hsu (1963). El autor concluye que, en este nuevo modelo, no puede ser aplicada la ecuación de Mathieu para el análisis de la estabilidad, debido a los términos bi-harmónicos asociados al modelo de tercera orden, siendo la alternativa más adecuada la Ecuación de Hill. Posteriormente, Neves y Rodríguez (2006) propusieron una metodología numérica para el levantamiento de los límites de estabilidad del sistema de tercera orden, que es la sistemática que será empleada en este trabajo.

Con la intención de comparar las respuestas para dos condiciones de carga, se realizaron los cálculos en el RS con **GM=0.34m** y **GM=0.50m**, para dos números de Froude diferentes.



*Figura 4.11 Respuestas de Rolido SIN tanque  
Barco RS: GM=0.34m, Fn=0.20, Ola: ksi=180°*

Notamos en la Figura 4.11 la existencia de las dos regiones de inestabilidad, la **primera zona de inestabilidad** próxima a la sintonía  $\omega_e = 2\omega_{n4}$  y la **segunda zona de inestabilidad**, próxima a la sintonía  $\omega_e = \omega_{n4}$ .

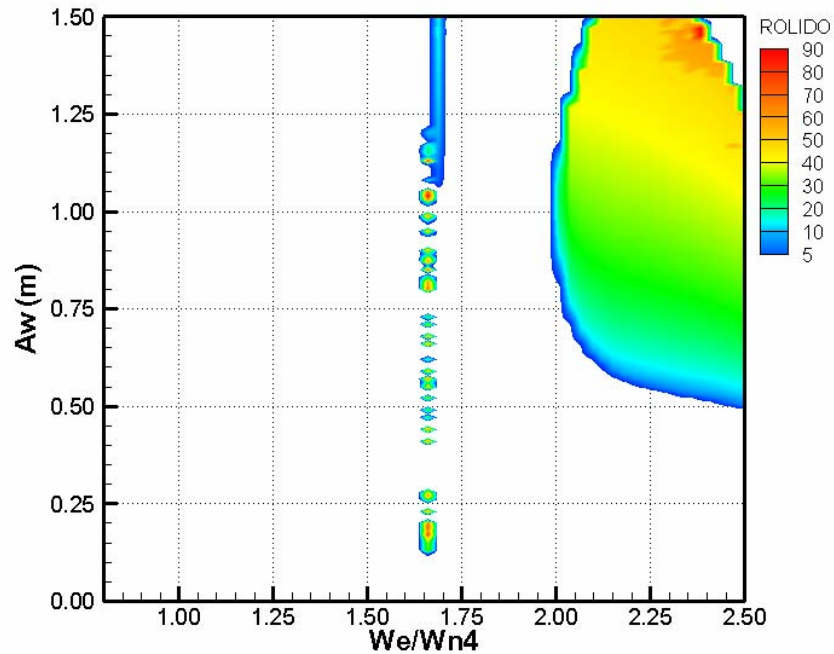
Notamos una mayor región en la primera zona de inestabilidad, alcanzando de rolido de hasta  $\phi = 48^\circ$ . También puede comprobarse que

la primera zona de inestabilidad se inicia en la sintonía próxima a  $\omega_e = 2\omega_{n4}$  (esta característica puede ser vista en los resultados experimentales de la Tabla 4.1) y continua para frecuencias y amplitudes de ola mayores.

Puede verse, en la primera zona de inestabilidad (por la diferencia de colores), que en una misma sintonía el rolido paramétrico aumenta progresivamente con la amplitud de ola, existiendo un límite superior donde el rolido decrece rápidamente hasta estabilizarse. Esta característica es propia del modelo de tercera orden donde los parámetros del sistema dinámico estabilizan el movimiento de rolido para amplitudes de ola mayores. Debe indicarse que esta característica no es reproducida por el modelo de segunda orden, como descrito por Neves y Rodrigues (2005).

Con la intención de analizar la influencia de la velocidad del barco, repetimos los cálculos anteriores para una velocidad mayor con  $Fn = 0.34$ . Según los ensayos experimentales, puede esperarse que en la sintonía  $\omega_e = 2\omega_{n4}$  disminuya la respuesta de rolido para la misma amplitud de ola  $A_w \approx 0.84 - 0.90m$ .



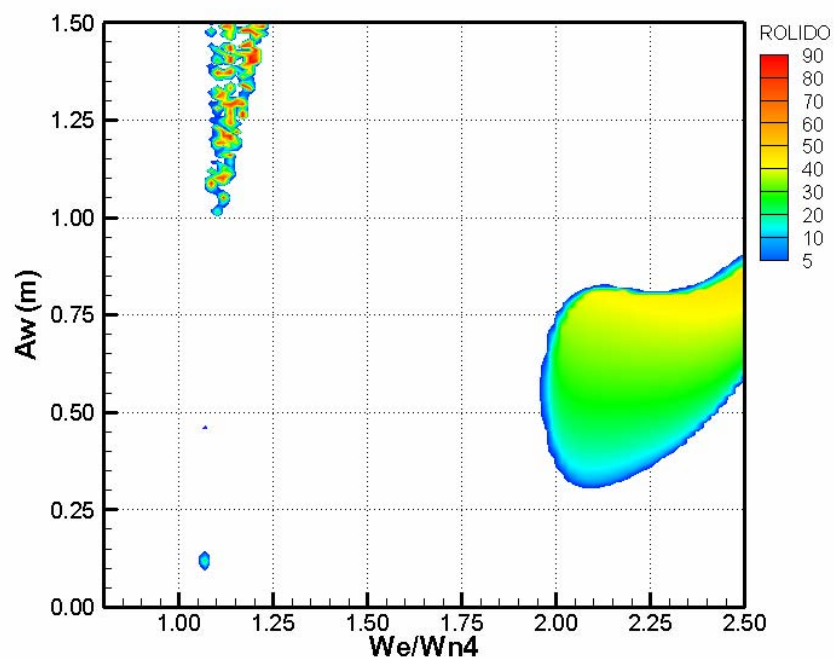


*Figura 4.12 Respuestas de Rolido SIN tanque  
Barco RS: GM=0.34m, Fn=0.34, Ola: ksi=180°*

Efectivamente, comparando las Figuras 4.11 y 4.12, se puede observar que el rolido paramétrico disminuye de amplitud en la sintonía  $\omega_e = 2\omega_{n4}$ , sin embargo aumenta para sintonías mayores. Con el aumento de la velocidad, en el inicio de la primera zona de inestabilidad, es más difícil encontrar resonancia paramétrica para pequeñas amplitudes de ola ( $A_w \leq 0.75m$ ), sin embargo teniendo una mayor región de inestabilidad para sintonías mayores. La tendencia para este GM es que con el aumento de la velocidad la primera zona de inestabilidad se desplaza para arriba de la sintonía  $\omega_e = 2\omega_{n4}$ , y en al rededor de la segunda zona de inestabilidad tiende a desaparecer. Estas características fueron encontradas por Valério

(1994), que son atribuidas al amortiguamiento lineal que incrementa con la velocidad.

A continuación presentamos en la Figura 4.13 las respuestas del barco RS para un GM mayor (**GM=0.50m**) con  $F_n = 0.20$ .

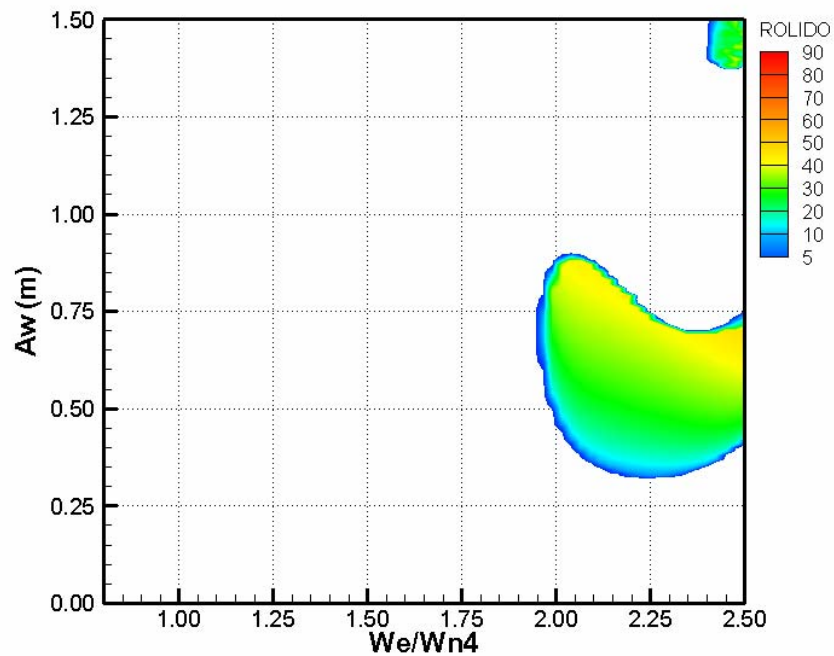


*Figura 4.13 Respuestas de Rolido SIN tanque  
Barco RS: GM=0.50m,  $F_n=0.20$ , Ola:  $\text{ksi}=180^\circ$*

Comparando las Figuras 4.11 y 4.13, misma velocidad con GM diferentes, notamos que el aumento del GM disminuye considerablemente la región de la primera zona de inestabilidad, sin embargo queda más inestable debido a que se alcanza rolido paramétrico en bajas amplitudes de ola, sobretudo en sintonías próximas a  $\omega_e = 2\omega_{n4}$ . Se puede verificar que estas tendencias fueron notadas claramente en los ensayos

experimentales (Figura 4.1). Debido a esto, es más interesante escoger el  $GM=0.50m$  para ensayar el tanque de estabilización.

A continuación mantenemos el mismo  $GM=0.50$  y aumentamos la velocidad ( $Fn = 0.34$ ), obteniendo los siguientes resultados para el barco RS, presentados en la Figura 4.14.



*Figura 4.14 Respuestas de Rolido SIN tanque  
Barco RS:  $GM=0.50m$ ,  $Fn=0.34$ , Ola:  $ksi=180^\circ$*

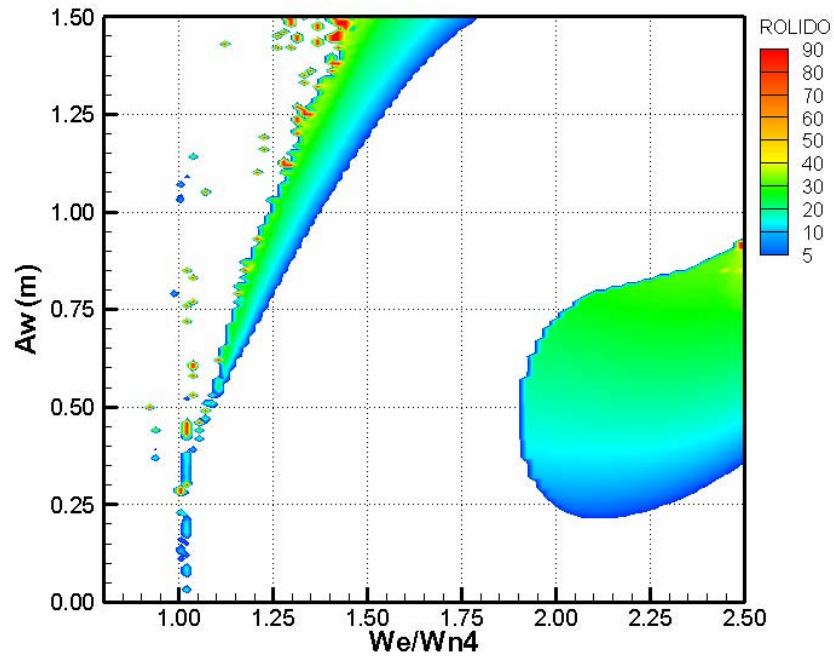
Comparando las Figuras 4.13 y 4.14, notamos que con mayor velocidad se elimina completamente la segunda zona de inestabilidad y aumenta ligeramente la región de la primera zona inestable, mostrando todavía la presencia de resonancia paramétrica en bajas amplitudes de ola y en sintonías mayores. Debido a que alcanzamos la zona de inestabilidad con bajas amplitudes de ola, se decide calcular las respuestas del barco

con tanque considerando el  $GM=0.50m$  y  $Fn=0.34$ . Así estaremos verificando la aplicación del tanque estabilizador para la peor condición de ese barco.

Comparando las Figuras 4.12 y 4.14, misma velocidad con diferentes  $GM$ , puede observar-se la misma tendencia del caso de  $Fn=0.20$ , quedando más inestable para el mayor  $GM=0.50m$ , alcanzando rolido paramétrico a partir de  $A_w=0.33m$  en la sintonía  $\omega_e=2.25\omega_{n4}$ . Ya en el menor  $GM=0.34m$ , comienza aparecer el rolido paramétrico en una amplitud de ola mayor con  $A_w=0.50m$  y sintonía  $\omega_e=2.50\omega_{n4}$ .

A continuación repetimos el procedimiento anterior ahora para el barco TS. Debido a los resultados numéricos anteriores, se espera obtener respuestas menores en una región mayor de frecuencias (Figura 4.4), cuando se compara con el RS (Figura 4.3).

Así, obtenemos las respuestas para un bajo  $GM=0.37m$  y  $Fn=0.20$ , obteniendo los resultados presentados en la Figura 4.15.



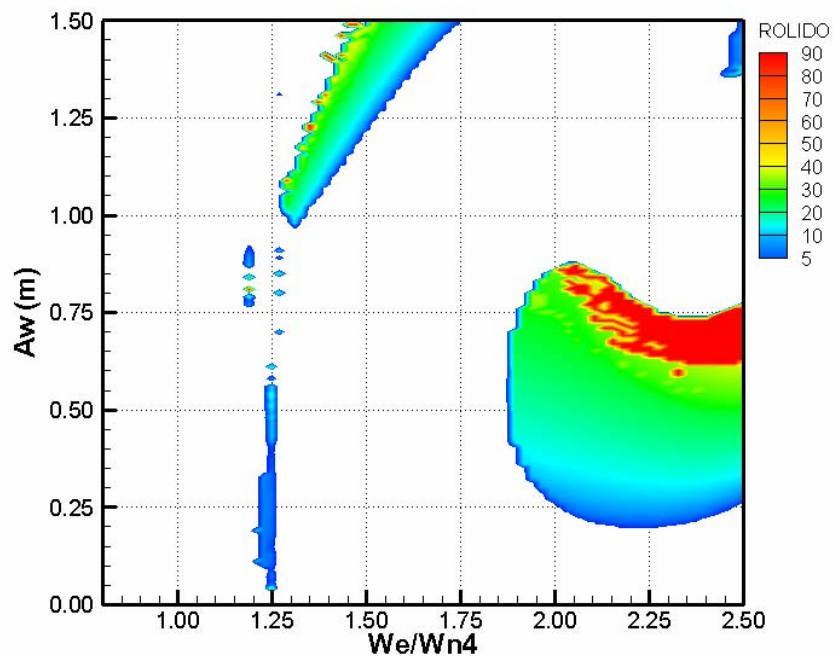
**Figura 4.15 Respuestas de Rolido SIN tanque**  
**Barco TS:  $GM=0.37m$ ,  $F_n=0.20$ , Ola:  $k_{si}=180^\circ$**

Comparando la Figura 4.11 con la Figura 4.15, barcos RS y TS con bajos GM y misma velocidad, se puede ver que el TS alcanza menores amplitudes de rolido sin embargo sea más inestable debido a que alcanza el rolido paramétrico para menores amplitudes de ola, sobretodo en la primera zona de inestabilidad. Estas características de las respuestas son atribuidas a la diferencia de la forma del casco que influye directamente los coeficientes de restauración estáticos y debidos al paso de la ola. O sea, la forma de la popa Transom es más inestable del punto de vista dinámico. Esta forma de la popa influye directamente a la distribución longitudinal de “flare” (inclinación del casco en la línea de flotación), que a la vez determina todos los coeficientes restaurativos.

Como podemos ver en el Apéndice I, Ítem I.4., estos coeficientes son mayores en el TS para todas las frecuencias de ola.

En la Figura 4.15 se puede ver que la primera zona de inestabilidad presenta nuevamente límite superior. Estas características dinámicas no fueron percibidas durante los ensayos experimentales, debido a que fueron realizados para una única sintonía.

A continuación mantenemos el  $GM=0.37m$  y aumentamos la velocidad para  $Fn = 0.30$ . Los resultados son presentados en la Figura



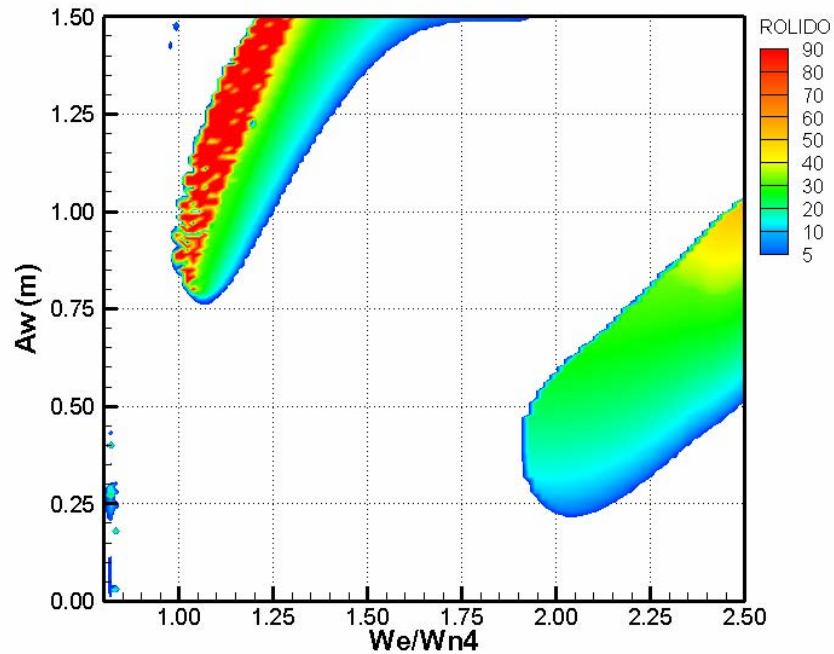
4.16.

*Figura 4.16 Respuestas de Rolido SIN tanque  
Barco TS:  $GM=0.37m$ ,  $Fn=0.30$ , Ola:  $ksi=180^\circ$*

Puede verse en la Figura 4.16, que para una mayor velocidad y  $A_w < 0.60m$  se alcanza aproximadamente los mismos ángulos de rolo. Para valores mayores notamos un aumento rápido de rolo pasando de  $\phi = 35^\circ$  a  $\phi = 90^\circ$  (zozobra), para un pequeño incremento en la amplitud de ola, siendo esta la configuración más peligrosa hasta el momento. Puede verificarse en la Tabla 4.2,  $GM=0.37m$ ,  $Fn = 0.30$ , que la respuesta para  $A_w = 0.60m$  es  $\phi = 5^\circ$ . Después de un pequeño incremento de la amplitud de ola alcanzamos  $\phi = 38^\circ$ . Estas respuestas experimentales son bien reproducidas en las respuestas numéricas de la Figura 4.16.

En esta última figura puede verse que dentro de la primera zona de inestabilidad existe una zona inestable crítica bien marcada (región roja). Esta zona puede ser alcanzada para sintonías  $\omega_e \geq 2\omega_{n4}$  y amplitudes de ola entre  $0.57m \leq A_w \leq 0.87m$ . Si comparamos las Figuras 4.12 y 4.16, RS y TS con bajos GM y altas velocidades, notamos que en condiciones semejantes el TS es nuevamente más inestable, atribuyendo esta característica a la diferencia en la forma de la popa, como discutimos anteriormente.

Repetimos aquí el procedimiento anterior para  $GM=0.50m$ , para dos velocidades diferentes.



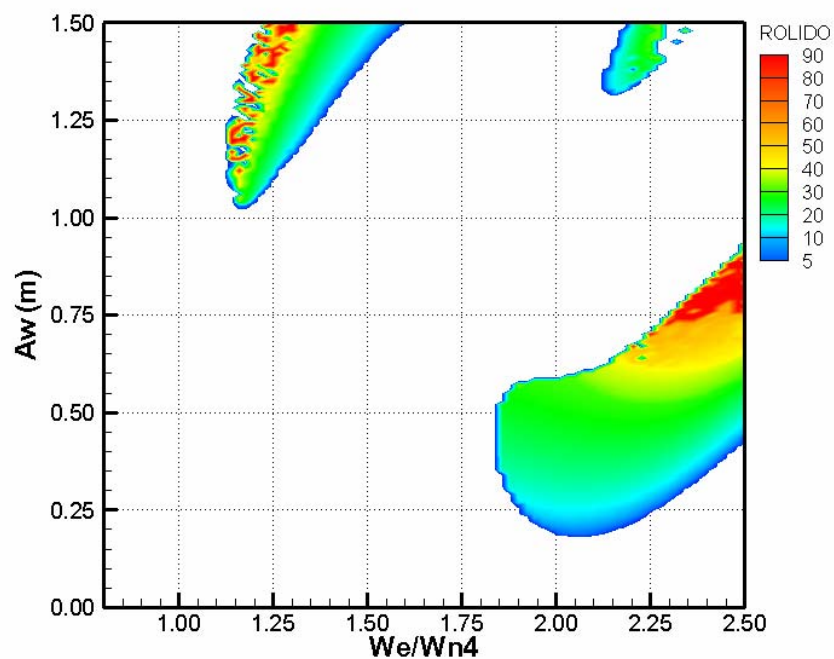
*Figura 4.17 Respuestas de Rolido SIN tanque  
Barco RS:  $GM=0.50m$ ,  $F_n=0.20$ , Ola:  $ksi=180^\circ$*

Comparando las Figuras 4.15 y 4.17, notamos para una misma velocidad, que el aumento del GM disminuye la región de la primera zona de inestabilidad, sin embargo sean alcanzadas mayores amplitudes de rolido en amplitudes de ola y frecuencias altas. Para estos dos casos se inicia la zona de inestabilidad para bajas amplitudes de ola ( $A_w \approx 0.25m$ ). La segunda zona de inestabilidad solamente aparece para amplitudes de ola  $A_w > 0.75m$ . De forma general podemos afirmar que el aumento del GM estabiliza el movimiento de rolido para este número de Froude. En la segunda zona de inestabilidad podemos ver aumentos violentos del rolido paramétrico, siendo posible llegar fácilmente a la zozobra con una pequeña variación en la amplitud de ola. Debemos recordar que al aumentar el GM, los parámetros que influyen en el comportamiento del



barco son los coeficientes de restauración estática que ajustan la curva de estabilidad estática.

Ahora, para analizar la influencia de la velocidad mantenemos el  $GM=0.50m$  y aumentamos la velocidad ( $Fn = 0.30$ ).



*Figura 4.18 Respuestas de Rolido SIN tanque  
Barco RS:  $GM=0.50m$ ,  $Fn=0.30$ , Ola:  $ksi=180^\circ$*

Comparando las Figuras 4.17 con 4.18, mismo  $GM$  y diferentes velocidades, notamos que el aumento de la velocidad aumenta la región de la primera zona de inestabilidad. Por el contrario, la región de la segunda zona de inestabilidad tiende a disminuir, siendo que esta tendencia se puede observar en los casos anteriores con el aumento de la velocidad.

Igualmente, al comparar las Figuras 4.16 con 4.18 notamos que para una misma velocidad el GM mayor muestra menor región de las zonas de inestabilidad. Esto confirma que el TS es más estable para un mayor GM. Además, podemos observar en la Figura 4.18, en la sintonía  $\omega_e = 2\omega_{n4}$ , que no aparecen incrementos rápidos de la respuestas de rolido (desaparece la zona roja en esta sintonía). Esta tendencia puede ser verificada en los resultados experimentales mostrados en la Tabla 4.2.

Después de todos los análisis y gráficos anteriores, podemos concluir que con el aumento de la velocidad, para un mismo GM, tiende a disminuir la región de la segunda zona de inestabilidad. Por el contrario, la región de la primera zona de inestabilidad tiende a aumentar. El aumento del GM, para una misma velocidad, disminuye tanto la primera como la segunda zona de inestabilidad. Además, debemos señalar que para continuar con el análisis y utilizar el tanque de estabilización, escogemos los casos más críticos encontrados en los dos barcos: para el RS: GM=0.50m con  $F_n = 0.34$ , y para el TS: GM=0.37m con  $F_n = 0.30$ .

#### **4.4 Proyecto y Sintonización del Tanque**

Analizadas las respuestas de rolido y escogidos los casos más críticos, el siguiente paso es proyectar el tanque de estabilización para alcanzar una máxima eficiencia y verificar la posibilidad de eliminar el rolido paramétrico en todas las amplitudes y frecuencias de ola.

Proyectar un tanque de estabilización consiste, por un lado, en establecer la configuración geométrica interior más adecuada, de acuerdo con las limitaciones de proyecto impuestas: localización del tanque en el barco, dimensiones máximas y amortiguamiento. Y por otro lado, definir, en función del estado de mar, las características de navegación del barco y la cantidad de fluido que debe contener el tanque.

El primer parámetro que puede ser definido es la longitud transversal del tanque  $2B_w$  (ver Figura 3.2), dimensionando el tanque para ocupar la boca del barco. Sabemos que los barcos RS y TS tienen la boca aproximadamente de 6m, entonces podemos definir el primer parámetro como  $B_w = 3m$ .

Por otro lado, con ayuda de la Ecuación (3.90), podemos analizar la influencia de la geometría del tanque sobre su frecuencia natural. Como referencia, las siguientes relaciones son consideradas en este análisis:  $H_r/(2B_w) = 1/3$  y  $H_d/(2B_w) = 1/40$ .

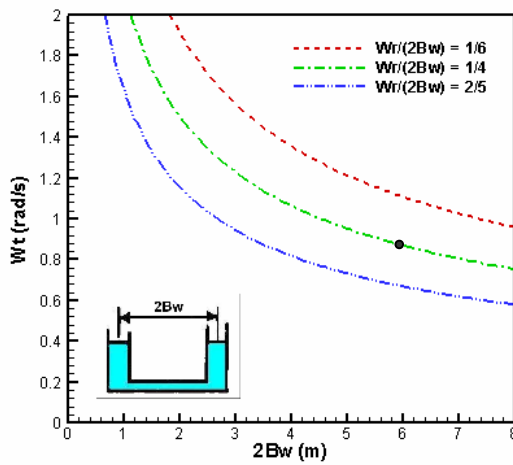


Figura 4.19 (a)

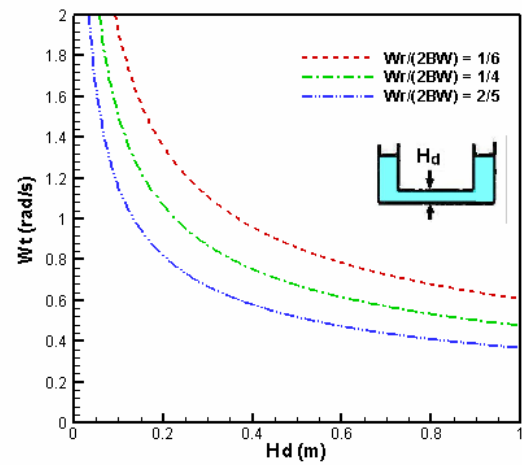


Figura 4.19 (b)

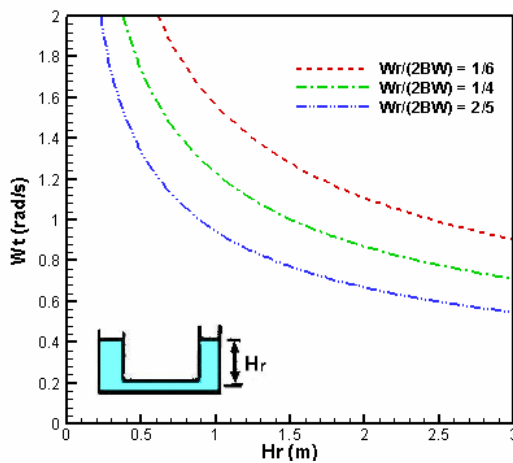


Figura 4.19 (c)

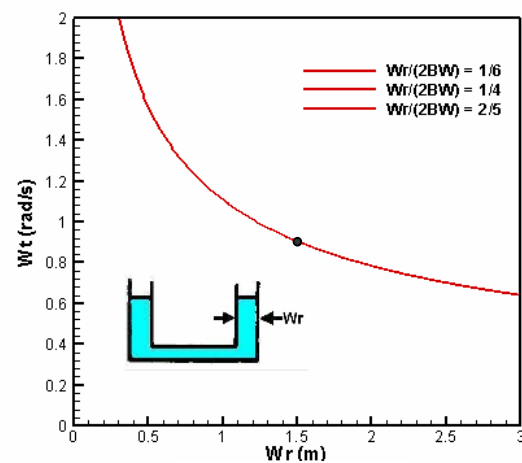


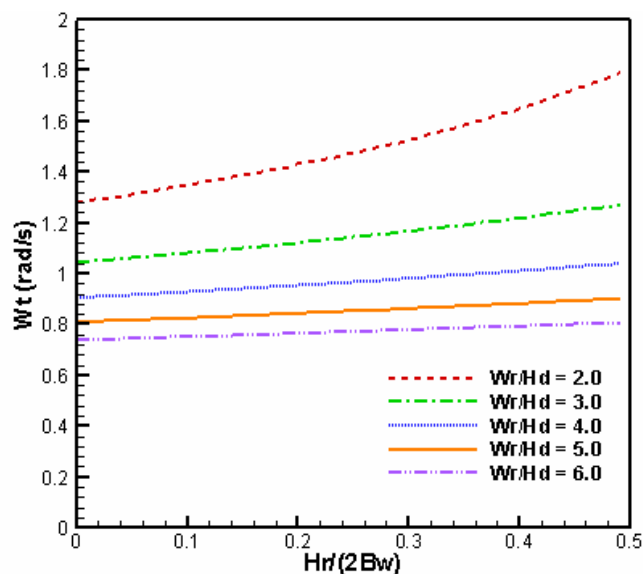
Figura 4.19 (d)

Figura 4.19 Influencia de la geometría del tanque sobre su frecuencia natural ( $W_t$ ), para  $H_r/(2B_w)=1/3$  y  $H_d/(2B_w)=1/40$

Notamos en la Figura 4.19(a), que al evaluar  $2B_w = 6m$ , utilizando la relación de  $W_r/(2B_w) = 1/4$ , alcanzamos aproximadamente la frecuencia natural de los barcos ( $\omega_{n4} = 0.858$ ). Con esta última relación, también alcanzamos la misma frecuencia natural para las demás geometrías [ver Figura 4.19(b), 4.19(c), 4.19(d)]. Recordemos que las geometrías seleccionadas están dentro de los posibles valores reales a ser

utilizados. Así, de los valores anteriores podemos encontrar la siguiente geometría del tanque,  $W_r = 1.5m$ .

Por otro lado, sabemos que durante la travesía el barco sufre variaciones en su frecuencia natural. Este aspecto es más relevante en barcos petroleros y cargueros, donde la carga está variando de un puerto a otro, varía el GM, y muda con este la frecuencia natural de rolido. Teniendo esta consideración, los siguientes parámetros geométricos deberán ser definidos con la intención de poder modificar la frecuencia del tanque. Del punto de vista práctico podemos ver en la Ecuación (3.90) que el único parámetro que puede ser modificado cuando el tanque ya esté construido es la altura del agua dentro de los reservorios ( $H_r$ ), entonces el objetivo es alcanzar diferentes frecuencias naturales modificando solamente este parámetro. Después de determinar los valores de  $B_w$  y  $W_r$ , construimos la Figura 4.20 para analizar la influencia de  $H_r$  sobre la frecuencia del tanque, obteniendo:



**Figura 4.20 Influencia de la altura del fluido ( $H_r$ ) sobre la frecuencia natural del tanque ( $\omega_t$ ), cuando  $B_w = 3m$**

En la Figura 4.20 vemos que la altura  $H_r$  no influye considerablemente la frecuencia del tanque, siendo necesario modificar el último parámetro  $H_d$  para alcanzar varias frecuencias. Ahora nos vemos en la necesidad de fijar la frecuencia natural del tanque para una única frecuencia natural de rolido. En el presente trabajo, puede considerarse que no varía considerablemente la frecuencia natural de rolido para los dos barcos, siendo esta  $\omega_{n4} = 0.858$ . Así se puede fijar  $H_r = 1.5m$  variando ahora la frecuencia del tanque con  $H_d$ .

La Tabla 4.3 muestra las características geométricas del tanque, utilizadas en los barcos RS y TS, para diferentes sintonías  $\omega_t / \omega_{n4}$ .

**Tabla 4.3 Geometrías del Tanque:  $B_w=3m$**

	$W_r$	$H_r$	$H_d$	$\omega_t$	$\omega_t / \omega_{n4}$
<b>1</b>	1,50	1,50	0,251	0,773	0,900
<b>2</b>	1,50	1,50	0,304	0,859	1,000
<b>3</b>	1,50	1,50	0,360	0,944	1,100
<b>4</b>	1,50	1,50	0,419	1,030	1,200
<b>5</b>	1,50	1,50	0,480	1,116	1,300

Debe indicarse que la longitud del tanque ( $L_t$ ) a lo largo de la eslora del barco será calculado con ayuda de la Ecuación (3.91) después de escoger el porcentaje de masa del fluido dentro del tanque con respecto a la masa del barco ( $m_t / m$ ).

#### 4.5 Respuestas de Rolido CON Tanque de Estabilización

Como se indicó anteriormente, los casos más críticos en que alcanzamos resonancia paramétrica y grandes amplitudes de roldo paramétrico son RS: GM=0.50m con  $F_n = 0.34$ , y TS: GM=0.37m con  $F_n = 0.30$ . La idea aquí es de demostrar la eficiencia del tanque estabilizador pasivo en los casos más críticos.

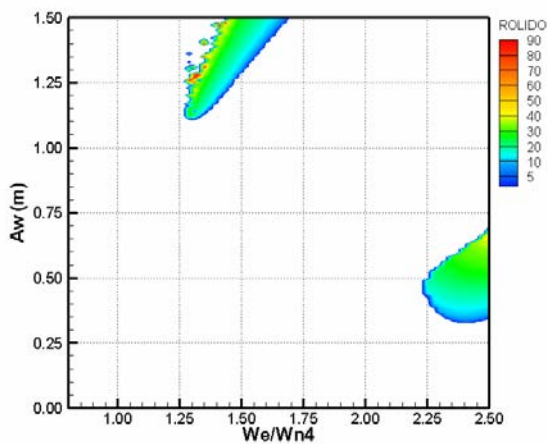
Con la intención de analizar diferentes configuraciones del tanque se verificó la influencia de los principales parámetros, obteniendo diferentes respuestas para variaciones sistemáticas de sintonías, masas y amortiguamientos del tanque. Así, fueron obtenidas y analizadas cinco sintonías ( $\omega_t / \omega_{n4} = 0.9, 1.0, 1.1, 1.2$  y  $1.3$ ), cada sintonía con tres amortiguamientos ( $\eta_t = 0.3, 0.4$  y  $0.5$ ).

Para el barco TS fueron analizadas las sintonías y amortiguamientos definidas arriba, cada una con tres relaciones de masa ( $m_t / m = 3\%, 4\%$  y  $5\%$ ), obteniéndose un total de 45 gráficos de estabilidad con tanque. Debido a que la resonancia paramétrica tiene menor influencia en el barco RS, fueron analizadas dos relaciones de masa ( $m_t / m = 2\%$  y  $3\%$ ), obteniéndose 30 gráficos de estabilidad con tanque para las diferentes sintonías, masas y amortiguamientos.

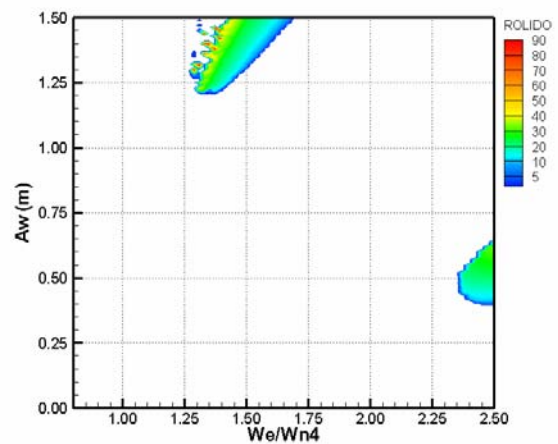
Todos esos gráficos de estabilidad obtenidos para el RS y TS, para diferentes sintonías, masas y amortiguamientos, son presentados en el Apéndice II. En este Capítulo serán presentados y analizados los gráficos más relevantes.

Como es conocido, encontramos en la literatura (modelo lineal para mar de través) que el tanque debe ser sintonizado en la misma frecuencia natural de rolido para alcanzar una máxima eficiencia  $\omega_t = \omega_{n4}$ . Así, notamos que uno de los parámetros más importantes para iniciar el análisis es la frecuencia natural del tanque. Como fue señalado anteriormente, la frecuencia del tanque será analizada con respecto a la frecuencia natural de rolido, variando desde la sintonía  $\omega_t / \omega_{n4} = 0.9$  até  $\omega_t / \omega_{n4} = 1.3$ . Inicialmente, presentamos las respuestas para una masa del tanque de  $m_t / m = 3\%$  y amortiguamiento adimensional de  $\eta_t = 0.3$ .

#### 4.5.1 Influencia de la Frecuencia del Tanque ( $\omega_t$ )

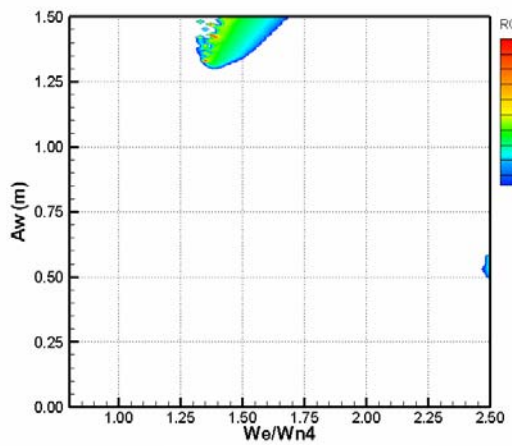


**Figura 4.21 (a)**  
 **$Wt=0.9Wn4$**

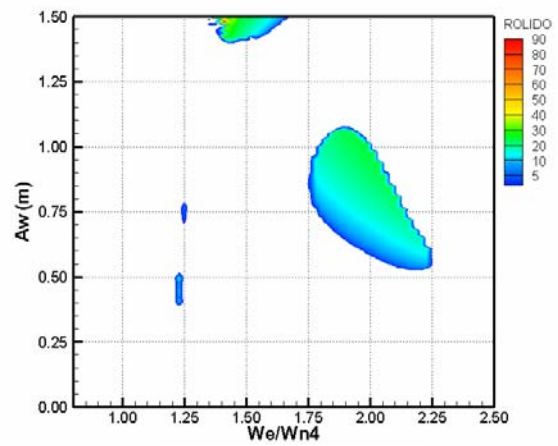


**Figura 4.21 (b)**  
 **$Wt=1.0Wn4$**

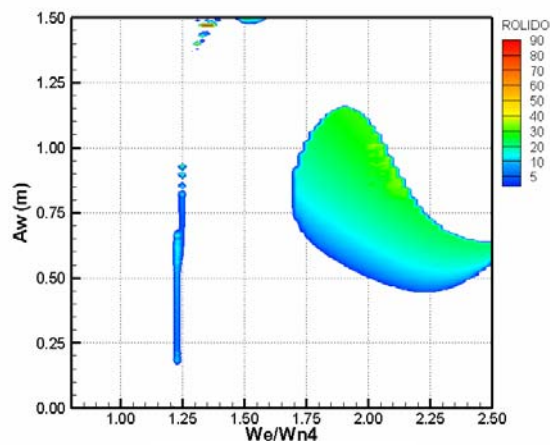




**Figura 4.21 (c)**  
 **$Wt=1.1Wn4$**



**Figura 4.21 (d)**  
 **$Wt=1.2Wn4$**



**Figura 4.21 (e)**  
 **$Wt=1.3Wn4$**

**Figura 4.21 Respuestas de Rolido CON tanque.**  
**Barco TS:  $GM=0.37m$ ,  $Fn=0.30$ ,**  
**Tanque:  $mt/m=3\%$ ,  $nt=0.3$**

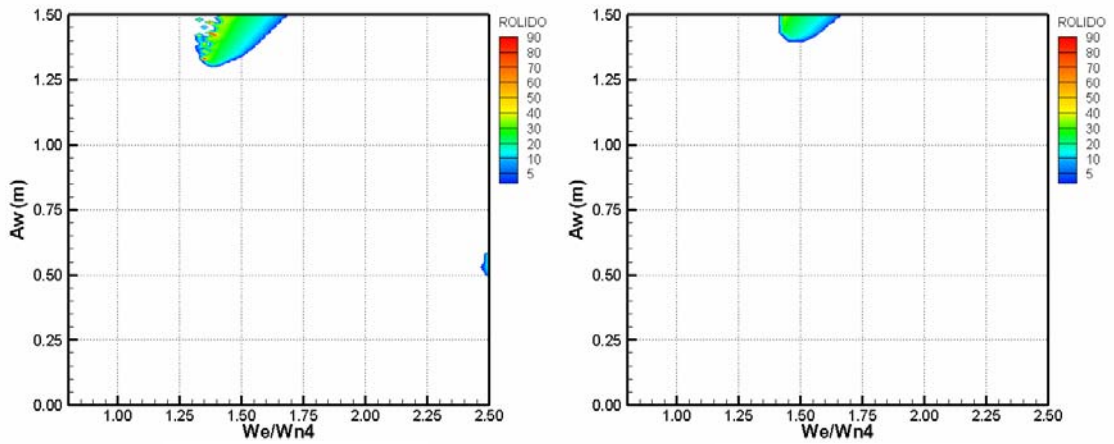
En las Figuras 4.21 (a),(b),(c),(d) y (e) se presentan las respuestas de rolido para el TS, trabajando con el tanque de estabilización pasivo. En esta figura son presentadas diferentes sintonías del tanque. Las configuraciones para alcanzar las diferentes sintonías del tanque son mostradas en la Tabla 4.3.

Debemos observar que comparando la Figura 4.16 con Figura 4.21, el rolido paramétrico disminuye considerablemente en una gran parte de las sintonías analizadas, e inclusive se mantiene la tendencia de estabilizar el rolido paramétrico en la región con altas amplitudes de ola. Es evidente que el tanque de estabilización es eficiente para casi todas las regiones de inestabilidad. Otra característica es que con el aumento de la frecuencia del tanque (sintonía del tanque) la segunda zona de inestabilidad tiende a disminuir.

La principal característica de este análisis es que existe una frecuencia ( $\omega_t$ ) en la cual el barco sintoniza con el tanque y alcanza una máxima eficiencia, eliminando una gran parte de la región de la primera zona de inestabilidad. Cuando se comparan las Figuras 4.21: (a), (b), (c), (d) y (e), se puede observar que la sintonía que elimina la mayor parte de la primera zona de inestabilidad es  $\omega_t / \omega_{n4} = 1.1$ . En las otras figuras se puede observar como la región de inestabilidad tiende a desaparecer con una inclinación positiva (a la derecha) para bajas sintonías del tanque ( $\omega_t / \omega_{n4} < 1.1$ ), llegando a desaparecer totalmente, y luego aumenta con una inclinación negativa (a la izquierda) para mayores sintonías ( $\omega_t / \omega_{n4} > 1.1$ ).

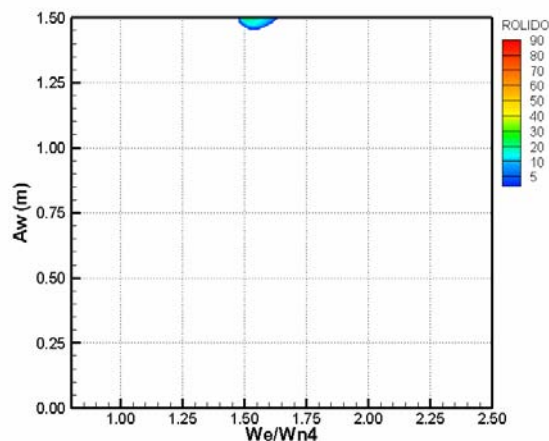
#### **4.5.2 Influencia de la Masa del Fluido dentro del Tanque ( $m_t$ )**

Después de definir la sintonía más eficiente entre el tanque y el barco, el siguiente parámetro a ser analizado es la masa del fluido dentro del tanque. Para este análisis mantenemos constante la sintonía del tanque  $\omega_t / \omega_{n4} = 1.1$  y el amortiguamiento  $\eta_t = 0.3$ , mudando los valores de masa:  $m_t / m = 3\%$ ,  $4\%$  y  $5\%$ , obteniendo los siguientes resultados, presentados en la Figura 4.22.



**Figura 4.22 (a)**  
 **$m_t=3\%m$**

**Figura 4.22 (b)**  
 **$m_t=4\%m$**



**Figura 4.22 (c)**  
 **$m_t=5\%m$**

**Figura 4.22 Respuestas de Rolido CON tanque.**  
**Barco TS:  $GM=0.37m$ ,  $Fn=0.30$ ,**  
**Tanque:  $Wt/Wn4=1.1$ ,  $nt=0.3$**

Una vez que el tanque esté bien sintonizado, se percibe como la masa del fluido no influye considerablemente sobre las respuestas de rolido (Figuras 4.22). En estas figuras debe observarse como la sintonía del tanque es el parámetro más importante a ser definido en el inicio del proyecto.

La recomendación general es tener la menor cantidad de masa del fluido posible, por otro lado vemos que para la masa  $m_t / m = 3\%$  todavía tenemos algunas pequeñas regiones en la primera zona de inestabilidad [Figura 4.22(a)], por eso se decide continuar el análisis con una masa de  $m_t / m = 4\%$ .

### 4.5.3 Influencia del Amortiguamiento del Tanque ( $\eta_t$ )

La última característica del tanque a ser analizada es el amortiguamiento (adimensional  $\eta_t$ ). Manteniendo la sintonía y la masa constantes, se varía el amortiguamiento desde  $\eta_t = 0.3$  hasta  $\eta_t = 0.5$ , Así son obtenidos los resultados presentados en la Figura 4.23.

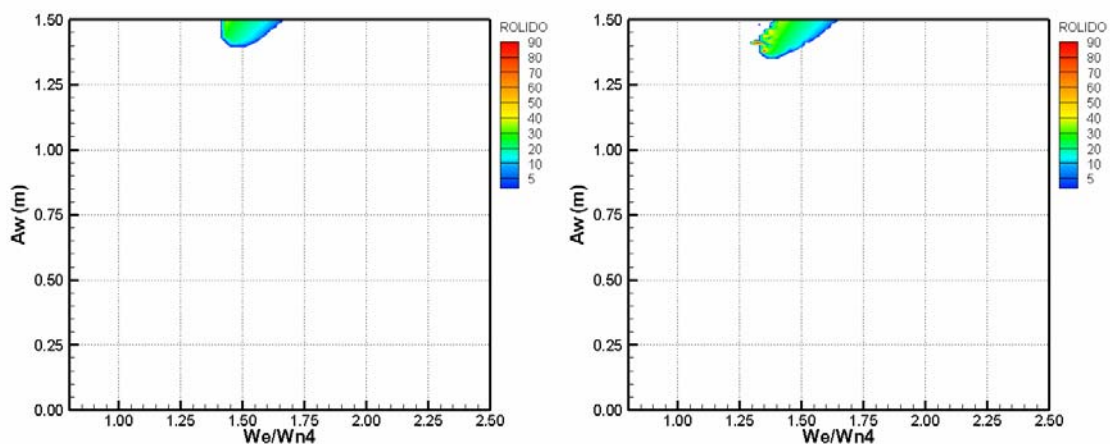
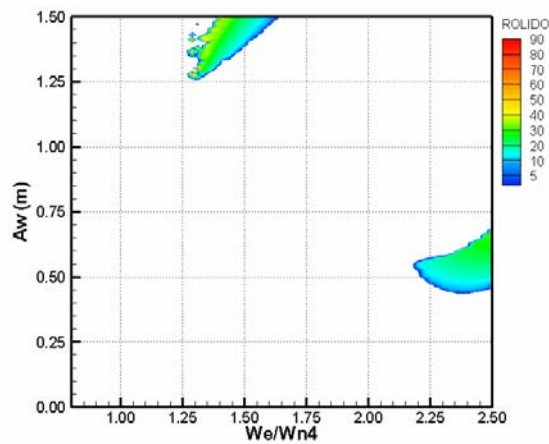


Figura 4.23 (a)  
 $nt=0.3$

Figura 4.23 (b)  
 $nt=0.4$



**Figura 4.23 (c)**  
*nt=0.5*

**Figura 4.23 Respuestas de Rolido CON tanque**  
*Barco TS: GM=0.37m, Fn=0.30,*  
*Tanque: Wt/Wn4=1.1, mt/m=4%*

Podemos ver en las Figuras 4.23(a) y 4.23(b) que para amortiguamientos  $\eta_t \leq 0.4$ , las regiones de inestabilidad no se modifican considerablemente. Ya para valores mayores, Figura 4.23(c), comienza a aparecer la región de la primera zona de inestabilidad. Una conclusión previa que podemos señalar es que para un determinado tanque, con una determinada frecuencia y masa, existe un intervalo de amortiguamientos donde el tanque trabaja eficientemente. Como señalamos anteriormente, en la práctica este amortiguamiento puede ser controlado utilizando obstrutores en la parte interna de la tubería.

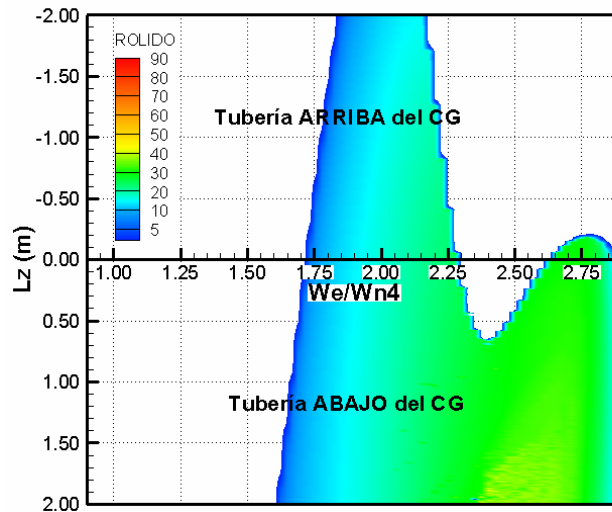
#### **4.5.4 Influencia de la Posición Vertical del Tanque ( $L_z$ )**

Otro parámetro importante que debe ser analizado es la posición del tanque dentro del barco, para esto hacemos coincidir el origen del sistema móvil (O) mostrado en la Figura 2.1 con el centro de gravedad del

barco (CG). El punto de referencia del tanque será el centro de la tubería, como puede verse en la Figura 3.2. Debemos señalar que en todo el análisis del tanque hecho anteriormente se consideró que el origen del sistema móvil estaba en el CG.

Por otro lado, la condición que presenta la respuesta más crítica entre los dos barcos es la de la Figura 4.16, donde podemos ver como alcanzamos ángulos de zozobra para una gran región de amplitudes de ola y sintonía. De esta Figura 4.16 escogemos las condiciones de mar para el barco TS con amplitud de ola  $A_w = 0.70m$  y analizamos la influencia de la posición vertical del tanque para varias frecuencias de encuentro. De la Figura 4.21(e) escogemos las características del tanque menos eficiente (desintonizado), esto para hacer más notorio la influencia de la posición vertical del tanque sobre las respuestas de rolo.

Con estas últimas condiciones podemos hacer un análisis detallado de la mejor posición que debe tener el tanque dentro del barco para alcanzar una máxima eficiencia. Para esto construimos el gráfico  $\omega_e / \omega_{n4}$  vs.  $L_z$ . Debemos recordar que el signo negativo de  $L_z$  significa que el centro de la tubería (del tanque) se localiza encima del CG del barco y el signo positivo lo contrario. Teniendo estas consideraciones, presentamos las respuestas para el barco TS con tanque en diferentes posiciones verticales, estas respuestas son mostradas en la Figura 4.24.



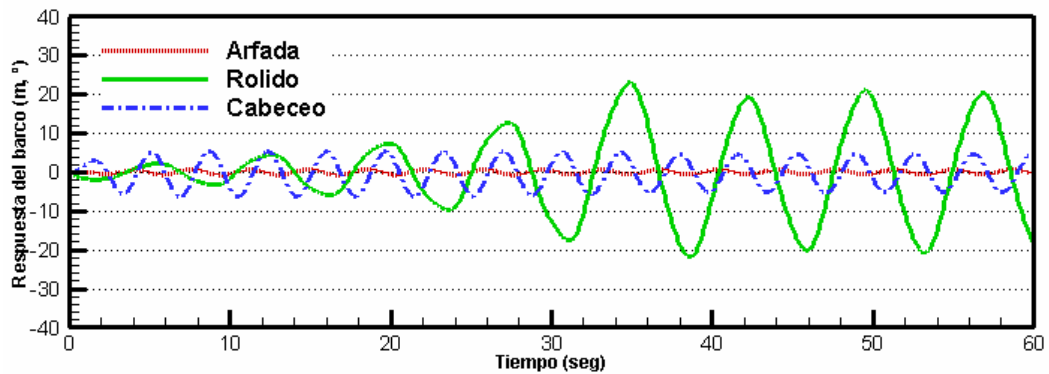
**Figura 4.24 Influencia de la Posición Vertical del Tanque**  
 Barco TS:  $GM=0.37m$ ,  $Fn=0.30$ ,  $We=2Wn4$   
 Ola:  $Aw=0.70m$ ,  $ksi=180^\circ$   
 Tanque:  $Wt=1.3Wn4$ ,  $mt=3\%m$ ,  $nt=0.3$

De la Figura 4.24 se puede observar como para una misma sintonía el tanque es más eficiente cuando se localiza encima del CG, teniendo aquí una menor zona inestable donde el rolido paramétrico está presente. En la misma figura se observa como la amplitud de rolido paramétrico aumenta cuando el tanque se va aproximando al CG y sigue aumentando cuando el tanque queda más debajo de este. Así mismo se nota como la eficiencia del tanque es independiente de la localización en bajas frecuencias de encuentro ( $\omega_e / \omega_{n4} \leq 1.60$ ).

#### 4.5.5 Simulaciones en el Tiempo

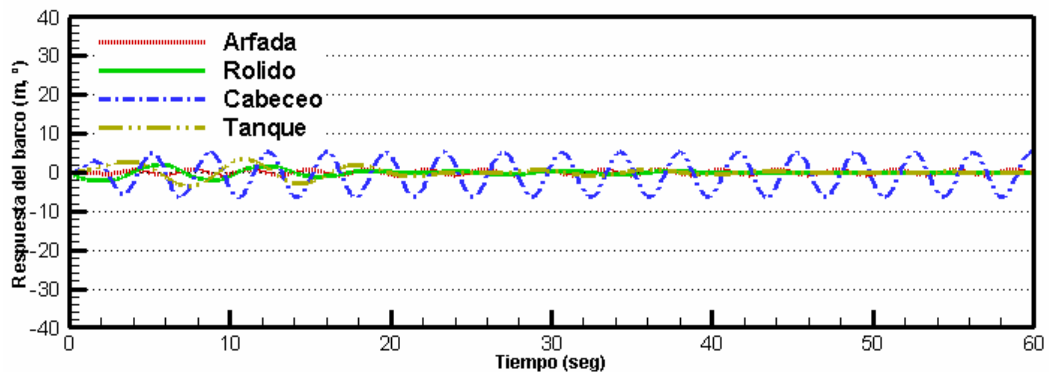
Con el objetivo de analizar otras características del comportamiento del barco con tanque, presentamos las respuestas del

barco en función del tiempo. A continuación, primero se muestra la respuesta del TS en los tres grados de libertad sin tanque.



**Figura 4.25 Respuestas del Barco TS sin tanque en Arfada, Rolido y Cabeceo**  
 $GM=0.37m$ ,  $Fn=0.20$ ,  $We=2Wn4$   
 Ola:  $A_w=0.60m$ ,  $ksi=180^\circ$

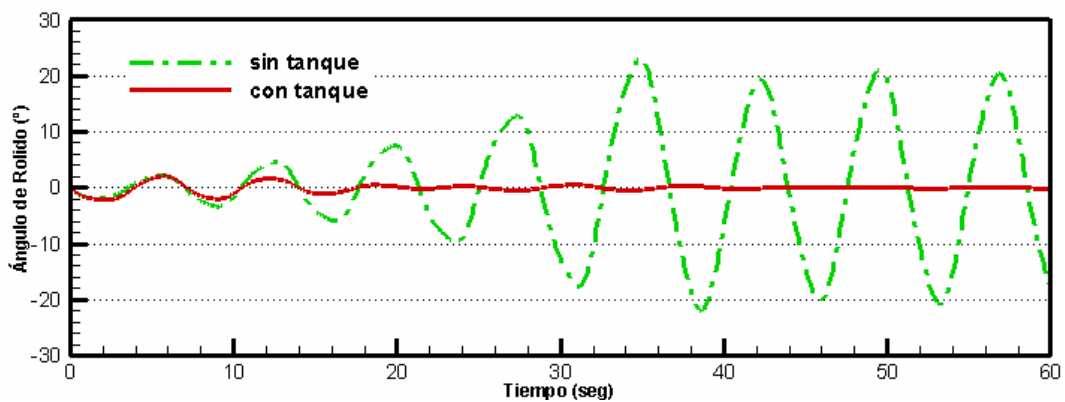
Notamos en la Figura 4.25 que la amplitud máxima del rolido paramétrico es alcanzada en menos de 40 segundos en el quinto ciclo, llegando a una amplitud máxima de  $20.4^\circ$ . Del punto de vista práctico esta amplitud es potencialmente peligrosa. A continuación se presenta en la Figura 4.26 la serie temporal anterior, ahora utilizando el tanque de estabilización proyectado.



**Figura 4.26 Respuestas del Barco TS con tanque en Arfada, Rolido y Cabeceo**  
 $GM=0.37m$ ,  $Fn=0.20$ ,  $We=2Wn4$   
 Ola:  $A_w=0.60m$ ,  $ksi=180^\circ$   
 Tanque:  $Wt=1.1Wn4$ ,  $mt=3\%m$ ,  $nt=0.3$

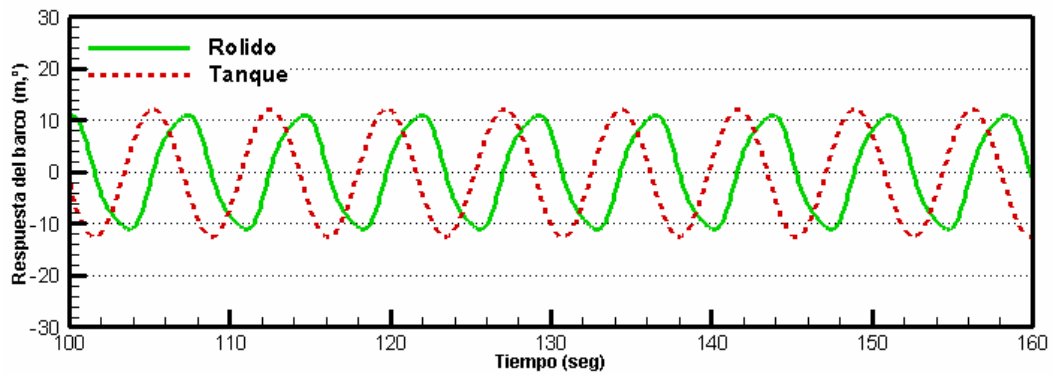


Se puede observar en la Figura 4.26 como el tanque elimina completamente el rolido paramétrico. Para los movimientos de arfada y cabeceo, la influencia del tanque no es significativa. Para apreciar mejor el comportamiento de rolido con y sin tanque de estabilización se presenta la siguiente serie temporal, ver la Figura 4.27.



**Figura 4.27 Respuestas de Rolido del Barco TS, con y sin tanque**  
 $GM=0.37m$ ,  $Fn=0.20$ ,  $We=2Wn4$   
 Ola:  $A_w=0.60m$ ,  $ksi=180^\circ$   
 Tanque:  $Wt=1.1Wn4$ ,  $mt=3\%m$ ,  $nt=0.3$

Se puede ver claramente en la Figura 4.27 la eficiencia del tanque para eliminar el rolido paramétrico: la amplitud de rolido es eliminada antes de los 60 segundos de iniciado el movimiento, aproximadamente en el quinto ciclo. Para entender mejor la dinámica de las respuestas de rolido y del tanque se presenta la Figura 4.28.

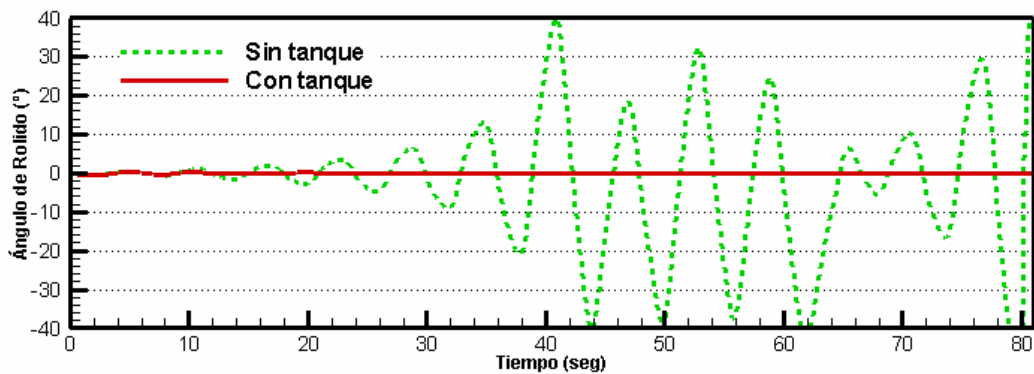


**Figura 4.28 Respuesta en Rolido con Tanque en régimen permanente**  
 $GM=0.37m$ ,  $Fn=0.30$ ,  $We=2Wn^4$   
 Ola:  $A_w=0.60m$ ,  $ksi=180^\circ$   
 Tanque:  $W_t=1.1Wn^4$ ,  $mt=3\%m$ ,  $nt=0.5$

Una característica interesante ha observar, en la dinámica del control del rolido paramétrico por medio de tanques estabilizadores, es el defasaje entre el movimiento de rolido y el movimiento del fluido, que deben oponerse a lo largo del tiempo. O sea, cuando el tanque es bien sintonizado con masa y amortiguamiento adecuados, el movimiento del fluido deberá estar en defasaje con rolido cerca de  $180^\circ$ . Movimientos angulares acoplados en sentidos opuestos tienden a eliminarse a lo largo del tiempo, este fenómeno es el principio del tanque de estabilización. La Figura 4.28 ilustra un caso de casi anti-fase. Debe señalarse que en la Figura 4.28 se utilizó un amortiguamiento mayor, esto para obtener respuestas de rolido que no se eliminan a lo largo del tiempo y poder así apreciar mejor las respuestas del tanque y del barco.

Otro caso interesante a ser explorado es cuando las respuestas de rolido son correspondientes a la zozobra, para esto podemos ver de la Figura 4.16 que este caso acontece con el barco TS con  $Fn = 0.30$ . Así

escogemos una sintonía de  $\omega_e / \omega_{n4} = 2.45$  con amplitud de ola de  $A_w = 0.70m$  y comparamos las series temporales con y sin tanque de estabilización, obteniendo las respuestas mostradas en la Figura 4.29.



**Figura 4.29 Respuestas de Rolido del Barco TS con y sin tanque en mar crítico**  
 $GM=0.37m$ ,  $F_n=0.30$ ,  $We=2.45Wn4$   
 Ola:  $A_w=0.70m$ ,  $ksi=180^\circ$   
 Tanque:  $Wt=1.1Wn4$ ,  $mt=4\%m$ ,  $nt=0.3$

Puede verse en el caso crítico de la Figura 4.29 que el barco sin tanque alcanza la zozobra en menos de 85 seg. Así mismo se puede observar claramente la eficiencia del tanque de estabilización cuando está bien sintonizado, eliminando rápidamente las amplitudes del rolido paramétrico, no dejando que la resonancia paramétrica se desarrolle completamente.

# CAPÍTULO 5

## CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

En el presente trabajo fue utilizada la teoría del tanque de estabilización pasivo tipo U para desarrollar un modelo matemático que describe el movimiento del fluido, así como las fuerzas y momentos que el tanque ejerce sobre el barco. Posteriormente, se acopla el tanque a un modelo dinámico de un barco con tres grados de libertad, con la finalidad de eliminar el rolido paramétrico en mar de proa. Fueron comparados los resultados para dos barcos con características semejantes con diferentes formas de popa, ambos barcos propensos a fuerte resonancia paramétrica. En el presente capítulo se presentan las conclusiones y recomendaciones con base en los resultados obtenidos. Finalmente son hechas recomendaciones para trabajos futuros.

### 5.1 Conclusiones y Recomendaciones Generales

- El modelo propuesto desenvuelve una ecuación no lineal de **tercera orden** para describir el movimiento del fluido dentro del tanque con un grado de libertad. Las acciones (fuerzas y momentos) del tanque son de hasta **cuarta orden**. Acoplando este modelo del tanque a un modelo no lineal de tercera orden, que representa eficientemente as respuestas del barco en mar de proa, podemos demostrar que el tanque disminuye y elimina el rolido paramétrico en diferentes regiones de inestabilidad.

- El modelo aquí propuesto fue desarrollado considerando tanques en U con secciones rectangulares / cuadradas. En tanto, la adaptación para secciones tubulares puede ser hecha sin dificultades.
- Puede concluirse que el modelo aquí propuesto reproduce eficientemente las respuestas del barco sin tanque de estabilización. Para conseguir esto fueron anuladas las fuerzas y momentos que el tanque impone al barco. En estas respuestas puede verificarse las características de las zonas de inestabilidad propias del modelo de tercera orden.
- La principal contribución de este trabajo es la demostración de que, teóricamente, el tanque de estabilización pasivo tipo U elimina a resonancia paramétrica disminuyendo considerablemente las zonas inestables.
- La frecuencia natural del tanque debe ser el primer y más importante parámetro a ser definido, con el objetivo de sintonizar el tanque con el barco, obteniéndose así la geometría del tanque. De acuerdo con las condiciones de proyecto el parámetro siguiente que debe ser definido es la masa del fluido dentro del tanque. Finalmente, el amortiguamiento es el último refinamiento en la disminución del rolido paramétrico. en el presente trabajo, se encontró la mejor respuesta del barco con tanque en la sintonía  $\omega_t / \omega_{n4} = 1.1$ , masa  $m_t / m = 4\%$  y amortiguamiento  $\eta_t = 0.3$ . Se comprueba que el tanque no necesariamente debe estar en la sintonía  $\omega_t = 1.0\omega_{n4}$ , como muchos autores

indican en el análisis del tanque de estabilización tipo U con el barco en mar de través (Lloyd, 1989, Gawad *et al.*, 2001, Yousset, *et al.*, 2003, Phairoh *et al.*, 2005).

- Analizando las simulaciones numéricas en función del tiempo, concluimos que puede eliminarse totalmente el rolido paramétrico en casi sesenta segundos (60 seg.) después de iniciarse el movimiento, como muestra la Figura 4.27, dependiendo el tiempo de las condiciones iniciales del movimiento del barco. Eso pone en evidencia que la acción del tanque es de evitar la amplificación progresiva de rolido, que es característica esencial del rolido paramétrico sin estabilización.
- El tanque pasivo tipo U es más eficiente cuando la tubería horizontal del tanque se localiza más arriba del centro de gravedad (CG), como muestra la Figura 4.24. Cuando el tanque es bien sintonizado no es relevante la localización vertical, pero en la mayoría de los casos el barco llega a alcanzar diferentes frecuencias naturales en un mismo viaje, en estos casos cuando el tanque es desintonizado será más eficiente cuando esté más arriba del CG. Las amplitudes de rolido alcanzadas con el tanque desintonizado aumentan progresivamente cuando el tanque está más abajo del CG. El tanque desintonizado puede ser eficiente para bajas frecuencias de onda (vide Figura 4.24).

- Comparando los barcos, podemos verificar que el TS es más sensible a alcanzar resonancia paramétrica, necesitando una masa y amortiguamiento mayor que el RS. Esta característica puede traer limitaciones en la práctica, necesitando posiblemente de un tanque activo para disminuir a masa del tanque y aumentar la rapidez de la respuesta.
- El hecho de que la sintonía barco-tanque, favorable para cancelar la amplificación paramétrica, no coincide con aquella usualmente definida para la actuación de tanques en mar de través, impone la conclusión de que tanques proyectados para actuar eficientemente en ambas condiciones deberán ser dotados de algún mecanismo de controle.

## 5.2 Trabajos Futuros

- Vemos la necesidad de comparar y validar los resultados numéricos, obtenidos en el presente trabajo, con **resultados experimentales** realizados con modelos en escala reducida.
- Intentar eliminar otras zonas de inestabilidad utilizando un tanque **activo** tipo U, por medio de una bomba de agua en la tubería y/o presión interna en los reservorios, esto para disminuir la masa del fluido dentro del tanque. El tanque activo puede ser gobernado por sistemas de control que pueden ser alimentados por los movimientos del barco, específicamente rolo.

- Estudiar los efectos del tanque tipo U trabajando paralelamente con otros sistemas de estabilización, como quillas de balance o aletas de estabilización.
- Considerar el movimiento del fluido dentro del tanque con **seis grados de libertad** acoplados con los seis grados de libertad del barco, analizando la influencia de los acoplamientos del tanque con los movimientos de avance (surge), desvío (sway) y guiñada (yaw).
- Investigar la influencia del tanque sobre el barco en diferentes ángulos de incidencia de la ola, estudiando los límites de estabilidad correspondientes, sobretodo en **mar de popa**, donde pueden iniciarse otros tipos de inestabilidades dinámicas.
- Estudiar las respuestas del barco con varios tanques en forma de **tubería** en U, colocados a lo largo de la eslora del barco, esto con la intención de disminuir la masa del fluido y aumentar la eficiencia del tanque.
- Analizar la influencia del tanque en U sobre otras formas de barcos propensos a resonancia paramétrica, como porta contenedores. También puede analizarse la influencia del tanque tipo U sobre otros sistemas flotantes.



## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABKOWITZ, M. A., 1969, *Stability and Motion Control of Ocean Vehicles*. Massachusetts, The United States of America, The M. I. T. Press.

ABS, 2004, *Guide for the Assessment of Parametric Roll Resonance in the Design of Container Carriers*, American Bureau of Shipping, Houston, USA.

AHMED, T. M., BALLARD, E. J., HUDSON, D. A. and TEMAREL P., 2006, "Prediction of Parametric Roll Resonance in Regular Waves using a Non-Linear Method". In: *Proceeding of the 9<sup>th</sup> International Conference on Stability of Ships and Ocean Vehicles, STAB2006*, Rio de Janeiro, Brazil, Vol. 1, pp. 89-97.

BAITIS, A. E., SCHMIDT, L. V., 1989. "Ship Roll Stabilization in the U.S. Navy", *Naval Engineers Journal*, 101(3), pp. 43-53.

BALCER, L., 2004, "Roll Response of Ship Fitted with Passive Stabilizing Tank", *Polish Maritime Research*, vol. 11, no. 3(41), pp. 12-20.

BARR, R. A., ANKUDINOV, V., 1977, "Ship Rolling, its Prediction and Reduction using Roll Stabilization", *Marine Technology*, vol. 14, no. 1 (Jan), pp. 19-41.

BASS, D. W., 1998, "Roll Stabilization for Small Fishing Vessels using Paravanes and Anti-Roll Tanks", *Marine Technology*, vol. 35, no. 2 (April), pp. 74-84.

BHATTACHARYYA, R., 1978, *Dynamics of Marine Vehicles*. 1 ed. New York, John Wiley & Sons Inc.

BULIAN, G., FRANCESCUTTO, A. LUGNI, C., 2003, "On the Non-Linear Modeling of Parametric Rolling in Regular and Irregular Waves". In: *Proceedings of 8<sup>th</sup> International Conference on the Stability of Ships and Ocean Vehicles (STAB 2003)*, Madrid, Espanha, pp. 305-323.

DALLINGA, R. P., BLOK J. J., LUTH, H. R., 1998, "Excessive Rolling of Cruise Ships in Head and Following Waves". In: *RINA International Conference on Ship Motions & Manoeuvrability*, Royal Institute of Naval Architects, London.

FRANCE, W. N., LEVADOU, M., TREAKLE, T. W., PAULING, J. R., MICHEL, R. K., MOORE, C., 2003, "An Investigation of Head-Sea Parametric Rolling and its Influence on Container Lashing Systems", *Marine technology*, vol. 40, no. 1 (Jan), pp. 1-19.

FRANCESCUTTO, A., ARMENIO, V., 1990, "On the Stability of Antisymmetric Motions of a Ship Equipped with Passive Antirolling Tanks". In: *Proceeding of 4<sup>th</sup> International Conference on the Stability of Ships and Ocean Vehicles (STAB'90)*, Naples, Italy, pp. 401- 408.

FROUDE, W., 1863, "Remarks on Mr. Scott-Russel's Paper on Rolling", *The Papers of William Froude, Transactions INA*, no. 4, pp. 232-275.

GAWAD, A.F.A., RAGAB, S.A., NAYFEH, A.H., MOOK, D.T., 2001, "Roll Stabilization by Anti-Roll Passive Tanks", *Ocean Engineering*, Vol. 28, pp. 457.

HARUKUNI, T., HIROSHI, S., KATSUJI T., 2003, "A Study on Complicated Roll Motion of a Ship Equipped with an Anti-rolling Tank". In: *Proceedings of 8<sup>th</sup> International Conference on the Stability of Ships and Ocean Vehicles (STAB'2003)*, Madrid, Spain, pp. 607-616.

HARUKUNI, T., SHIGESUKE, I., HIROSHI, S., and MAKIKO, M., 2006, "Model Experiment on Parametric Rolling of a Post-Panamax Containership in Head Waves". In: *Proceeding of the 9<sup>th</sup> International Conference on Stability of Ships and Ocean Vehicles, STAB2006*, Rio de Janeiro, Brazil, Vol. 1, pp. 147-156.

HIMENO, Y., 1981, *Prediction of Ship Roll Damping – State of the Art*. Dept. Naval Architecture and Marine Engineering, The University of Michigan, Report no. 239.

HOOFT, J. P., 1982, *Advanced Dynamics of Marine Structures*. New York, The United States of America, John Wiley & Sons, Inc.

HSU, C. S., 1963, “On the Parametric Excitation of a Dynamic System Having Multiple Degrees of Freedom”, *Transactions of the ASME: Journal of Applied Mechanics*, vol. 30, no. 3 (Sep), pp. 367-372.

IGLESIAS, A. S., PÉREZ, L. R., DELARME, L., 2003, “Investigation of Anti-Roll Tanks using a Particle Method”. In: *Proceedings of 8<sup>th</sup> International Conference on the Stability of Ships and Ocean Vehicles (STAB’2003)*, Madrid, Spain, pp. 617-631.

KORVIN-KROUKOVSKY, B. V., JACOBS, W. R., 1957, “Pitching and Heaving Motions of a Ship in Regular Waves”, *Transactions of SNAME*, vol. 65, pp.590-632.

LEVADOU, M., PALAZZI, L., 2003, “Assessment of Operational Risks of Parametric Roll”, In: *Proceeding of World Maritime Technology Conference (WMTC’2003)*, Society of Naval Architects and Marine Engineers, San Francisco, United States.

LEWIS, E., 1989, *Principles of Naval Architecture – Vol. III: Motion in Waves and Controllability*. 2<sup>nd</sup> revision. New Jersey, The United States of America, SNAME.

LLOYD, A.R.J.M., 1989, “Roll Stabilization”. In: Paffett, J., *Seakeeping: Ship Behavior in Rough Weather*, 1 ed., chapter 18, Chichester, England, Ellis Horwood Limited.

MEYERS, W. G., SHERIDAN, D. J., SALVESEN, N., 1975, *Manual – NSRDC Ship-Motion and Sea-Load Computer Program*, Naval Ship Research and Development Center. Maryland, The United States of America, Report no. 3376.

MUNIF, A., IKEDA, Y., FUJIWARA, T. and TAKAWARA, T., 2006, "Parametric Roll Resonance of a Large Passenger Ship in Dead Ship Condition in all Heading Angles". In: Proceeding of the 9<sup>th</sup> International Conference on Stability of Ships and Ocean Vehicles, STAB2006, Rio de Janeiro, Brazil, Vol. 1, pp. 81-87.

NEVES, M. A. S., VALERIO, L., 1994, "Parametric Stability of Fishing Vessels". In: *Proceedings of 5th International Conference on the Stability of Ships and Ocean Vehicles (STAB'94)*, Florida, United States.

NEVES, M. A. S., SALAS, M., VALERIO, L., 1997, "An Investigation on the Influence of Stern Hull Shape on the Roll Motion and Stability of Small Fishing Vessels". In: *Proceedings of 6th International Conference on the Stability of Ships and Ocean Vehicles (STAB'97)*, Varna, Bulgaria, pp. 259-269.

NEVES, M. A. S., PÉREZ, N. A., VALERIO, L., 1999, "Stability of Small Fishing Vessels in Longitudinal Waves", *Ocean Engineering*, vol. 26, no. 12 (Dec), pp. 1389-1419.

NEVES, M. A. S., VALERIO, L., 2000, "Parametric Resonance in Waves of Arbitrary Heading". In: *Proceedings of 7th International Conference on Ship Stability and Ocean Vehicles (STAB'2000)*, Launceston, Australia, pp. 680-687.

NEVES, M. A. S., 2002, "On the Excitation of Combination Modes Associated with Parametric Resonance in Waves". In: *Proceedings of 6th International Ship Stability Workshop*, Webb Institute, New York.

NEVES, M.A.S., RODRIGUEZ, C., 2004, "A non-Linear Mathematical Model of Higher Order for Strong Parametric Resonance of the Roll Motion of Ship in Waves", In: Proceeding of International Maritime Conference on Design for Safety, Osaka, pp. 139-145.

NEVES, M.A.S., RODRIGUEZ, C., 2005, “A non-Linear Mathematical Model of Higher Order for Strong Parametric Resonance of the Roll Motion of Ship in Waves”, *Marine Systems & Ocean Technology – Journal of SOBENA*, Vol. 1 No. 2, pp. 69-81.

NEVES, M.A.S., RODRIGUEZ C., 2006, “An Investigation on Roll Parametric Resonance in Regular Waves”. In: *Proceeding of the 9<sup>th</sup> International Conference on Stability of Ships and Ocean Vehicles, STAB2006*, Rio de Janeiro, Brazil, Vol. 1, pp. 99-108.

PARKER, M.N., 1965, “Brief Review of Ship Stabilization Systems”, *Naval Engineers Journal*, vol. 77, no. 4, pp. 640-646.

PÉREZ, N. A., 1985, *Desenvolvimento de Algumas Técnicas Experimentais em Ondas Regulares*. Tese de M.Sc., COPPE – Eng. Oceânica, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

PÉREZ, N., SANGUINETTI, C., 1995, Experimental Results of Parametric Resonance Phenomenon of Roll Motion in Longitudinal Waves for Small Fishing Vessels”. *International Shipbuilding Progress*, vol. 42, no. 431 (Sep), pp. 221-234.

PÉREZ, N., SANGUINETTI, C., LORCA, O., 2000, “Resonancia Paramétrica del Balance Transversal en el Dominio de la Velocidad. (Resultados Experimentales)”, *Revista Ingeniería Naval*, año LXVII, no. 770 (Abr), pp. 98-102.

PERNAMBUCO, T.A.M., 1990, *Estabilidade de Navios em Ondas Obliquas*. Tese de M.Sc., COPPE - Eng. Oceânica, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

PHAIROH, T., HUANG J.K., 2005, “Modeling and Analysis of Ship Roll Tank Stimulator Systems”, *Ocean Engineering*, vol. 32, pp. 1037-1053.

RAO, S., 1995, *Mechanical Vibrations*. 3rd Ed. New York, The United States of America, Addison-Wesley Publishing Company, Inc.

RODRIGUEZ, C. A., 2004, “Estabilidade Dinâmica de Navios: Um Modelo Não Linear de Terceira Ordem”, M. Sc. Tese, COPPE-Universidade Federal de Rio de Janeiro, Brasil.

SANGUINETTI, C. F. O., 1985, *Estabilidade Dinâmica de Navios Pesqueiros em Ondas Regulares*. Tese de M.Sc., COPPE - Eng. Oceânica, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

SALAS, M., 1991, *Limites de Estabilidade de Navios Pesqueiros em Frequências Ressonantes*. Tese de M.Sc., COPPE - Eng. Oceânica, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

SALVESEN, N., TUCK, O.E., FALTINSEN, O., 1970, “Ship Motions and Sea Loads”, *Transactions of SNAME*, vol. 78, pp. 250-287.

SELLARS, F.H., MARTIN, J.P., 1992, “Selection and Evaluation of Ship Roll Stabilization Systems”, *Marine Technology*, vol. 29, no. 2, pp. 84-101.

SHIN, Y.S., BELENKY, V.L., PAULLING, J.R., WEEMS, K.M., LIN, W.N., 2004, “Criteria for Parametric Roll of Large Containerships in Longitudinal Seas”. In: *The Society of Naval Architects & Marine Engineers Annual Meeting*, pp. 117-147, United States, Sep.

SKOMEDAL, N., 1982, “Parametric Excitation of Roll Motion and its Influence on Stability”. In: *Proceeding of the 2<sup>nd</sup> International Conference on Stability of Ships and Ocean Vehicles, STAB 82*, Tokyo, Japan, pp. 113-125.

SPYROU, K. J., 2000, “Designing Against Parametric Instability in Following Seas”, *Ocean Engineering*, vol. 27, no. 6 (Jun), pp. 625-653.

SWAMEE, P.K. AND JAIN, A. K., 1976. "Explicit Equations for pipe-flow Problems", *Journal of Hydraulic Division Proceedings, ASCE*, pp. 657-664.

TAMURA, Y., FUJII, K., OHATSUKI, T., WAKAHARA, T., KOSHAKA, R., 1995, "Effectiveness of Tuned Liquid Dampers under Wind Excitations", *Engineering Structures*, vol. 17, no. 9, pp. 609-621.

TREKLE, T.W., MOOK, D.T., LIAPIS, S.I., NAYFEH, A.H., 2000, "A Time Domain Method to Evaluate the Use the Moving Weights to Reduce the Roll Motion of a Ship", *Ocean Engineering*, vol. 27, pp. 1321-1343.

VALERIO, L., 1994, *Estabilidade Paramétrica de Navios em Ondas Longitudinais*. Tese de M.Sc., COPPE – Eng. Oceânica, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

VALERIO, L., 2000, *Sobre a Estabilidade Dinâmica de Navios em Ondas*. Tese de D.Sc., COPPE - Eng. Oceânica, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

VASTA, J., GIDDINGS, A.J., TAPLIN, A., STILWELL, J.J., 1961, "Roll Stabilizations by Mean of Passive Tanks", *Transactions of SNAME*, vol. 69, pp. 411-439.

WEBSTER, W.C., 1967, "Analysis of the Control of Activated Anti-Roll Tanks", *Transactions of SNAME*, vol. 75, pp. 296-326.

WEBSTER, W.C., DALZELL, J. F., BARR, R. A., 1988, "Prediction and Measurement of the Performance of Free-Flooding Ship Anti-rolling Tanks", *Transactions of SNAME*, vol. 96, pp. 333-364.

WEBSTER, B.N., BIRMINGHAM, R., JONES, E., ROSKILLY, T., 2003, "Developing an Artificially Intelligent Roll Stabilization System for use on Fishing Vessels". In: *Proceeding of 8th International Conference on the Stability of Ships and Ocean Vehicles (STAB'2003)*, Madrid, Spain, pp. 757-778.

WHITE, FRANK M., 1999, "Escoamentos Viscoso em Dutos". In: Herszterg, C.A., *Mecânica dos Fluidos*, 4 ed., capítulo 6, Rio de Janeiro, Brasil, Mc Graw Hill.

YOUSSEF, K. S., RAGAB, S. A., NAYFEH, A. H., MOOK, D. T., 2002, "Design of Passive Anti-Roll Tanks for Roll Stabilization in the Nonlinear Range". *Ocean Engineering*, vol. 29, no. 2, pp. 177-192.

YOUSSEF, K. S., MOOK, D. T., NAYFEH, A. H., RAGAB, S. A., 2003, "Roll Stabilization by Passive Anti-Roll Tanks Using an Improved Model of the Tank-Liquid Motion", *Journal Vibration and Control*, vol. 9, no. 7 (July), pp. 839-862.



## **APÉNDICE I**

### **MASA ADICIONAL, AMORTIGUAMIENTO, RESTAURACIÓN Y FUERZAS DE EXCITACIÓN PARA LOS BARCOS RS Y TS**

### I.1. Coeficientes de Masa Adicional

Como fue mencionado anteriormente, los coeficientes de masa adicional pueden ser calculados utilizando la teoría potencial asociada a la teoría de las fajas. Meyers *et al.* (1975) presentan un programa numérico basado en Salvesen *et al.* (1970) que permite calcular estos coeficientes para velocidad de avance nula. El efecto de la velocidad es incorporado utilizando las expresiones presentadas en Salvesen *et al.* (1970), y reproducidas por Lewis (1989). A seguir son presentados los coeficientes de masa adicional para velocidad de avance nula y mar de proa ( $\chi=180^\circ$ ):

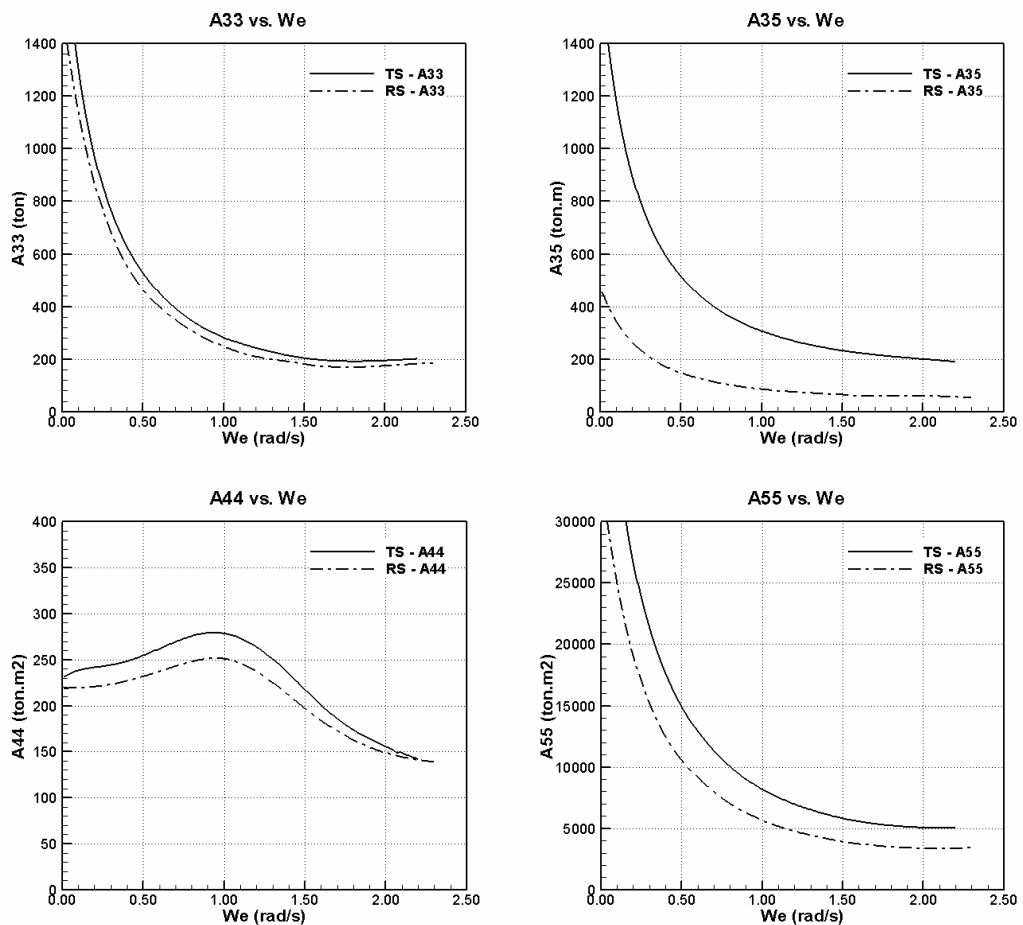
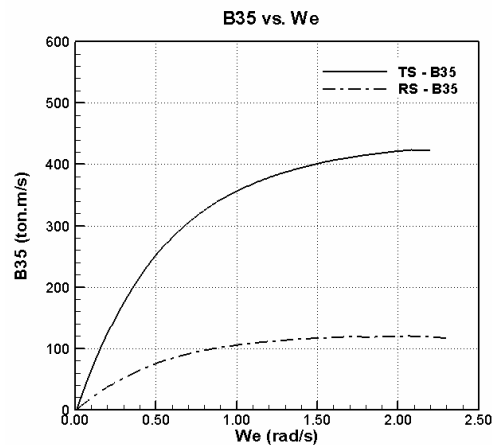
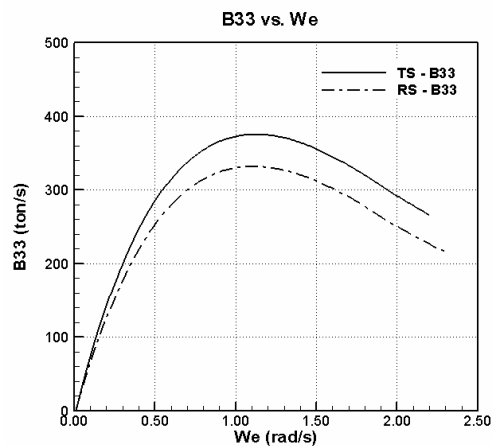


Fig. AI-1.- Masas adicionales para los barcos RS y TS ( $F_n = 0.0$ ,  $\chi=180^\circ$ )

## I.2. Coeficientes Lineales de Amortiguamiento (Potencial)

Como fue mencionado anteriormente, (ver Capítulo 4) la teoría potencial da también resultados satisfactorios en el cálculo de los coeficientes de amortiguamiento en arfada y cabeceo. Estos coeficientes fueron calculados (para velocidad de avance nula) utilizando el programa descrito en Meyers *et al.* (1975), y posteriormente corregidos para llevar en cuenta el efecto de la velocidad. Para mar de proa ( $\chi = 180^\circ$ ), los coeficientes de amortiguamiento en  $F_n = 0.0$  son presentados en las figuras a seguir:



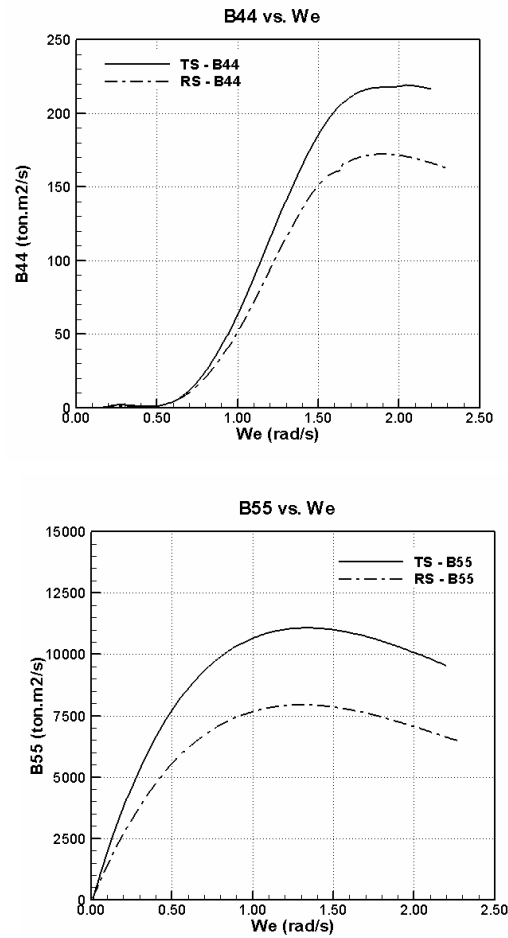
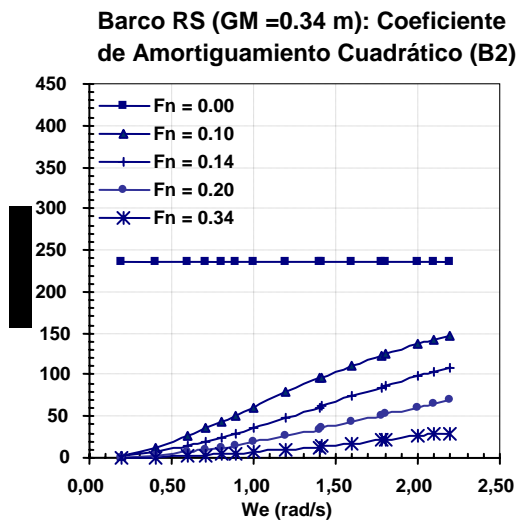
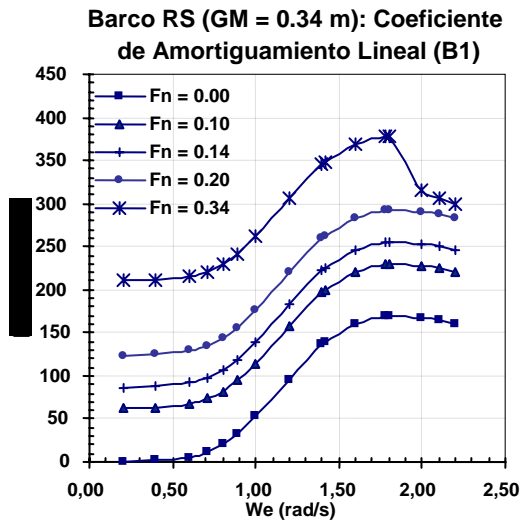


Fig. AI-2.- Amortiguamientos potenciales para los barcos RS y TS ( $F_n = 0.0$ ,  $\chi = 180^\circ$ )

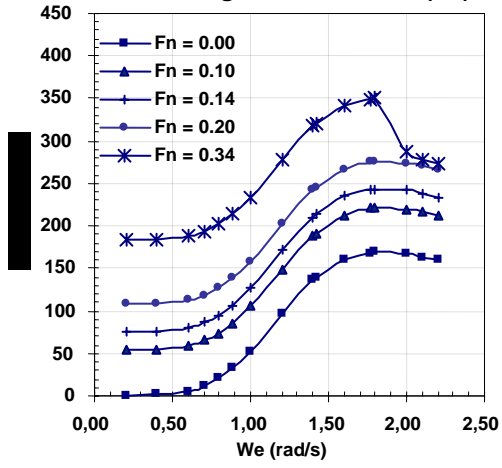
### I.3. Coeficientes No-Lineales de Amortiguamiento de Rolido

Para el caso del amortiguamiento de rolido, la teoría potencial no se muestra satisfactoria. Himeno (1981) presenta un método semi-empírico desarrollado por Ikeda que lleva en cuenta las no linealidades del amortiguamiento (causadas principalmente por los efectos viscosos) y la velocidad de avance. Para una fácil inclusión en la ecuación de movimiento, el amortiguamiento calculado según Ikeda es descompuesto en dos partes: una que varía linealmente con la velocidad angular de rolido, y otra que varía en forma cuadrática (ver Capítulo 3). Los coeficientes de estas partes son respectivamente,  $B_1$  y  $B_2$ . A continuación, se presenta los

coeficientes de amortiguamiento para los barcos RS y TS para las condiciones de  $\overline{GM}$  y números de Froude ( $F_n$ ) ensayados experimentalmente, en función de la frecuencia de oscilación de rolido.



Barco RS (GM = 0.54 m): Coeficiente de Amortiguamiento Lineal (B1)



Barco RS (GM = 0.54 m): Coeficiente de Amortiguamiento Cuadrático (B2)

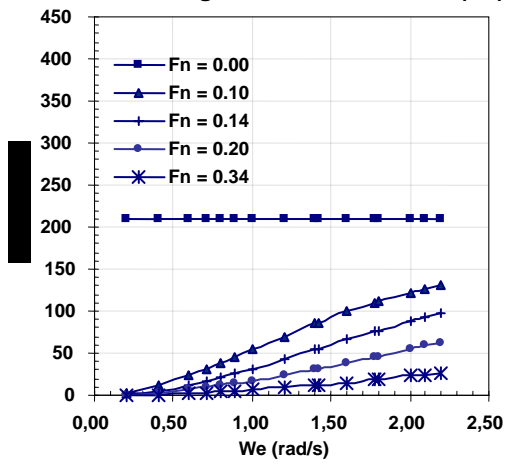
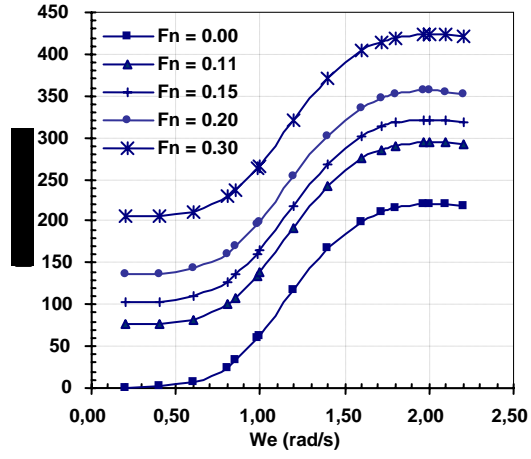
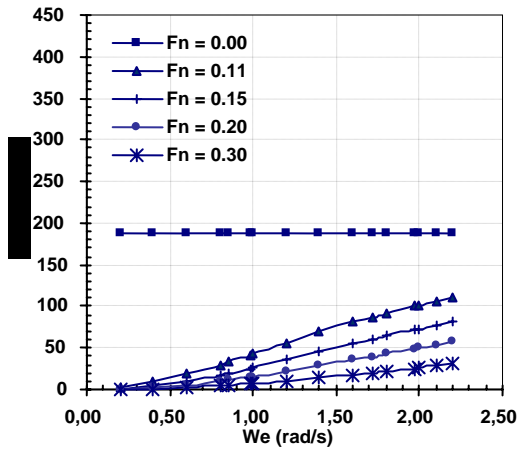


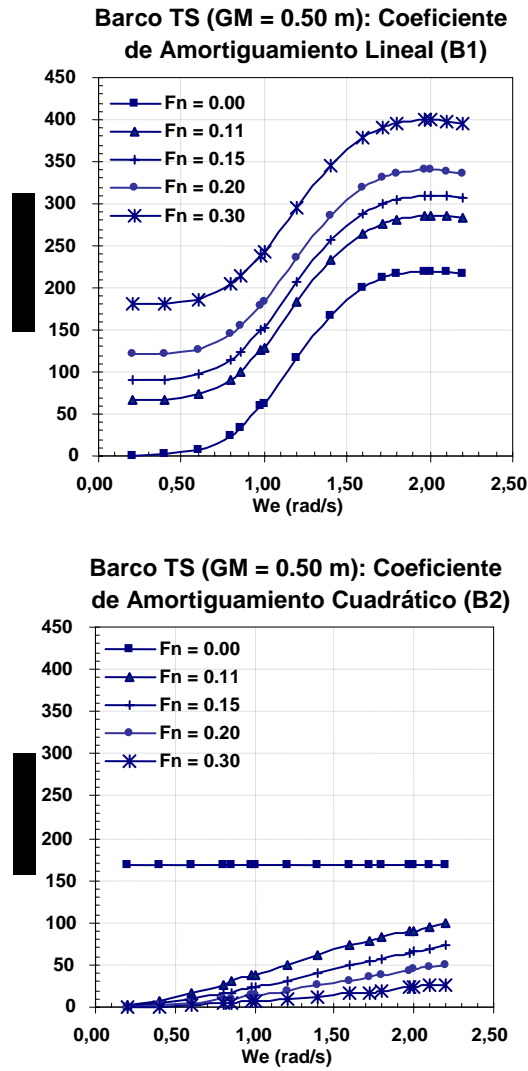
Fig. AI-3.- Coeficientes de amortiguamiento de Rolido según Himeno (1981) para el barco RS

**Barco TS (GM = 0.37 m): Coeficiente de Amortiguamiento Lineal (B1)**



**Barco TS (GM = 0.37 m): Coeficiente de Amortiguamiento Cuadrático (B2)**





**Fig. AI-4.- Coeficientes de amortiguamiento en Rolido según Himeno (1981) para el barco TS**

**I.4. Coeficientes de Restauración debido al Paso de la Ola, mar de proa.**

**I.4.1 En Arfada**



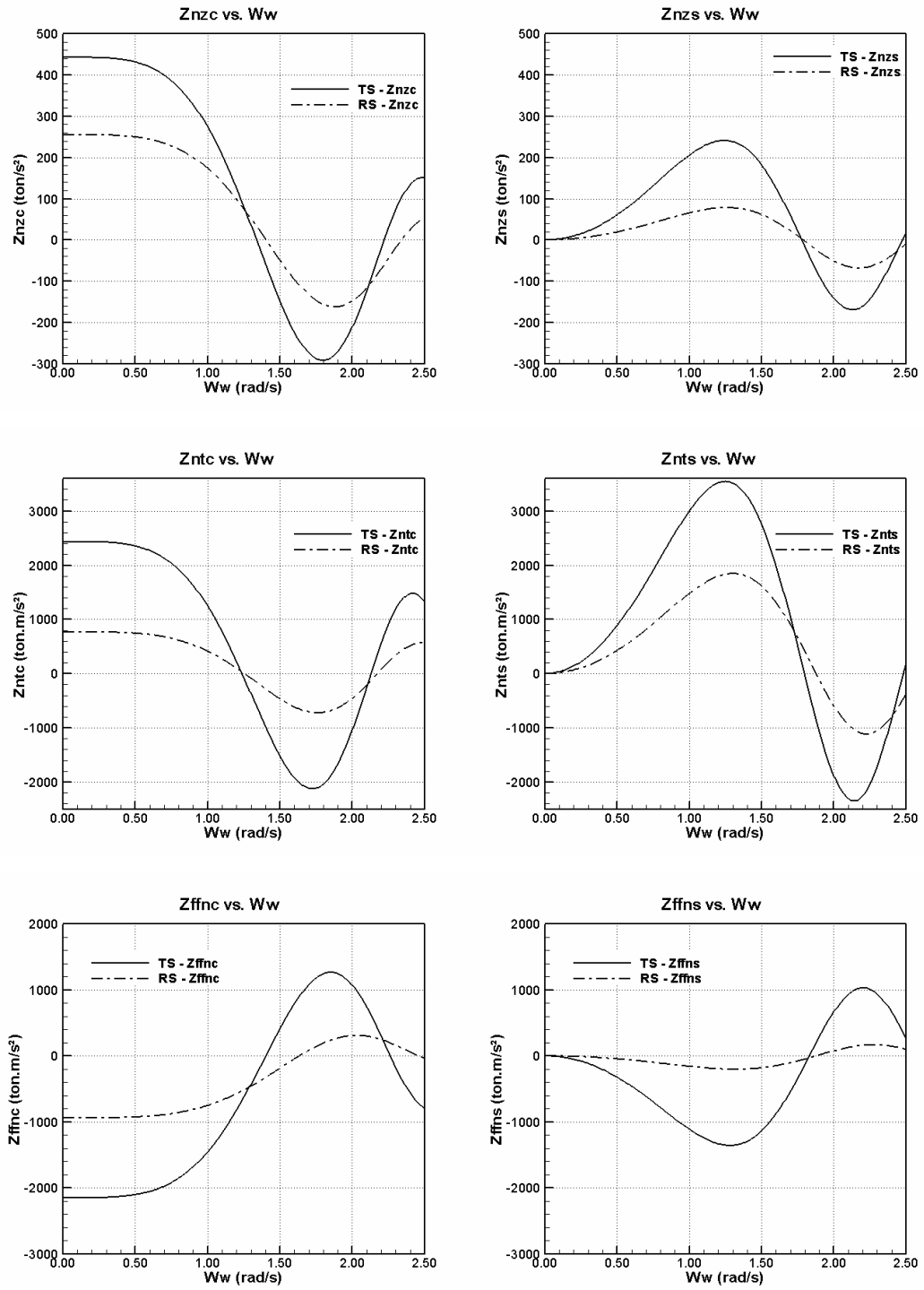


Fig. AI-5.- Coeficientes de restauración debido al paso de la ola en Arfada, mar de proa.

### I.4.2 En Rolido

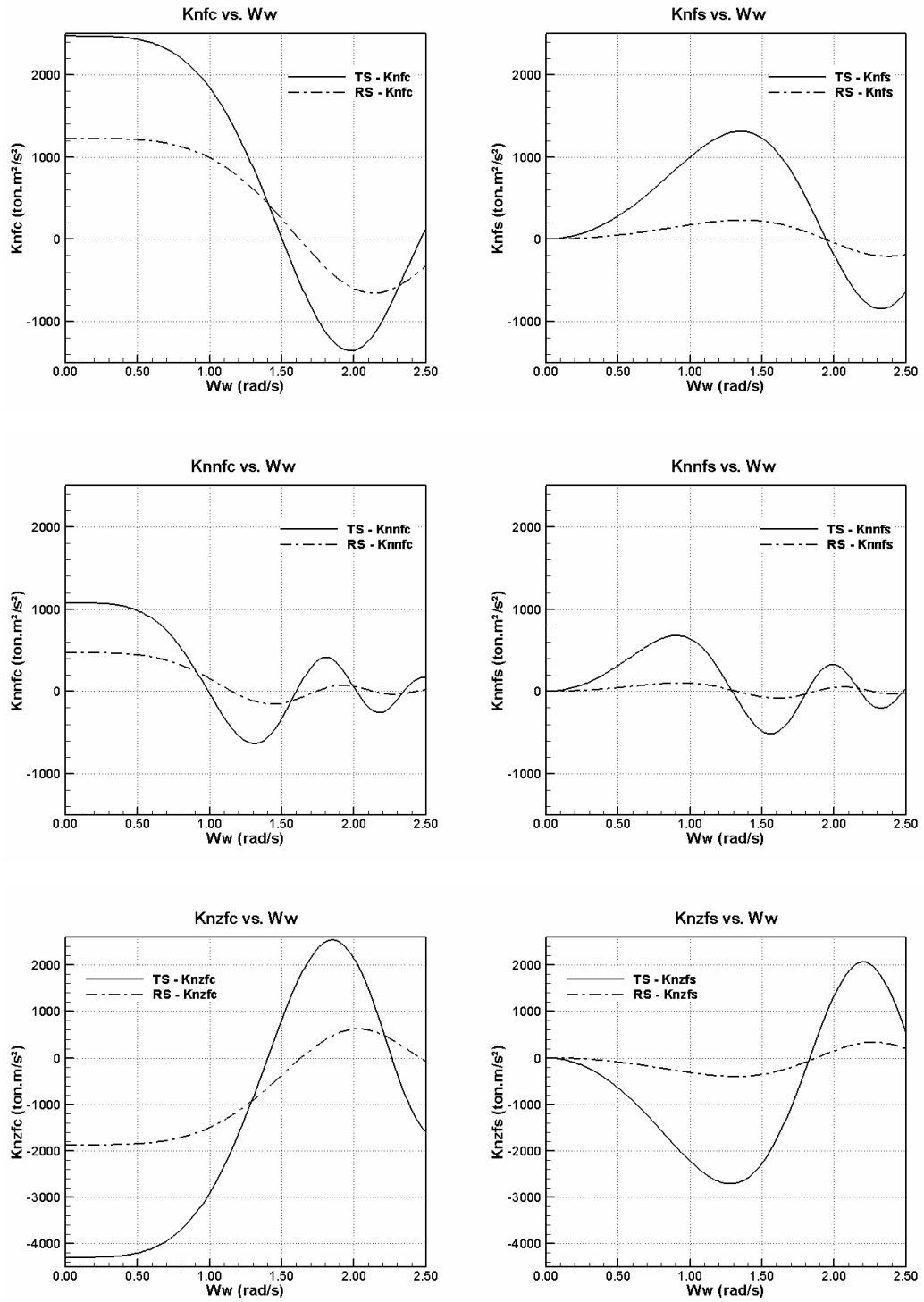
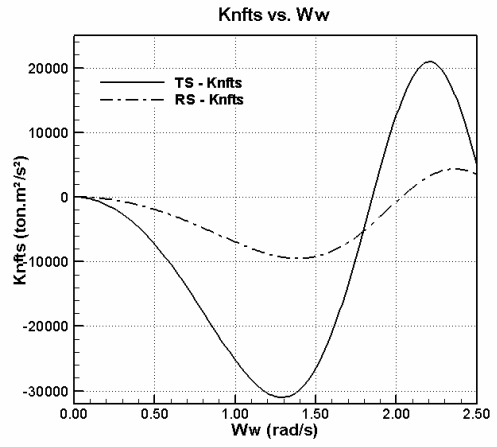
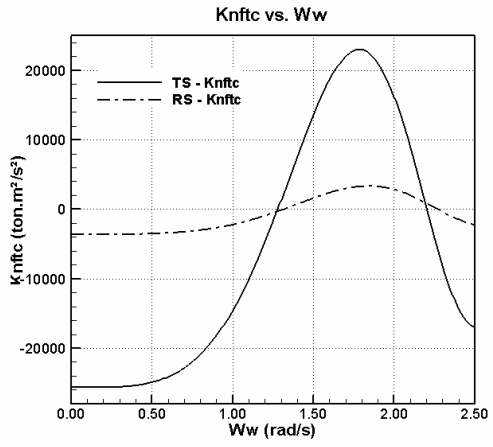
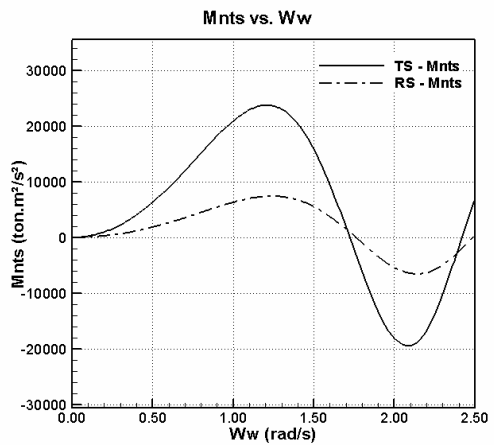
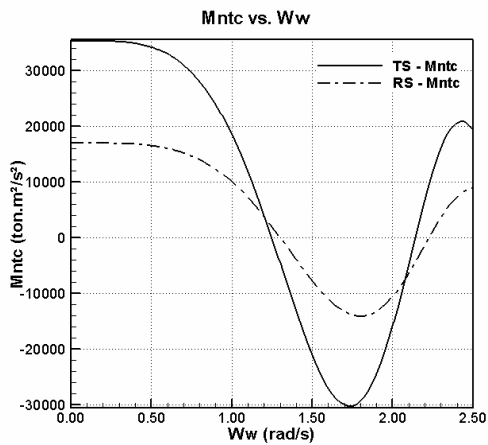
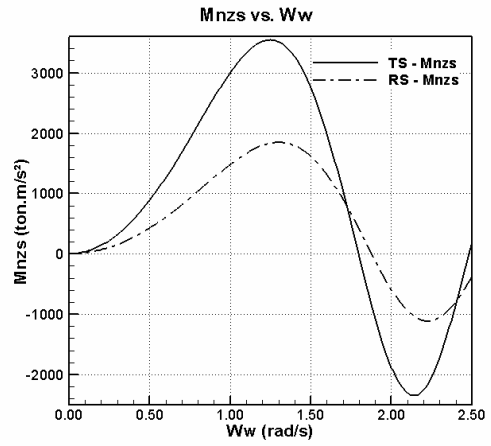
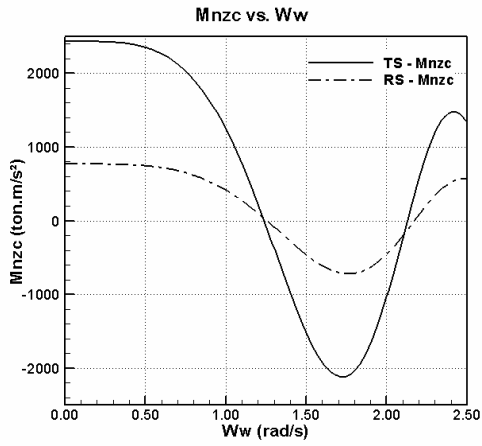


Fig. AI-6.- Coeficientes de restauración debido al paso de la ola en Roldo , mar de proa.



### I.4.3 En Cabeceo



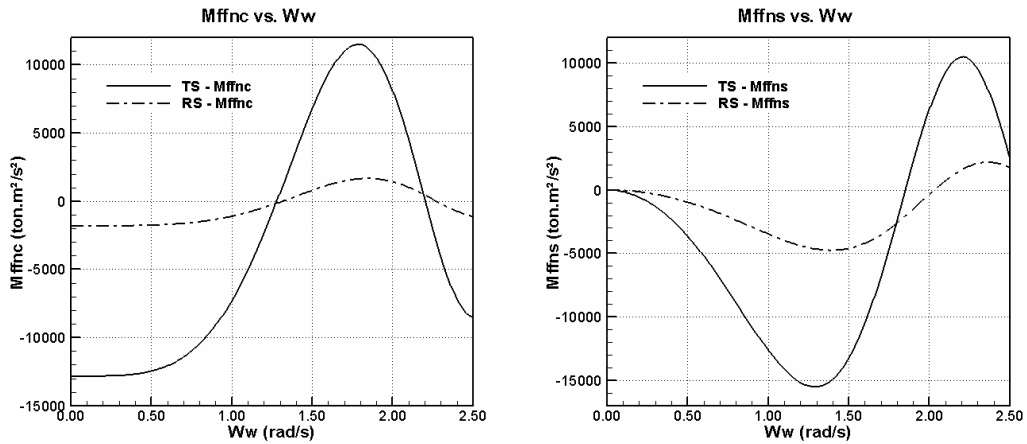
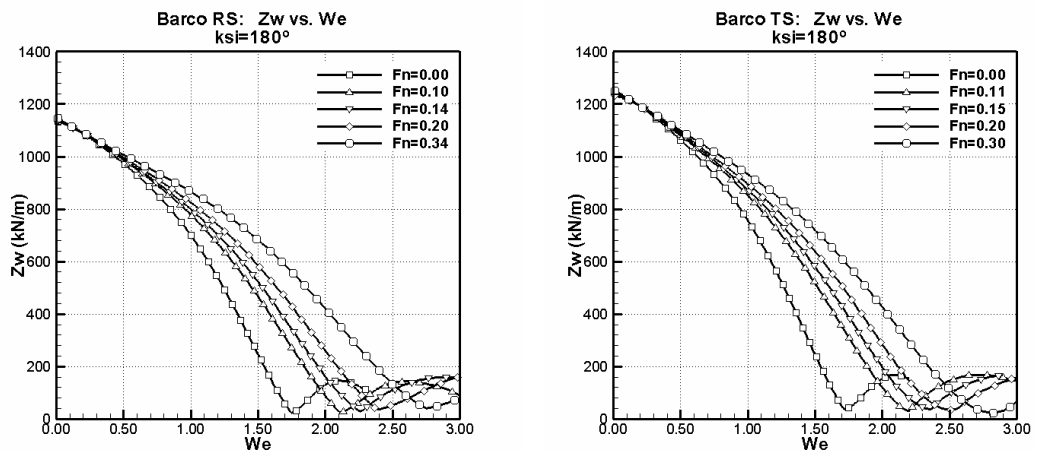


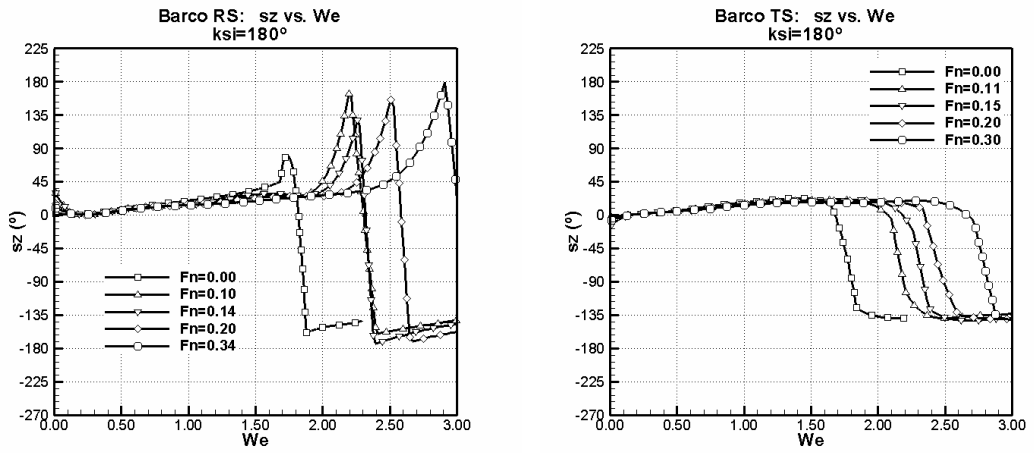
Fig. AI-7.- Coeficientes de restauración debido al paso de la ola en Cabeceo, mar de proa.

### I.5. Fuerzas de Excitación debido a la Ola

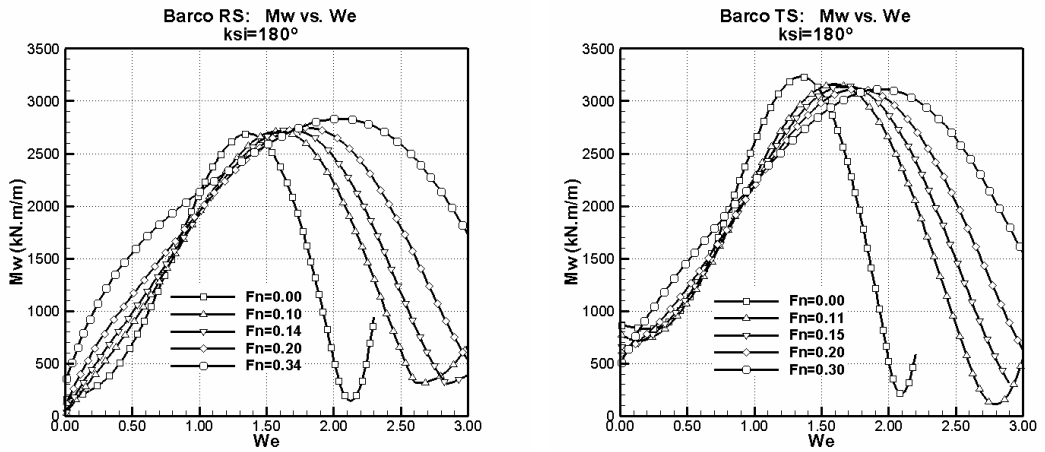
Las fuerzas y momentos de excitación, compuestas por las fuerzas de Froude-Kriloff y las fuerzas de difracción, también son calculadas aquí utilizando la teoría potencial y aplicando la teoría de las fajas. El programa usado es presentado por Meyers *et al.* (1975), el cual calcula las fuerzas de Excitación y sus fases para diferentes números de Froude, y en función de las frecuencias de encuentro. A seguir son mostradas las amplitudes de las fuerzas de excitación para arfada y cabeceo, y sus respectivas fases en relación a la ola para los barcos RS y TS, en mar de proa ( $\chi = 180^\circ$ ).



**Fig. AI-8.- Fuerza de Excitación (por unidad de amplitud de ola) en Arfada (barcos RS e TS)**



**Fig. AI-9.- Fase de la fuerza de Excitación en Arfada (barcos RS y TS)**



**Fig. AI-10.- Momento de Excitación (por unidad de amplitud de ola) en Cabeceo (barcos RS y TS)**

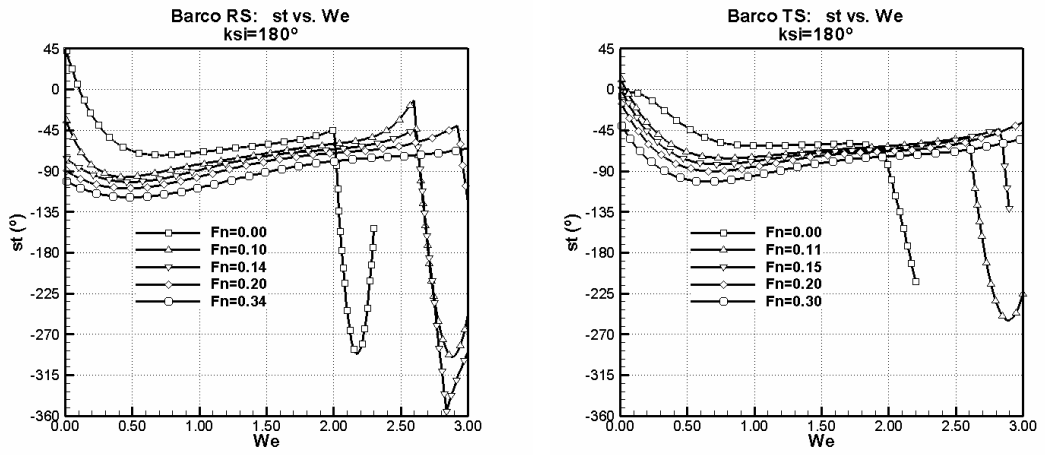


Fig. AI-11.- Fase del momento de Excitación en Cabeceo (barcos RS y TS)

### I.5 Coeficientes de Restauración Hidrostática en Rolido

Coef. Rolido	RS		TS	
	GM = 0.34 m	GM = 0.48 m	GM = 0.37 m	GM = 0.50 m
$K_{\phi}$	574.0	810.4	669.8	905.2
$K_{\phi\phi\phi}$	287.2	228.9	-728.9	-860.1
$K_{5\phi}$	-936.2	-888.8	330.2	493.8
$K_{7\phi}$	337.0	310.9	-206.7	-288.8

Tabla AI.1 Coeficientes de Restauración Hidrostática en rolando debido al rolando puro (Barcos RS e TS)

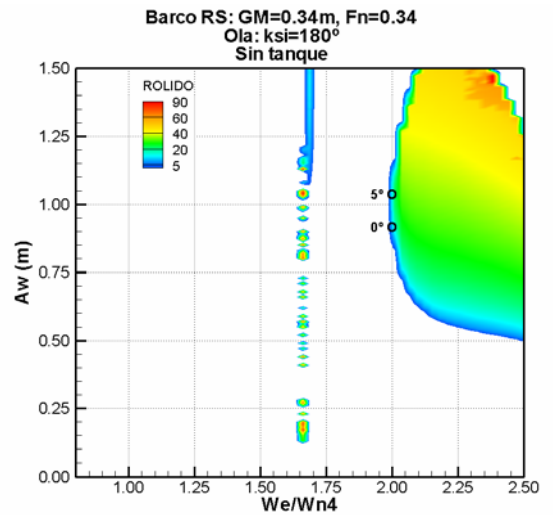
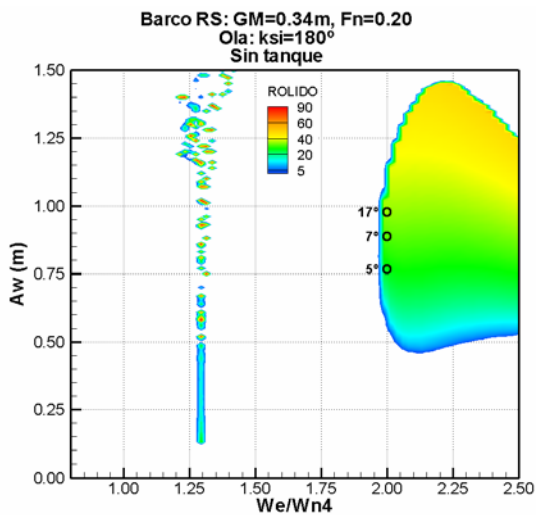
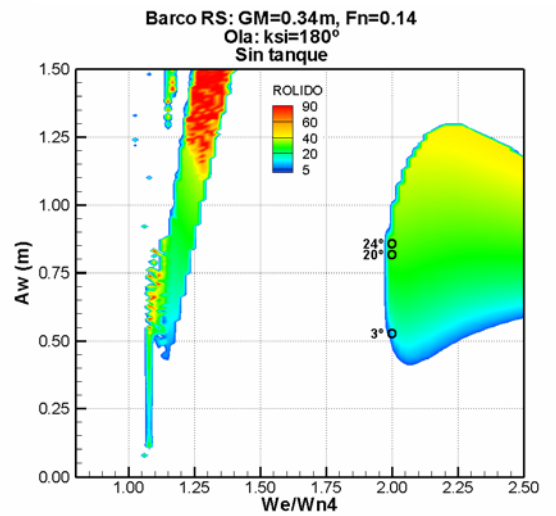
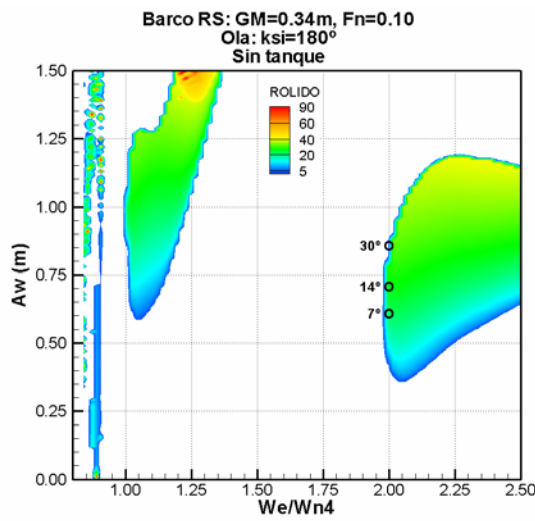
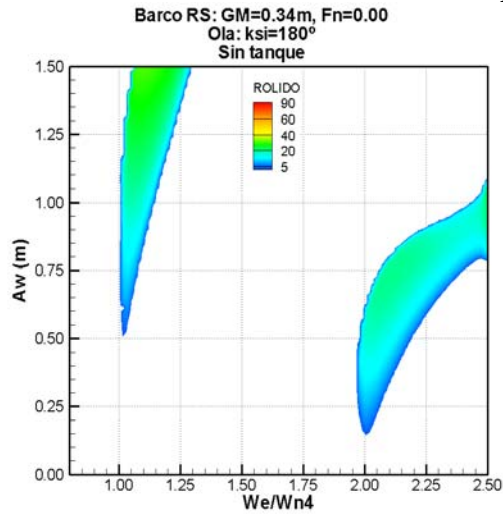
## **APÉNDICE II**

### **RESPUESTAS DE LOS BARCOS RS Y TS: CON Y SIN TANQUE DE ESTABILIZACIÓN**

II.1. Barco RS: Respuestas Sin Tanque de Estabilización

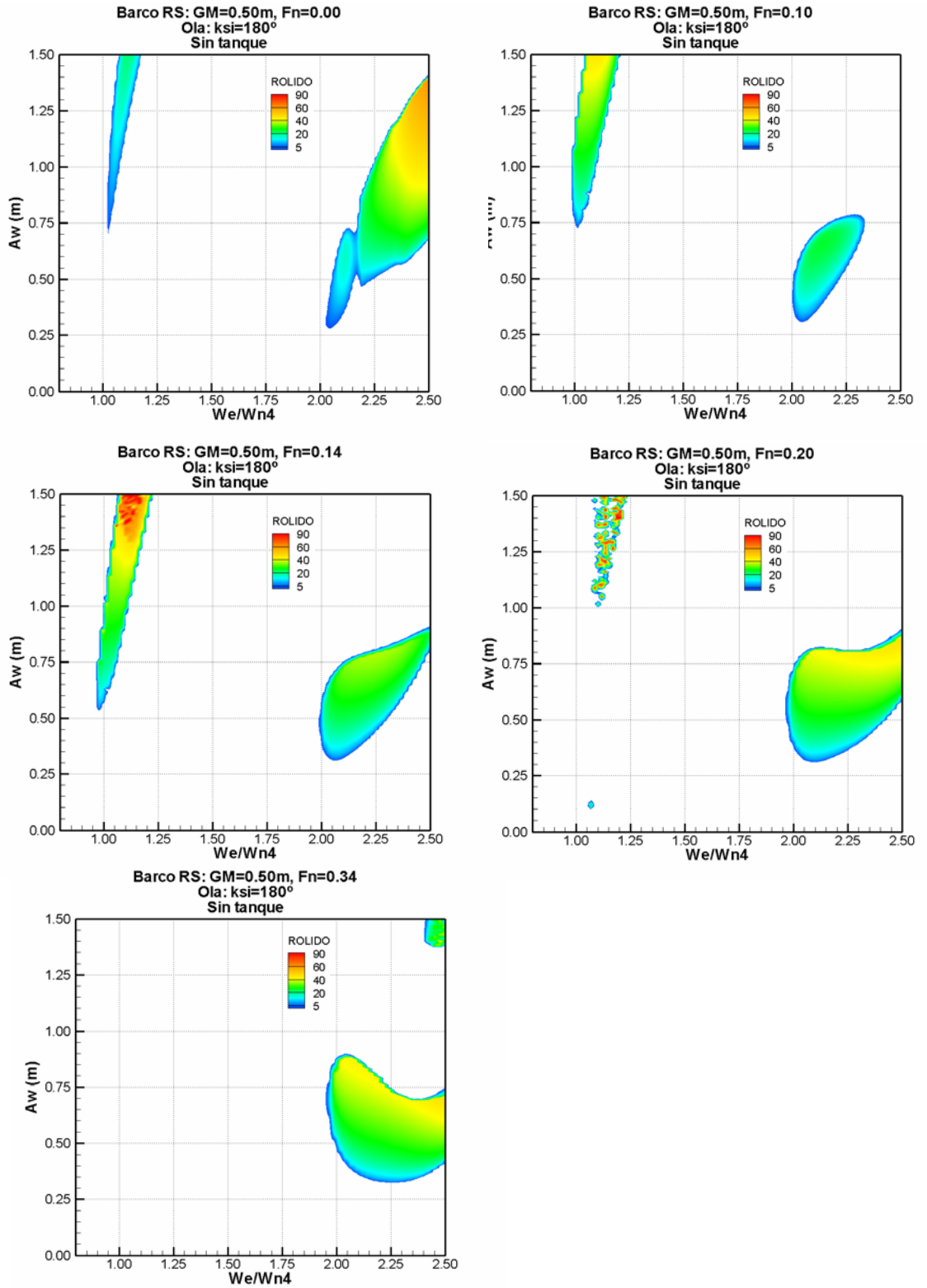
Barco RS: GM=0.34m,  $\omega_n= 0.708$  rad/s

Sin Tanque



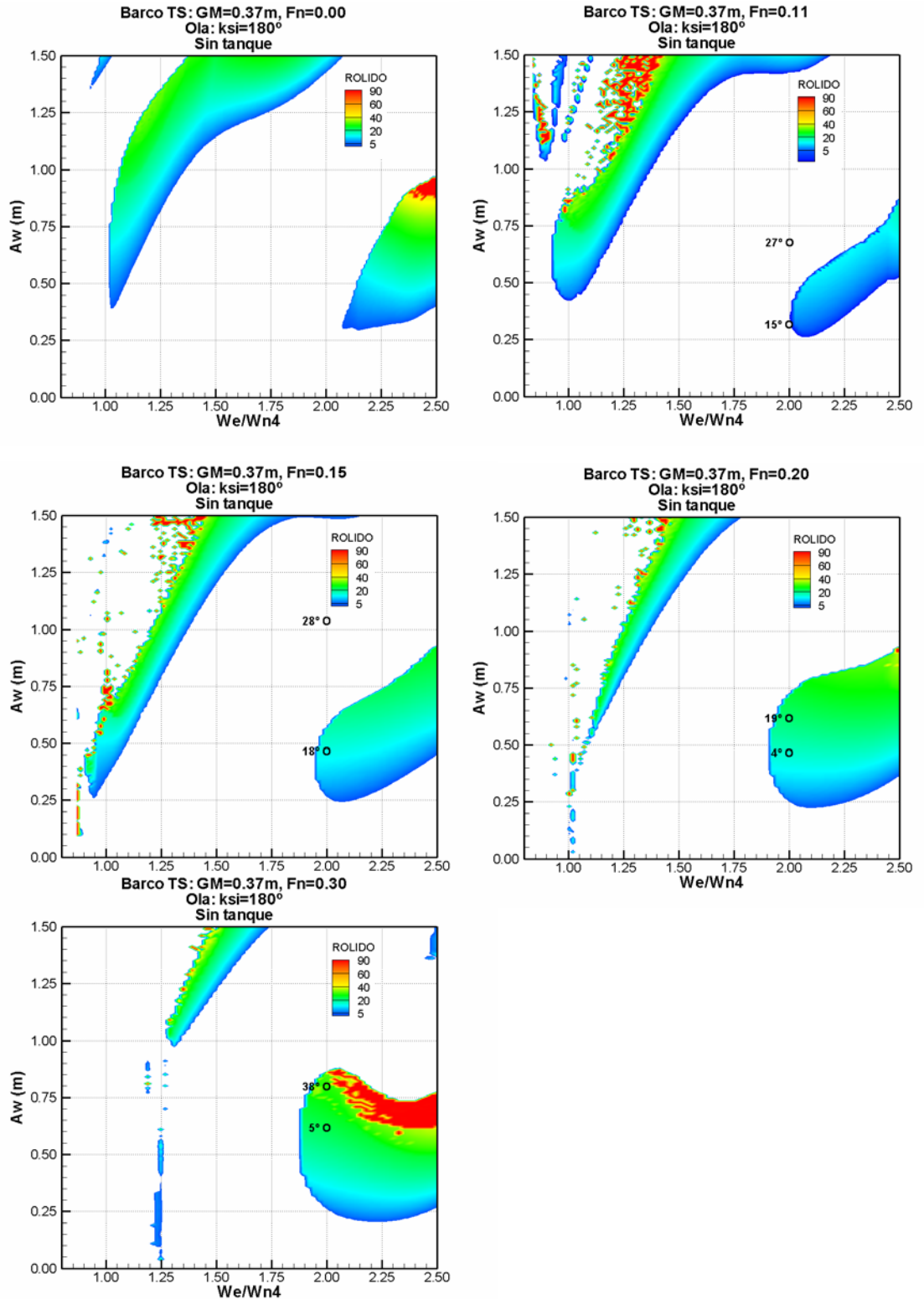


## Barco RS: GM=0.50m, $\omega_n=0.858$ rad/s Sin Tanque

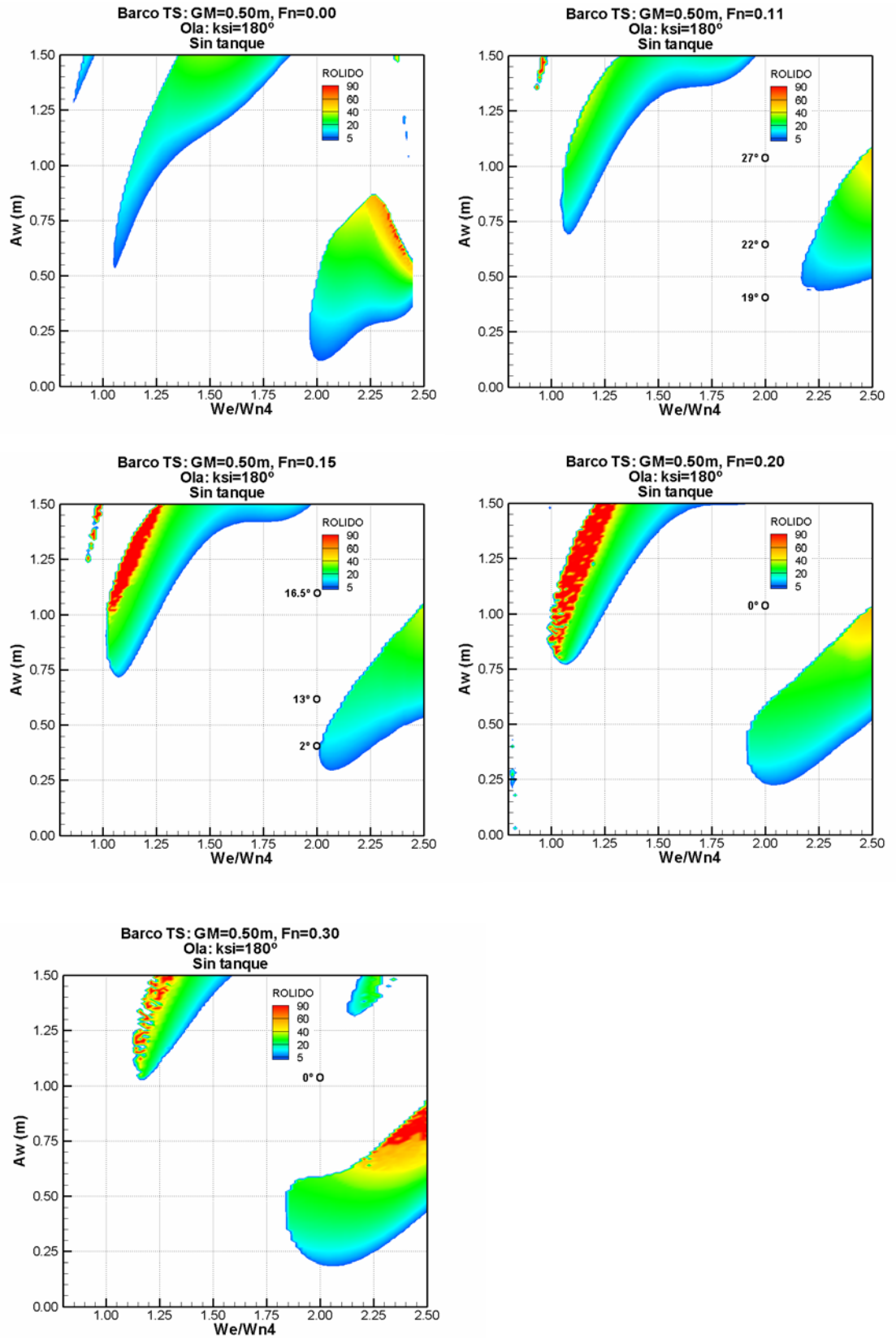


## II.2. Barco TS: Respuestas Sin Tanque de Estabilización

### Barco TS: GM=0.37m, $\omega_n=0.858$ rad/s Sin Tanque

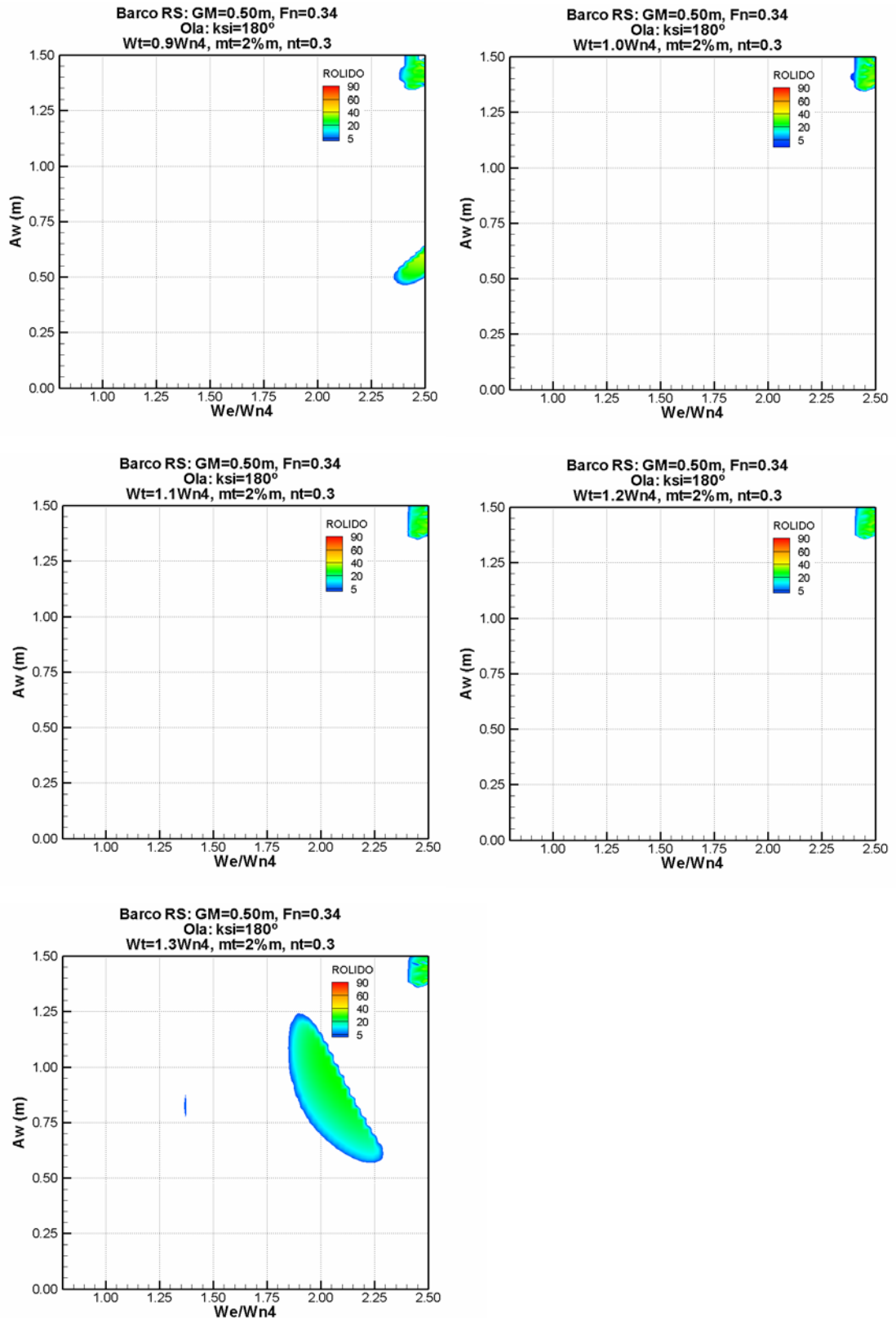


## Barco TS: GM=0.50m, $\omega_n=0.984$ rad/s Sin Tanque

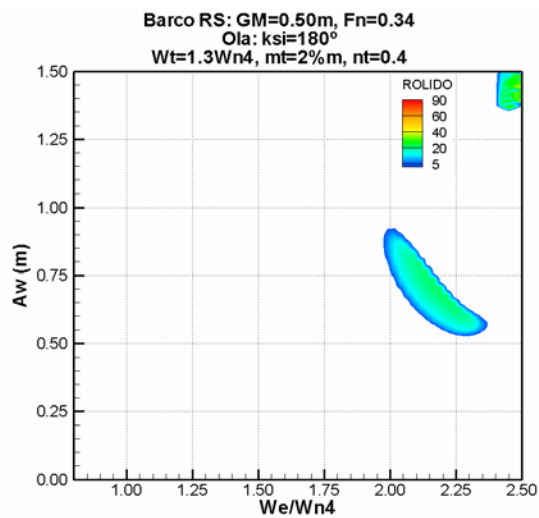
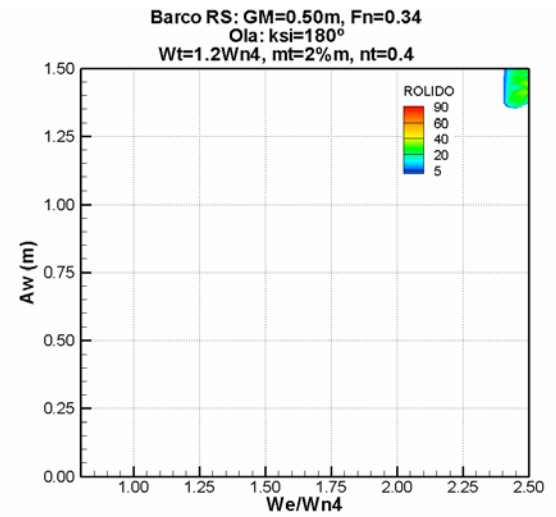
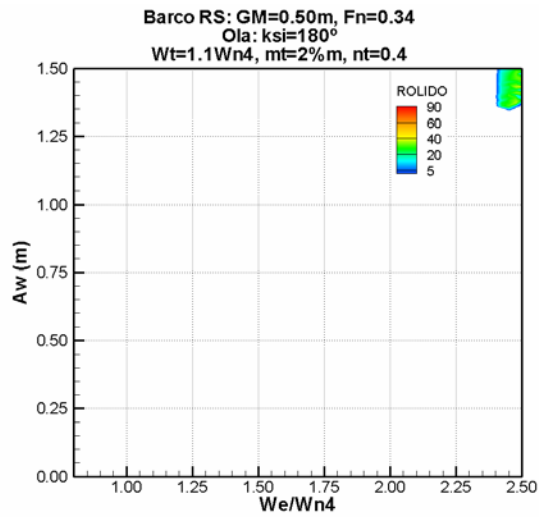
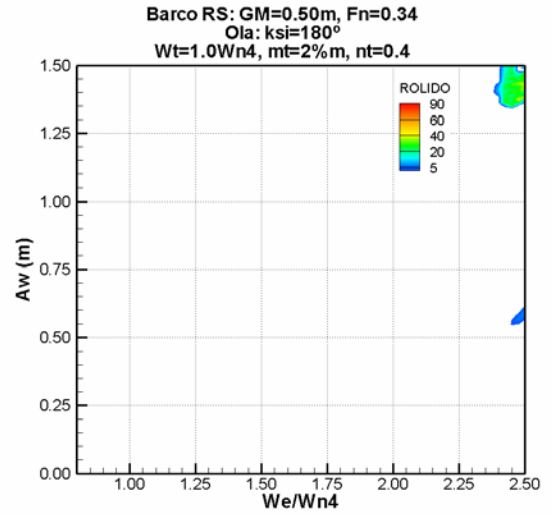
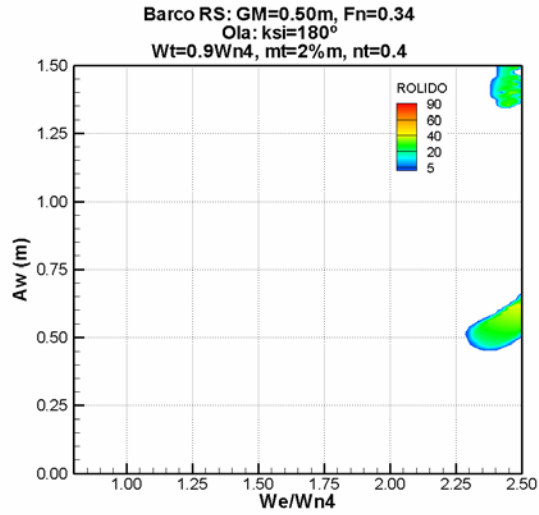


### II.3. Barco RS: Respuestas Con Tanque de Estabilización

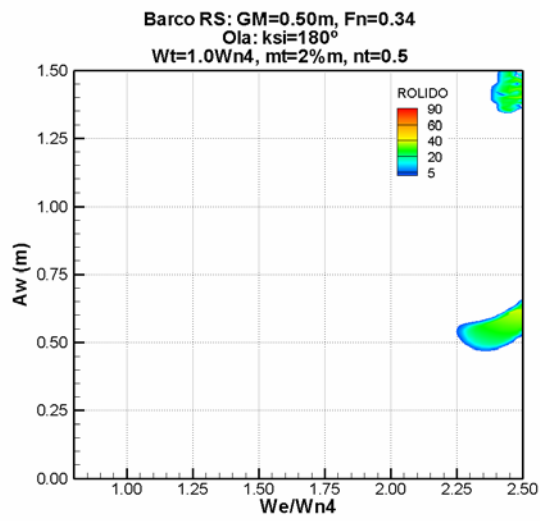
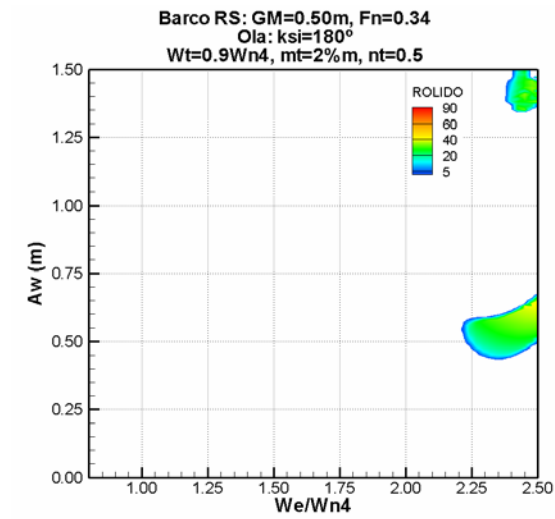
#### Barco RS: GM=0.50, Fn=0.34 mt=2%*m*, nt=0.3

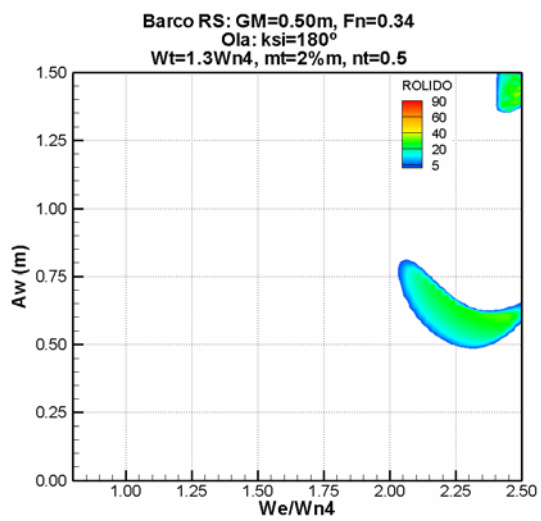
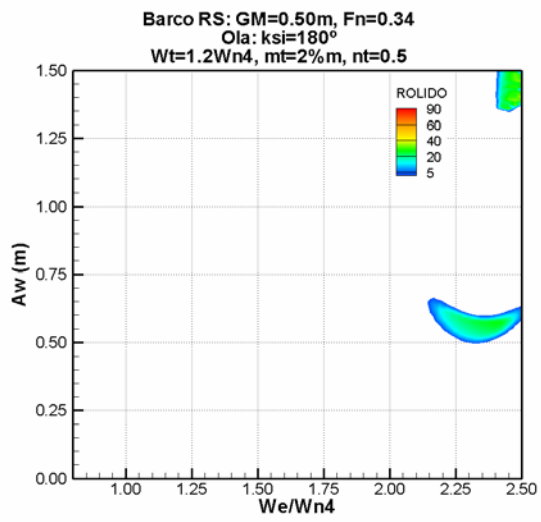
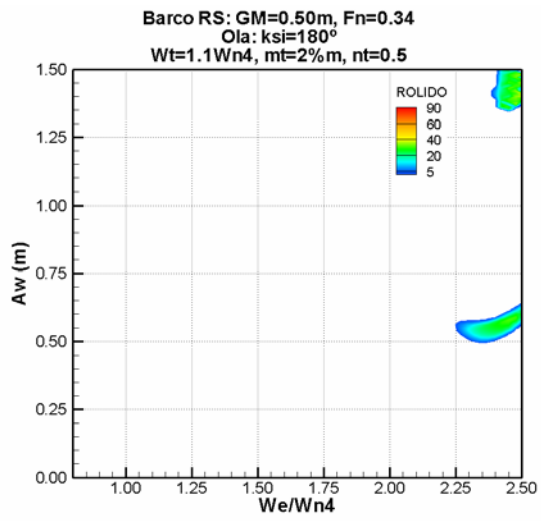


## mt=2%*m*, nt=0.4

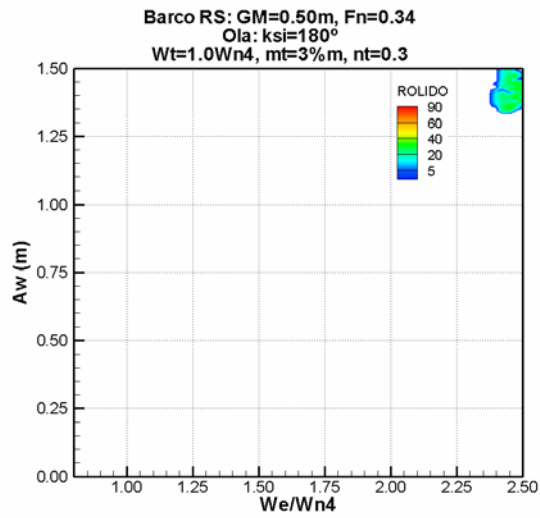
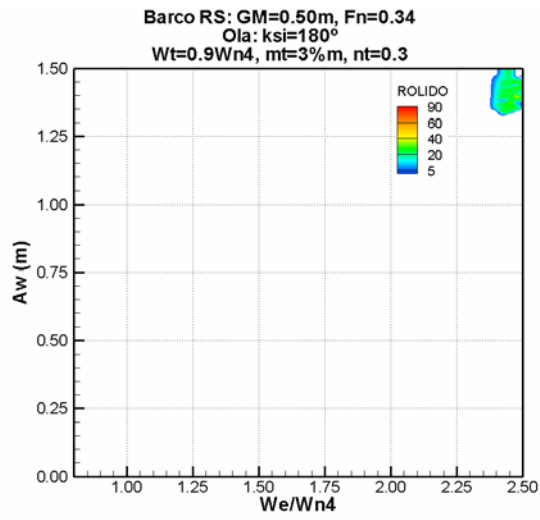


**mt=2%*m*, nt=0.5**

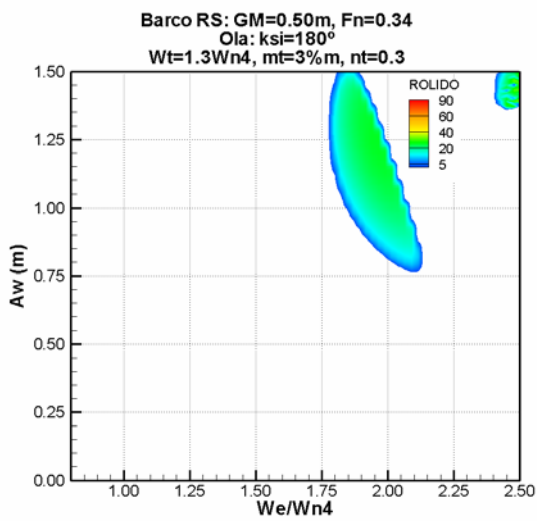
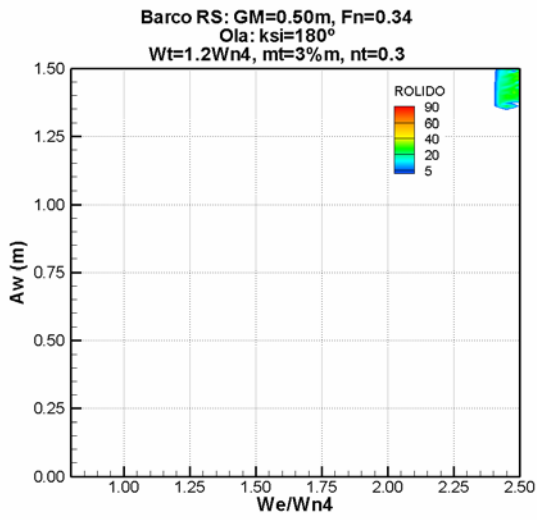
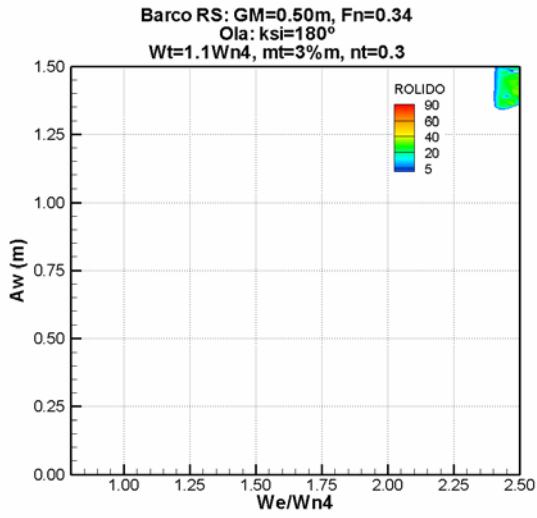




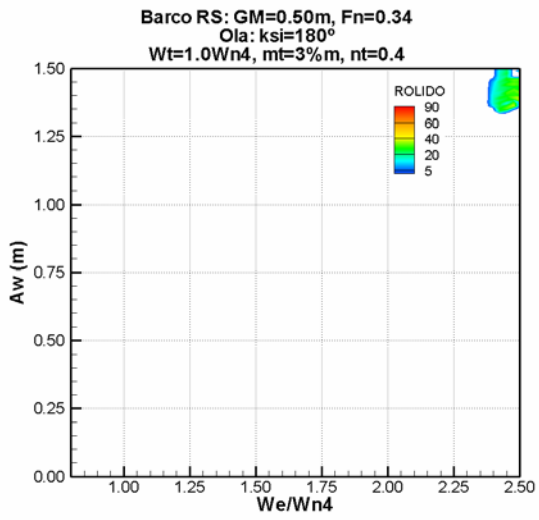
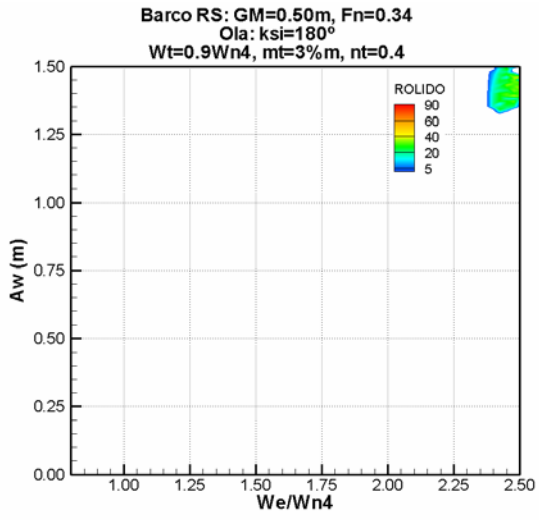
**mt=3%*m*, nt=0.3**

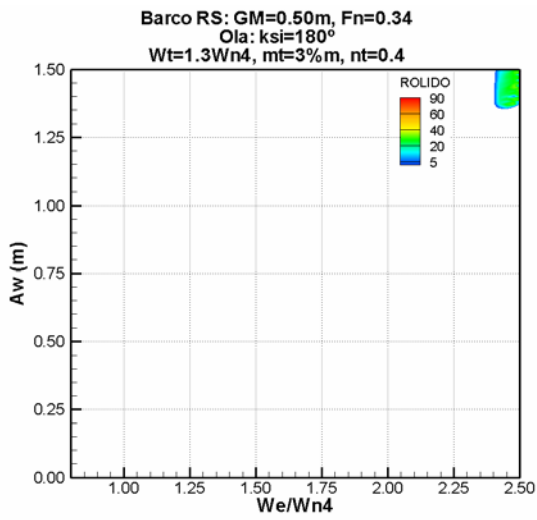
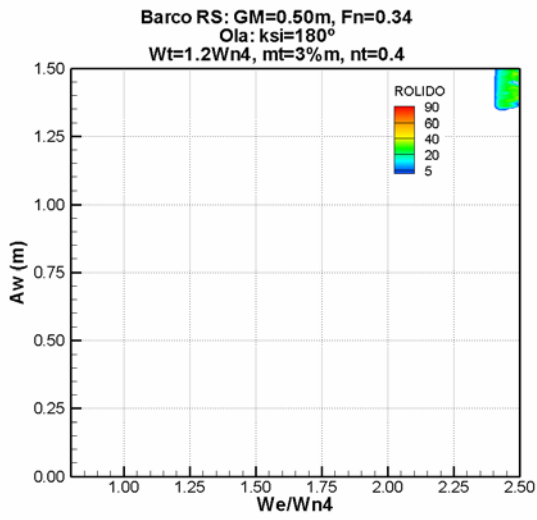
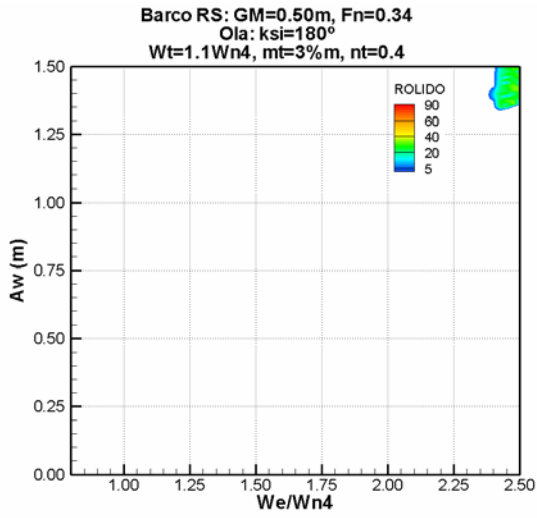


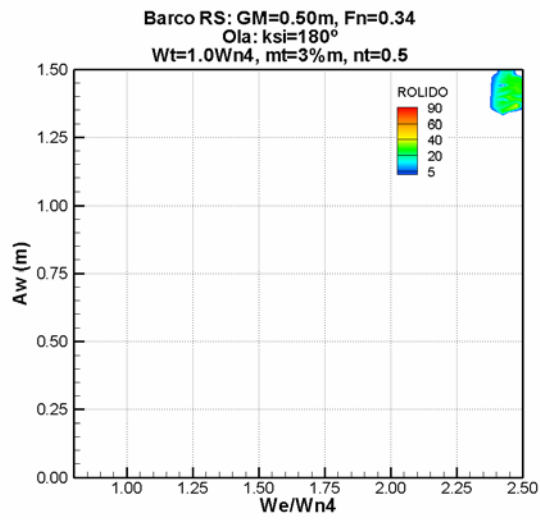
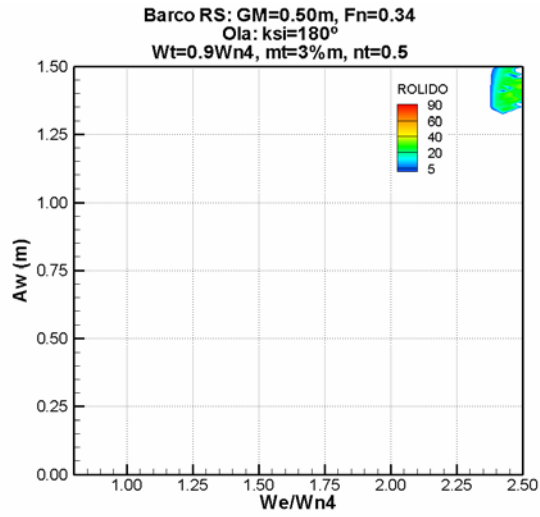


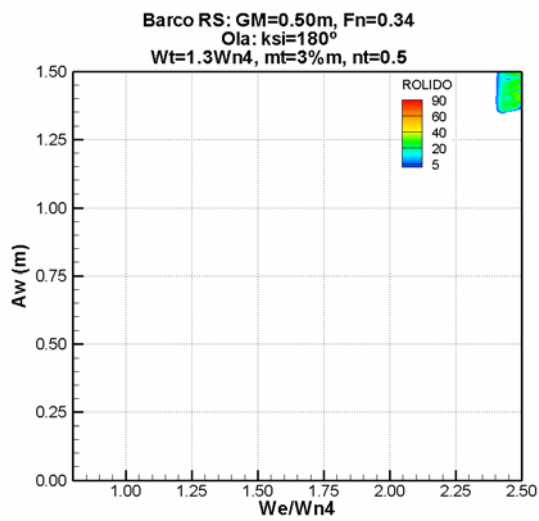
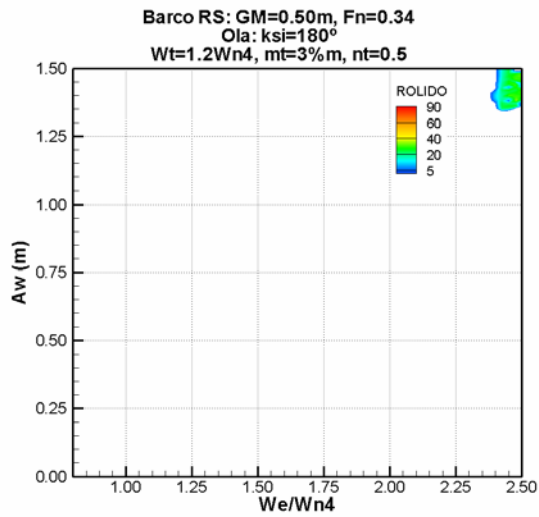
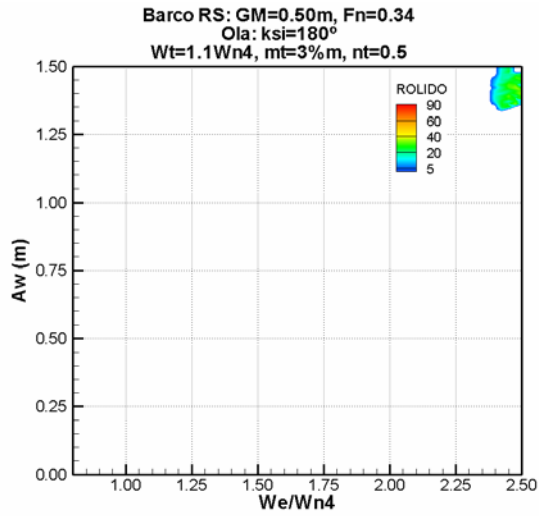


**mt=3% m, nt=0.4**





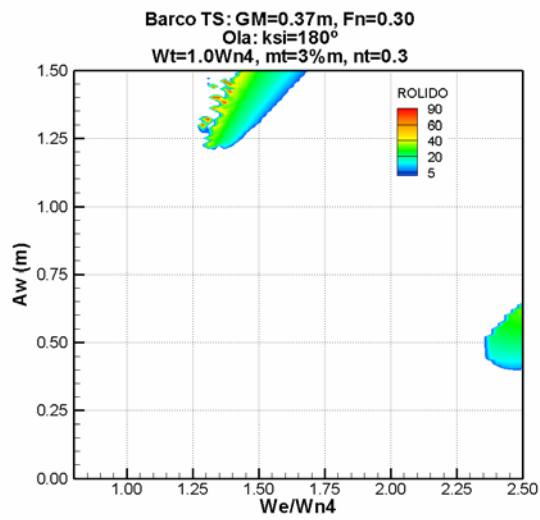
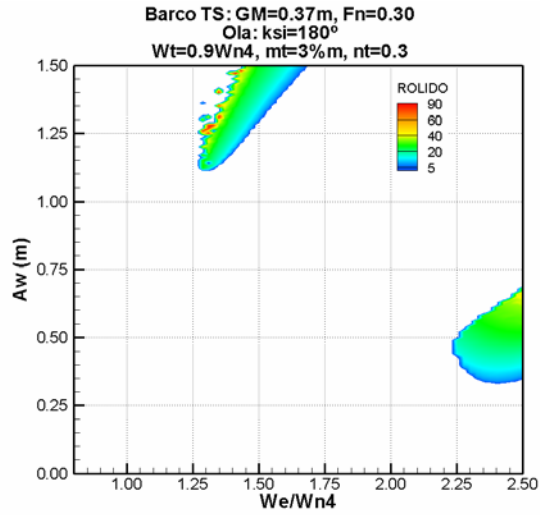
**mt=3%*m*, nt=0.5**

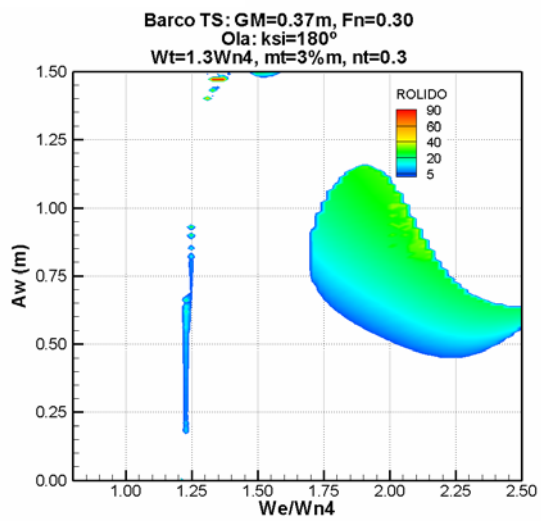
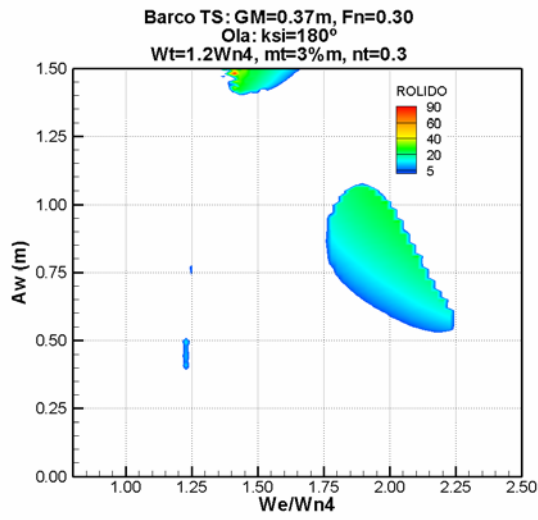
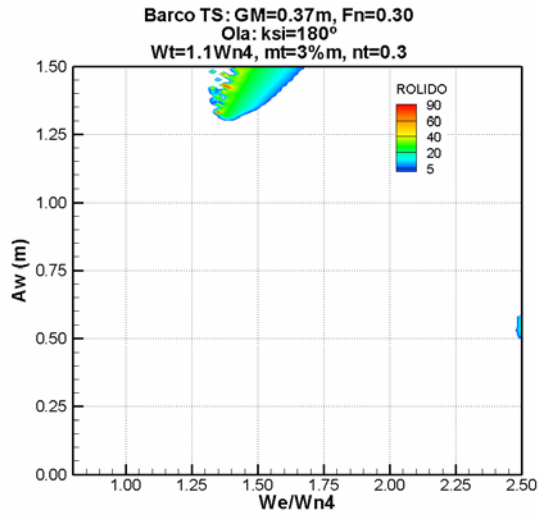


#### II.4. Barco TS: Respuestas Con Tanque de Estabilización

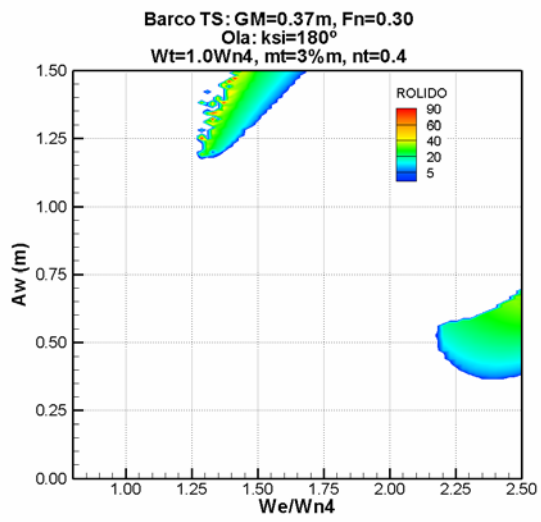
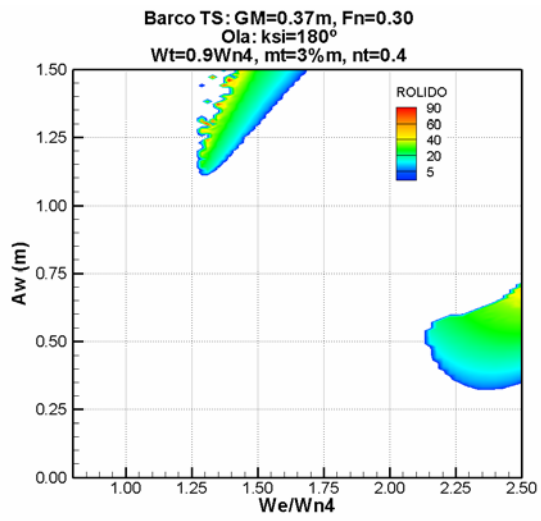
**Barco TS: GM=0.37, Fn=0.30**

**mt=3%*m*, nt=0.3**

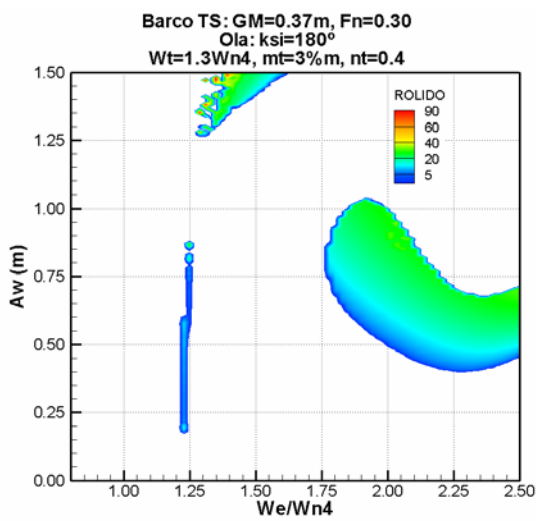
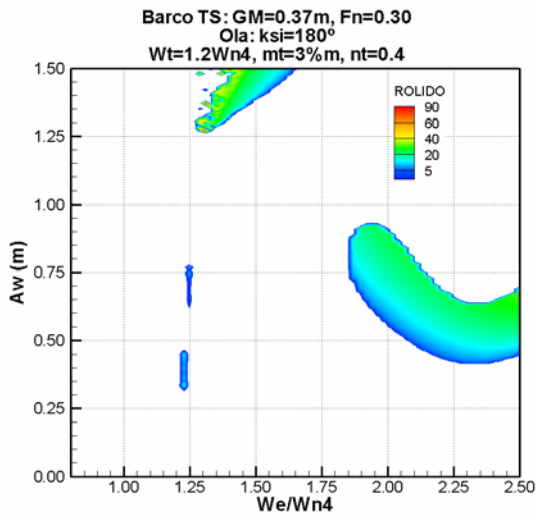
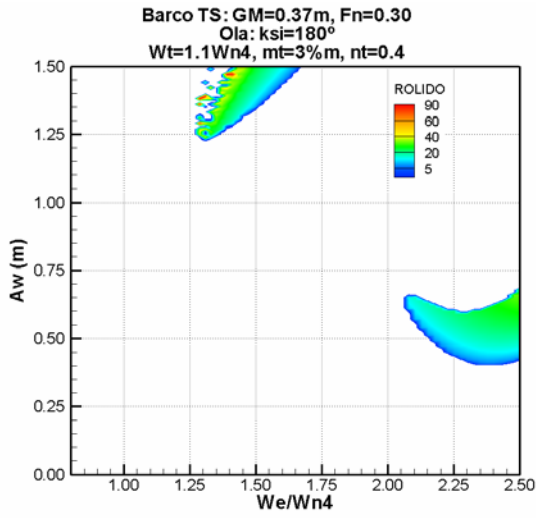




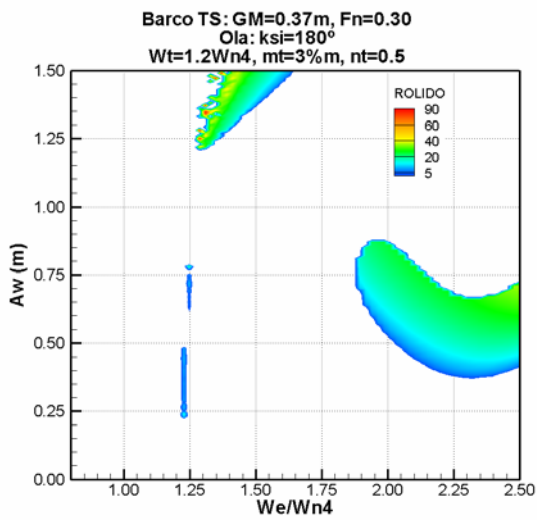
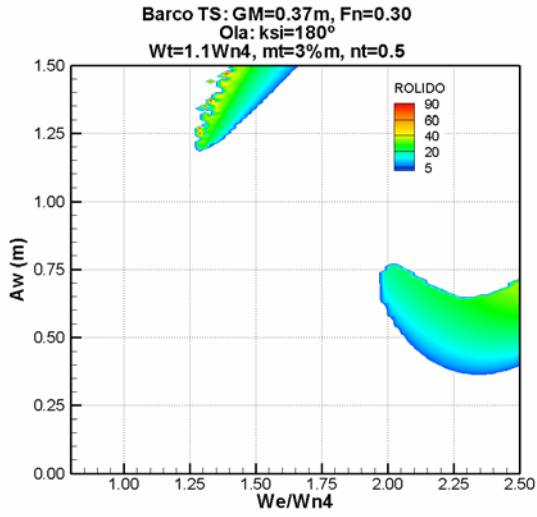
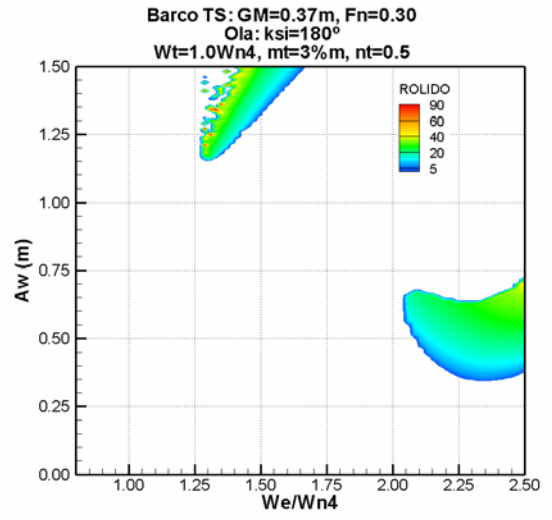
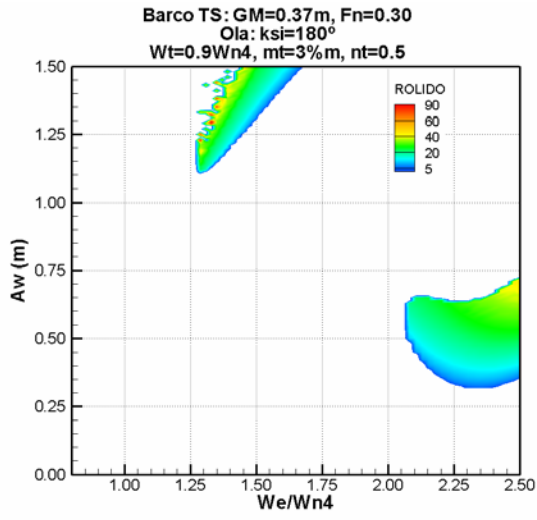
**mt=3%m, nt=0.4**

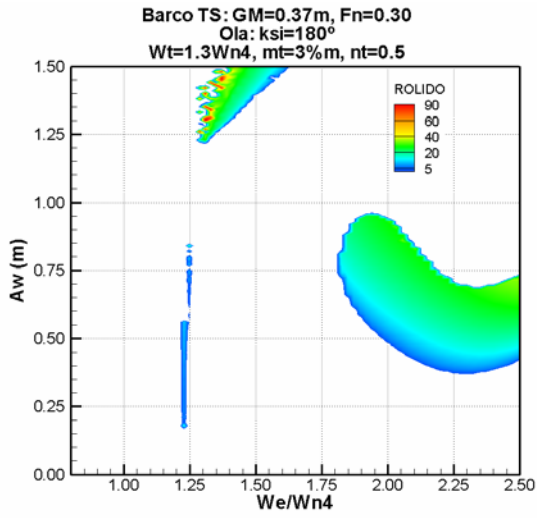




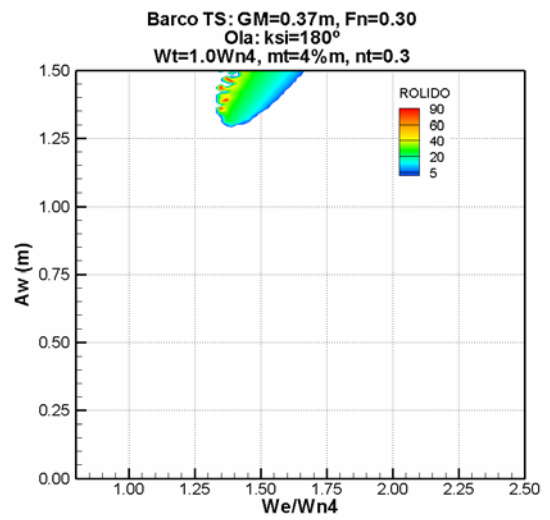
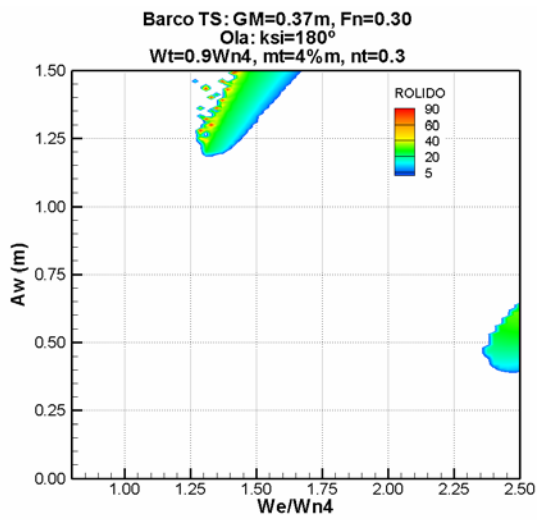


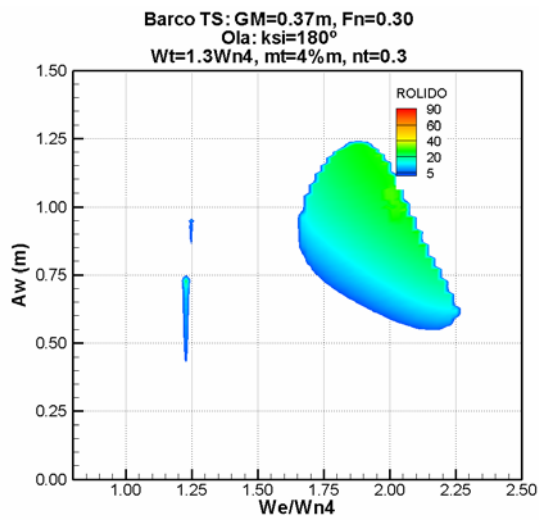
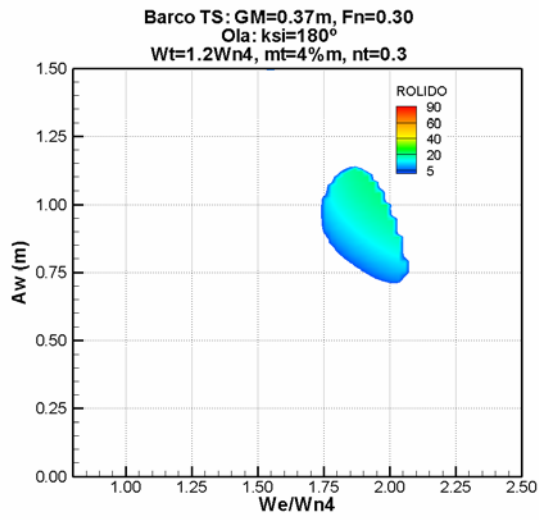
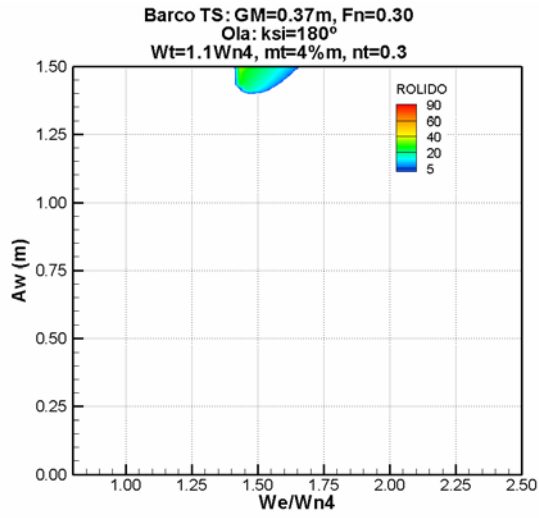
**mt=3%m, nt=0.5**



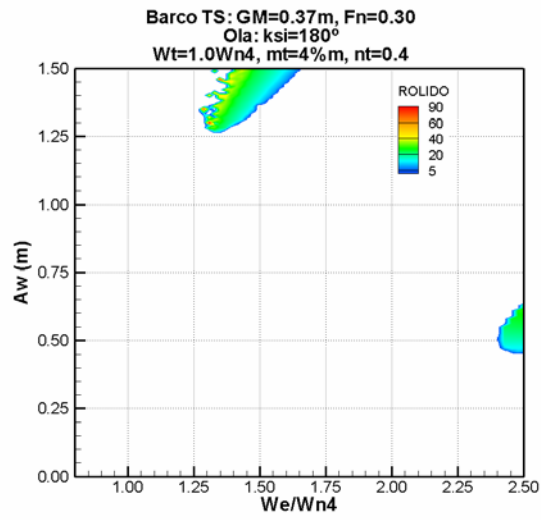
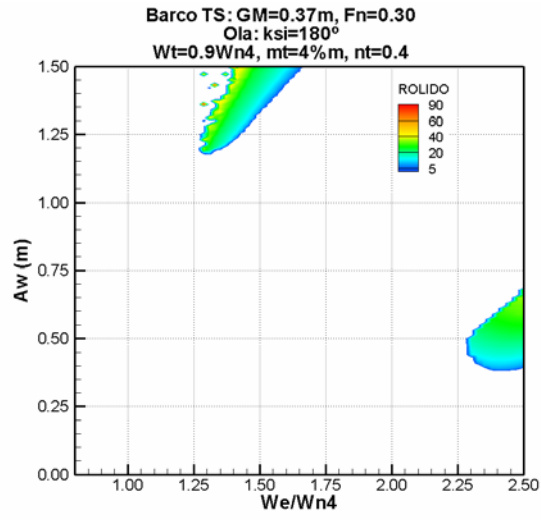


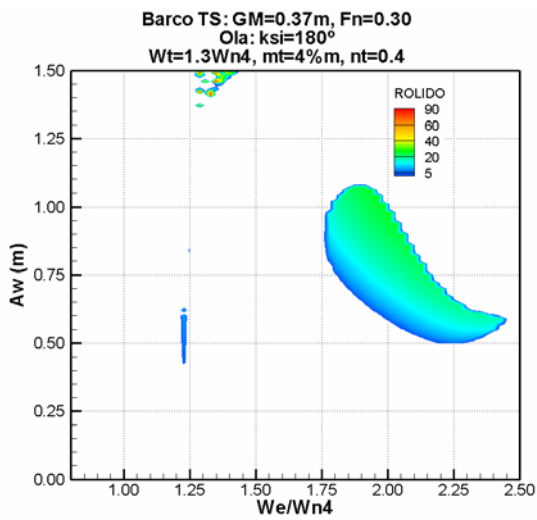
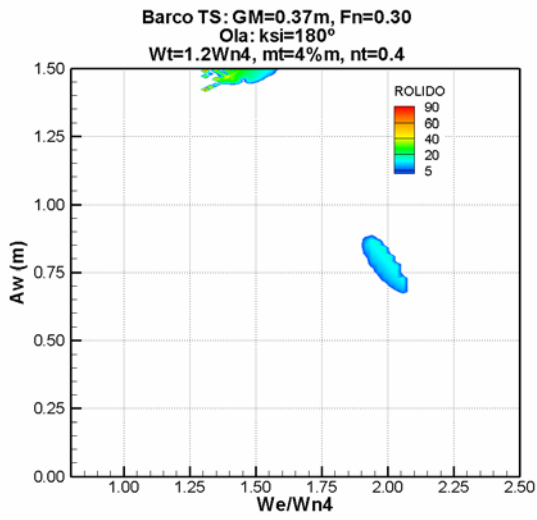
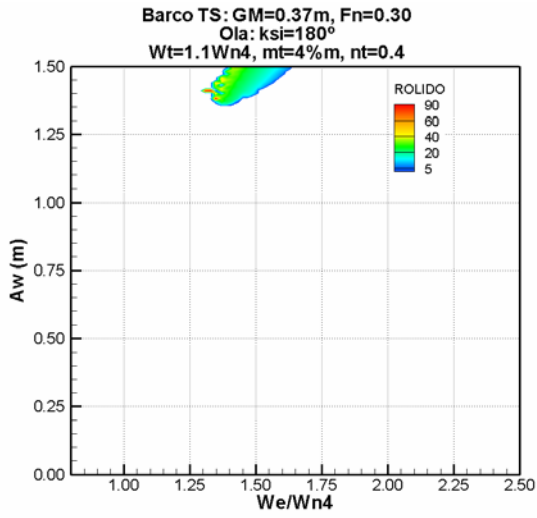
**mt=4%*m*, nt=0.3**



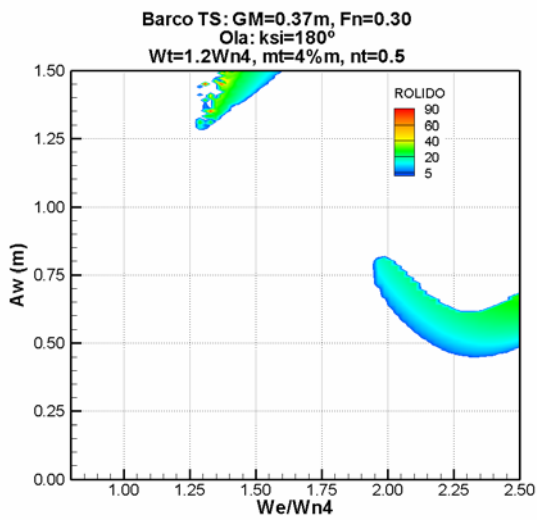
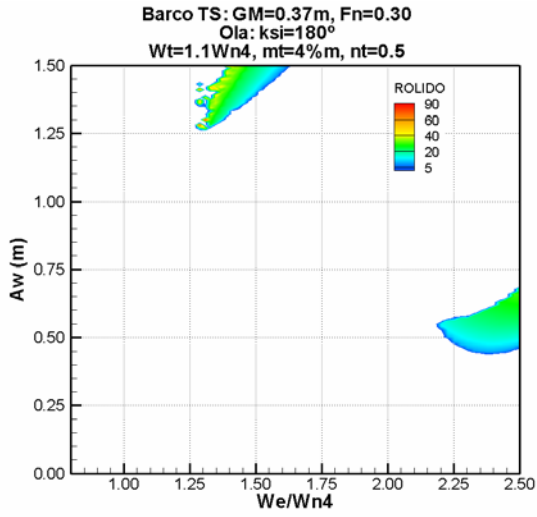
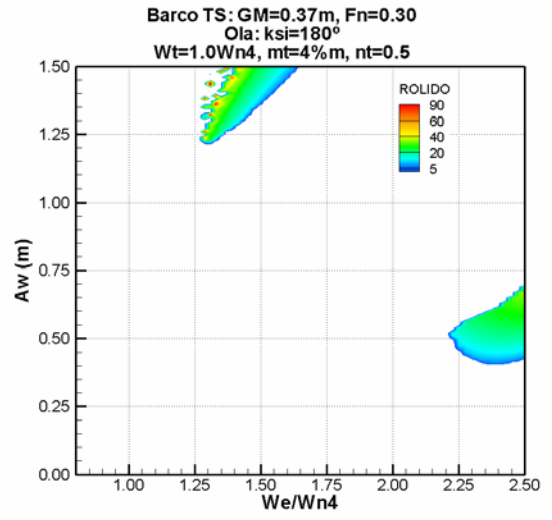
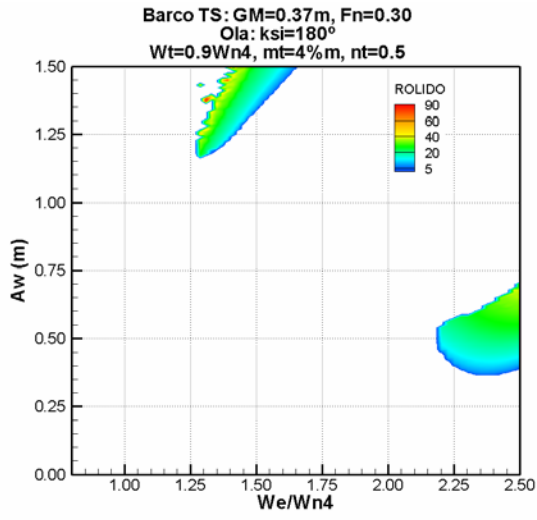


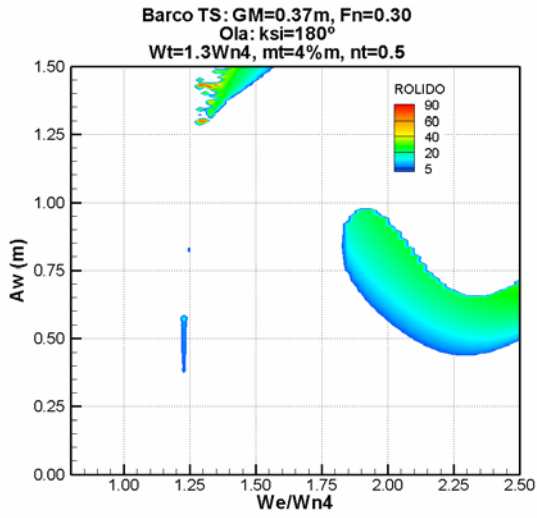
**mt=4%m, nt=0.4**



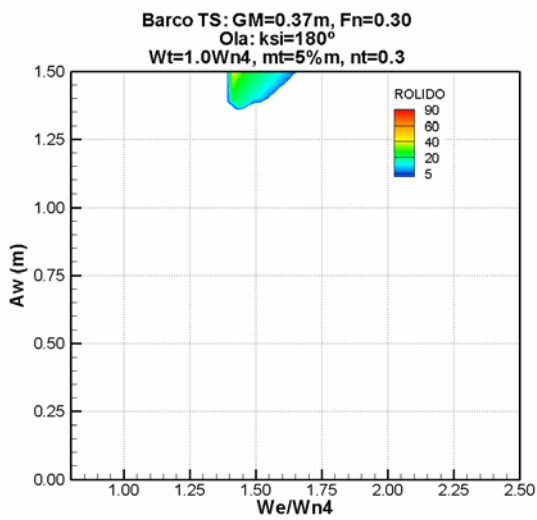
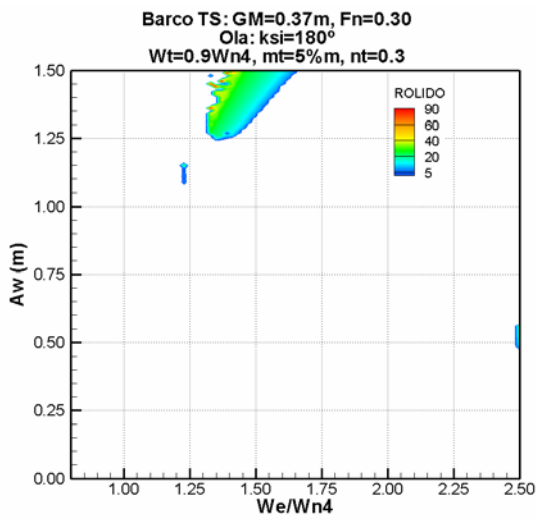


**mt=4%m, nt=0.5**

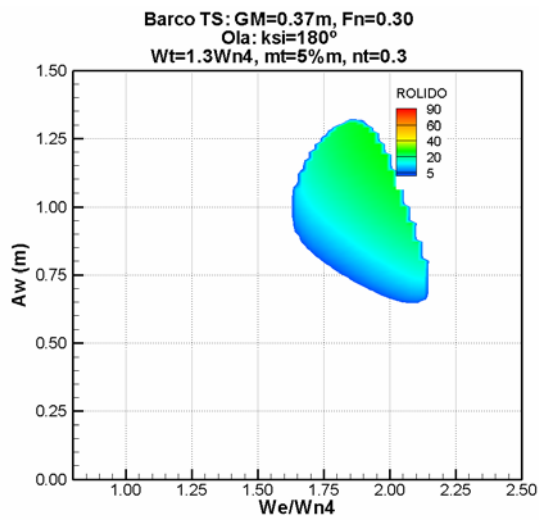
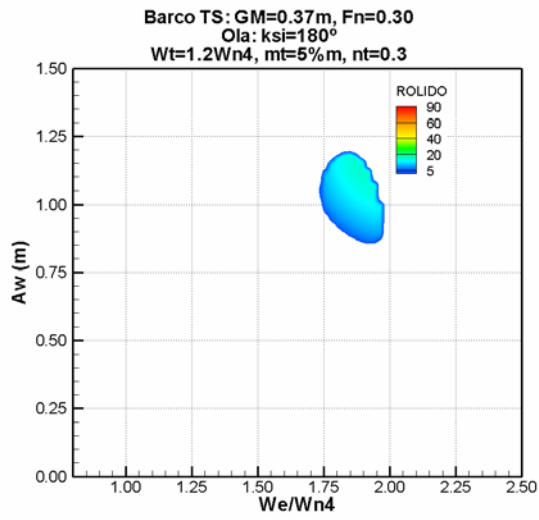
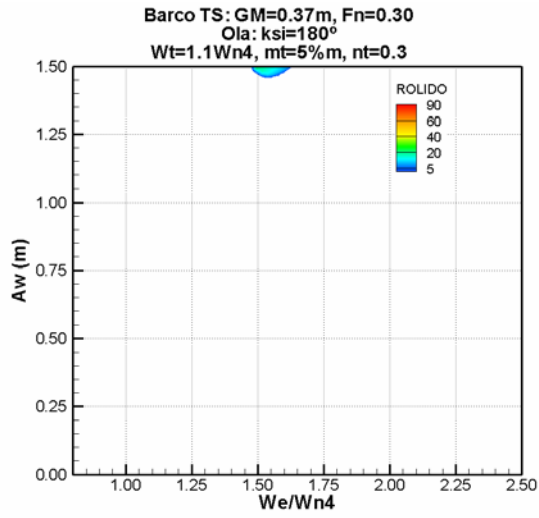




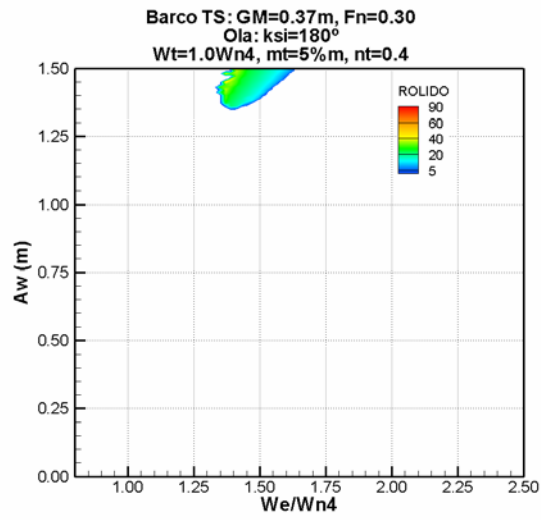
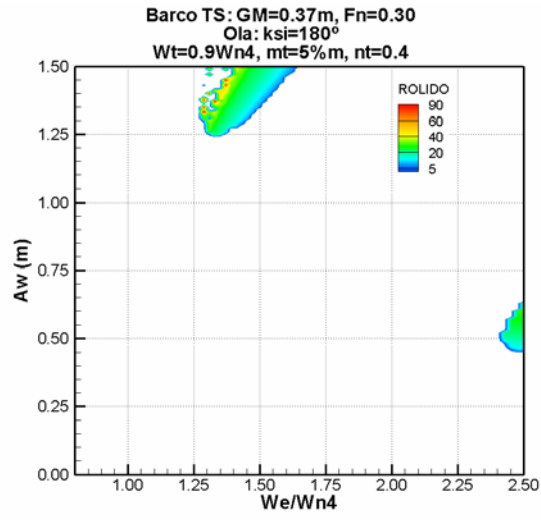
**mt=5%*m*, nt=0.3**

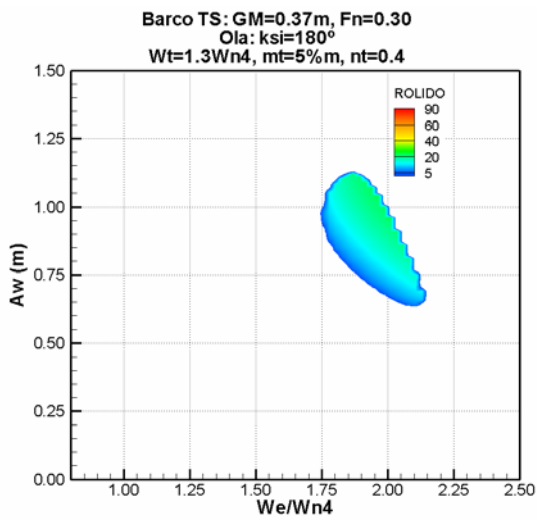
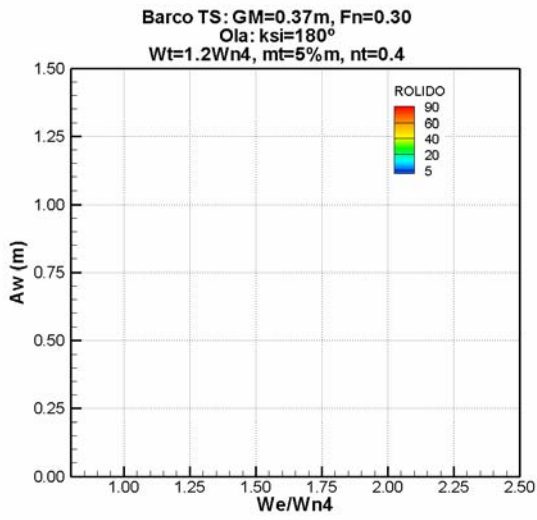
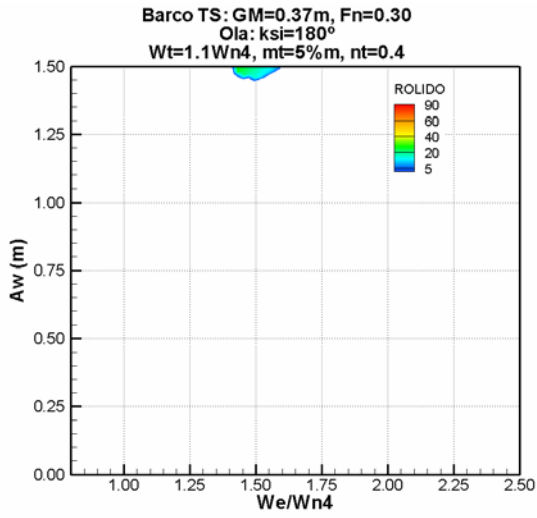






**mt=5%m, nt=0.4**





**mt=5%*m*, nt=0.5**

