

**UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA**

**FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA**



**ANÁLISIS DE LA DINÁMICA NO LINEAL EN LA RESONANCIA  
PARAMÉTRICA DE UNA EMBARCACIÓN PESQUERA**

**TESIS**

**PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE:**

**INGENIERO NAVAL**

**JERVER ELIO MAÑUICO VIVANCO**

**LIMA – PERÚ**

**2009**

<b>PRÓLOGO</b>	<b>1</b>
Objetivos y Contenido de la Tesis	1
<b>CAPÍTULO 1: INTRODUCCIÓN</b>	<b>3</b>
1.1 Rolido Resonante Clásico	5
1.2 Rolido Paramétrico	7
1.3 Antecedentes y Escenario Actual en Resonancia Paramétrica	10
1.4 Nociones de Caos	16
1.5 Clasificación de los Puntos de Equilibrio – 2DOF	20
1.6 Atractores	23
1.6.1 Atractor de Punto Fijo	24
1.6.2 Atractor de Órbita Periódica Continua	25
1.6.3 Atractores Extraños	25
1.7 Espacio de Fase	26
1.8 Estabilidad Estructural	26
1.9 Herramientas de Análisis de la Dinámica No Linear	27
1.10 Antecedentes y Escenario Actual en Dinámica No Linear	28
<b>CAPÍTULO 2: MODELO MATEMÁTICO</b>	<b>34</b>
2.1 Sistema de Referencia	34
2.2 Frecuencia de Encuentro	36
2.3 Ecuaciones Generales del Movimiento	37
2.3.1 Conservación de la Cantidad de Movimiento Lineal	37
2.3.2 Conservación de la Cantidad de Movimiento Angular	39
2.4 Fuerzas y Momentos Externos	41

2.5	Ecuaciones del Movimiento No Lineal	43
2.6	Análisis de la Estabilidad de la Ecuación de Rolido	46
2.7	La Ecuación Variacional de Rolido	46
<b>CAPÍTULO 3: MÉTODOS DE ANALISIS NO LINEAL</b>		<b>50</b>
3.1	Sistemas Dinámicos y el Caos Determinístico	50
3.2	Sistemas Caóticos	51
3.3	Diagramas de Bifurcación	52
3.3.1	Bifurcaciones Locales	52
3.3.2	Bifurcaciones Globales	62
3.4	Mapeamiento de Poincaré	62
3.5	Bacías de Atracción	64
3.5.1	Dimensión Fractal	64
3.5.2	Atractores	65
3.5.3	Bacías de Atracción	69
3.6	Exponentes de Lyapunov	70
3.6.1	Definición	70
3.6.2	Cálculo de los Exponentes de Lyapunov	70
3.6.3	Cálculo de los Exponentes de Lyapunov por el Método de las Trayectorias – Método de Wolf	76

<b>CAPÍTULO 4: RESULTADOS Y ANÁLISIS</b>	<b>81</b>
4.1 Diagrama de Bifurcación	81
4.1.1 Diagrama de Bifurcación $w_e / w_{n4} = 2.0$	84
4.1.2 Diagrama de Bifurcación $w_e / w_{n4} = 2.2$	95
4.2 Mapeamiento de Poincaré	99
4.2.1 Mapeamiento de Poincaré $w_e / w_{n4} = 2.0$	99
4.2.1.1 Intermitencia	101
4.2.1.2 Multiestabilidad	103
4.2.2 Mapeamiento de Poincaré $w_e / w_{n4} = 2.2$	109
4.3 Bacías de Atracción	115
4.3.1 Bacías de Atracción $w_e / w_{n4} = 2.0$	116
4.3.2 Bacías de Atracción $w_e / w_{n4} = 2.2$	122
4.4 Exponentes de Lyapunov	129
4.4.1 Exponentes de Lyapunov $w_e / w_{n4} = 2.0$	130
4.4.2 Exponentes de Lyapunov $w_e / w_{n4} = 2.2$	135
<b>CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES</b>	<b>141</b>
1 Generalidades	141
2 Conclusiones y Recomendaciones	141
3 Trabajos Futuros	146
<b>REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>	<b>148</b>

## PRÓLOGO

### **Objetivos y Contenido de la Tesis**

En términos de desenvolvimiento actual, hay la necesidad de entender y modelar los fenómenos no lineales por medio de modelos matemáticos y de herramientas de análisis de sistemas caóticos; y entender las posibilidades de respuestas de los fenómenos no lineales, como la ruta para el caos de los diferentes sistemas dinámicos. Siendo esos fenómenos no observables por modelos lineales, este trabajo tiene como objetivo describir la diversidad de respuestas y su sensibilidad a las condiciones iniciales.

En el capítulo 2, son presentadas las ecuaciones que rigen el movimiento del sistema dinámico, el cual consta de un modelo matemático cuya ecuación muestra el movimiento acoplado con tres grados de libertad (arfada-rolido-cabeceo), con los términos no lineales hasta tercera orden, considerando también el efecto del paso de la ola hasta tercera orden. Este modelo que será posteriormente resuelto (límites de estabilidad), es analizado por medio de técnicas de sistemas caóticos. En este capítulo también es analizada la estabilidad de la ecuación de rolido mediando el cálculo numérico de los límites de estabilidad.

En el capítulo 3, son presentados las herramientas de análisis de dinámica no lineal, como el mapeamiento de Poincaré, diagrama de bifurcación, bacías de atracción, y los exponentes de Lyapunov, los cuales, en conjunto, nos ayudan a entender con mas detalles la respuesta del sistema dinámico. También son presentados conceptos de dinámica no lineal, conceptos importantes para poder entender y describir lo que pueda pasar por cada uno de los fenómenos de los sistemas no lineales.

En el capítulo 4, es presentado el análisis y la solución de la dinámica no lineal para el buque Transom Stern (TS), análisis hecha para dos sintonía ( $w_e/w_{n4}$ ) próximas, y su posterior comparación. Ese análisis hecho por medio de herramientas de sistemas caóticos, mencionadas arriba. Estas son herramientas necesarias para entender los fenómenos no lineales, cuyo análisis será mostrada por medio de gráficos con sus respectivos estudios de los fenómenos mostrados. Los algoritmos numéricos discutidos adelante fueron implementados por medio de código computacional desenvuelto en lenguaje Fortran compilador (6.5).

En el capítulo 5, por fin, serán presentadas las conclusiones finales de estudio hecho en este trabajo, como también as recomendaciones para seguir en la luz del largo camino del entendimiento de fascinante mundo de los sistemas caóticos.

## **CAPÍTULO 1**

### **INTRODUCCIÓN**

En los últimos años, organizaciones e instituciones relacionadas al sector naval, vienen dando una gran importancia al estudio de la estabilidad dinámica del buque en presencia de olas, con el creciente interés por parte de los investigadores e instituciones del sector, en analizar a la sensibilidad de las embarcaciones a factores externos que puedan llevar a volcar. Se sabe que las embarcaciones, en general, tienen su vida operativa en presencia de olas, y algunas veces en condiciones extremas de mar, para lo cual las embarcaciones tienen que responder con seguridad, economía, con una buena maniobrabilidad y buenos niveles de aceleración. Evidentemente, mismo en condiciones extremas, las embarcaciones deben de soportar condiciones ambientales sin volcar.

El análisis de la estabilidad de arfada, rolido y cabeceo en olas, son determinantes en la definición de las condiciones sobre las cuales el movimiento de rolido puede presentar grandes ángulos o hasta mismo volcar.

Fue Froude (1863) quién por la primera vez reconoció que el problema de estabilidad de rolido en olas, debería ser considerada a partir del análisis dinámico y

no del análisis estático. Fue también él uno de los primeros en notar la existencia del fenómeno de resonancia paramétrica, en la cual las embarcaciones, pueden presentar movimientos no deseados en rolido, cuando el periodo en arfada o en cabeceo es igual a mitad del periodo natural de rolido, siendo estos movimientos acoplados de una gran complejidad. Dada dicha complejidad, es necesario el empleo de herramientas avanzadas de cálculos matemáticos, como la dinámica no lineal, tal que se pueda entender mejor los diferentes fenómenos no lineales en el estudio de la resonancia paramétrica.

Los sistemas y modelos lineales, han sido utilizados sistemáticamente para describir y modelar la dinámica de muchos sistemas físicos, químicos, económicos, etc., sin embargo, se sabe que los sistemas no lineales pueden presentar una dinámica muy compleja, que no pueden ser aproximados por modelos lineales. Por el contrario, la iteración de una ecuación lineal solo puede dar lugar a dos situaciones distintas, una que puede convergir a un valor constante, y la otra divergir para el infinito. Entre la gran cantidad de comportamientos posibles de un sistema no lineal, una de la que destaca más, es la conocida por *caos determinístico*, por su complejidad. Los sistemas caóticos son sensibles a pequeñas perturbaciones externas, y se comportan de forma impredecible, a pesar de estar definidos por ecuaciones determinísticas, por lo tanto, por más preciso que sea el conocimiento de estado inicial, el comportamiento a largo plazo de un sistema caótico es imposible de ser previsto.



La geometría fractal y la teoría de los sistemas dinámicos, están íntimamente ligados, ya que la región del espacio a la cual tiende asintóticamente una órbita caótica, tiene una estructura fractal (atractores extraños), por lo tanto, la geometría permite estudiar el soporte, sobre la cual se definen los sistemas caóticos. Los objetos fractales, tienen propiedades muy particulares, como la auto-semejanza, apariencia irregular, que permite caracterizarlos como base en medidas cuantitativas, relativas a su gran irregularidad. La más popular de estas medidas cuantitativas es la dimensión fractal, una extensión de la dimensión euclidiana para objetos auto-semejantes.

Las principales características de los sistemas caóticos son: la sensibilidad a las condiciones iniciales, espectro continuo de la frecuencia, caracterizando un comportamiento aperiódico, e invariancia de escala, significando una cierta estructura jerárquica con características de auto-similitud y estacionariedad.

Una técnica clásica para analizar los sistemas dinámicos es el mapeamiento de Poincaré, que permite una sustitución del análisis de flujos de sistemas continuos en el tiempo, por un sistema discreto. De esta forma, se logra reducir en una dimensión el sistema, existen varios métodos para caracterizar el caos de una serie temporal, como son: mapeamiento de Poincaré, diagramas de bifurcación, bacías de atracción, exponentes de Lyapunov, entre otras.

### **1.1 Rolido Resonante Clásico**

El denominado rolido resonante clásico, es un mecanismo causado por la excitación directa de las olas del mar, que actúan sobre la embarcación a dada

velocidad de avance, con cierta frecuencia y ángulo de incidencia, que determinan una frecuencia de encuentro próximo a la frecuencia natural de rolido. En tanto pueden ocurrir condiciones que lleven a la embarcación a alcanzar grandes movimientos que pueden llevar a volcar a la embarcación. Este tipo de fenómeno (rolido resonante clásico) puede ocurrir en olas de frente como también en olas oblicuas. Otro concepto muy importante es la de la excitación interna (vide sección 1.2), que no debe ser confundida con la excitación directa; el movimiento de rolido en olas estrictamente longitudinal no puede ser causado o no es posible por la excitación directa de las olas.

Uno de los sistemas que presenta la resonancia clásica es el sistema oscilador mecánico forzado, conocido como la ecuación de Duffing, que es una ecuación no lineal de segunda orden, con coeficiente de amortecimiento lineal y restauración no lineal. La resonancia se presenta cuando la frecuencia de excitación ( $w$ ) de la fuerza externa es igual o próxima a la frecuencia natural del sistema ( $w_n$ ), como se puede observar en la figura 1.1; resultando en grandes amplitudes en la respuesta ( $X$ ). La figura 1.1 mostrada es para el caso de:  $w_0 = 1$ ,  $\varepsilon = 2/3$ ,  $f = 1$ , y para varios valores del coeficiente de amortecimiento ( $\beta$ ). Se muestra a continuación la ecuación de Duffing:

$$\ddot{x} + \beta\dot{x} + w_0^2 x + \varepsilon x^3 = f \cos(\omega t) \quad (1.1)$$

para la cual se define:

$$w_n = \sqrt{w_0^2 + \frac{3}{4}\epsilon X^2}$$

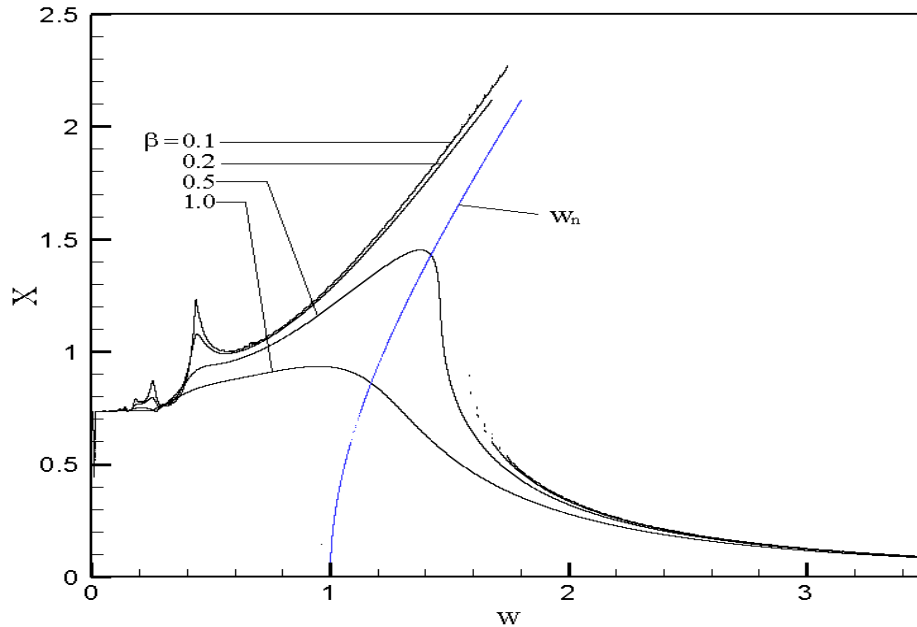


Figura 1.1: Resonancia clásica para la ecuación de Duffing.

## 1.2 Rolido Paramétrico

El aparecimiento de este tipo de movimiento no es debido a la excitación directa de las olas (Levadou y Palazzi, 2003), siendo causado por la excitación interna, como consecuencia de la variación periódica de los parámetros dinámicos. En ese caso, con las debidas sintonías, grandes amplitudes de movimiento pueden ser alcanzados mismo en la ausencia de excitación externa.

Para una embarcación que se encuentra en ondas longitudinales, bajo el paso de la ola, conjuntamente con la variación de los modos verticales (arfada y cabeceo), hace que la geometría sumersa, varíe periódicamente con el tiempo, haciendo que se modifique la curva de restauración (luego, la altura metacéntrica), Shin *et al.*

(2004). Con el decorrer del tiempo, se genera una variación de las características restaurativas, a partir de una pequeña perturbación, que puede desenvolver rápidamente el movimiento de rolo en un crecimiento progresivo, hasta valores máximos permanentes de amplitud de rolo o hasta mismo una eventual volcadura.

En el caso de las embarcaciones pesqueras, como en el caso común del litoral del Pacífico (Ecuador, Perú, Chile), la resonancia paramétrica es altamente peligrosa, debida a las condiciones favorables del perfil del casco, como también de las condiciones ambientales.

Sea el sistema con variación periódica de la restauración:

$$a\ddot{x} + b\dot{x} + c_1x + c_2 \cos(wt)x = 0$$

la resonancia paramétrica es observada en el análisis de la ecuación de Mathieu, France *et al.* (2001), cuya forma canónica es:

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + (\alpha^2 + \varepsilon \cos \tau)x = 0 \quad (1.2)$$

donde,

$$\alpha^2 = \frac{w_0^2}{w^2} - \frac{1}{4}\mu^2; \mu = \frac{b}{aw}; \varepsilon = \frac{c_1}{aw^2} = \frac{c_2w_0^2}{c_1w^2}; \tau = wt; w_0^2 = \frac{c_1}{a}$$

que posee regiones de inestabilidad definidos en torno de:

$$\left(\frac{w_0}{w}\right)^2 = \frac{n^2}{4}, \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots$$

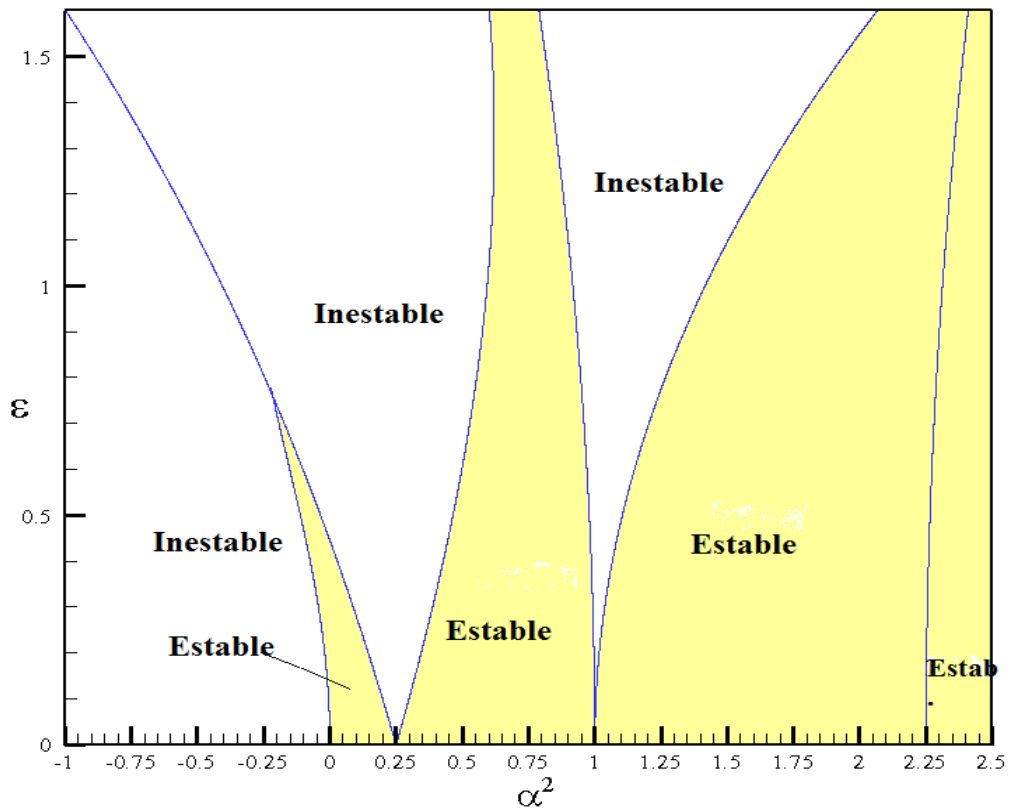


Figura 1.2: Regiones estables e inestables de la ecuación de Mathieu.

De las regiones de inestabilidad mostradas en la figura (1.2), se puede observar que la zona de mayor inestabilidad del sistemas es entorno de  $\alpha^2=1/4$ , donde, para bajos niveles de amortecimiento, se tiene  $w = 2w_0$ , regiones de mayor relevancia para el estudio de la resonancia paramétrica, ver Hooft (1982), Francescutto y Bullian (2002).

### **1.3 Antecedente y Escenario Actual en Resonancia Paramétrica**

Como fue mencionado arriba, Froude (1863), fue uno de los primeros en percibir el efecto de la resonancia paramétrica, resaltando el comportamiento de la embarcación no deseado, cuando la frecuencia natural en arfada (o cabeceo) es el doble de la frecuencia en rolido. Entre las contribuciones más importantes en el estudio de la resonancia paramétrica, serán presentados a seguir los trabajos que fueron los precursores y la base hasta donde se tiene avanzado el estudio de la resonancia paramétrica, en el contexto actual y sirven de guía para este trabajo.

Kerwin (1955), a partir de la ecuación de Mathieu se observó que, para una embarcación en olas longitudinales, existen ciertas frecuencias de encuentro que pueden llevar a la embarcación a adquirir oscilaciones inestables en rolido. En el análisis, se verificó los efectos del amortecimiento lineal y no lineal. También se investigó la variación del  $GM_T$  (en olas longitudinales), mediante un análisis hidrostático, ya que los efectos hidrodinámicos propios del movimiento de la embarcación no fueron considerados. En el caso de la restauración, esta fue expresada como una ecuación de Mathieu (solo considerando un grado de libertad).

Paulling y Rosenberg (1959), consideraron las ecuaciones no lineales del movimiento de la embarcación con tres grados de libertad, oscilando en aguas calmas; observaron la influencia de los modos verticales (arfada y cabeceo) en la respuesta de rolido, cuando son introducidos los términos no lineales hasta segunda orden en la restauración, y sin considerar los efectos de la superficie libre. Fueron observadas inestabilidades cuando la frecuencia natural del movimiento inestable,

corresponde a la mitad de la frecuencia de excitación del movimiento, siendo esto también verificado experimentalmente, cuando el modelo fue excitado mecánicamente por un oscilador armónico.

Paulling (1961), hizo el análisis teórico y experimental de la estabilidad transversal de la embarcación en olas longitudinales, y mostró que la estabilidad de la embarcación en olas, difiere considerablemente de la estabilidad de la embarcación en aguas calmas, y que en algunos casos la reducción de la estabilidad es drástica. Obtuvo una expresión analítica para el momento de restauración en olas longitudinales, considerando los efectos de los movimientos, tanto en arfada como en cabeceo, así como también por efecto del paso de la ola.

Blocki (1980), hizo el estudio de la resonancia paramétrica en forma experimental y numérica. En el modelo presentado, utilizo tres ecuaciones acopladas en arfada-rolido-cabeceo, derivando los coeficientes de restauración hasta segunda orden, obtenidos por expansión en series de Taylor. Considerando el amortecimiento no linear, obtuvo expresiones para las amplitudes de excitación paramétrica, también presentó una solución analítica para la respuesta de la resonancia paramétrica en rolido, basada en el método de Krylov-Bogoliubov, la cual fue comparada con resultados experimentales, observándose buenos resultados en la integración de la ecuación analítica del movimiento para simulaciones de volcamiento.

En lo que concierne a la incorporación de amortecimiento no linear, Himeno (1981), propuso que el amortecimiento en rolido puede ser estimado a partir de

características geométricas del casco, siendo la propuesta basada en una serie de experiencias con modelos de cascos. El modelo de Ikeda, presentado por Himeno, hace la hipótesis de que el amortecimiento puede ser aproximado por un equivalente lineal dependiente de la amplitud, compuesta por una suma de contribuciones de diferentes orígenes físicos que controlan el movimiento. El amortecimiento total es subdividido en cinco partes que envuelven al amortecimiento por formación de olas en el casco, fricción, formación de vórtices, sustentación y quilla de balance en el casco.

Pérez (1985), presentó el desenvolvimiento de técnicas experimentales para el registro del comportamiento de modelos en escala reducida. Fueron presentados y analizados resultados experimentales del estudio de inestabilidad paramétrica para dos embarcaciones pesqueras en olas regulares y longitudinales por la proa y con velocidad nula. O autor resaltó que las diferentes respuestas obtenidas, fueron asociadas a las diferencias en la forma de la popa de los dos pesqueros.

Sanguinetti (1985), hizo un análisis dinámico de la estabilidad del movimiento de la embarcación en olas regulares para velocidad nula, en la cual fueron presentados dos formulaciones: una considerando el movimiento en rolo desacoplado para la embarcación en olas longitudinales, e la otra no lineal tomando en cuenta los acoplamientos de arfada, rolo y cabeceo. Las no linealidades consideradas, todas fueron de segunda orden y tomando los términos de restauración en aguas calmas. Se investigó numérica y analítica los fenómenos de la resonancia paramétrica y de los límites de estabilidad para dos embarcaciones pesqueras de dimensiones similares, se observó nuevas frecuencias resonantes, correspondientes a



las frecuencias combinadas de arfada y cabeceo, resultantes de un sistema de ecuaciones de Mathieu acopladas.

Hua (1992), realizó simulaciones numéricas para el estudio del fenómeno de la resonancia paramétrica de una embarcación RoRo en olas longitudinales, donde analizó la influencia de ciertos parámetros como la velocidad de avance, del valor de KG, de la amplitud de la ola, y otros parámetros. En ese trabajo fueron considerados arfada, rolido y cabeceo como los grados de libertad significativos. Explícitamente no es presentada ninguna expresión analítica para la excitación paramétrica, ya que esta es calculada numéricamente, basada en un análisis casi hidrostático. En este trabajo se hace un análisis de la influencia de la amplitud de la ola en la restauración en rolido, observándose que la variación de la restauración en olas es no lineal en relación al valor en aguas calmas, y que la frecuencia de rolido de la embarcación cambia en comparación con la frecuencia natural en aguas calmas.

Valerio (1994), hizo el análisis de la estabilidad de embarcaciones pesqueras en olas regulares y longitudinales, para velocidad de avance nula. Para el estudio de la resonancia paramétrica, consideró relevantes tres grados de libertad, que son arfada, rolido, y cabeceo. Siendo la ecuación de rolido la única a ser considerada como no lineal, siendo las no linealidades correspondientes a la restauración (incluye un término cúbico). La importancia de este trabajo, es la contribución en la determinación analítica de la estabilidad en rolido para olas longitudinales, también siendo consideradas el paso de la ola en la restauración, de este modo mejoró los

modelos analíticos presentados anteriormente por Sanguinetti (1985) y Pernambuco (1990).

Neves *et al.* (1999), investigó la estabilidad dinámica del buque, tanto analítico, numérico y experimental, para dos buques pesqueros de características similares (TS y RS) en olas longitudinales, y la influencia que tiene la forma de la popa en la resonancia paramétrica, encontrándose resonancia fuerte para el buque TS. También fueron obtenidos los límites de estabilidad para las primeras regiones de inestabilidad, basadas en el análisis de la ecuación de Mathieu. Las respuestas obtenidas por el método analítico, mostraron una buena aproximación a los resultados experimentales.

Spyrou (2000), empleo la ecuación de rolido desacoplada, investigó las características de inestabilidad paramétrica para la variación de la restauración por efectos de paso de la ola, considerando tanto la restauración como el amortecimiento como no lineal. Numéricamente, mostró evidencias de la existencia de súper armónicos en la restauración, como también de que, en fase de no linealidades en la restauración, a frecuencia natural de rolido en olas es mayor que en aguas calmas. El estudio fue tanto analítico como numéricamente.

Valerio (2000), perfeccionó el trabajo presentado por Valerio (1994), extendiendo el método no lineal de segunda orden, adicionando no linealidades en las ecuaciones del movimiento de arfada, rolido, y cabeceo, considerando olas regulares con incidencia arbitraria; las respuestas obtenidas numéricamente y los

límites de estabilidad fueron analizados y comparados con resultados experimentales, obteniéndose en general buenas aproximaciones. Fueron analizados también las influencias de algunos parámetros, tales como la velocidad de avance, la altura metacéntrica, la forma del casco, entre otros, y la importancia de esos parámetros en la resonancia paramétrica.

Lorca (2001), hizo el estudio en forma analítica y experimental de la influencia de la velocidad de avance, en la estabilidad dinámica de buques pesqueros en olas regulares. El modelo analítico es similar al propuesto por Valerio (2000). Fueron realizados pruebas experimentales para dos buques pesqueros de diferente forma de la popa, siendo sus resultados comparados con simulaciones numéricas utilizando el modelo propuesto. Fue estudiada la estabilidad del movimiento del buque por medio de límites de estabilidad, obtenidos para diferentes velocidades y condiciones de cargamento.

Rodríguez (2004), desarrolló un modelo matemático no lineal hasta tercera orden en la restauración, considerando los efectos de paso de la ola para buques pesqueros de tipo transom stern (TS) y round stern (RS), extendiendo así, del punto de vista teórico el trabajo hecho por Lorca (2001). Fueron considerados tres grados de libertad, arfada, rolido, y cabeceo para el cálculo de numérico de los movimientos de rolido, los cuales fueron comparados a los datos experimentales, y analizados para diferentes condiciones. La importancia de este trabajo fue el de incluir los términos de tercera orden en el modelo dinámico del buque. Por medio de estudio de los

límites de estabilidad mediante la ecuación de Hill, se observó la presencia de términos bi-armónicos en la ecuación variacional.

Existen en la actualidad otros trabajos de referencia necesaria, que fueron publicados en diversas revistas científicas, Workshops. Es necesario destacar la importancia de los avances en esa línea de investigación en el estudio de la resonancia paramétrica, que fueron desarrollados en el “Programa de Engenharia Oceânica da COPPE/UFRJ”, sobre la orientación del profesor Marcelo de Almeida Santos Neves, conjuntamente con otros autores, sea en revistas científicas, como también en conferencias internacionales sobre estabilidad de buques, dentro los cuales podemos citar: STAB’94, STAB’97, STAB’2000, STAB’2003, STAB’2006, Workshops internacionales, etc. vide: Neves e Valerio (1994), Neves et al. (1997), Neves et al. (1999), Neves et al (2000), Neves et al. (2002a), Neves et al. (2002b), Neves et al. (2003), Neves et al. (2003a), Neves et al. (2006a), Neves et al. (2006b), Neves et al (2007), Neves et al. (2008), etc.

#### **1.4 Algunas Nociones de Caos**

En la década de los 70, un grupo de investigadores científicos, comienzan a encontrar el camino para el caos. Fueron matemáticos, físicos y biólogos, todos buscando los nexos entre las diferentes clases de irregularidades. Junto con la teoría relativa y la cuántica, la moderna teoría de caos en sistemas dinámicos, fueron parte de la gran evolución de la física y matemática aplicada del siglo XX. Así como en el caso de las otras ciencias mencionadas, el caos ataca los principios newtonianos, ya que el caos termina con la teoría del determinismo de Laplace.

La matemática sobre teoría de sistemas dinámicos, engloba los conceptos de multiplicidad de soluciones y el surgimiento de caos en una trayectoria dinámica. Los orígenes de la teoría de sistemas dinámicos se remontan a un siglo atrás. La teoría de las bifurcaciones, contribuyen para una mejor comprensión de la existencia de múltiples soluciones en sistemas no lineales y de cómo el número y la estabilidad de dichas soluciones, cambian cuando se varía algún parámetro. A cuestión crucial sobre la estabilidad de una solución es si una solución persiste o no sobre una perturbación infinitesimal, e como se modifica cuando el número de soluciones varía.

Al final del siglo XIX, se formuló la teoría de bifurcaciones debido a Henri Poincaré (1881). Poincaré fue uno de los padres de la teoría de las bifurcaciones, e inclusive inicio el desenvolvimiento de la teoría moderna de sistemas dinámicos. Importantes contribuciones relacionadas con el estudio de sistemas dinámicos ocurrieron durante el siglo XX. Julia presento un trabajo en 1907, sobre procesos iterativos envolviendo números complejos, observando las propiedades básicas de iterar en el plano complejo, que más tarde sería conocido como “Conjunto de Julia”. Su contribución fue rescatada, a partir de la década del 70, con el desenvolvimiento de los fractales, siendo este trabajo más tarde mejorado por Mandelbrot (1975). Un desenvolvimiento más significativo ocurrió después de la publicación por parte de Lorenz (1963), de un artículo sobre el flujo no periódico relacionado con turbulencia, en la cual se descubre la existencia de soluciones periódicas en un modelo simplificado de las ecuaciones de Navier-Stokes.

La contribución de Lorenz, junto con otros trabajos realizados sobre mapas por May (1976), May y Oster (1980) y otros investigadores, proporcionaron el camino de los diferentes estudios, en los cuales sistemas determinísticos muy simples, generan trayectorias dinámicas fuertemente influenciadas por la sensibilidad de las condiciones iniciales.

La sensibilidad de ciertos sistemas no lineales a pequeños cambios en las condiciones iniciales revela el comportamiento caótico. Matemáticamente, todos los sistemas no lineales con más de dos grados de libertad, pueden mostrar caos, y por tanto llegan a ser imprevisibles a largo plazo, vide Hilborn (1994), Freeman *et al.* (1997), como también es encontrado caos en sistemas con dos grados de libertad como es caso de la ecuación de Duffing, entre otros. Desde la mitad de la década Del 70, el termino caos ha aparecido cada vez con más frecuencia en la literatura, el caos se encuentra en los acontecimientos cotidianos, como la caída de una hoja, en las olas del mar, o como también en fenómenos como la fluctuaciones climáticas, etc.

El movimiento caótico, aparece cuando se presenta divergencia exponencial local en la trayectoria y están acompañados de una limitación global en el espacio de fase, y pueden ser representados como una dilatación de espacio de fase, teniendo como resultado de un mecanismo de combinación de doblas con un número infinito de expansiones en por lo menos en una dirección y contracción en otras direcciones (herradura de Smale), Fiedler-Ferrara y Prado (1994).

El nombre de caos es el adjetivo caótico que son usados para describir el comportamiento temporal de un sistema cuando dicho comportamiento es aparentemente aleatorio o ruidoso, al tiempo en que, sobre esta apariencia aleatoria caótica, subyace un determinado orden, dado por las ecuaciones que describen el sistema.

En general se necesita de tres componentes para determinar el comportamiento de un sistema: las ecuaciones de evolución temporal, los valores de los parámetros que describen el sistema y por último las condiciones iniciales. La imagen que más contribuye para difundir la teoría del caos, es conocida con el efecto mariposa, que hace mención especial a la sensibilidad de los sistemas dinámicos a las condiciones iniciales, que establece: “Al mover las alas una mariposa, puede causar una tempestad del otro lado del mundo (Efecto Mariposa)”, Gleick (1987); el caos encierra en sí mismo una fina estructura geométrica, un orden detrás de la aparente casualidad.

Los requisitos para que un comportamiento se considere caótico son las no intersecciones de diferentes trayectorias, la divergencia exponencial de diferentes entornos, en el caso de sistemas de más de tres dimensiones, y la capacidad de las trayectorias de permanecer dentro de alguna región limitada, sin interceptación y sin repetirse de forma exacta.

La noción de divergencia exponencial de órbitas próximas, es formalizada con la introducción del concepto de los exponentes de Lyapunov. Dados dos órbitas

próximas de un atractor, comenzado en un instante  $t=0$ , con una separación  $d_0$ , a lo largo del tiempo las trayectorias, divergen de modo que su separación para el instante  $t$ , dado por  $d(t)$ , satisface por la expresión  $d(t)=d_0e^{\lambda t}$ ; se el parámetro  $\lambda$ , llamado exponente de Lyapunov, permite obtener la información valiosa sobre la estabilidad del sistema, ya que fornece la tasa media de divergencia de las trayectorias.

Se debe mencionar que un sistema dinámico determinístico no lineal, es perfectamente previsible cuando existe un conocimiento perfecto de las condiciones iniciales, y en la verdad en la practica siempre es previsible en corto espacio de tiempo. La razón de la imprevisibilidad a largo plazo es una propiedad conocida como dependencia sensitiva a las condiciones iniciales, esto es, dos trayectorias infinitesimalmente próximas inicialmente divergen exponencialmente a un ritmo característico del sistema hasta que, por razones prácticas, se tornan no correlacionadas. No en tanto, después de un periodo finito de tiempo, las trayectorias que ambas definen, divergen y se tornan macroscópicamente distantes. Estas trayectorias en el espacio de fase definen un atractor, que en este caso, debido a la imposibilidad de saber cual es la curva exacta que una trayectoria inicial que va ejecutar, se llama atractor extraño.

### **1.5 Clasificación de los Puntos de Equilibrio – 2DOF**

Los puntos de equilibrio o puntos fijos de un sistema dinámicos, son aquellos puntos en los cual el sistema puede permanecer estacionario, a medida que el tiempo evoluciona, caso no sufra perturbaciones. Entonces, se puede entender como punto de equilibrio al punto en el cual la solución no varía con el tiempo, (Savi, 2004).

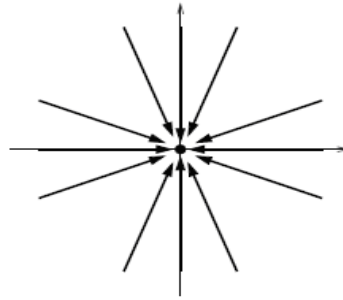


Los puntos de estabilidad se clasifican dependiendo de los auto-valores obtenidos mediante el Jacobiano en la posición de equilibrio de la ecuación. Estos auto-valores, permiten evaluar las diferentes posibilidades del movimiento, vide Belenky y Sevastianov (2003). Por eso, se considera las partes reales e imaginarios de los auto-valores.

$$\lambda_k = \text{Re}(\lambda_k) + i \text{Im}(\lambda_k) \quad (1.3)$$

- i)  $\text{Re}(\lambda_1) = -a_1 < 0, \text{Im}(\lambda_1) = 0$   
 $\text{Re}(\lambda_2) = -a_2 < 0, \text{Im}(\lambda_2) = 0$

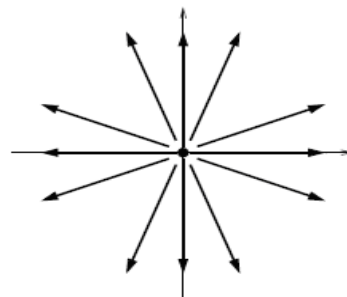
Siendo  $a_1, a_2 > 0$ , es un punto tipo pozo - estable.



*Figura 1.3: Punto fijo tipo pozo –nodo estable.*

- ii)  $\text{Re}(\lambda_1) = +a_1 > 0, \text{Im}(\lambda_1) = 0$   
 $\text{Re}(\lambda_2) = +a_2 > 0, \text{Im}(\lambda_2) = 0$

Siendo  $a_1, a_2 > 0$ , es un punto tipo fuente - inestable.



*Figura 1.4: Punto fijo tipo fuente –nodo inestable.*

- iii)  $\text{Re}(\lambda_1) = +a_1 > 0, \text{Im}(\lambda_1) = 0$   
 $\text{Re}(\lambda_2) = -a_2 < 0, \text{Im}(\lambda_2) = 0$

Siendo  $a_1, a_2 > 0$ , es un punto tipo sela - inestable.

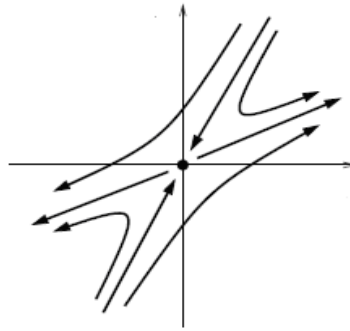


Figura 1.5: Punto fijo tipo sela.

- iv)  $\text{Re}(\lambda_1) = 0, \text{Im}(\lambda_1) = +b$   
 $\text{Re}(\lambda_2) = 0, \text{Im}(\lambda_2) = -b$

Siendo  $b > 0$ , es un punto tipo centro - estable.

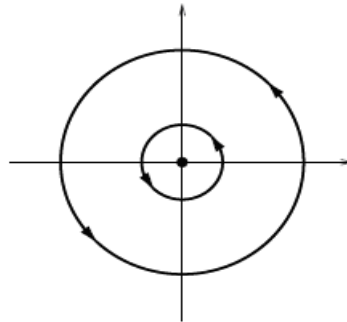


Figura 1.6: Punto fijo tipo centro.

- v)  $\text{Re}(\lambda_1) = -a_1 < 0, \text{Im}(\lambda_1) = +b_1$   
 $\text{Re}(\lambda_2) = -a_1 < 0, \text{Im}(\lambda_2) = -b_1$

Siendo  $a_1, b_2 > 0$ , es un punto tipo espiral - estable.

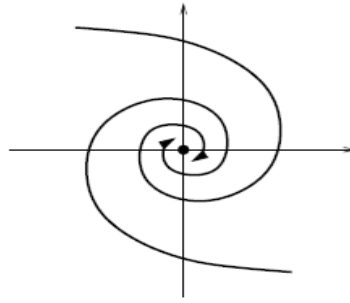


Figura 1.7: Punto fijo tipo espiral.

- vi)  $\text{Re}(\lambda_1) = +a_1 > 0, \text{Im}(\lambda_1) = +b_1$   
 $\text{Re}(\lambda_2) = +a_1 > 0, \text{Im}(\lambda_2) = -b_1$

Siendo  $a_1, b_2 > 0$ , es un punto tipo espiral – inestable.

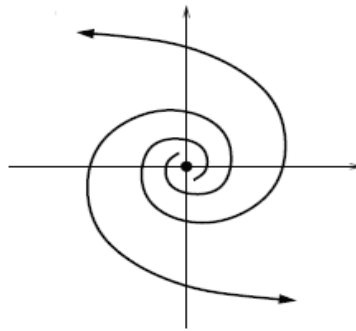


Figura 1.8: Punto fijo tipo espiral.

## 1.6 Atractores

Entendemos como un atractor el conjunto de puntos en el espacio de estados visitados por la solución de una ecuación en evolución. Se dice simplemente que “atractores son órbitas inmersa en un espacio de estado”. El conjunto de puntos define una órbita o trayectoria que tiene un comportamiento asintótico para un régimen estacionario o un régimen caótico.

Para obtener un atractor, registramos un determinado número de puntos descritos por la serie temporal, el desafío consiste en obtener un conjunto de puntos suficientemente grande, pero viable desde el punto de vista del tiempo de experimentación. Un espacio de estados, en una dimensión adecuada para preservar las características del sistema físico estudiado, podrá entonces ser construido a partir de esa serie temporal, en consecuencia, tendremos encontrado el espacio de estados en que el atractor estará descrito (o inmerso), y consecuentemente, podremos analizar la dinámica del sistema. A seguir, serán presentados tres atractores clásicos y sus características básicas, con el objeto de ilustrar la metodología de estudio no lineal, los que son los atractores de punto fijo, ciclo límite y caótico.

### **1.6.1 Atractor de Punto Fijo**

Para ilustrar el atractor de punto fijo iremos a utilizar el péndulo físico, en presencia de fuerzas de amortecimiento. En su régimen estacionario el no ejecuta oscilaciones. Una perturbación provoca un movimiento oscilatorio amortecido y con el tiempo, el péndulo vuelve asintóticamente para el reposa. Vemos así que este punto de reposo, tiene características de un punto fijo del sistema, debido a la convergencia asintótica de la órbita en el espacio de estados. En ese caso, el punto fijo es denominado como punto de atracción, pasemos a otra situación de ese péndulo físico, aquella en que el es colocado en la posición de equilibrio inestable en la parte superior del eje de rotación, el permanecerá indefinidamente en esa citación, caracterizando, por tanto otro punto fijo, hasta que una perturbación, tan pequeña cuanto se quiera, lo saque de su posición de equilibrio inestable, debido a la disipación

de energía presente en el sistema, el irá asintóticamente para el punto fijo estable, descrito anteriormente. En ese caso, por haber un sistemático distanciamiento (en el caso asintótico) del punto fijo original, el será denominado como punto fijo repulsor.

### **1.6.2 Atractor de Órbita Periódica Continua**

Una situación ligeramente más compleja que el caso anterior es el de atractor de línea, que en la práctica presenta un cambio en la dimensión topológica (de cero para uno) del atractor. El ejemplo clásico es el de un objeto lanzado de la tierra con una velocidad para colocarlo en órbita. Del punto de referencia de un observador externo a la tierra, el objeto describirá una ruta espiral continua hasta alcanzar el movimiento orbital. Esta órbita sería una elipse, siendo esa órbita llamada de ciclo límite del atractor. En ese caso, el atractor es “de dentro para afuera, o sea, de un punto central para una órbita, por otra lado, si el objeto cambiase de órbita por el cambio de energía para una órbita de menor radio, el atractor sería “de fuera para dentro”.

### **1.6.3 Atractores Extraños**

Ahora deseamos discutir aquella situación en que la órbita tiene una alta sensibilidad a las condiciones iniciales. Eso significa que comenzando con dos puntos ligeramente separadas en el espacio de estados, las órbitas se distancian exponencialmente con el pasar del tiempo. En ese caso, la órbita del atractor no se cierra y ella se queda describiendo una trayectoria aperiódica en una región finita del espacio de estados. Esos atractores son

conocidos en la literatura como “atractores extraños”. Esos atractores no presentan una dimensión topológica entera. En la realidad, aun seamos llevados a pensar que el tendría una dimensión infinita, fue mostrado de que el tiene una dimensión topológica fraccionaria. El nombre extraño resulta, exactamente, de esas características un tanto cuanto exóticas, venido del hecho que las órbitas se están distanciando exponencialmente en una región finita del espacio de estados. Sistemas dinámicos determinísticos, con evolución temporal asintótico para un atractor extraño, son definidos como presentando una dinámica caótica. Una descripción de condiciones matemáticas, la existencia de comportamientos caóticos en sistemas continuos disipativos, puede ocurrir solamente en sistemas no lineales.

### **1.7 Espacio de Fase**

El espacio de fase de un sistema dinámico, es definido como el espacio formado por las variables dependientes de un sistema dinámico; de un modo general, el espacio de fase forma un conjunto abierto en  $\mathbb{R}^n$ . todavía, en algunos casos la topología del espacio, puede estar restringida a una superficie de alguna forma geométrica particular. Algunos ejemplos típicos de estas figuras son el cilindro y el toro. Topologicamente, se dice que este espacio es una variedad (*manifold*).

### **1.8 Estabilidad Estructural**

Un sistema es dicho estructuralmente estable, se la topología de su diagrama de fase no se altera mediante una pequeña perturbación en el campo vectorial, tal que, de forma conciente, el no debe ser sensible a las perturbaciones. La estabilidad

estructural establece la robustez de un único punto en el espacio del campo vectorial del diagrama de fase, en cuanto que se la estabilidad en el sentido de Lyapunov, esta relacionado con la robustez de una órbita (trayectoria) en el diagrama de fase, frente a las perturbaciones en las condiciones iniciales del sistema.

### **1.9 Herramientas de Análisis de la Dinámica No Lineal**

- Mapeamento de Poincaré – una manera de simplificar el análisis de un sistema continuo, es mediante la sección de Poincaré, que permite eliminar una dimensión del sistema, pudiendo así analizar la estabilidad de la serie temporal por medio de análisis de la periodicidad y de las órbitas caóticas del sistema dinámico.

- Exponentes de Lyapunov – es una de las herramientas de análisis de sistema global de un espacio de estado, que analiza la sensibilidad a las condiciones iniciales, verificando la tasa de divergencia/convergencia de las trayectorias de la respuesta, que en nuestro caso viene a ser la dinámica del movimiento de la resonancia paramétrica.

- Diagrama de Bifurcación – permite observar la división de las soluciones de la ecuación a analizar, observar la catarata de bifurcaciones y la ruta posible para el caos, consiguiéndose ver el tipo de comportamiento con la variación del parámetro de control (en nuestro caso, amplitud de la ola,  $A_w$ ). Nos permite visualizar el inicio de la duplicidad de periodos, como también el inicio de la respuesta caótica de nuestro sistema dinámico del buque en resonancia paramétrica.

- Bacías de atracción – en sistemas no lineales, que presentan un comportamiento de mucha complejidad, este sistema tiene una fuerte dependencia a las condiciones iniciales. La bacía de atracción, es capaz de distinguir las zonas

estables e inestables asociado al volcamiento en nuestro análisis, para un conjunto de condiciones iniciales, tanto en posición como en velocidad, tomando en cuenta la variación de otros parámetros de control, como las características de la ola (amplitud y longitud), velocidad de avance, etc.

### **1.10 Antecedentes y Escenario Actual en Dinámica No Linear**

En las últimas décadas ha habido un gran desenvolvimiento en el estudio de los fenómenos no lineales. Uno de los aspectos más importantes es el del comportamiento caótico determinístico. La introducción del concepto de atractor y la noción sujacente de dependencia sensitiva a las condiciones iniciales, establecen una base para la teoría matemática de los procesos caóticos.

La reconstrucción de las propiedades topológicas de atractores caóticos, a partir de series temporales, ha permitido una interpretación alternativa de los procesos caóticos. El estudio de la transición orden-caos en sistemas disipativos llevó a la identificación de bifurcación.

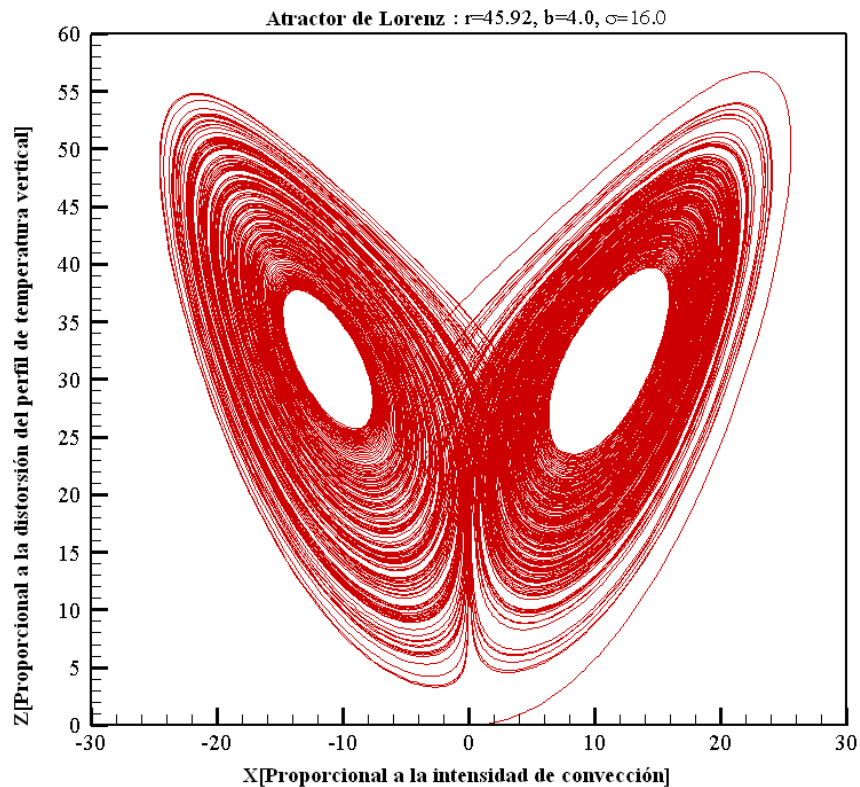
Poincaré (1890), estudio la dinámica de un sistema de tres cuerpos, para la resolución de cuan estable es el sistema solar. Una variación del problema de los tres cuerpos, resaltó que el problema no estaba bien establecido, y probó que la solución completa no puede ser hallada. El mostró que la evolución de aquel sistema es frecuentemente caótica, en el sentido de que pequeñas perturbaciones en su estado inicial, llevan a un cambio radical en la respuesta final.



Lorenz (1963), trabajó con los fundamentos matemáticos del sistema de ecuaciones de la meteorología, a partir del modelo de convección de Rayleigh-Barnard, uno de los primeros trabajos en la teoría de caos, El propuso el estudio de un sistema de ecuaciones diferenciales utilizado como prototipo del estado atmosférico. Trátase de un sistema de tres ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden:

$$\begin{aligned}\dot{X} &= -\sigma(X - Y) \\ \dot{Y} &= rX - Y - XY \\ \dot{Z} &= XY - bZ\end{aligned}\tag{1.4}$$

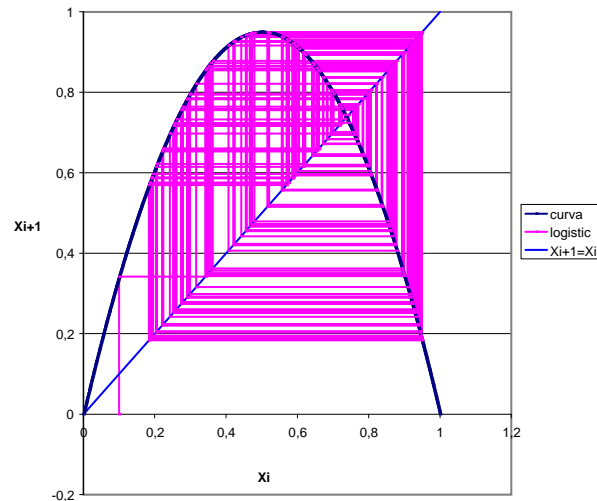
teniendo las principales variables de estudio un significado físico: X es proporcional a la intensidad de convección, Y es proporcional a la diferencia de la temperatura entre las corrientes de fluido ascendente y descendente, y Z es proporcional a la distorsión del perfil de temperatura vertical, vide Fiedler-Ferrara e Prado (1994), con los parámetros de control  $\sigma$  (número de Prandtl), r (número de Rayleigh relativo), y  $b=4/(1+a^2)$ . Lorenz observó que ese sistema determinístico, puede tener dinámica extremadamente irregular para un gran extensión de parámetros; a partir de condiciones iniciales ligeramente diferentes, la solución oscila irregularmente, nunca repitiendo el mismo estado, pero si manteniendo siempre en una región limitada del espacio de fase. Cuando graficó las trayectorias, descubrió que se ajustan en un complicado conjunto, figura 1.9, conocido como atractor extraño. Desde entonces, innumerables investigadores pasaron a estudiar el caos determinístico, analizando diferentes sistemas dinámicos asociados a una serie de situaciones físicas.



*Figura 1.9: Atractor de Lorenz,  $r=45.92$ ,  $b=4.0$ ,  $\sigma=16.0$ .*

Por otro lado, Robert May (1976) investigó un sistema dinámico relacionado con el crecimiento poblacional de las especies, modelada por la ecuación matemática:  $X_{i+1}=\mu X_i(X_i-1)$ , conocida como mapa logístico, que evalúa la población en un año  $X_{i+1}$ , a partir de un año anterior  $X_i$ , siendo una ecuación determinista, cuya situación futura será determinada por las condiciones presentes, lo que llamó la atención de May fue que el comportamiento de esta mapa, varía radicalmente para diferentes valores de  $\mu$ . El comportamiento de este sistema pasa de periódica a caótica debido a pequeñas variaciones del parámetro de control ( $\mu$ ). Sin duda, se trata de un sistema simple del punto de vista matemático, pero posee una dinámica muy

rica. En la figura 1.10 es mostrada el comportamiento aperiódica para  $\mu=3.8$ , y una condición inicial  $X_0=0.1$  para una mapa logístico.

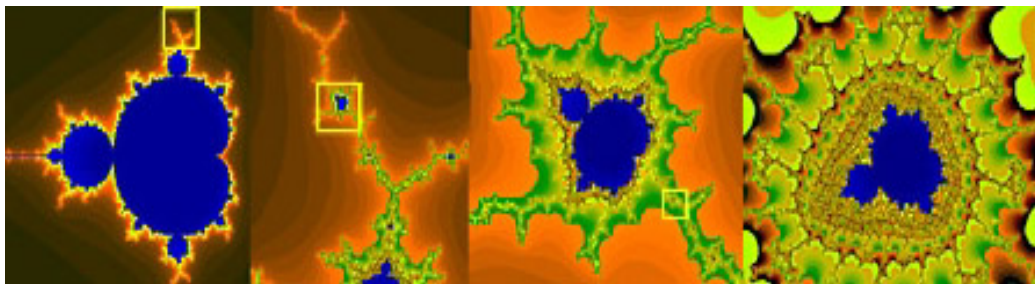


*Figura 1.10: Mapa logístico, comportamiento caótico para  $\mu=3.8$ ,  $X_0=0.1$ .*

Con el paso de los años, innumerables contribuciones relevantes fueron proporcionados por diversos investigadores. Entre ellos, vale destacar: Feigenbaum, Smale, Shaw, Duffing, van der Pol, Yorke, Grebogi, Otto, Guckenheimer, Holmes, Moon, Abarbanel, Thompson, Chua.

El principal trabajo de Mandelbrot (1975) fue la propuesta de un nuevo concepto de geometría, que es conocida como geometría fractal. El objetivo de ese nuevo conjunto de objetos fue el de minimizar el vacío dejado por la geometría euclidiana con respecto a las formas existentes en la naturaleza. Esa nueva familia de formas geométricas de formas geométricas es conocida como fractales, que produce una primera aproximación de estructuras de los objetos físicos. Fractales han sido observados en la naturaleza en diferentes situaciones, variando desde formas

geométricas a las ciencias físicas. Básicamente, es posible caracterizar fractales de dos grupos distintos: objetos sólidos y atractores extraños. Fue en 1975 entonces que el profesor Mandelbrot popularizó los fractales con un libro, que ilustra los primeros fractales a ser vistos, vide a figura 1.11. Mandelbrot fue la primera persona que ilustró los fractales, por eso que fueron denominados de fractales de Mandelbrot. El término fractal, describe fenómenos matemáticos que exhiben comportamiento caótico, como ejemplo, auto-similaridad en varias escalas. Estos fenómenos envuelven a definición de algoritmos o funciones recursivas.



*Figura 1.11: Conjunto de Mandelbrot (Campos, 2006)*

En la actualidad, diversas áreas del conocimiento se han deparado con el caos, dentro de los cuales se vale destacar en ingeniería, Mees y Sparrow (1987), Piccoli y Weber (1998), Moon y Stiefel (2006), en medicina, Goldberger *et al.* (1990), Cámara (2008), en biología, Hassel *et al.* (1991), y en economía, Aguirre (1997).

La aplicación de la teoría de caos en resonancia paramétrica en buques, es un campo bastante nuevo; los trabajos en este caso son poco, dentro de los cuales podemos citar:

Umeda *et al.*, (2003) – el trabajo estudia la resonancia paramétrica de buques porta-contener en mar de frente, evalúa en momento de restauración como una función no lineal de la amplitud de la ola. Presenta los correspondientes mapeamiento de Poincaré, dobladura de periodos y caos, y la ocurrencia de bifurcación subcrítica, asociada a la respuesta de rolo.

Neves y Rodríguez (2007) – en este trabajo es discutido la resonancia paramétrica en mar regular de proa, con el uso de un conjunto de ecuaciones no lineales descrito por los modos acoplados de arfada-rolido-cabeceo. El trabajo explora la influencia de las no linealidades de tercera orden, así como la relevancia de los acoplamientos entre los modos verticales y el movimiento de rolo en los límites de estabilidad. Son analizados, la influencia de las condiciones iniciales sobre el desenvolviendo de las amplificaciones de respuesta de rolo, identificándose la ocurrencia de los fenómenos de salto.

Bullian y Francescutto (2008) – analizaron el problema de la presencia de múltiples estado de estabilidad en olas longitudinales en mar regular, basado en un modelo analítico para rolo desacoplado (1-DOF), por medio de la predicción analítica de la verificación experimental, por el cual fue posible determinar analíticamente la región de inestabilidad y el estado estable para la amplitud de rolo. Presento un análisis de las bacías de atracción y la sensibilidad a las condiciones, variando la velocidad del buque, también hallando para que valores de la velocidad se presentaba el salto dinámico (jump at fold).

## CAPÍTULO 2

### MODELO MATEMÁTICO A ANALIZAR

*A Seguir se presentará las ecuaciones que gobiernan los movimientos del buque, considerando relevantes tres modos acoplados (arfada-rolido-cabeceo), teniendo los términos no lineales tanto el amortecimiento en rolido como en la restauración en arfada, rolido y cabeceo. El objetivo es obtener el modelo matemático en el dominio del tiempo, que posteriormente será estudiado por medio de herramientas de la dinámica no lineal.*

#### **2.1 Sistemas de Referencia**

Las ecuaciones del movimiento del buque, serán escritos refiriéndose al buque con velocidad de avance constante y en aguas calmas, moviéndose en olas en torno del su posición de equilibrio, para lo cual nosotros usaremos dos sistemas de referencia.

Un primer sistema inercial  $Cxyz$ , que se desplaza en la misma velocidad de avance del buque, y que en el tiempo  $t=0$ , coincide con la superficie libre en aguas calmas, teniendo el punto  $C$  en la misma vertical que el centro de gravedad del buque ( $G$ ), donde cualquier punto en este sistema será denotado por  $(x,y,z)$ .

El segundo sistema de referencia móvil  $\overline{Oxyz}$ , sistema fijo en el casco, cuyo plano  $\overline{xy}$  coincide siempre con el plano de flotación del buque en aguas calmas, el eje  $\overline{Ox}$  pertenece al plan diametral, siendo positivo en el sentido de avance, y el eje  $\overline{Oz}$  pasa por el centro de gravedad del buque (G), con sentido positivo para arriba, donde cualquier punto en este sistema será denotado por  $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ .

Los movimientos de traslación del buque en la dirección de los ejes X, Y, Z, son denotados por avance, desvío, y arfada, respectivamente, y los movimientos de rotación del buque en los mismos ejes definidos como rolido, cabeceo, guiñada, respectivamente. La figura 2.1 ilustra esos movimientos.

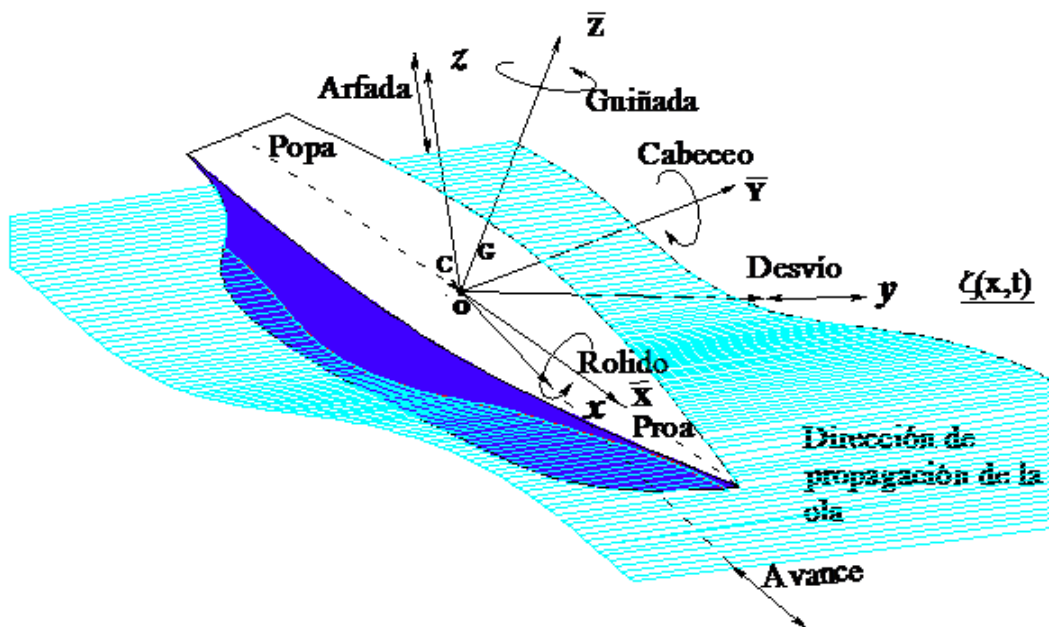


Fig. 2.1: Sistemas de referencia.

Para pasar de un sistema de referencia para otro es necesario aplicar la matriz de transformación (T), Bishop y Parkinson (1970), que permite expresar cualquier vector o punto del espacio del sistema móvil  $\overline{Oxyz}$ , en el sistema inercial CXYZ.

$$T = \begin{bmatrix} \cos(\psi)\cos(\theta) & \cos(\psi)\sin(\theta)\sin(\phi) - \sin(\psi)\cos(\phi) & \cos(\psi)\cos(\theta)\cos(\phi) + \sin(\psi)\sin(\phi) \\ \sin(\psi)\cos(\theta) & \sin(\psi)\sin(\theta)\sin(\phi) + \cos(\psi)\cos(\phi) & \sin(\psi)\sin(\theta)\cos(\phi) - \cos(\psi)\sin(\phi) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta)\sin(\phi) & \cos(\theta)\cos(\phi) \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

A partir de la secuencia de rotaciones como:  $\psi$ : ángulo de guiñada,  $\theta$ : ángulo de cabeceo,  $\phi$ : ángulo de rolido.

## 2.2 Frecuencia de Encuentro

La frecuencia de encuentro ( $w_e$ ) es la frecuencia con la cual el buque oscila, cuando se desplaza con una velocidad constante (U), encontrando la frecuencia de la ola ( $w_w$ ) y el ángulo de incidencia ( $\chi$ ), obteniéndose:

$$w_e = w_w - \frac{U}{g} w_w^2 \cos(\chi) \quad (2.2)$$

Siendo (g) la aceleración de la gravedad, en el caso de la ola longitudinal en mar de proa ( $\chi=180^\circ$ ), la ecuación (2.2) queda como:

$$w_e = w_w + \frac{U}{g} w_w^2 \quad (2.3)$$



La ecuación de la superficie de una onda regular es definida por la teoría de Airy:

$$\zeta(x, y, t, \chi) = A_w \cos[kx \cos(\chi) + ky \sin(\chi) - w_e t] \quad (2.4)$$

donde:

$A_w$ : amplitud de la onda,

$k$ : número de onda, dado por:  $k = \frac{w_w^2}{g} = \frac{2\pi}{\lambda}$ ,

$\lambda$ : longitud de la onda.

Para olas longitudinales con mar de proa, la ecuación de la superficie de la onda queda siendo:

$$\zeta(x, t) = A_w \cos[kx + w_e t] \quad (2.5)$$

### **2.3 Ecuaciones Generales Del Movimiento**

Las ecuaciones del movimiento son derivadas a partir de la segunda ley de Newton, considerando el buque con un cuerpo rígido, tal que las ecuaciones corresponden a los balances de Cantidad de Movimiento Lineal y de la Cantidad de Movimiento Angular.

#### **2.3.1 Conservación de la Cantidad de Movimiento Lineal**

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_{EXT} \quad (2.6)$$

Donde:

$\vec{F}_{EXT}$  : vector de fuerzas externas,

$\vec{P}$  : cantidad de movimiento linear, que puede ser expresado como:

$$\vec{P} = M \dot{\vec{r}}_G$$

M: matriz de masa del buque, siendo m a masa del buque.

$$M = \begin{bmatrix} m & 0 & m \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix}$$

$\dot{\vec{r}}_G$  : vector velocidad do C.G. del buque, a partir del sistema inercial CXYZ:

$$\dot{\vec{r}}_G = \dot{\vec{r}}_O + \bar{\Omega} \times \vec{r}_G \quad (2.7)$$

$\dot{\vec{r}}_O$  : velocidad translacional del origen del sistema  $\overline{Oxyz}$ ,

$\bar{\Omega}$  : velocidad angular del sistema  $\overline{Oxyz}$ ,

$\vec{r}_G$  : vector posición del C.G. del buque con referencia al sistema  $\overline{Oxyz}$ .

Considerando la matriz del buque constante al largo del tiempo, la ecuación de conservación de cantidad de movimiento lineal será:

$$M \frac{d}{dt} (\dot{\vec{r}}_O + \bar{\Omega} \times \vec{r}_G) = \vec{F}_{EXT} \quad (2.8)$$

### 2.3.2 Conservación de La Cantidad de Momento Angular

La ecuación de conservación de la cantidad de momento angular, el cual es referido al C.G. del buque, expresado como:

$$\vec{M}_{EXT}|_G = \frac{d\vec{h}_G}{dt} \quad (2.9)$$

siendo:

$\vec{M}_{EXT}|_G$ : vector de momentos de las fuerzas externas  $\vec{F}_{EXT}$  en relación al C.G. del buque,

$\vec{h}_G$ : vector del momento angular referido al C.G. del buque,

Ahora expresamos la ecuación (2.9) en relación al origen del sistema  $\overline{Oxyz}$ :

$$\frac{d\vec{h}}{dt} + m\vec{r}_G' \times \frac{d\dot{\vec{r}}_o}{dt} = \vec{M}_{EXT} \quad (2.10)$$

donde,

$\vec{h}$ : vector momento angular referido al origen  $\overline{Oxyz}$ :

$$\vec{h} = J\vec{\Omega} \quad (2.11)$$

J: matriz de inercias de masa del buque, referidos al eje del sistema  $\overline{Oxyz}$ :

$$J = \begin{bmatrix} J_{xx} & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{xy} & J_{yy} & -J_{yz} \\ -J_{xz} & -J_{yz} & -J_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

$\vec{M}_{EXT}$ : vector de momentos de las fuerzas externas  $\vec{F}_{EXT}$  en relación al origen del sistema  $\overline{Oxyz}$ .

Asumiendo que la matriz de inercias del buque es invariable en el tiempo, entonces la ecuación estará dada en la forma:

$$J \frac{d\vec{\Omega}}{dt} + \frac{d}{dt} (M\vec{r}_G' \times \dot{\vec{r}}_O) = \vec{M}_{EXT} \quad (2.13)$$

Las ecuaciones (2.8) y (2.13) describen la dinámica del buque que es sometido a la acción de fuerzas y momentos externos en seis grados de libertad.

Ya que nuestro interés es el estudio del buque en movimiento en olas longitudinales, entonces solo serán relevantes tres movimientos (arfada (z), rolido ( $\phi$ ), cabeceo ( $\theta$ )), restringiéndose los otros tres grados de libertad (avance (x), desvío (y), guiñada ( $\psi$ )), llevando así a lo siguiente conjunto de tres ecuaciones:

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 z_o}{dt} &= Z_{EXT} \\ J_{xx} \frac{d^2 \phi}{dt} &= K_{EXT} \\ J_{yy} \frac{d^2 \theta}{dt} &= M_{EXT} \end{aligned} \quad (2.14)$$

Donde el lado derecho de la ecuación (2.14), representa la fuerza en arfada y los momentos en rolido y cabeceo que actúan sobre el buque. Estas fuerzas pueden ser asumidas como fuerzas debido a los movimientos del buque (fuerzas hidrostáticas y fuerzas hidrodinámicas), debido a las fuerzas de gravedad, y las fuerzas debidas a las excitaciones producidas por las olas, despreciándose fuerzas como el viento, timón, etc.

#### 2.4 Fuerzas y Momentos Externos

Las fuerzas debidas a los movimientos del buque son funciones analíticas de los desplazamientos  $z, \phi, \theta$ ; de las velocidades  $\dot{z}, \dot{\phi}, \dot{\theta}$ , y de las aceleraciones  $\ddot{z}, \ddot{\phi}, \ddot{\theta}$ . Las fuerzas debidas al movimiento del buque son funciones diferenciables, pudiendo ser desarrolladas por series de Taylor hasta tercera orden. Las acciones de las fuerzas gravitacionales se cancelan con las fuerzas hidrostáticas en la posición de equilibrio. Generalmente la respuesta de las acciones externas, se pueden escribir:

$$Q_{EXT} = Q(z, \phi, \theta, \dot{z}, \dot{\phi}, \dot{\theta}, \ddot{z}, \ddot{\phi}, \ddot{\theta}) + Q_g \quad (2.15)$$

en la expresión (2.15),  $Q$  y sus dependencias  $z, \phi, \theta$ , llevan en cuenta las fuerzas de restauración hidrostáticas, en cuanto que  $\dot{z}, \dot{\phi}, \dot{\theta}$ , y  $\ddot{z}, \ddot{\phi}, \ddot{\theta}$ , corresponden a los términos hidrodinámicos de amortecimiento y masa adicional.

Es conveniente introducir los términos  $q_i, q_j, q_k$ , para denotar los términos  $z, \phi, \theta$ , para poder denotar sucesivamente  $q_1 = z, q_2 = \phi, q_3 = \theta$ , asumiendo el

movimiento en torno de su posición de equilibrio ( $z_o = 0, \phi_o = 0, \theta_o = 0$ ), las fuerzas debidas al movimiento del buque son funciones diferenciables, pudiendo ser expandidas en series de Taylor hasta tercera orden:

$$\begin{aligned}
Q = Q_0 &+ \sum_{i=1}^3 \frac{\partial Q}{\partial q_i} \Big|_0 q_i + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial Q}{\partial \dot{q}_i} \Big|_0 \dot{q}_i + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial Q}{\partial \ddot{q}_i} \Big|_0 \ddot{q}_i + \frac{1}{2} \left\{ \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 Q}{\partial q_i \partial q_j} \Big|_0 q_i q_j + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 Q}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \Big|_0 \dot{q}_i \dot{q}_j + \right. \\
&\left. \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 Q}{\partial \ddot{q}_i \partial \ddot{q}_j} \Big|_0 \ddot{q}_i \ddot{q}_j + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 Q}{\partial q_i \partial \dot{q}_j} \Big|_0 q_i \dot{q}_j + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 Q}{\partial \dot{q}_i \partial \ddot{q}_j} \Big|_0 \dot{q}_i \ddot{q}_j + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 Q}{\partial \ddot{q}_i \partial \dot{q}_j} \Big|_0 \ddot{q}_i \dot{q}_j + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 Q}{\partial \dot{q}_i \partial \ddot{q}_j} \Big|_0 \dot{q}_i \ddot{q}_j \right\} + \\
&\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \frac{\partial^3 Q}{\partial q_i \partial q_j \partial q_k} \Big|_0 q_i q_j \dot{q}_k + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \frac{\partial^3 Q}{\partial q_i \partial q_j \partial \dot{q}_k} \Big|_0 q_i q_j \ddot{q}_k + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \frac{\partial^3 Q}{\partial q_i \partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_k} \Big|_0 q_i \dot{q}_j \dot{q}_k + \\
&\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \frac{\partial^3 Q}{\partial q_i \partial \dot{q}_j \partial \ddot{q}_k} \Big|_0 q_i \ddot{q}_j \ddot{q}_k + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \frac{\partial^3 Q}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j \partial \ddot{q}_k} \Big|_0 \dot{q}_i \dot{q}_j \ddot{q}_k + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \frac{\partial^3 Q}{\partial \dot{q}_i \partial \ddot{q}_j \partial \ddot{q}_k} \Big|_0 \dot{q}_i \ddot{q}_j \ddot{q}_k + \\
&\left. \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \frac{\partial^3 Q}{\partial q_i \partial \dot{q}_j \partial \ddot{q}_k} \Big|_0 q_i \dot{q}_j \ddot{q}_k \right\} \tag{2.16}
\end{aligned}$$

en la ecuación anterior, la expansión  $Q_0$  denota las fuerza hidrostáticas en la posición de equilibrio, siendo que el empuje es igual al peso y el momento del empuje es igual al momento del peso, tal que, en la ecuación (2.15), la acción gravitacional  $Q_g$  debido al peso se cancelan con las fuerzas hidrostáticas  $Q_0$  en la posición de equilibrio.

## **2.5 Ecuaciones del Movimiento No Lineal**

Los modelos lineales son limitados para la representación de algunos fenómenos físicos, como es el caso de la resonancia paramétrica, para la cual es necesario desarrollar un modelo no lineal de nos permita observar los diferentes fenómenos físicos, así, pudiéndose obtener resultados más próximos a los resultados experimentales.

A partir del trabajo de Abkowitz (1969), se puede decir que la interacción entre las fuerzas inerciales y las fuerzas viscosas es poco significativa, aceptándose así que las fuerzas hidrodinámicas que resultan de las aceleraciones son lineales en las aceleraciones. E por Salvesen *et al.* (1970), usando la teoría potencial lineal y aplicando los métodos de las fajas, se concluye que con la excepción del amortecimiento en roldo, la teoría potencial da buenos resultados de las fuerzas hidrodinámicas: masa adicional y amortecimiento en arfada y cabeceo, admitiéndose que los coeficientes de los términos no lineales conteniendo aceleraciones y/o son nulas o despreciables.

El amortecimiento en roldo presenta fuertes no linealidades. El método de Ikeda presentado por Himeno (1981), el cual dice que el amortecimiento en roldo es representado como una función no lineal de la velocidad angular en roldo, será empleado.

En el caso de los movimientos en arfada y cabeceo, los términos no lineales a ser considerados serán los términos de acciones hidrostáticas y Froude-Krilov, por lo

tanto, las fuerzas hidrodinámicas de masa adicional y amortecimiento serán lineales; para rolo solo el término de masa adicional es lineal, siendo el amortecimiento, las acciones hidrostáticas y de paso de la ola no lineal. Considerando la ecuación (2.15), definida hasta la tercera orden, las acciones externas serán dadas como:

$$\begin{aligned}
 Q_{EXT} = & \sum_{i=1}^3 \frac{\partial Q}{\partial q_i} \Big|_0 q_i + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial Q}{\partial \dot{q}_i} \Big|_0 \dot{q}_i + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial Q}{\partial \ddot{q}_i} \Big|_0 \ddot{q}_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 Q}{\partial q_i \partial q_j} \Big|_0 q_i q_j + \\
 & \frac{1}{6} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \frac{\partial^3 Q}{\partial q_i \partial q_j \partial q_k} \Big|_0 q_i q_j q_k + Q_w(t)
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

Que es un modelo matemático que privilegia en los términos no lineales, la importancia de las partes correspondiente a los acoplamientos en las restauraciones hidrostáticas y el paso de la ola, que nos permite estudiar los efectos de los acoplamientos en las fuerzas y momentos, y las transferencias de energía entre los modos de arfada, rolo, y cabeceo. Se debe observar que en la ecuación (2.17) el término  $Q_w(t)$ , describe las excitaciones de las olas determinadas para el buque en la posición media, siendo que los términos de Froude-Krilov no lineales (determinados para el buque en posiciones desplazadas), están representados en términos con sumatorias de doble y triple.

Iremos expresar la ecuación (2.17) en forma de componentes excluyendo aquellos coeficientes que, por razones de simetrías, son nulos; llevando en cuenta los términos inerciales del buque, y usando el modelo no lineal cuadrático para el amortecimiento en rolo.



Llegándose al modelo matemático del movimiento no lineal de tercera orden, considerando el pasaje de la ola, propuesto por Rodríguez (2004), el cual tiene algunos coeficientes dependientes del tiempo, como se muestra abajo.

$$\begin{aligned} & (m + Z_z) \ddot{z} + Z_z \dot{z} + Z_\theta \ddot{\theta} + Z_\theta \dot{\theta} + Z_z z + Z_\theta \theta + \frac{1}{2} Z_{zz} z^2 + \frac{1}{2} Z_{\phi\phi} \phi^2 + \frac{1}{2} Z_{\theta\theta} \theta^2 + Z_{z\theta} z\theta + \frac{1}{6} Z_{zzz} z^3 \\ & + \frac{1}{2} Z_{zz\theta} z^2 \theta + \frac{1}{2} Z_{\phi\phi z} \phi^2 z + \frac{1}{2} Z_{\phi\phi\theta} \phi^2 \theta + \frac{1}{2} Z_{\theta\theta z} \theta^2 z + \frac{1}{6} Z_{\theta\theta\theta} \theta^3 + Z_{\zeta z}(t) z + Z_{\zeta\theta}(t) \theta + Z_{\zeta z}(t) z + \\ & Z_{\zeta z}(t) z^2 + Z_{\zeta\theta}(t) \theta + Z_{\zeta z\theta}(t) z\theta + Z_{\phi\phi\zeta}(t) \phi^2 + Z_{\theta\theta\zeta}(t) \theta^2 = Z_w(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (J_{xx} + K_\phi) \ddot{\phi} + K_\phi \dot{\phi} + K_{\phi|\dot{\phi}} |\dot{\phi}| + K_\phi \phi + K_{z\phi} z\phi + K_{\phi\theta} \phi\theta + \frac{1}{2} K_{zz\phi} z^2 \phi + \frac{1}{6} K_{\phi\phi\phi} \phi^3 + \\ & \frac{1}{2} K_{\theta\theta\phi} \theta^2 \phi + K_{z\phi\theta} z\phi\theta + K_{\zeta\phi}(t) \phi + K_{\zeta\phi}(t) \phi + K_{\zeta\phi\theta}(t) \phi + K_{\zeta z\phi}(t) z\phi + K_{\zeta\phi\theta}(t) \phi\theta = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (J_{yy} + M_\theta) \ddot{\theta} + M_\theta \dot{\theta} + M_z z + M_z z + M_z z + M_\theta \theta + \frac{1}{2} M_{zz} z^2 + \frac{1}{2} M_{\phi\phi} \phi^2 + \frac{1}{2} M_{\theta\theta} \theta^2 + \\ & M_{z\theta} z\theta + \frac{1}{6} M_{zzz} z^3 + \frac{1}{2} M_{zz\theta} z^2 \theta + \frac{1}{2} M_{\phi\phi z} \phi^2 z + \frac{1}{2} M_{\phi\phi\theta} \phi^2 \theta + \frac{1}{2} M_{\theta\theta z} \theta^2 z + \frac{1}{6} M_{\theta\theta\theta} \theta^3 + \\ & M_{\zeta z}(t) z + M_{\zeta\theta}(t) \theta + M_{\zeta z}(t) z + M_{\zeta z}(t) z^2 + M_{\zeta z}(t) z^2 + M_{\zeta\theta}(t) \theta + M_{\zeta z\theta}(t) z\theta + \\ & M_{\phi\phi\zeta}(t) \phi^2 + M_{\theta\theta\zeta}(t) \theta^2 = M_w(t) \end{aligned}$$

(2.18)

Todos los coeficientes de las ecuaciones (2.18), son obtenidos de acuerdo con la metodología propuesta por Rodríguez (2004). Conocidos los coeficientes, ese sistema de ecuaciones no lineales puede ser numéricamente integrado, resultando así las series temporales de los movimientos acoplados de arfada, rolo, y cabeceo.

## 2.6 Análisis de la Estabilidad de la Ecuación de Rolido

El estudio de la estabilidad es una herramienta que nos permite analizar efectos relevantes para el comportamiento del buque en rolido, que no son observables por medio de simulaciones numéricas de las ecuaciones no lineales. Los límites de estabilidad corresponden a perturbaciones aplicadas a las ecuaciones (2.18), pudiendo ser obtenidos por el método presentado por Hsu (1963), aplicable al análisis de la excitación paramétrica de sistemas dinámicos con coeficientes dependientes del tiempo, con múltiples grados de libertad. Aquí estaremos interesados más directamente en la ecuación de rolido.

## 2.7 La Ecuación Variacional de Rolido

Linealizando el amortecimiento del rolido en la ecuación (2.18), vide Rodríguez (2004), la ecuación quedará de la forma:

$$\begin{aligned} & (J_{xx} + K_{\dot{\phi}})\ddot{\phi} + B_e\dot{\phi} + K_{\phi}\phi + K_{z\phi}z\phi + K_{\phi\theta}\phi\theta + \frac{1}{2}K_{zz\phi}z^2\phi + \frac{1}{6}K_{\phi\phi\phi}\phi^3 + \frac{1}{2}K_{\theta\theta\phi}\theta^2\phi + \\ & K_{z\phi\theta}z\phi\theta + K_{\zeta\phi}(t)\phi + K_{\xi\phi}(t)\phi + K_{\zeta\zeta\phi}(t)\phi + K_{\zeta z\phi}(t)z\phi + K_{\zeta\phi\theta}(t)\phi\theta = 0 \end{aligned} \quad (2.19)$$

Basados en la teoría de las perturbaciones, expresaremos los movimientos no lineales como siendo una suma de un movimiento oscilatorio permanente, más una perturbación:

$$\begin{aligned} z(t) &= \hat{z}(t) + \xi(t) = A_w\eta_3 \cos(w_e t + \alpha_z) + \xi(t) \\ \phi(t) &= \hat{\phi}(t) + \varphi(t) = A_w\eta_4 \cos(w_e t + \alpha_{\phi}) + \varphi(t) \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$\theta(t) = \hat{\theta}(t) + \mathcal{G}(t) = A_w \eta_5 \cos(w_e t + \alpha_\theta) + \mathcal{G}(t)$$

Donde  $\hat{z}(t), \hat{\phi}(t), \hat{\theta}(t)$ , son los movimientos oscilatorios permanentes correspondientes a la solución lineal;  $\eta_3, \eta_4, \eta_5$ , son los RAOs (funciones de transferencia), y por último  $\xi(t), \varphi(t), \mathcal{G}(t)$ , son las perturbaciones en arfada, rolo, y cabeceo, respectivamente.

Tomando la variacional de la ecuación (2.19) y usando las expresiones (2.20), la ecuación variacional en rolo relativo al movimiento de perturbación, siendo olas longitudinales, teniendo la respuesta en rolo igual a cero ( $\hat{\phi} = 0$ ), será obtenida:

$$\begin{aligned} (J_{xx} + K_{\ddot{\phi}})\ddot{\phi} + B_e \dot{\phi} + [K_\phi + K_{z\phi} \hat{z} + K_{\phi\theta} \hat{\theta} + \frac{1}{2} K_{zz\phi} \hat{z}^2 + \frac{1}{2} K_{\theta\theta\phi} \hat{\theta}^2 + K_{z\phi\theta} \hat{z} \hat{\theta} + K_{\phi\eta}(t) \\ K_{\zeta z\phi}(t) \hat{z} + K_{\zeta\phi\theta}(t) \hat{\theta} + K_{\zeta\zeta\phi}(t)] \phi = 0 \end{aligned} \quad (2.21)$$

Donde las respuestas lineales son:

$$\hat{z}(t) = A_w \eta_3 \cos(w_e t + \alpha_z)$$

$$\hat{\theta}(t) = A_w \eta_5 \cos(w_e t + \alpha_\theta)$$

Por tanto, la ecuación (2.21) corresponde a una ecuación en  $\varphi(t)$ , donde todos los términos entre corchetes son términos oscilatorios. Considerando que algunos de los términos son proporcionales a la función de coseno elevado al cuadrado, se concluye que la suma de todos los términos dentro del corchete resulta en una

función con términos oscilatorios en  $w_e$  y en  $2w_e$ , el que implica que la ecuación (2.21) será del tipo ecuación de Hill, y no del tipo ecuación de Mathieu.

Para un estudio detallado de los límites de estabilidad analíticos correspondientes a la ecuación variacional, método de Hsu (1963), vide Rodríguez (2004). En el presente trabajo, en vez de hacer la determinación de los límites de estabilidad analíticos correspondientes a la ecuación variacional, daremos preferencia a la determinación de los límites de estabilidad numéricos, conforme introducidos por Neves y Rodríguez (2007).

La figura 2.2, presenta las soluciones numéricas de las ecuaciones, mapeadas para diferentes sintonías y amplitudes de ola. En este trabajo se evalúa el límite de estabilidad el límite de estabilidad para la condición más crítica evaluada por Rodríguez (2004), que corresponde a:

Buque Pesquero Transom Stern (TS)

Número de Froude  $F_n=0.3$

$GM=0.37$  m.

$\kappa_{si}=180^\circ$

Para mayores detalles de las formas y características de la embarcación, vide Rodríguez (2004).

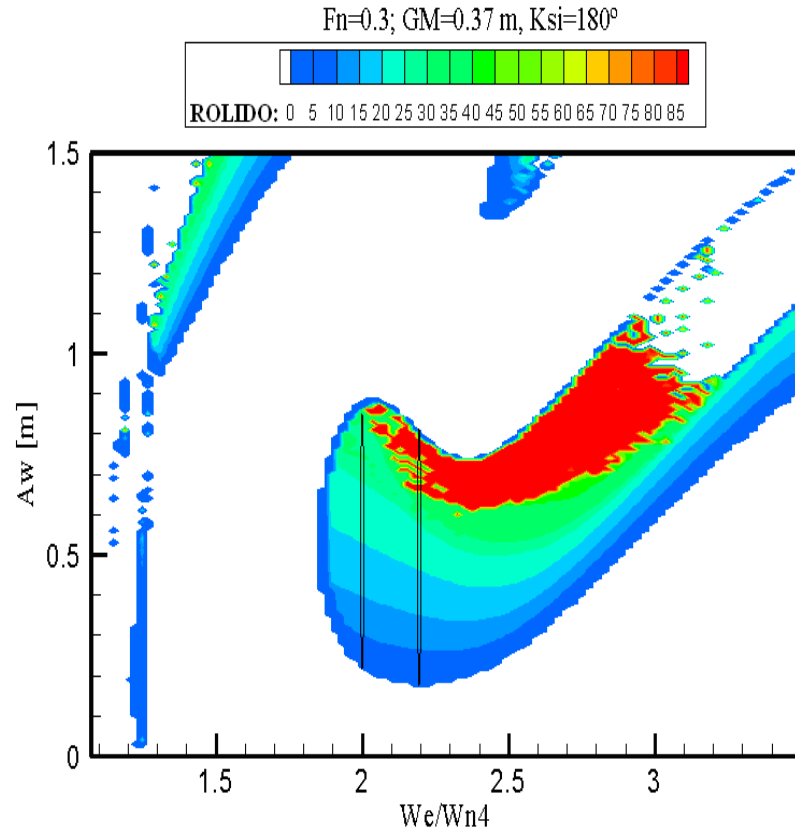


Fig. 2.2: Límite de estabilidad para las condiciones iniciales:  $z_0 = 0.0 \text{ m}$ ,

$$\dot{z}_0 = 0.01 \text{ m/s}, \phi_0 = 2 \text{ deg}, \dot{\phi}_0 = -0.5 \text{ deg/s}, \theta_0 = 0.0 \text{ deg}, \dot{\theta}_0 = 0.01 \text{ deg/s}.$$

En la figura 2.2, se muestra los límites de estabilidad obtenidos por solución numérica de las ecuaciones que gobiernan la dinámica del buque, donde se definen las regiones de estabilidad e inestabilidad para un buque Transom Stern (TS), en la cual se puede observar la existencia de dos regiones de inestabilidad: la primera zona próxima a la sintonía  $w_e = 2w_{n4}$ , y la segunda zona próxima a la sintonía  $w_e = w_{n4}$ .

Esta figura es muy importante para nuestro estudio, ya que se quiere conocer en detalle o que pasa en la faja de la sintonía  $w_e = 2w_{n4}$ , mediante el análisis de la dinámica no lineal, tomándose a la amplitud de la ola como el parámetro de interés.

## CAPÍTULO 3

### MÉTODOS DE ANÁLISIS NO LINEAL

#### 3.1 Sistemas Dinámicos y el Caos Determinístico

Se entiende por sistemas dinámicos a todos los sistemas que tienen una evolución en el tiempo, cualquier que sea su naturaleza, abarcando sistemas dinámicos biológicos, químicos, económicos, etc. Este evolución generalmente es modelada en términos de ecuaciones diferenciales, las cuales pueden ser clasificadas en dos clases.

- Sistemas dinámicos disipativos, que presentan algún tipo de fricción (amortecimiento) tal que, debido a la pérdida de energía, entonces el sistema dinámico se comporta como un atractor, recordando que en la naturaleza, prácticamente todos los sistemas presentan disipación.
- Sistemas dinámicos conservativos o hamiltonianos, que no presentan cualquier tipo de pérdida de energía, como por ejemplo, evolución del sistema solar, sistemas cuánticos, etc.; esos sistemas no presentan atractores, la evolución de esos sistemas es fuertemente dependiente de las condiciones iniciales.

### **3.2 Sistemas Caóticos**

Los sistemas caóticos son los sistemas que presentan un comportamiento imprevisible a largo plazo, originado por un sistema dinámico no lineal, debido a la dependencia sensible a las condiciones iniciales.

Se debe mencionar que un sistemas dinámico determinístico no lineal, es perfectamente previsible cuando existe perfecto conocimiento de las condiciones iniciales, y en la verdad en la práctica es siempre previsible en un corto espacio de tiempo. La razón de la imprevisibilidad a largo plazo es una propiedad conocida como dependencia sensible a largo plazo, es una propiedad conocida como dependencia sensible a las condiciones iniciales. Por lo tanto, por mas preciso que se el conocimiento del estado inicial, el comportamiento a largo plazo de un sistema caótico es imposible de ser previsto. Es claro que, en teoría, se fuese posible especificar la condición inicial con precisión infinita, la trayectoria podría ser prevista exactamente. Es esta imprevisibilidad que hace aparentar un sistema caótico como un comportamiento aleatorio.

Existen varios métodos para caracterizar el caos de una serie temporal. En este trabajo son presentados los conceptos más importantes para el análisis de sistemas dinámicos. Entre ellos están: diagrama de bifurcación, sección de Poincaré, las bacías de atracción, y los exponentes de Lyapunov.

### 3.3 Diagramas de Bifurcación – 2DOF

Todo sistemas dinámico que describe un sistema dinámico físico real depende de parámetros llamados parámetros de control, por lo tanto, un sistema dinámico puede ser una función del parámetro de control. Entonces, la bifurcación es el estudio del comportamiento de un sistema mediante la variación de parámetros, siendo el sistema dinámico expresado de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, y, \mu) = f_{\mu}(x, y) \\ \dot{y} &= g(x, y, \mu) = g_{\mu}(x, y)\end{aligned}\tag{3.1}$$

Donde  $\mu$  es en parámetro de control, siendo ahora un sistema dinámico dependiendo del parámetro  $\mu$ .

#### 3.3.1 Bifurcaciones Locales

La bifurcación local se refiere al cambio cualitativo del sistema dinámico en las vecindad de los puntos de equilibrio, como consecuencia de la variación del parámetro de control.

##### a) Bifurcación Sela-Nodo o de Dobla (Fold)

La bifurcación sela-nodo se relaciona con la creación y destrucción de puntos fijos, considerándose un sistema dinámico:

$$\dot{x} = f_{\mu}(x) = \mu - x^2\tag{3.2}$$



Donde  $\mu$  es el parámetro de control,  $(\mu, x) = (0, 0)$  es el punto de retorno, y donde los puntos de equilibrio de este sistema están dado por:

$$f(\bar{x}; \mu) = \mu - \bar{x}^2 = 0$$

Entonces,  $\bar{x} = \pm\sqrt{\mu}$

El estudio de la estabilidad de la ecuación (3.2) esta relacionado al sistema de  $df/dx$ , calculado en el equilibrio.

Linealizando el sistema la ecuación (3.2), se obtiene,

$$Df(\bar{x}) = -2\bar{x}$$

Entonces se tiene que:

Se  $\bar{x} = +\sqrt{\mu} > 0 \rightarrow Df < 0 \rightarrow$  Estable

Se  $\bar{x} = -\sqrt{\mu} < 0 \rightarrow Df > 0 \rightarrow$  Inestable

La condición de la estabilidad es  $\left(\frac{df(\bar{x})}{d\bar{x}}\right)_{equil.} < 0$

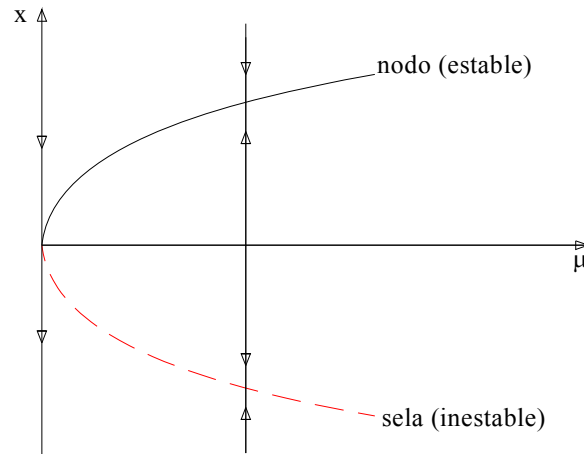
Y los puntos de equilibrio son  $+\sqrt{\mu}$  y  $-\sqrt{\mu}$ , entonces:

$\mu < 0 \rightarrow$  No existe punto fijo

$\mu = 0 \rightarrow$  Existe punto fijo (punto de bifurcación)

$\mu > 0 \rightarrow$  Existen dos puntos fijos.

El resultado de este análisis de estabilidad es mostrado en la figura siguiente:



*Fig. 3.1: Bifurcación sela-nodo.*

**b) Bifurcación Transcrítica**

Considérese la ecuación

$$\dot{x} = f_{\mu}(x) = \mu x - x^2 \quad (3.3)$$

Este tipo de bifurcación está relacionado a situaciones físicas donde un punto de equilibrio no puede ser destruido, situaciones en que dos puntos de equilibrio deben existir para todos los valores de un parámetro, aun la estabilidad de esos puntos cejan cambiados cuando el parámetro pasa por el valor crítico.

La bifurcación transcítica es el mecanismo asociado a ese tipo de cambios, donde altera las características asociadas a la estabilidad debido a la variación del parámetro de control.

Los puntos de equilibrio son:  $\bar{x} = 0$ , y  $\bar{x} = \mu$  para cualquier valor de  $\mu$ .

Podemos analizar la estabilidad de esos puntos investigando el signo de:

$$\frac{df}{dx} = \mu - 2x \quad (3.4)$$

Aplicando el criterio de estabilidad, en los puntos de equilibrio, entonces tendremos:

1.- Para  $\bar{x} = 0$ .

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{\bar{x}=0} = \mu$$

Entonces tenemos para:

- $\mu < 0$ , es asintóticamente estable.
- $\mu > 0$ , es estable.

2.- Para  $\bar{x} = \mu$ .

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{\bar{x}=\mu} = -\mu$$

Entonces tenemos para:

- $\mu > 0$ , es asintóticamente estable.
- $\mu < 0$ , es inestable.

Ha cambiado de estabilidad cuando el parámetro de control pasa por  $\mu=0$ ; ese tipo de bifurcación es llamado de *bifurcación trascrítica*.

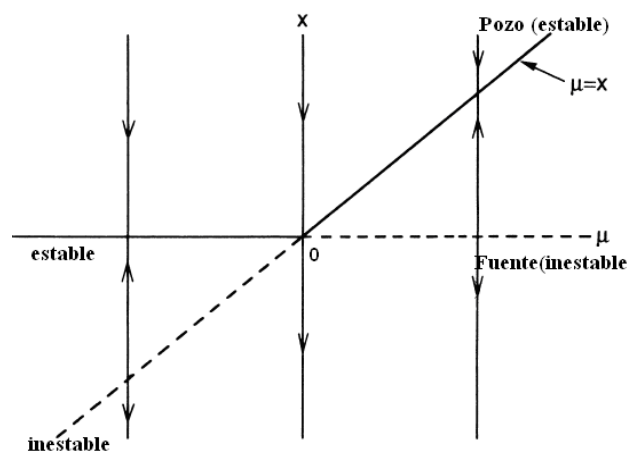


Figura 3.2: Bifurcación trascrítica.

### c) **Bifurcación Horquilla (Pitchfork)**

Las bifurcaciones de horquilla aparecen en sistemas físicos que presentan algún tipo de simetría. En tales sistemas, un par de puntos de equilibrio de misma estabilidad puede aparecer o desaparecer simultáneamente, cuando el parámetro de control pasa por un valor crítico.

- **Bifurcación de Horquilla Supercrítica**

La forma normal de bifurcación de horquilla supercrítica es notado considerándose la ecuación:

$$\dot{x} = f_{\mu}(x) = \mu x - x^3 \quad (3.5)$$

Se tiene los puntos de equilibrio:

$$\bar{x} = 0 \text{ e } \bar{x} = \pm\sqrt{\mu}$$

Se Analiza la estabilidad de esos puntos investigando el signo de:

$$\frac{df}{dx} = \mu - 3x^2 \quad (3.6)$$

Aplicando el criterio de estabilidad en los puntos de equilibrio, entonces tenemos:

1.- Para  $\bar{x} = 0$ .

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{\bar{x}=0} = \mu$$

- $\mu < 0$ , es asintóticamente estable.
- $\mu > 0$ , es inestable.

2.- Para  $\bar{x} = \sqrt{\mu}$ .

Existe solamente para  $\mu > 0$ .

- $\mu > 0$ , es asintóticamente estable.

3.- Para  $\bar{x} = -\sqrt{\mu}$ .

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{\bar{x}=-\sqrt{\mu}} = -2\mu$$

Existe solamente para  $\mu > 0$ .

- $\mu > 0$ , es asintóticamente estable.

Entonces ambas ramas son estables para  $\mu > 0$ , por lo tanto hay una bifurcación en la forma de una horquilla, de ahí el nombre de bifurcación de horquilla.

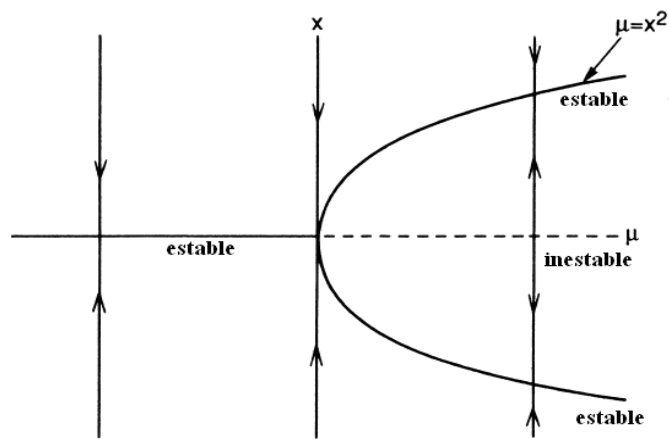


Figura 3.3: Bifurcación de horquilla supercrítica.

- **Bifurcación Horquilla Subcrítica**

La forma normal de la bifurcación de horquilla subcrítica es:

$$\dot{x} = f_{\mu}(x) = \mu x + x^3 \quad (3.7)$$

Se tiene los puntos de equilibrio:

$$\bar{x} = 0 \text{ e } \bar{x} = \pm\sqrt{-\mu}, \text{ para } \mu > 0.$$

Se analiza la estabilidad de esos puntos investigando el signo de:

$$\frac{df}{dx} = \mu + 3x^2 \quad (3.8)$$

Aplicando el criterio de estabilidad, en los puntos de equilibrio, entonces tendremos:

1.- Para  $\bar{x} = 0$ .

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{\bar{x}=0} = \mu$$

- $\mu < 0$ , es asintóticamente estable.
- $\mu > 0$ , es inestable.

2.- Para  $\bar{x} = \sqrt{-\mu}$ .

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{\bar{x}=\sqrt{-\mu}} = -2\mu$$

Existe solamente para  $\mu < 0$ .

- $\mu < 0$ , es inestable.

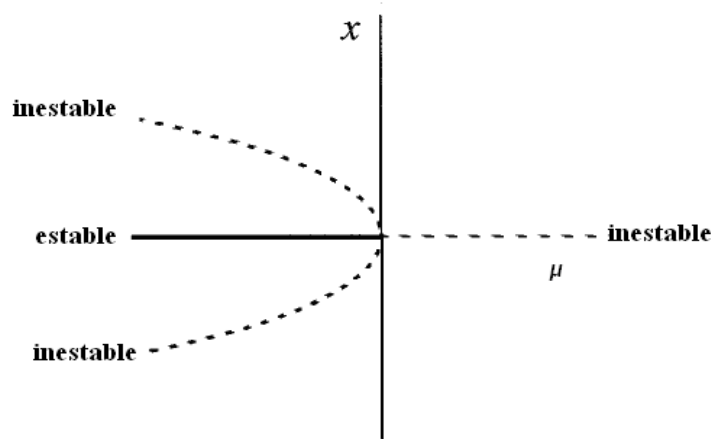
3. - Para  $\bar{x} = -\sqrt{\mu}$ .

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{\bar{x}=-\sqrt{\mu}} = -2\mu$$

Existe solamente para  $\mu < 0$ .

- $\mu < 0$ , es inestable.

Entonces ambas ramas son estables para  $\mu > 0$ , por lo tanto, se tiene una bifurcación en la forma de horquilla, de ahí el nombre de bifurcación supercrítica de horquilla.



*Figura 3.4: Bifurcación de horquilla subcrítica.*

**d) Bifurcación de Andronov-Hopf**

Este tipo de bifurcación está asociado al cambio de la dimensión del atractor, es el caso en que un punto singular, deja de ser hiperbólico por poseer auto-valores imaginarios puros. En este caso, ocurre una bifurcación de Hopf. Este tipo de bifurcación es muy interesante, pues simultáneamente a la pérdida de estabilidad del punto singular, ocurre la creación de un ciclo límite que envuelve este punto. La bifurcación de Hopf es muy estudiada, presentando aplicaciones en diversas áreas, tales como hidrodinámica, meteorología, economía, biología, entre otros.

Considerando un sistema del tipo,



$$\begin{aligned} \dot{x} &= y + x(\mu - (x^2 + y^2)) \\ \dot{y} &= -x + y(\mu - (x^2 + y^2)) \end{aligned} \quad (3.9)$$

El único punto singular de equilibrio es dado en el origen  $(0, 0)$ , para cualquier valor del parámetro  $\mu$ . Note que para  $\mu < 0$ , existe un punto de equilibrio estable en cero. Para  $\mu > 0$ , este punto pasa a ser inestable, surgiendo un atractor de ciclo límite.

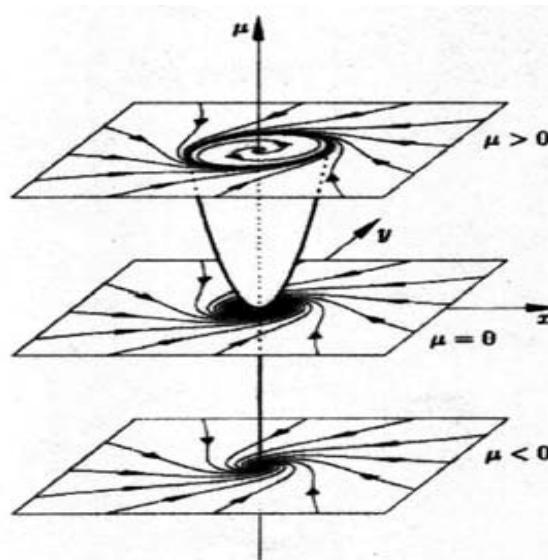


Figura 3.5: Bifurcación de Hopf (Savi, 2004).

Luego, podemos concluir,

- Si  $\mu < 0$ , el origen es un foco atractor.
- Si  $\mu > 0$ , el origen es un foco repulsor.
- Para  $\mu = 0$ , nada se puede concluir a través de la linealización, pues el punto singular deja de ser hiperbólico.

### **3.3.2 Bifurcaciones Globales**

Las bifurcaciones globales representan cambios cualitativos en los aspectos globales del flujo de un sistema dinámico, a partir de la variación de un parámetro de control, en el sistema puede ocurrir una variación en la estructura de las órbitas.

Existe una gran variedad de tipos de bifurcaciones globales, este tipo de bifurcación es típico de sistemas dinámicos disipativas en la cual el cambio de uno de sus parámetros de control promueve la bifurcación global, modificando los tipos de los puntos de equilibrio; para el caso de las ecuaciones de movimiento no lineal, modelo propuesto por Rodríguez (Rodríguez, 2004), las bifurcaciones globales serán mostrados en el capítulo 4.

### **3.4 Mapeamiento de Poincaré**

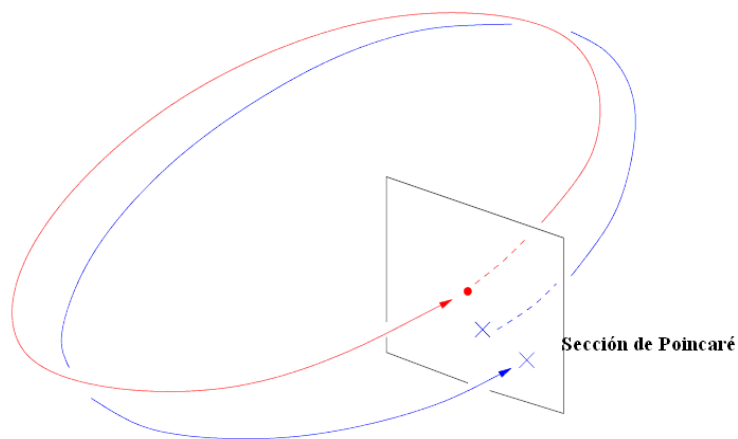
Uno de los fenómenos no lineales más intrigantes es el comportamiento caótico que fue vislumbrado por Poincaré, quien fue el primero en demostrar que el problema de los tres cuerpos no admite solución conocida. Él verificó que, en ciertas circunstancias, el comportamiento del sistema se tornaba increíblemente complejo y que cualquier intento de representar tal movimiento por soluciones periódicas era cualitativamente errado. Además, una de las contribuciones conceptuales de Poincaré fue afirmar la necesidad de métodos cualitativos en el estudio de sistemas dinámicos. El trabajo de Poincaré es considerado por muchos como el inicio de la moderna dinámica no lineal.

Unos de estos métodos cualitativos es el mapeamiento de Poincaré, el enfoque utilizado por Poincaré es utilizar un hiper-plano perpendicular al ciclo límite de la órbita del atractor que maximice el número de puntos de la órbita cruzándolo, y que también minimice el intervalo de tiempo entre dos puntos sucesivos en la mapa de Poincaré, Savi (2004), Rothman (2005). Así poder obtener el máximo de informaciones, con vista a la interpretación de los resultados, propiedades generales (topológicas) de la solución, tales como, estabilidad, periodicidad de la dinámica del buque gobernada por la ecuación analizada.

Mapeamiento de Poincaré es un procedimiento a través del cual es posible reducir un sistema dinámico continuo en el tiempo (flujo) a un sistema discreto (mapa). Este procedimiento elimina por lo menos una variable del problema. Esta transformación posibilita una mejor comprensión de la dinámica global del sistema.

No existe un método general para construcción de una sección de Poincaré, pero existe algún padrón. Una forma ya considerada padrón de generar un mapa asociado a una dinámica de flujo continuo es la de utilización de secciones de Poincaré. La idea consiste en utilizar un hiper-plano de dimensión  $m-1$  para seccionar el atractor. La órbita del atractor irá cruzar ese hiper-plano, marcando puntos en el, en el paso siguiente, se creará una nueva serie temporal a partir de los puntos que cruzan el hiper-plano, adecuadamente escogida según su orientación. Cada elección define una serie temporal diferente. El arte de obtener el máximo de informaciones, con vista a la interpretación de los resultados, consiste en escoger la orientación del hiper-plano que maximice el número de puntos de la órbita cruzándolo y que también minimice

el intervalo de tiempo entre dos puntos sucesivos en el mapa de Poincaré. La manera usual de hacer la elección optimizada consiste en localizar los máximos y mínimos de la serie temporal original que permite reconstruir el atractor y construir con el mapa de Poincaré. Los puntos sobre el hiper-plano definen el mapa.



*Figura 3.6: Mapeamiento de Poincaré.*

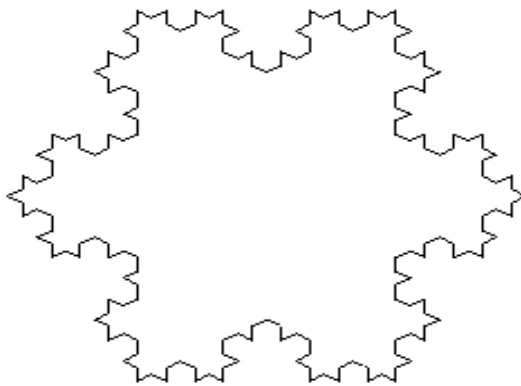
### 3.5 Bacías de Atracción

#### 3.5.1 Dimensión Fractal

Hace mucho tiempo los matemáticos y los geométricos tienen caracterizado los elementos geométricos como el punto, curva, e las superficies en términos de su dimensión topológica; con base en esa definición, se dice que el punto tiene dimensión cero, la recta tiene dimensión uno, y el plano tiene dimensión dos, y el espacio (generalmente) tiene dimensión tres. No en tanto, existen geometrías que escapan de esta definición, para la cual se usa el concepto de fractal, la cual puede asumir

valores fractales, en vez apenas de números enteros. Se puede afirmar que la dimensión fractal de un conjunto es un valor que dice cuán densamente un conjunto ocupa el espacio métrico en que el existe.

Una de las maneras de definir la dimensión fractal es dividir la dimensión básicamente en dos grupos, un grupo que depende solamente de propiedades geométricas, llamada de dimensión fractal o dimensión métrica; y el otro grupo, que depende no solo de propiedades geométricas, pero de propiedades probabilísticas, llamado de dimensión de medida natural o dimensión probabilística.



*Figura 3.7: Fractal, curva de Von Koch.*

### **3.5.2 Atractores**

Un atractor es la región para donde que evolue el sistema dinámico, cuando el número de iteraciones tiende para el infinito; atractores solo pueden darse en sistemas disipativas; un atractor puede ser definido como el conjunto

de comportamientos característicos para el cual evolue un sistema dinámico independientemente del punto de partida.

Un ejemplo de atractor es un péndulo en movimiento. En su balanceo, siempre tenderá a convergir para una oscilación cuyo periodo es constante, esto es, el atractor es la órbita de periodo constante.

Un sistema dinámico puede evolucionar para:

- Atractor fijo, el cual es independiente del tiempo.
- Atractor periódico, que corresponde a oscilaciones periódicas en el tiempo, y es caracterizado por su amplitud y periodo. Quiere decir que cicla periódicamente en una secuencia ordenada dentro del espacio de fase.
- Atractor extraño, es un sistema dinámico que presenta dependencia a las condiciones iniciales, vide Rothman (2005), el sistema dinámico determinístico cuya evolución con el tiempo, conduce a un comportamiento asintótico, el cual implica en la existencia del atractor extraño. Un atractor extraño es un fractal, un objeto geométrico de dimensión no entera y posee una estructura auto-similar que repite estáticamente en todas las escalas de magnitud.

Algunos ejemplos de atractores extraños son mostrados:

a) **Atractor del tipo Lorenz**

El atractor de Lorenz, ya fue introducido en el capítulo 1 corresponde a:

$$\begin{aligned}\dot{X} &= -\sigma(X - Y) \\ \dot{Y} &= rX - Y - XZ \\ \dot{Z} &= XY - bZ\end{aligned}\quad (3.10)$$

Con:  $\sigma=16.0$ ,  $r=32.36$ ,  $b=4.0$

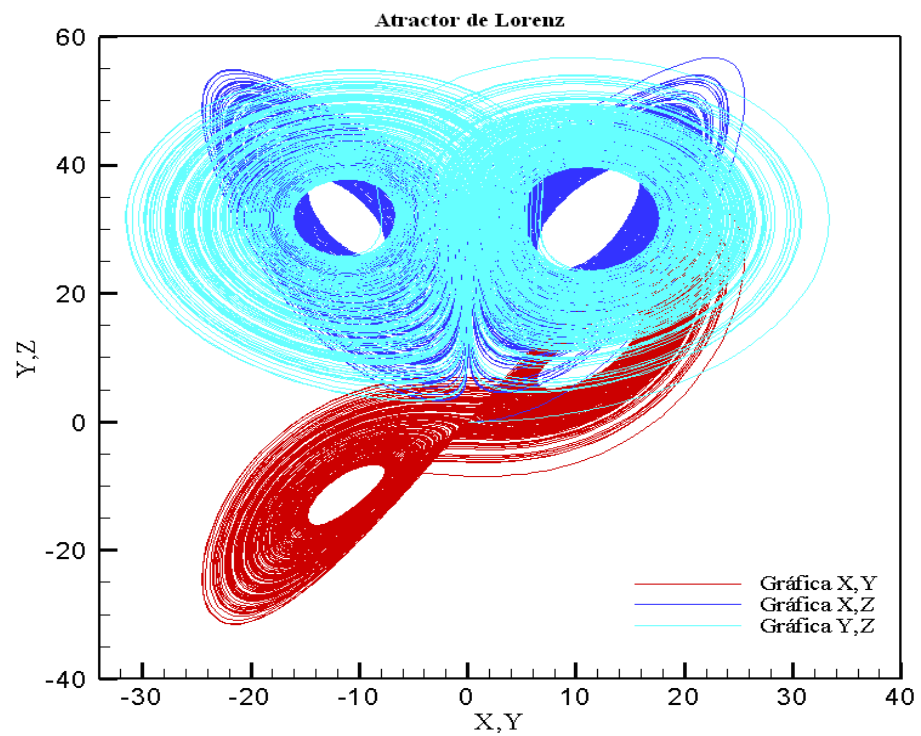


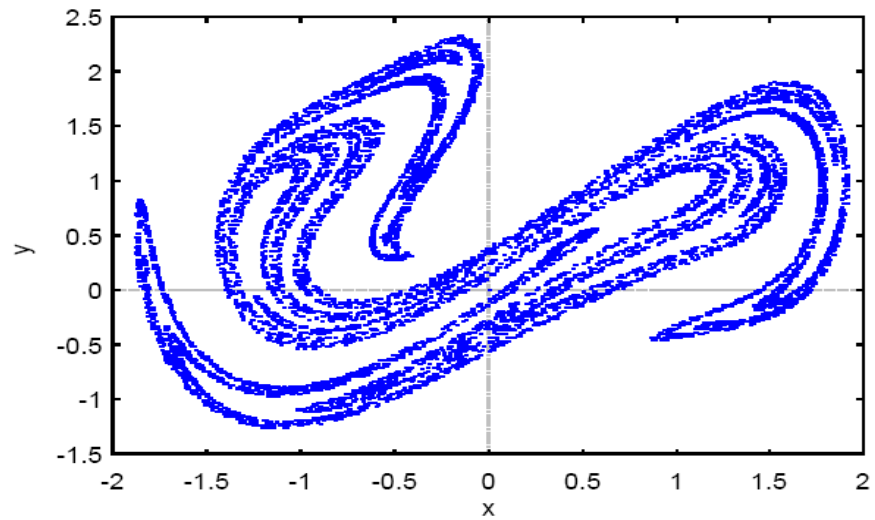
Figura 3.8: Atractores de Lorenz.

b) **Atractor de Duffing**

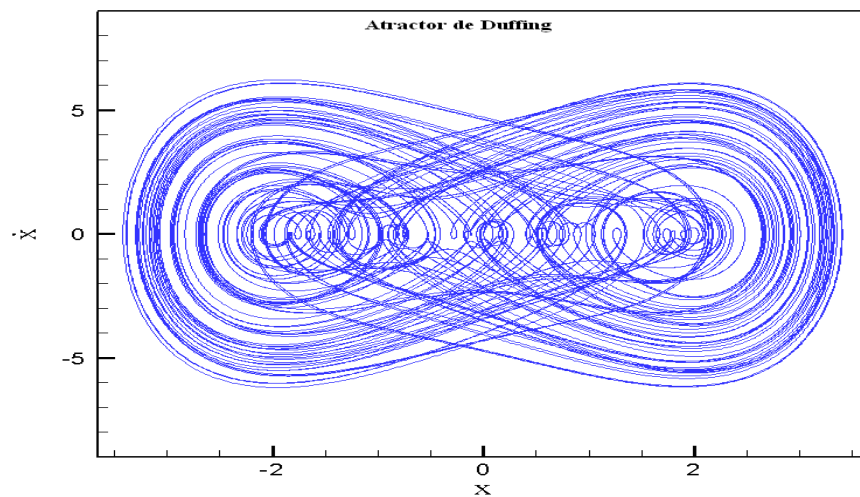
Considerando la ecuación de Duffing,

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -\alpha y - w_0^2 x - \beta x^3 + \mu \text{sen}(\Omega t)\end{aligned}\quad (3.11)$$

Siendo los parámetros que definen el comportamiento del sistema, por ejemplo,  $\alpha = 0.05$ ,  $w_0^2 = -0.2$ ,  $\beta = 1$ ,  $\Omega = 1$ , y con  $\mu = 7.5$ , a continuación se muestra el atractor de Duffing.



*Figura 3.9: Atractor de Duffing (Savi, 2004).*



*Figura 3.10: Espacio de Fase de Duffing.*

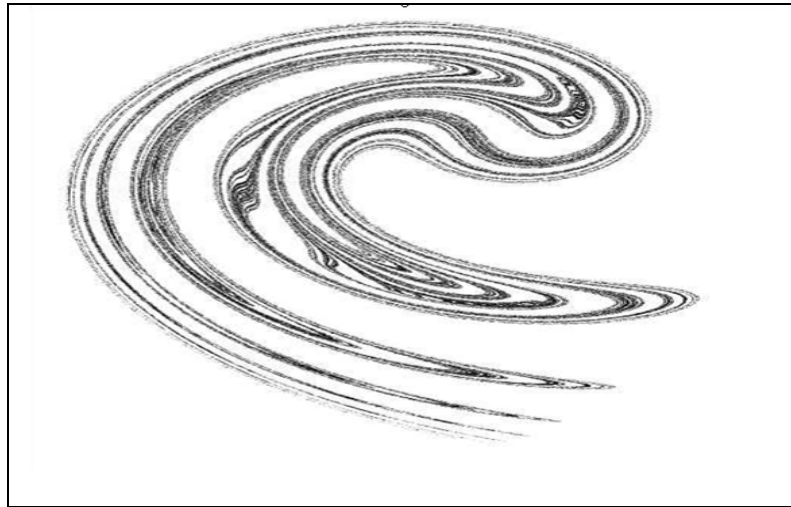
### c) Atractor de Ikeda

Considérese el mapa de Ikeda,



$$\begin{aligned}
 X_{n+1} &= p + B(X_n \cos(\tau) - Y_n \sin(\tau)) \\
 Y_{n+1} &= B(X_n \sin(\tau) + Y_n \cos(\tau)) \\
 \tau &= k - \frac{\alpha}{1 + x^2 + y^2}
 \end{aligned}
 \tag{3.12}$$

Para:  $p=1$ ,  $B=0.9$ ,  $k=0.4$ ,  $\alpha=6$ , en este caso,



*Figura 3.11: Atractor de Ikeda.*

### 3.5.3 Bacías de Atracción

Bacías de atracción son regiones en el espacio asociados a un atractor. Muchos de los sistemas dinámicos presentan más que un resultado, dependiendo de las condiciones iniciales, vide Belenky y Sevastianov (2003). La bacía de atracción es el conjunto de todos los puntos de partida (valores iniciales) que convergen para el atractor, vide Chumbiao *et al.* (1998). Bacías de atracción son regiones del espacio de fase de donde parten trayectorias que llevan a un determinado atractor.

### 3.6 Exponentes de Lyapunov

#### 3.6.1 Definición

Una evolución caótica puede ser vista como resultado de la combinación de doblas en un número finito de expansiones en una dirección y tracciones en otras direcciones (herradura de Smale), por lo que es muy difícil, sino imposible en la práctica, poder seguir la evolución del flujo en comportamiento caótico, cuando la divergencia de trayectorias próximas se torna rápida (Fiedler-Ferrara y Prado, 1994).

Para poder medir la tasa de convergencia o de divergencia de una trayectoria, bien como también cuantificar la dependencia del sistema dinámico de las condiciones iniciales, se utilizan los exponentes característicos de Lyapunov.

#### 3.6.2 Cálculo de los exponentes de Lyapunov

Considérese el sistema de  $m$  ecuaciones diferenciables ordinarios y un pequeño hiper-volumen esférico de estados iniciales vecinos  $y_0$  y con radio  $\varepsilon_0(x_0)$ , en torno de un punto  $x_0$  inicial de una línea de flujo:  $|y_0 - x_0| \leq \varepsilon_0(x_0)$ . Con el pasar de tiempo aquel hiper-volumen, se deforma en un objeto hiper-elipsoide teniendo como ejes principales  $\varepsilon_k(t)$ , para  $k=1,2,3,\dots,m$ ; para ese caso los exponentes de Lyapunov, miden el crecimiento exponencial de los ejes  $\varepsilon_k(t)$ . Los exponentes de Lyapunov pueden ser definidos como:

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon_0(x_0 \rightarrow 0)} \frac{1}{t} \ln \frac{\varepsilon_i(t)}{\varepsilon_0(x_0)}, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (3.13)$$

En general los  $\lambda_i$  depende del estado inicial  $x_0$ , pero pueden mantenerse constantes al largo de una región del espacio de fase, como es en caso del ciclo límite.

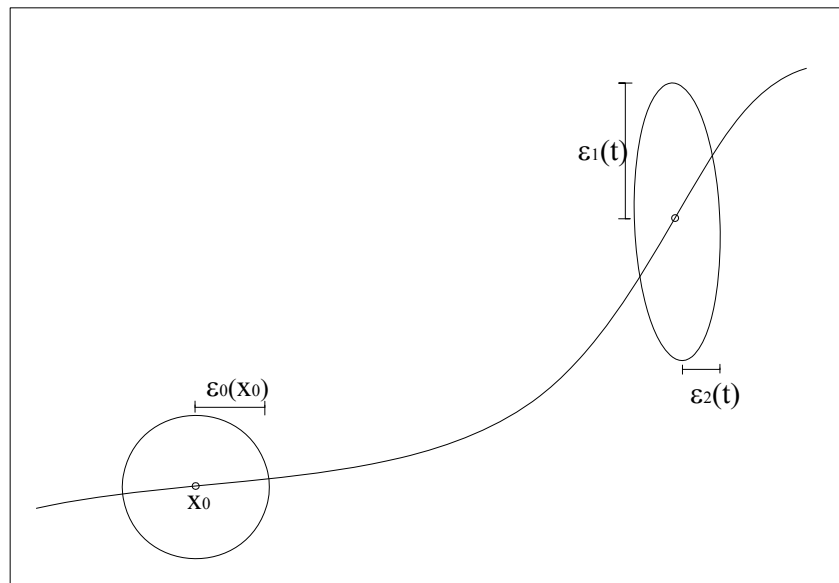


Figura 3.12: Evolución del volumen esférico con el tiempo.

La variación de esa esfera con el decorrer del tiempo puede ser definida de la siguiente forma:

$$\varepsilon_i(t) \approx \varepsilon_0(x_0) e^{\lambda_i t} \quad (3.14)$$

En un instante  $t$  el elemento de hiper-volumen en el espacio de fase puede ser expresado como:

$$\partial V(t) = \prod_{i=1}^m \varepsilon_i(t) \quad (3.15)$$

De las ecuaciones (3.12) en (3.13), tenemos:

$$\partial V(t) = \partial V(0) \exp\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i t\right) \quad (3.16)$$

Existen dos situaciones para las cuales el hiper-volumen del espacio de fase no diverja:

- cuando  $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 0$ , entonces  $\partial V(t) = \partial V(0)$ , el sistema dinámico es

conservativo.

- cuando  $\sum_{i=1}^m \lambda_i < 0$ , entonces  $\partial V(t) < \partial V(0)$ , el sistema dinámico es

disipativo.

Es posible determinar e tipo de atractor por el signo de los exponentes de Lyapunov. Por ejemplo, en un espacio de fase tridimensional ( $m=3$ ):

- Punto fijo: en este caso los valores de los exponentes de Lyapunov son negativos  $(-, -, -)$ , por el que las trayectorias de convergencia de un único punto.
- Ciclo limite: para este caso tenemos uno de los exponentes de Lyapunov igual a cero  $(-, -, 0)$  en la dirección a lo largo de la trayectoria.
- Toro  $T^2$ : en este caso existen dos trayectorias al pargo de las cuales se procesan desplazamiento  $(0, 0, -)$ .

- Atractor Extraño: donde uno de los exponentes de Lyapunov debe ser positivo, considerando la existencia de la sensibilidad de las condiciones iniciales, a lo largo de la trayectoria, se asociada un exponente nulo, para un sistema disipativo, entonces la desigualdad

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i < 0 \text{ es valida, luego el último exponente de Lyapunov es}$$

negativo, por lo tanto quedará (+,0,-).

Podemos tomar como ejemplo a la ya mencionada ecuación de Lorenz, para poder analizar lo citado arriba.

$$\begin{aligned} \dot{X} &= -\sigma(X - Y) \\ \dot{Y} &= rX - Y - XZ \\ \dot{Z} &= XY - bZ \end{aligned} \quad (3.17)$$

Tomando los valores para los parámetros  $\sigma=10$ ,  $r=5$ ,  $b=4$ , podemos constatar que para todos los exponentes de Lyapunov negativos obtenemos punto fijo conforme es mostrado en la figura 3.13.

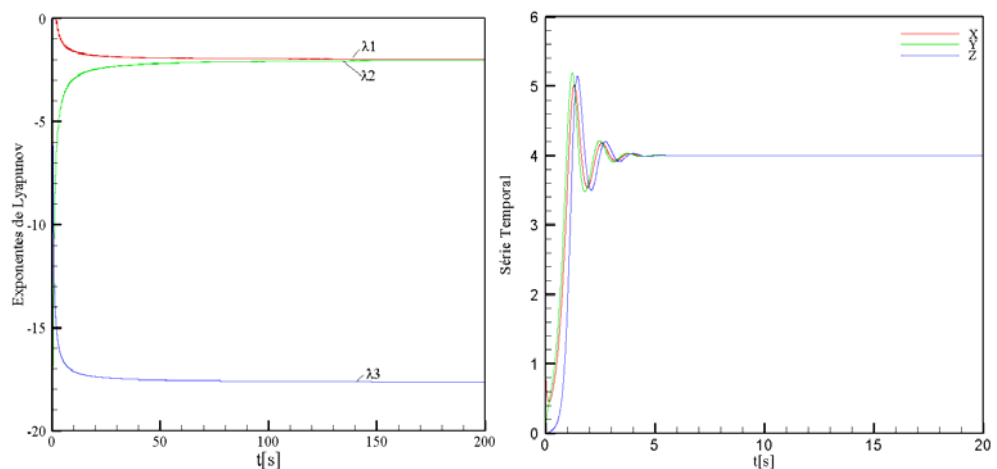


Figura 3.13: Exponentes de Lyapunov y la serie temporal, punto fijo.

Tomando los valores para los parámetros  $\sigma=16$ ,  $r=34$ ,  $b=4$  en la ecuación de Lorenz, podemos constatar que para los exponentes de Lyapunov (+,0,-), Zeng *et al.*, (1991), obtenemos atractor extraño, conforme mostrado en la figura 3.14, Srinivasan *et al.*, (2005).

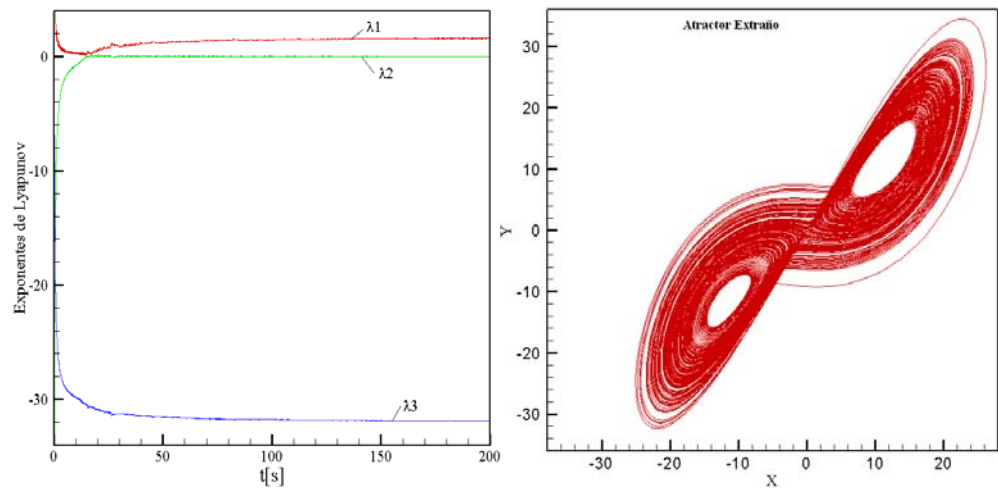


Figura 3.14: Exponentes de Lyapunov y atractor extraño.

En la figura 3.15 son mostrados los exponentes de Lyapunov para el mapa logístico, en la cual se puede observar que en los puntos de bifurcación el exponente es nulo, e negativo en las regiones periódicas, como también en las ventanas de periodicidad, positivo para regiones caóticas.

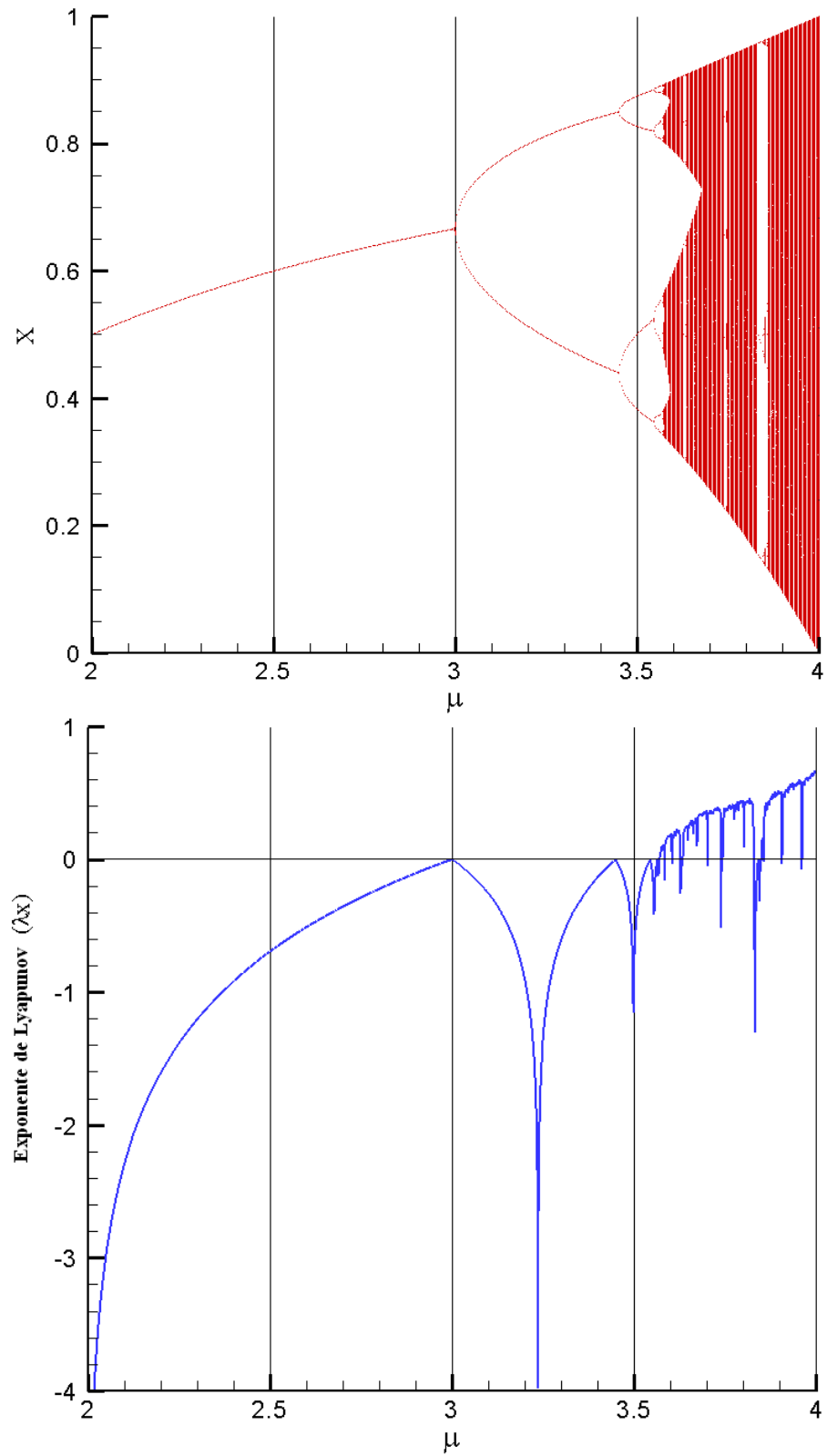


Figura 3.15: Bifurcación y los exponentes de Lyapunov para el mapa logístico.

### **3.6.3 Cálculo de los Exponente de Lyapunov por el Método de las trayectorias – Método de Wolf**

Muchas ecuaciones no lineales son modelos matemáticos de sistemas físicos difíciles de ser analizados, sistemas no estables o de comportamiento complejo. Tal es el caso de las ecuaciones de movimiento no lineal propuesto en este trabajo; el estudio de estos sistemas puede ser hecho mediante la utilización de la teoría de los sistemas caóticos. Teniendo como las principales características de los sistemas caóticos la sensibilidad a las condiciones iniciales, caracterizando un comportamiento aperiódico, dentro de los principales métodos para caracterizar un sistema caótico, se destaca los exponentes de Lyapunov.

Para medir la tasa de divergencia de las trayectorias, e por lo tanto cuantificar la dependencia sensitiva a las condiciones iniciales, se utiliza los exponentes de Lyapunov. La significancia del concepto de los exponentes de Lyapunov es que este puede ser aplicado a órbitas no periódicas.

Una característica de órbitas es la sensibilidad a la condición inicial, o sea, la eventual separación de las órbitas de puntos próximos a la condición inicial a la medida que el sistema evolue. De hecho, la definición de una órbita caótica es aquella que no tiende a la periodicidad asintótica y cuyo exponente de Lyapunov es mayor que cero. Los exponentes de Lyapunov miden la tasa de separación de puntos futuros de la trayectoria originada en



puntos próximos, formándose volúmenes deformados a lo largo de  $m$  direcciones ortogonales.

Para la determinación de los exponentes de Lyapunov en series temporales, existen dos métodos disipativos: el método de las trayectorias o del espacio real, y el método de las perturbaciones o de los espacios tangentes, Sano e Sawada (1985), Eckmann *et al.* (1986), Chen *et al.* (2006), el cual también es llamado de método de la matriz jacobiana, Savi (2004).

El método de las trayectorias tiene como idea básica la evolución de la distancia entre puntos próximos, de dos trayectorias inicialmente muy próximas. Este método, posibilita el cálculo de todos los exponentes Lyapunov, pero en realidad si el mayor exponente o exponente dominante fuera positivo, eso es suficiente para caracterizar el comportamiento caótico de un dado sistema; este método fue inicialmente desarrollado por Wolf *et al.* (1985).

El algoritmo propuesto por Wolf *et al.* (1985), hace que el abordaje de la evolución temporal de la dinámica del espacio de fase y en el espacio de las ecuaciones linearizadas. Es un procedimiento que permite la estima de los exponentes de Lyapunov no negativo a partir de una serie temporal. En un primer momento calculase el mayor exponente positivo ( $\lambda_1$ ) y después se calcula el segundo mayor exponente positivo ( $\lambda_2$ ), y así sucesivamente.

El método se basa en el acompañamiento de las distancias entre puntos convenientemente seleccionados y la trayectoria de referencia, Fiedler-Ferrara e Prado (1994). Sea esa trayectoria descrita por los puntos  $y(t_0), y(t_1), y(t_2) \dots y(t_\infty)$ . Sea  $Z_0(t_0)$  el vecino próximo de  $y(t_0)$ , y  $L_0$  la distancia entre  $y(t_0)$  e  $Z_0(t_0)$ , esto es,

$$L_0 = |y(t_0) - Z_0(t_0)| \quad (3.18)$$

Definiendo una hiper-esfera de radio  $\varepsilon$  centrada en  $y(t_0)$ , de modo que  $Z_0(t_0)$  este contenida en esta hiper-esfera, esto es,

$$L_0 = |y(t_0) - Z_0(t_0)| < \varepsilon \quad (3.19)$$

Entonces se acompaña la evolución temporal de  $y(t_0)$  e  $Z_0(t_0)$  hasta que en un instante  $t_1$  la distancia entre esos puntos,  $L'_0$ , excede  $\varepsilon$ . En ese instante se sustituye  $Z_0$  por un nuevo vecino, más próximo de  $y(t_1)$ , que este en la dirección del segmento  $L'_0$  y tal que,

$$L_1 = |y(t_1) - Z_1(t_1)| < \varepsilon \quad (3.20)$$

El proceso prosigue hasta que todos los puntos de  $y(t_i)$  hayan sido recorridos. El mayor exponente de Lyapunov positivo es obtenido como la

media de  $\log_2 (L'_i / L_i)$  a lo largo de la trayectoria de referencia, esto es, dado por,

$$\lambda_1 = \frac{1}{t_m - t_0} \sum_{i=0}^m \log_2 \frac{L'_i}{L_i} \quad (3.21)$$

Donde  $m$  es el número total de veces que se escoge un nuevo vecino próximo a la trayectoria de referencia, este procedimiento es representado en la figura 3.16. En el caso en que la selección del nuevo vecino situado en la dirección del segmento  $L'_{i-1}$  no sea posible, se adopta en ese caso la selección de un punto que este contenido en un cono de altura  $\varepsilon$ , con un ángulo de abertura  $\theta = \pi/9$  y cuyo eje de sistema coincida con el segmento  $L'_{i-1}$ , figura 3.17. Y si ningún punto fuese encontrado, se aumenta el ángulo  $\theta$ . En último caso, el vecino más próximo es escogido, independiente de los valores de  $\theta$  e  $\varepsilon$ .

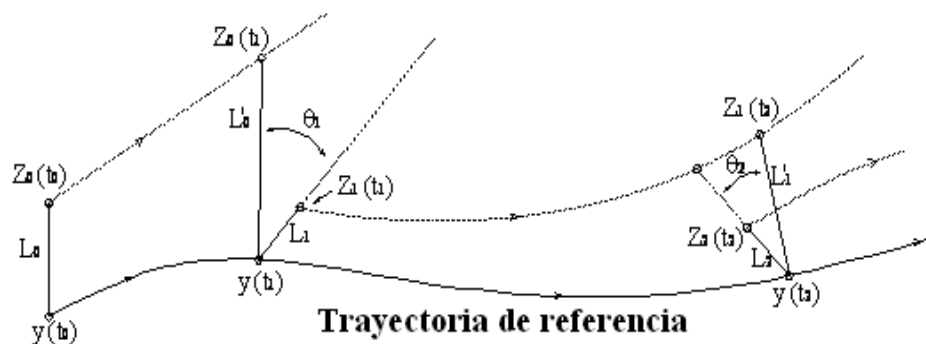


Figura 3.16: Representación esquemática del modelo propuesto por Wolf et al. para el cálculo del mayor exponente de Lyapunov.

Para el cálculo del segundo exponente de Lyapunov, el procedimiento es análogo. Dos puntos vecinos al punto  $y(t_i)$  de la trayectoria de referencia son escogidos, a seguir se monitorea la evolución del área correspondiente al triángulo formado por estos tres puntos. Como en procedimiento anterior, a cada paso, dos nuevo puntos vecinos son seleccionados, buscando preservar la orientación del área del triángulo, figura 3.18.

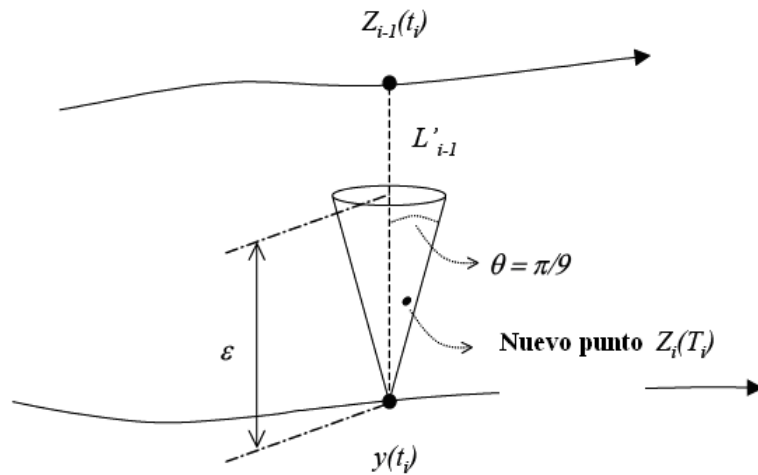


Figura 3.17: Representación esquemática del criterio para selección de puntos vecinos.

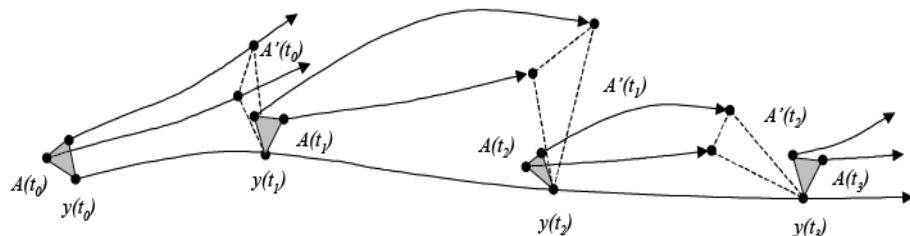


Figura 3.18: Representación esquemática del método de Wolf para el cálculo del segundo exponente de Lyapunov.

## CAPÍTULO 4

### RESULTADOS Y ANÁLISIS

*Con el objetivo de evidenciar los fenómenos propios de las no linealidades y las complejas características del comportamiento dinámico de buques en condiciones de resonancia paramétrica, se procede al análisis para el buque pesquero Transom Stern (TS) para dos sintonías ( $w_e/w_{n4}$ ) próximas, y su posterior comparación entre ellas.*

*Este capítulo es dedicado a mostrar los resultados del análisis utilizando técnicas avanzadas de análisis numérico. Junto con los desenvolvimientos, serán abordados los conceptos decurrentes de los resultados asociados a la dinámica de sistemas caóticos, y a la sensibilidad a las condiciones iniciales en el sistema dinámico de un buque pesquero Transom Stern (TS).*

#### **4.1 Diagrama de Bifurcación**

El análisis del comportamiento de la serie temporal y su sensibilidad al cambio del parámetro de control, la amplitud de la ola ( $A_w$ ), es de crucial importancia para la evaluación del comportamiento periódico de los modos (arfada, rolido, cabeceo) e las condiciones a las cuales, los diferentes modos llegan al comportamiento caótico y

la ruta que esta presenta; y qué tipo de comportamiento presenta sus divergencias periódicas y de la amplitud de las soluciones de los modos tratados.

La bifurcación es el estudio del comportamiento de un sistema, mediante la variación de parámetros. La teoría de la bifurcación es el estudio de las posibles alteraciones de su estructura del espacio de fase, vide Krishnaiah *et al.* (2002), de la forma cuantitativa de las soluciones de una ecuación diferencial, que depende de muchos parámetros, ecuaciones que modelan sistemas físicos. Y que en nuestro caso es la ecuación que gobierna el movimiento del buque, modelo no lineal propuesto por Rodríguez (2004). Una forma interesante de comprender este concepto es en el contexto de la pérdida de estabilidad estructural de un sistema. Esta es una forma amplia de conceptualizar las bifurcaciones. El diagrama de bifurcación ilustra el camino dinámico para el caos, la presencia de la catarata de duplicación de periodo que da origen a órbitas estables de periodo 1, 2, 4, 8, ..., y todos los números que son potencias de dos. Y como también son encontrados órbitas de número de periodo igual a tres, que corresponde a un escenario de coexistencia de atractores de diferentes periodicidades. Vale también observar que al final de la faja que lleva a los tres periodos, en sistema presenta intermitencia (caos), vide Pomeau e Manneville (1980), Chávez (2000). A partir de ahí, el diagrama de bifurcación se caracterizará por alternancia, y duplicación de periodo.

Construimos los diagramas bifurcación referente al modelo estudiado, en que el eje horizontal corresponde a los valores de la amplitud de la ola ( $A_w$ ) y el eje vertical a los valores de amplitud máxima en rolo ( $\phi$ ) en la solución permanente de la serie

temporal. Se toma la misma condición inicial y se genera la órbita para cada amplitud en rolo, correspondiendo a cada valor de la amplitud de la ola. Cierta número los primeros puntos de la órbita es descartada (respuesta transiente), para dar tiempo a que la órbita evolucione para su comportamiento final (respuesta permanente), esta sea una órbita periódica o caótica; se llama esto eliminar el transiente. Los valores de la amplitud en rolo ( $\phi$ ), asumido por la órbita a lo largo de un número bastante grande de iteraciones  $t=800$  seg., tiempo suficiente para poder desenvolverse la dinámica del sistema; tomando el valor correspondiente al valor de ( $\phi$ ) en la amplitud máxima.

Los diagramas de bifurcación que será mostrado son para dos sintonías y dos conjuntos de condiciones iniciales de los modos estudiados. Las ecuaciones del movimiento a estudiar será resuelto por el método de integración Runge Kutta de 4<sup>ta</sup> orden, para un número de Froude ( $F_n$ ) igual a 0.30,  $GM=0.37$  m,  $\kappa_i=180^\circ$ .

Cabe señalar que los diagramas de bifurcación en rolo, fueron obtenidos tomando el periodo correspondiente a la frecuencia de excitación, y no la frecuencia natural en la cual responde el movimiento en rolo, que viene a ser la mitad de la frecuencia de excitación. Por eso, en los diagramas de bifurcación, se puede visualizar la existencia de dos ramas de bifurcación, porque son tomados tanto los valores negativos como también los valores positivos para la creación de los diagramas de bifurcación para rolo. El mismo se podrá visualizar en el mapeamiento de Poincaré.

Las sintonías serán  $w_e/w_{n4} = 2.0$  y  $w_e/w_{n4} = 2.0$  y las condiciones iniciales serán:

$$\text{C.I.\#01: } z_0 = 0.0 \text{ m, } \dot{z}_0 = 0.01 \text{ m/s, } \phi_0 = 2 \text{ deg, } \dot{\phi}_0 = -0.5 \text{ deg/s, } \theta_0 = 0.0 \text{ deg,} \\ \dot{\theta}_0 = 0.01 \text{ deg/s.}$$

$$\text{C.I.\#02: } z_0 = 0.0 \text{ m, } \dot{z}_0 = 0.01 \text{ m/s, } \phi_0 = 2.5 \text{ deg, } \dot{\phi}_0 = -0.8 \text{ deg/s, } \theta_0 = 0.0 \text{ deg,} \\ \dot{\theta}_0 = 0.01 \text{ deg/s.}$$

Se puede observar que los resultados obtenidos para las dos sintonías ( $w_e/w_{n4}$ ) muy próximas, presentan diagramas con estructuras muy diferentes, consecuencia directa de las no linealidades y de la sensibilidad del sistema a pequeñas variaciones en el parámetro de control.

#### **4.1.1 Diagrama de Bifurcación $w_e/w_{n4} = 2.0$**

A seguir serán mostrados los diagramas de bifurcación para la sintonía de  $w_e/w_{n4} = 2.0$  y con las condiciones iniciales de C.I.#01 dadas arriba. Para esos datos son obtenidos los diagramas de bifurcación en las figuras 4.1, 4.2, 4.3, siendo que las figuras 4.2 y 4.3 corresponden a la amplitud de regiones del diagrama 4.1.

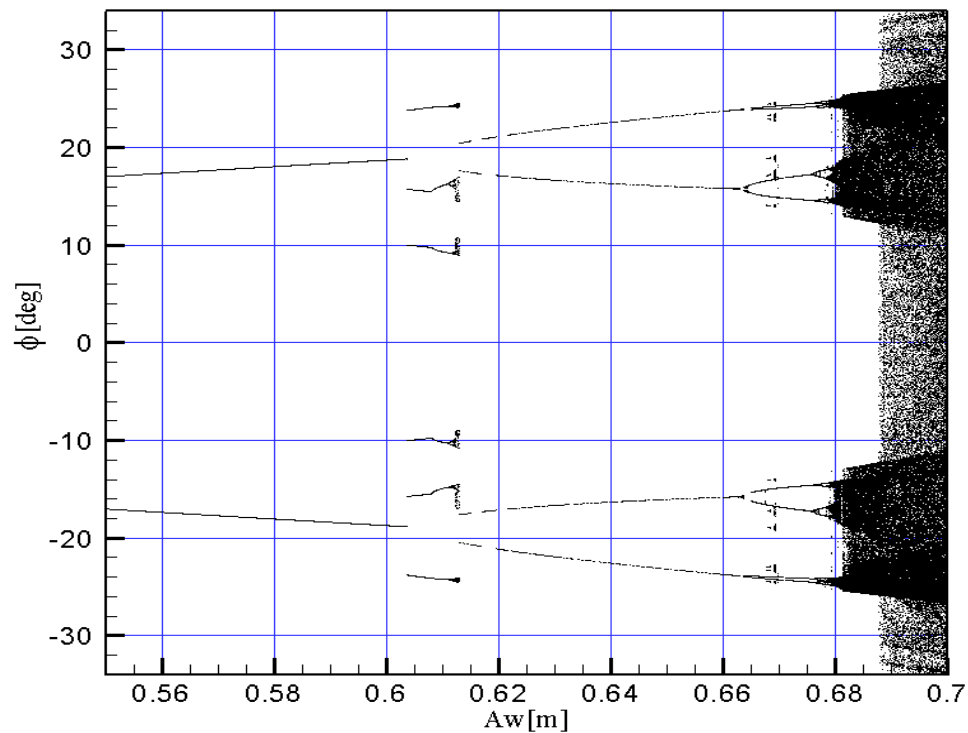
El diagrama de bifurcación de las 4.1 a 4.3 presenta una grande diversidad en información de soluciones de un sistema dinámico, como es el caso de nuestro sistema en estudio, el sistema dinámico del buque. El diagrama de bifurcación presenta fajas de comportamiento con diferentes tipos de respuesta, las cuales se pueden resaltar como es visto en la tabla 1. Además de la discusión presentada a



seguir, observamos que el comportamiento en cada faja será discutido con más detalle en capítulo 4.2 por medio del mapeamiento de Poincaré.

**Tabla 4.1.** Bifurcación para  $w_e/w_{n4}=2.0$ , C.I.#01.

Faja de $A_w$ (m)	Tipo de respuesta en rolo
0.0000 - 0.6036	Típicamente lineal
0.6037 - 0.6129	Coexistencia de atractores, 3 períodos
0.6130 - 0.6626	Multiestabilidad, 1 periodo
0.6627 - 0.6758	Multiestabilidad, 2 periodos
0.6759 - 0.6782	Multiestabilidad, 4 periodos
0.6783 - 0.67881	Multiestabilidad, 8 periodos
0.67882 - 0.7000	Caos



*Figura 4.1: Diagrama de bifurcación, rolo, para  $w_e/w_{n4}=2.0$ , condiciones iniciales C.I.#01.*

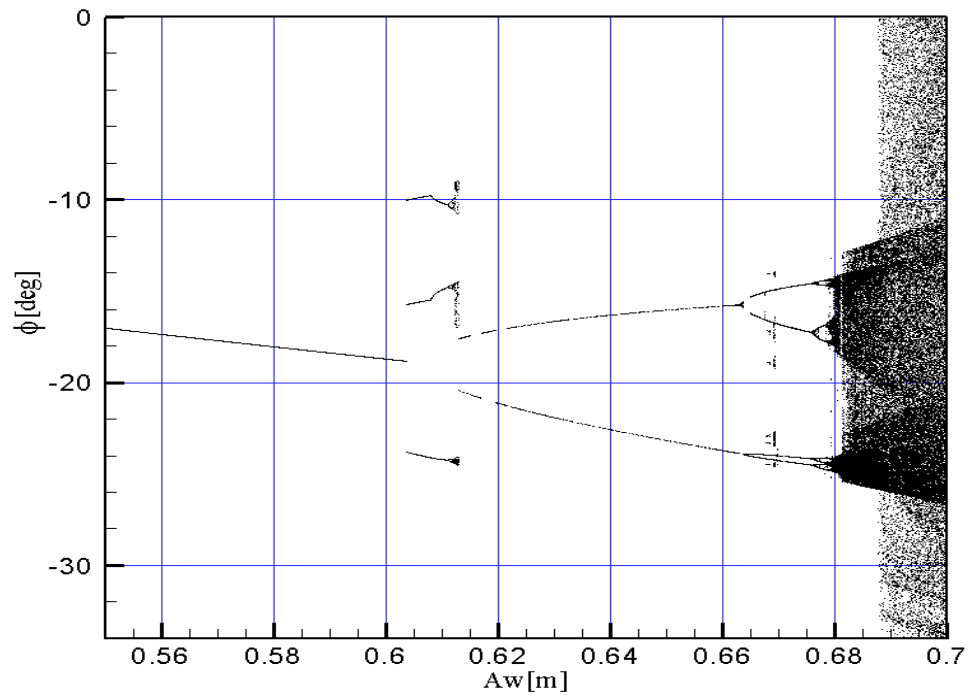


Figura 4.2: Diagrama de bifurcación, roloido, ampliación de la parte negativa de la figura 4.1.

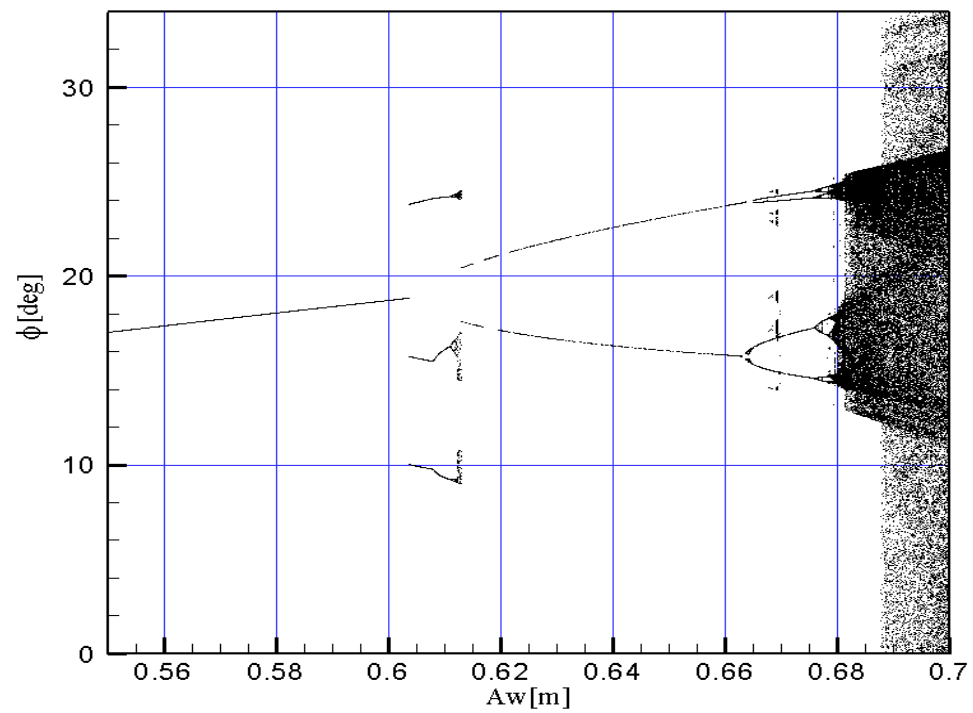


Figura 4.3: Diagrama de bifurcación, roloido, ampliación de la parte positiva de la figura 4.1.

En la figura 4.1 es mostrado el diagrama de bifurcación evaluada para una sintonía de  $w_e / w_{n4} = 2.0$  donde el parámetro de control viene a ser la amplitud de la ola ( $A_w$ ), aquí analizada para a faja de amplitud de ola de 0.55 m hasta 0.7 m, faja suficiente para poder observar la ruta para el caos mediante la catarata de duplicación de periodos. Son encontrados fajas para la amplitud de ola ( $A_w$ ) de diferentes comportamientos: en la faja  $A_w$  (0.0 m – 0.6036 m), en esta faja tiene respuesta en oscilación simétrica para rolo y con número de periodo igual a uno, caracterizando un comportamiento estable y con crecimiento de la amplitud de rolo de forma prácticamente lineal con respecto a la amplitud de la ola. En la faja de  $A_w$  (0.6037 m – 0.613 m) se presenta la zona de coexistencia de atractores con número de periodo igual a tres, también son observados efectos de intermitencia en la parte final de esta faja, para  $A_w=0.613$  aproximadamente. Ya en la faja  $A_w$  (0.6131 m – 0.6626 m) se tiene la presencia de una respuesta en oscilación asimétrica en rolo con efectos de alternancia, introducidos por el fenómeno de multiestabilidad, con número de periodo igual a uno. Con más detalle ese comportamiento peculiar será analizado en el capítulo 4.2. En la faja  $A_w$  (0.6627 m – 0.6758 m) se tiene una oscilación asimétrica en rolo, con presencia de alternancia de la amplitud de rolo y con número de periodo igual a dos. En la faja  $A_w$  (0.6759 m – 0.6782) se presenta una oscilación asimétrica y con presencia de alternancia en la amplitud de rolo y con número de periodo igual a cuatro. En la faja  $A_w$  (0.6783 m – 0.67881 m) se tiene oscilación asimétrica en rolo con alternancia en rolo y número de periodo igual a ocho, e finalmente se tiene la faja de  $A_w$  (0.78882 m – 0.7 m) donde se tiene el comportamiento caótico para las respuestas en rolo. Se debe observar que todas las fajas, con excepción de la caótica, el movimiento en rolo tiene características

típicas de la resonancia paramétrica en la primera región de inestabilidad de la ecuación de Mathieu, o sea, el periodo del movimiento es próximo al periodo natural de rolo. Ya los movimientos de arfada y cabeceo, respondiendo en periodos próximos del periodo de excitación.

En la figura 4.4 es mostrado el diagrama de bifurcación para las mismas condiciones de sintonía,  $F_n$ ,  $GM$ ,  $ksi$  que el diagrama de bifurcación de la figura 4.1, con la única diferencia del cambio de las condiciones iniciales en rolo (C.I.#02). Puede observar en el diagrama de bifurcación de la figura 4.4 que la zona de coexistencia de atractores presentado en la faja para la amplitud de la ola  $A_w = (0.6037 \text{ m}-0.6129 \text{ m})$  mostrada en el diagrama de bifurcación de la figura 4.1 ya no se manifiesta; o sea, desaparece el atractor de periodo igual a tres, para luego pasar, para mayores amplitudes de la ola, a una zona de número de periodos igual a uno con efecto de multiestabilidad. La multiestabilidad, al en vez de la alternancia, pasa ahora a manifestar características de salto dinámico, asociado a la bifurcación de dobla cíclica.

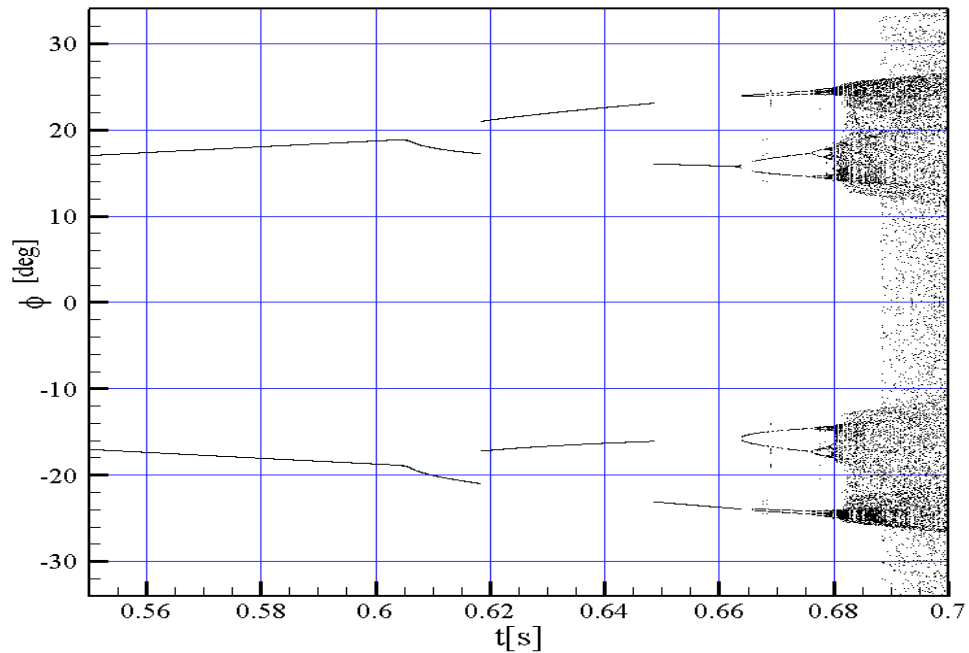


Figura 4.4: Diagrama de bifurcación, rolo, para  $w_e/w_{n4}=2.0$ , condiciones iniciales C.I.#02.

Es importante observar las características de los modos acoplados, su comportamiento para el mismo parámetro de control, como se puede ver en la figura 4.5, donde los movimientos de arfada y cabeceo tienen respuestas con número de periodo iguales para una misma amplitud de ola, en cuanto que el movimiento de rolo presenta un comportamiento de multiestabilidad. En la figura 4.5 se muestra, para C.I.#01, los diagramas de bifurcación de arfada, que está en torno de -5 grados (color rojo), bifurcación de rolo solo pegando la parte positiva (negro), y la bifurcación de cabeceo en escala (x30, y color azul) y que está en torno de 22 m, todos mostradas en la misma figura; se puede ver que para mismos valores de amplitud de ola ( $A_w$ ), los tres movimientos presentan las mismas características en su estructura de los puntos de bifurcación; se puede observar también que para la

misma faja de amplitud los tres movimientos presentan la coexistencia de atractores (número de periodo igual a tres). Se observa también que los tres movimientos presentan los mismos puntos de bifurcación para la misma amplitud de la ola, el cual es un comportamiento debido a los acoplamientos de los movimientos de arfada, rolado, y cabeceo. Vale notar que en el caso de arfada, para  $A_w=0.6627$  m hay el paso para cuatro periodos, el cual no sea claramente percibido en la figura, una vez que los dos periodos son muy próximos.

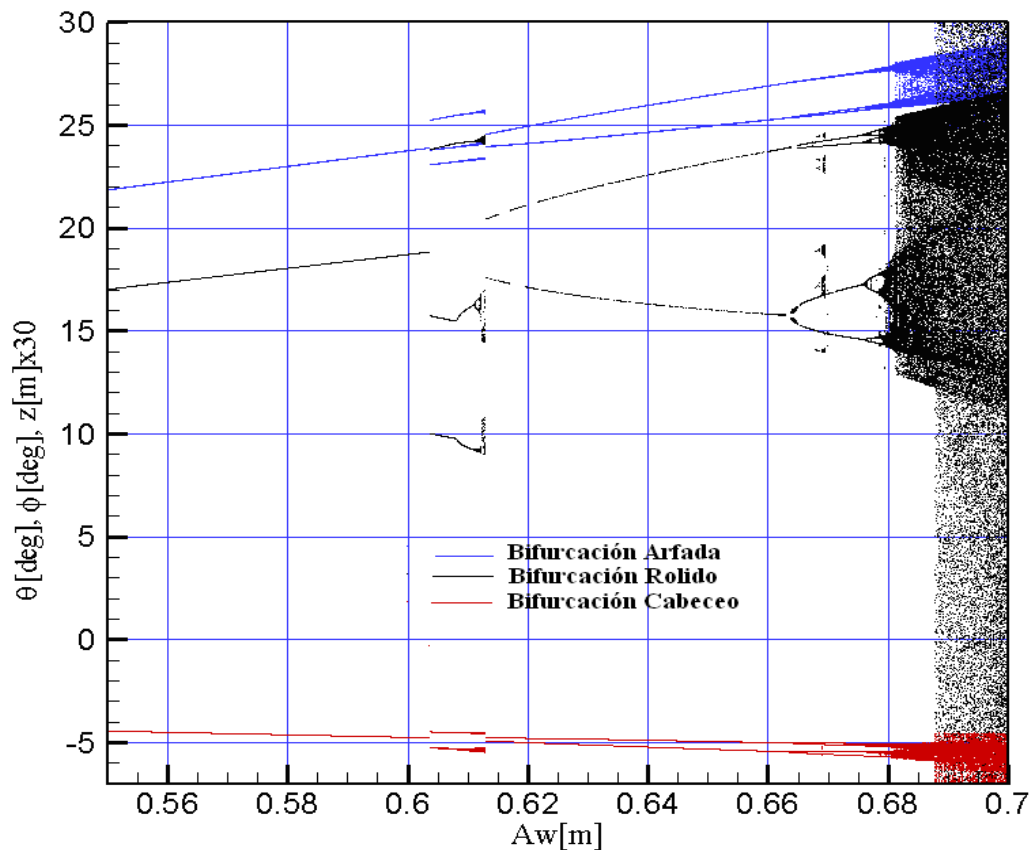


Figura 4.5: Diagramas de bifurcación de cabeceo, arfada en escala ( $\times 30$ ), y bifurcación en rolado, parte positiva,  $w_e / w_{n4} = 2.0$ , C.I.#01.

Para detallar lo que pasa en la figura 4.5, es mostrado a seguir el mapeamiento de Poincaré para los modos de arfada y cabeceo, siendo esta manera de notar su bifurcación, como también la periodicidad de los modos (arfada, cabeceo). El mapeamiento de Poincaré para rolo, debido a su importancia en el contexto de este análisis, será presentado con más detallada en el capítulo 4.2.

A seguir se hará el mapeamiento de Poincaré para arfada para valores de amplitud de la ola dentro de la faja de diferente comportamiento, de modo de conferir los valores obtenidos y periodicidad observados en el diagrama de bifurcación, figura 4.5. Este análisis es para la sintonía de dos ( $w_e / w_{n4} = 2.0$ ), y con los mismos valores de los parámetros y condiciones iniciales (C.I.#01) que las usadas para el análisis del diagrama de bifurcación en rolo. En la figura 4.6 son mostrados: serie temporal, espacio de fase y la sección de Poincaré, los cuales nos permiten definir el tipo de comportamiento y el número de periodo para las amplitudes de ola estudiadas. La figura 4.6 muestra un comportamiento en arfada con número de periodo igual a uno, y una amplitud máxima para arfada de 0.78 m, para una amplitud de  $A_w=0.58$ . En la figura 4.7 observamos el mapeamiento de Poincaré en arfada para el intervalo con coexistencia de atractores, con número de periodo igual a tres para una amplitud de  $A_w=0.605$  m, y la figura 4.8 es mostrado un comportamiento en arfada con número de periodo igual dos para una amplitud de  $A_w=0.64$  m, por lo que se puede constatar la periodicidad mostrada en el diagrama de bifurcación, figura 4.5.

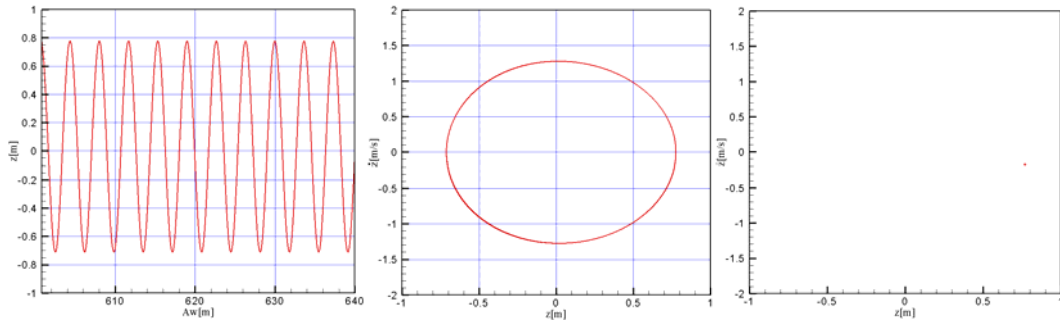


Figura 4.6: Serie temporal de arfada, espacio de fase y sección de Poincaré con número de periodo igual a uno, para  $A_w=0.58$  m,  $w_e / w_{n4} = 2.0$ , C.I.#01.

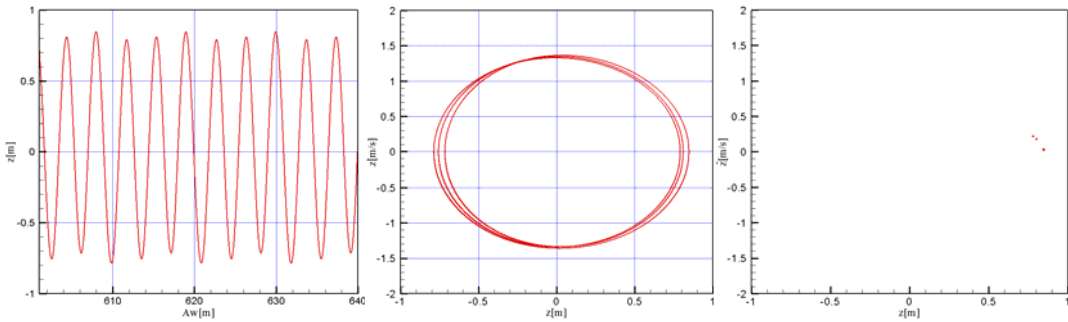


Figura 4.7: Serie temporal de arfada, espacio de fase y sección de Poincaré con número de periodo igual a tres, para  $A_w=0.605$  m,  $w_e / w_{n4} = 2.0$ , C.I.#01.

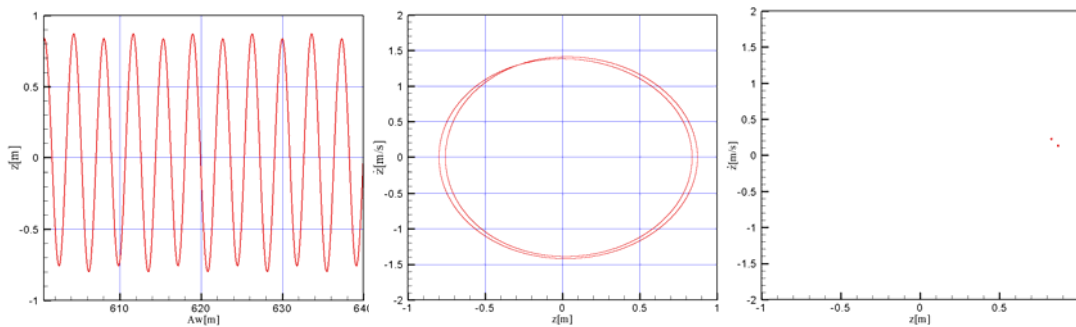
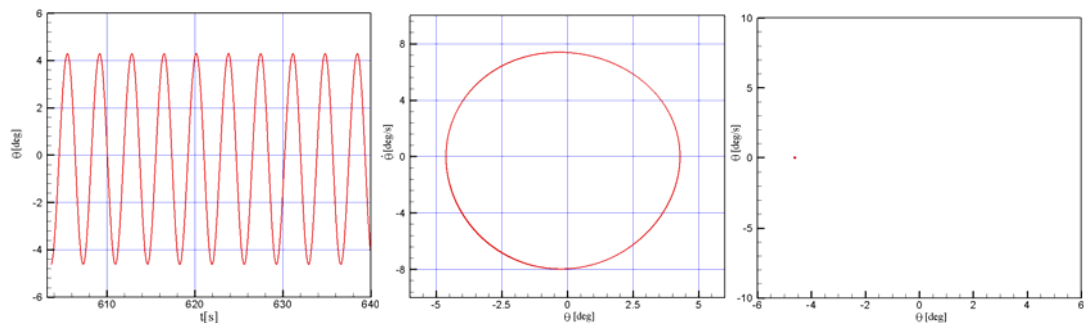


Figura 4.8: Serie temporal de arfada, espacio de fase e sección de Poincaré con número de periodo igual a dos, para  $A_w=0.64$  m,  $w_e / w_{n4} = 2.0$ , C.I.#01.



Siguiendo el mismo análisis, con la finalidad de conferir el diagrama de bifurcación en cabeceo, será presentado el mapeamiento de Poincaré para cabeceo, para una sintonía de dos, y sin cambiar los valores de los parámetros, y con las mismas condiciones iniciales que para el análisis ya mostrado para los demás modos (arfada, rolo), con el fin de conocer su periodicidad para diferentes amplitudes de la ola en fajas definidas en el diagrama de bifurcación de la figura 4.5: en la figura 4.9 se muestra un comportamiento en cabeceo con número de periodo igual a uno, para una amplitud de  $A_w=0.58$  m. En la figura 4.10, tenemos la zona coexistencia de atractores en cabeceo, con número de periodo igual a tres para una amplitud de  $A_w=0.605$  m, y en la figura 4.11 tenemos el comportamiento en cabeceo con número de periodo igual a dos para una amplitud de  $A_w=0.64$  m, y con número de periodo igual a cuatro para una amplitud de de la ola igual a  $A_w=0.67$  m, figura 4.12.



*Figura 4.9: Serie temporal en cabeceo, espacio de fase y sección de Poincaré con número de periodo igual a uno, para  $A_w=0.58$  m,  $w_e / w_{n4} = 2.0$ , C.I.#01.*

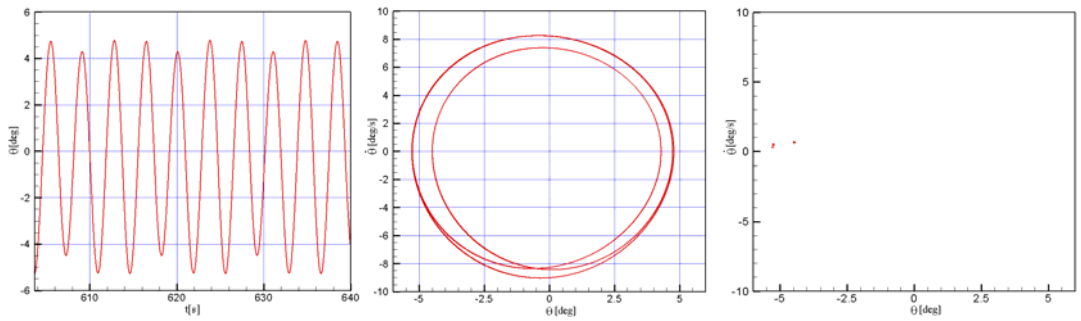


Figura 4.10: Serie temporal en cabeceo, espacio de fase y sección de Poincaré con número de periodo igual a tres (coexistencia de atractores), para  $A_w=0.605$  m,  $w_e/w_{n4} = 2.0$ , C.I.#01.

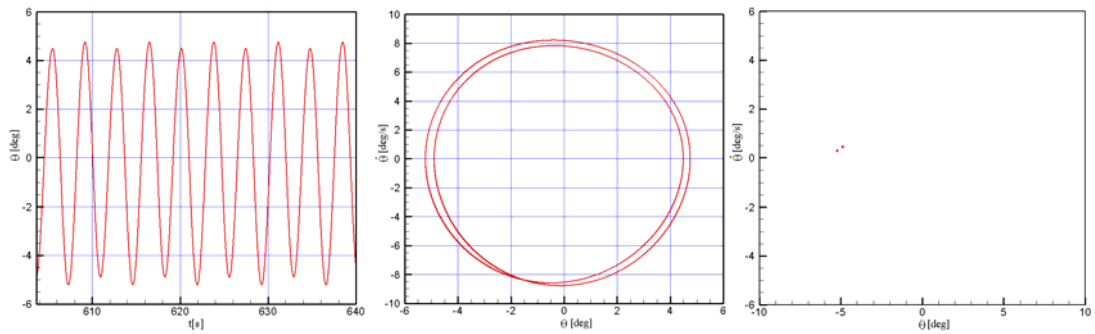


Figura 4.11: Serie temporal en cabeceo, espacio de fase y la sección de Poincaré con número de período igual a dos, para  $A_w=0.64$  m,  $w_e/w_{n4} = 2.0$ , C.I.#01.

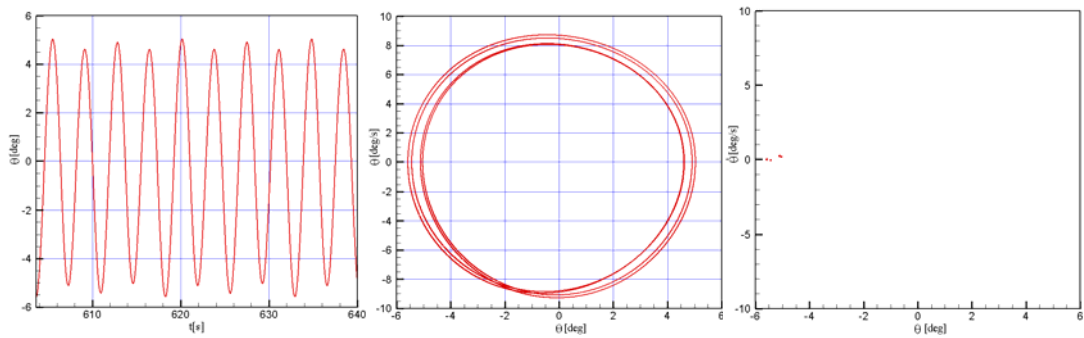


Figura 4.12: Serie temporal en cabeceo, espacio de fase y la sección de Poincaré con número de periodo igual a cuatro, para  $A_w=0.67$  m,  $w_e/w_{n4} = 2.0$ , C.I.#01.

#### 4.1.2 **Diagrama de Bifurcación** $w_e / w_{n4} = 2.2$

Una vez hecha el análisis por la sintonía de dos, se quiere saber lo que pasa para una sintonía próxima y como varia la nueva estructura de la bifurcación en relación a la primera sintonía. Para eso ahora se hará el diagrama de bifurcación de las soluciones mostradas para una sintonía de frecuencia  $w_e / w_{n4} = 2.2$ , las otras condiciones siendo las mismas de antes. Obteniéndose los diagramas de bifurcación presentadas en las figuras 4.13, 4.14, 4.15, siendo las figuras 4.14 y 4.15 correspondientes a las ampliaciones de le regiones dl diagrama 4.12. Se observa que para esa sintonía, se tiene los puntos de bifurcación para valores menores de amplitud de la ola, como también que se llega al caos para valores menores, en comparación con los diagramas de bifurcación para la sintonía de 2.0.

**Tabla 4.2.** Bifurcación para  $w_e / w_{n4} = 2.2$ , *C.I.#01*

<b>Faja de Aw (m)</b>	<b>Tipo de respuesta en roldo</b>
0.0000 – 0.5075	Típicamente lineal
0.5076 – 0.5432	Multiestabilidad, 1 periodo
0.5433 – 0.5530	Multiestabilidad, 2 periodos
0.5531 – 0.5551	Multiestabilidad, 4 periodos
0.5552 – 0.5558	Multiestabilidad, 8 periodos
0.5559 – 0.6000	Caos

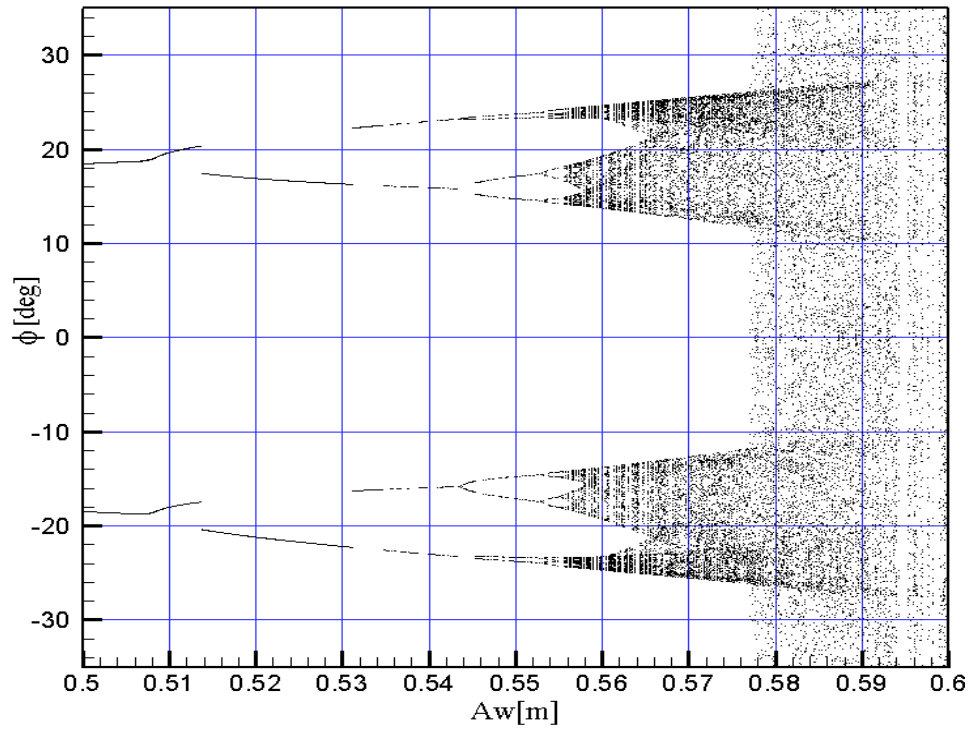


Figura 4.13: Diagrama de bifurcación, rolo, para  $w_e/w_{n4}=2.2$ , mismas condiciones (C.I.#01).

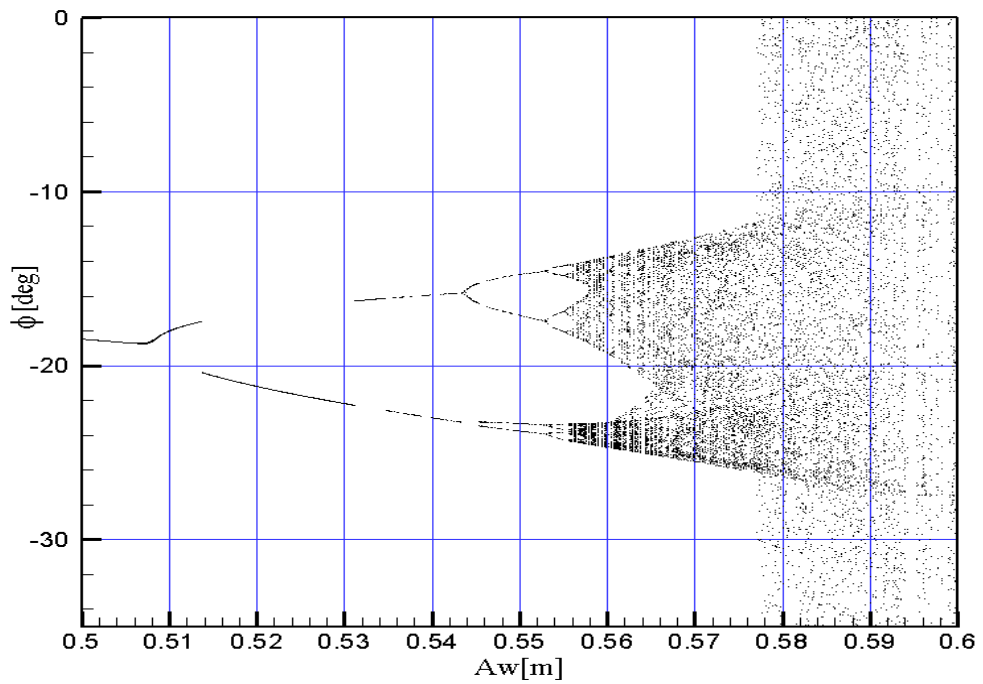


Figura 4.14: Diagrama de bifurcación, rolo, ampliación de la parte negativa de la figura 4.13.

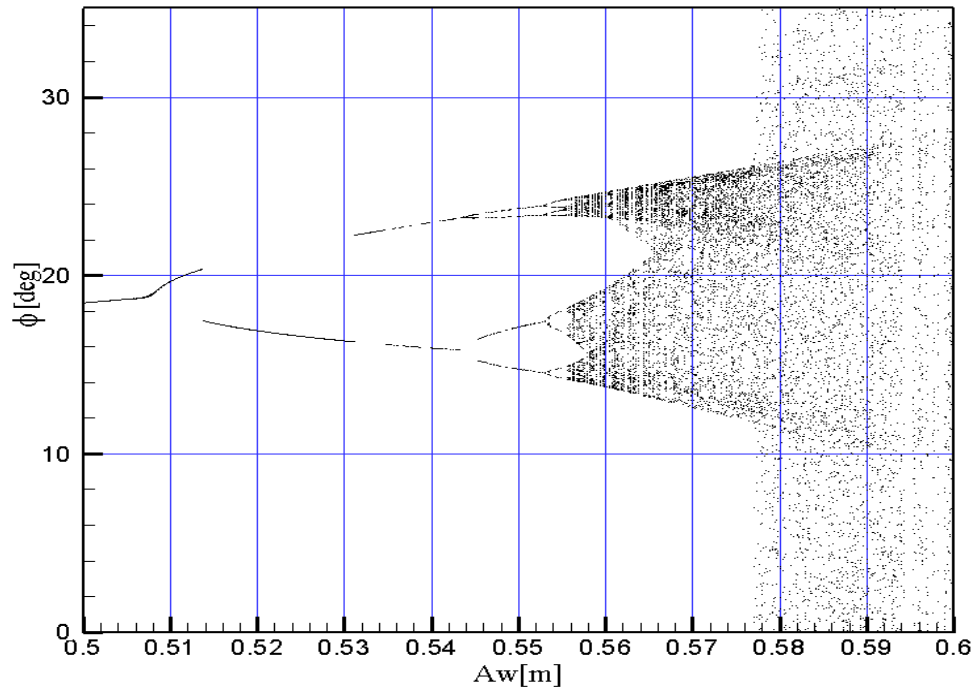


Figura 4.15: Diagrama de bifurcación, roloido, ampliación de la parte positiva de la figura 4.13.

En los diagramas de bifurcación mostrados anteriormente, se presento el fenómeno de multiestabilidad, que será definido y detallado en el capítulo 4.2, pero ya en este capítulo de los diagramas de bifurcación es importante observar que, como consecuencia de la multiestabilidad, cambios cualitativos en la dinámica del sistema pueden resultar de la variación en las condiciones iniciales. Ahora será mostrado el sistema de bifurcación con los mismos valores de los parámetros utilizados ( $F_n$ ,  $GM$ ,  $ksi$ ), y a la misma sintonía del diagrama de bifurcación de la figura 4.13 y con el único cambio en las condiciones iniciales en roloido (C.I.#02), en ese caso siendo  $\phi_0 = 2.5 \text{ deg}$ ,  $\dot{\phi}_0 = -0.8 \text{ deg/s}$ . En la figura 4.16 se observa un cambio cualitativo de la dinámica del sistema con el apareamiento de intermitencia de  $A_w=0.52$  hasta  $A_w=0.53$ , como consecuencia directa de la variación en las condiciones iniciales. Se

presenta ya desde  $A_w=0.5076$  m, la alternancia de valores por la existencia de dos atractores, muestra una supuesta duplicidad de periodos donde en realidad se tiene solo un periodo, y así como para la existencia de dos periodos, mostrando una supuesta existencia de cuatro periodos, así sucesivamente, hasta llegar al caos, efectos causados por la multiestabilidad.

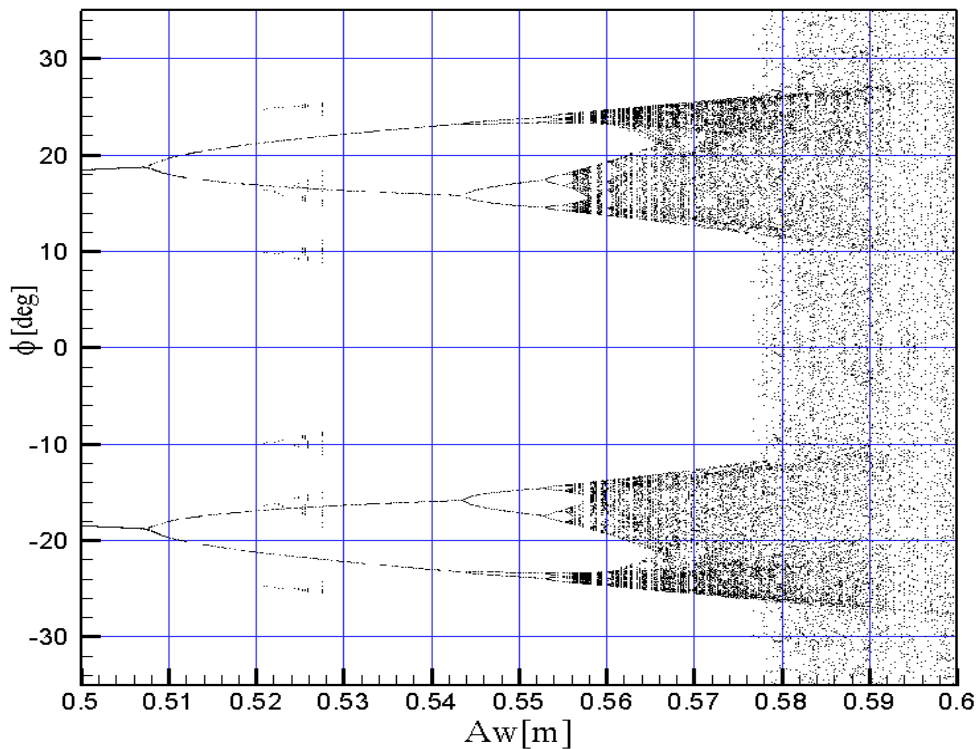


Figura 4.16: Diagrama de bifurcación, rovido, para  $w_e/w_{n4}=2.2$ , C.I.#02.

En la figura 4.13 fue mostrado el diagrama de bifurcación para una sintonía de  $w_e/w_{n4}=2.2$ , donde se tiene diferentes tipos de comportamientos y sus peculiaridades para cada unas de las fajas de amplitud de la ola. En la figura que va de 0.5 m hasta 0.6 m, se observa la ruta para el caos mediante la catarata por duplicación de periodos, Rothman (2005), con inicio de la catarata para menores

valores de amplitud en comparación con la sintonía de 2.0. Se observa las siguientes fajas con diferentes comportamientos: en la figura de  $A_w$  (0.0 m – 0.5075 m) se tiene una respuesta de oscilación simétrica para rolo, y con número de periodo igual a uno; en la faja de  $A_w$ =(0.5076 m – 0.5432 m) se tiene una respuesta en oscilación asimétrica en rolo con efectos de alternancia introducidos por la multiestabilidad, y con número de periodo igual a uno; en la faja de  $A_w$  (0.5433 m – 0.5530 m), oscilación asimétrica en rolo, con efectos de alternancia con número de periodo igual a dos; en la faja  $A_w$  (0.5531m – 0.5551 m), oscilación asimétrica en rolo, con la presencia de alternancia en la respuesta y número de periodo igual a cuatro; faja (0.5552 m – 0.5558 m), oscilación asimétrica en rolo con alternancia y número de periodo igual a ocho, y finalmente tenemos la faja de  $A_w$  (0.5559 m – 0.60 m) con comportamiento caótico para la respuesta de rolo. Esas diferentes respuestas serán analizadas con más detalles a seguir en el capítulo 4.2.

## 4.2 Mapeamiento de Poincaré

### 4.2.1 Mapeamiento de Poincaré $w_e / w_{n4} = 2.0$

Para poder conocer con más detalle las respuestas en rolo mostradas en la figura 4.1, la cual fue trabajada para una sintonía de  $w_e / w_{n4} = 2.0$ , se hará en análisis por mapeamiento de Poincaré para las diferentes fajas de la amplitud de la ola, tomándose una amplitud de la ola característica dentro de cada faja.

Una observación importante a realzar es que para la obtención del mapeamiento de Poincaré, se tomó el doble del valor del periodo natural de rolo,

en la cual responde el movimiento de rolido. Es por esa razón que en la sección de Poincaré un periodo es mostrado por dos puntos, ya que son tomados los valores positivos y negativos del periodo natural de rolido.

- Intervalo de  $A_w$  (0.0 m - 0.6036 m), en esta faja se tiene una respuesta de oscilación simétrica en rolido, y con número de periodo igual a uno; en este intervalo la respuesta de rolido tiene un comportamiento definido, con la amplitud creciendo aproximadamente de manera lineal con la amplitud de la ola. En la figura 4.17 se ilustra el comportamiento de rolido en oscilación de número de periodo igual a uno, con valor de amplitud de la ola ( $A_w$ ) dentro de este intervalo.

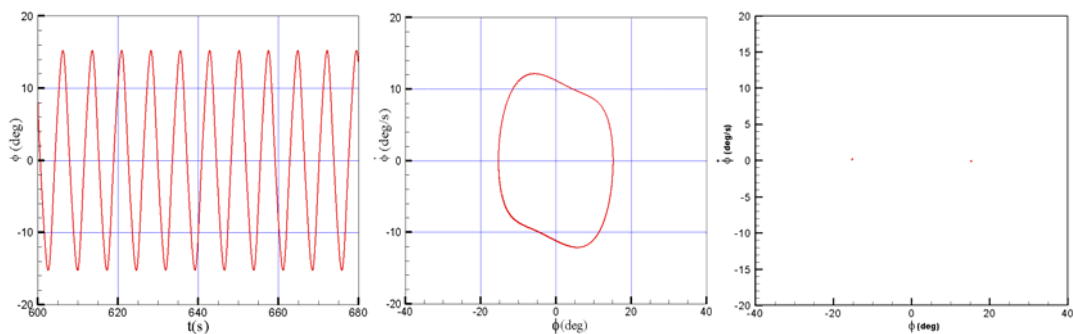


Figura 4.17: Serie temporal, rolido ( $\phi_{max}=17.23^\circ$ ), espacio de fase y sección de Poincaré con número de periodo igual a uno, para  $A_w=0.5$  m,  $w_e/w_{n4} = 2.0$ , C.I.#01.

- Intervalo de  $A_w$  (0.6037 m – 0.613 m), presenta una respuesta de oscilación simétrica de rolido, y con número de periodo igual a tres, en este intervalo se muestra la zona de coexistencia de atractores, como se observa en la figura 4.18, con la ocurrencia de tres periodos en esta faja de amplitud, para C.I.#01.



La faja con coexistencia de atractores tanto tiene comportamiento periódico cuanto caótico, generado por la órbita de periódica estable de número de periodo igual a tres. La coexistencia de atractores hace el cambio cualitativo de las características de la oscilación, conectando una región de oscilación en rolo simétrica a una oscilación asimétrica, que se presenta al final de dicha región.

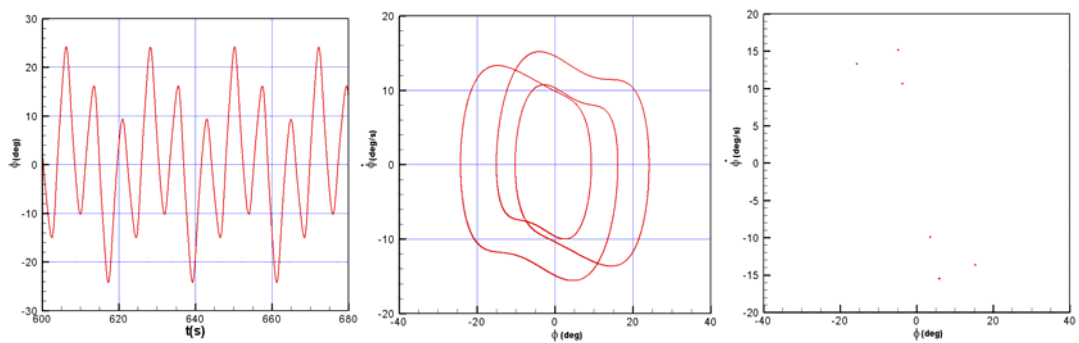


Figura 4.18: Serie temporal, roll ( $\phi_{max}=24.18^\circ$ ), espacio de fase y la sección de Poincaré con número de periodo igual a tres, para  $Aw=0.61$  m,  $w_e/w_{n4} = 2.0$ , C.I.#01.

#### 4.2.1.1 Intermitencia

El fenómeno de intermitencia en sistemas que presentan caos, se manifiesta en la alternancia entre comportamientos regulares e irregulares para determinados valores de parámetros. El mecanismo de intermitencia se manifiesta cuando el valor de un parámetro ( $Aw$ ) de un sistema dinámico, próximo a un punto de bifurcación que da origen a un ciclo límite atractivo, ultrapasando un valor crítico llamado de frontera de intermitencia. Ultrapasando este valor crítico, el sistema responde con una oscilación regular representado por ciclo límite (*laminar phases*) que son intermitentemente interrumpidos por intervalos irregulares (*turbulent bursts*), vide

Hirsch *et al.* (1982), los cuales son observados como una nube de puntos para  $A_w=0.6125$  m, del diagrama de bifurcación, figura 4.1, vide Sequeira (2005).

A seguir serán mostradas las series temporales, espacios de fase y las secciones de Poincaré para rolo, para valores de amplitud de la ola donde fueron observados la intermitencia, figuras 4.19 y 4.20, en las cuales se pueden percibir la oscilación irregular con número de periodo no definido.

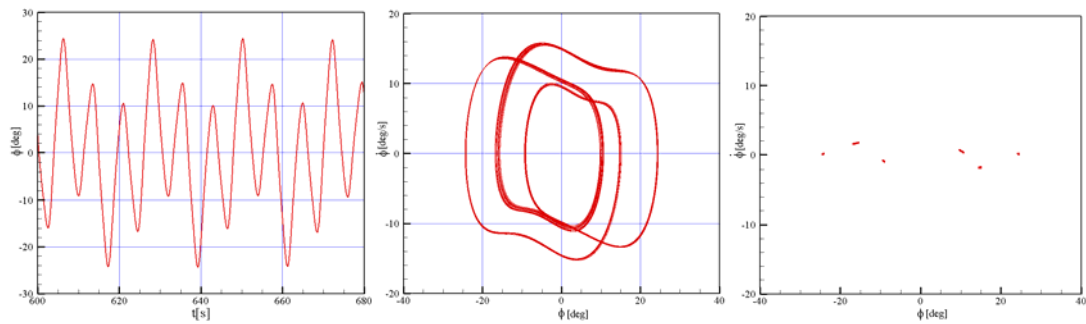


Figura 4.19: Serie temporal, rolo, espacio de fase, y sección de Poincaré, para  $A_w=0.6125$  m,  $w_e / w_{n4} = 2.0$ , C.I.#01.

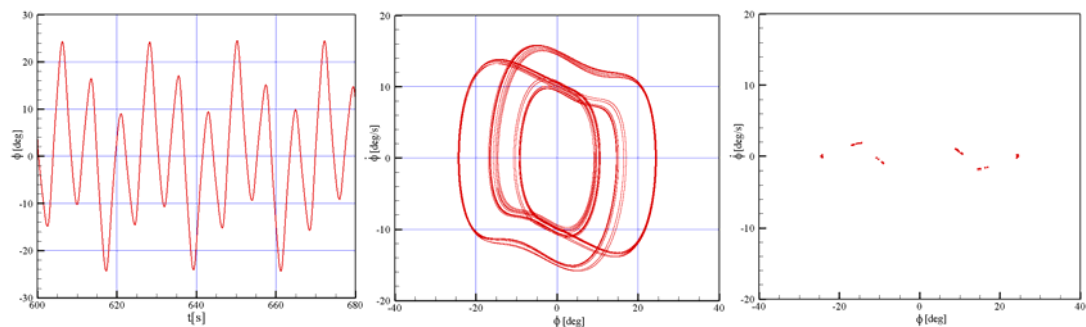


Figura 4.20: Serie temporal, rolo, espacio de fase, y sección de Poincaré, para  $A_w=0.6129$  m,  $w_e / w_{n4} = 2.0$ , C.I.#01.

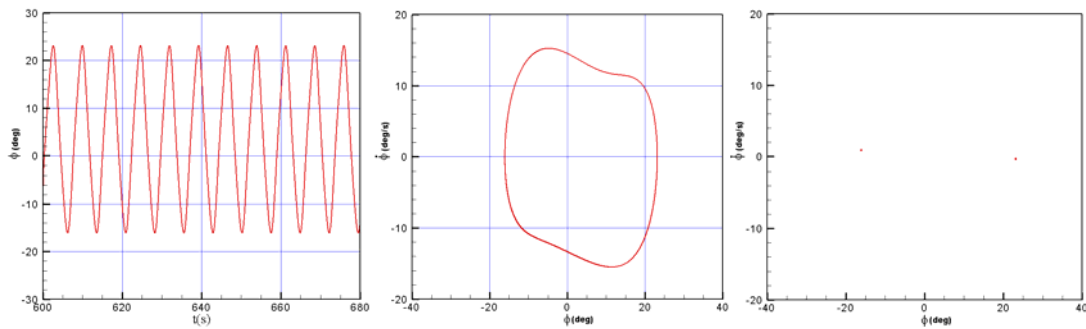
En este intervalo  $A_w$  (0.6131 m – 0.6626 m), otro concepto muy importante para poder entender la alternancia de la respuesta en rolo es la multiestabilidad, que será más discutida a seguir.

#### **4.2.1.2 Multiestabilidad**

Es el nombre dado para la coexistencia de varios estados de equilibrio dinámico para un mismo conjunto de parámetros. Tales pueden ser caóticos, cuanto regulares (periódicos). Como consecuencia de la multiestabilidad, ocurren cambios cualitativos en la dinámica del sistema (diagrama de bifurcación) las cuales resultan para ciertos valores de condiciones iniciales. Multiestabilidad fue observado en varios sistemas, dentro de los cuales sistemas mecánicos, sistemas biológicos, vide Kraut y Feudel (2002), en general en sistemas dinámicos dotados de un gran complejidad. Estudios recientes, vide Rech (2005), muestran que multiestabilidad es una propiedad que puede ser explorada en una gran variedad de modos. Multiestabilidad puede ser inducida o suprimida por perturbaciones periódicas débiles en una gran clase de sistemas no lineales que presentan ruta para el caos por doblamiento de periodo, vide Chizhevsky (2001), Pisarchik y Goswami (2000), Egorv y Koronovski (2004).

En nuestro caso la multiestabilidad es introducida por sistemas acoplados fuertemente no lineales, y que puede ser particularmente severo, la multiestabilidad genera una alternancia de los valores en la amplitud de la respuesta en la bifurcación en rolo, como será mostrado a seguir para diferentes fajas de la amplitud de la ola ( $A_w$ ).

- Intervalo  $A_w$  (0.6130 m – 0.6626 m) en este intervalo, donde tenemos una respuesta de oscilación asimétrica en rolo, y número de periodo igual a uno, la figura 4.21 presenta el resultado característico de esta faja, se observa que en este intervalo la respuesta en rolo tiene un comportamiento de alternancia de los valores obtenidos para valores próximos de la amplitud de la ola ( $A_w$ ), efecto de la multiestabilidad del sistema dinámico en esta faja de excitación.



*Figura 4.21: Serie temporal, rolo ( $\phi_{max}=23.17^\circ$ ), espacio de fase y la sección de Poincaré con número de periodo igual a uno, para  $A_w=0.65$  m,  $w_e / w_{n4} = 2.0$ , C.I.#01.*

Para entender cómo se da la multiestabilidad, serán mostrados a seguir las series temporales de rolo, figura 4.22, para dos amplitudes de ola muy próximas, donde se puede ver con claridad el cambio cualitativo de la oscilación en rolo debido a la existencia de dos atractores.

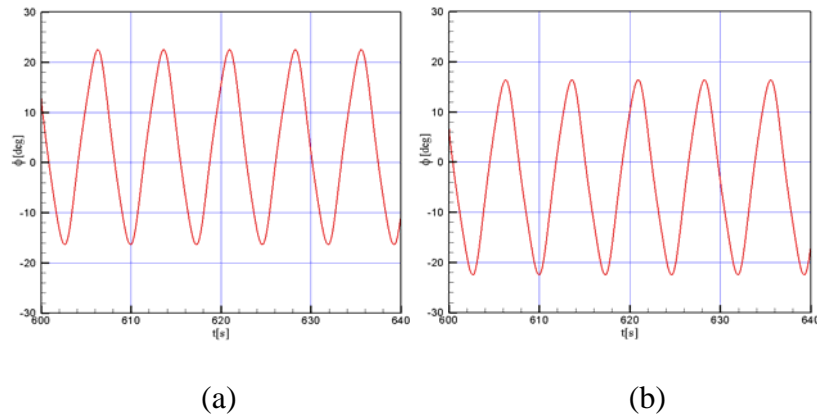


Figura 4.22: Serie temporal, rolando, para  $A_w=0.6385$  m (figura a),  $A_w=0.6386$  m (figura b). Multiestabilidad para dos puntos próximos,  $w_e / w_{n4} = 2.0$ , C.I.#01.

La multiestabilidad puede ser fácilmente observada en la figura 4.22, donde se nota que la media en (a) es positiva y en (b) es negativa. Por otro lado, en el diagrama de espacio de fase, figura 4.23, se puede percibir los desplazamientos de los diagramas de estado de fase para la izquierda y para la derecha, denotan la existencia de dos atractores. Las figuras 4.24 y 4.25, presentan resultados similares al mostrado en las figuras 4.22 y 4.23, ahora para amplitudes de la ola poco mayores.

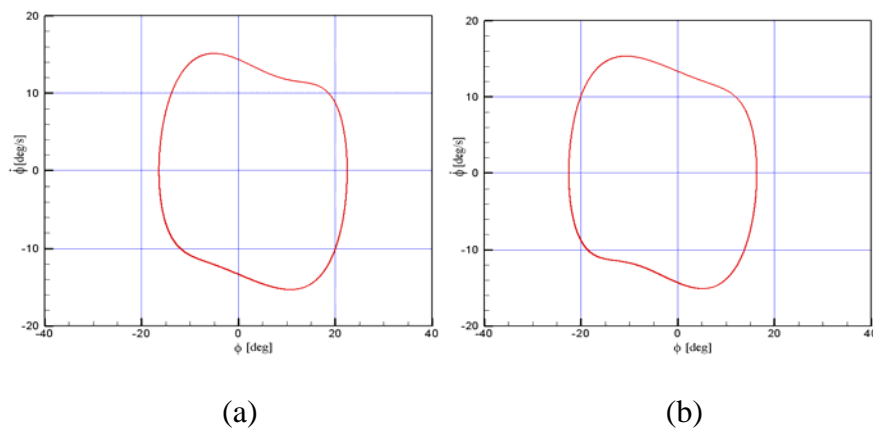


Figura 4.23: Espacio de fase, rolando, para  $A_w=0.6385$  m (figura a),  $A_w=0.6386$  m (figura b). Multiestabilidad para dos puntos próximos,  $w_e / w_{n4} = 2.0$ , C.I.#01.

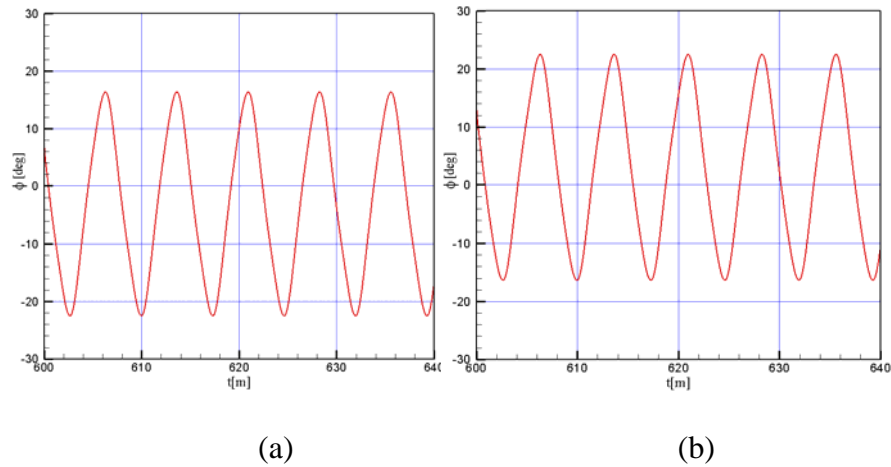


Figura 4.24: Serie temporal, rolo, para  $A_w=0.639$  m (figura a),  $A_w=0.6391$  m (figura b). Multiestabilidad para dos puntos próximos,  $w_e / w_{n4} = 2.0$ , C.I.#01.

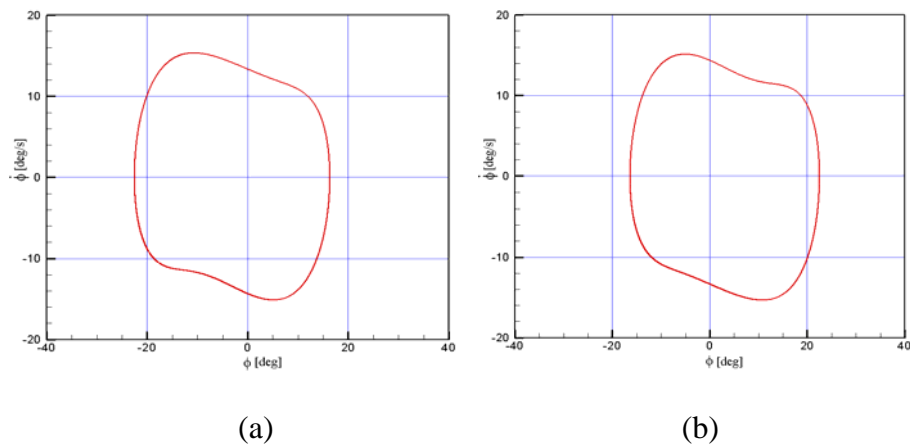


Figura 4.25: Espacio de fase, rolo, para  $A_w=0.639$  m (figura a),  $A_w=0.6391$  m (figura b). Multiestabilidad para dos puntos próximos,  $w_e / w_{n4} = 2.0$ , C.I.#01.

- Intervalo de  $A_w$  (0.6627 m-0.6758 m), se tiene una respuesta de oscilación asimétrica en rolo, y número de periodo igual a dos, la figura 4.24 presenta los resultados característicos de esta faja: en este intervalo la respuesta en rolo tiene un comportamiento de alternancia de las amplitudes de rolo ( $\phi$ )

En este intervalo también se presenta intermitencia para valores próximos de  $Aw=0.6691$  m, como son observados en los diagramas de bifurcación, figuras 4.1~4.3.

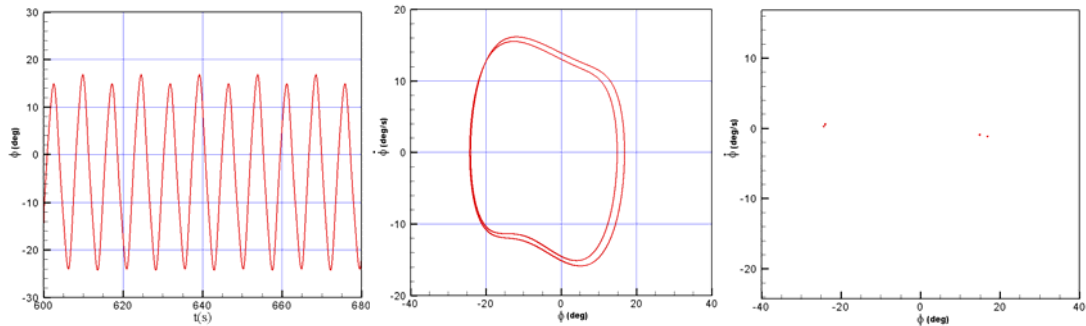
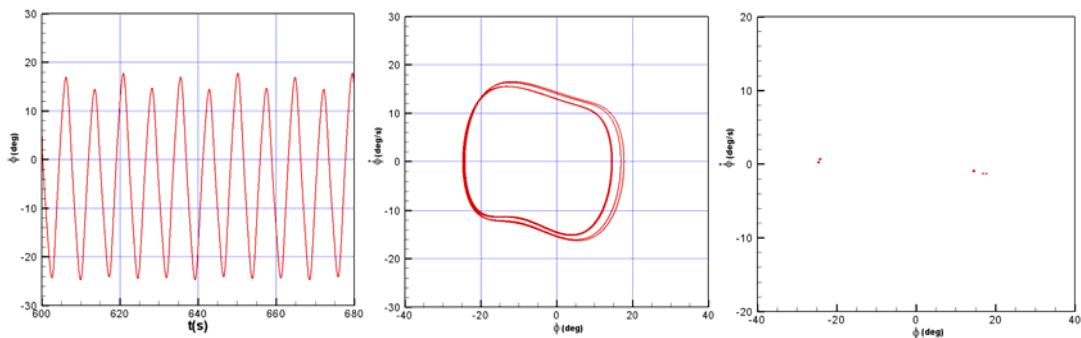


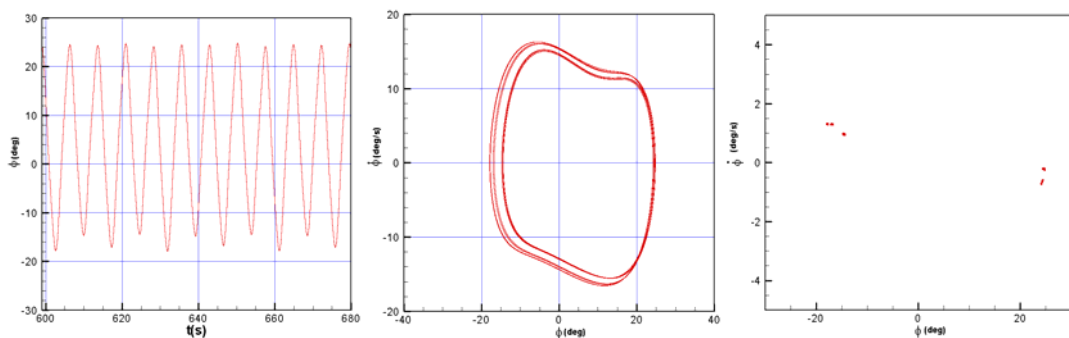
Figura 4.26: Serie temporal, roloido ( $\phi_{max}=24.27^\circ$ ), espacio de fase, y sección de Poincaré con número de periodo igual a dos, para  $Aw=0.67$  m,  $w_e/w_{n4} = 2.0$ , C.I.#01.

- Intervalo de  $Aw$  (0.6759 m – 0.6782 m), se tiene una oscilación asimétrica en roloido, y con número de periodo igual a cuatro; en este intervalo se observa las respuestas con comportamiento de alternancia para roloido, o que es característico de la multiestabilidad. En la figura 4.27 se muestra la existencia de la oscilación para roloido con número de periodo igual a cuatro.



*Figura 4.27: Serie temporal, rolo (  $\phi_{max}=24.73^\circ$ ), espacio de fase y la sección de Poincaré con número de periodo igual a cuatro, para  $A_w=0.678$  m,  $w_e / w_{n4} = 2.0$ , C.I.#01.*

- Intervalo de  $A_w$  (0.6783 m – 0.67881 m), se tiene una respuesta de oscilación asimétrica en rolo, y número de periodo igual a ocho; en este intervalo la respuesta en rolo tiene un comportamiento de alternancia debido a la multiestabilidad, conforme es mostrado en la figura 4.28.



*Figura 4.28: Serie temporal, rolo (  $\phi_{max}=24.76^\circ$ ), espacio de fase y sección de Poincaré con número de periodo igual a ocho, para  $A_w=0.67881$  m,  $w_e / w_{n4} = 2.0$ , C.I.#01.*

- Intervalo de  $A_w$  (0.67882 m - 0.70 m), en este intervalo se tiene respuestas caóticas, que son mostradas en las figuras 4.29 y 4.30.



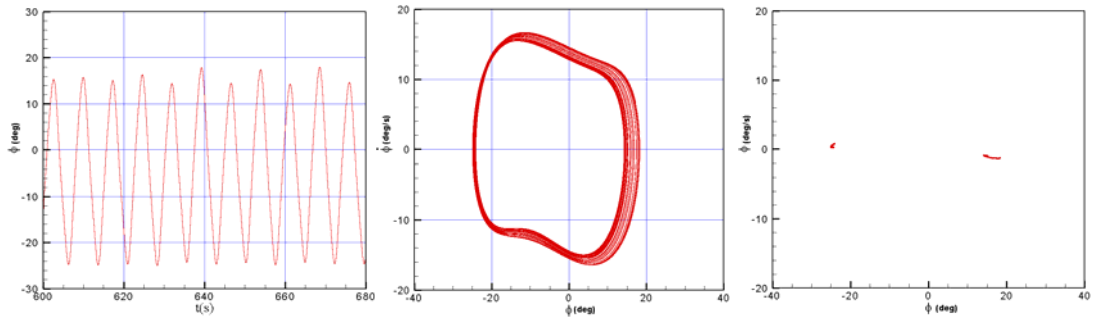


Figura 4.29: Serie temporal, rolo (  $\phi_{max}=24.88^\circ$  ), espacio de fase y sección de Poincaré. Nube de puntos, perdida da periodicidad, para  $A_w=0.681$  m,  $w_e / w_{n4} = 2.0$ , C.I.#01.

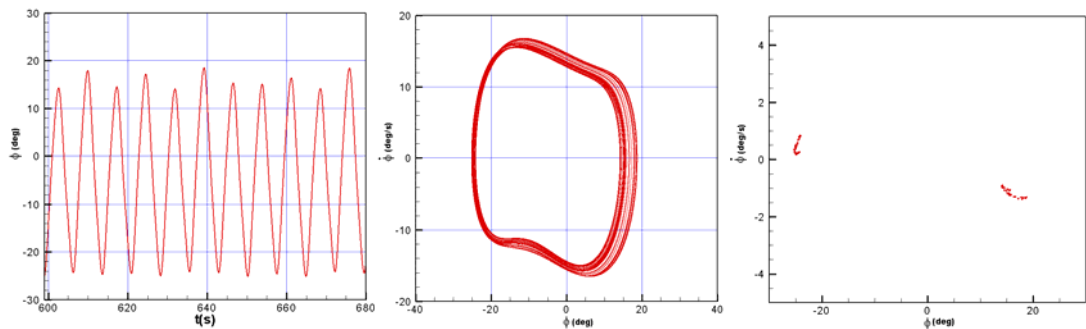


Figura 4.30: Serie temporal, rolo (  $\phi_{max}=25^\circ$  ), espacio de fase y sección de Poincaré, comportamiento caótico para  $A_w=0.683$  m,  $w_e / w_{n4} = 2.0$ , C.I.#01.

#### 4.2.2 Mapeamiento de Poincaré $w_e / w_{n4} = 2.2$

Empleando la misma metodología aplicada para la sintonía de  $w_e / w_{n4} = 2.0$ , trabajaremos ahora para una sintonía  $w_e / w_{n4} = 2.2$ . Como serán mostrados en las diferentes fajas para la amplitud de la ola ( $A_w$ ), se puede observar que para menores amplitudes de la ola, se presenta mayores amplitudes de rolo, en comparación a la sintonía de dos, las diferentes fajas de respuesta son:

- Intervalo  $A_w$  (0.0 m – 0.5075 m) donde se tiene una respuesta de oscilación simétrica de uno; en este intervalo la respuesta de la amplitud máxima de roloido tiene aumento progresivo definido, casi lineal, figura 4.31.

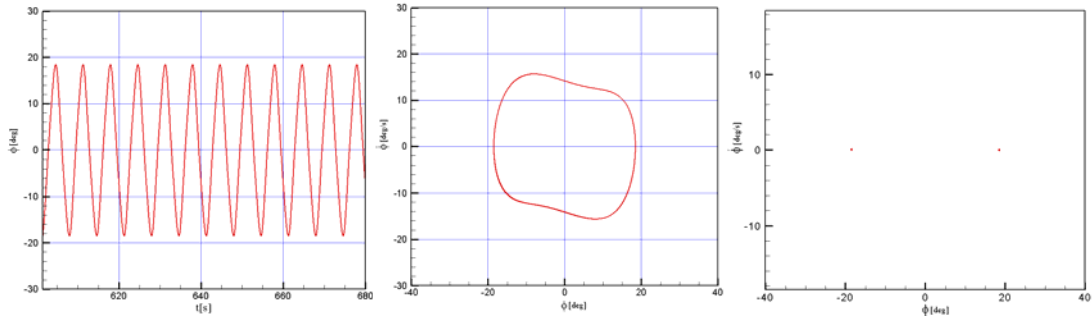


Figura 4.31: Serie temporal, roloido ( $\phi_{max}=18.5^\circ$ ), espacio de fase y sección de Poincaré con número de períodos igual a uno, para  $A_w=0.5$  m,  $w_e/w_{n4} = 2.2$ . C.I.#01.

- Intervalo  $A_w$  (0.5076 m – 0.5432 m), en este intervalo se tiene respuesta asimétrica en roloido y número de periodo igual a uno; las figuras 4.32 ~ 4.35, presentan los resultados característicos de esta faja; se observa que en este intervalo la respuesta en roloido tiene comportamiento de alternancia de los valores obtenidos para valores de amplitud de la onda ( $A_w$ ). Debido a la existencia de dos atractores, hay un leve desvío de los puntos de estabilidad, tanto en estribor como en babor, lo cual va aumentar con respecto al incremento de la amplitud de la ola, lo cual es efecto de la multiestabilidad del sistema dinámico.

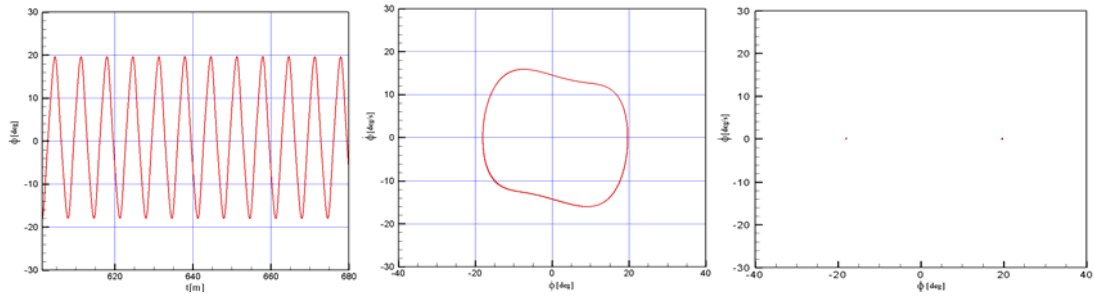


Figura 4.32: Serie temporal, roloido ( $\phi_{max}=19.67^\circ$ ), espacio de fase y sección de Poincaré con número de períodos igual a uno, para  $Aw=0.51m$ ,  $w_e/w_{n4}=2.2$ , C.I.#01.

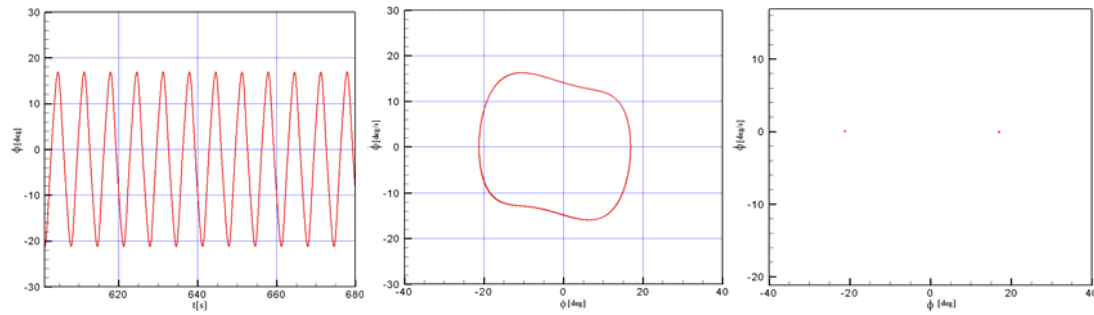


Figura 4.33: Serie temporal, roloido ( $\phi_{max}=21.2^\circ$ ), espacio de fase, y sección de Poincaré con número de períodos igual a uno, para  $Aw=0.52 m$ ,  $w_e/w_{n4}=2.2$ , C.I.#01.

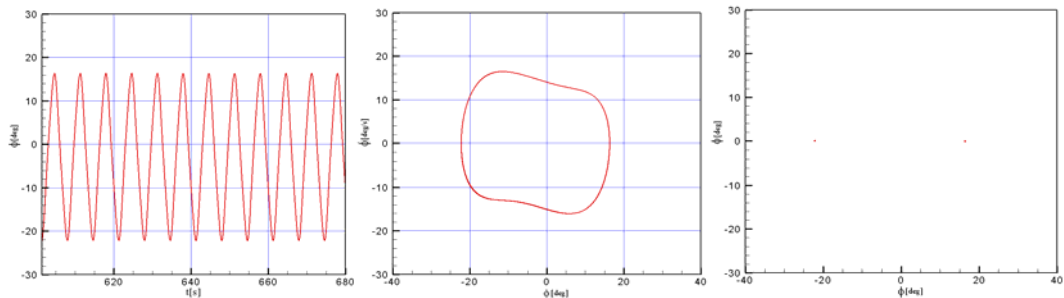


Figura 4.34: Serie temporal, roloido ( $\phi_{max}=22.2^\circ$ ), espacio de fase y sección de Poincaré con número de períodos igual a uno, para  $Aw=0.53 m$ ,  $w_e/w_{n4}=2.2$ , C.I.#01.

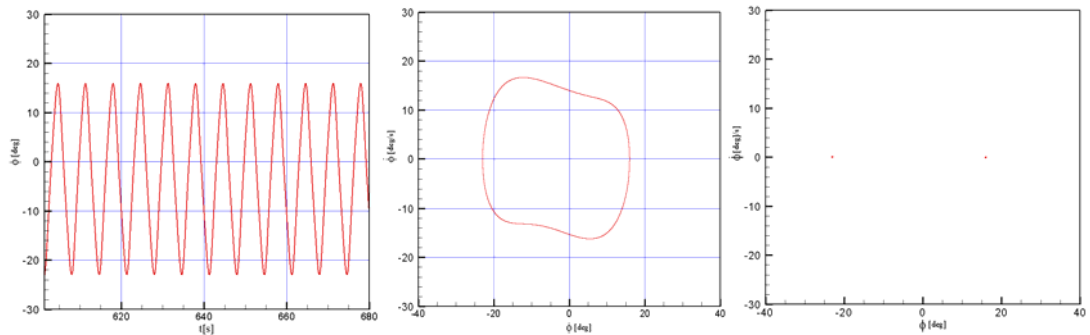


Figura 4.35: Serie temporal, rolido ( $\phi_{max}=23^\circ$ ), espacio de fase y sección de Poincaré con número de períodos igual a uno, para  $Aw=0.54$  m,  $w_e/w_{n4} = 2.2$ , C.I.#01.

- Intervalo (05433 m – 0.5530 m), en este intervalo se tiene una respuesta de oscilación asimétrica en rolido, y número de periodo igual a dos. La figura 4.36 presenta resultados característicos de esta faja. En este intervalo la respuesta rolido tiene un comportamiento de alternancia de las amplitudes en rolido ( $\phi$ ).

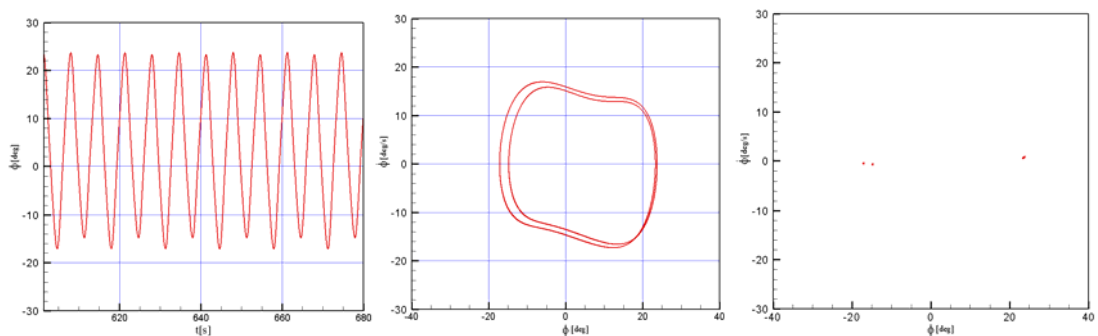


Figura 4.36: Serie temporal, rolido ( $\phi_{max}=23.73^\circ$ ), espacio de fase y sección de Poincaré con número de período igual a dos,  $Aw=0.55$ m,  $w_e/w_{n4} = 2.2$ , C.I.#01.

- Intervalo (0.5531 m – 0.5551 m), se tiene una respuesta de oscilación asimétrica en rolo, y con número de periodo igual a cuatro. En este intervalo muestra la respuesta con comportamiento de alternancia para rolo, que es característico de la multiestabilidad. En la figura 4.37 muestra la existencia de la oscilación para rolo con número de periodo igual a cuatro.

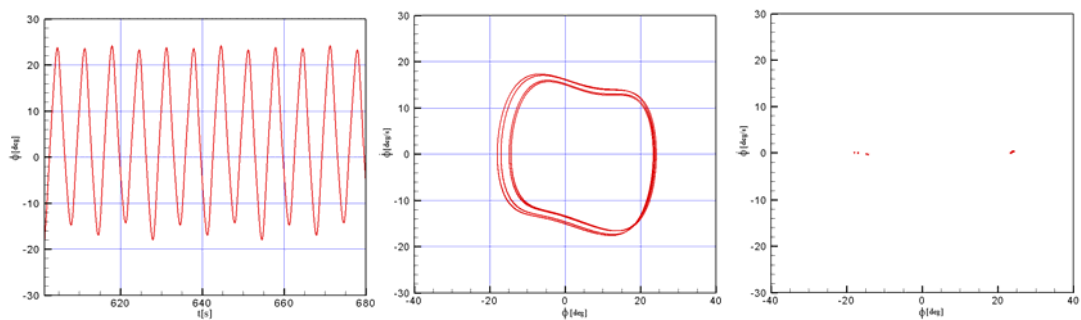


Figura 4.37: Serie temporal, rolo ( $\phi_{max}=23.82^\circ$ ), espacio de fase y sección de Poincaré con número de período igual a cuatro, para  $A_w=0.5545$  m,  $w_e / w_{n4} = 2.2$ , C.I.#01.

- Intervalo (0.5552 m – 0.5558 m), en el cual se tiene una respuesta de oscilación asimétrica en rolo, y número de periodo igual a ocho. En este intervalo la respuesta en rolo tiene un comportamiento de alternancia debido a la multiestabilidad, conforme es mostrado en la figura 4.38.

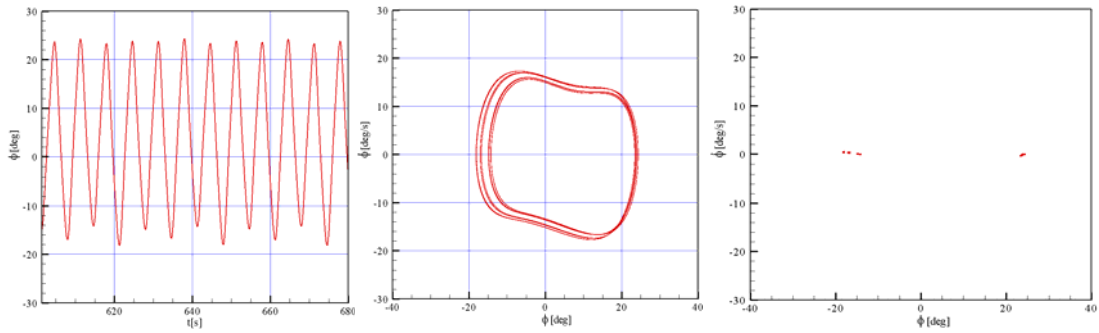


Figura 4.38: Serie temporal, roloido ( $\phi_{max}=23.91^\circ$ ), espacio de fase e sección de Poincaré con número de período igual a ocho, para  $Aw=0.5555$  m,  $w_e/w_{n4} = 2.2$ , C.I.#01.

- Intervalo (0.5559 m – 0.60 m), en este intervalo se tiene respuesta caótica. Se observa un aumento del comportamiento caótico con un incremento de la amplitud de la ola, lo que se muestra en las figuras 4.39 ~ 4.41

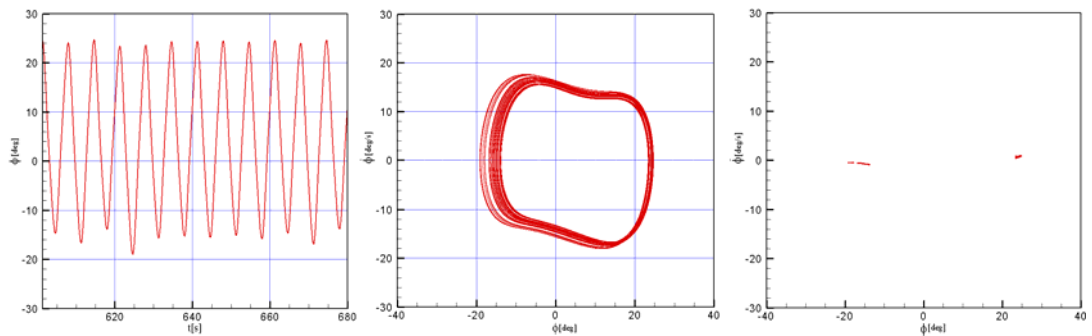


Figura 4.39: Serie temporal, roloido ( $\phi_{max}=24^\circ$ ), espacio de fase e sección de Poincaré como nube de puntos, para  $Aw=0.56$  m,  $w_e/w_{n4} = 2.2$ , C.I.#01.

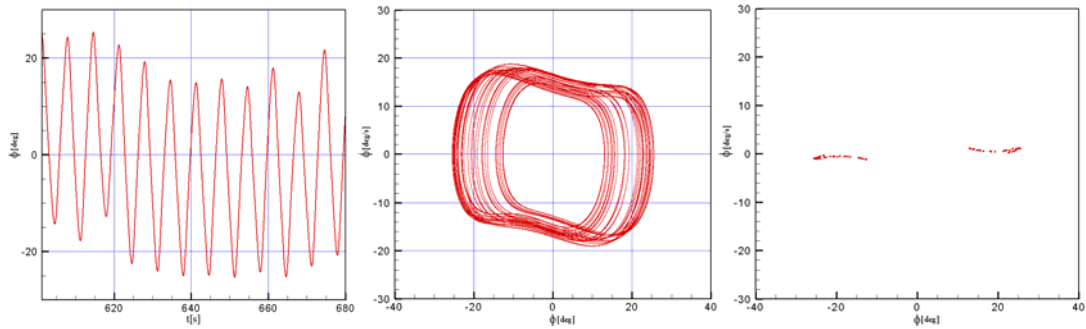


Figura 4.40: Serie temporal, roloido ( $\phi_{max}=24.84^\circ$ ), espacio de fase y sección de Poincaré con pérdida de periodicidad, zona caótica, para  $A_w=0.57m$ ,  $w_e / w_{n4} = 2.2$ , C.I.#01.

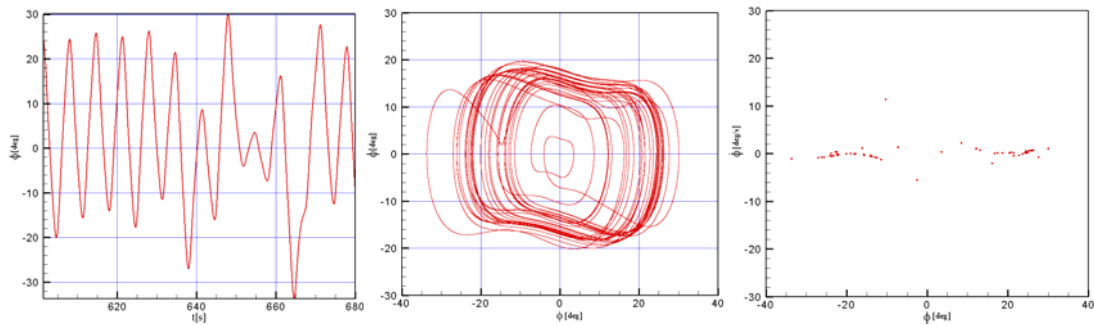


Figura 4.41: Serie temporal, roloido, espacio de fase y sección de Poincaré, zona caótica, para  $A_w=0.58 m$ ,  $w_e / w_{n4} = 2.2$ , C.I.#01.

### 4.3 Bacías de Atracción

Sistemas disipativos son caracterizados por la existencia de atractores, que pueden ser clasificados como: atractores puntuales, periódicos y los atractores extraños; sobre la variación de ciertos parámetros, fenómenos de transición estructural de los atractores son encontrados en muchos sistemas dinámicos de fuerte no linealidad, como es el caso de las ecuaciones que gobiernan la dinámica del buque en resonancia paramétrica en mares extremos.

Del punto de vista de la ingeniería son relevantes también las bacías de atracción, concernientes a las estructuras de la seguridad del sistema. Estas bacías de atracción tienen la tendencia de evolución y de destrucción en fase de cambios de los parámetros de control (condiciones iniciales). La erosión de estas bacías de atracción a menudo provoca fallas de ingeniería y por eso es necesario el control de la erosión de las bacías de atracción del sistema dinámico del buque.

En este capítulo se investiga numéricamente la evolución y el tamaño de las bacías de atracción de la dinámica del buque del modelo propuesto, cuando las condiciones iniciales son variadas entre límites para los cuales el sistema dinámico tiene comportamiento disipativo. Se muestra que el volumen de las bacías de atracción disminuye rápidamente, conforme nos aproximamos del límite conservativo, en fase de la variación de un dado parámetro del sistema en este caso será la amplitud de la ola.

Bacías de atracción son regiones en el espacio asociados a un atractor. Muchos de los sistemas dinámicos presentan más de un resultado, dependiendo de las condiciones iniciales, vide Belenky y Sevastianov (2003). La bacía de atracción es el conjunto de todos los puntos de partida (valores iniciales) que convergen para el atractor.

#### **4.3.1 Bacías de Atracción** $w_e / w_{n4} = 2.0$

Las bacías de atracción son aquí obtenidos determinándose el conjunto de los valores máximos de la amplitud de en rolido en un tiempo igual a 600 segundos. Las



bacías de atracción son presentadas en las figuras siguientes con una resolución de 120x80 condiciones iniciales espaciadas regularmente con  $(\Delta\phi= 1 \text{ deg}$  y  $\Delta\dot{\phi}=1 \text{ deg/s}$ ). Las otras variables contenidas en la ecuación del movimiento no lineal, son  $F_n=0.3$ ,  $GM=0.37 \text{ m}$ ,  $\text{ksi}=180^\circ$  y una sintonía de  $w_e/w_{n4} = 2.0$ . El análisis de las bacías de atracción constituye un ejemplo físico interesante relacionado a la frontera fractal. Se muestra a seguir una secuencia de bacías de atracción a partir de la variación del parámetro de control, que será la Amplitud de la Ola ( $A_w$ ).

Las bacías de atracción son determinadas para poder conocer las zonas en las cuales las condiciones iniciales llevan al buque a volcar, las zonas de color rojo en las figuras siguientes. Todas las bacías de atracción mostradas son obtenidas para las condiciones iniciales de:  $z_0 = 0.0 \text{ m}$ ,  $\dot{z}_0 = 0.01 \text{ m/s}$ ,  $\theta_0 = 0.0 \text{ deg}$ ,  $\dot{\theta}_0 = 0.01 \text{ deg/s}$ , en cuanto que las condiciones iniciales de rolido (angulares y velocidades angulares) son variados sistemáticamente, vide Nayfeh e Sanchez (1990).

A seguir haremos una discusión sobre las bacías de atracción obtenidos. En las figuras 4.42 y 4.43, son mostrados las bacías para  $A_w=0.0 \text{ m}$  y  $A_w=0.2 \text{ m}$ , respectivamente. En la figura 4.42 se registra en la realidad el decaimiento de rolido. En la figura 4.43 la bacía de atracción es formada por amplitudes de rolido casi iguales a cero, en la cuales todavía no se presenta la resonancia paramétrica. En la figura 4.44, para  $A_w=0.4 \text{ m}$  ya hay el inicio de las amplificaciones en rolido. En la figura 4.45, para  $A_w=4.5 \text{ m}$  se observa ya el inicio de la erosión lateral de la bacía de atracción, todavía en otras áreas en las partes superior e inferior de las bacías de

atracción sean conquistados. Ya en la figura 4.46 para  $A_w=0.6$  m, a deterioración de la bacía de atracción se hace más evidente, al mismo tiempo en que las respuestas de rolido aumentan (vide escala de colores en el topo de las figuras). En las figuras de 4.47 a 4.49 se observa la pérdida progresiva de la estabilidad, o sea, se presenta una fuerte erosión de las bacías de atracción y una marcante reducción del área de respuestas limitadas, siendo que a partir de la figura 4.48 se puede observar una pronunciada erosión y la destrucción de la bacía de atracción.

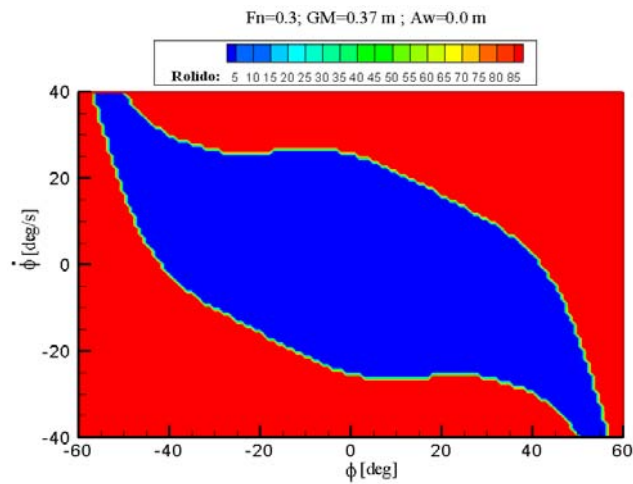


Figura 4.42: Bacía de atracción,  $A_w=0.0$  m,  $w_e / w_{n4} = 2.0$ .

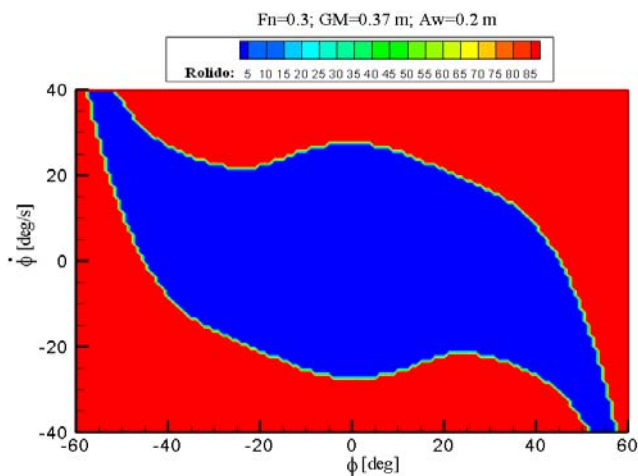


Figura 4.43: Bacía de atracción,  $A_w=0.2$  m,  $w_e / w_{n4} = 2.0$ .

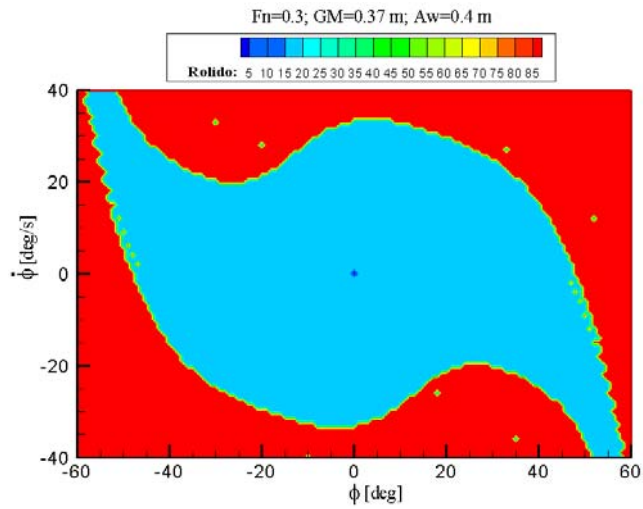


Figura 4.44: Bacía de atracción,  $A_w=0.4$  m,  $w_e / w_{n4} = 2.0$ .

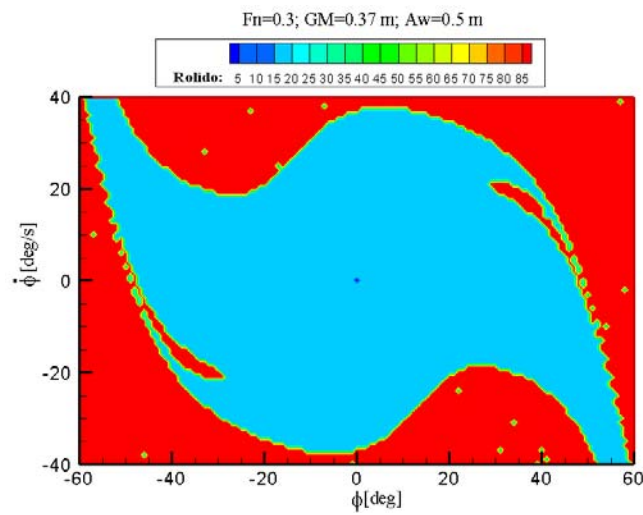


Figura 4.45: Bacía de atracción,  $A_w=0.5$  m,  $w_e / w_{n4} = 2.0$ .

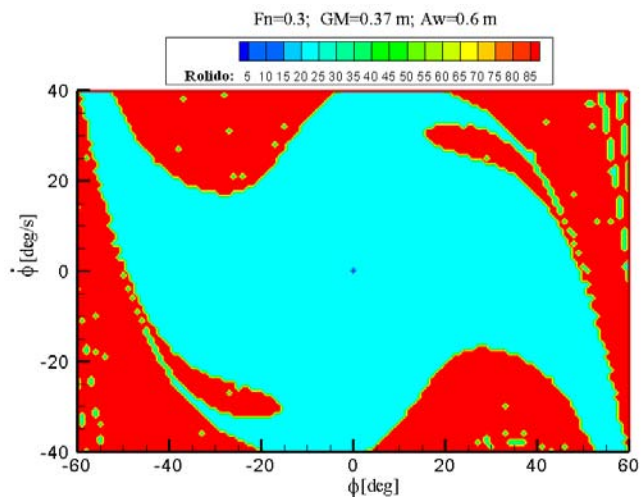


Figura 4.46: Bacía de atracción,  $A_w=0.6$  m,  $w_e / w_{n4} = 2.0$ .

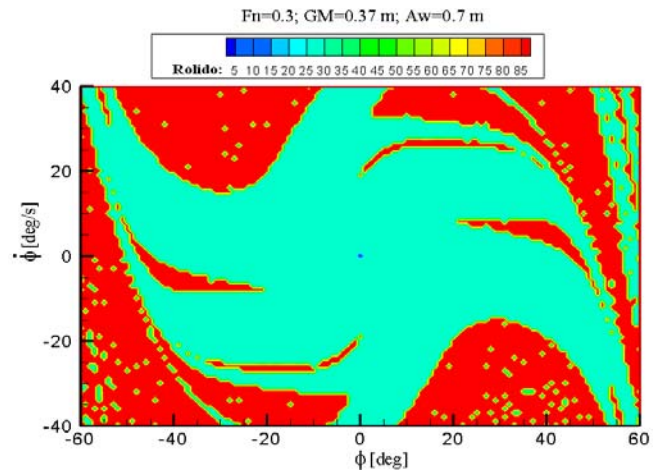


Figura 4.47: Bacía de atracción,  $A_w=0.7$  m,  $w_e / w_{n4} = 2.0$ .

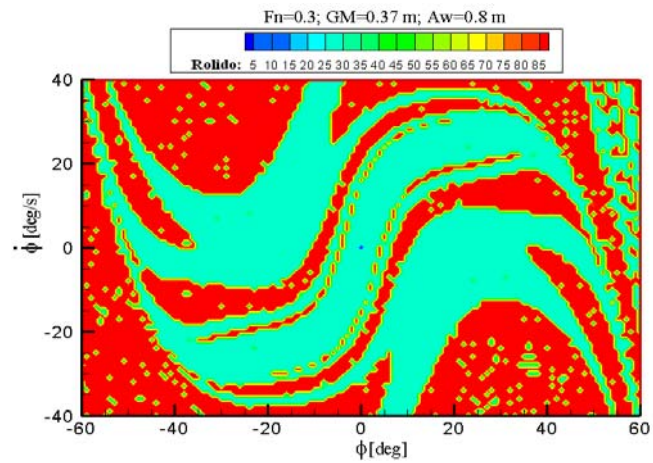


Figura 4.48: Bacía de atracción,  $A_w=0.8$  m,  $w_e / w_{n4} = 2.0$ .

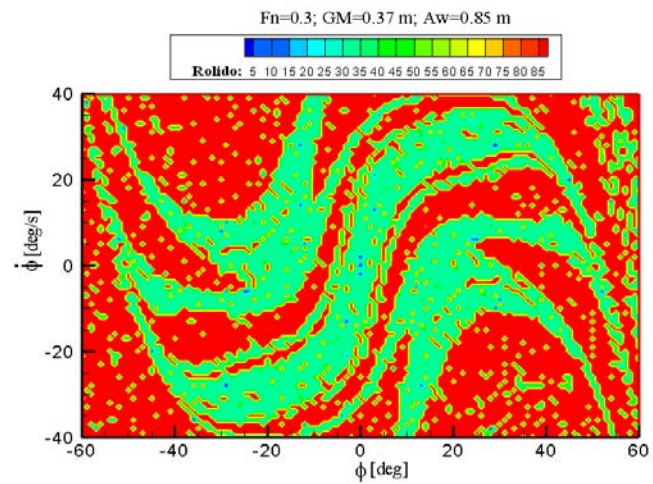


Figura 4.49: Bacía de atracción,  $A_w=0.85$  m,  $w_e / w_{n4} = 2.0$ .

La figura 4.50 muestra la curva de integridad (curva de áreas de las bacías de atracción normalizada a uno), vide McCue *et al.* (2006), caracterizada por,

$$\bar{A}(A_w) = \frac{A_s(A_w)}{A_0}$$

Donde  $A_s(A_w)$  define las áreas de las bacías de atracción y  $A_0$  define el área de la bacía de atracción para  $A_w=0.0$  m.

En el intervalo De  $A_w$  (0.00 m – 0.68 m) las bacías de atracción van aumentando de área, para olas mayores, asociadas al surgimiento de caos. Para el intervalo  $A_w$  (0.68 m – 0.85 m) se observa la reducción progresiva del área, tornándose una caída vertiginosa.

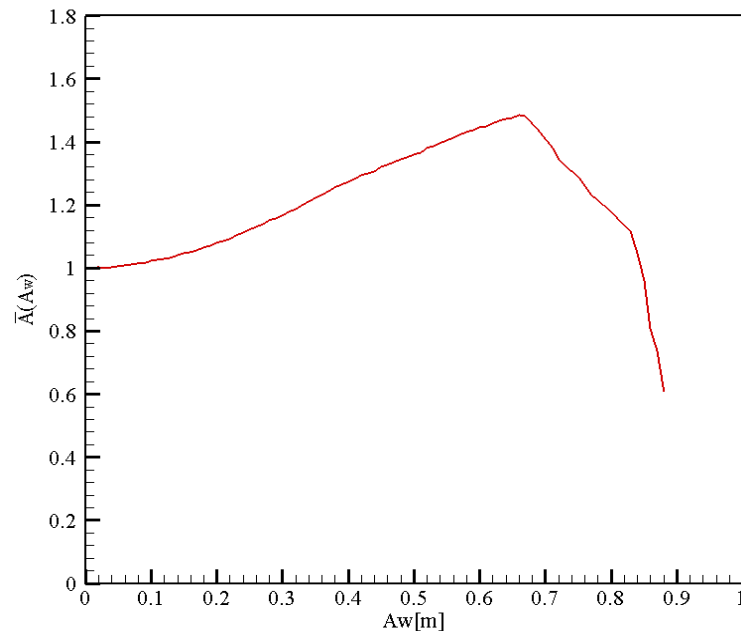


Figura 4.50: Curva de las áreas de las bacías de atracción normalizada a uno, con a área de la bacía de atracción para  $A_w=0.0$  m,  $w_e / w_{n4} = 2.0$ .

#### **4.3.2 Bacías de Atracción** $w_e / w_{n4} = 2.2$

A seguir serán mostrados las bacías de atracción para  $w_e / w_{n4} = 2.2$ , de modo similar a las análisis hechas para la sintonía de  $w_e / w_{n4} = 2.0$ , mostrados para las mismas condiciones de sintonía y para  $F_n=0.3$ ,  $GM=0.37$  m y  $ksi=180$ , y para las mismas condiciones iniciales de antes.

Para una amplitud  $A_w=0.51$  m, se observa ya el comienzo de la leve erosión lateral de la bacía de atracción y el aumento de la amplitud en roldo, que pueden ser observados por el cambio de color, todavía que otras áreas en la parte superior e inferior de las bacías son conquistados. Ya en la figura 4.61, para  $A_w=0.62$  m, la deteriorización de la bacía de se hace más pronunciada y más evidente, al mismo tiempo en que las respuestas de roldo aumentan, con el aumento de las amplitudes de la ola (vide escala de colores en el topo de las figuras). En las figuras 4.62 a 4.65 se observa la pérdida de la estabilidad, y también se puede observar una fuerte erosión de las bacías de atracción y una marcante reducción del área de respuestas limitadas, siendo que a partir de la figura 4.63 se puede observar una pronunciada erosión, y la destrucción de la bacía de atracción.

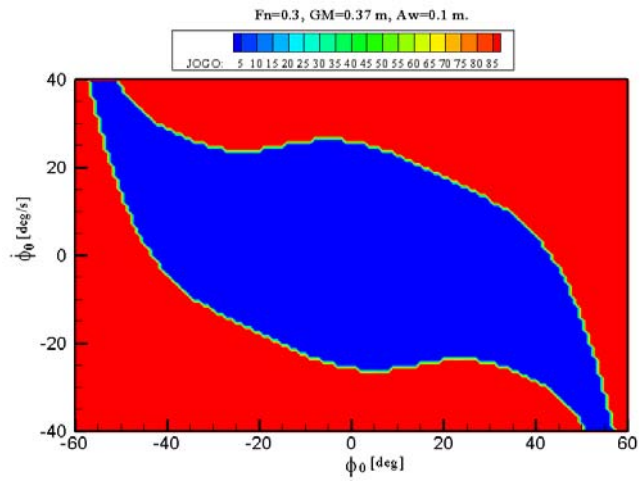


Figura 4.51: Bacía de atracción,  $A_w=0.10$  m,  $w_e / w_{n4} = 2.2$ .

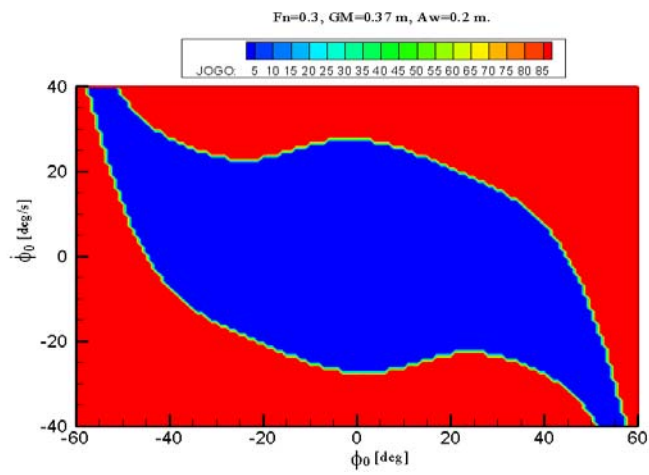


Figura 4.52: Bacía de atracción,  $A_w=0.2$  m,  $w_e / w_{n4} = 2.2$ .

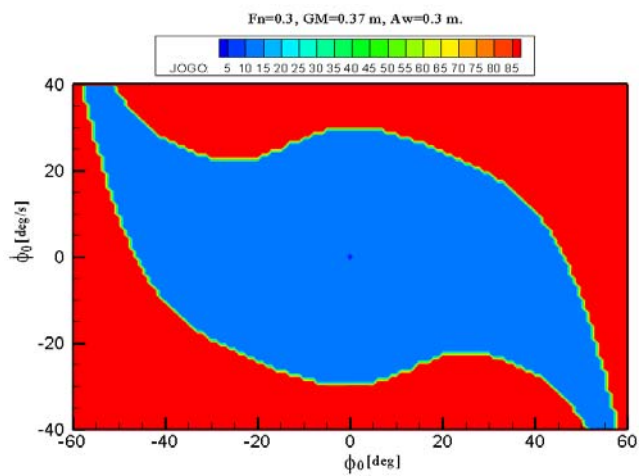


Figura 4.53: Bacía de atracción,  $A_w=0.3$  m,  $w_e / w_{n4} = 2.2$ .

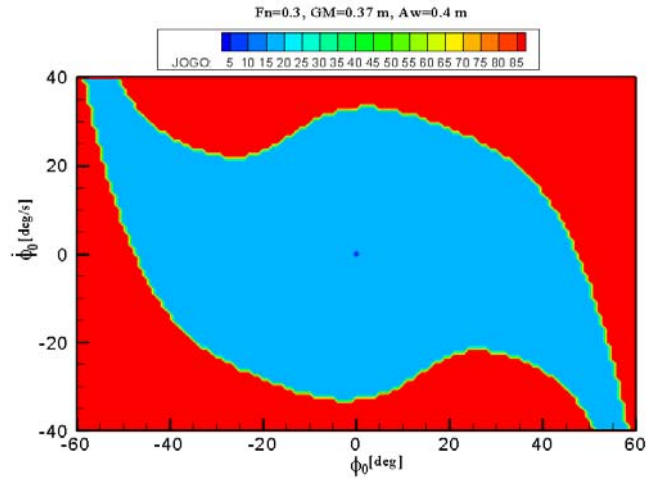


Figura 4.54: Bacía de atracción,  $A_w=0.4$  m,  $w_e / w_{n4} = 2.2$ .

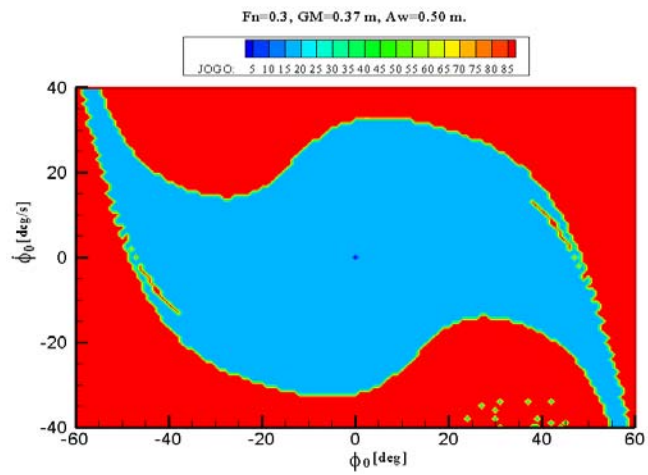


Figura 4.55: Bacía de atracción,  $A_w=0.5$  m,  $w_e / w_{n4} = 2.2$ .

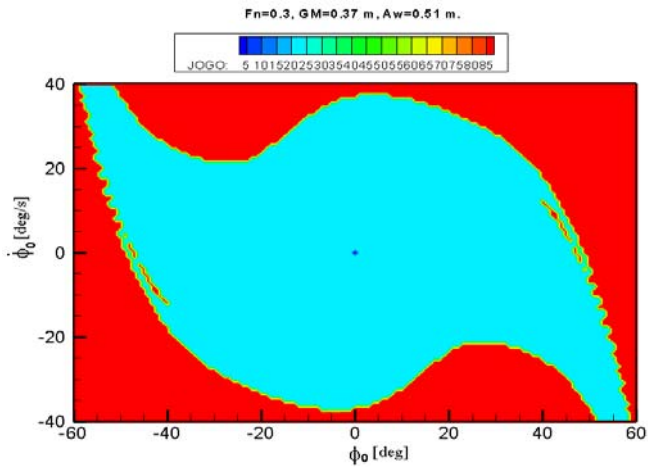


Figura 4.56: Bacía de atracción,  $A_w=0.51$  m,  $w_e / w_{n4} = 2.2$ .



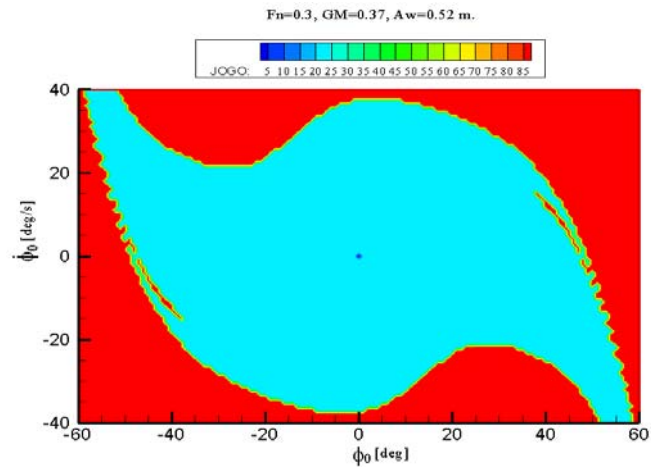


Figura 4.57: Bacía de atracción,  $A_w=0.52$  m,  $w_e / w_{n4} = 2.2$ .

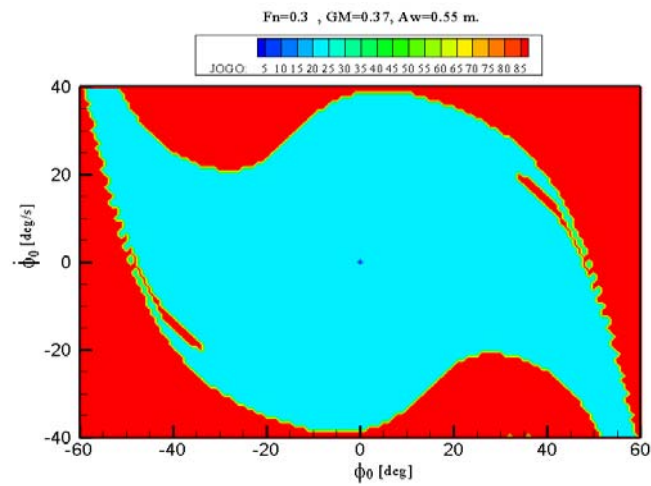


Figura 4.58: Bacía de atracción,  $A_w=0.55$  m,  $w_e / w_{n4} = 2.2$ .

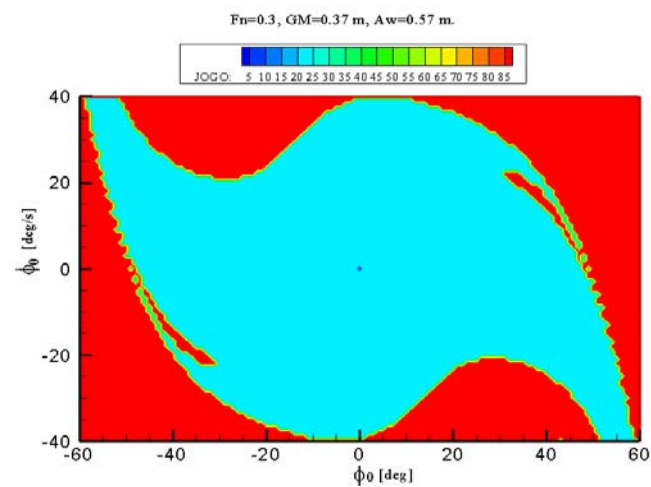


Figura 4.59: Bacía de atracción,  $A_w=0.57$  m,  $w_e / w_{n4} = 2.2$ .

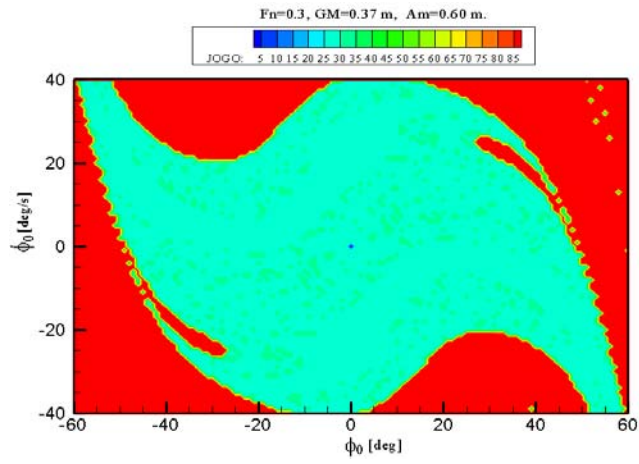


Figura 4.60: Bacía de atracción,  $A_w=0.60$  m,  $w_e / w_{n4} = 2.2$ .

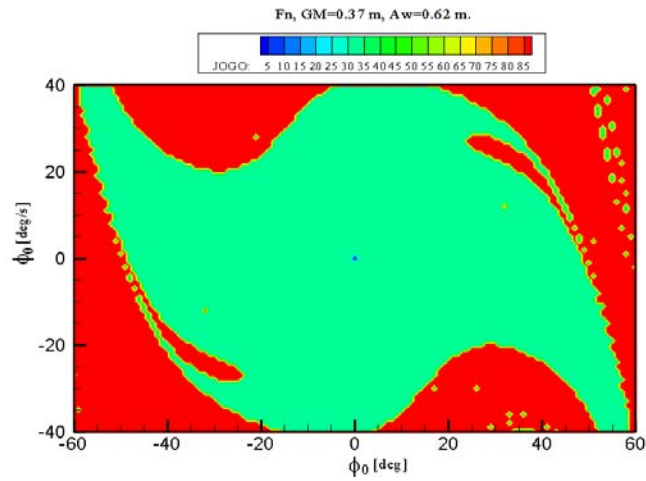


Figura 4.61: Bacía de atracción,  $A_w=0.62$  m,  $w_e / w_{n4} = 2.2$ .

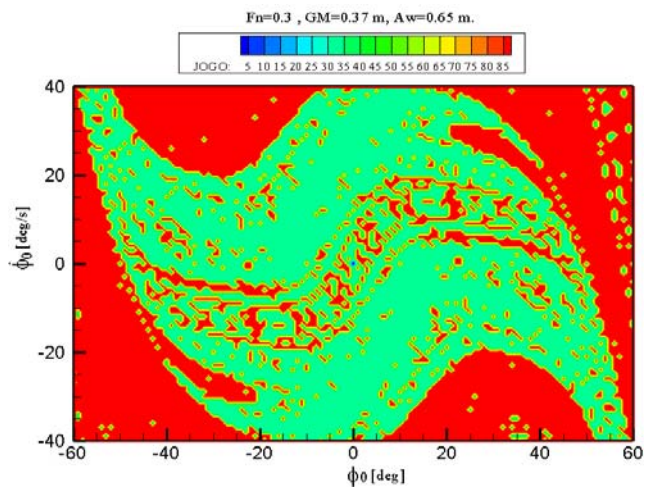


Figura 4.62: Bacía de atracción,  $A_w=0.65$  m,  $w_e / w_{n4} = 2.2$ .

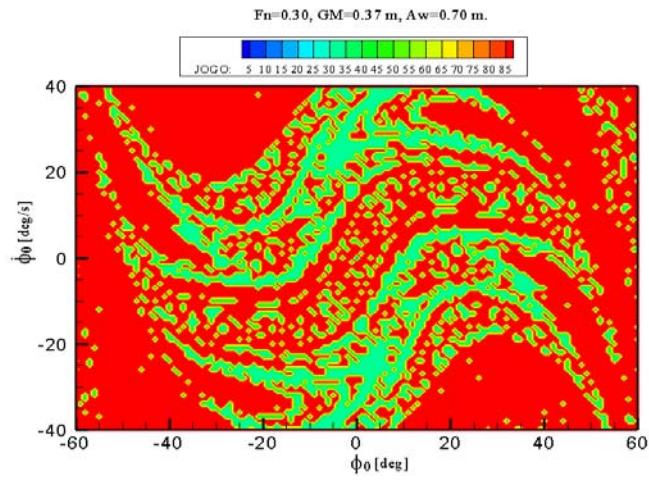


Figura 4.63: Bacía de atracción,  $A_w=0.67\text{ m}$ ,  $w_e / w_{n4} = 2.2$ .

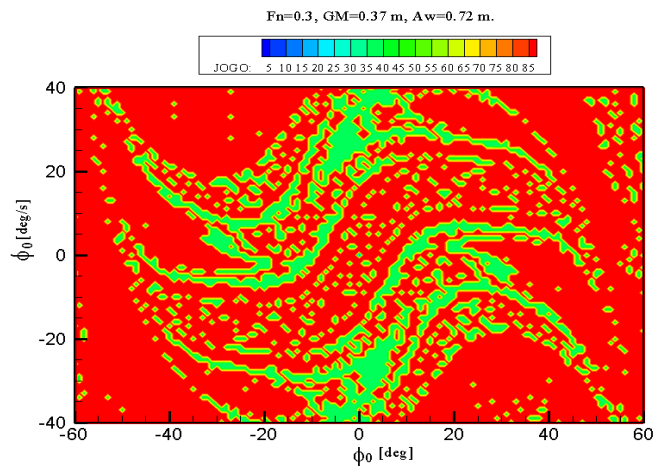


Figura 4.64: Bacía de atracción,  $A_w=0.72\text{ m}$ ,  $w_e / w_{n4} = 2.2$ .

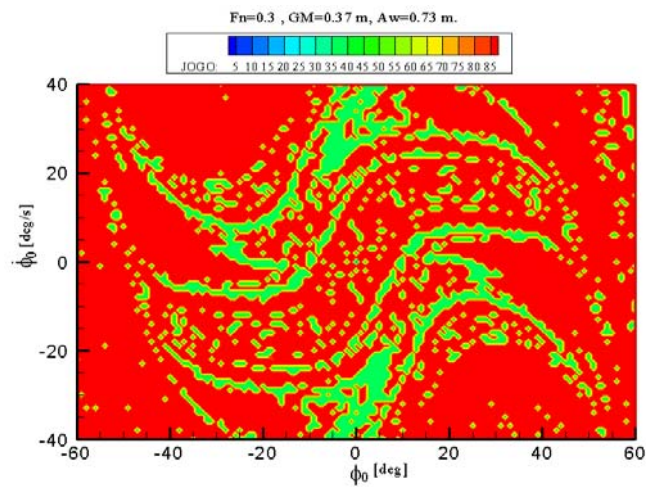
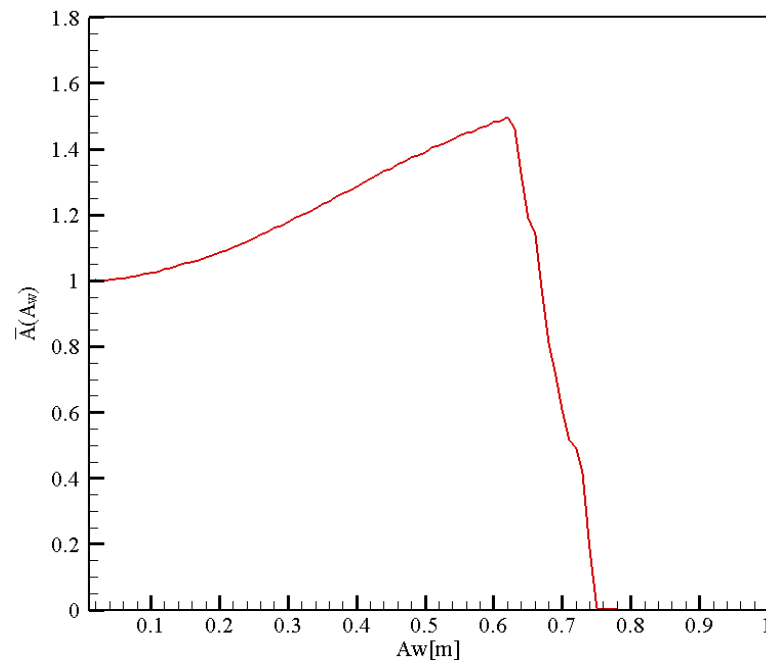


Figura 4.65: Bacía de atracción,  $A_w=0.73\text{ m}$ ,  $w_e / w_{n4} = 2.2$ .

La figura 4.66 muestra la curva de integridad (curva de áreas de las bacías de atracción normalizada a uno) para  $A_w=0.0$  m, curva que se obtiene variando la amplitud de la ola ( $A_w$ ).

En el intervalo de  $A_w$  (0.00 m – 0.64 m) las bacías de atracción van aumentar de área, para olas mayores, proceso asociado al surgimiento de caos. Ya para el intervalo  $A_w$  (0.64 m – 0.75 m) se observa la reducción progresiva del área, tornándose una caída efectivamente más vertiginosa en comparación con la sintonía anterior ( $w_e / w_{n4} = 2.0$ ), presentándose la destrucción total de la bacía de atracción para olas menores en relación de la sintonía  $w_e / w_{n4} = 2.0$ .



*Figura 4.66: Curva de las áreas de la bacía de la atracción normalizada a uno, con el área de la bacía de atracción para  $A_w=0.0$  m,  $w_e / w_{n4} = 2.2$ .*

#### 4.4 Exponente de Lyapunov

El régimen caótico surge cuando se tiene un crecimiento exponencial de perturbaciones infinitesimales y así dos órbitas divergen también exponencialmente con el tiempo. Aunque divergiendo exponencialmente, las órbitas permanecen en una parte finita del espacio de estados. Una evaluación para la inestabilidad del sistema, que lleva al comportamiento exponencial en el régimen caótico es usualmente hecha a través de los exponentes de Lyapunov. Así los coeficientes de Lyapunov producen una medida de la sensibilidad del sistema a las condiciones iniciales. La forma de ser visto eso es considerando la evolución temporal de un sistema dinámico a partir de dos condiciones iniciales, muy próximas.

Como fue señalado antes, una evolución caótica, puede ser vista como la combinación de doblas con un número infinito de expansiones en por lo menos una dirección y contracciones en otras direcciones. Como consecuencia, es extremadamente difícil seguir la evolución de un flujo caótico cuando la divergencia de las trayectorias sobre el invariante caótico se torna rápida.

Para medir la tasa de divergencia de trayectorias, y por lo tanto cuantificar la dependencia sensitiva a las condiciones iniciales, se utilizarán los exponentes de Lyapunov. La significancia del concepto del número de Lyapunov es que este puede ser aplicado a órbitas no periódicas. De hecho, la definición de una órbita caótica es aquella que no atiende a la periodicidad asintótica y cuyo exponente de Lyapunov es mayor que uno. En una evolución temporal descrito por un sistema dinámico diferenciable en el espacio de fase de posibles dimensiones, los exponentes de

Lyapunov miden la tasa de separación del punto de la órbita actual a lo largo de  $m$  direcciones ortogonales.

El método de las trayectorias, inicialmente desenvuelta por Wolf *et al.* (1985), tiene como idea básica la evolución de la distancia, en el espacio tangente, de dos trayectorias inicialmente muy próximas. Este método, a pesar de posibilitar el cálculo de todos los exponentes de Lyapunov, en la realidad se limita solamente al mayor exponente dominante. Esto es suficiente para caracterizar el comportamiento caótico de un sistema dinámico. En este trabajo los exponentes de Lyapunov son calculados a partir del algoritmo propuesto de Wolf *et al.*

#### 4.4.1 Exponente de Lyapunov $w_e / w_{n4} = 2.0$

Los exponentes característicos de Lyapunov son calculados para una sintonía de  $w_e / w_{n4} = 2.0$ ;  $w_{n4}=0.858$  rad/s;  $w_e=1.716$  rad/s;  $w=1.135528642$  rad/s y con las condiciones iniciales de (C.I.#01):  $z_0 = 0.0$  m,  $\dot{z}_0 = 0.01$  m/s,  $\phi_0 = 2$  deg,  $\dot{\phi}_0 = -0.5$  deg/s,  $\theta_0 = 0.0$  deg,  $\dot{\theta}_0 = 0.01$  deg/s. Son mostrados los exponentes de Lyapunov para diferentes valores de la Amplitud de la Ola ( $A_w$ ), conservándose los demás parámetros arriba citados.

Los exponentes de Lyapunov, muestran la estabilidad global del sistema, donde los valores obtenidos para dichos exponentes, después de eliminar los transientes, son negativos para zonas estables, cero puntos de bifurcación y positivos en zonas caóticas.

En figuras 4.67 ~4.71, todos los seis exponentes son negativos, el sistema responde en regiones estables y bien comportadas.

En la figura 4.72, se observa que uno de los exponentes de Lyapunov se iguala a cero, corresponde al punto de bifurcación, sistema periódico estable (ciclo límite).

En las figuras 4.73 ~4.77, se tiene exponentes de Lyapunov positivo, el sistema tiene un comportamiento caótico (atractor extraño).

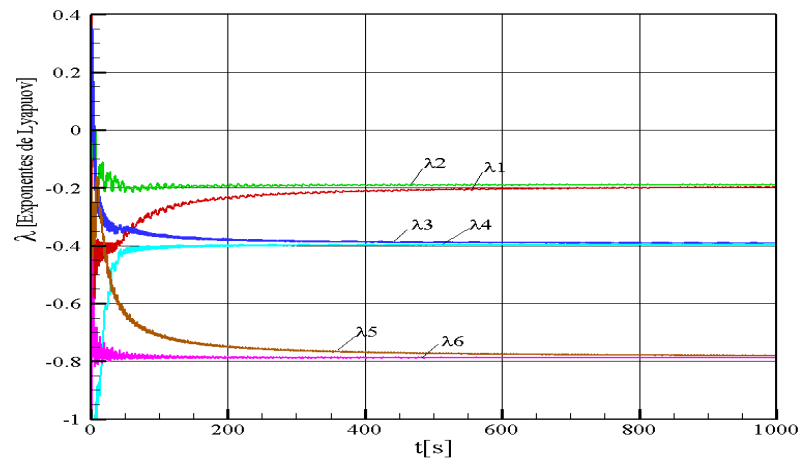


Figura 4.67: Exponentes de Lyapunov:  $A_w=0.4$  m,  $w_e / w_{n4} = 2.0$ , C.I.#01.

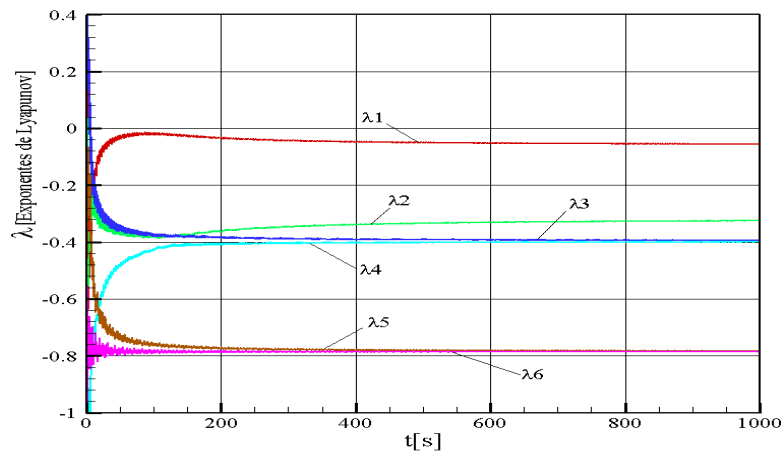


Figura 4.68: Exponentes de Lyapunov:  $A_w=0.5$  m,  $w_e / w_{n4} = 2.0$ , C.I.#01.

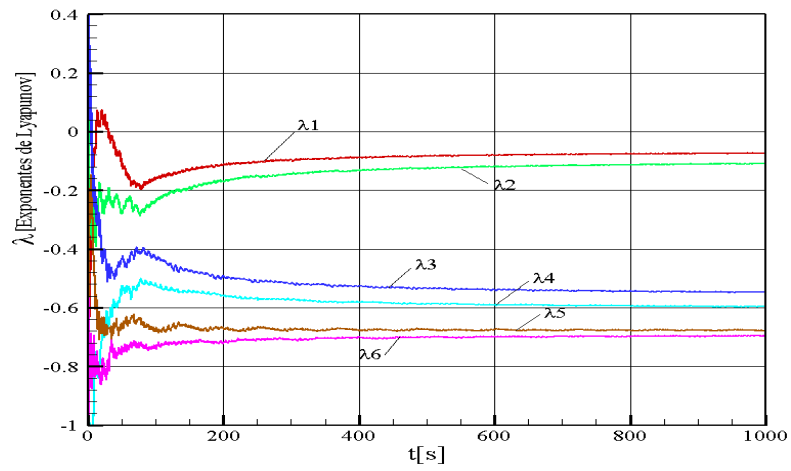


Figura 4.69: Exponentes de Lyapunov:  $A_w=0.6$  m,  $w_e/w_{n4} = 2.0$ , C.I.#01.

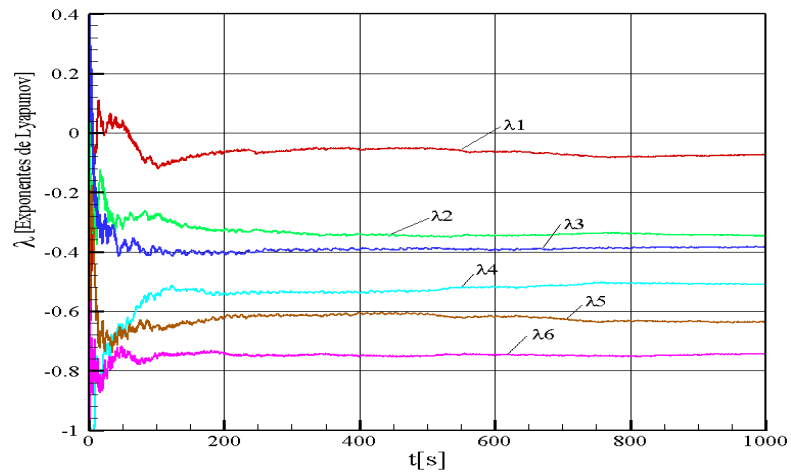


Figura 4.70: Exponentes de Lyapunov:  $A_w=0.61$  m,  $w_e/w_{n4} = 2.0$ , C.I.#01.

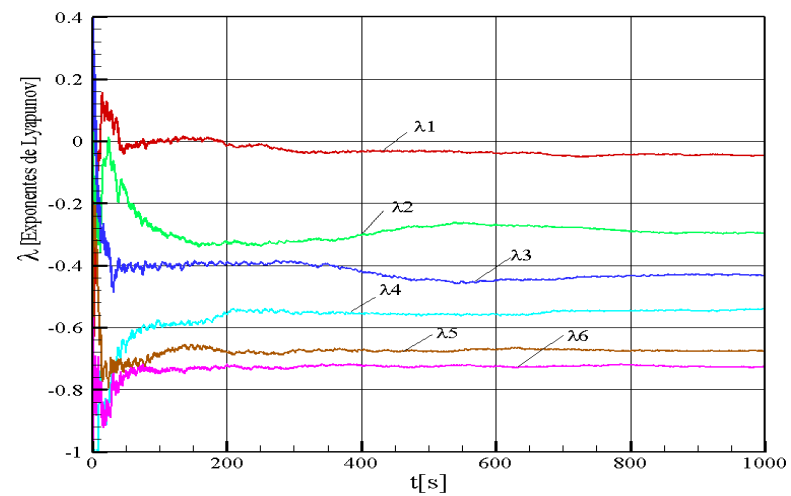


Figura 4.71: Exponentes de Lyapunov:  $A_w=0.62$  m,  $w_e/w_{n4} = 2.0$ , C.I.#01.



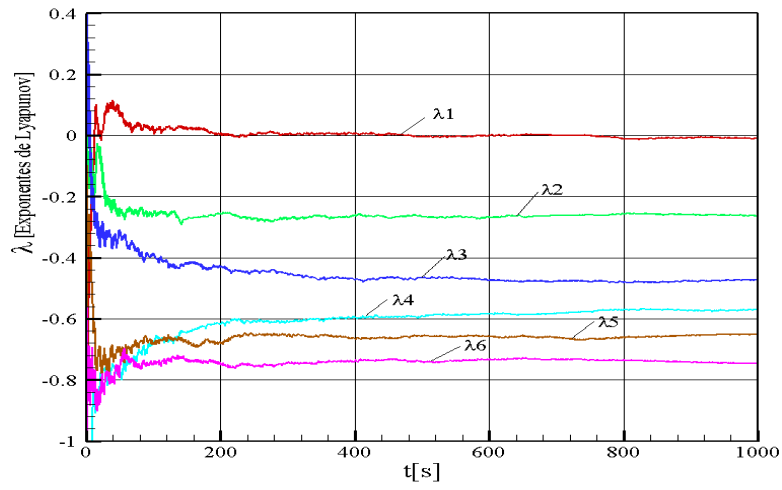


Figura 4.72: Exponentes de Lyapunov:  $A_w=0.63$  m,  $w_e / w_{n4} = 2.0$ , C.I.#01.

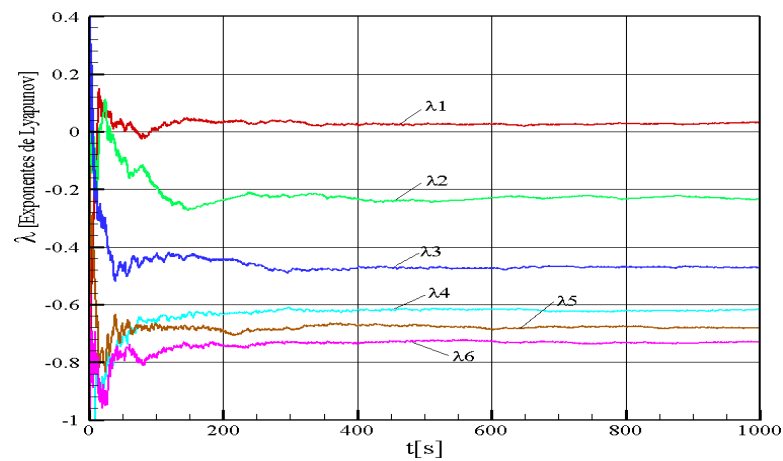


Figura 4.73: Exponentes de Lyapunov:  $A_w=0.64$  m,  $w_e / w_{n4} = 2.0$ , C.I.#01.

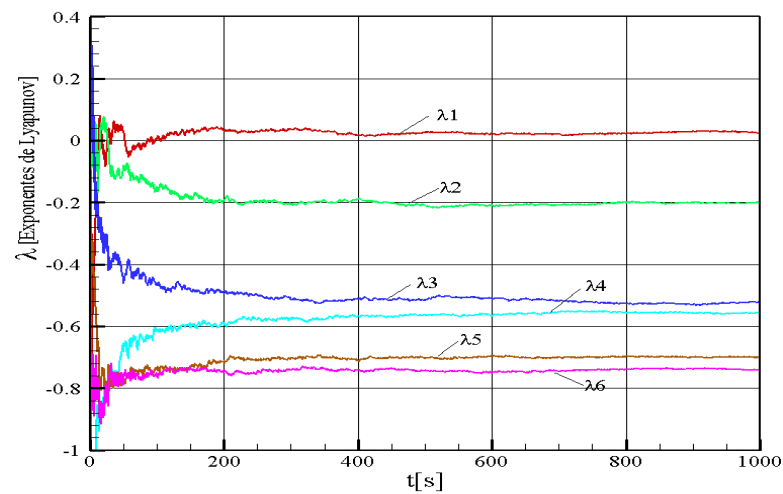


Figura 4.74: Exponentes de Lyapunov:  $A_w=0.65$  m,  $w_e / w_{n4} = 2.0$ , C.I.#01.

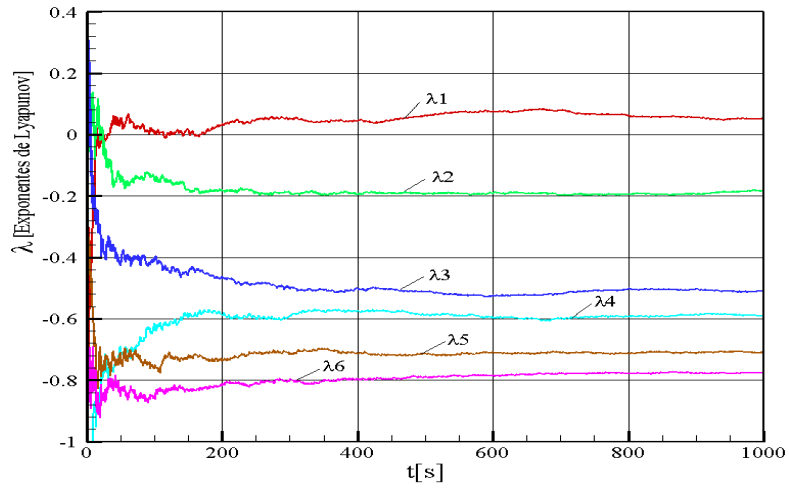


Figura 4.75: Exponentes de Lyapunov:  $A_w=0.66$  m,  $w_e / w_{n4} = 2.0$ , C.I.#01.

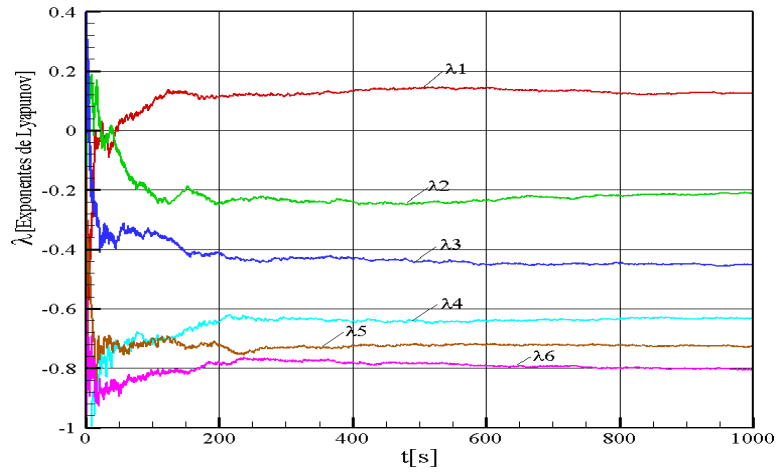


Figura 4.76: Exponentes de Lyapunov:  $A_w=0.67$  m,  $w_e / w_{n4} = 2.0$ , C.I.#01.

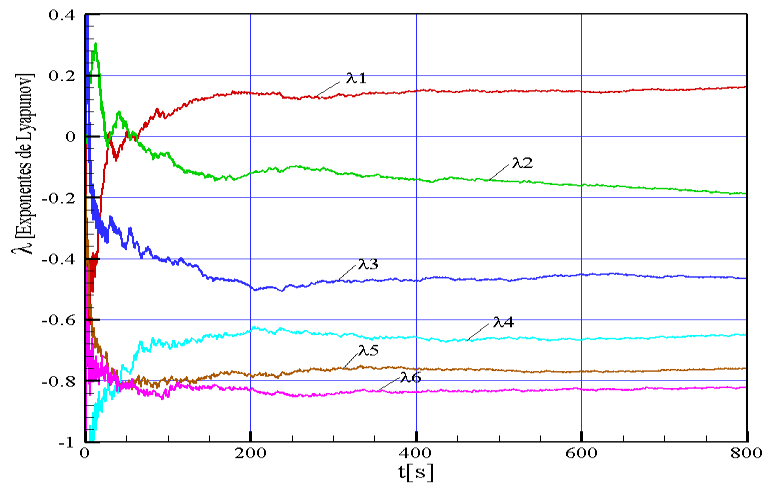


Figura 4.77: Exponentes de Lyapunov:  $A_w=0.678$  m,  $w_e / w_{n4} = 2.0$ , C.I.#01.

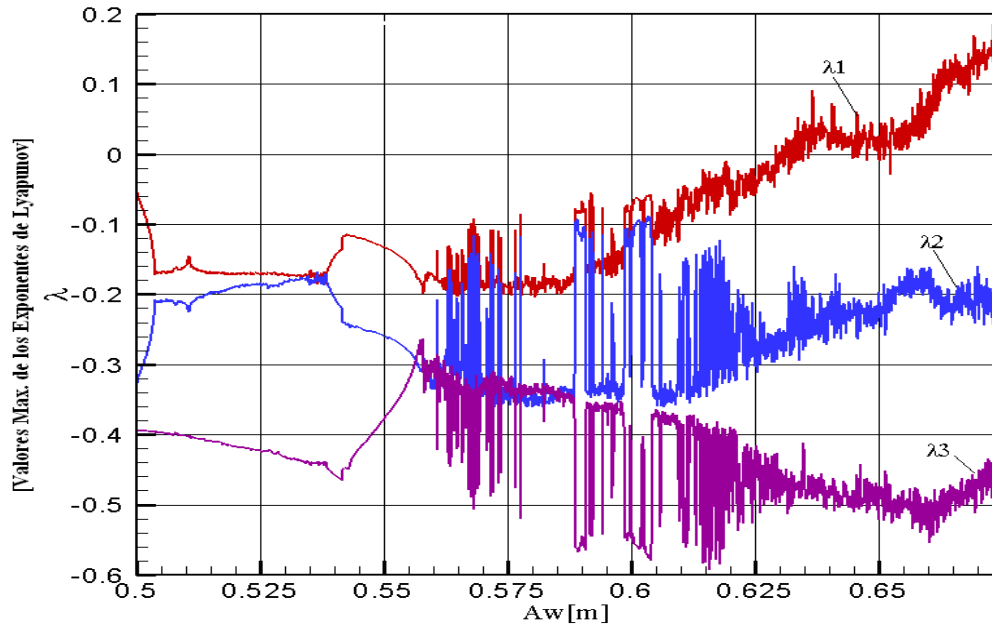


Figura 4.78: Diagrama para los exponentes de Lyapunov,  $w_e / w_{n4} = 2.0$ , C.I.#01.

La figura 4.78 muestra los valores máximos de los exponentes de Lyapunov para un tiempo igual a 800 seg., para diferentes valores de la amplitud de la ola. La figura 4.78 identifica que el sistema dinámico ya presenta respuestas caóticas para amplitudes de ola superiores a  $A_w = 0.63$  m.

#### 4.4.2 Exponentes de Lyapunov $w_e / w_{n4} = 2.2$

A seguir, los exponentes característicos de Lyapunov calculados para una sintonía de  $w_e / w_{n4} = 2.2$ ;  $w_{n4} = 0.858$  rad/s;  $w_e = 1.716$  rad/s;  $w_{n4} = 0.858$  rad/s;  $w_e = 1.716$  rad/s;  $w = 1.135528642$  rad/s y las mismas condiciones iniciales de (C.I.#01), son presentados para diferentes valores de la amplitud de la ola ( $A_w$ ).

En las figuras 4.79 ~ 4.81, todos los seis exponentes son negativos, el sistema responde en regiones estables y bien comportados.

En la figura 4.82 se observa que el Exponente de Lyapunov se iguala a cero, corresponde al punto de bifurcación, sistema periódico estable (ciclo límite)

En las figuras 4.83 ~ 4.89, se tiene exponente de Lyapunov positivo, el sistema dinámico presenta comportamiento caótico (atractor extraño).

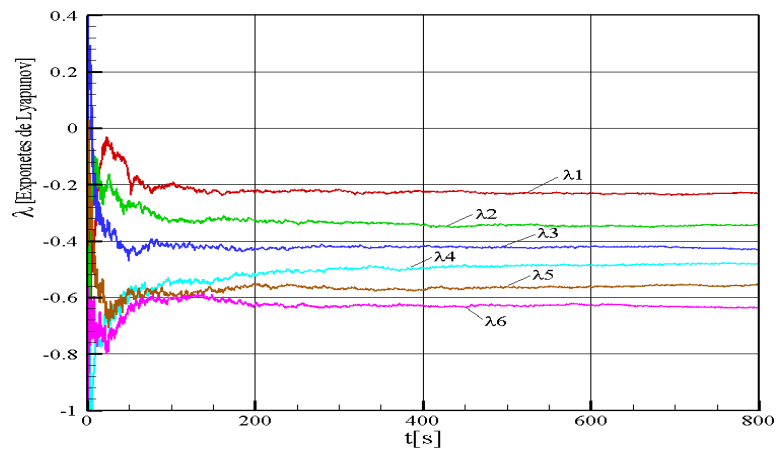


Figura 4.79: Exponentes de Lyapunov para  $Aw=0.5 m$ ,  $w_e / w_{n4} = 2.2$ , C.I.#01.

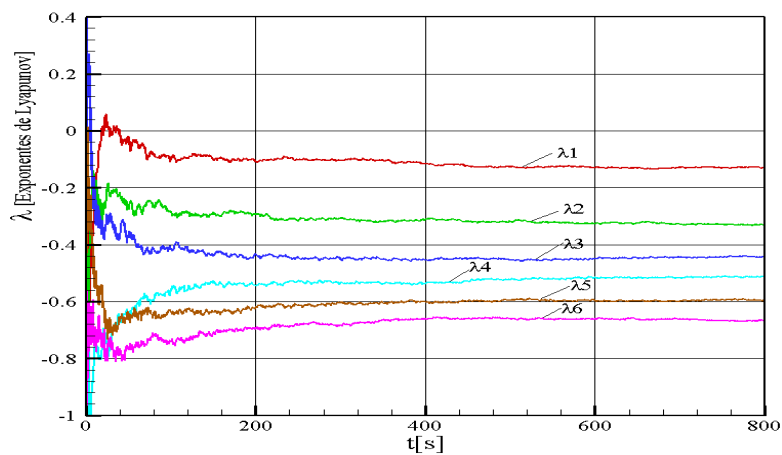


Figura 4.80: Exponentes de Lyapunov para  $Aw=0.52 m$ ,  $w_e / w_{n4} = 2.2$ , C.I.#01.

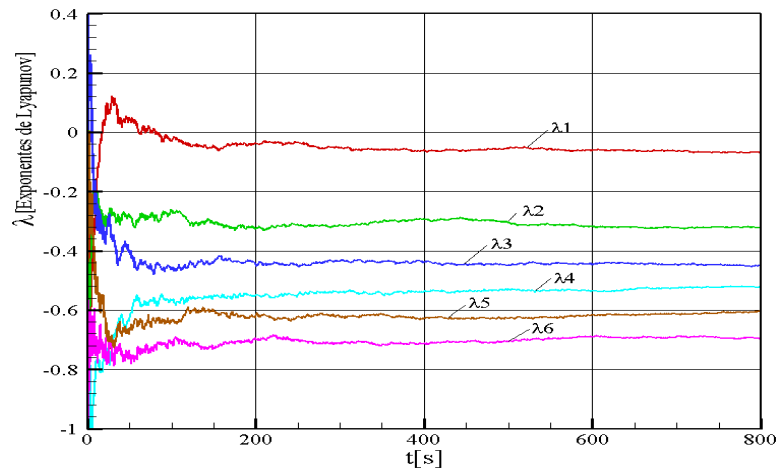


Figura 4.81: Exponentes de Lyapunov para  $A_w=0.53$  m,  $w_e / w_{n4} = 2.2$ , C.I.#01.

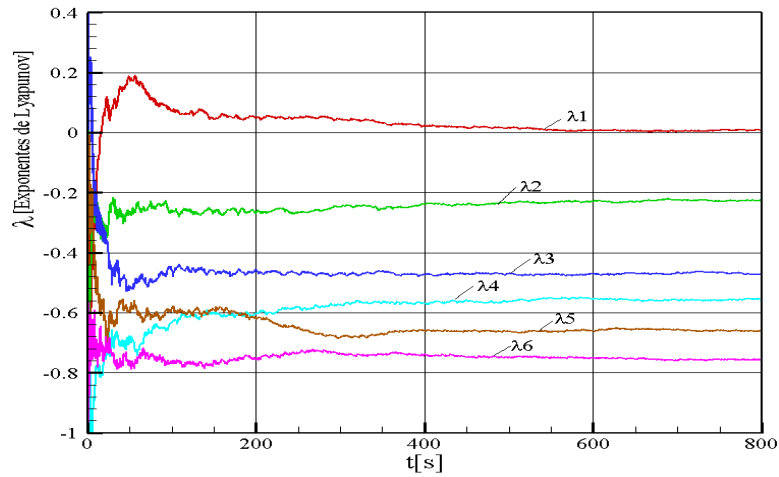


Figura 4.82: Exponentes de Lyapunov para  $A_w=0.54$  m,  $w_e / w_{n4} = 2.2$ , C.I.#01.

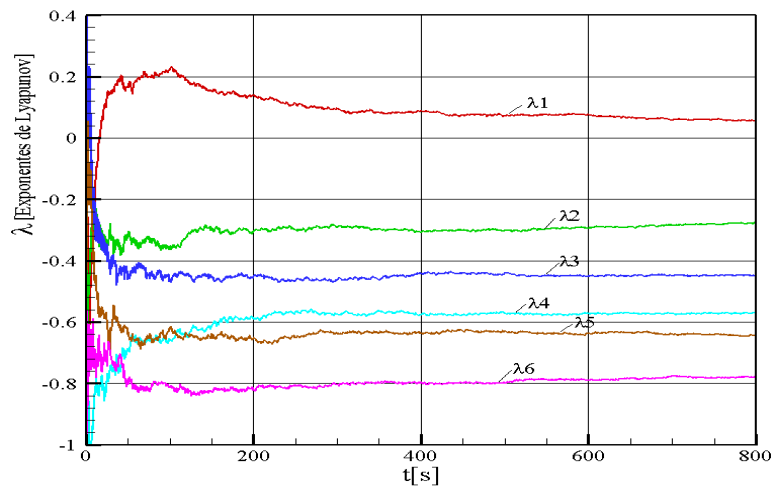


Figura 4.83: Exponentes de Lyapunov para  $A_w=0.55$  m,  $w_e / w_{n4} = 2.2$ , C.I.#01.

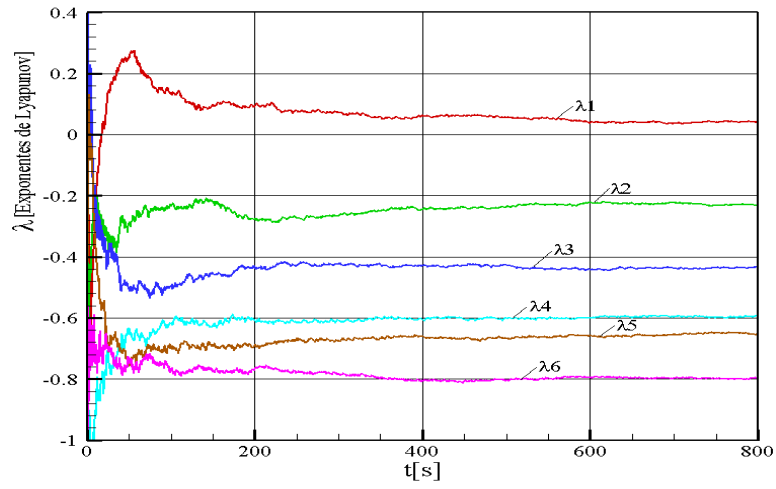


Figura 4.84: Exponentes de Lyapunov para  $A_w=0.555$  m,  $w_e/w_{n4} = 2.2$ , C.I.#01.

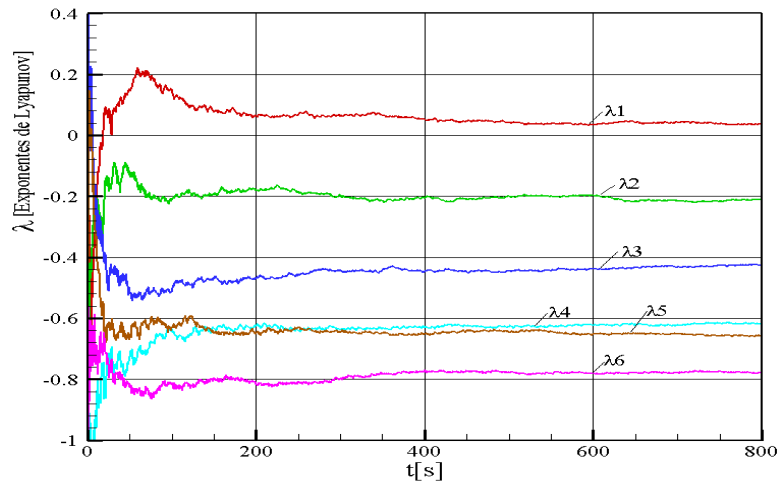


Figura 4.85: Exponentes de Lyapunov para  $A_w=0.557$  m,  $w_e/w_{n4} = 2.2$ , C.I.#01.

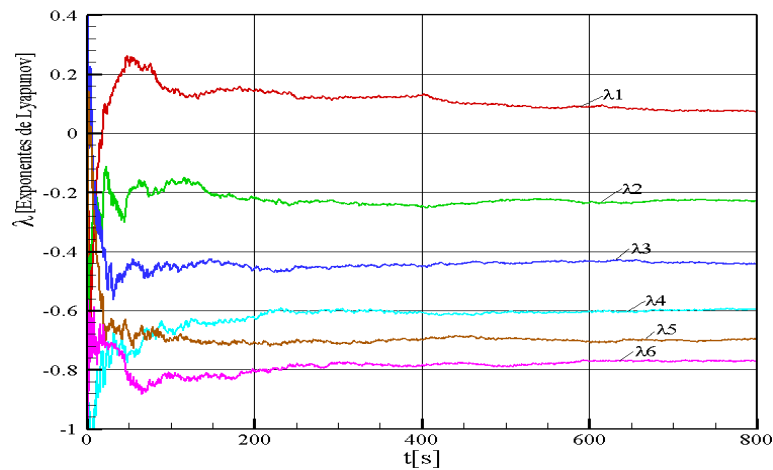


Figura 4.86: Exponentes de Lyapunov para  $A_w=0.559$  m,  $w_e/w_{n4} = 2.2$ , C.I.#01.

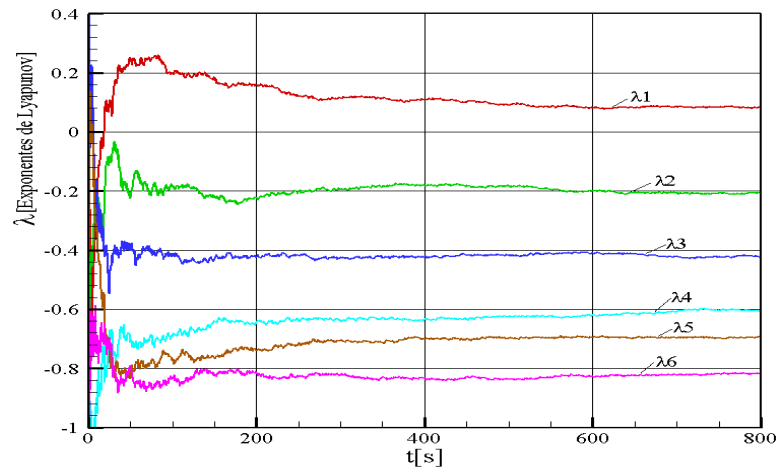


Figura 4.87: Exponentes de Lyapunov para  $A_w=0.561$  m,  $w_e/w_{n4} = 2.2$ , C.I.#01.

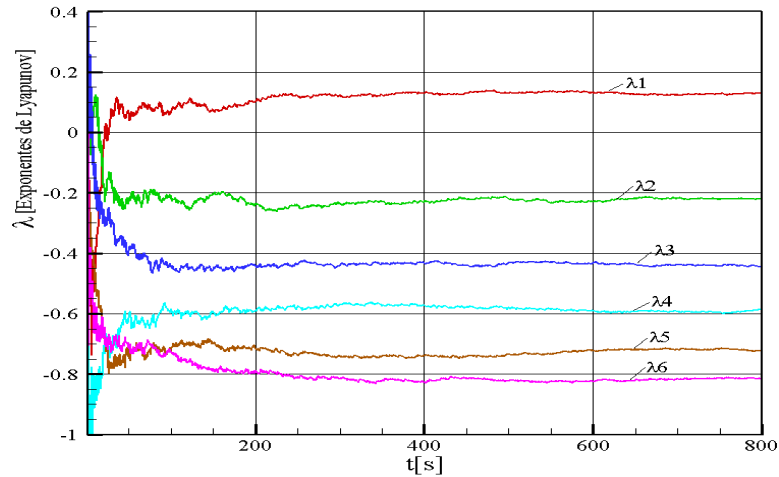


Figura 4.88: Exponentes de Lyapunov para  $A_w=0.564$  m,  $w_e/w_{n4} = 2.2$ , C.I.#01.

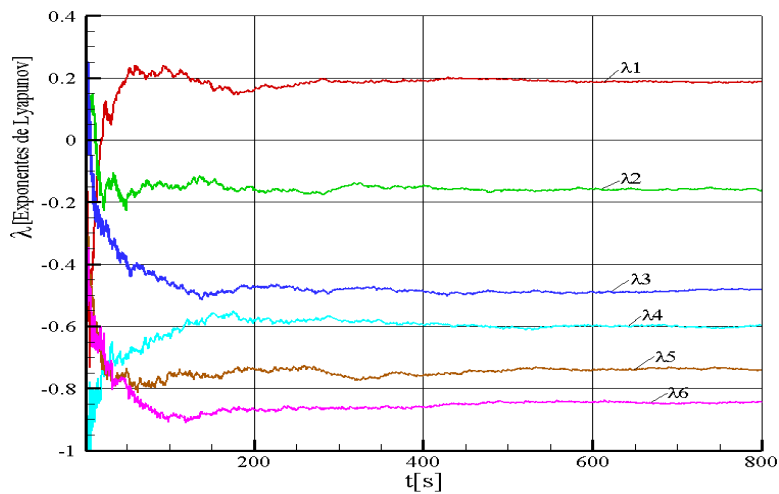


Figura 4.89: Exponentes de Lyapunov para  $A_w=0.57$  m,  $w_e/w_{n4} = 2.2$ , C.I.#01.

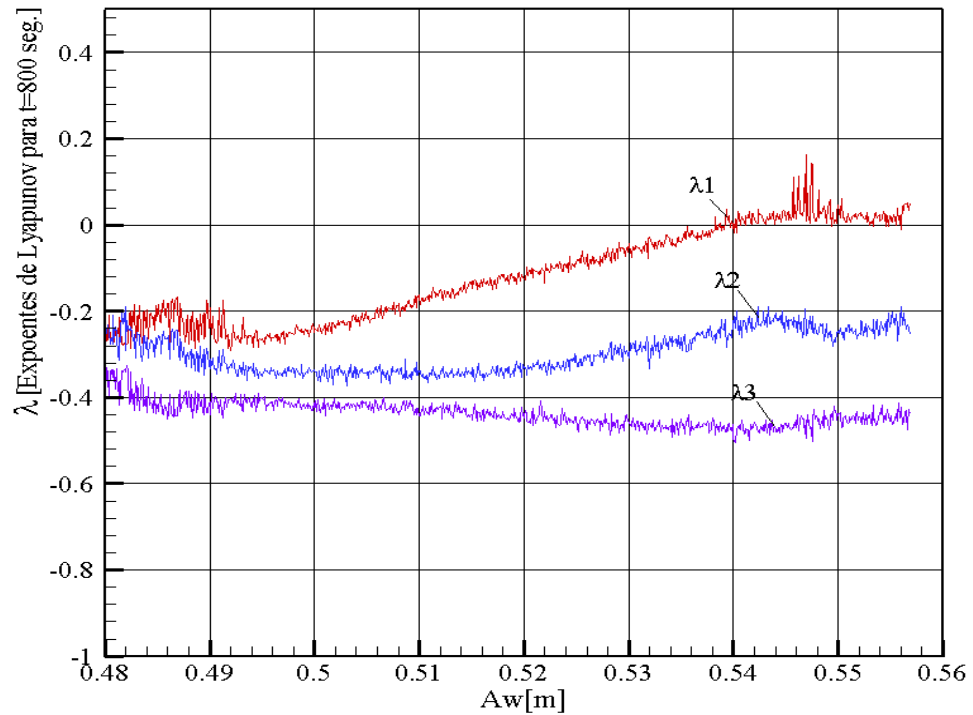


Figura 4.90: Exponentes de Lyapunov para  $t=800$  seg,  $w_e/w_{n4} = 2.2$ , C.I.#01.

La figura 4.90 muestra los valores máximos de los exponentes de Lyapunov para un tiempo igual a 800 seg., para diferentes amplitudes de la ola. La figura 4.90 identifica que uno de los exponentes ya es positivo, por tanto el sistema presenta respuestas caóticas para amplitudes de ola superiores a  $A_w=0.54$  m.



## CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

### 1 Generalidades

El objetito del presente trabajo es de dar un paso más adelante en el análisis de la dinámica compleja asociada al fenómeno de la resonancia paramétrica de buques en olas extremas. Fueron introducidos conceptos relativos a la dinámica no lineal determinística, con la finalidad de entender fenómenos reales expresados por un modelo matemático no lineal acoplado que representa el movimiento del cuerpo rígido del buque moviéndose sobre los efectos de paso de la ola, en condiciones de olas regulares en proa. La gran variedad de respuestas y comportamientos de sistemas dinámicos susceptibles a pequeñas alteraciones de las condiciones iniciales, impone que el análisis sea más detallada de manera a que se pueda observar lo que pasa en cada una de las regiones de estabilidad; la importancia de este trabajo es entender y conocer los tipos de respuestas y la ruta que presenta para el comportamiento caótico, para el caso de este sistema dinámico.

### 2 Conclusiones y Recomendaciones

- El fenómeno de la inestabilidad paramétrica del buque (TS) en mar de proa ( $\chi = 180^\circ$ ) olas regulares, fue analizado en el presente trabajo. A través de las herramientas de la dinámica no lineal, se procede el análisis de la pérdida de estabilidad y sensibilidad del buque a las no linealidades del buque asociado a los

acoplamiento entre los movimientos (arfa-da-rolido-cabeceo). Se desarrollarán en los capítulos anteriores procedimientos computacionales para:

- ✓ Integración de las ecuaciones de movimiento del buque (TS) con tres grados de libertad y no linealidades en el amortecimiento y restauración. Los límites de estabilidad numéricos para  $Fr=0.30$ ,  $GM=0.37$  m fueron obtenidos. Para una sintonía definida. Se analizan las series temporales, espacio de fase, las secciones de Poincaré y los exponentes de Lyapunov.
  - ✓ Trazado de los diagramas de bifurcación y verificación de la influencia de los parámetros de control en las regiones de inestabilidad estudiadas.
  - ✓ Trazado de los diagramas de las bacias de atracción, a partir de un programa que analiza la influencia de las condiciones iniciales en la formación de atractores extraños de la respuesta en rolido, se observa las zonas de estabilidad y de volcamiento. La degradación de las áreas de las bacias estables fue medida, de modo de ser investigada como posible criterio de proyecto del punto de vista de seguridad de buques basado en la dinámica no lineal.
  - ✓ Trazado de las curvas de los exponentes de Lyapunov, que permiten a análisis de la estabilidad global del sistema dinámico.
- 
- El sistema acoplado de ecuaciones aquí analizados se mostro una fuerte complejidad, bifurcaciones en catarata, intermitencia, multiestabilidad y caos fueron verificados.

- El análisis de bifurcación permite visualizar la ruta para el caos, como también otros fenómenos complejos, como el caso de la intermitencia y la multiestabilidad, dando una visión más general de la respuesta en rolido por cambio directo del parámetro de control, la amplitud de la ola ( $A_w$ ). De acuerdo con los resultados, el sistema pasa por respuestas con un único periodo para pequeñas amplitudes de olas, para luego pasar en enseguida a presentar la coexistencia de atractores, con respuestas conteniendo tres periodos, siguiendo una breve faja con intermitencia. Para amplitudes levemente más altas, el sistema pasa a presentar respuestas con un único periodo, mas conteniendo el fenómeno de multiestabilidad, donde se percibe alternancia de de respuestas. Aumentado más la amplitud de la ola, un proceso continuo de la dobladura de periodos se manifiesta, finalmente llevando el sistema dinámico al movimiento caótico.

- Se puede observar en el diagrama de bifurcación para  $w_e / w_{n4} = 2.0$ , la presencia de la coexistencia de atractores (faja con numero de periodos igual a tres) la cual puede aparece o desaparece y a presentar una zona con otro tipo de comportamiento periódico, dependiendo de las condiciones iniciales que adoptados. También en el diagrama de bifurcación para  $w_e / w_{n4} = 2.2$ , se observa el cambio cualitativo en la estructura del diagrama de bifurcación para dos diferentes condiciones iniciales, por efecto de la multiestabilidad del sistema dinámico.

- También es observado que el fenómeno de alternancia por efectos de la multiestabilidad, solo se presenta para el movimiento en rolido para la sintonías trabajadas  $w_e / w_{n4} = 2.0$  y  $w_e / w_{n4} = 2.2$ , y que los demás modos (arfada, cabeceo) no presentan ningún tipo de alternancia (multiestabilidad).

- Se puede notar a través de los diagramas de bifurcación una diversidad en la respuesta en rolo en la región inestable que presenta periodos igual a dos veces el periodo de la fuerza de excitación, y hasta mismo la presencia de altas amplitudes en la respuesta de rolo en la faja característica por movimientos caóticos.
- Otro aspecto observado es que en el diagrama de bifurcación para  $w_e / w_{n4} = 2.2$ , tanto el inicio de la catarata de duplicación de periodos, como también el inicio de la zona caótica, se dan para valores de amplitudes de las olas inferiores, en comparación con el diagrama de bifurcación de  $w_e / w_{n4} = 2.0$ .
- Análisis comparativos presentando las series temporales, espacio de fase, así como las respectivas secciones de Poincaré para diferentes fajas de valores de la amplitud de la ola ( $A_w$ ), permitirán un mejor entendimiento de los comportamientos periódicos y caóticos del sistema dinámico, correspondiente para los modos de arfada, rolo y cabeceo para las sintonías ( $w_e / w_{n4}$ ) trabajadas.
- Fue observado que en todas las condiciones periódicas analizados, el movimiento de rolo se desarrolló en el periodo natural, y los de afundamiento y arfagen corresponden al periódico de excitación, guardando así la estructura de sintonía en resonancia paramétrica.
- El cambio en las condiciones iniciales para el movimiento en rolo en las diferentes amplitudes de ola ( $A_w$ ), observados en las bacías de atracción, muestra las zonas estables e inestables determinados por regiones por colores, y la pérdida total del área de la zona de estabilidad, o sea, la pérdida del área de la bacía de atracción, como consecuencia de la variación de los valores de la amplitud de la ola.

- Con relación a las bacías de atracción, se observa que para  $w_e/w_{n4}=2.2$  el inicio de la erosión y su posterior destrucción se da para valores de amplitud de ola menores en comparación con las bacías de atracción  $w_e/w_{n4}=2.0$ . El proceso de erosión de la bacía se da de forma mucho más vertiginosa en el caso de la sintonía  $w_e/w_{n4}=2.2$ , para un valor bien específico de la amplitud de ola límite.

- Un buen medio de evaluar la estabilidad global del sistema dinámico del movimiento del buque es por medio de los Exponentes de Lyapunov, que nos permiten analizar el sistema dinámico y su sensibilidad a las condiciones iniciales, haciéndonos entender mejor el paso para el caos. Fueron determinados los exponentes de Lyapunov para todos los grados de libertad envueltos.

- Fenómenos como la intermitencia y la multiestabilidad fueron observados, los cuales ayudan a percibir la gran complejidad del sistema de ecuaciones aquí trabajado. Se observó también fenómenos de la intermitencia, cuando se manifiesta, ateniendo a los tres modos acoplados, en cuanto que el fenómeno de la alternancia solo se manifiesta en el movimiento de rolido, sin transmitirse para los modos de arfada y cabeceo.

- El diagrama de bifurcación para  $w_e/w_{n4}=2.0$  muestra el inicio de la zona caótica para una amplitud de ola igual  $A_w=0.6788$  m. En el caso de las bacías de atracción, para una amplitud de ola igual de  $A_w=0.68$  m, tiene el inicio de la erosión y destrucción de las bacías de atracción, que es un valor bien próximo del punto de inicio de la zona caótica mostrada en el diagrama de bifurcación. Ya para el caso de los exponentes de Lyapunov el inicio de la zona caótica el inicio de la zona caótica es para  $A_w=0.64$  m. Esta diferencia se puede ser al hecho que en el cálculo de los

exponentes de Lyapunov es un método de análisis global, el cual recorre todo el atractor, una vez que los exponentes de Lyapunov llegan a un valor constante, ellos quedan independientes de las condiciones iniciales, esto es, capturan todas las posibles soluciones del sistema dinámico para las diferentes condiciones iniciales. Ya en caso del análisis de la bifurcación, esta solo evalúa para una sola condición inicial, esto es capturando solo una solución. Entonces se concluye que los tres métodos, a pesar de retratar aspectos dinámicos distintos, tienen una buena congruencia entre sí referente al análisis de la dinámica no lineal del método propuesto.

- Para  $w_e / w_{n4} = 2.2$ , la zona caótica mostrada en el diagrama de bifurcación tiene inicio en  $A_w = 0.556$  m, y el inicio de la erosión y destrucción de las bacías de atracción es en  $A_w = 0.62$  m. Ya los exponentes de Lyapunov indican el inicio de la zona caótica para  $A_w = 0.55$  m. Por lo tanto, la misma buena congruencia es observada entre los valores, en especial los valores de los exponentes de Lyapunov y del diagrama de bifurcación

### **3 Trabajos Futuros**

- Ahondar el análisis paramétrico identificando todos los fenómenos de bifurcación asociados a las fronteras de estabilidad, con la finalidad de discutir criterios de proyecto para esta clase de problemas

- Considerar, utilizando la misma metodología, otros tipos de parámetros de control, como por el ejemplo, de la velocidad de avance del buque y la altura metacéntrica, entre otros.

- Estudiar el empleo de los diagramas de bifurcación, así como también las bacías de atracción, a fin de prever problemas de inestabilidad dinámica y servir de auxilio en el control del comportamiento del sistema dinámico del buque.
- Hacer un análisis experimental, a fin de que se pueda comparar los resultados numéricos, confirmando experimentalmente los complejos fenómenos recurrentes de las no linealidades detectados numéricamente en el presente trabajo.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABKOWITZ, M. A., 1969, *Stability and Motion Control of Ocean Vehicles*, Massachusetts, USA, The M. I. T. Press.

AGUIRRE, L. A., AGUIRRE, A., 1997, “A Tutorial Introduction to Nonlinear Dynamics in Economics”, *Nova economia*, v. 7, n. 2, pp. 9-47.

BELENKY, V. L., SEVASTIANOV, N. B., 2003, *Stability and Safety of Ships, Vol. II: Risk of Capsizing*, 1 ed. Oxford, UK, Elsevier Ocean Engineering Book Series Vol. 10.

BISHOP, R. E. D., PARKINSON, A. G., 1970, *Directional Stability and Control of Rigid Marine Vehicles*. Dept. Mech. Eng., University College London, Naval Arch. Report no. 3.

BLOCKI, W., 1980, “Ship Safety in Connection with Parametric Resonance of the Roll”. *International Shipbuilding Progress*, v. 27, n. 306, pp. 36-53.

BULIAN, G., FRANCESCUTTO, A., 2008, “Theoretical Prediction and Experimental Verification of Multiple Steady States for Parametric Roll”. In: *Proceeding 10<sup>th</sup> ISSW’08, International Ship Stability Workshop*, Daejeon, Coréia, Mar.

CÂMARA, F. P. 2008, “Dinâmica Não-Linear e Psiquiatria: A Natureza Dinâmica das Doenças Mentais”, *Rev. Latinoam. Psicopat. Fund.*, v. 11, n. 1, pp.105-118.



CHÁVEZ, F. A. B., 2000, *Dinâmica Caótica de Ondas de Alfvén no Vento Solar*. Tese de D.Sc., INPE, São José dos Campos, SP, Brasil.

CHEN, Z. M., DJIDJELI K., PRICE W. G., 2006, “Computing Lyapunov Exponents Based on the Solution Expression of the Variational System”, *Applied Mathematics and Computation*, v. 174, pp. 982-996.

CHIZHEVSKY, V. N., 2001, “Multistability in Dynamical Systems Induced by Weak Periodic Perturbations”, *Physical Review E*, v. 64, 036223 (Aug).

CHUNBIAO, G., QISHAO, L., KELEI H., 1998, “Nonstationary Effects on Safe Basins of a Forced Softening Duffing Oscillator”, *Acta Mechanica Solida Sinica*, v. 11, n. 3 (Sep), pp. 253-260.

ECKMANN, J. P., KAMPHORST, S. O., RUELLE, D., CILIBERTO, S., 1986, “Lyapunov exponents from time series”, *Physical Review A*, v. 34, n. 6 (Dec), pp. 4971-4980.

EGORV, E. N., KORONOVSKI, A. A., 2004, “Dynamical Control in Multistable System”, *Technical Physics Letters*, v. 30, n. 3, pp. 186-189.

FIEDLER-FERRARA, N., PRADO, C. P. C, 1994, *Caos uma Introdução*. 1 ed. São Paulo, Edgard Blücher.

FRANCE, W. N., LEVADOU, M., TREAKLE, M., PAULLING, J. R., MICHEL, R. K., MOORE, C., 2001, “An Investigation of Head-Sea Parametric Rolling and its Influence on Container Lashing Systems”, *Society of Naval Architects and Marine Engineers*, Annual Meeting.

FRANCESCUTTO, A., BULIAN, G., 2002, “Nonlinear and Stochastic Aspects of Parametric Rolling Modelling”, *Proceedings of the 6<sup>th</sup> International Ship Stability Workshop*, Webb Institute, Long Island.

FREEMAN, W. J., CHANG, H. J., BURKE, B. C., et al., 1997, "Taming chaos: stabilization of aperiodic attractors by noise," *IEEE Trans. Circ. & Syst. I.*, v. 44, pp. 989–996.

FROUDE, W., 1863, "Remarks on Mr. Scott Russell's Paper on Rolling", *Trans. Inst. Naval Architects*, n. 4, pp. 232-275.

GLEICK, J. , 1987, *Caos: A criação de uma nova ciência*, 2 ed., Rio de Janeiro Campos.

GOLDBERGER, A. I., RIGNEY, D. R., WEST, B. J., 1990, "Chaos and Fractals in Human Physiology", *Scientific American*, v. 262, pp. 42-49.

HASSELL, M. P., COMINS, H. N., MAY, R. M., 1991, "Spatial Structure and Chaos in Insect Population Dynamics". *Nature*, v. 353: pp. 255-258.

HILBORN, R. C., 1994, *Chaos and Nonlinear Dynamics: An Introduction for Scientists and Engineers*, New York, Oxford University Press.

HIMENO, Y., 1981, *Prediction of Ship Roll Damping – State of the Art*. Dept. Naval Architecture and Marine Engineering, The University of Michigan, Report n. 239.

HIRSCH, J. E., HUBERMAN, B. A., SCALAPINO, D. J., 1982, "Theory of Intermittency", *Physical Review A*, v 25, n. 1 (Jan), pp. 519-532.

HOOFT, J. P., 1982, *Advance Dynamics of Marine Structures*, USA, John Wiley & Sons, Inc.

KRISHNAIAH, J., KUMAR, C. S., FARUQI, M. A., 2002, "Constructing Bifurcation Diagram for a Chaotic Time-Series Data Through a Recurrent Neural

Network Model”. *Proceedings of the 9<sup>th</sup> International Conference on Neural Information Processing (ICONIP’02)*, Vol. 5, pp. 2354-2358.

HSU, C. S., 1963, “On the Parametric Excitation of a Dynamic System Having Multiple Degrees of Freedom”, *Transactions of the ASME: Journal of Applied Mechanics*, v. 30, n. 3 (Sep), pp. 367-372.

HUA, J., 1992, “A Study of the Parametrically Excited Roll Motion of a Ro-Ro-Ship in Following and Heading Waves”, *International Shipbuilding Progress*, v. 39, n. 420 (Dec), pp. 345-366.

KERWIN, J. E., 1955, “Notes on Rolling in Longitudinal Waves”, *International Shipbuilding Progress*, v. 2, n. 16, pp. 597-614.

KRAUT, S., FEUDEL, U., 2002, “Multistability, noise, and attractor hopping: The crucial role of chaotic saddles”, *Physical Review E66*, 015207 (Jul).

LEVADOU, M., PALAZZI, L., 2003, “Assessment of Operational Risks of Parametric Roll”, In: *Proceedings of the World Maritime Technology Conference (WMTC’2003)*, SNAME, San Francisco, USA.

LORCA, O. M., 2001, *Ressonância Paramétrica de Navios – Influencia da Velocidade*. Dissertação M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

LORENZ, E. N., 1963, “Deterministic Nonperiodic Flow”, *Journal of the Atmospheric Sciences*, v. 20, (Mar), pp. 130-141.

MANDELBROT, B. B., 1975, *Les objets fractals. Forme, hasard et dimension*, Paris, Flammarion.

MAY, R. M., 1976, “Simple Mathematical Models with Very Complicated Dynamics”, *Nature*, v.261, pp.459-467.

MAY, R. M., OSTER, G. F., 1980, "Period doubling and the onset of Turbulence: An Analytic Estimate of the Feigenbaum ratio", *Physics Letters A*, v. 78, n.1 (Jul), pp. 1-3.

McCUE, L., BELKNAP, W., CAMPBELL, B., 2006, "Reconciling Experimental and Numerical Data: Techniques of Nonlinear Seakeeping Code Validation", *Marine Systems and Ocean Technology*, Vol. 2, n. 1-2 (Jun), pp. 55-62.

MEES, A., SPARROW, C., 1987, "Some tools for analyzing chaos", *Proceedings of the IEEE*, v. 75, n. 8 (Aug), pp. 1058-1070.

MOON, F. C., STIEFEL, P. D., 2006, "Coexisting Chaotic and Periodic Dynamics in Clock Scapements", *Phil. Trans. R. Soc. A*, v. 364, pp. 2539-2563.

NAYFEH, A. H., SANCHEZ, N. E., 1990, "Stability and Complicated Rolling Responses of Ships in Regular Beam Seas", *Proceedings of the International Shipbuilding Progress*, v. 37, pp. 331-352.

NEVES, M. A. S., VALERIO, L., 1994, "Parametric Stability of Fishing Vessels", *Proceedings of the 5<sup>th</sup> International Conference on the Stability of Ships and Ocean Vehicles (STAB'94)*, Florida, USA.

NEVES, M. A. S., SALAS, M., VALERIO, L., 1997, "An Investigation on the Influence of Stern Hull Shape on the Roll Motion and Stability of Small Fishing Vessels", *Proceedings of the 6<sup>th</sup> International Conference on the Stability of Ships and Ocean Vehicles (STAB'97)*, Varna, Bulgaria, pp.259-269.

NEVES, M. A. S., PÉREZ, N. A., VALERIO, L., 1999, "Stability of Small Fishing Vessels in Longitudinal Waves", *Ocean Engineering*, v. 26, n. 12 (Dec), pp. 1389-1419.

NEVES, M. A. S., VALERIO, L., 2000, "Parametric Resonance in Waves of Arbitrary Heading", *Proceedings of the 7<sup>th</sup> International Conference on the Stability of Ships and Ocean Vehicles (STAB'2000)*, Launceston, Australia, pp.680-687.

NEVES, M. A. S., PÉREZ, N., LORCA, O., 2002a, "Experimental Analysis on Parametric Resonance for Two Fishing Vessels in Head Seas", *Proceedings of the 6<sup>th</sup> International Ship Stability workshop*, Webb Institute, New York.

NEVES, M. A. S., PÉREZ, N., LORCA, O., 2002b, "Roll Motion and Stability of Ship in Waves", In: *Proceedings of the 4<sup>th</sup> International Conference on Marine Industry (Marind'2002) - Vol. II*, Varna, Bulgaria, pp. 127-137.

NEVES, M. A. S., PÉREZ, N., LORCA, O., 2003, "Analysis of Roll Motion and Stability of a Fishing Vessel in Head Seas", *Ocean Engineering*, v. 30, (Apr), pp. 921-935.

NEVES, M. A. S., PÉREZ, N., LORCA, O., RODRÍGUEZ, C., 2003a, "Hull Design Considerations for Improved Stability of Fishing Vessels in Waves". In: *Proceedings of the 8<sup>th</sup> International Conference on the Stability of Ships and Ocean Vehicles (STAB'2003)*, Madrid, Spain, pp. 291-304.

NEVES, M. A. S., RODRÍGUEZ, C. A., 2006a, "An Investigation on Roll Parametric Resonance in Regular Waves". *Proceedings of the 9<sup>th</sup> International Conference on Stability of Ships and Ocean Vehicles*, pp. 99-108, Rio de Janeiro, Brazil, 25-29 Sep.

NEVES, M. A. S., RODRÍGUEZ C. A., 2006b, "On Unstable Ship Motions Resulting From Strong Non-Linear Coupling", *Ocean Engineering*, v. 33, pp.1853-1883.

NEVES, M. A. S., RODRÍGUEZ C. A., 2007, "An investigation on roll parametric in regular waves", *International Shipbuilding Progress*, v. 54, pp. 207-225.

PAULLING, J. R., 1961, “The Transverse Stability of a Ship in a Longitudinal Seaway”. *Journal of Ship Research*, v. 4, n. 4 (Mar.), pp. 37-49.

PAULLING, J. R., ROSENBERG, R. M., 1959, “On Unstable Ship Motions Resulting From Non-Linear Coupling”, *Journal of Ship Research*, v. 3, n. 1 (Jun.), pp. 36-46.

PÉREZ, N. A., 1985, *Desenvolvimento de Algumas Técnicas Experimentais em Ondas Regulares*. Dissertação de M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

PERNAMBUCO, T. A. M., 1990, *Estabilidade de Navios em Ondas Obliquas*. Dissertação de M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

PICCOLI, H. C., WEBER, H. I., 1998, “Experimental Observation of Chaotic Motion in a Rotor with Rubbing”, *Nonlinear Dynamics*, v.16, n. 1, pp. 55-70.

PISARCHIK, A. N., GOSWAMI, 2000, “Annihilation of One of the Coexisting Attractors in a Bistable System”, *Physical Review Letters*, v. 84, n. 7, pp. 1423-1426.

POINCARÉ, H., 1881, “Mémoire sur les courbes définies par les équations différentielles”, *Journal de Mathématiques*, v. 37, pp. 375–422.

POINCARÉ, H., 1890, “Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique” *Acta Mathematica*, v. 13, pp. 1–270.

POMEAU, Y., MANNEVILLE, P., 1980, “Intermittent Transition to Turbulence in Dissipative Dynamical Systems”, *Communications in Mathematical Physics*, v. 74, pp. 189-197.

RECH, P. C., 2005, *Bifurcação, Multiestabilidade e Sincronização em Sistemas Dinâmicos Discretos*. Tese D. Sc., Universidade Federal de Paraná, Paraná, Brasil.

RODRÍGUEZ, C. A., 2004, *Estabilidade Dinâmica do Navio: Um Modelo Não-Linear de Terceira Ordem*. Dissertação de M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

ROTHMAN, D. H., 2005, *Nonlinear Dynamics 1: Chaos*, Massachusetts, USA, Massachusetts Institute of Technology.

SALVESEN, N., TUCK, O. E., FALTINSEN, O., 1970, “Ship Motions and Sea Loads”, *Transactions of SNAME*, v. 78, pp. 250-287.

SANGUINETTI, C. F. O., 1985, *Estabilidade Dinâmica de Navios Pesqueiros em Ondas Regulares*. Dissertação de M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

SANO, M., SAWADA, Y., 1985, “Measurement of the Lyapunov Spectrum from a Chaotic Time Series”. *Physical Review Letters*, v. 55, n. 10 (Sep), pp. 1082-1085.

SAVI, M. A., 2004, *Dinâmica Não-linear e Caos*. 1 ed. Rio de Janeiro, e-papers.

SEQUEIRA, E. M., 2005, *Caos Intermitente em Circuitos Eletrônicos*, Dissertação de M.Sc, Programa de pós-graduação em Física, Universidade Federal de Pernambuco. PE, Brasil.

SHIN, Y. S., BELENKY, V. L., PAULLING, J. R., WEEMS, K. M., LIN, W. M., 2004, “Criteria for Parametric Roll of Large Containerships in Longitudinal Seas”, *Society of Naval Architects and Marine Engineers*, Annual Meeting.

SPYROU, K. J., 2000, “Designing Against Parametric Instability in Following Seas”, *Ocean Engineering*, v. 27, n. 6 (Jun), pp. 625-653.

SRINIVASAN, S., PRASAD, S., PATIL, S., LAZAROU, G., PICONE, J., 2006, “Estimation of Lyapunov Spectra from a Time Series”. In: *Proceedings of the IEEE SoutheastCon*, pp. 192-195, Michigan, Nov.

UMEDA, N., HASHIMOTO, H., VASSALOS, D., URANO, S., OKOU, K., 2003, “Nonlinear Dynamics on Parametric Roll Resonance with Realistic Numerical Modelling”, *Proceedings of the 8<sup>th</sup> International Conference on the Stability of Ships and Ocean Vehicles*, Madrid, Spain.

VALERIO, L., 1994, *Estabilidade Paramétrica de Navios em Ondas Longitudinais Regulares*. Dissertação M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

VALERIO, L., 2000, *Sobre a Estabilidade Dinâmica de Navios em Ondas*. Tese de D.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

WOLF, A., VASTAGO, A., 1985, “Determining Lyapunov Exponents From a Time Series”, *Physical Review 16D*, pp. 25-317.

ZENG, X., EYKHOLT, R., PIELKE, R. A., 1991, “Estimating the Lyapunov-Exponent Spectrum from Short Time Series of Low Precision”, *Physical Review Letters*, v. 66, n. 25 (Jun), pp. 3229-3232.



## GLOSARIO

- **Mapeamiento de Poincaré:** el mapeamiento de Poincaré, es la secuencia de puntos en la cual el flujo intercepta la sección de Poincaré.
- **Exponentes de Lyapunov:** los exponentes de Lyapunov evalúan la sensibilidad a las condiciones iniciales, verificando la divergencia exponencial en el tiempo, de las trayectorias vecinas. El comportamiento caótico es determinado por la existencia de por lo menos de por lo menos un exponente de Lyapunov (LE) positivo.
- **Diagrama de Bifurcación:** es el estudio del comportamiento de un sistema mediante la variación de parámetros
- **Bacías de Atracción:** se conoce como bacías de atracción, al conjunto de puntos cuyas orbitas convergen para un atractor.
- **Comportamiento Caótico:** los fenómenos caóticos son determinísticos. Así, para una entrada totalmente conocida y determinada, surge una respuesta aparentemente aleatoria.
- **Comportamiento Aleatorio:** los fenómenos aleatorios dicen lo respecto a sistemas no determinísticos, o sea, un sistema presenta una respuesta aleatoria como una consecuencia de una entrada aleatoria.
- **Atractores:** entendemos como un atractor el conjunto de puntos en el espacio de estados visitados por la solución de una ecuación en evolución. Se dice simplemente que “atractores son órbitas inmersa en un espacio de estado”.

- **Intermitencia:** el fenómeno de intermitencia en sistemas que presentan caos, se manifiesta en la alternancia entre comportamientos regulares e irregulares para determinados valores de parámetros. el sistema responde con una oscilación regular representado por ciclo límite (*laminar phases*) que son intermitentemente interrumpidos por intervalos irregulares (*turbulent bursts*)
- **Multiestabilidad:** es el nombre dado para la coexistencia de varios estados de equilibrio dinámico para un mismo conjunto de parámetros. Tales pueden ser caóticos, cuanto regulares (periódicos).
- **Caos:** el caos es definido modernamente como el comportamiento estocástico de sistemas determinísticos, esencialmente, puede asociar a caos, la imprevisibilidad y sensibilidad a las condiciones iniciales.
- **Caos Determinístico:** los fenómenos caóticos siguen modelos matemáticos cuyas ecuaciones diferenciales del movimiento son del tipo determinístico.
- **Atractores Extraños:** los sistemas dinámicos determinísticos se caracterizan por un comportamiento asintótico que implica en la existencia de atractor.
- **Dimensión Fractal:** existen geometrías que escapan de definiciones de dimensión entera, para la cual se usa el concepto de fractal, la cual puede asumir valores fractales, en vez apenas de números enteros.
- **Fractales:** El objetivo de ese nuevo conjunto de objetos fue el de minimizar el vacío dejado por la geometría euclidiana con respecto a las formas existentes en la naturaleza
- **Salto Dinámico:** sensibilidad a las condiciones iniciales, mostrándose como un cambio repentino geometría del espacio de fase, de un punto al cambio de la condición inicial, concepto asociado a la estabilidad estructural.

## APÉNDICE I

### Características del Navio TS

A seguir es presentado las características del buque pesquero, utilizados en las simulaciones numéricas de la presente tesis. Este buque fue corrido en el Tanque Experimental de la Universidad Austral de Chile para investigar fenómenos de Resonancia Paramétrica en Rolido. Los primeros experimentos fueron realizados con velocidad de avance nula, y los resultados fueron presentados por Pérez (1985), posteriormente, fue evaluado adicionando los efectos de la velocidad de avance, siendo publicados los resultados por Pérez *et. al.* (2000).

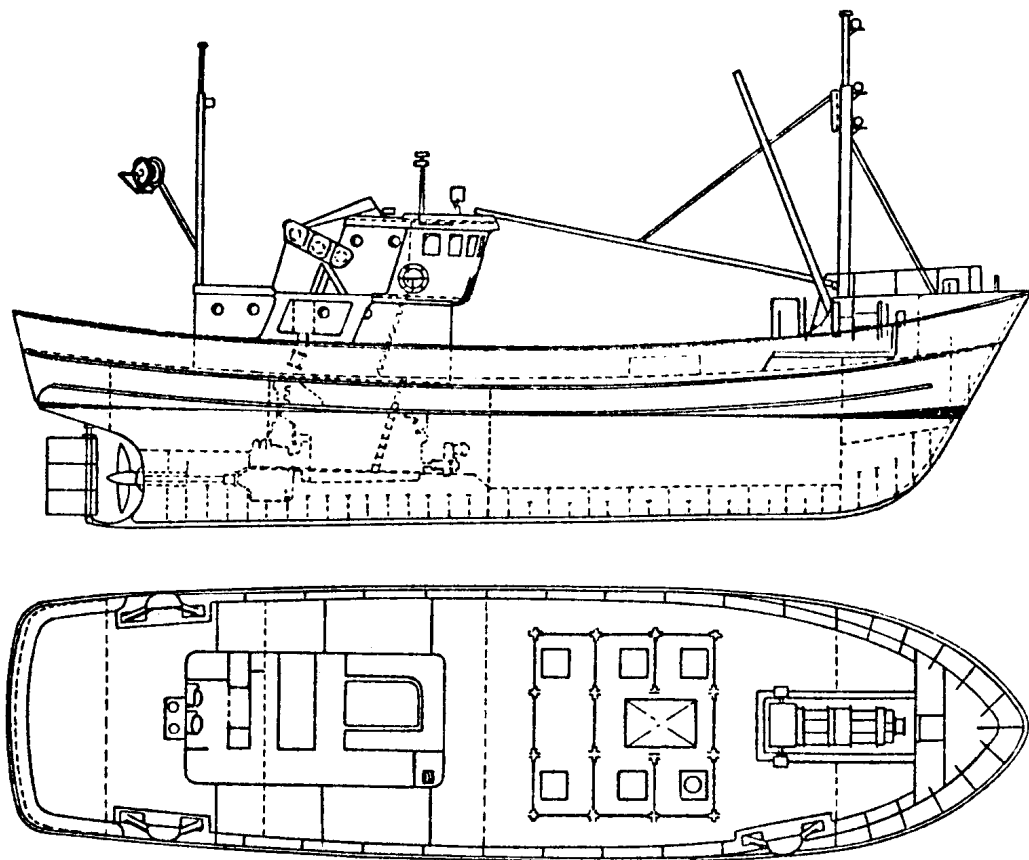
La metodología seguida en la realización de los experimentos esta descrita por Pérez (1985) y Lorca (2001). El navio Transom Stern (TS), tiene las siguientes características principales:

**Tabla AI.1.- Características Principales del Navio**

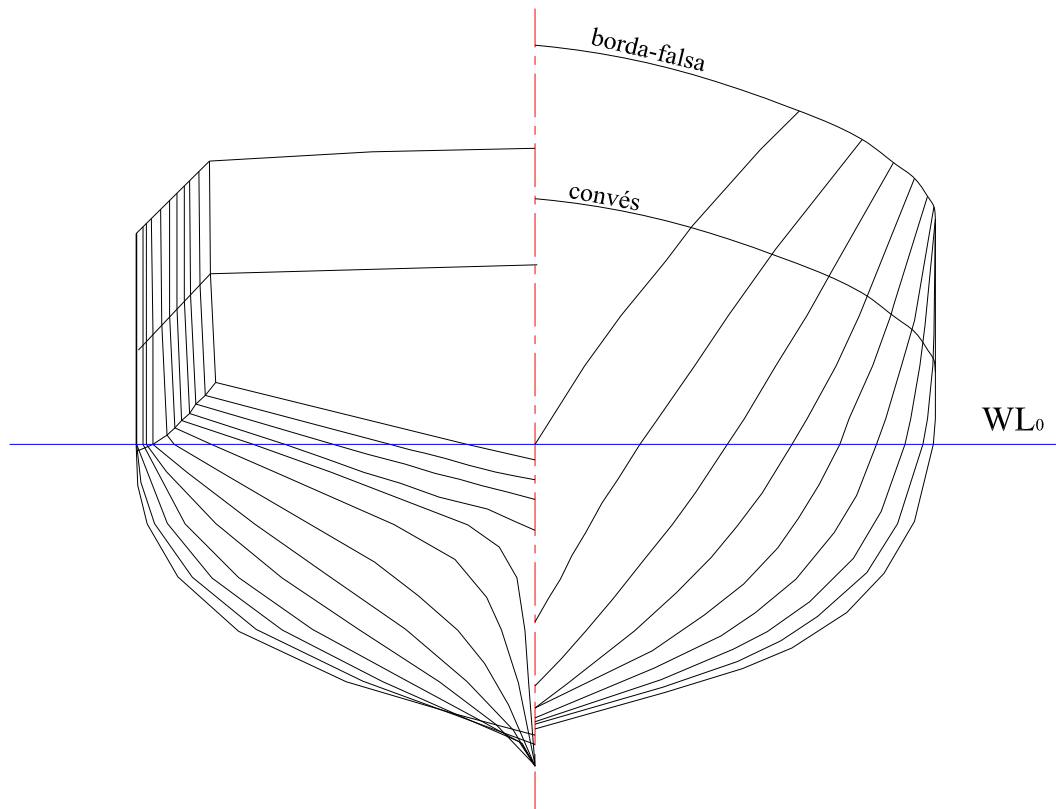
<b>Denominación</b>	<b>Transom Stern (TS)</b>
Eslora total [m]	25.91
Eslora entre perpendiculares [m]	22.09
Manga [m]	6.86
Puntal [m]	3.35

Calado	[m]	2.48
Desplazamiento	[t]	170.2
Radio de giro transversal	[m]	2.68
Radio de giro longitudinal	[m]	5.52
Tipo de popa		Esvelta

Los perfiles longitudinales mostrados en el arreglo general del navio es presentado en la figura AI. 1 (Pérez e Sanguinetti, 1993). Los planos de las líneas de forma donde se puede apreciar mejor la popa es mostrada en la figura AI.2.



**Fig. AI.1.- Arreglo Generalal del Navio TS (Pérez e Sanguinetti, 1993)**



**Fig. AI.2.- Vista Transversal del Casco del Navio TS**

Las curvas de estabilidad estática en rolo (momentos de restauración vs. ángulo) del navío TS, en las condiciones experimentales, son presentados a seguir, estas curvas fueron obtenidos siguiendo el cálculo convencional de Arquitectura Naval. Adicionalmente, en cada figura es presentado un polinomio de ajuste para cada curva, basado en el ajuste de mínimos cuadrados. Este polinomio, es función apenas del ángulo de rolo ( $\phi$ ), nos permite obtener cada uno de los coeficientes de restauración dependientes únicamente de  $\phi$ . Como se puede ver, estos coeficientes varían según la condición de cargamento. Se nota que para obtener un ajuste razonable en toda la faja de ángulo considerada, fue preciso usar un polinomio de séptima orden. Aunque nuestro estudio analítico considera términos hasta tercera

orden. Usaremos adicionalmente, en las simulaciones numéricas, términos de quinta y séptima orden en  $\phi$  que permite una mejor representación del momento restaurador en ángulos moderados.

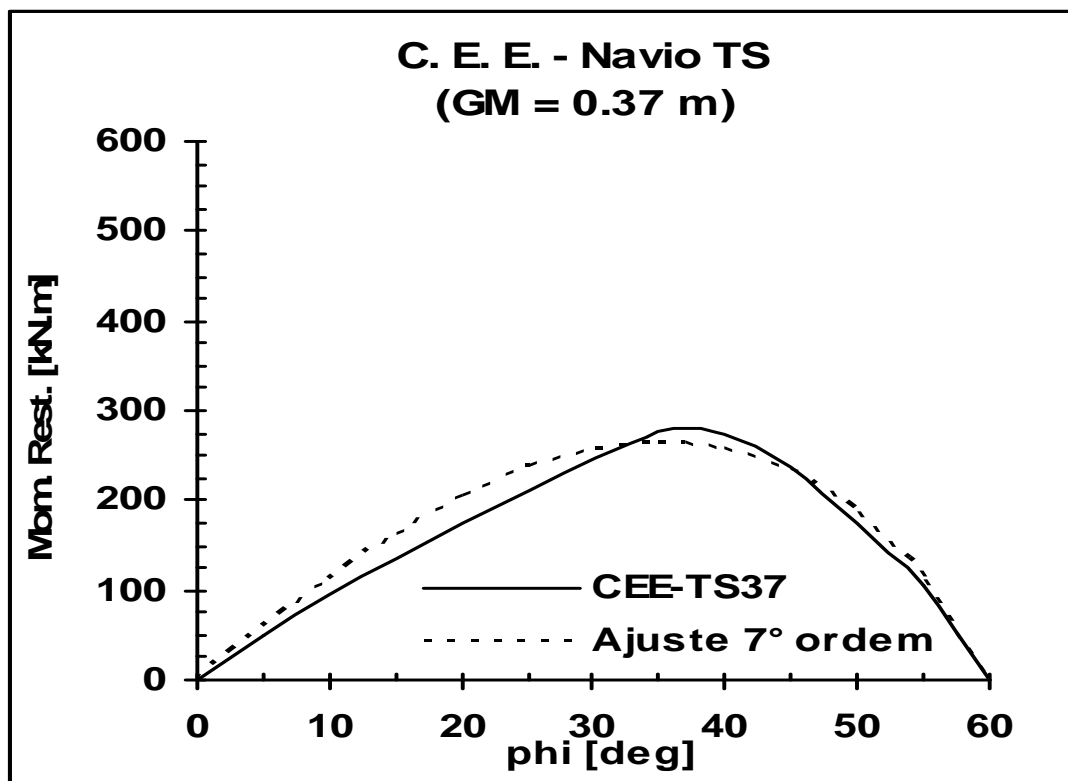


Fig. AI.3.- Curvas de Estabilidad Estática Del Navio TS

Los polinomios de ajuste de las curvas de estabilidad estática de las figuras anteriores son:

**Navio TS:**

$$\overline{GM}_T = 0.37 \text{ m}$$

$$K_E(\phi) = 669.81\phi - 728.91\phi^3 + 330.23\phi^5 - 206.70\phi^7$$

## APÉNDICE II

En tiempos recientes, en fase a diversos accidentes graves, se tiene un creciente interés en el estudio de la Resonancia Paramétrica. Se trata del fenómeno no lineal en el cual los diferentes acoplamientos entre los grados de libertad envueltos, introducen significativas complejidades en el modelo matemático del problema. En ese contexto, se hace necesario del desenvolvimiento y uso de técnicas avanzadas de análisis numérico. Las técnicas de Dinámica No Lineal permiten la verificación de características propias del sistema no lineal y el reconocimiento de las complejidades de las respuestas, no observables por el análisis lineal.

En el presente trabajo la ocurrencia de la Resonancia Paramétrica en un buque pesquero de popa esbelta es analizada a la luz de la Dinámica No Lineal. Los principales métodos numéricos discutidos son: mapeamiento de Poincaré, exponentes de Lyapunov, diagrama de bifurcación, y las bacías de atracción, para diferentes parámetros, como la amplitud de la ola. Esas técnicas son usados para ahondar la discusión sobre cuestiones relativas a la Resonancia Paramétrica, inclusive la ocurrencia de movimientos caóticos para algunas regiones de estabilidad dinámica.

En términos de desenvolvimiento actual, hay la necesidad de entender y modelar los fenómenos no lineales por medio de modelos matemáticos y de

herramientas de análisis de sistemas caóticos; y entender las posibilidades de respuestas de los fenómenos no lineales, como la ruta para el caos de los diferentes sistemas dinámicos. Siendo esos fenómenos no observables por modelos lineales, este trabajo tiene como objetivo describir la diversidad de respuestas y su sensibilidad a las condiciones iniciales.

Todo el estudio relacionado a la estabilidad de embarcaciones se base en el aporte de la estabilidad estática (en la actualidad), viendo esta necesidad, que se presente este informe de disertación, un modo de sentar nuevas bases en la reglamentación de lo referido a los parámetros de estabilidad para las embarcaciones, el estudio de estabilidad dinámica en la cual se basa este trabajo, quiere dar la base en la clasificación de riesgo y clasificación, siendo así un aporte grande para la reglamentación, y seguridad en mar de las embarcaciones, siendo más seguro la navegación, en todo tipo de mar.

En el capítulo 2, son presentadas las ecuaciones que rigen el movimiento del sistema dinámico, el cual consta de un modelo matemático cuya ecuación muestra el movimiento acoplado con tres grados de libertad (arfada-rolido-cabeceo), con los términos no lineales hasta tercera orden, considerando también el efecto del paso de la ola hasta tercera orden. Este modelo que será posteriormente resuelto (límites de estabilidad), es analizado por medio de técnicas de sistemas caóticos. En este capítulo también es analizada la estabilidad de la ecuación de rolido mediando el cálculo numérico de los límites de estabilidad.



En el capítulo 3, son presentados las herramientas de análisis de dinámica no lineal, como el mapeamiento de Poincaré, diagrama de bifurcación, bacías de atracción, y los exponentes de Lyapunov, los cuales, en conjunto, nos ayudan a entender con mas detalles la respuesta del sistema dinámico. También son presentados conceptos de dinámica no lineal, conceptos importantes para poder entender y describir lo que pueda pasar por cada uno de los fenómenos de los sistemas no lineales.

En el capítulo 4, es presentado el análisis y la solución de la dinámica no lineal para el buque Transom Stern (TS), análisis hecha para dos sintonía ( $w_e/w_{n4}$ ) próximas, y su posterior comparación. Ese análisis hecho por medio de herramientas de sistemas caóticos, mencionadas arriba. Estas son herramientas necesarias para entender los fenómenos no lineales, cuyo análisis será mostrada por medio de gráficos con sus respectivos estudios de los fenómenos mostrados. Los algoritmos numéricos discutidos adelante fueron implementados por medio de código computacional desenvuelto en lenguaje Fortran compilador (6.5).

En el capítulo 5, por fin, serán presentadas las conclusiones finales de estudio hecho en este trabajo, como también as recomendaciones para seguir en la luz del largo camino del entendimiento de fascinante mundo de los sistemas caóticos.