

**UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA  
FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA**



**“ESTUDIO DEL COMPORTAMIENTO DE UN  
SISTEMA FLOTANTE DE PRODUCCIÓN DE  
PETROLEO EN ALTA MAR”**

**TESIS**

**PARA OPTAR EL TITULO PROFESIONAL DE**

**INGENIERO NAVAL**

**DAVID CHAMPI FARFAN**

**PROMOCION 2002-I**

**LIMA-PERU**

**2008**

## **AGRADECIMIENTOS**

***A Dios*** por todo lo que me ha dado.

***A mis padres Pascuala Farfán Surco y Luis Champi LLamacchima*** personas maravillosas quienes nunca dejaron de creer en mí y apoyarme siempre en todo momento de mí vida, incondicionalmente.

***A mi hermana Ph.D. Ana melva Champi y mi cuñado Ph.D. Michel Mendoza*** por todo su apoyo durante los años de estudio de pos graduación en el Brasil.

***Al profesor Ph.D. Celso K. Morooka*** por el incentivo y apoyo durante todos los años de estudio en el Programa de Maestría de Ciencias y Ingeniería de Petróleo de la Facultad de Ingeniería Mecánica en la Universidad Estadual de Campinas (Unicamp/SP-Brasil).

***Al profesor Ing. Victor Acosta*** y a todos los profesores y amigos de la Escuela Profesional de Ingeniería Naval de la UNI-Perú, gracias por su confianza, apoyo y dedicación

A todas las personas que directa o indirectamente ayudaron a la conclusión de este trabajo.

## TABLA DE CONTENIDO

Prólogo	1
<b>CAPITULO I</b>	<b>5</b>
Introducción	5
<b>CAPITULO II</b>	<b>8</b>
Ingeniería en Alta Mar en el Perú y Sistemas de Producción Marítima	8
2.1 Países Petroleros a Nivel Mundial y Ubicación del Perú en Latinoamérica.	8
2.1.1 Sistemas de Producción Marítima	13
2.1.2 Unidades Estacionaria de Producción (UEP)	14
2.2 Ductos de Producción	22
<b>CAPITULO III</b>	<b>25</b>
Comportamiento Estático y Vibración libre de un Riser Auto-Sustentable	25
3.1 Ecuación del Comportamiento de Risers rígidos Verticales	25
3.2 Comportamiento estático de un Riser Auto-Sustentable	29
3.3 Vibración libre de un Riser Auto-sustentable (Solución Analítica)	35
3.4 Solución numérica de un Riser Auto-sustentable en vibración libre	37
3.5 Comparaciones entre las soluciones numéricas y analíticas de un Riser Auto-Sustentable en vibración libre.	39
<b>CAPITULO IV</b>	<b>42</b>
Fuerzas Hidrodinámicas y Comportamiento Dinámico de un Riser Auto-Sustentable	42
4.1 Fuerzas hidrodinámicas en la dirección in line	43

4.2	Fuerzas hidrodinámicas en la dirección transversal	46
4.3	Comportamiento Dinámico de un Riser	50
<b>CAPITULO V</b>		<b>52</b>
Resultados y Discusiones		52
5.1	Influencia del fluido interno y externo en el sistema Riser Auto-sustentable (RAS).	55
5.2	Variación de las características geométricas de la boya.	60
5.3	Variación de los coeficientes hidrodinámicos en un Riser Auto-Sustentable	62
5.4	Estudio del efecto de VIV en el RAS en relación al comportamiento dinámico del sistema	64
<b>Conclusiones</b>		<b>67</b>
<b>Bibliografía</b>		<b>70</b>
<b>Apéndice A</b>		<b>72</b>
A1	Desarrollo de la ecuación estática para un riser vertical rígido	
A2	Análisis por Elementos Finitos para riser Verticales rígidos	
	A.2.1 Desplazamientos laterales	
	A.2.2 Desplazamientos axiales	
	A.2.3 Desplazamientos axiales y transversales	
<b>Apéndice B</b>		
B1	Cálculo de la Matriz de Masa	
B2	Cálculo de la Matriz de Rigidez Concentrada	
B3	Cálculo de la Matriz de Amortecimiento	
B4	Solución de la ecuación del comportamiento del riser dentro del dominio del tiempo	

## LISTA DE FIGURAS

1.1	Configuración de un Riser Híbrido Auto-Sustentable	7
2.1	Principales cuencas de América y Centro América	10
2.2	Empresas Petroleras actuantes en el Perú	12
2.3	Sistemas de unidades de producción en alta mar	15
2.4	Plataformas fijas: Jacket	16
2.5	Plataforma fija auto-elevadora	16
2.6	Plataforma fija por gravedad	17
2.7	Plataforma de piernas tensionadas (TLP)	18
2.8	Plataforma Spar Buoy	19
2.9	Plataforma Semi-Sumergible	20
2.10	Plataforma FPSO	21
2.11	Tipos de configuraciones de los risers	23
3.1	Grados de libertad en un elemento de riser	26
3.2	Diagrama de cuerpo libre del elemento tubular	27
3.3	Modelo de un Riser Auto-Sustentable	28
3.4		
	3.4(a) Longitud de riser 100m	33
	3.4(b) Longitud de riser 200m	33
	3.4(c) Longitud de riser 500m	33
	3.4(d) Longitud de riser 1000m	33
3.5	Conjunto boya-riser	34
3.6	Elemento de riser y cargas laterales, libre para flexión	35
3.7	Período natural vs longitud del <i>riser</i>	38
3.8	Modos naturales para una viga empotrada abajo y libre arriba	39
4.1	Parámetro de la ecuación de Morrison, dentro de onda y corriente del mar.	41
4.2	Componentes de la fuerza transversal	45
4.3	Número de Strouhal en función del número de Reynolds. (Blevins, 1990)	47
4.4	Velocidades actuantes en el riser en dos dimensiones	48
5.1	Sistema Riser Auto-Sustentable y sus principales parámetros, efectos y comportamientos	52
5.2	Comportamiento del RAS en función de la velocidad de la corriente	53
5.3	Comportamiento del RAS en función de la altura de onda	54
5.4	Comportamiento del riser en función del periodo de onda	56
5.5	Curvas de los desplazamientos máximos y mínimos con onda y corriente	57
5.6	Efecto del RAS con y sin fluido interno	57
5.7	Comportamiento del RAS en función del diámetro de boya	58
5.8	Efecto de la variación de longitud de la boya dentro del RAS	59
5.9	Comportamiento del RAS en función de $C_D$ dentro de un flujo oscilatorio	60
5.10	Comportamiento del RAS en función del $C_D$ para una corriente constante de 1.2 m/s a lo largo de la boya.	61
5.11	Desplazamiento en 2 dimensiones, con y sin efecto de VIV	63

**LISTA DE TABLAS**

2.1	Países miembros de la OPEP	9
2.2	Producción diaria y reservas comprobadas de Petróleo en Sudamérica (Central Intelligence Agency).	9
2.3	Petróleo y gas en América de sur y Centroamérica	11
2.4	Tipos de Unidades Estacionaria de Producción	14
3.1	Características del riser	31
3.2	Características de la boya	32
3.3	Longitud del riser y su respectiva tracción	38
5.1	Datos del riser y la boya	51

## NOMENCLATURAS

$A_0$	Área transversal externa do <i>riser</i>
$A_i$	Área transversal interna del <i>riser</i>
$A_s$	Área transversal da pared del <i>riser</i> ( $= A_0 - A_i$ )
[B]	Matriz de amortecimiento
CA	Coefficiente de masa adicional
CD	Coefficiente de arrastro
Ct	Coefficiente de lift
CM	Coefficiente de inercia
D	Diámetro do <i>riser</i>
Fx	Fuerza <i>in line</i>
$F_{x_0} + F_{x_i}$	Fuerza horizontal oriunda de las presiones interna y externa
$F_{y_0} + F_{y_i}$	Fuerza vertical oriunda de las presiones interna e externa
Fc	Fuerza externa propia da corriente marítima por unidad de longitud
FPSO	Floating Production, Storage & Offloading
FSO	Floating Production, Storage & Offloading
k	Parámetro de rugosidad
[K]	Matriz de rigidez
L	Longitud de onda
[M]	Matriz de masa
M	Momento
N	Fuerza externa normal al <i>riser</i>
Offshore	Alta mar o costa afuera
OPEP	Organización de Países Exportadores de Petróleo
Perupetro	Petróleo del Perú
$P_0$	Presión externa
$P_i$	Presión interna
t	tiempo
TLP	Plataforma anclada con cabos tensionados ( <i>Tension Leg Plataforma</i> )
T	Periodo de la ola
T	Tracción del tope (parte superior del <i>riser</i> )
UEP	Unidad Estacionaria de Producción
u	Velocidad de la partícula de la ola
$u_0$	Velocidad horizontal de la partícula de agua
$U_c$	Velocidad de la corriente
U	Velocidad instantánea del flujo oscilatorio.
V.	Fuerza cortante.
$V_{r_0}$	Amplitud de la velocidad relativa
$v_0$	Velocidad vertical de la partícula de agua
x	Desplazamiento del <i>riser</i> en dirección <i>in line</i>
$\rho_0$	Peso específico del fluido externo
$\rho_i$	Peso específico del fluido interno
$\rho_s$	Peso específico del material del <i>riser</i>
$\rho$	Densidad del agua
$\tau$	Diferencia de fases entre la respuesta de la fuerza del <i>riser</i> y su fuerza transversal
$C_t$	Amplitud media del coeficiente de la fuerza transversal

## VIII

$f_s$	Frecuencia media de los vórtices
$U$	Velocidad media del flujo oscilatorio
KC	Número de Keulegan
Re	Número de Reynolds
St	Número de Strouhal
VIV	Vibración Inducida por Vórtices
D/L	Parámetro de difracción
EI	Rigidez a la flexión
W.	Peso distribuido del elemento



## PROLOGO

La organización de esta tesis por capítulo es mostrada de la siguiente manera:

### **Capítulo 1.-** Introducción

**Capítulo 2.-** En el este capítulo se muestra mediante una tabla a los principales países exportadores de petróleo a nivel mundial, destacando la importancia que tiene la OPEP que es un organismo de países productores de petróleo y que regulan el precio del crudo a nivel internacional, se muestra también al Perú dentro del contexto latinoamericano sobre cuanto se estiman sus reservas así como también se muestran las principales cuencas de petróleo y gas en Latinoamérica. Las principales empresas que están invirtiendo en el Perú.

En este capítulo también se muestran, de forma general, las principales Unidades Estacionarias de Producción que son usadas tanto en la perforación como en la producción de crudo, estas plataformas trabajan en distintas condiciones ambientales llámese alta corriente marina, olas de grandes alturas o laminas de aguas pequeña, mediana, profunda y ultra profundas. Por último se presentan las diferentes configuraciones de un ducto o línea de producción las cuales pueden ser configuraciones de forma vertical, en catenaria y complejas.

**Capítulo 3.-** En este capítulo se presenta el comportamiento estático de un sistema llamado RAS (riser Auto-sustentable) la cual el ducto se presenta en una configuración vertical unido a una boya. Como parte del comportamiento estático en este trabajo fueron hechos cálculos numéricos y analíticos, partiendo de un elemento de riser sometido a diversos cargamentos estáticos internos y externos actuando sobre éste. (Patel, 1989), pueden ser destacados dentro de estas fuerzas la fuerza de arrastre debido a la corriente, las presiones debido al fluido interno y externo, así como las tracción en las pared del riser y los esfuerzos debido al cizallamiento y la flexión. Partiendo de las condiciones de contorno obtenidas de la bibliografía (Lu, P., 2001), se obtuvieron los coeficientes de solución en la parte analítica del comportamiento estático.

La solución numérica del comportamiento estático considera la formulación flaca del método de Galerkin (Paz, 1991) la cual es usada para la solución de la ecuación diferencial estática. En esta solución el riser es dividido en elementos, donde cada elemento presenta dos nodos en sus extremos, los cuales tienen 3 grados de libertad. Estos grados de libertad son descritos por dos desplazamientos laterales y una rotación dando forma a la matriz de rigidez del elemento. A través de la composición de matrices de rigidez de cada elemento será obtenida la matriz de rigidez global del riser considerando sus componentes de rigidez elástica y geométrica.

Se presenta en este capítulo el estudio numérico y analítico de vibración libre utilizando la metodología presentada en la bibliografía (Burden, 1993), se determinan los auto valores del sistema a partir de la ecuación característica del sistema.

**Capítulo 4.-** En este capítulo se muestran las fuerzas que intervienen en el sistema RAS debido a la ola, corriente y movimientos de la plataforma o unidad estacionaria de producción son presentadas estas fuerzas principalmente en dos direcciones, la dirección in line que es en la dirección de la ola y corriente (las dos en la misma dirección) y la dirección transversal la cual es perpendicular a la dirección in line donde ocurre la vibración inducida por efectos de verticidad.

La solución dinámica del Riser Auto Sustentable en el dominio del tiempo en el presente trabajo lleva en consideración la semejanza del comportamiento del dinámico de un sistema masa-resorte-amortecimiento. La ecuación del comportamiento dinámico es compuesta por la matriz de masa, rigidez y amortecimiento de la estructura dividida en elementos. El método usado para la solución numérica es el método de Newmark  $\beta$  con  $\beta = 1/4$  que viene siendo muy usado en trabajos anteriores de esta misma área. (Ferrari, 1999 y Morooka, 2004) mostrando buena convergencia en los resultados y rapidez. En este trabajo una parte importante es que lleva en consideración el efecto de VIV o formación de vórtices que son muy importantes en el estudio de estructuras esbeltas dentro de un medio fluido en movimiento (ola y corriente).

**Capítulo 5.-**En este capítulo son mostrados los resultados y discusiones obtenidos del comportamiento dinámico del Riser Auto-Sustentable en las cuales se muestran la influencia del coeficientes hidrodinámico de arrastre, las características geométricas de la boya, las distintas velocidades del fluido así como la influencia de la altura de la ola, la presencia del fluido interno dentro del riser (petróleo) y las diferencias que existen cuando se tiene la presencia o no del efecto de formación

de vórtices (VIV) todo esto en función de curvas de máximos y mínimos desplazamientos a lo largo de la longitud del sistema.

**CONCLUSIONES.**-Son mostradas las conclusiones obtenidas con la realización de este trabajo.

**APENDICE A.**-Se describe de forma amplia la parte teórica del comportamiento estático analítico y numérico usado para el sistema Riser Auto-Sustentable

**APENDICE B.**-Se describe de forma amplia las matrices de masa, rigidez y amortecimiento usado para la solución numérica de la ecuación dinámica, así como también describe la solución dinámica del sistema dentro del dominio del tiempo.

## **CAPÍTULO I**

### **INTRODUCCIÓN**

Desde el año de 1860 se comienza en el Perú a tener interés sobre producción petrolera en la localidad de Zorritos fue aquí que se perforo el primer pozo petrolero en Sudamérica y en la cual posteriormente toda esta región del norte peruano se convertiría en el principal polo petrolero nacional. (CIPCA)

En estas últimas décadas ciertas inversiones se realizaron en el Perú para encontrar nuevas reservas tanto de petróleo así como también de gas, el más importante de estos fue en el año 1983 en la cual la empresa Shell descubrió yacimientos de gas cerca de Camisea en la cuenca de Ucayali -Cuzco (OILWATCH), en estos últimos años la crisis mundial de energía hizo subir el precio del barril de petróleo pudiendo así, de cierta forma, reactivar la inversión de capitales en la búsqueda de nuevos campos o reservas de petróleo tanto en nuestro país como en otras partes del mundo.

Es así que frente a esta realidad, a través de empresas extranjeras, se han venido descubriendo importantes y nuevas fuentes de petróleo y gas no solo en campos onshore (tierra firme) sino también en campos offshore (en el mar). Hace poco Petro-Tech anuncio el descubrimiento de una importante reserva de gas en el mar de Piura ubicado en la Bahía de Bayóbar, en el pozo San Francisco-1X en el lote Z-

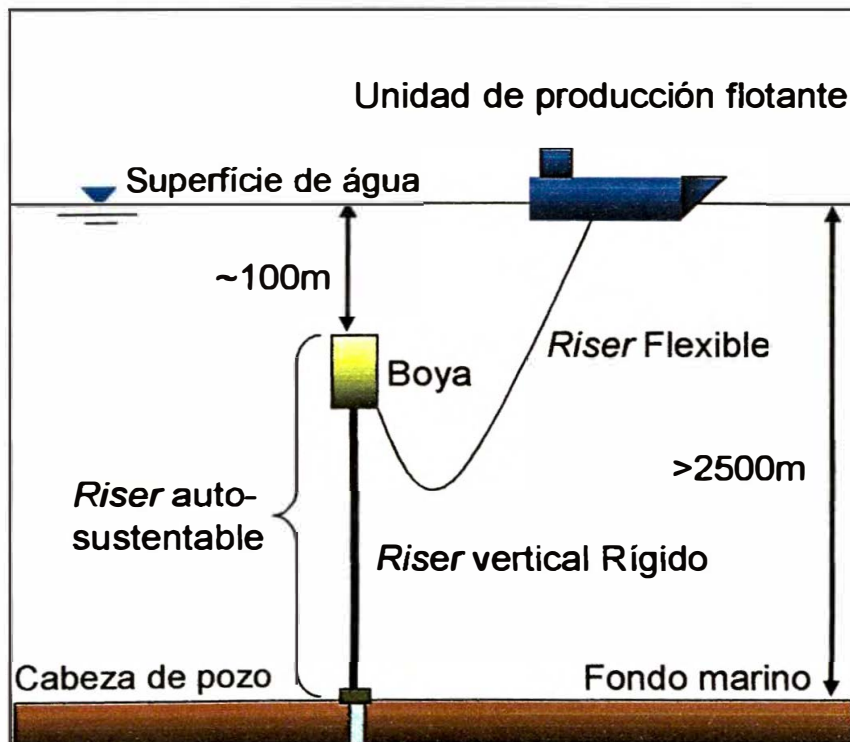
2B, la cual tendría una capacidad de 20 millones de pies cúbicos por día (El Comercio Perú).

Frente a esta realidad, el presente trabajo tiene por objetivo presentar los diversos sistemas de explotación de petróleo y gas en alta mar, haciendo una descripción detallada de estos sistemas los cuales usan diversos tipos de unidades de producción flotantes (plataformas o naves flotantes) y una serie de líneas de producción de acuerdo a la profundidad del mar y el medio ambiente en que actúan. Se presentara también el estudio del comportamiento estático y dinámico, de forma general, de un sistema de producción llamado Sistema de Riser Auto-Sustentable.

Los riser son ductos de acero o de otros materiales que sirven para el transporte de petróleo, gas y agua los cuales están conectados entre la cabeza de un pozo petrolero, ubicado en el suelo marino, y una unidad de producción flotante (en la superficie del mar), Figura 1. Este ducto que va recorrer a lo largo de toda la lamina de agua o profundidad del mar, estará bajo la influencia de ondas del mar, corriente marina y los movimientos de la embarcación o nave, por ello debe también su estructura debe de aguantar grandes cargas de presiones hidrostáticas sobre su superficie cilíndrica. Por causa de la influencia del mar actuaran fuerzas hidrodinámicas sobre la estructura de este ducto de forma oscilatoria provocando así fatiga y consecuentemente una disminución en su tiempo de vida útil. Este estudio es muy importante porque permite prever hasta cuanto tiempo se podrá usar estos riser en la producción de petróleo o gas. Se resaltara en este estudio el efecto de vibración de la estructura por causa por la formación de vórtices o comúnmente llamado o conocido efecto de VIV (vortex – induced vibrations).

Existen dos tipos de riser, los rígidos y los flexibles. Los riser rígidos son ductos de acero que tiene poca resistencia a la flexión, ellos por ser de acero aguantan grandes presiones hidrostáticas, económicamente son más baratos que los flexibles y su instalación es delicada más viable para su uso. Los riser flexibles son fabricados con varias capas las cuales le permiten a éste ser flexible en su uso, son económicamente más caros que los riser rígidos mas su uso es de vital importancia en la explotación de petróleo o gas en alta mar.

Se llamará de riser auto sustentable porque existirá un riser rígido que estará sustentado bajo la influencia de una boya y otro riser flexible entre la boya y la nave. Figura 1.1.



**Figura 1.1** Configuración de un Riser Híbrido Auto-Sustentable

**CAPÍTULO 2**  
**INGENIERIA EN ALTA MAR EN EL PERU Y SISTEMAS DE PRODUCCION**  
**MARITIMA**

**2.1 PAÍSES PETROLEROS A NIVEL MUNDIAL Y UBICACIÓN DEL PERÚ EN LATINOAMÉRICA.**

En el año 1960 los países que exportan más petróleo a nivel mundial se juntaron y crearon la OPEP que es una Organización de Países Exportadores de Petróleo, esta organización fue creada con el fin de controlar los precios del petróleo para defender los intereses de los países asociados, inicialmente fueron los países Venezuela, Arabia Saudita, Irán, Irak y Kuwait. La OPEP fue registrada en la secretaria de Naciones Unidas el 6 de Noviembre de 1962.

Actualmente forman parte de la misma los siguientes países:

**Tabla 2.1.- Países miembros de la OPEP**

<b>País</b>	<b>Localización</b>	<b>Año de Ingreso</b>
Arabia Saudita	Medio Oriente	1960
Argelia	África	1969
Emiratos Árabes Unidos	Medio Oriente	1967
Indonesia	Asia	1962
Irán *	Medio Oriente	1960
Irak *	Medio Oriente	1960
Kuwait *	Medio Oriente	1960
Libia	África	1962
Nigeria	África	1971
Qatar	Medio Oriente	1961
Venezuela *	Sur América	1960

*\*Miembros fundadores (fuente, OPEC)*



En América del sur se tienen países, con actividades de extracción de petróleo y gas, tales como Venezuela, Brasil, Argentina, Colombia, Ecuador y Perú de los cuales se tiene como Venezuela el principal país de productor de petróleo (PDVSA) seguido por el Brasil (PETROBRAS), Tabla 2.2

**Tabla 2.2.-** Producción diaria y reservas comprobadas de Petróleo en Sudamérica (Central Intelligence Agency).

<b>Países</b>	<b>Producción diaria [bbl/día]</b>	<b>Reservas comprobadas [bbl]</b>
Argentina	801700 (2005)	2.086 Billones (2007)
Bolivia	41570 (2007)	440.5 millones (1 Enero 2006)
Brasil	1.59 millones (2006)	13.9 Billones (2007)*
Chile	15100 (2006)	150 millones (1 enero 2006)
Colombia	539000 (2005)	1.4 Billones (2007)
Ecuador	538000 (2005)	4.7 Billones (2007)
Guyana	0 (2005)	0 (2006)
Paraguay	0 (2007)	0 (2006)
Perú	110700 (2005)	431 Millones (2007)
Surinam	9461 (2005)	111 millones (1 enero 2006)
Uruguay	27830 (2007)	-
Venezuela	2.802 millones (2006)	79.14 Billones (2007)

\* Este dato no contempla los 5 o 8 billones de barriles estimados de la última descubierta en aguas brasileras y capas de pre-sal de subsuelo del campo de Tupi

Tanto en América del sur como en Centroamérica se tienen cuencas (o bacías en portugués) que forman parte de las reservas de petróleo y gas a nivel del continente sudamericano, la Figura 2.1 muestra de forma esquemática estas cuencas o bacías (USGS).



Figura 2.1 Principales Cuencas de América y Centro América

Se puede apreciar que en Perú principalmente se tienen dos cuencas o bacías, la cuenca de Talara y la cuenca de Putumayo-Oriente Marañón, los potenciales o reservas de gas y petróleo de cada cuenca se muestran en la Tabla 2.3.

Los resultados presentados en esta tabla incluyen estimativas en función de riesgos estadísticos. En los casos de depósitos de gas todos los líquidos están incluidos en la categoría designada como NGL (líquidos de gas natural). Los posibles recursos de gas incluyen gas posiblemente relacionado con depósitos de petróleo. F95 representa una probabilidad de 95 por ciento de hallar por lo menos la cantidad descrita en la tabla. Otros niveles de probabilidad están indicados de la misma manera.

Tabla 2.3.- Petróleo y gas en América de sur y Centroamérica\*.

Area	Áreas Petrolíferas	Petróleo (MMBO)				Gas (BCFG)				NGL (MMBNGL)			
		F95	F50	F5	Media	F95	F50	F5	Media	F95	F50	F5	Media
Áreas del Atlántico	Cuenca Guyana-Surinam	2,793	13,937	32,582	15,247	7,035	36,802	95,909	42,058	365	1,981	5,555	2,33
	Cuenca de Foz del Amazonas	0	0	0	0	7,628	27,785	58,079	29,84	71	271	620	298
	Cuenca Sergipe-Alagoas	197	1,271	3,527	1,487	1,368	7,004	19,909	8,334	62	338	1,035	415
	Cuenca de Espirito Santo	304	2,338	7,736	2,959	3,71	27,381	88,581	34,287	165	1,243	4,341	1,612
	Cuenca de Campos	3,442	14,235	36,479	16,293	3,745	16,501	46,667	19,691	101	451	1,357	553
	Cuenca de Santos	4,117	21,963	46,265	23,209	17,6	74,416	163,657	80,547	837	3,763	9,024	4,194
	Cuenca de Pelotas	0	2,548	7,184	2,938	0	19,642	55,792	22,806	0	919	2,838	1,107
	Plan alto de Falkland	0	3,948	17,274	5,833	0	10,464	51,265	16,581	0	217	1,2	370
Cuenca de Malvinas	161	900	2,327	1,031	1,675	9,765	26,19	11,327	51	303	870	362	
Área de los Andes	Cuenca Putumayo-Oriente - Marafón	1,028	2,787	6,066	3,098	236	746	4,604	1,596	4	16	182	55
	Cuenca Santa Cruz-Tarija	277	1,719	5,548	2,145	10,618	28,401	61,092	31,107	380	1,133	2,802	1,3
	Cuenca de Neuquén	412	1,213	2,413	1,29	3,667	11,582	23,87	12,416	53	182	426	203
	Cuenca de San Jorge	160	470	928	498	1,068	3,491	7,363	3,774	20	68	157	75
	Cuenca de Magallanes	226	665	1,306	704	4,752	13,44	25,38	14,04	101	291	581	310
	Cuenca de Talara	484	1,625	3,214	1,711	1,243	4,404	9,637	4,795	62	227	539	255
	Cuenca de Progreso	47	205	534	237	98	556	1,77	695	4	26	86	33
	Cuenca de Magdalena	220	655	1,373	709	919	2,946	6,861	3,292	32	111	292	130
Cuenca de Llanos	793	3,18	8,001	3,631	1,089	5,061	15,338	6,217	56	268	853	337	
Áreas del Caribe	Cuenca da Venezuela do Leste	2,155	10,509	26,74	11,875	19,454	84,444	201,516	93,561	842	3,886	10,235	4,465
	Cuenca de Maracaibo	3,133	7,868	14,199	8,183	5,857	16,476	32,854	17,576	307	889	1,928	973
	Bajada de Tobago	0	0	0	0	4,249	17,908	43,111	20,103	40	173	456	201
	Cinto de Antillas	0	157	6,092	1,536	0	1,238	46,876	11,957	0	57	2,334	582
	Cuenca de Cuba	142	464	941	494	159	540	1,2	592	9	32	76	35
<b>TOTAL</b>		<b>20,09</b>	<b>92,658</b>	<b>230,727</b>	<b>105,106</b>	<b>96,168</b>	<b>420,994</b>	<b>1,087,521</b>	<b>487,19</b>	<b>3,561</b>	<b>16,843</b>	<b>47,788</b>	<b>20,196</b>

\*Referencia: USGS



### **2.1.1 Sistemas de Producción Marítima**

La selección del concepto que se va a usar para el desarrollo de los campos de petróleo en alta mar, es un paso muy importante, el cual asegura el éxito de su explotación. Cada campo presenta diferentes desafíos específicos para esto es recomendable una evaluación competente y objetiva sobre el tipo de árbol de Navidad (conjunto de tuberías y válvulas en la cabeza del pozo que controlan el flujo de petróleo, gas y agua proveniente del reservorio), si es que éste va ser del tipo seco o mojado.

Se dice que se tiene un árbol de navidad es seco cuando éste se encuentra en la superficie del mar o en tierra firme y el árbol de navidad es mojado cuando éste se encuentra en el fondo del mar. Por otro lado también la selección del tipo de árbol de navidad va depender de estudios de costo, riesgos y flexibilidad del sistema para maximizar las chances del concepto de desenvolvimiento más adecuado a las características del reservorio. Dependiendo de esta selección el desarrollo del campo es el resultado de un proceso de optimización que cubre diversas variables, tales como: el número de pozos y posicionamiento de ellos, longitudes y diámetros de los ductos de producción, posición de las Unidades Estacionarias de Producción flotante (UEP), tipos de anclados, medios de instalación, perfil de producción deseado, necesidad de medios de elevación artificial de crudo, etc.

Este capítulo va a abordar los tipos de Unidades de Producción Flotante y las diferentes configuraciones de ductos de producción (riser) en la fase de producción de petróleo.

### 2.1.2 Unidad Estacionaria de Producción (UEP)

Las unidades Estacionarias de Producción son embarcaciones o plataformas que permanecen posicionadas en un mismo lugar, generalmente por algunos años ancladas o en algunos casos fijados en posicionamiento dinámico (sensores que corrigen la posición de éste para que un lugar fijo), todo esto con el único propósito de recibir la producción de los pozos y inyectar fluidos en el reservorio.

En resumen se las unidades estacionarias de producción se pueden clasificar como se muestra en la tabla 2.4 y serán descritas a seguir según las bibliografía (Fundamentos de Ingeniería de Petróleo).

**Tabla 2.4-** Tipos de Unidades Estacionaria de Producción

<b>Fijas</b>	<b>Adaptables</b>	<b>Flotantes</b>
-Plataformas Jacket	-Plataforma de piernas tensionadas (TLP)	-Semi-sumergibles
-Por Gravedad		-Floating Production, Storage & Offloading (FPSO)
-Plataformas Auto- Elevadora (Jack-up)	- Spar Buoy	-Floating Storage & Offloading (FSO)
-Torre guía		- Barcazas

La Figura 2.3 muestra de forma general los diversos tipos de unidades de producción conforme su uso en una determinada lámina o profundidad del agua (fuente: ABB).

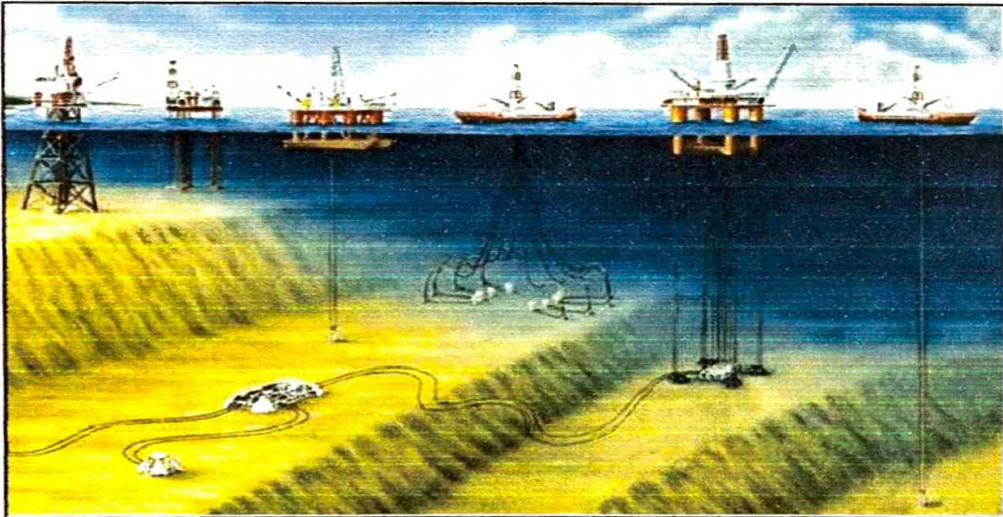


Figura 2.3 Sistemas de unidades de producción en alta mar.

a) **Plataformas fijas**

Las plataformas fijas o Jacket fueron las primeras unidades utilizadas y son preferiblemente usadas en láminas de agua de hasta 300 metros y son responsable en gran parte por la producción de crudo en alta mar. Generalmente estas plataformas son estructuras hechas de acero que serán instaladas en el local de operación con estacas clavadas en el fondo del mar. Debido a los altos costos envueltos en el proyecto, construcción y instalación de la plataforma, su aplicación se restringe al desenvolvimiento de campos ya conocidos, donde varios pozos son perforado. Las plataformas fijas son proyectadas para recibir todos los equipos de perforación, almacenamiento y traslado de materiales, alojamiento de personal así como todas las instalaciones necesarias para la producción de pozos. Figura 2.4.

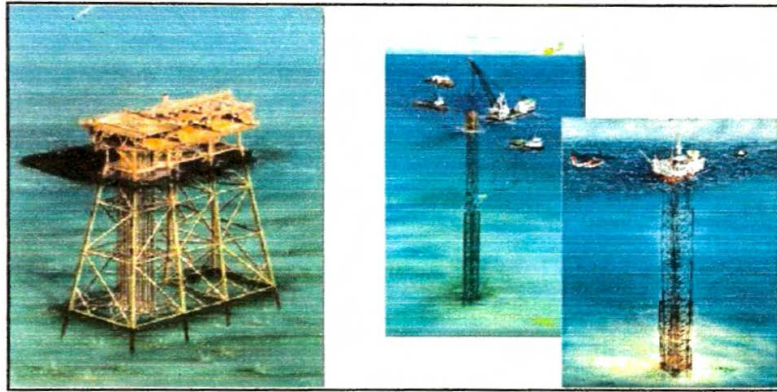


Figura 2.4 Plataformas fijas: Jacket

**b) Plataformas Auto-Elevadora**

Se componen básicamente de una balsa equipada con una estructura de apoyo o piernas que, accionadas de forma mecánica o hidráulica, son sumergidas hasta alcanzar el fondo del mar. En seguida, se inicia la elevación de la plataforma sobre el nivel del agua, a una altura segura y fuera de la acción de las olas. Estas plataformas son móviles, pueden ser transportadas por remolcadores o por propulsión propia. Son destinados para la perforación de pozos exploratorios en la plataforma continental, en una lámina de agua que varía de 5 a 130 m y no poseen capacidad de almacenamiento.

Figura 2.5.

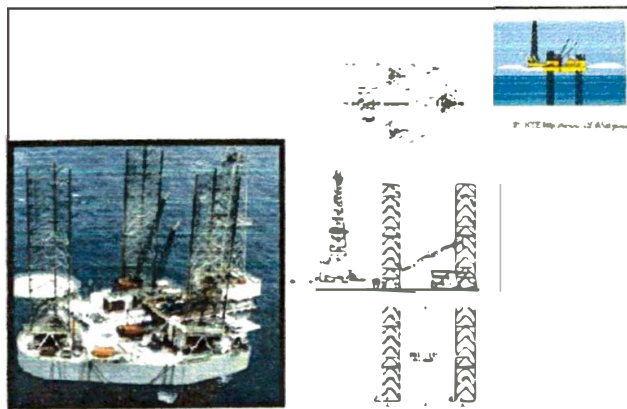


Figura 2.5 Plataforma fija auto-elevadora



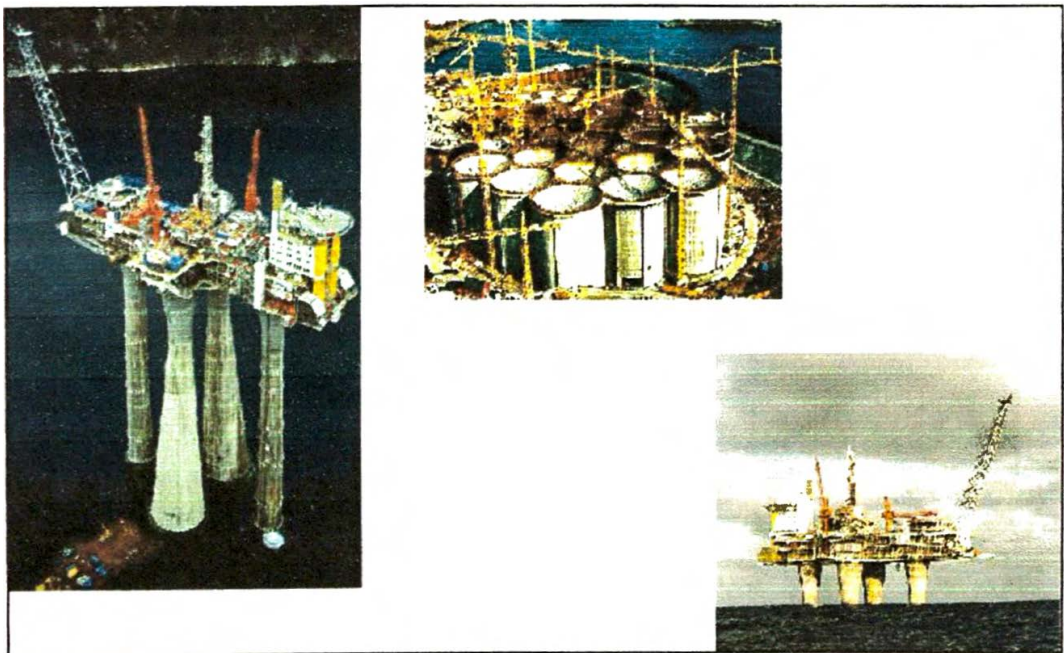
Estas plataformas son muy estables dinámicamente y las operaciones de perforación realizadas en tierra son muy parecidas a las realizadas en esta plataforma. Estadísticamente con este tipo de plataformas se ha sufrido el mayor número de accidentes marítimos. Las operaciones de subida y bajada son bastante influenciadas por las condiciones del tiempo y del mar.

c) **Plataforma por Gravedad**

Estas plataformas tienen cimientos de concreto en su base, son de naturaleza fija, sirven para condiciones de mar extremas tienen buena estabilidad y trabajan en una lamina de agua de hasta 100m.

Figura 2.6.

Su capacidad de almacenamiento es poca pero son de gran utilidad en las operaciones marítimas.

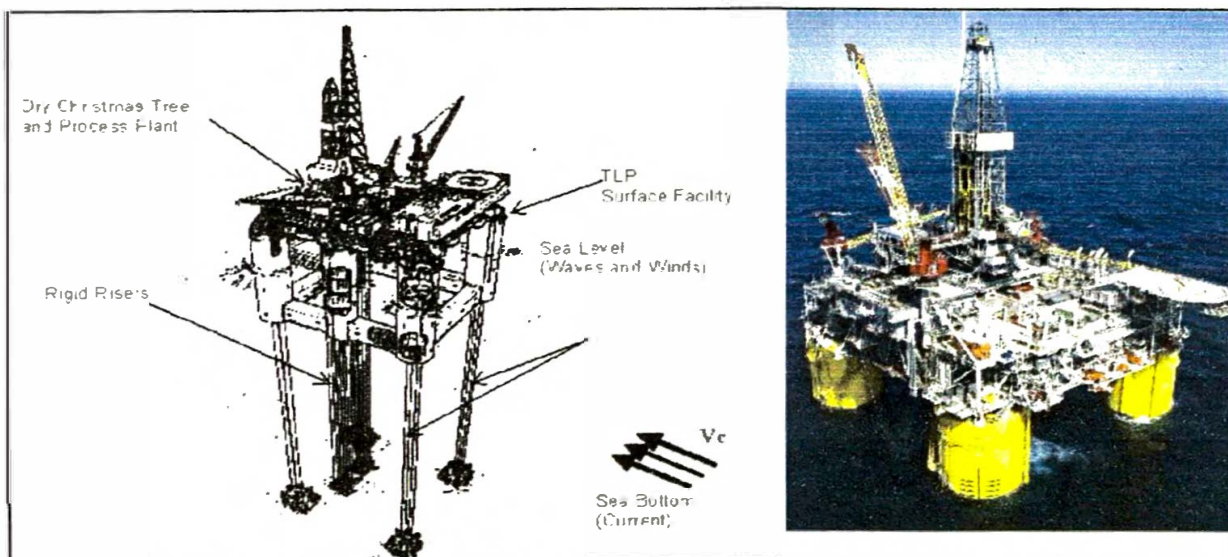


**Figura 2.6** Plataforma fija por Gravedad

**d) Plataforma de Piernas Tensionadas (Tension Leg Platform:TLP)**

Son plataformas usadas para el desarrollo de campos. Su estructura es muy similar a la de una plataforma semi-sumergible, siendo que sus piernas principales son ancladas en el fondo del mar por medio de cabos tubulares. Figura 2.7

El grado de flotabilidad de la plataforma hace posible que las piernas se mantengan constantemente en tracción, reduciendo severamente el movimiento de la plataforma por esta razón no tienen compensador de movimiento. Así, las operaciones de perforación y de producción son iguales a la de una plataforma fija, presenta buen desenvolvimiento para trabajar en láminas de agua de más de 1000m y no posee capacidad para almacenamiento pudiendo usar un navío aliviador para su producción.



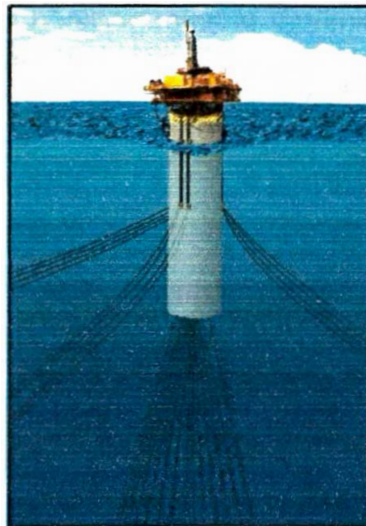
**Figura 2.7** Plataforma de piernas tensionadas (TLP)

**e) Plataforma Spar Buoy**

Es una plataforma flotante de calado profundo, posee un casco cilíndrico anclado en el fondo del mar a través de cabos o líneas de

anclaje, el cual después del anclado es montada una plataforma encima del casco, poseen también compensadores de movimiento y son usados con pozos equipados con árbol de navidad seca.

Tiene un excelente comportamiento en mares severos, usados en laminas de agua de más de 1000 m presentan también una buena área de combés. Tiene como desventaja que es una tecnología relativamente nueva. Figura 2.8



**Figura 2.8** Plataforma Spar Buoy

f) **Plataforma Semi-Sumergible.**

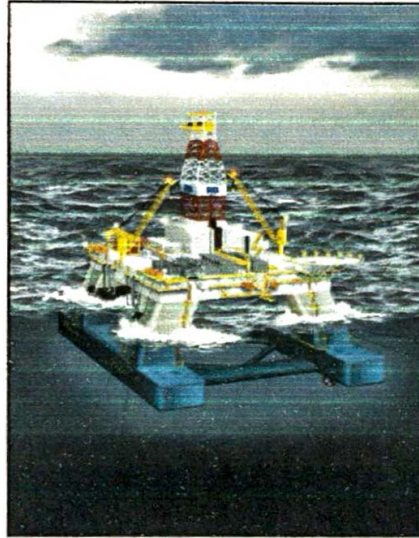
Las plataformas semi-sumergibles están compuestas de una estructura con una o varias cubiertas, apoyadas en flotadores sumergidos. Una unidad flotante sufre movimientos debido a la acción de las olas, corrientes y vientos, los que pueden dañar los equipos que van a instalarse en el pozo. Por ello, es imprescindible que la plataforma permanezca en posición sobre la superficie del mar. Los tipos de sistema responsables de la posición

de la unidad flotante son dos: el sistema de anclaje y el sistema de posicionamiento dinámico.

El sistema de anclaje se compone de 8 a 12 anclas y cables y/o cadenas, que actúan como resortes y producen esfuerzos capaces de restaurar la posición de la plataforma flotante cuando ésta es modificada por la acción de las olas, vientos y corrientes marinas.

En el sistema de posicionamiento dinámico no existe una conexión física de la plataforma con el lecho marino, excepto la de los equipos de perforación. Los sensores acústicos determinan la posición, y los propulsores ubicados en el casco serán accionados por computadoras las cuales podrán controlar y restauran la posición de la plataforma.

Las plataformas semi-sumergibles pueden tener o no propulsión propia para su desplazamiento. De cualquier forma, presentan una gran movilidad y son las preferidas para la perforación de pozos exploratorios. Figura 2.9.



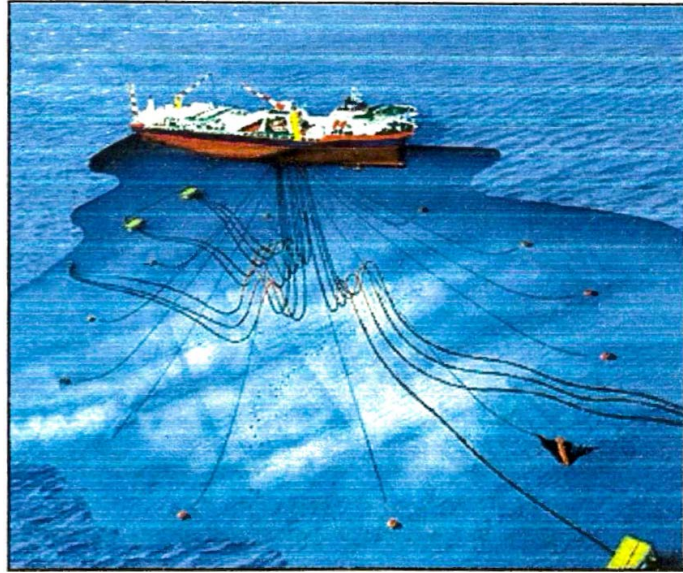
**Figura 2.9** Plataforma Semi-Sumergible

**g) Floating Production, Storage & Offloading (FPSO)**

Los buques FPSO (Floating, Production, Storage and Offloading) son buques con capacidad para procesar y almacenar petróleo así como también proveer la transferencia de petróleo y/o gas natural a otro navío llamado de navío aliviador. En la cubierta del buque se instala una planta de procesamiento para separar y tratar los fluidos producidos por los pozos. Después de separado del agua y gas, el petróleo es almacenado en los tanques del propio buque y transferido a un buque cisterna a cada cierto tiempo (navío aliviador).

El buque cisterna es un buque petrolero que atraca en la popa de la FPSO para recibir el petróleo almacenado en los tanques y transportarlo a tierra. El gas comprimido es enviado a tierra a través de gasoductos y/o re inyectado en el depósito. Las mayores plataformas FPSO tienen capacidad de procesar alrededor de 200 mil barriles de petróleo por día, con una producción asociada de gas

de aproximadamente 2 millones de metros cúbicos diarios. Figura 2.10.



**Figura 2.10** Plataforma FPSO

## **2.2 DUCTOS DE PRODUCCIÓN**

Los ductos de producción tienen la finalidad de transportar el fluido producido desde la cabeza de pozo hasta la Unidad Estacionaria de Producción y por su constitución pueden ser rígidas o flexibles. La parte suspensa de un ducto de producción es conocida como riser y son componentes críticos de un sistema submarino de producción por estar sometidos a elevados esfuerzos de fatiga debido a la acción de la corriente, olas y movimientos de la unidad estacionaria de flotación.

Los riser pueden ser clasificados de acuerdo a su configuración, a su material y finalidad, con base a su configuración podemos clasificarlos en verticales, en catenaria y complejos (usan flotadores).

Riser de acuerdo a su configuración:

**a) Verticales**

En esta configuración es aplicada una fuerza de tracción en el topo, con la finalidad de mantener el riser siempre en tracción, evitando que éste se doble. Esta configuración demanda el uso de plataformas con baja respuesta dinámica, normalmente pueden ser plataformas del tipo piernas tensionadas (TLP) o Spar buoy.

**b) Catenaria**

En la mayoría de estas configuraciones no es aplicada una fuerza de tracción de topo. Los extremos de esta línea (superior y inferior) no necesariamente están en el mismo alineamiento.

**c) Complejas**

Esta configuración deriva de la configuración en catenaria, el riser asume una geometría en forma de catenaria doble a través de la instalación de flotadores o boyas mantenidas suspensas dentro del mar.

La Figura 2.11 muestra de forma general los diferentes tipos de configuración de los risers.

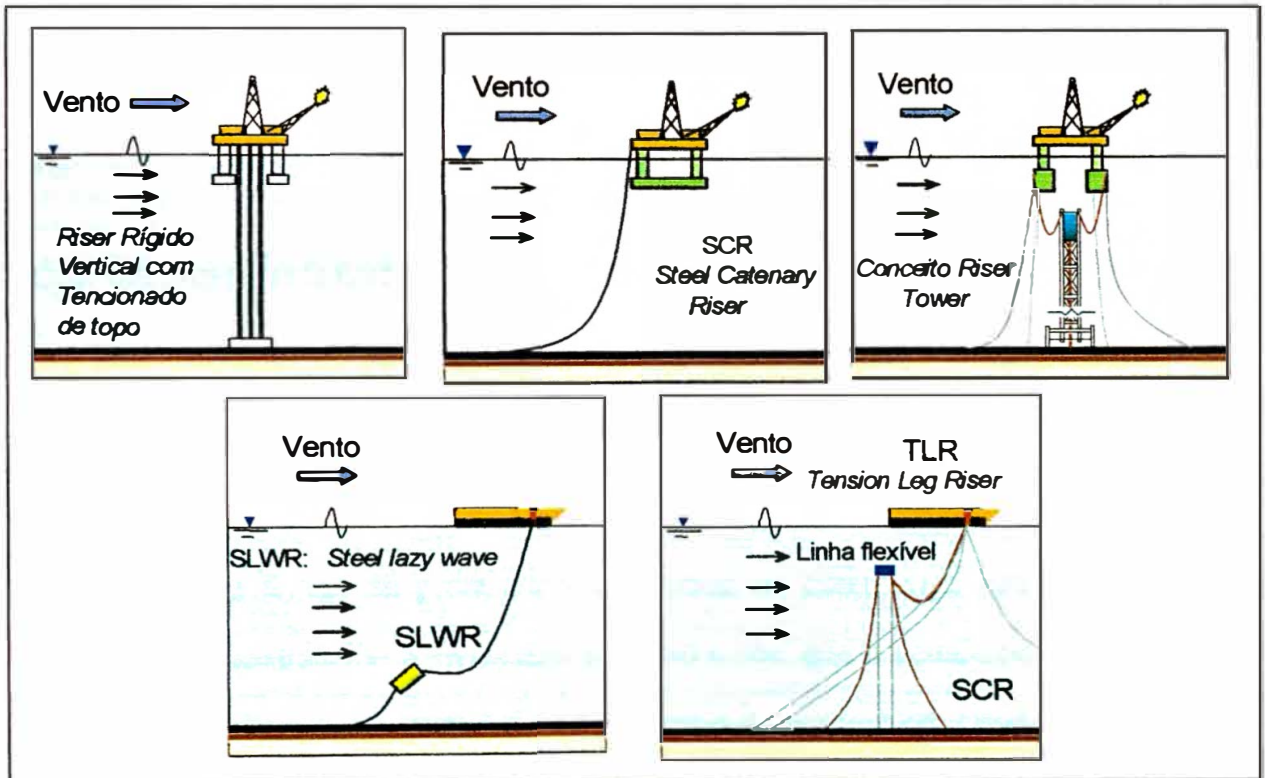


Figura 2.11 Tipos de configurações de los risers



## **CAPÍTULO 3**

### **COMPORTAMIENTO ESTÁTICO Y VIBRACIÓN LIBRE DE UM RISER AUTO-SUSTENTABLE**

#### **3.1 ECUACIÓN DEL COMPORTAMIENTO DE *RISERS* RÍGIDOS VERTICALES**

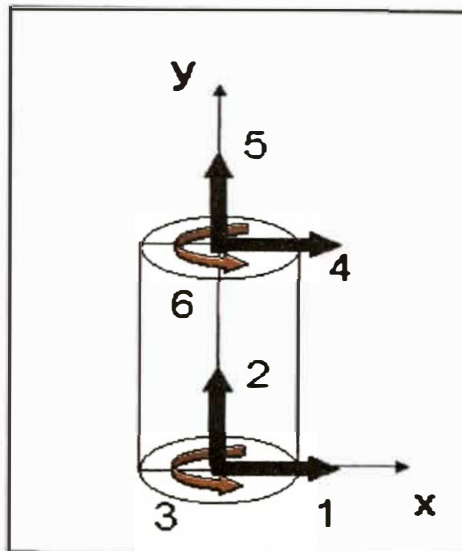
Los risers o líneas de producción son tubos de acero cuya función es de transportar (extracción o inyección) petróleo crudo, gas o agua. Los risers son usados principalmente dentro de los sistemas de producción y perforación de pozos petroleros en el mar. Dentro de este trabajo se estudiara un tipo de riser que será destinado a la producción de petróleo.

Los risers pueden ser de dos tipos riser rígidos y flexibles. Los risers rígidos son menos resistentes a altas flexiones que influye directamente en la fatiga de la estructura principalmente causada por la acción del o los movimientos de la plataforma, la onda, la corriente marina, así como el consecuente desprendimiento de vórtices generados por el paso de la corriente y la ola sobre el riser. La ventaja de los risers rígidos es su menor costo en comparación con los risers flexibles y también presentan mayor resistencia a las altas presiones hidrostáticas. Por otro lado la ventaja de los risers flexibles es su gran capacidad de resistencia a la flexión, de soportar grandes esfuerzo flexibles (radios de curvatura del ducto), tener una mayor vida útil, así como también presentar mayor flexibilidad para los desplazamiento de traslación de

una plataforma en comparación con los risers rígidos, la desventaja de los risers flexibles es que económicamente son de mayor costo y no soportan altas presiones hidrostáticas las cuales comprometen en cierta forma su utilización en grandes profundidades, aunque últimamente se han venido desarrollando ductos flexibles capaces de soportar grandes presiones hidrostáticas.

En vista de las ventajas mencionadas dentro de los riser rígidos éstas serán usadas dentro de un sistema alternativo llamado Riser Híbrido Auto-Sustentable (RHAS), En este sistema RHAS se considera al riser rígido como una viga en tracción, de condición libre en su parte superior y empotrada en su parte inferior (condiciones de contorno).

Para describir esta viga usaremos el modelo de viga Euler-Bemoulli, este modelo asume la hipótesis de que las secciones transversales del ducto permanecen planas y normales al eje de la viga antes y después de sufrir alguna deformación, además de no considerar deformaciones debido a esfuerzos cortantes. Este análisis será restringido a dos dimensiones y el riser será idealizado como una junta de elementos donde cada elemento está constituido por dos nodos los cuales cada uno presentan tres grados de libertad, siendo así dos de traslación y uno de rotación, como es ilustrado en la Figura 3.1.



**Figura 3.1** Grados de libertad en un elemento de riser.

La figura 3.2 muestra las fuerzas estáticas que actúan sobre un elemento de riser (elemento de forma tubular).

- (T) tracción y (V) fuerza cortante sobre las paredes del riser;
- ( $F_{x0} + F_{xi}$ ) fuerzas horizontales producidas por las presiones interna y externa sobre el elemento;
- ( $F_{y0} + F_{yi}$ ) fuerzas verticales producidas por las presiones interna y externa sobre el elemento;
- (Fc) fuerza de arrastre propio de la corriente de mar.
- (W) peso distribuido del elemento.



por unidad de longitud en la dirección horizontal, (d), fuerza de amortecimiento debido a la masa del riser. El método de Galerkin (uso del método de elementos finitos) será utilizado para hallar la solución numérica de la ecuación 3.1, (Patel, 1989) y (Paz, 1989).

Los resultados obtenidos a través de este método numérico serán comparados con las soluciones analíticas de la ecuación 3.1.

### 3.2 COMPORTAMIENTO ESTÁTICO DE UN RISER AUTO-SUSTENTABLE.

Para el cálculo del comportamiento estático de un Riser Auto-Sustentable usamos los mismos métodos descritos en los libros para risers verticales rígidos, (Patel, 1989), tanto en sus soluciones numéricas (Apéndice A) como analíticas y haciendo las adaptaciones y consideraciones necesarias en nuestro modelo. Todos estos detalles serán descritos en esta sección. La Figura 2.3 muestra el esquema de un Riser Auto-Sustentable.

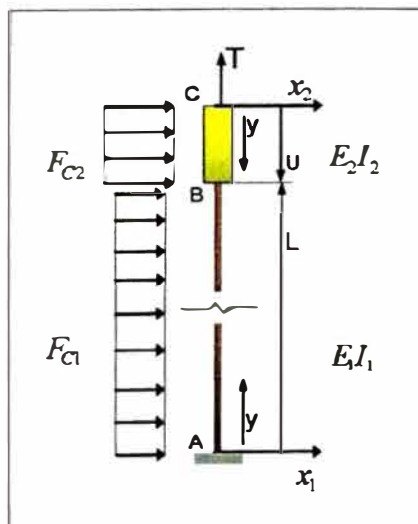


Figura 3.3 Modelo de un Riser Auto-Sustentable

Para efectos de simplificación se consideró en este estudio una fuerza concentrada 'T' constante a lo largo de la longitud del riser representando así ésta una fuerza de tracción ejercida por la fuerza de empuje de la boya, así como también su efecto hidrostático. En este sistema fueron impuestas fuerzas distribuidas por unidad de longitud  $F_{C1}$  a lo largo del riser y  $F_{C2}$  a lo largo de la boya, que son nada menos que las fuerzas debido a la corriente del mar (estas fuerzas son diferentes debido a que ellas están en función de sus diámetros, de la boya y del riser respectivamente), y también consideramos la rigidez a la flexión  $E_1 I_1$  y  $E_2 I_2$  tanto en el riser como en la boya respectivamente.

Consideramos que la boya presenta una mayor rigidez elástica en comparación con el riser y que la boya presenta una rigidez geométrica (influencia de la rigidez en función de una tensión axial actuando sobre el elemento) prácticamente nula.

Para las condiciones de contorno aplicadas para la solución analítica se considera que el riser en su parte inferior (punto A, Figura 3.3) posee traslación y rotación nula (condición de contorno empotrado), y en la parte superior (punto C, figura 3.3) consideramos un momento de flexión y fuerza cortante nula igual o cero, (condición de contorno libre), Así:

Parte inferior: Condición empotrada (riser, punto A de la Figura 3.3).

$$\begin{aligned} \text{a) } x_1 = 0 & \rightarrow y = 0 \text{ (Traslación)} \\ \text{b) } \frac{dx_1}{dy} = 0 & \rightarrow y = 0 \text{ (Rotación)} \end{aligned} \tag{3.2}$$

Parte superior: condición libre (en la boya, punto C de la Figura 3.3).

$$\begin{aligned} \text{c) } \frac{d^2 x_2}{dy^2} &= 0 \quad \rightarrow y=0 \text{ (Momento)} \\ \text{d) } \frac{d^3 x_2}{dy^3} - n_2^2 \frac{dx_2}{dy} &= 0 \quad \rightarrow y=0 \text{ (Fuerza cortante)} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Aplicando estas condiciones en la Ecuación (3.1), las soluciones estáticas para el riser y la boya podrán ser presentadas como las siguientes expresiones:

$$x_1 = C_1(e^{n_1 y} - n_1 y - 1) + D_1(e^{-n_1 y} + n_1 y - 1) - \frac{F_{C1} y^2}{2E_1 I_1 n_1^2} \quad (3.4)$$

$$x_2 = D_2(e^{-n_2 y} - e^{n_2 y}) - \frac{B_2}{n_2^2} + \frac{F_{C2}}{2E_2 I_2 n_2^4} (2e^{n_2 y} - n_2^2 y^2 - 2) \quad (3.5)$$

Siendo  $C_1, D_1, D_2, B_2$  coeficientes a ser hallados con  $n_1 = \sqrt{T/(E_1 I_1)}$  y  $n_2 = \sqrt{T/(E_2 I_2)}$ ,  $x_1$  y  $x_2$  los desplazamientos del riser y la boya respectivamente.

Asumiendo la condición de continuidad en la junta de estructuras riser - boya (Rivin, 1999), punto B de la Figura 3.3, y aprovechando las ecuaciones 3.4 y 3.5 tenemos en este punto las siguientes condiciones:

1) Continuidad de traslación,  $x_1(L) = x_2(U)$

$$\begin{aligned} C_1(e^{n_1 L} - n_1 L - 1) + D_1(e^{-n_1 L} + n_1 L - 1) + D_2(e^{n_2 U} - e^{-n_2 U}) + \frac{B_2}{n_2^2} &= \frac{F_{C1} L^2}{2E_1 I_1 n_1^2} \\ + \frac{F_{C2}}{2E_2 I_2 n_2^4} (2e^{n_2 U} - n_2^2 U^2 - 2) \end{aligned} \quad (3.6)$$

2) Continuidad de rotación,  $\left. \frac{dx_1(y)}{dy} \right|_{y=L} = \left. \frac{dx_2(y)}{dy} \right|_{y=U}$

$$C_1 n_1 (e^{n_1 L} - 1) + D_1 n_1 (1 - e^{-n_1 L}) - D_2 n_2 (e^{-n_2 U} + e^{n_2 U}) = \frac{F_{C1} L}{E_1 I_1 n_1^2} - \frac{F_{C2}}{E_2 I_2 n_2^3} (e^{n_2 U} - n_2 U) \quad (3.7)$$

3) Continuidad de momento,

$$\left. \frac{d^2 x_1(y)}{dy^2} \right|_{y=L} = J^4 \left. \frac{d^2 x_2(y)}{dy^2} \right|_{y=U} \quad ; \quad \text{con } J = \sqrt[4]{(E_2 I_2)/(E_1 I_1)}.$$

$$C_1 n_1^2 e^{n_1 L} + D_1 n_1^2 e^{-n_1 L} + D_2 n_2^2 J^4 (e^{n_2 U} - e^{-n_2 U}) = \frac{F_{C1}}{E_1 I_1 n_1^2} + J^4 \frac{F_{C2}}{E_2 I_2 n_2^2} (e^{n_2 U} - 1) \quad (3.8)$$

4) Continuidad de la fuerza cortante,

$$\left. \frac{1}{n_1^2} \cdot \frac{d^3 x_1(y)}{dy^3} - \frac{dx_1}{dy} \right|_{x=L} = - \left( \left. \frac{1}{n_2^2} \cdot \frac{d^3 x_2(y)}{dy^3} - \frac{dx_2}{dy} \right) \right|_{x=U}$$

$$C_1 - D_1 = - \frac{F_{C2} U}{E_2 I_2 n_2^2 n_1} - \frac{F_{C1} L}{E_1 I_1 n_1^3} \quad (3.9)$$

De las ecuaciones (3.6) a (3.9) se tiene un sistema de ecuaciones que, resolviendo, nos permite hallar la solución analítica de forma general del comportamiento estático del sistema de Riser Auto-Sustentable. A seguir se muestran los resultados obtenidos de la solución analítica que serán luego comparadas con la solución numérica.

Los datos utilizados para esta comparación tanto en el riser y la boya son presentados en las tablas 3.1 y 3.2 respectivamente.



**Tabla 3.1.- Características del riser**

<b>Para el riser</b>	<b>Valor</b>
Área Transversal ( $m^2$ )	0,014
Coefficiente de arrastre – $C_D$	0,7
Longitud del riser (sin peso) – L (m)	100,0-200,0-500,0-1000,0
Densidad del fluido externo ( $kg/m^3$ )	1025,0
Diámetro externo – $D_{ext}$ (m)	0,25
Diámetro interno – $D_{in}$ (m)	0,21
Fuerza externa horizontal – $F_{C1}$ (kN/m)	0,09
Modulo de Young – $E_1$ ( $kN/m^2$ )	$2,1 \times 10^8$
Momento de inercia – $I_1$ ( $m^4$ )	$9,43 \times 10^{-5}$
Tracción constante a lo largo del sistema T (kN)	100,0
Velocidad constante de la corriente (m/s)	1,0

**Tabla 3.2.-Características de la boya**

<b>Para la boya</b>	<b>Valor</b>
Área Transversal ( $m^2$ )	7,07
Longitud de la boya (sin peso) – U (m)	20,0
Diámetro externo – $D_{bóia}$ (m)	3,0
Fuerza externa horizontal - $F_{C2}$ (kN/m)	1,07
Módulo de Young – $E_2$ ( $kN/m^2$ )	$2,10 \times 10^{12}$
Momento de inercia – $I_2$ ( $m^4$ )	3,97

En la Figura 3.4 se muestran cuatro casos en los cuales muestran una comparación de los desplazamientos y rotaciones para las soluciones numéricas y analíticas. La solución numérica fue hecha usando una matriz de rigidez global y una matriz de rigidez concentrada, y la solución analítica usando las Ecuaciones 3.4 y 3.5 mostradas anteriormente. Las matrices de rigidez concentrada y global tienen como principal diferencia en que la matriz de rigidez concentrada desprecia los efectos de las fuerzas incidentes en los grados de libertad vertical y rotacional de forma contraria a la matriz global considera todos los grados de libertad del elemento de riser, Figura 3.1.

Siendo entonces la matriz de rigidez concentrada usada para la solución dinámica de este sistema porque facilita el tiempo usado en las simulaciones hechas en el computador. Los cuatro casos 3.4 (a), 3.4 (b), 3.4(c) y 3.4 (d) son presentadas para cuatro longitudes diferentes de riser: 100 m, 200 m, 500 m y 1000 m siendo sus láminas de agua 120m, 250m, 600m y 1200m respectivamente.

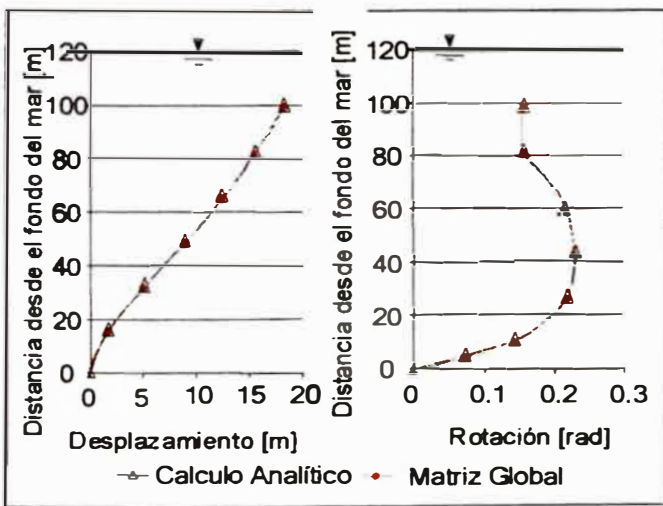


Fig. 3.4 (a) Longitud del riser 100m

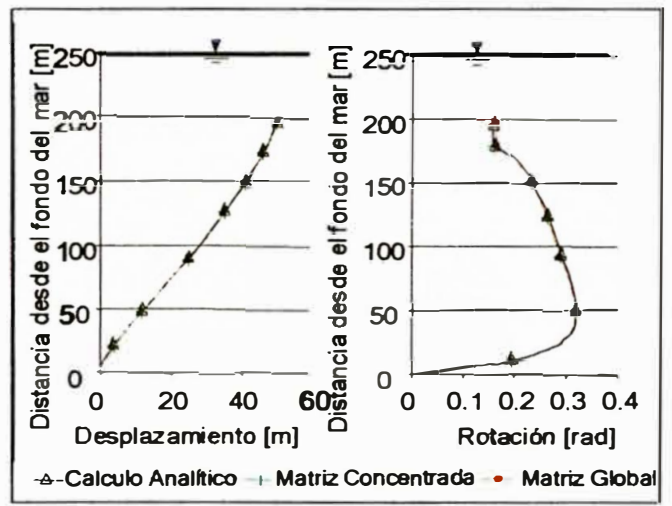


Fig. 3.4 (b) Longitud del riser 200m

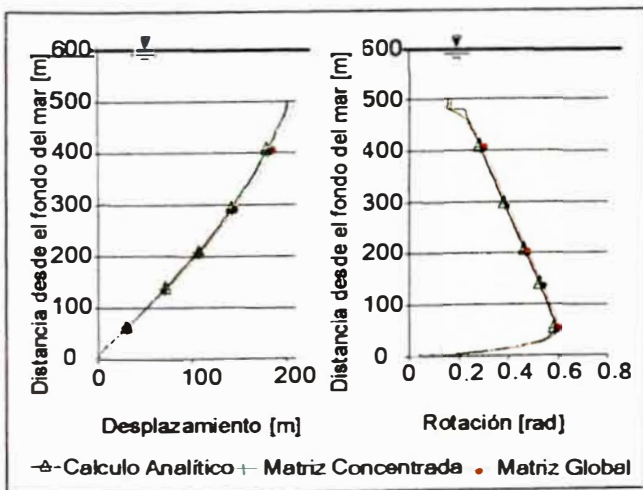


Fig. 3.4(c) Longitud del riser 500m

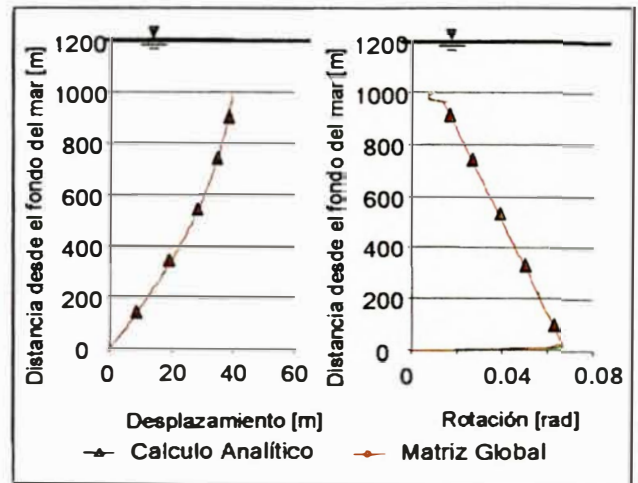


Fig. 3.4 (d) Longitud del riser 1000m

Cuando se usa el método de elementos finitos en la boya, se considerara solo a la matriz de rigidez elástica de ésta. La fuerza de tracción de la boya causada por su propia fuerza de empuje será despreciada estructuralmente por eso su matriz de rigidez geométrica será nula o despreciada. En el tramo donde se encuentra la boya solamente la rigidez global será descrita en la ecuación 3.10 y ilustrado en la figura 3.5.

$$[KGLOB] = [KE]_{bóya} + [KE]_{riser} + [KG]_{riser} \quad (3.10)$$

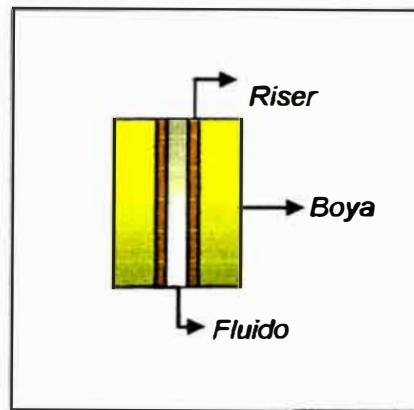


Figura 3.5. Conjunto boya-riser

Como la rigidez elástica de la boya  $[KE]_{bóya}$  es inmensamente mayor que la del riser (por sus dimensiones geométricas), consideramos entonces que la ecuación 3.10 finalmente será:

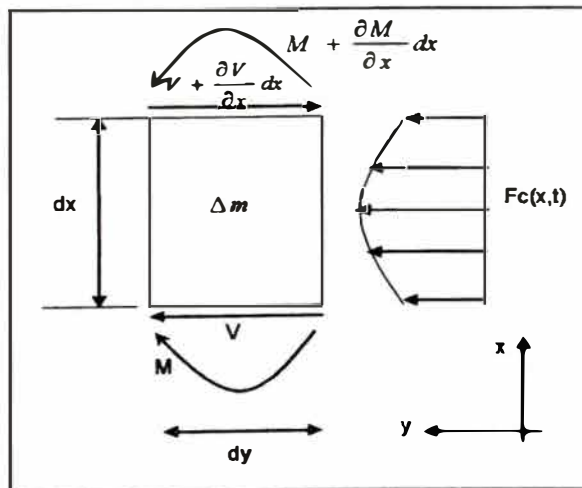
$$[KGLOB] = [KE]_{bóya} \quad (3.11)$$

### 3.3 VIBRACIÓN LIBRE DE UN RISER AUTO-SUSTENTABLE (SOLUCIÓN ANALÍTICA)

Las ecuaciones de vibración libre son obtenidas del equilibrio de un elemento de riser, aplicando básicamente la segunda ley de Newton (Craig, 1981).

Consideraremos a seguir una viga que no sufre deformaciones (después de actuar fuerzas externas) a lo largo de su eje axial, eje 'y', y que los planos de las secciones transversales son perpendiculares al eje longitudinal y también que la elasticidad del material que constituye la viga sea lineal (viga de Bernoulli).

La figura 3.6 muestra esquemáticamente a un elemento de riser de masa ' $\Delta m$ ' en la cual actúa una fuerza por unidad de longitud  $F_c$ , un momento  $M$  y una fuerza cortante  $V$ .



**Figura 3.6** Elemento de riser y cargas laterales, libre para flexión

Entonces:

$$\sum F_y = (\Delta m)a_y \Rightarrow V - \left(V + \frac{\partial V}{\partial x} dx\right) + F_c dx = \Delta m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (3.12)$$

Dónde  $\Delta m = \rho A dx$ . Con ' $\rho$ ', como densidad del elemento, ' $A$ ' área transversal dentro de un diferencial del elemento ' $dx$ '.

Como  $\sum M = 0$ , entonces:

$$M + \frac{\partial M}{\partial x} dx - M - V \frac{dx}{2} - (V + \frac{\partial V}{\partial x} dx) \frac{dx}{2} = 0 \quad (3.13)$$

Por lo tanto:

$$-\frac{\partial V}{\partial x} + \rho A \frac{d^2 v}{dt^2} = F_c(x, t) \quad (3.14)$$

$$\frac{\partial M}{\partial x} - V = 0 \quad (3.15)$$

Para deflexiones con pequeñas curvaturas, se considera:

$$M(x, t) = EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (3.16)$$

Combinando la expresión (3.14) con la expresión (3.15) y usando la expresión (3.16), se obtiene:

$$EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = F_c(x, t) \quad (3.17)$$

Considerando que la viga esta bajo tracción con una tracción ' $T$ ', obtenemos la siguiente expresión:

$$EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} - T(x) \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = F_c(x, t) \quad (3.18)$$

La ecuación (3.18) es correspondiente a la ecuación del comportamiento de un riser vertical con una fuerza distribuida en la dirección lateral.

### 3.4 SOLUCIÓN NUMÉRICA DE UN RISER AUTO-SUSTENTABLE EN VIBRACIÓN LIBRE.

Considerando la ecuación general del comportamiento de un riser vertical rígido (Ecuación 3.18) sin considerar su amortecimiento y ninguna fuerza externa  $F_c(x,t)$  (Burden, 1993), la vibración de una viga en flexión puede ser representada de la siguiente forma:

$$[M]\{\ddot{d}\} + [K]\{d\} = \{0\} \text{ (Vibración libre)} \quad (3.19)$$

Donde  $[M]$  es la matriz global de masa de orden  $N \times N$ , que está dada como la unión de la matriz de masa de cada elemento,  $\{d\}$  es el vector nodal de traslación y rotación,  $\{\ddot{d}\}$  el vector nodal de aceleraciones,  $[K]$  matriz de rigidez global (que es la suma de las matriz global de rigidez elástica y geométrica).

Para la ecuación (3.19) se considera como una solución:

$$\{d\} = \{d_0\} \cos(\omega t - \beta) \quad (3.20)$$

Donde,  $\{d_0\}$  es el vector correspondiente a la traslación inicial de la viga,  $\omega$  la frecuencia circular de movimiento y  $\beta$  el ángulo de fase. Sustituyendo la solución dada por la Ecuación (3.20) en la Ecuación (3.19), tendremos:

$$(-\omega^2 [M] + [K])\{d_0\} \cos(\omega t - \beta) = \{0\}$$

O también:

$$(-\omega^2 [M] + [K])\{d_0\} = \{0\} \quad (3.21)$$

Si consideramos la solución trivial de la Ecuación (2.21), tenemos que:

$$\det([K] - \omega^2 [M]) = |[K] - \omega^2 [M]| = 0 \quad (3.22)$$

El problema descrito por la ecuación (3.22) es un problema de auto-valor.

### 3.5 COMPARACIONES ENTRE LAS SOLUCIONES NUMÉRICAS Y ANALÍTICAS DE UN RISER AUTO-SUSTENTABLE EN VIBRACIÓN LIBRE.

En esta sección se muestran los resultados obtenidos a través de la solución numérica y analítica para la vibración libre de un Riser Auto-Sustentable, donde se considera al elemento de riser sometido a una tracción longitudinal constante, tabla 3.3. Los resultados de los modos naturales de vibración se muestran aquí con sus respectivas frecuencias naturales. A través del procedimiento analítico presentado en la ecuación 3.18, y los resultados numéricos, usando la metodología descrita en la sección 3.4, se muestran las comparaciones entre ambos métodos. Los resultados a seguir muestran una buena concordancia entre los ambos métodos.

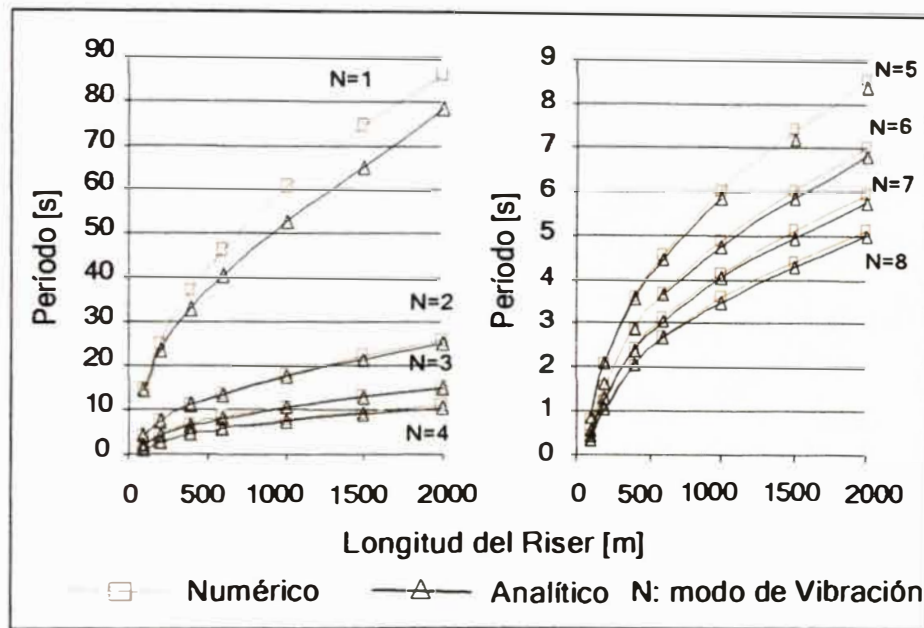
**Tabla 3.3.** Longitud del riser y su respectiva tracción.

<b>Longitud del riser [m]</b>	<b>TTOP [kN]*</b>
100,0	106,74
200,0	213,48
400,0	426,97
600,0	640,46
1000,0	1067,43
1500,0	1601,15
2000,0	2668,58

**\*TTOP: Tensión en la parte superior**

La tabla 3.3 muestra las longitudes del riser que oscilan entre 100m hasta 2000m con sus respectivas tracciones.

Los siguientes resultados son de un riser cuyas condiciones de contorno serán empotrado en su parte inferior y libre en su parte superior sujeto a una tracción constante y sin fuerzas externas actuando en su superficie ( $F_c=0$ ), vibración libre.

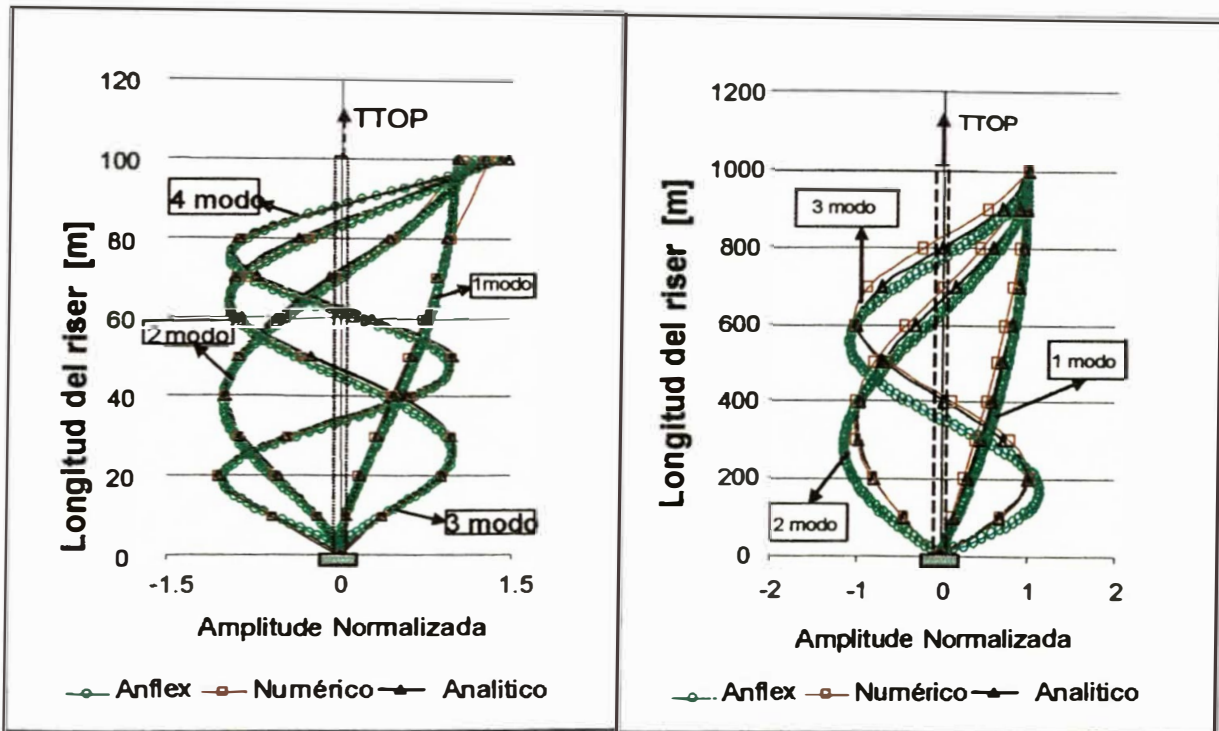


**Figura 3.7.**Período natural vs longitud del *riser*

Las Figura3.7 muestran los periodos naturales de un riser de tracción constante en función de su longitud. Se observa también que cuando la longitud del riser aumenta el periodo de vibración libre aumenta también, para un modo de vibración determinado siendo de esta manera más lento su movimiento vibratorio.

Por otro lado, para una longitud constante el periodo de vibración aumenta a medida que los módulos de vibración disminuyen.





**Figura 3.8.** Modos naturales para una viga empotrado abajo y libre arriba

La Figura 3.8 muestra los modos naturales de una viga libre de movimiento en su parte superior y con dos longitudes de risers diferentes, 100m y 1000m, en función de su amplitud normalizada a través de los cálculos numéricos y analíticos así como también una comparación con un software comercial llamado Anflex, lo que nos confianza en nuestros cálculos.

## CAPÍTULO 4

### FUERZAS HIDRODINAMICAS Y COMPORTAMIENTO DINAMICO DE UN RISER AUTO-SUSTENTABLE

Diferentes modelos están a disposición en la literatura para poder estimar las fuerzas hidrodinámicas en los risers. En el presente estudio, va a ser usado la ecuación de Morison (Chakrabarti, 1987) que es usada para hallar las fuerzas hidrodinámicas en estructuras esbeltas. La ecuación de Morison es expresada a través por la suma de la fuerza de inercia (proporcional a la aceleración de la partícula fluida debido a la onda) y la fuerza de arrastro (proporcional a la velocidad de la partícula fluida debido a la onda).

La ecuación de Morison es apropiada porque considera los efectos viscosos que son relevantes en el problema tratado, como el caso de estructuras esbeltas cuyas dimensiones son pequeñas comparados con la longitud de la onda. En el presente estudio entonces será considerada esta ecuación no solo para el cálculo de la fuerza actuando sobre el riser, sino también para la boya.

Para posteriores descripciones, se adoptara la dirección *in line* como aquella dirección que coincide con la dirección de la ola y la corriente, y la dirección transversal aquella cuya dirección es perpendicular a la dirección *in line*.

#### 4.1 FUERZAS HIDRODINÁMICAS EN LA DIRECCIÓN *IN LINE*

Considerando la incidencia de la ola y la corriente, actuando perpendicularmente a la superficie de un cilindro en posición vertical, conforme la figura 4.1, la ecuación de Morison describe una fuerza hidrodinámica compuesta del producto de la fuerza de arrastre y las fuerzas de inercia.

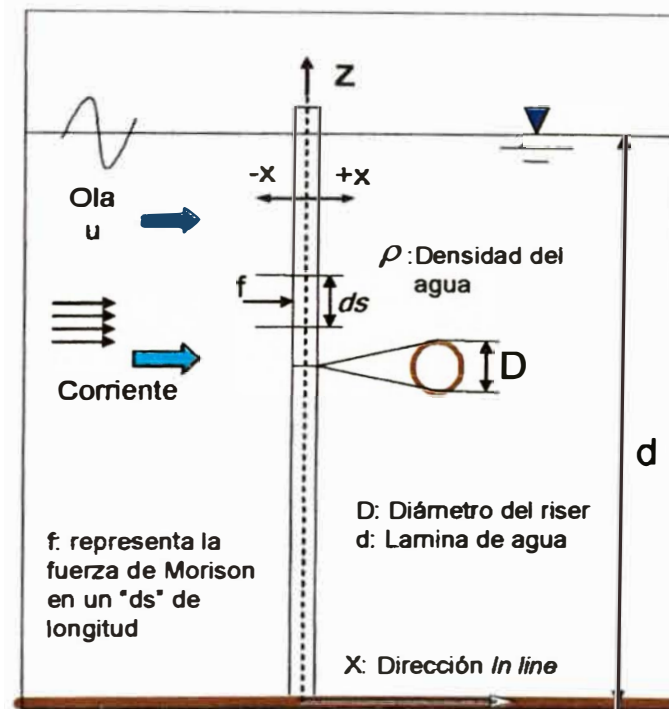


Figura 4.1 Parámetro de la ecuación de Morrison, dentro de onda y corriente del mar.

Considerando inicialmente el riser solamente en presencia de ondas. Teniendo en cuenta la aceleración del fluido al entrar en contacto con el riser y en seguida la desaceleración de éste al ultrapasar el riser, se originará una variación en la cantidad de movimiento del fluido.

Esta alteración en el movimiento de la partícula fluida origina la aparición de una fuerza inercial para una diferencial de longitud del riser ( $ds$ ), que es descrito de la siguiente manera:

$$df = C_M \rho \frac{\pi}{4} D^2 \frac{\partial u}{\partial t} ds \quad (4.1)$$

$D$  - diámetro del cilindro (diámetro externo del riser)

$\frac{\partial u}{\partial t}$  - aceleración local de la partícula de agua en relación al centro del cilindro

$C_M$  - coeficiente de inercia

$ds$  - longitud infinitesimal del riser

$\rho$  - densidad de la partícula fluida

El coeficiente de inercia  $C_M$  es empírico, hallado experimentalmente. En teoría el valor del coeficiente de inercia  $C_M$  puede ser calculado, por ejemplo tendrá un valor de 2.0 para cilindros lisos dentro de un fluido ideal (Patel, 1989).

Con las olas atravesando el riser y observando el paso del fluido a través de una sección transversal del riser, se puede apreciar una diferencia en la presión externa entre una región de máxima presión y otra de baja presión alrededor de la superficie del riser. Esta diferencia de presión es provocada por el fenómeno de separación de la capa límite, dando así origen a la fuerza de arrastre.

Sí el flujo fuese permanente (por ejemplo, solamente la corriente) las presiones externas en las regiones de alta y baja presión serán constantes y la fuerza de arrastre será proporcional al cuadrado de la velocidad de la partícula del fluido.

En caso que el flujo no sea permanente (por ejemplo, dentro de la presencia de onda) las presiones en las regiones de alta y baja presión serán variables, y la fuerza de arrastre tendrá una variación en función del tiempo. Dentro de la formulación de la fuerza de arrastre a seguir, el signo de la fuerza será considerado tomando en cuenta el valor absoluto de la velocidad de la partícula fluida:

$$df = \frac{1}{2} C_D \rho D |u| u ds \quad (4.2)$$

Donde,  $C_D$  es el coeficiente empírico de arrastre y "u" es la velocidad instantánea de la partícula de agua.

La suma de las componentes de fuerzas de arrastre y inercia, conforme lo descrito anteriormente, tendrá como resultado la Ecuación de Morison para un cilindro fijo en presencia de ondas, conforme la siguiente ecuación:

$$f = C_M A_I \frac{\partial u}{\partial t} + C_D A_D |u| u \quad (4.3)$$

$$\text{Donde, } A_I = \rho \frac{\pi}{4} D^2 \text{ y } A_D = \rho \frac{D}{2}$$

De acuerdo a la bibliografía se presentan muchos trabajos que muestran resultados experimentales para  $C_M$  e  $C_D$  (Sarpakaya, 1981). El correcto uso de los valores de estos coeficientes permite obtener resultados más realistas

para la estimación de las fuerzas de onda. En general estos coeficientes dependen de parámetros a dimensionales del flujo y del cilindro (riser), tales como el numero de Reynolds (Re), Keulegan-Karpenter (KC) y rugosidad relativa, conforme a seguir:

$$KC = \frac{|u_0|T}{D} \quad (4.4)$$

Donde  $u_0$  es la velocidad de la onda.

$$Re = \frac{|u_0|D}{\nu} \quad (4.5)$$

La rugosidad relativa es definida por  $k/D$  donde  $k$  es la medida de la rugosidad de la partícula e  $D$  como el diámetro del cilindro.

## 4.2 FUERZAS HIDRODINÁMICAS EN LA DIRECCIÓN TRANSVERSAL.

Observando nuevamente la sección transversal de un riser típico, Figura 4.2, el flujo que pasa a través del riser sufre variaciones en la presión a lo largo de la superficie externa. Esta variación de presión, en general, provoca separación de la capa límite en ambos lados del cilindro, produciendo así capas cizallantes opuestas al flujo generando vórtices. Este fenómeno de separación, en general, ocurre de forma alternada en cada lado de la sección transversal del riser, teniendo como referencia un eje de progresión de flujo. Un padrón regular de vórtices es formado dentro de una estela y genera fuerzas variables a lo largo del tiempo provocando así un movimiento oscilatorio al riser. Estas fuerzas se caracterizan por una magnitud y frecuencia de surgimiento (frecuencia de Shedding o frecuencia de

desprendimiento de vórtices). El movimiento oscilatorio resultante es llamado vibración inducida por vórtices (VIV).

La fuerza dinámica, no constante, propia de la formación de vórtices dentro de la dirección normal al flujo es denominada de fuerza transversal o fuerza de VIV (Figura 4.2).

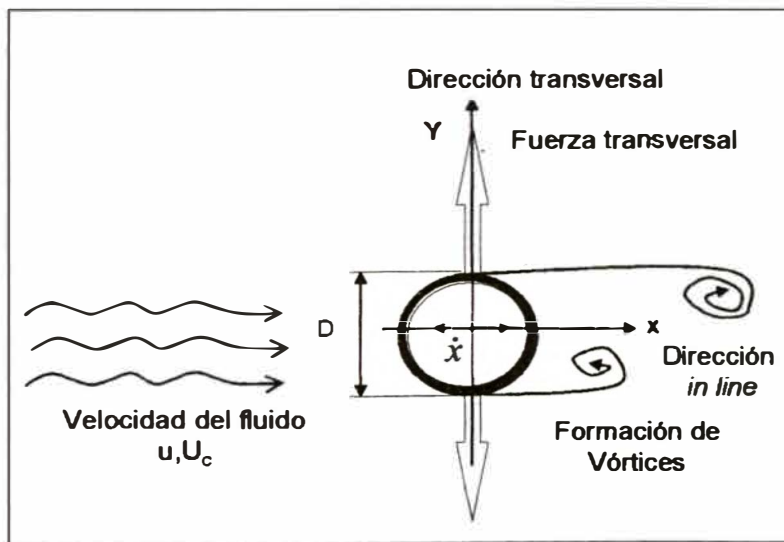


Figura 4.2 Componentes de la fuerza transversal.

Para secciones bidimensionales típicas, como es el caso de los risers, las fuerzas transversales son obtenidas de experimentos disponibles en la literatura (Sarpakaya, 1981). Estas fuerzas normalmente son obtenidas a través de un coeficiente a dimensional llamado coeficiente de fuerza transversal o *lift*, que es definido como:

$$\bar{C}_l = \frac{F_l}{1/2\rho DU^2} \quad (4.6)$$

La frecuencia de formación de vórtices  $f_s$  (Frecuencia de Shedding) en un cilindro estacionario es otro parámetro importante del flujo y su forma a dimensional será llamada de número de Strouhal  $S_i$  :

$$S_i = \frac{f_s D}{U} \quad (4.7)$$

Para risers marítimos utilizados en la perforación o producción de petróleo, en general un cilindro flexible de superficie rugosa, el valor de 0.2 para el número de Strouhal se muestra apropiado aun considerando un régimen de flujo crítico. (Ferrari, 1998)

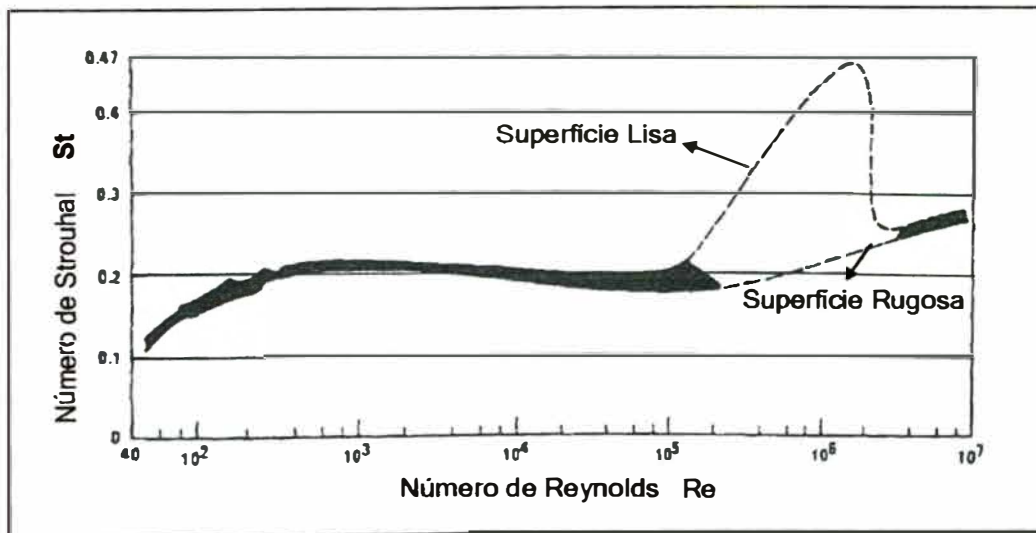
Cabe resaltar que el padrón de formación de vórtices en un cilindro de sección circular (riser) con flujo permanente (corriente marina) en condiciones ideales depende del número de Reynolds. Para un flujo oscilatorio (ondas marítimas), el padrón de formación de vórtice depende del número de Keulegan-Carpenter (KC) que está relacionado con la distancia en que ocurre la formación de vórtices. (Ferrari, 1998).

En el presente trabajo se adopta como modelo de fuerza transversal en el Riser Auto-Sustentable el modelo desarrolló por Ferrari y Berman (Ferrari, 1998) donde la fuerza de VIV incide en una sección transversal de riser (cilindro), sujeta a un flujo oscilatorio (onda) en régimen permanente y una corriente, presenta una forma senoidal y periódica conforme a seguir (Ferrari, 1998):

$$F_t = \frac{1}{2} \rho U_{w+c}^2 D \bar{C}_t \cos(2\pi \bar{f}_s t' + \varphi) \quad (4.8)$$



Donde la velocidad instantánea del flujo esta dado por  $U_{w+c} = u + U_c$  donde  $u$  es la velocidad de la partícula del fluido debido a la onda y  $U_c$  es la velocidad de la corriente,  $\bar{f}_s$  es la frecuencia media de los vórtices formados por cada segundo, la cual es calculada por la velocidad media de la onda en cada medio ciclo siendo que 't' varia de 0 a  $T/2$ , (Ferrari, 1998), y  $\phi$  es la diferencia de fase entre la respuesta del riser y la fuerza transversal. La frecuencia de desprendimiento de vórtices puede ser obtenida a través del número de Strouhal ' $S_t$ ', Ecuación (4.7), en función del número de Reynolds, Figura 4.3. (Bleviss, 1990).



**Figura 4.3** Número de Strouhal en función del número de Reynolds. (Bleviss, 1990)

Como fue considerado para el flujo oscilatorio, la media de la velocidad instantánea es usada para cada medio ciclo, donde la frecuencia media de formación de vórtices  $\bar{f}_s$  está definida por:

$$\bar{f}_s = \frac{|\bar{U}| S_t}{D} \quad (4.9)$$

$$\text{donde, } \bar{U} = \frac{\int_0^t (u + U_c) dt}{(t - t_0)}$$

### 4.3 COMPORTAMIENTO DINÁMICO DE UN RISER.

La ecuación de Morison aplicada en el presente estudio considera un modelo adaptado para la velocidad relativa del riser (Ferrari, 1998) conforme es representado en la Figura 4.4 y la fuerza en su forma vectorial se muestra a seguir de la siguiente manera:

$$\vec{F}_r = C_M A_I \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{F}_{VIV} + C_D A_D |\vec{V}_r| \vec{V}_r - C_A A_I (\ddot{x} + \ddot{y}) \quad (4.10)$$

Esta fuerza es la fuerza resultante que actúa lateralmente en el riser la cual está compuesta por la fuerza inercial, la fuerza de VIV, fuerza de arrastre y la fuerza de masa adicional en función de la velocidad resultante del fluido

$$|\vec{V}_r| = \sqrt{(u + U_c - \dot{x})^2 + \dot{y}^2}.$$

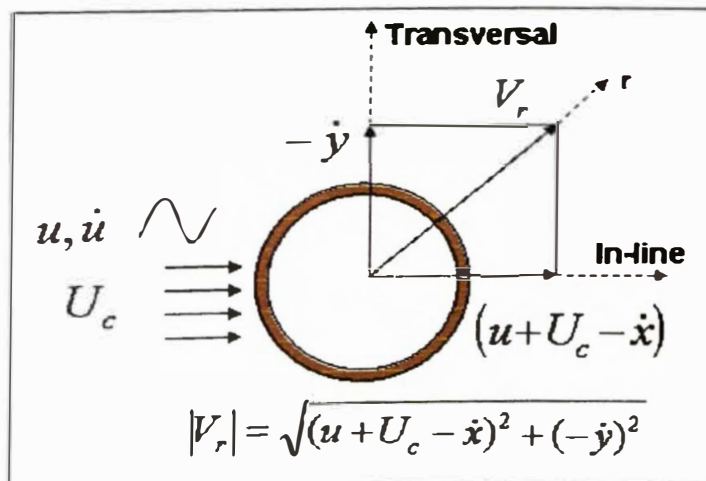


Figura 4.4 Velocidades actuantes en el riser en dos dimensiones

Las componentes de las fuerzas hidrodinámicas presentes en la Ecuación (4.10) en la dirección *in line* y transversal serán respectivamente:

$$F_x = C_M A_I \frac{\partial u}{\partial t} + C_D A_D |V_r| (u + U_c - \dot{x}) - C_A A_I \ddot{x} \quad (4.11)$$

$$F_y = F_{VIV} - \underbrace{C_D A_D |V_r| \dot{y} - C_A A_I \ddot{y}}_{\text{Reacción del fluido}} \quad (4.12)$$

Donde

$$F_{VIV} = \frac{1}{2} \rho ((u - \dot{x}) + U_c)^2 D \bar{C}_l \cos(2\pi \bar{f}_s t' + \varphi) \quad (4.13)$$

En la Ecuación (4.12) note que la Ecuación de Morison se presenta como una fuerza de reacción del fluido opuesta al movimiento del riser en dirección transversal. Este modelo (Ferrari, 1998) describe de forma más fiel el fluido alrededor de la sección transversal del riser, teniendo en cuenta que se considera la influencia del flujo en la dirección *in line* y transversal, de forma simultánea.

Las ecuaciones del comportamiento dinámico del riser en la dirección *in line* y transversal son solucionadas aplicando la integración numérica Newmark  $\beta$  (Patel, 1989). Estas ecuaciones se presentan a seguir:

$$[M]_x \ddot{x} + [B]_x \dot{x} + [K]_x x = C_M A_I \frac{\partial u}{\partial t} + C_D A_D |V_r| (u + U_c - \dot{x}) - C_A A_I \ddot{x} \quad (4.14)$$

$$[M]_y \ddot{y} + [B]_y \dot{y} + [K]_y y = \frac{1}{2} \rho ((u - \dot{x}) + U_c)^2 D \bar{C}_l \cos(2\pi \bar{f}_s t' + \varphi) - C_A A_I \ddot{y} - C_D A_D |V_r| \dot{y} \quad (4.15)$$

Donde  $[M]_x$  e  $[M]_y$  son las matrices de masa sin masa adicional. Las expresiones de las matrices de masa, amortecimiento, y rigidez, así como su solución numérica se presentan de manera amplia en el Apéndice B.

## CAPÍTULO 5

### RESULTADOS Y DISCUSIONES

Dentro del cálculo para el estudio comportamiento dinámico de un Riser Auto-Sustentable (RAS) se presentan los resultados del cálculo numérico en forma de máximas y mínimas líneas desplazamientos en las direcciones *in line* y transversal. La figura 5.0 muestra nuestro sistema en estudio junto con sus principales características.

En la sección 5.1 se pretende mostrar la influencia en el sistema (específicamente en el ducto) con y sin fluido interno así como también la influencia en el sistema del fluido externo a través de diferentes alturas y periodo de la ola y también para diferentes velocidades de corriente.

Otro aspecto abordado será la influencia del comportamiento dinámico mediante la variación de la geometría de la boya, presentado en la sección 5.2.

En la sección 5.3 será presentado el comportamiento dinámico del riser ante la variación de los coeficientes hidrodinámicos sobre el Riser Auto-Sustentable. Tanto en el riser como en la boya son hechas variaciones en los coeficientes de arrastre  $C_D$ .

Y por último, se presenta en la sección 5.4 detalladamente el efecto de VIV en la boya y en el riser de forma que se muestren sus respectivas trayectorias espaciales.

La tabla 5.1 presenta las principales características del riser y la boya que serán utilizadas para las simulaciones realizadas.

**Tabla 5.1.** Datos del *riser* y la boya

<b>Riser</b>	
Longitud de la profundidad de agua [m]	2800,0
Longitud del <i>riser</i> [m]	2700,0
Densidad del fluido externo [kg/m <sup>3</sup> ]	1025,0
Densidad del fluido interno [kg/m <sup>3</sup> ]	970,43
Densidad do <i>riser</i> [kg/m <sup>3</sup> ]	7846,05
Diámetro externo [m]	0,45
Diámetro interno [m]	0,41
Modulo de <i>Young</i> [kPa]	$2,1 \times 10^8$
CD-CA-Ct	1,2-1,0-1,2
<b>Boya</b>	
Longitud [m]	37,0
Diámetro externo [m]	6,4
Módulo de <i>Young</i> [kPa]	$2,1 \times 10^{13}$

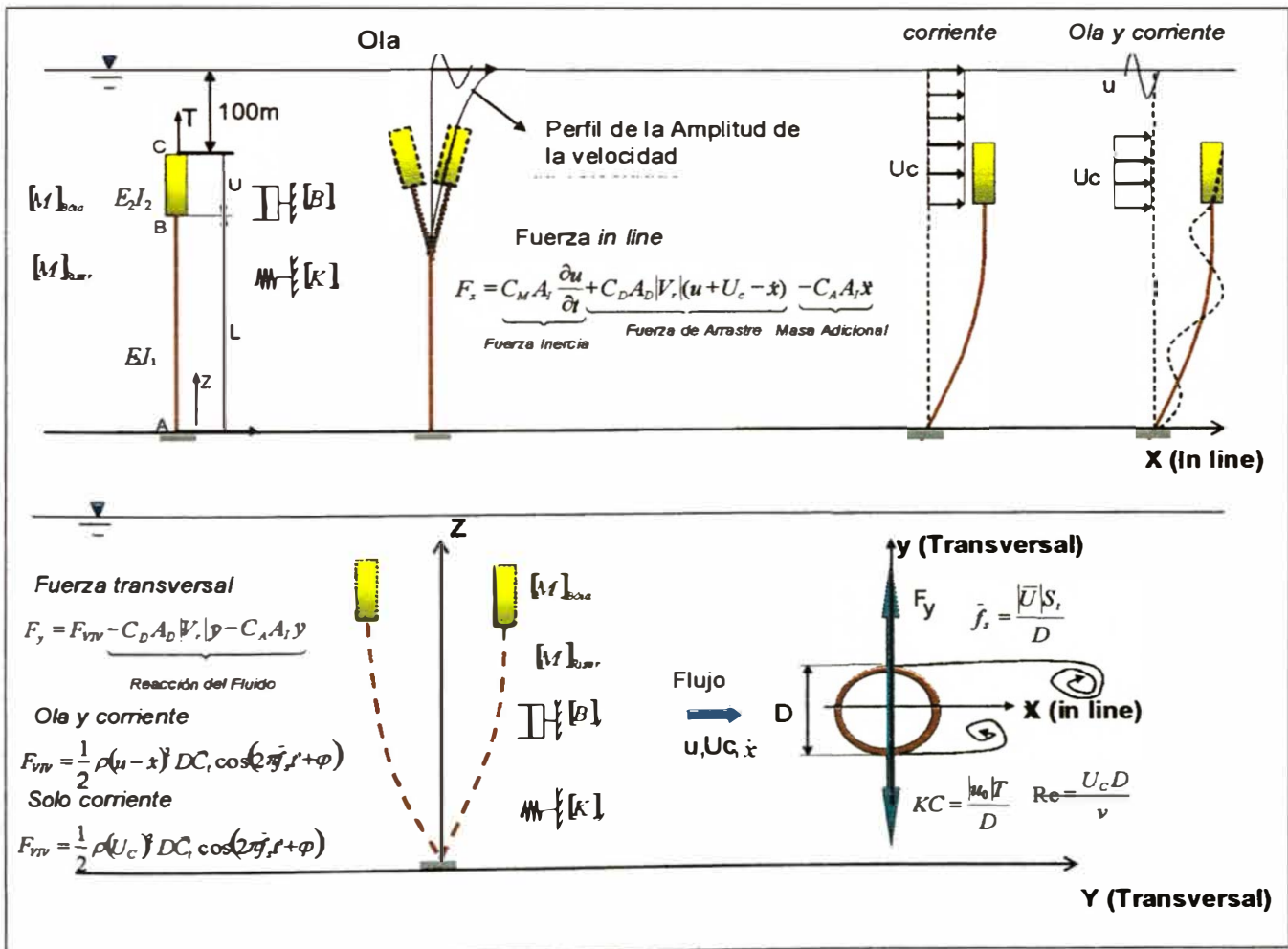
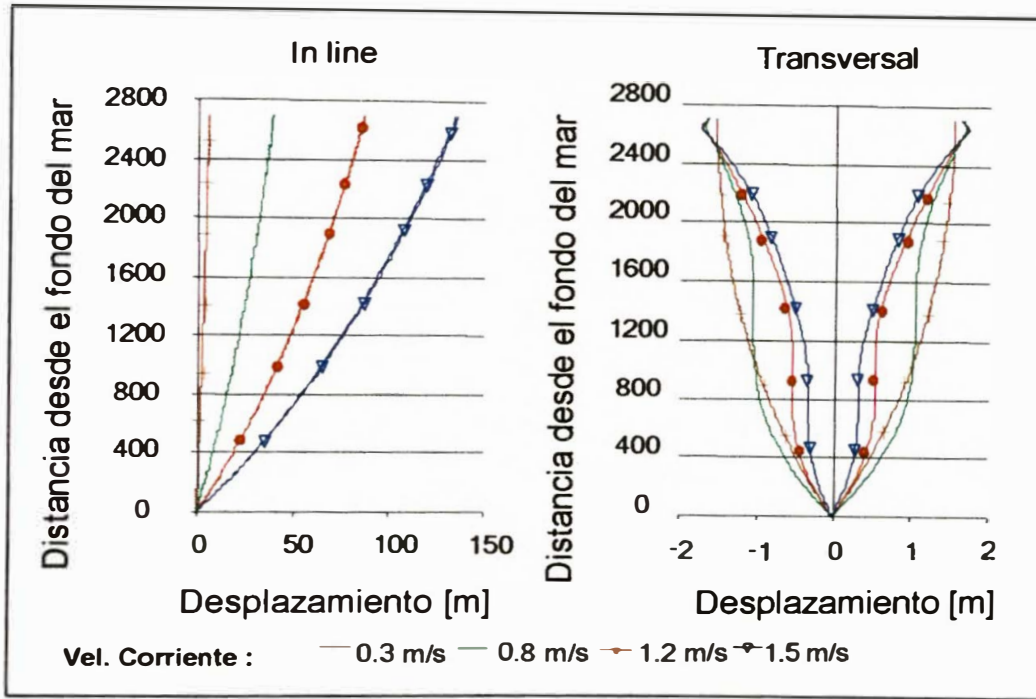


Figura 5.1 Sistema Riser Auto-Sustentable y sus principales parámetro, efectos y comportamientos.

### 5.1 INFLUENCIA DEL FLUIDO INTERNO Y EXTERNO EN EL SISTEMA RISER AUTO-SUSTENTABLE (RAS).

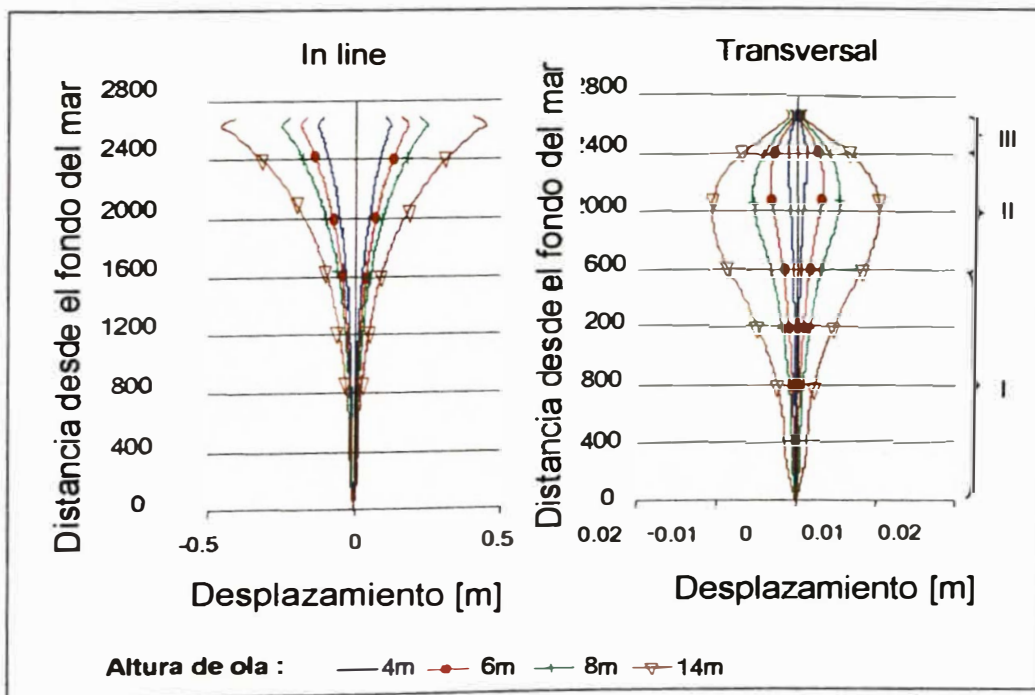


**Figura 5.2.** Comportamiento del RAS en función de la velocidad de la corriente.

Como se observa en la Figura 5.1, la fuerza *in line*  $F_x$  aumenta con el valor de la velocidad que es dependiente de la fuerza de arrastre lo que explica el aumento de los desplazamientos en la dirección *in line*. En la dirección transversal la velocidad de la corriente es aplicada solo en la boya siendo entonces la fuerza de VIV nula en la región correspondiente al riser, existiendo solamente la fuerza de reacción del fluido en esta región. Con el aumento de la velocidad de la corriente hay un aumento de la fuerza de reacción del fluido en la dirección transversal reduciendo los desplazamientos en esta dirección. En la figura 5.3 se presentan los resultados de las simulaciones en términos de desplazamientos con una incidencia de cargas

originadas por la ola, en la cual se muestra la influencia de la variación de la altura de ésta considerándola con un periodo constante de 12 segundos. Como se puede observar con el aumento de la altura de la ola se tiene un aumento también de los desplazamientos a lo largo de la longitud del riser en la dirección *in line*, pues como se sabe se tiene un incremento en la energía de la onda.

En la dirección transversal, los desplazamientos en la Figura 5.3 se incrementan a medida que se tiene un aumento de la altura de onda. Se observa también que en la región de la boya existe una caída brusca en los desplazamientos esto puede explicarse debido al incremento de la masa adicional de la boya con respecto a la masa adicional del riser (efectos hidrodinámicos).



**Figura 5.3** Comportamiento del RAS en función de la altura de onda



En la dirección transversal se observan 3 regiones bien definidas en la figura 5.3: I, II y III. Tales regiones son especificadas a seguir y son comportamientos característicos en resultados en que hay presencia solo de onda.

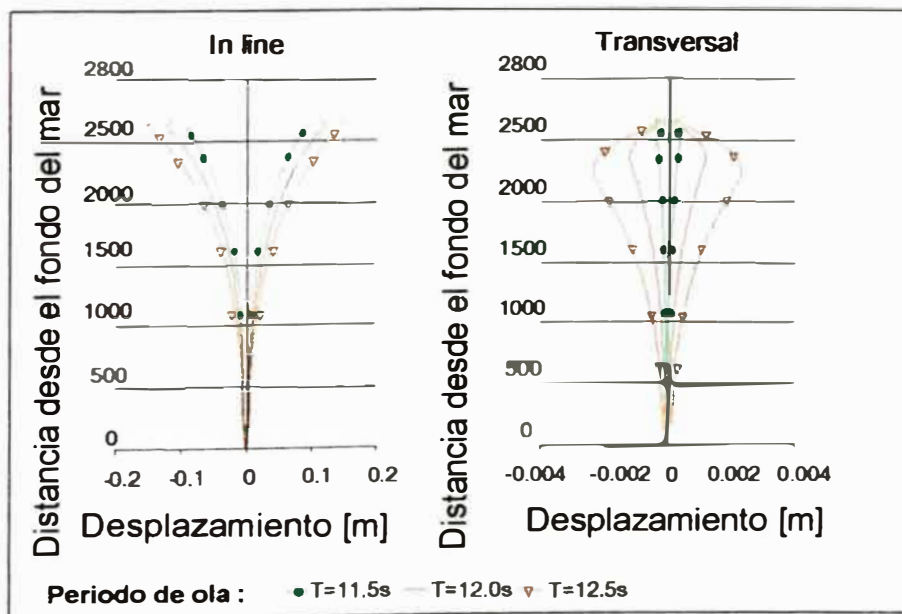
Dentro de la región I el número de KC es pequeño debido a la pequeña influencia de la onda en esta región (Ecuación 3.4), puesto que para todos los casos en que hay solamente onda se tiene un valor de KC menor que uno. En la bibliografía (Ferrari, 1998) son presentados los padrones de formación de vórtices para un cilindro dentro de un flujo oscilatorio donde el número de KC menor que 1 implica una carencia de desprendimiento de vórtices. Por lo tanto, la fuerza transversal  $F_y$  tendrá solamente una componente la de la fuerza reacción del fluido la cual es dependiente de la velocidad relativa entre la onda y la estructura.

En la región II se observa que el número de KC comienza a aumentar su valor debido a la velocidad de la ola puesto que aumenta a medida que se aproxima a la superficie del agua. En esta región el número de KC dentro de los cálculos se encuentra entre los valores de 1 a 4, que significa, según la bibliografía mencionada anteriormente que se tendrá la presencia de vórtices. En consecuencia los desplazamientos en esta región en la dirección transversal serán siempre mayores que los desplazamientos mostrados en la región I.

En la región III se observa que las curvas de los máximos y mínimos desplazamientos disminuyen drásticamente. Esto se produce principalmente

debido a la variación brusca que se tiene entre el diámetro del riser y el diámetro de la boya, produciendo una disminución en el número de KC lo cual implica la no formación de vórtice en la región de la boya, entonces aquí solo se tendrá la influencia de la fuerza de reacción del fluido produciendo menores desplazamientos en comparación con la región II.

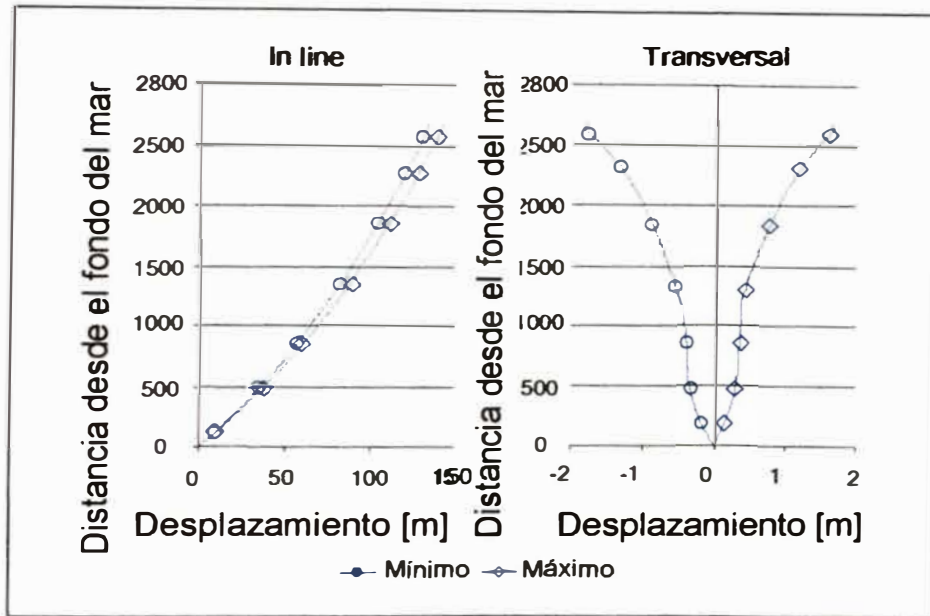
En la Figura 5.4 mostramos las curvas de los desplazamientos máximos y mínimos del sistema sometido a una carga de onda de 4 m de altura de onda para diferentes periodos. Es posible notar que con la disminución del periodo y el consecuente aumento de la velocidad de la partícula del fluido debido a la onda, haya una disminución en los desplazamientos en las dos direcciones.



**Figura 5.4** Comportamiento del riser en función del periodo de onda.

La Figura 5.5 presenta las curvas de los desplazamientos máximos y mínimos del RAS (Riser Auto-Sustentable) en las direcciones in line y transversal para una carga de onda y corriente, siendo que la onda posee una altura de 1.45m

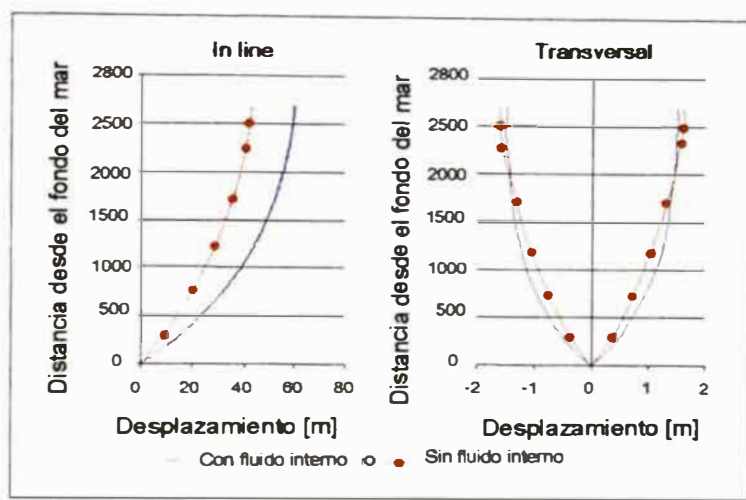
con un periodo de 12.2 s y la corriente una velocidad de 1.5 m/s. Tales resultados pueden servir para futuras comparaciones con casos experimentales.



**Figura 5.5.** Curvas de los desplazamientos máximos y mínimos con onda y corriente

En la Figura 5.6 se presenta el comportamiento del sistema RAS considerando el efecto de la presencia o no del fluido interno, las simulaciones fueron hechas en presencia de una corriente de 0.5 m/s de velocidad a lo largo de la extensión de la boya.

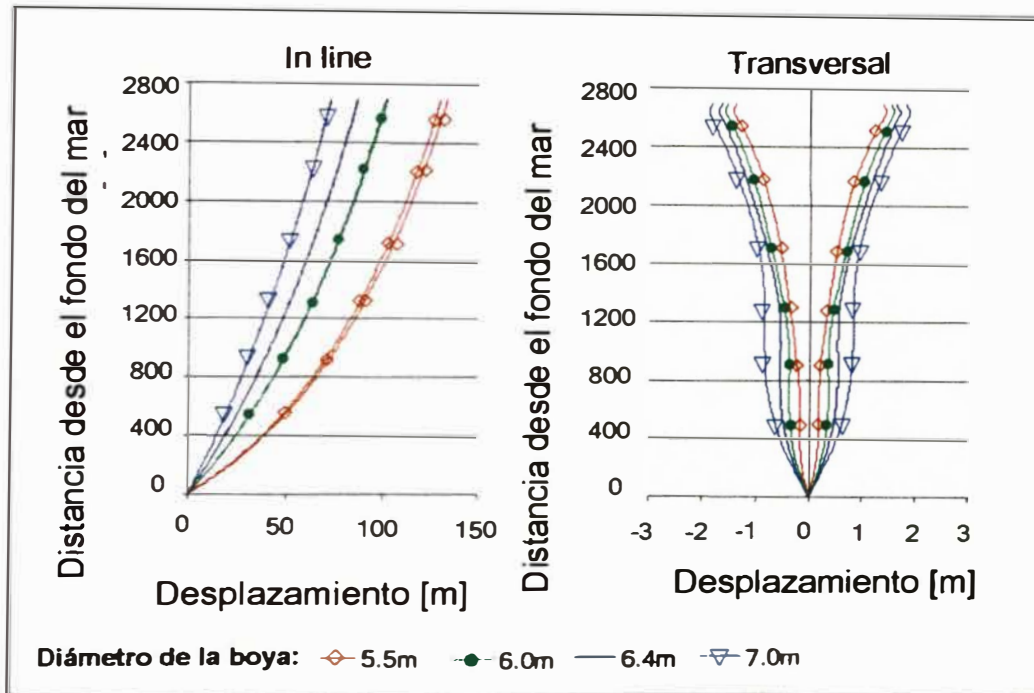
Se observa que cuando hay la presencia de un fluido interno dentro del RAS la tensión efectiva a lo largo del riser disminuye (Ecuación 3.1). Como se puede observar entonces en la dirección *in line* y transversal las curvas de los máximos y mínimos desplazamientos serán mayores en presencia del fluido interno.



**Figura 5.6** Efecto del RAS con y sin fluido interno.

## 5.2 VARIACIÓN DE LAS CARACTERÍSTICAS GEOMÉTRICAS DE LA BOYA.

La figura 5.7 presenta las máximas y mínimas curvas de los desplazamientos del RAS variando las dimensiones del diámetro en la boya. La simulación fue hecha para una corriente de 1.2 m/s de velocidad. En esta figura se observa que los desplazamientos en la dirección *in line* disminuyen cuando el diámetro de la boya aumenta de valor. Esto ocurre debido al aumento de volumen de la boya que influye directamente en la tracción efectiva (fuerza de empuje) del sistema aumentando los valores de la matriz de rigidez geométrica. También con este aumento del diámetro, se incrementan las fuerzas de arrastre, pero su influencia es menor que la influencia del aumento a la tracción, Ecuación (4.3). En la dirección transversal hay un pequeño aumento de los desplazamientos a medida que se aumenta el diámetro de la boya, ya que hay un aumento en la fuerza de VIV (esta fuerza esta en función, en este caso, del diámetro de la boya).



**Figura 5.7** Comportamiento del RAS en función del diámetro de boya.

Para observar el efecto que tiene la variación de la longitud de la boya en el RAS, la Figura 5.8 presenta los resultados de los desplazamientos del sistema para una corriente constante de 0.5 m/s a lo largo de la boya.

En la dirección *in line* se observa que con el aumento de la longitud de la boya (en consecuencia el volumen de la boya), los desplazamientos disminuyen por los mismos motivos mencionado en el caso anterior. Entre tanto en la dirección transversal se observa que con el aumento de la longitud de la boya la influencia del aumento de la fuerza transversal.

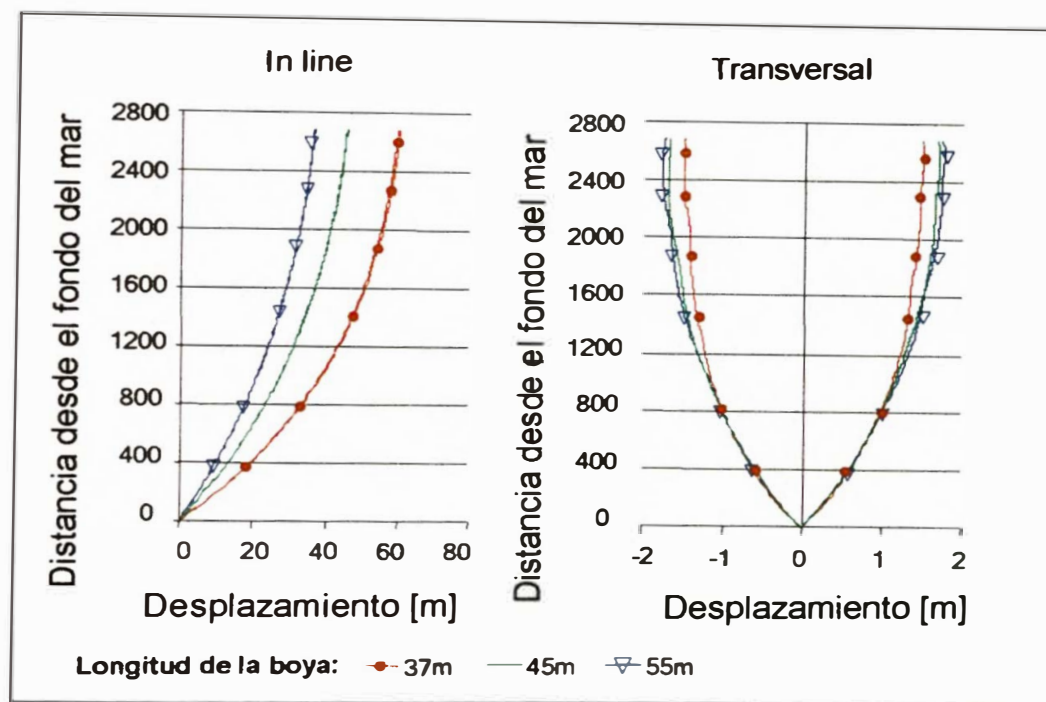


Figura 5.8 Efecto de la variación de longitud de la boya dentro del RAS

### 5.3 VARIACIÓN DE LOS COEFICIENTES HIDRODINÁMICOS EN UN RISER AUTO-SUSTENTABLE.

En este ítem se presentan las curvas de los máximos y mínimos desplazamientos del sistema RAS teniendo en cuenta diferentes valores de coeficientes hidrodinámicos de arrastre. La tabla 5.1 muestran las características del sistema con la única diferencia de que solo ahora se están variando los valores de los coeficientes  $C_D$ .

La figura 5.9 presenta los desplazamientos del RAS para diferentes coeficientes de arrastre para una carga producida por una ola de 4.0 m de altura y 12 s de periodo. El aumento del coeficiente de arrastre incrementa la fuerza en la dirección *in line* y tiende a disminuir la fuerza en la dirección transversal, como lo muestran las ecuaciones (4.11) y (4.12) respectivamente,

como se puede observar en las respectivas curvas de máximos y mínimos de los desplazamientos.

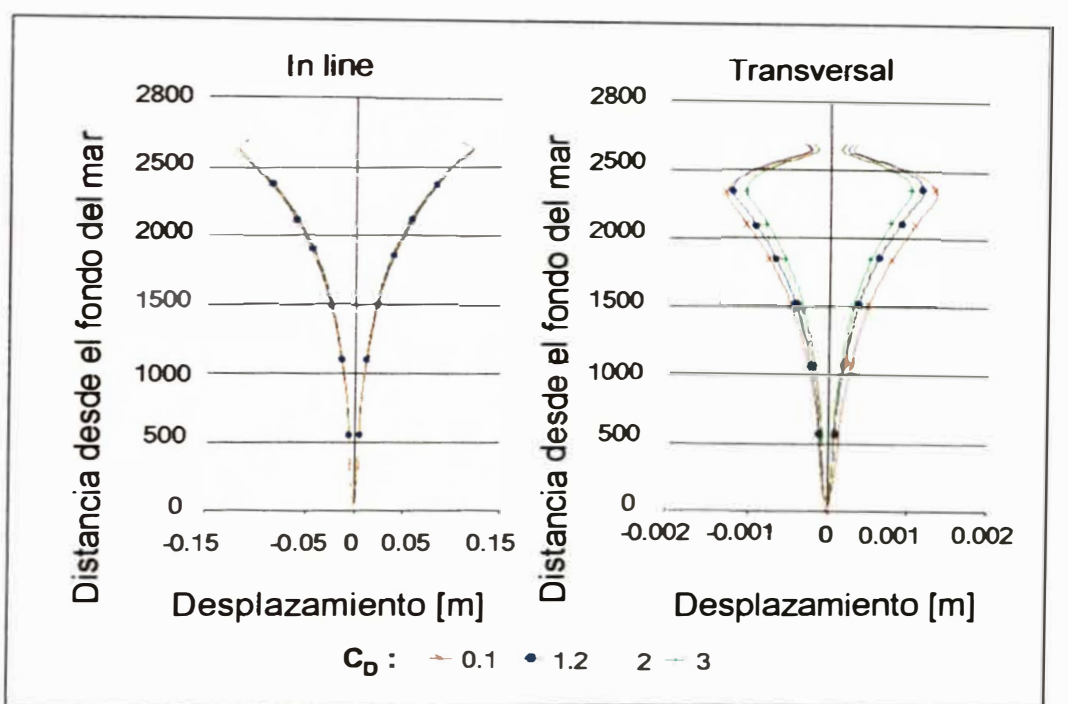


Figura 5.9 Comportamiento del RAS en función de  $C_D$  dentro de un flujo oscilatorio

En la figura 5.10 se muestra la influencia del coeficiente de arrastre para una carga constante originada por una corriente de agua alrededor de la boya con una velocidad de 1.2 m/s en función de los desplazamientos en las direcciones *in line* y transversal.

Se puede notar, la influencia del coeficiente  $C_D$  pues el sistema presenta un aumento de la fuerza in line con el aumento de  $C_D$  y una disminución de la fuerza transversal por el aumento de fuerza de reacción del fluido debido al aumento de  $C_D$ . Ecuación 4.14

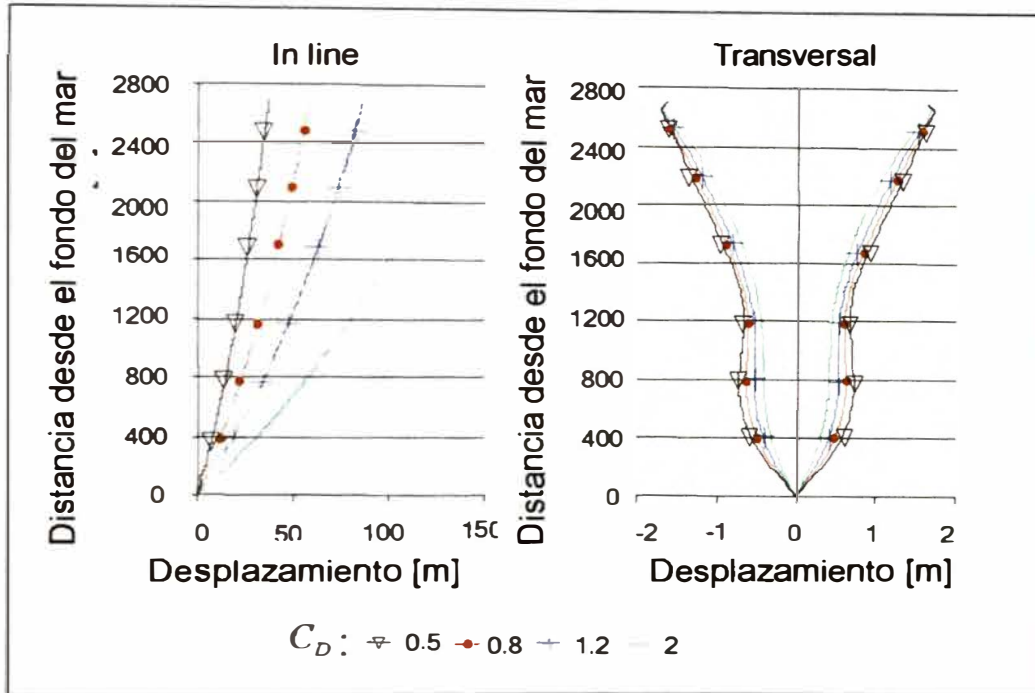


Figura 5.10. Comportamiento del RAS en función del  $C_D$  para una corriente constante de 1.2 m/s a lo largo de la boya.

#### 5.4 ESTUDIO DEL EFECTO DE VIV EN EL RAS EN RELACIÓN AL COMPORTAMIENTO DINÁMICO DEL SISTEMA.

La figura 5.11 presenta los desplazamientos en un plano horizontal para dos casos. En el caso 1 se considera solo una corriente de 0.3 m/s que incide sobre la boya y en el caso 2 se considera dos perfiles de corriente uno incidiendo con 0.3 m/s sobre la boya y el otro con 0.2 m/s incidiendo sobre el riser. Se nota claramente en la figura la diferencia de los desplazamientos en un plano para los casos en que hay una incidencia de corriente y consecuentemente el desprendimiento de vórtices en el riser demostrando así la importancia de los desplazamientos con presencia de vórtices. Se observa también que los valores de desplazamientos en la dirección in line previstos por el acoplamiento de los movimientos en las dos direcciones son significativas en relación al movimiento transversal.



Según la bibliografía (Patel, 1989) en concordancia con las pruebas experimentales cuando se tiene un cilindro inmerso dentro de un campo de corriente, el número de Reynolds es importante para observar la separación del fluido y la formación de vórtices. En los casos en que el número de Reynolds es pequeño se observa que el fluido queda en una región donde no hay desprendimiento de vórtice pues la velocidad del flujo es pequeña. En la figura 5.11 en el caso 1 se puede percibir que la velocidad relativa del fluido atravesando el riser no es suficiente para general desprendimiento de vórtices, puesto que el número de Reynolds es pequeño. Por otro lado en el caso 2 el número de Reynolds tendrá un valor dentro de la región en la cual se observa formación de vórtices causando así una vibración inducida en la dirección transversal en los puntos pertenecientes al riser ( $Re = \frac{|u_0|D}{\nu}$ ).

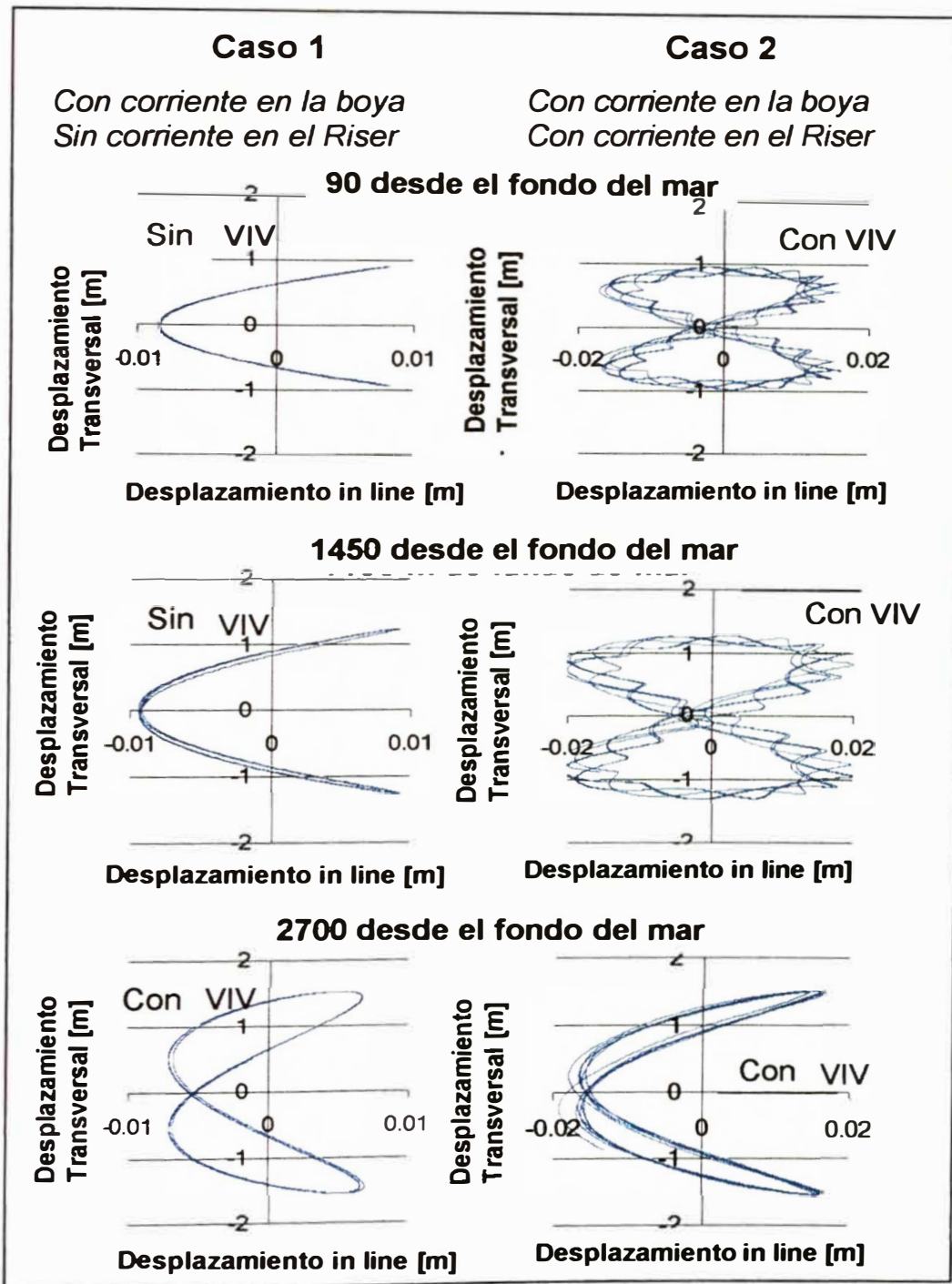


Figura 5.11 Desplazamiento en 2 dimensiones, con y sin efecto de VIV

## CONCLUSIONES

El presente trabajo tiene por objetivo mostrar el potencial energético (petróleo y gas) del Perú así como también mostrar los diversos sistemas de producción, de manera general, en alta mar que se podrían desarrollar en el mar peruano y presentar un estudio del comportamiento de un sistema de producción (RAS) utilizando los conceptos ampliamente conocidos en la bibliografía para poder representar el comportamiento de éste focalizando aquí los principales parámetros de relevancia técnica desde el punto de vista operacional. Con esto se pretende presentar o abrir un abanico para futuras discusiones acerca de las ventajas y límites de éste y de otros tipos de sistemas de producción marítima de petróleo.

Dentro de los resultados obtenidos, se mostraron los parámetros más importantes relativos a la hidrodinámica del sistema, la influencia de los coeficientes de arrastre, siendo éste de importancia relevante.

La boya merece un estudio cuidadoso tanto en términos estructurales como hidrodinámicos, pues hasta pequeñas variaciones en sus dimensiones geométricas pueden causar grandes variaciones dentro del comportamiento del sistema como se observa principalmente en los resultados de desplazamientos en la dirección *in line* que envuelven a las cargas producidas por una corriente.

En lo que respecta al comportamiento del sistema en presencia de ondas, se observó que variaciones en el periodo y en la altura de la ola causan grandes variaciones en el comportamiento del sistema, sugiriendo que la aproximación de esta influencia por métodos determinativos puede ser muy conservativa, siendo necesario un tratamiento estadístico para cálculos de vida útil y fatiga.

En cuanto a los modelos hidrodinámicos usados para las cargas *in line* y especialmente transversal, se puede afirmar que son prácticos en el sentido de permitir consideraciones de onda y corriente conjuntas, además de aproximar a través del fluido el acoplamiento de los movimientos existentes entre las direcciones *in line* y transversal.

El efecto de VIV se mostró de grande importancia dentro del comportamiento del sistema causando un movimiento periódico a lo largo de la boya como se pudo apreciar éste tiende a imponer al riser desplazamientos con el mismo periodo además de imponer también una vibración inducida por vórtices en su estructura. Tal movimiento de grande periodo tiende a aumentar los niveles de tensión a los cuales el riser está sometido causando una posible reducción en su vida útil.

Es necesario también hacer un estudio del sistema viendo en consideración el comportamiento elástico del suelo y su influencia en las condiciones de empotrado en la parte inferior del riser. La junta del riser con la boya también necesita de un modelo más próximo al modelo real pues en la unión riser boya estos se encuentran de manera empotrada produciendo así elevados niveles de tensión.

Se sugiere también usar la teoría de difracción para el cálculo de la hidrodinámica de la boya pues el elevado valor del diámetro en comparación con el del riser causa distorsiones en la ola incidente.

Para futuros trabajos se sugiere un estudio detallado de los puntos citados considerando la influencia de una línea flexible sobre el riser rígido con la boya y comparaciones de las simulaciones obtenidas con resultados experimentales.

## BIBLIOGRAFIA

- ABB, Vetco Gray Inc., Oil and Gas Field Machinery and Equipment Manufacturing
- Blevnis, R., Flow-Induced Vibration, 2ª edición, Krieger publishing Company, 1990.
- Burden, R. e Faires, J., Numerical Analysis, 5ª publicación, PWS Publishing Company, 1993.
- Central Intelligence Agency, Boletín digital, 7 de agosto del 2008.
- CIPCA, Boletín electrónico del Centro de Investigación y Promoción del Campesinado, región Piura, Agosto 2008
- Chakrabarti, S. K. e Frampton, R. E., Review of *Riser* analysis techniques. Chicago Bridge and Iron Co., Plainfield, IL 60544, USA, 1982.
- Chakrabarti, S.K, "Hydrodynamic of Offshore Structures", Computational Mechanics Publications, Springer-Verlag, USA, Illinois, chapter 6, 1987.
- Craig, R.R., Structural Dynamics – An introduction to Computer methods, 1<sup>st</sup> ed., John Wiley & Sonc, Inc, 1981.
- El Comercio Perú, periódico peruano edición online, Junio 2008
- Ferrari, J. A., Hydrodynamic Loading and Response of offshore *Riser*. tese de doutorado, Imperial college of Science, technology and Marine, England, London, 1998.
- Ferrari, J. A. e Bearman, P. W., Hydrodynamic Loading and Response of Offshore *Risers*. OMAE99-4132, Canadá, Newfoundland, 1999.
- Fundamentos de Engenharia de Petróleo, 2 edición Petrobras, Rio de Janeiro 2001
- Lu, P.; Shen, F.; O'shea, S.J.; Lee, K.H. e Ng., T.Y., Analysis of Effects on Mechanical Properties of Microcantilevers. Mater. Phys. Mech. 4 , p. 51-55, Singapore, 2001
- Morooka, C. K.; Coelho, F. M.; (Kubota, 2003), H.Y.; Ferrari Jr., J. A. e Ribeiro, E. J., Investigations on the Behavior of Vertical Production Riser, OMAE/OFT, Vancouver, Canadá, 2004

OPEC, Organización de países exportadores de petróleo, <http://www.opec.org>.

OILWATCH, Boletín N11, diciembre 2000.

Patel, M. H., Dynamics of offshore structures Butterworth & Co. (Publishers) Ltd, England, London 1989

Paz, Mario, Structural Dynamic: The Theory and Computation, USA, New York, Van Nostrand Reinhold, 1991.

Perupetro, A/DEPSEP, publicado por el diario La Republica, 21 de Noviembre 2007

Rivin, E.I., Stiffness and damping in mechanical design, M. Dekker, USA, New York Appendix 3, pp.417-419, 1999.

Sarpkaya, T. e Isaacson, M., Mechanics of Wave Forces on Offshore Structures. 1<sup>st</sup> ed., Van Nostrand and Reinhold Company, 1981.

USGS, Science for a changing World, September 2001

# APENDICE



## APENDICE A

### **A.1. Desarrollo de la ecuación estática para un riser vertical rígido.**

Considerando el equilibrio de las fuerzas dinámicas en un elemento a través de la sumatoria de las fuerzas en las direcciones "x" y "y", tenemos:

$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0 \\ (T + dT) \cos(\theta + d\theta) - T \cos\theta + (V + dV) \sin(\theta + d\theta) \\ - V \sin\theta + (F_{x0} + F_{xi}) + N \sin\theta d\theta &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

$$\begin{aligned} \sum F_y &= 0 \\ (T + dT) \sin(\theta + d\theta) - T \sin\theta - (V + dV) \cos(\theta + d\theta) + V \cos\theta + (F_{y0} + F_{yi}) \\ - W - N \cos\theta d\theta &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Considerando las siguientes identidades trigonométricas:

$$\sin(\theta + d\theta) = \sin\theta \cos d\theta + \sin d\theta \cos\theta \quad \text{e} \quad \cos(\theta + d\theta) = \cos\theta \cos d\theta - \sin d\theta \sin\theta ,$$

as ecuaciones (A.1) e (A.2) pueden ser expresadas de la siguiente manera:

$$-(T \sin\theta - V \cos\theta) d\theta + dT \cos\theta + dV \sin\theta + (F_{x0} + F_{xi}) + N \sin\theta d\theta = 0 \quad (\text{A.3})$$

$$(T \cos\theta + V \sin\theta) d\theta + dT \sin\theta - dV \cos\theta + (F_{y0} + F_{yi}) - W - N \cos\theta d\theta = 0 \quad (\text{A.4})$$

Multiplicando las expresiones (A.3) por él  $\sin\theta$  y (A.4) por él  $\cos\theta$  , tenemos:

$$Td\theta - dV + (F_{yi} + F_{y0} - W) \cos\theta - (F_{x0} + F_{xi}) \sin\theta - Nrd\theta = 0 \quad \text{A.5}$$

Las fuerzas horizontales  $(F_{x0} + F_{xi})$  y verticales  $(F_{y0} + F_{yi})$  son propias de la presión hidrostática interna y externa como se muestra en la referencia (Patel, 1989), de la siguiente manera:

$$F_{x_0} + F_{x_i} = [(p_i A_i - P_0 A_0) + (\gamma_i A_i - \gamma_0 A_0)] r (\cos \theta - \sin \theta d\theta) \text{sen} \theta d\theta \quad \text{A.6}$$

$$F_{y_0} + F_{y_i} = [(p_0 A_0 - P_i A_i) + (\gamma_0 A_0 - \gamma_i A_i)] r (\cos \theta - \sin \theta d\theta) \text{cos} \theta d\theta \quad \text{A.7}$$

Donde  $p$ ,  $A$ , y  $\gamma$  son la presión, área de la sección transversal y el peso específico del fluido.

Substituyendo las dos últimas ecuaciones en la Ecuación (A.5), se obtiene:

$$(T + p_0 A_0 - p_i A_i) d\theta - dV + ((\cos \theta - \text{sen} \theta d\theta)(\gamma_0 A_0 - \gamma_i A_i) - \gamma_s A_s \cos \theta - N) r d\theta = 0 \quad \text{A.8}$$

Donde,  $W = \gamma_s A_s r d\theta$ ,  $\gamma_s$  es el peso específico del material de la pared de *riser* y  $A_s$  la sección transversal de la pared del *riser*.

Es importante mencionar que la presión dinámica ejercida por el fluido interno será despreciada para efectos de simplificación dentro de este trabajo. Las fuerzas hidrostáticas no actúan en el extremo inferior de *riser* (el último nodo) puesto que este punto se encuentra en la condición empotrada, es decir, este nodo tiene desplazamiento cero.

Usando transformación de coordenadas y considerando que la curva de deflexión del *riser* presenta pequeñas inclinaciones no despreciables, tenemos:

$$ds \neq dx \text{ e } \theta \neq d\theta$$

Entonces:

$$\cos\theta = \frac{dx}{ds} = \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{1/2}} ; \operatorname{sen}\theta = \frac{dy}{ds} = \frac{\frac{dy}{dx}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{1/2}}$$

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{r} = \frac{d(\arctan dy/dx)}{dx} \frac{dx}{ds} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}$$

Esta ecuación  $\frac{d\theta}{ds}$  representa la curvatura del *riser* y a partir de ella podemos escribir:

$$\frac{dV}{ds} = \frac{dV}{dx} \frac{dx}{ds} = \frac{dV}{dx} \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{-1/2}$$

Dividiendo la Ecuación (A.8) por ( $ds$ ) obtenemos la expresión  $\frac{dV}{ds}$  en la cual se obtiene la siguiente expresión:

$$(T + p_0 A_0 - p_i A_i) \frac{d^2y}{dx^2} \left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{-1} - \frac{dV}{dx} + (\gamma_0 A_0 - \gamma_i A_i - \gamma_s A_s) - N \left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{1/2} = 0 \quad \text{A.9}$$

Basado en la ecuación de flexión de la viga, podemos introducir la siguiente expresión:

$$\frac{dV}{dy} = -\frac{d^2}{dy^2} \left( EI \frac{d^2x}{dy^2} \right) \quad \text{A.10}$$

Donde E es el módulo de Young o módulo de elasticidad, I el segundo momento de área Del riser y EI la rigidez a la flexión de la viga.

Multiplicando (A.9) por  $(dx/dy)$ , utilizando la ecuación de la viga flexionada (A.10)

y asumiendo que  $\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}$  es igual a uno para pequeñas deflexiones,

obtenemos:

$$\frac{d^2}{dy^2} \left( EI \frac{d^2 x}{dy^2} \right) - (T + p_0 A_0 - p_i A_i) \frac{d^2 x}{dy^2} = N + (\gamma_s A_s + \gamma_i A_i - \gamma_0 A_0) \frac{dx}{dy} \quad \text{A.11}$$

Esta expresión es la ecuación diferencial que representa el comportamiento estático del riser tal como es presentada en el Capítulo 3.

## **A.2. análisis por elementos finitos para riser verticales rígidos**

La formulación flaca por el Método "Galerkin", que es un caso particular del Método de los Residuos Ponderados, será usada para la solución de la Ecuación (3.1) del Capítulo 3.

### **A.2.1. desplazamientos laterales**

El método de los residuos ponderados busca hallar una solución aproximada de una ecuación diferencial  $f(x) = b$ , dentro de un dominio  $\psi$ . Obtendremos la solución de ésta con el auxilio de una función residual R, la cual debe satisfacer también las condiciones de contorno del problema (Paz, 1991).

El objetivo de este método es hacer la función residuo cada vez lo menor posibles sobre el dominio de la función, así:

$$\langle R, w \rangle = \int_{\psi} R w d\psi = 0$$

$$R = f(x_0) - b \neq 0$$

$$x_0 \in \psi$$

Por lo tanto:

$$\int_{\psi} (f(x_0) - f(x)) w d\psi = 0$$

A.12

$w$ : función peso

Para obtener ecuaciones elementales, se analizará un elemento de viga y se construirá la formulación flaca del método de Galerkin en dicho elemento.

La formulación flaca consiste, esencialmente, en la exigencia de que las condiciones de contorno de un determinado problema sean satisfechas.

$$EI \frac{d^4 v(x)}{dy^4} = q(y)$$

A.13

Siendo  $q(y)$  la carga distribuida a lo largo de la longitud del *riser*.

En la Ecuación (A.13) utilizando el método de los residuos ponderados, en el dominio  $\psi = (0, L)$  y posteriormente usando la integración por partes, tenemos:

$$\int_0^L w \left[ EI \frac{d^4 v}{dy^4} - q(y) \right] dy = 0$$

A.14

$$\int_0^L \left[ -\frac{dw}{dy} \left( EI \frac{d^3 v}{dy^3} \right) - w q(y) \right] dy + \left[ w \left( EI \frac{d^3 v}{dy^3} \right) \right]_0^L = 0$$

A.15

$$\int_0^L \left[ EI \frac{d^2 w}{dy^2} \frac{d^2 v}{dy^2} - w q(y) \right] dy + \left[ w \left( EI \frac{d^3 v}{dy^3} \right) - \frac{dw}{dy} \left( EI \frac{d^2 v}{dy^2} \right) \right]_0^L = 0$$

A.16

Con respecto a las condiciones de contorno, podemos citar dos tipos de condiciones, las condiciones esenciales y las condiciones naturales. Las condiciones esenciales son relacionadas a la deflexión  $v$  e a la rotación  $dv/dy$ , y las condiciones naturales serán  $EI \frac{d^2v}{dy^2}$  que es el momento flector y  $EI \frac{d^3v}{dy^3}$  que es la fuerza cortante.

Sea las siguientes notaciones en la expresión (A.16):

$$\begin{aligned} Q_1 &= \left( EI \frac{d^3v}{dy^3} \right)_0 \\ Q_2 &= \left( EI \frac{d^2v}{dy^2} \right)_0 \\ Q_3 &= - \left( EI \frac{d^3v}{dy^3} \right)_L \\ Q_4 &= - \left( EI \frac{d^2v}{dy^2} \right)_L \end{aligned} \quad \text{A.17}$$

Con estas notaciones (A.17) la formulación flaca de la Ecuación (A.16) puede ser escrita o expresada como:

$$\int_0^L \left[ EI \frac{d^2w}{dy^2} \frac{d^2v}{dy^2} - wq(y) \right] dy - w(0)Q_1 - \left( - \frac{dw}{dy} \right)_0 Q_2 - w(L)Q_3 - \left( - \frac{dw}{dy} \right)_L Q_4 = 0 \quad \text{A.18}$$

En la Ecuación (A.13),  $v$  es la variable dependiente que representa los desplazamientos laterales de la viga a lo largo de su longitud la cual puede ser aproximada, así:

$$v(x) = \alpha_1 + \alpha_2 y + \alpha_3 y^2 + \alpha_4 y^3 \quad \text{A.19}$$

Asumiendo también que:

$$1) \frac{dv(y)}{dy} = \theta(y)$$

$$2) \frac{d^2v(y)}{dy^2} = M_{xy}(y) / EI$$

A.20

$$3) \frac{d^3v(y)}{dy^3} = F_x(y) / EI$$

Donde (1) es el ángulo de rotación, (2) el momento y (3) la fuerza cortante.

Las condiciones de contorno natural do problema serán:

$$v = v_1 \rightarrow \frac{dv_1}{dy} = \theta_1 \dots \text{para} \dots y = 0$$

A.21

$$v = v_2 \rightarrow \frac{dv_2}{dy} = \theta_2 \dots \text{para} \dots y = L$$

Escribiendo las ecuaciones con las condiciones de contorno y posteriormente expresadas en forma matricial obtenemos:

$$v_1 = 1\alpha_1 + 0\alpha_2 + 0\alpha_3 + 0\alpha_4$$

$$\theta_1 = 0\alpha_1 + 1\alpha_2 + 0\alpha_3 + 0\alpha_4$$

A.22

$$v_2 = 1\alpha_1 + L\alpha_2 + L^2\alpha_3 + L^3\alpha_4$$

$$\theta_2 = 0\alpha_1 + 1\alpha_2 + 2L\alpha_3 + 3L^2\alpha_4$$

$$\begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix}$$

A.23

Despejando  $\alpha$  , llegamos a la siguiente forma:

$$\begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix} = \frac{1}{L^3} \begin{bmatrix} L^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L^3 & 0 & 0 \\ -3L & -2L^2 & 3L & -L^2 \\ 2 & L & -2 & L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad \text{A.24}$$

Se puede notar también que la ecuación  $v(x)$  puede ser expresada de la siguiente manera:

$$v(x) = f_1 v_1 + f_2 \theta_1 + f_3 v_2 + f_4 \theta_2 \quad \text{A.25}$$

Utilizando la Ecuación (A.19) con sus respectivos  $\alpha$  , obtenemos las funciones  $f$  .

$$\begin{aligned} f_1 &= 1 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 \\ f_2 &= x - 2\left(\frac{x^2}{L}\right) + \frac{x^3}{L^2} \\ f_3 &= 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 \\ f_4 &= -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \end{aligned} \quad \text{A.26}$$

Las funciones  $f_1, f_2, f_3, f_4$  son las funciones de forma y pertenecen a la familia de funciones interpoladoras Hermitianas que satisface las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} f_1(0) &= 1 & f_i(0) &= 0 & (i \neq 1) \\ f_3(L) &= 1 & f_i(L) &= 0 & (i \neq 3) \\ \left(-\frac{df_2}{dy}\right)_0 &= 1 & \left(-\frac{df_i}{dy}\right)_0 &= 0 & (i \neq 2) \\ \left(-\frac{df_4}{dy}\right)_L &= 1 & \left(-\frac{df_i}{dy}\right)_L &= 0 & (i \neq 4) \end{aligned} \quad \text{A.27}$$



Utilizando la Ecuación (A.25) y las funciones de forma  $f_i$  como la función peso  $w$  en la formulación flaca de la Ecuación (A.28), tenemos el modelo de viga Euler-Bernoulli. Para cuatro variables en cada nodo  $v_i(v_1, \phi_1, v_2, \phi_2)$  con ponderaciones diferentes  $w = f_1, w = f_2, w = f_3, w = f_4$ , obtenemos cuatro ecuaciones algebraicas, siendo que a  $i$ -ésima ecuación es representada por:

$$\sum_{j=1}^4 \left( \int_0^L EI \frac{d^2 f_i}{dy^2} \frac{d^2 f_j}{dy^2} dy \right) v_j - \int_0^L f_i q(y) dy - Q_i = 0 \quad \text{A.28}$$

Que puede ser representada en la forma reducida:

$$\sum_{j=1}^4 K_{ij} v_j - F_i = 0 \quad \text{A.29}$$

Donde

$$K_{ij} = \int_0^L EI \frac{d^2 f_i}{dy^2} \frac{d^2 f_j}{dy^2} dy \quad \text{A.30}$$

$$F_i = \int_0^L f_i q(y) dy + Q_i$$

Los coeficientes  $K_{ij}$  son simétricos siendo así  $K_{ij} = K_{ji}$ , entonces matricialmente en el sistema de referencia local, obtenemos:

$$\{F\} = \frac{q(y)L}{12} \begin{Bmatrix} 6 \\ L \\ 6 \\ -L \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad \text{A.31}$$

### A.2.2. desplazamientos axiales

Sea la ecuación que gobierna un elemento de barra en tracción.

$$EA \frac{d^2 u(y)}{dy^2} = q \quad \text{A.32}$$

Donde  $u(y)$  es el desplazamiento longitudinal de la viga, EA la rigidez axial, A la área de la sección transversal. Aplicando la formulación flaca del Método de Galerking para un elemento, tenemos:

$$\int_0^L \left[ w \left( EA \frac{d^2 u}{dy^2} \right) - wq \right] dy = 0 \quad \text{A.33}$$

Integrando la ecuación por partes y desarrollándola, obtenemos:

$$\int_0^L \left[ \frac{dw}{dy} \left( EA \frac{d^2 u}{dy^2} \right) - wq \right] dy - w \left( EA \frac{du}{dy} \right)_0^L = 0 \quad \text{A.34}$$

$$\int_0^L \left[ \frac{dw}{dy} \left( EA \frac{d^2 u}{dy^2} \right) - wq \right] dy - w \left( EA \frac{du}{dy} \right)_{x=0} - w \left( EA \frac{du}{dy} \right)_{x=L} = 0 \quad \text{A.35}$$

$$\int_0^L \left[ \frac{dw}{dy} \left( EA \frac{d^2 u}{dy^2} \right) - wq \right] dy - (wQ)_0 - (wQ)_L = 0 \quad \text{A.36}$$

Sea la siguiente función una función de aproximación para el desplazamiento axial de tipo linear

$$u(y) = \alpha_1 + \alpha_2 y \quad \text{A.37}$$

Aplicando las condiciones de contorno

$$\begin{aligned}u(0) &= u_1 \\u(L) &= u_2\end{aligned}\tag{A.38}$$

En la forma matricial tenemos:

$$\begin{aligned}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} &= \frac{1}{L} \begin{bmatrix} L & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}\end{aligned}\tag{A.39}$$

Asumiendo las ecuaciones de forma:

$$\begin{aligned}u(y) &= f_1(y)u_1 + f_2(y)u_2 \\u(y) &= \left(1 - \frac{y}{L}\right)u_1 + \left(\frac{y}{L}\right)u_2\end{aligned}\tag{A.40}$$

$$\begin{aligned}f_1 &= 1 - \frac{y}{L} \\f_2 &= \frac{y}{L}\end{aligned}\tag{A.41}$$

Aplicando  $u(y)$  y los pesos  $w$  (funciones de peso), en la ecuación de formulación flaca de Galerkin (A.36) hallamos los coeficientes  $K_{ij}$ , e matricialmente obtenemos:

$$\{F_z\} = \begin{Bmatrix} -\frac{q(y)L}{2} \\ q(y)L \\ -\frac{q(y)L}{2} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}\tag{A.42}$$

### A.2.3 desplazamientos axiales y transversales

A través de la superposición de las matrices de rigidez axial (A.42) y transversal (A.31) según la bibliografía (Paz, 1991), se tiene que la matriz de rigidez elemental con sus seis grados de libertad, será:

$$\begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ & 12\frac{EI}{L^3} & 6\frac{EI}{L^2} & 0 & -12\frac{EI}{L^3} & 6\frac{EI}{L^2} \\ & & 4\frac{EI}{L} & 0 & -6\frac{EI}{L^2} & 2\frac{EI}{L} \\ & & & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ & \text{Simétrico} & & & 12\frac{EI}{L^3} & -6\frac{EI}{L^2} \\ & & & & & 4\frac{EI}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{v}_1 \\ \bar{\phi}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{v}_2 \\ \bar{\phi}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{F}_{y1} \\ \bar{F}_{x1} \\ \bar{M}_{xy1} \\ \bar{F}_{y2} \\ \bar{F}_{x2} \\ \bar{M}_{xy2} \end{Bmatrix} \quad \text{A.43}$$

Esta matriz puede ser transformada de un sistema de coordenadas local para un sistema de coordenadas global, con las siguientes características:

$$\bar{u}_i = u_i \cos \beta + v_i \sin \beta$$

$$\bar{v}_i = u_i \sin \beta + v_i \cos \beta$$

$$\bar{\phi}_i = \phi_i$$

A.44

Siendo  $\beta$  el ángulo formado entre el eje "x" global y el eje "x" local.

La matriz de rigidez en el sistema de coordenadas global será:

$$[KE] = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} Rc^2 + \frac{12}{L^2}s^2 & \left(R - \frac{12}{L^2}\right)cs & -\frac{6}{L}s & -Rc^2 - \frac{12}{L^2}s^2 & \left(-R + \frac{12}{L^2}\right)cs & -\frac{6}{L}s \\ & Rs^2 + \frac{12}{L^2}c^2 & \frac{6}{L}c & (-R + \frac{12}{L^2})cs & -Rs^2 - \frac{12}{L^2}c^2 & \frac{6}{L}c \\ & & 4 & \frac{6}{L}s & -\frac{6}{L}c & 2 \\ & \text{Simétrico} & & Rc^2 + \frac{12}{L^2}s^2 & \left(R - \frac{12}{L^2}\right)cs & \frac{6}{L}s \\ & & & & Rs^2 + \frac{12}{L^2}c^2 & -\frac{6}{L}c \\ & & & & & 4 \end{bmatrix} \quad \text{A.45}$$

Donde  $R = \frac{A}{I}$  y  $[KE]$  representa la matriz global elemental de rigidez elástica,

$$c = \cos \beta \text{ e } s = \text{sen} \beta .$$

De la misma forma que se resolvió el problema de la viga en flexión se podrá resolver una columna o viga sujeta a una carga axial (termino -

$(T + p_0 A_0 - p_i A_i) \frac{d^2 v(y)}{dy^2}$ , de la Ecuación (3.11)). Asumiendo una función que se

aproxima al termino  $\frac{d^2 v(y)}{dy^2}$ , hallando la función de forma, aplicando el método de

Galerkin, integrando por partes una vez la relación  $\langle R, w \rangle$ , siendo R la función

residual igual a  $-(T + p_0 A_0 - p_i A_i) \frac{d^2 v(y)}{dy^2}$ , se tiene como resultado en el sistema

local de coordenadas la siguiente matriz:

$$\pm \frac{(T + p_0 A_0 - p_i A_i)}{L} \begin{bmatrix} \frac{6}{5} & \frac{L}{10} & -\frac{6}{5} & \frac{L}{10} \\ \frac{L}{10} & \frac{2L^2}{15} & -\frac{L}{10} & \frac{L^2}{30} \\ -\frac{6}{5} & -\frac{L}{10} & \frac{6}{5} & -\frac{L}{10} \\ \frac{L}{10} & \frac{L^2}{30} & -\frac{L}{10} & \frac{2L^2}{15} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{v}_1 \\ \bar{\phi}_1 \\ \bar{v}_2 \\ \bar{\phi}_2 \end{Bmatrix} \quad \text{A.46}$$

*simetrico*

La señal negativa significa que el elemento de *niser* está en compresión y la señal positiva que el elemento de *niser* está en tracción. La matriz (A.46) es llamada matriz geométrica, que está en función de la fuerza axial y la geometría del elemento.

De la misma forma, en la matriz geométrica elemental se hace la transformación de coordenadas obteniéndose así la matriz de rigidez geométrica global  $[KG(d)]$

$$[KG(d)] = \pm \frac{(T + p_0 A_0 - p_1 A_1)}{L} \begin{bmatrix} \frac{6}{5}s^2 & -\frac{6}{5}sc & -\frac{L}{10}s & -\frac{6}{5}s^2 & \frac{6}{5}sc & -\frac{L}{10}s \\ & \frac{6}{5}c^2 & \frac{L}{10}c & \frac{6}{5}sc & -\frac{6}{5}c^2 & \frac{L}{10}c \\ & & \frac{2L^2}{15} & \frac{L}{10}s & -\frac{L}{10}c & -\frac{L^2}{30} \\ & & & \frac{6}{5}s^2 & -\frac{6}{5}sc & \frac{L}{10}s \\ & & & & \frac{6}{5}c^2 & -\frac{L}{10}c \\ & & & & & \frac{2L^2}{15} \end{bmatrix} \quad \text{A.47}$$

*simetrico*

Combinando de forma general las matrices (A.45) y (A.47) se obtiene la ecuación de desplazamientos estáticos de un *niser* en forma matricial:

$$([KE] + [KG(d)])\{d\} = \{F\} \quad \text{A.48}$$

Donde  $\{d\}$  es el vector desplazamiento (la solución), la cual está constituido por dos translaciones y una rotación por nodo. El vector  $\{F\}$  representa la fuerza, y está compuesto por fuerzas longitudinales (propias del peso y de la tracción concentrada en la parte superior), fuerzas transversales (fuerzas de inercia y arrastre propias de la corriente) y momento concentrado en cada nodo causado por las fuerzas citadas.

## APENDICE B

Los siguientes ítems muestran las consideraciones tomadas para el estudio del comportamiento dinámico del Riser Auto-Sustentable

### **B.1.cálculo de la matriz de masa**

La matriz de masa total  $[M_T]$  en cada elemento del *riser* es distribuida de forma tal que la mitad de la masa se concentre en cada nodo como se muestra en la Ecuación (B.1) donde la mitad de la suma da masa del *riser*, del fluido interno y la masa adicional están en cada extremo de la diagonal de esta matriz.

$$[M_T] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(M_T) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(M_T) \end{bmatrix} \quad \text{B.1}$$

Esta ecuación representa la obtención de la matriz total de masa concentrada.  
(*Lumped Mass*)

### **B.2.cálculo de la matriz de rigidez concentrada**

En esta matriz los grados de libertad de traslación vertical y rotacional serán eliminados de la matriz de rigidez global, con este procedimiento se obtiene una reducción grande dentro del almacenamiento de datos y ganancia de tiempo en la simulación computacional del análisis dinámico. La separación estos grados de libertad en la matriz global es desarrollada de acuerdo a lo hecho por (*Ferrari, 1998*) en su trabajo de doctorado, de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} K_{HH} & K_{HVR} \\ K_{VRH} & K_{VRVR} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_H \\ D_{VR} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_H \\ F_{VR} \end{Bmatrix} \quad \text{B.2}$$

Siendo ésta otra forma de representar la matriz global del sistema, Ecuación (B.2), la cual se divide la matriz en cuatro partes que están descritas por los subscritos H,V y R que representan los grados de libertad horizontal, vertical y rotacional respectivamente. A partir de esta matriz vamos a considerar despreciables las contribuciones de las fuerzas verticales y rotacionales  $F_{VR}$  se obtiene la siguiente matriz:

$$\begin{bmatrix} K_{HH} & K_{HVR} \\ K_{VRH} & K_{VRVR} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_H \\ D_{VR} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_H \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{B.3}$$

Operando algebraicamente es posible obtener la matriz de rigidez concentrada

$$[K_{VRH}] \{D_H\} + [K_{VV}] \{D_{VR}\} = 0 \quad \text{B.4}$$

$$\{D_{VR}\} = -[K_{VV}]^{-1} [K_{VRH}] \{D_H\} \quad \text{B.5}$$

$$[K_{HH}] \{D_H\} + [K_{HVR}] \{D_{VR}\} = \{F_H\} \quad \text{B.6}$$

$$\underbrace{([K_{HH}] - [K_{HVR}] \mathbf{I} [K_{VRVR}]^{-1} [K_{VRH}])}_{[K_{LUMPED}]} \{D_H\} = \{F_H\} \quad \text{B.7}$$

Por lo tanto la matriz de rigidez concentrada o *Lumped* que será utilizada en la ecuación dinámica posee la siguiente composición:



$$[K_{LUMPED}] = ([K_{HH}] - [K_{HVR}] [K_{VRVR}]^{-1} [K_{VRH}]) \quad \text{B.8}$$

Las diferencias dadas en la solución estática utilizando la matriz global de rigidez en comparación con la matriz reducida están alrededor de 3% en los desplazamientos como se puede ver en el Capítulo 3 en las Figuras 3.4 (c) y 3.4 (d) en la cual el cálculo numérico es desarrollado utilizando la matriz de rigidez global y concentrada.

### **B.3. cálculo de la matriz de amortecimiento**

El amortecimiento es resultado de la disipación de la energía por la estructura, debido a los propios componentes estructurales, por ejemplo, la fricción de las juntas en el *riser* o amortecimiento interno del material que constituye la estructura.

El amortecimiento estructural es considerado de una forma global, considerando o sistema como un todo, a diferencia de ser considerado como una suma de propiedades de elementos individuales.

Una manera de calcular la matriz de amortecimiento del sistema será aplicando el método de amortecimiento proporcional, llamado de "amortecimiento de Rayleigh", que define al amortecimiento como:

$$[B] = a_0 [M] + a_1 [K] \quad \text{B.9}$$

Las constantes  $a_1$  y  $a_0$  pueden ser escogidas de forma tal que reproduzca el efecto de amortecimiento de dos modos de vibración predominantes, siempre y cuando sean definidos los factores de amortecimientos.

Sea  $(\omega_r, \phi_r)$  la frecuencia natural y el auto valor correspondiente a un modo  $r$ , respectivamente de modo que:

$$([K] - \omega_r^2 [M])\phi_r = 0 \quad r=1,2,3,\dots,N \quad \text{B.10}$$

donde  $N$  es el número de modos de vibración.

Basado en las propiedades ortogonales de los modos naturales de vibración, se tiene:

$$\begin{aligned} \phi_r^T [M] \phi_s &= \bar{M} \delta_{rs} \\ \phi_r^T [K] \phi_s &= \omega_r^2 \bar{M} \delta_{rs} \end{aligned} \quad \text{B.11}$$

Donde  $\bar{M}$  es la masa modal del modo  $r$ , definida como  $\bar{M} = \phi_r^T [M] \phi_r$ , el sobrescrito  $T$  denota la matriz transpuesta y  $\delta_{rs}$  es el delta de Kronecker con la siguiente propiedad:

$$\delta_{rs} = \begin{cases} \delta_{rs} = 1 & \dots \text{se} \dots r = s \\ \delta_{rs} = 0 & \dots \text{se} \dots r \neq s \end{cases} \quad \text{B.12}$$

Entonces en la Ecuación (B.9) el amortecimiento de Rayleigh será definido como:

$$\phi_r^T [B] \phi_s = (a_0 + a_1 w_r^2) \bar{M}_r \delta_{rs} \quad \text{B.13}$$

De manera análoga a la matriz de masa modal se puede definir la matriz de amortecimiento modal:

$$\bar{B}_r = \phi_r^T [B] \phi_r \quad \text{B.14}$$

De la misma manera la definición del factor de amortecimiento, para un sistema con un único grado de libertad es:

$$\zeta = \frac{b}{2mw_n} \quad \text{B.15}$$

Donde  $\zeta$  es el factor de amortecimiento,  $m$  la masa,  $b$  el coeficiente de amortecimiento y  $w_n$  la frecuencia natural del sistema con un grado de libertad. Para un sistema con múltiples grados de libertad se puede obtener la siguiente relación de amortecimiento.

$$\bar{B}_r = \phi_r^T [B] \phi_r = 2 \bar{M}_r w_r \zeta_r \quad \text{B.16}$$

Donde  $\bar{B}_r$  es la matriz de amortecimiento modal del modo  $r$  y  $\zeta_r$  el factor de amortecimiento modal. Igualando la Ecuación (B.15) con la Ecuación (B.16), tenemos:

$$\zeta_r = \frac{1}{2} \left[ \frac{a_0}{w_r} + a_1 w_r \right] \quad \text{B.17}$$

Esta ecuación permite hallar los coeficientes  $a_0$  y  $a_1$  para una determinada frecuencia natural.

#### **B.4. solución de la ecuación del comportamiento del riser dentro del dominio del tiempo**

Para la solución, en el dominio del tiempo, de las ecuaciones del comportamiento dinámico del riser definidas en el Capítulo 3 fue usado el método de Newmark  $\beta$ .

Básicamente, en este método, los desplazamientos y las velocidades para el final de cada intervalo de tiempo son expresados en términos de los desplazamientos, velocidades y aceleraciones de cada comienzo del referido intervalo, y la aceleración para el final del intervalo. Siendo así:

$$x_{t+\Delta t} = x_t + \Delta t \dot{x}_t + \left( \frac{1}{2} - \beta \right) (\Delta t)^2 \ddot{x}_t + \beta (\Delta t)^2 \ddot{x}_{t+\Delta t} \quad \text{B.18}$$

$$\dot{x}_{t+\Delta t} = \dot{x}_t + \frac{1}{2} \Delta t [\ddot{x}_t + \ddot{x}_{t+\Delta t}] \quad \text{B.19}$$

Asumiendo que la aceleración sea constante durante un intervalo  $\Delta t$  y igual a la media de  $\ddot{x}_t$  y  $\ddot{x}_{t+\Delta t}$ , y también tomando  $\beta = 1/4$  (método de aceleración media constante).

$$\ddot{x}(t') = \frac{1}{2} (\ddot{x}_t + \ddot{x}_{t+\Delta t}) \quad t \leq t' \leq t + \Delta t \quad \text{B.20}$$

Sustituyendo la Ecuación (B.18) dentro de (B.19) con  $\beta = 1/4$  se obtiene:

$$\dot{x}_{t+\Delta t} = \frac{2}{\Delta t}(x_{t+\Delta t} - x_t) - \dot{x}_t$$

La ecuación general del movimiento en tres intervalos sucesivos de tiempo

llamados  $t, \Delta t$  y  $t + \Delta t$  será:

$$\begin{aligned} [M] \ddot{x}_{t+\Delta t} + [B] \dot{x}_{t+\Delta t} + [K] x_{t+\Delta t} &= F_{t+\Delta t} \\ [M] \ddot{x}_t + [B] \dot{x}_t + [K] x_t &= F_t \\ [M] \ddot{x}_{t-\Delta t} + [B] \dot{x}_{t-\Delta t} + [K] x_{t-\Delta t} &= F_{t-\Delta t} \end{aligned} \quad \text{B.21}$$

Multiplicando la primera y tercera expresión de la Ecuación (B.21) por  $(\Delta t)^2 \beta$ , la expresión del medio por  $(\Delta t)^2 (1 - 2\beta)$  y sumando después con las ecuaciones obtenidas de (B.18) y (B.19) para  $\beta = 1/4$  se obtiene:

$$\begin{aligned} \left( [M_T] + \frac{1}{2} \Delta t [B] + \frac{(\Delta t)^2}{4} [K] \right) x_{t+\Delta t} &= (\Delta t)^2 \left[ \frac{1}{4} (F_{t+\Delta t} + F_{t-\Delta t}) + \frac{1}{2} F_t \right] \\ + \left[ 2[M_T] - \frac{(\Delta t)^2}{2} [K] \right] x_t &- \left[ [M_T] - \frac{\Delta t}{2} [B] + \frac{(\Delta t)^2}{4} [K] \right] x_{t-\Delta t} \end{aligned} \quad \text{(B.22)}$$

Donde  $[M_T] = [M] + C_A \frac{\pi D_0^2}{4} \rho_0 L$ , es la masa total que es la suma de la masa

real y la masa adicional.

En la Ecuación (B.4.5) se usara el método de Newmark  $\beta$  para hallar los desplazamientos en un tiempo  $t + \Delta t$  en función de los desplazamientos de tiempo  $t$  y  $t - \Delta t$ .