

**UNIVERSIDAD NACIONAL DE  
INGENIERIA  
FACULTAD DE CIENCIAS**



**ESCUELA PROFESIONAL DE FISICA**

**“LOS ASTEROIDES TROYANOS EN EL PROBLEMA  
RESTRINGIDO CIRCULAR DE LOS TRES CUERPOS”**

**INFORME DE SUFICIENCIA  
PARA OPTAR EL TITULO PROFESIONAL  
DE LICENCIADO EN FISICA**

**NOMBRE: EDGAR JOSE AVILA ESPINOZA**

**LIMA-PERU  
2006**

**A mi Madre y Hermanos**

## INDICE

1.- INTRODUCCIÓN	02
2.- LOS ASTEROIDES TROYANOS	05
3.- EI PROBLEMA RESTRINGIDO CIRCULAR DE LOS TRES CUERPOS	08
3.1.- Ecuaciones de Movimiento	08
3.2.- Puntos de Lagrange	13
3.3.- Constante del Movimiento	14
4.- MÉTODO NUMÉRICO	15
4.1.- Algoritmo	16
4.2.- Software y lenguaje de programación utilizado	16
5.- RESULTADOS	17
5.1.- Puntos de Lagrange ( $L_1$ , $L_2$ y $L_3$ ) para diferentes sistemas	17
5.2.- Trayectorias de la partícula infinitesimal en puntos Lagrangianos para diferentes sistemas	17
5.3.- Otras trayectorias del cuerpo de masa pequeña para diferentes sistemas	21
6.- CONCLUSIONES	25
7.- SUGERENCIAS	27
8.- REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	28
9.- APÉNDICE A	29
10.- APÉNDICE B	30

## PROLOGO

Describiremos en forma breve los capítulos del presente trabajo:

**Los Asteroides Troyanos:** Se hace una reseña histórica acerca de los asteroides troyanos encontrados en diferentes sistemas (Ejemplo: Sol - Jupiter). Su descubrimiento en puntos triangulares de equilibrio de Lagrange.

**El problema restringido circular de los tres cuerpos:** Se deducen las ecuaciones de movimiento del problema, los puntos de Lagrange y la constante de Jacobi.

**Método Numérico:** Se detalla el método numérico empleado para obtener las coordenadas  $x$ ,  $y$  de la trayectoria, se muestra el algoritmo empleado y las líneas de programa que dibujan la trayectoria.

**Resultados:** Se muestran gráficamente las diferentes trayectorias de M3 en diferentes sistemas que involucran los puntos de equilibrio (puntos de Lagrange).

## INTRODUCCIÓN

Un caso interesante del problema de los tres cuerpos consiste en suponer que uno de ellos es de masa  $M_3$  pequeña comparado con los otros dos (de masas  $M_1$  y  $M_2$ ) estos últimos se mueven en órbitas elípticas separados por una distancia media  $d$  con respecto a su centro de masa. La masa  $M_3$  es suficientemente pequeña, de tal manera que no influye en el movimiento de los otros dos cuerpos. Las órbitas de los planetas se pueden aproximar a órbitas circulares por ello vamos a hacer el estudio considerando que los cuerpos de masas  $M_1$  y  $M_2$  se mueven por orbitas circulares.

El problema a resolver es encontrar, para todo tiempo, el movimiento de la partícula de masa pequeña sometida al campo gravitacional de  $M_1$  y  $M_2$ . El problema así descrito se conoce con el nombre del problema restringido circular de los tres cuerpos.

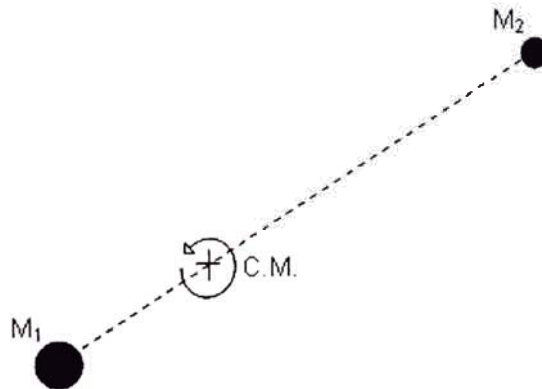


Figura 1.  $M_1$  y  $M_2$  en órbita alrededor de su centro de masas (C.M.).

Vamos a realizar una transformación de coordenadas, que consiste en introducir las denominadas coordenadas rotantes, esto es, el sistema de coordenadas cuyo origen es el centro de masas, y rota de tal manera que uno de los ejes contenga siempre a los dos cuerpos de masas  $M_1$  y  $M_2$  que giran con movimiento aproximadamente uniforme una alrededor de la otra, (ver figura 1).

Aunque las ecuaciones diferenciales que describen el movimiento de la partícula de masa ( $M_3$  no se pueden resolver de forma analítica, es posible demostrar que existen cinco puntos (con respecto a los ejes en rotación) donde, en cada uno de ellos, al ubicar una partícula de masa despreciable con velocidad inicial cero, ésta permanecerá fija en ese mismo punto es decir son puntos de equilibrio.

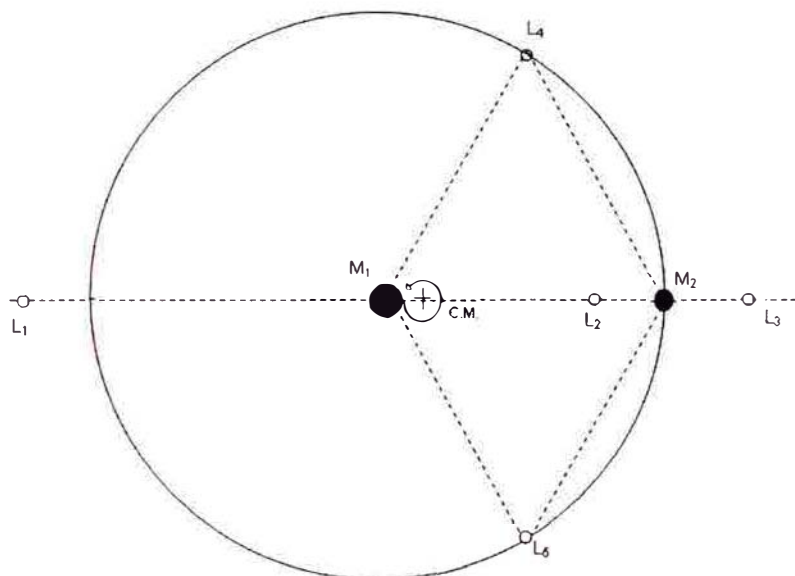


Figura 2: Puntos Lagrangianos.

Los puntos de equilibrio son llamados puntos de Lagrange (ver figura 2). Tres de esos, llamados colineales ( $L_1$ ,  $L_2$  y  $L_3$ ), se ubican en la misma línea que une los dos cuerpos principales. Las distancias a que se encuentran de los cuerpos de masa  $M_1$  y  $M_2$  dependen enteramente de las masas de éstos. Los otros dos puntos, llamados triangulares ( $L_4$ ,  $L_5$ ), se sitúan a una distancia  $d$  tanto de  $M_1$  como de  $M_2$ , esto significa, que los puntos en donde se encuentran los cuerpos con masas  $M_1$ ,  $M_2$  y  $L_4$  (o  $L_5$ ) forman un triángulo equilátero.

Se puede demostrar que los puntos colineales son inestables [4], esto significa, si sobre un cuerpo se encuentra en alguno de estos puntos entonces se ejerce cualquier mínima perturbación que lo obligue a desplazarse de su estado (el estado está definido por su posición y velocidad), este se pasará a otro estado muy distinto al inicial.

Los puntos triangulares resultan ser estables: es decir, al perturbar ligeramente a algún cuerpo que se encuentre en uno de estos puntos, el nuevo estado (del cuerpo) no se diferenciará mucho de su estado original, por lo que se dice que estos puntos triangulares son estables.

En este trabajo se aplica el método numérico de Runge Kutta Fehlberg con control de error para resolver las ecuaciones diferenciales obtenidas del análisis del cuerpo de masa despreciable (asteroide), bajo la influencia de fuerzas gravitacionales ejercidas por los otros dos cuerpos.

Los resultados explicarían la existencia de los asteroides troyanos en el sistema Sol - Júpiter y otros sistemas, a través de la simulación por computadora

## 2

## LOS ASTEROIDES TROYANOS

En 1906, el astrónomo alemán **Max Wolf**, del observatorio de Heidelberg, descubrió el asteroide 588 que parecía tener un movimiento de oscilación alrededor de un punto  $L_4$ , que formaba un triángulo equilátero con el Sol y el Planeta Júpiter, es decir, el punto triangular que precedía al planeta Júpiter en su órbita alrededor del Sol. Pocos meses después fue descubierto el asteroide 677 con un movimiento parecido alrededor del punto triangular de  $L_5$ , el que seguía al planeta en su órbita alrededor del Sol. Al poco tiempo se fueron encontrando más asteroides en los alrededores de 588 y también en los alrededores de 677.

Al asteroide 588 se le llamo Aquiles. Desde entonces se han descubierto numerosos asteroides no sólo en  $L_4$  sino también en  $L_5$ .

Puesto que a la mayoría de estos asteroides se les han dado nombre de personajes de la novela Iliada, se les conocen con el nombre de asteroides troyanos. Recientemente se han encontrado asteroides troyanos marcianos, muy cerca de los puntos  $L_4$  y  $L_5$  de de la órbita Sol-Marte.

Debe quedar claro, sin embargo, que los asteroides troyanos no están exactamente en los puntos  $L_4$  y  $L_5$ , pues a causa de las perturbaciones gravitacionales generadas por los otros planetas y la excentricidad inherente de los planetas hacen que en realidad estos objetos estén "librando" alrededor de los puntos triangulares.

Hoy se estima que en los dos puntos triangulares del sistema Sol-Júpiter existen más de 700 asteroides troyanos, con movimiento en forma de "gota" alrededor del correspondiente



punto triangular por la influencia de los otros cuerpos del sistema solar. También se sabe que los asteroides troyanos precedentes a Júpiter (los que están alrededor del punto  $L_4$ ) presentan una densidad mayor, del orden de tres veces, que la densidad de los asteroides troyanos que se mueven alrededor del punto triangular que sigue a Júpiter, que es el punto  $L_5$ .

No existe una explicación clara del porqué de esta diferencia de densidad. El mayor de los troyanos es el denominado Héctor, que se encuentra en  $L_4$ , con un diámetro de más de 200 km.

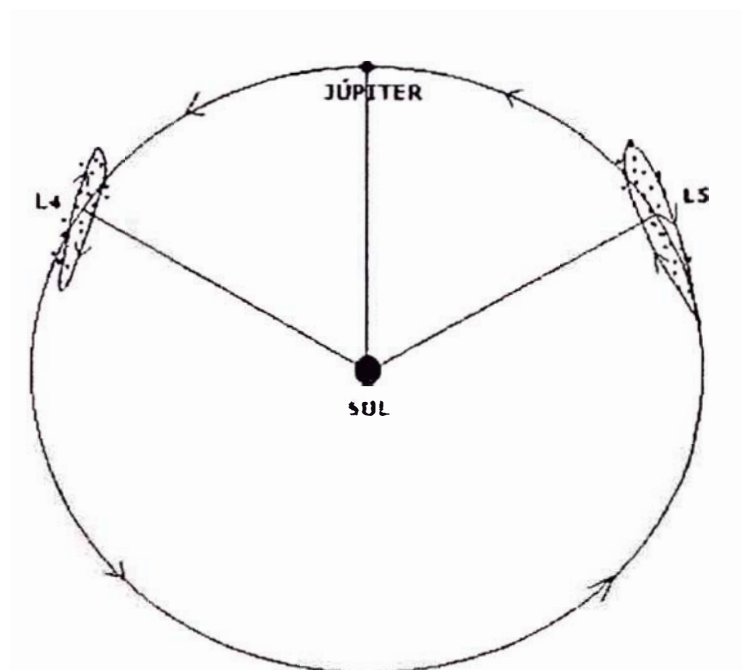


Figura 3: Grupo de los Troyanos. Orbitan a lo largo de la órbita de Júpiter, a 5,2 UA (Unidades Astronómicas). Existen dos grupos principales, uno por delante de Júpiter, y otro por detrás. Se sitúan en los denominados puntos triangulares del sistema Sol-Júpiter.

Es de sospechar la existencia de objetos muy pequeños en los puntos triangulares de los sistemas Sol-Mercurio, Sol-Venus, Sol-Tierra, etc., así como en los sistemas constituidos por grandes planetas y algunos de sus satélites. Se han descubierto además algunas rocas en los puntos triangulares del sistema Sol-Marte, y se cree que hay granos de polvo en los puntos triangulares del sistema Tierra-Luna.

Se sabe asimismo que algunos satélites conocidos de Saturno se mantienen orbitando al planeta en puntos triangulares del sistema formado por Saturno y otro de los satélites. Así, se ha comprobado que los satélites Calypso y Telesco orbitan al planeta en situación muy próxima a los puntos triangulares del sistema Saturno-Tethys.

Asimismo, el satélite Helena resulta estar en un punto triangular del sistema Saturno-Dione.

### EL PROBLEMA RESTRINGIDO CIRCULAR DE LOS TRES CUERPOS

Muchos estudios fueron realizados por Poincaré, Hill y otros del tan llamado problema circular restringido de tres cuerpos.

#### 3.1 Ecuaciones de Movimiento

La posición del centro de masas del sistema  $M_1$   $M_2$  se encuentra entre el centro de  $M_1$  y el centro de  $M_2$  a una distancia  $r_1$  de la  $M_1$  y  $r_2$  de  $M_2$ , tal como se muestra en la figura 4.

Considerando la masa  $M_1$  mayor que la masa  $M_2$  ( $M_1 > M_2$ ) luego,  $r_1 < r_2$ . Además

$$d = r_1 + r_2$$

El centro de masa se determina por la formula

$$r_{c.m.} = \frac{-M_1 r_1 + M_2 r_2}{M_1 + M_2} \quad (3.1)$$

Situando el origen del sistema de coordenadas en el centro de masa tenemos que

$$r_{c.m.} = 0.$$

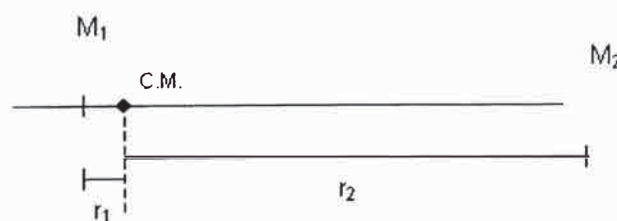


Figura 4: Posición del centro de masas de  $M_1$  y  $M_2$ .

Despejamos  $r_1$  y  $r_2$ :

$$r_1 = \frac{dM_2}{M_1 + M_2} \quad (3.2)$$

$$r_2 = \frac{dM_1}{M_1 + M_2} \quad (3.3)$$

Supondremos que el centro de  $M_1$  y el centro de  $M_2$  se mueven en órbitas circulares de radios  $r_1$  y  $r_2$ , respectivamente, alrededor de su centro de masas común (ver figura 5).

El centro de  $M_2$  describe una trayectoria circular de radio  $r_2$  bajo la acción de la fuerza de atracción  $M_1$ , que dista  $d$  de su centro. Si  $n$  es la velocidad angular constante. Aplicando la dinámica del movimiento circular uniforme a  $M_2$ .

$$M_2 n^2 r_2 = G \frac{M_1 M_2}{d^2} \quad (3.4)$$

El centro de  $M_1$  describe una trayectoria circular de radio  $r_1$  bajo la acción de la fuerza de atracción de  $M_2$ , que dista  $d$  de su centro. Si  $n$  es la velocidad angular constante. Aplicando la dinámica del movimiento circular uniforme a  $M_1$ .

$$M_1 n^2 r_1 = G \frac{M_1 M_2}{d^2} \quad (3.5)$$

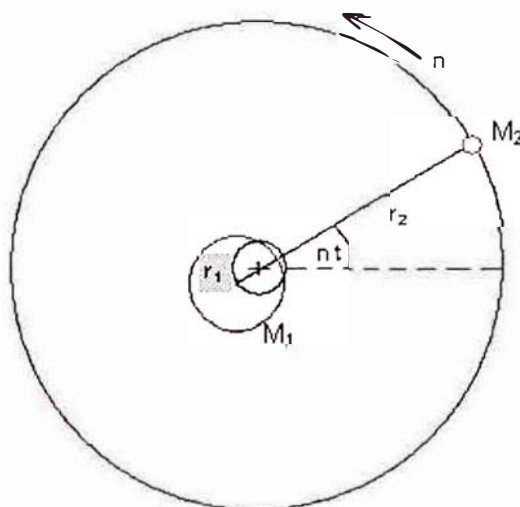


Figura 5: Movimiento de  $M_1$  y  $M_2$  respecto del centro de masas.

Despejamos la velocidad angular  $n$  de (3.5):

$$n^2 = G \frac{M_2}{d^2 r_1} \quad (3.6)$$

Reemplazando  $r_1$  de (3.2) en (3.6):

$$n^2 = G \frac{M_1 + M_2}{d^3} \quad (3.7)$$

Que es la velocidad angular media ( $n$ ) de los dos cuerpos.

Vamos a realizar las siguientes simplificaciones [4].

La unidad de masa será tal que la suma de masas de los dos cuerpos sea la unidad de tal manera que

$$M_1 = 1 - \mu \text{ y } M_2 = \mu$$

donde  $\mu$  es menor que  $\frac{1}{2}$ .

Además escogemos la distancia de separación ( $d$ ) como unidad de longitud (constante de separación).

La constante  $G$  también se escoge como la unidad.

Entonces se aprecia que según las unidades escogidas, la velocidad angular de las dos partículas de masa considerable es también la unidad.

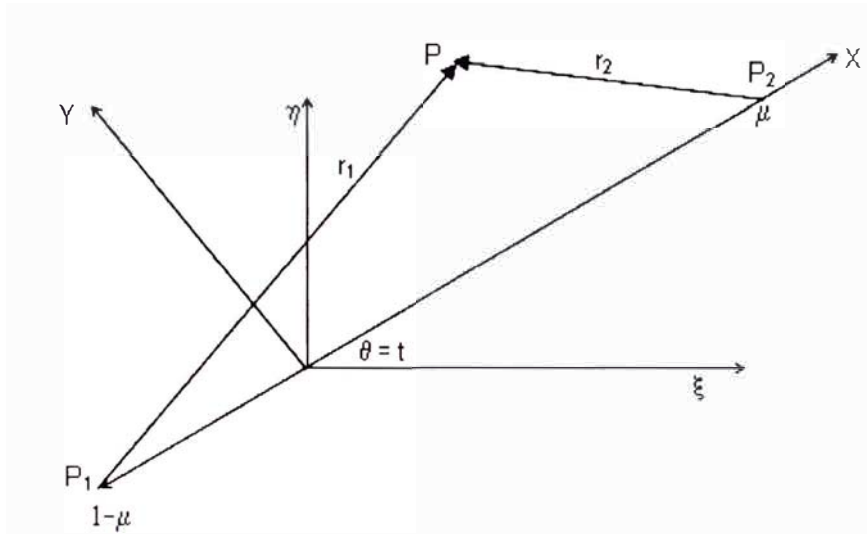


Figura 6: Sistema de referencia. [4]

Las coordenadas de las masas  $M_1$  y  $M_2$  son  $(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)$  y  $(\xi_2, \eta_2, \zeta_2)$  respectivamente referidas a los ejes fijo (no rotantes) con centro de masa de los dos cuerpos finitos como origen, y las coordenadas de la partícula de prueba son  $(\xi, \eta, \zeta)$ , las ecuaciones de movimiento de la partícula son:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= (1-\mu) \frac{\xi_1 - \xi}{r_1^3} + \mu \frac{\xi_2 - \xi}{r_2^3} \\ \eta &= (1-\mu) \frac{\eta_1 - \eta}{r_1^3} + \mu \frac{\eta_2 - \eta}{r_2^3} \\ \zeta &= (1-\mu) \frac{\zeta_1 - \zeta}{r_1^3} + \mu \frac{\zeta_2 - \zeta}{r_2^3} \end{aligned} \right\} (3.8)$$

donde

$$\begin{aligned} r_1^2 &= (\xi_1 - \xi)^2 + (\eta_1 - \eta)^2 + (\zeta_1 - \zeta)^2 \\ &\quad \text{y} \\ r_2^2 &= (\xi_2 - \xi)^2 + (\eta_2 - \eta)^2 + (\zeta_2 - \zeta)^2 \end{aligned}$$

Si el eje  $\zeta$  es perpendicular al plano de rotación de los cuerpos masivos, entonces  $\zeta_1 = \zeta_2 = 0$ .

Ahora tomamos el conjunto de ejes  $(x, y, z)$  que tienen el mismo origen que los anteriores, pero con los ejes  $x$  e  $y$  rotando (con velocidad angular 1 alrededor del eje  $z$  que coincide con el eje  $\zeta$ ) perpendicular al plano del papel (ver figura 6).

La dirección del eje  $x$  se escoge tal que las dos partículas masivas que se encuentran en  $P_1$  y  $P_2$  siempre estén en el  $y$  con coordenadas  $(x_1, 0, 0)$  y  $(x_2, 0, 0)$  respectivamente y de acuerdo con las condiciones del problema  $x_2 - x_1 = 1$ .

Además en las unidades escogidas,

$$x_1 = -\mu$$

$$x_2 = 1 - \mu$$

Aquí se tiene que

$$r_1^2 = (x_1 - x)^2 + y^2 + z^2 \quad y \quad r_2^2 = (x_2 - x)^2 + y^2 + z^2$$

donde  $(x, y, z)$  son las coordenadas de la partícula pequeña respecto a los ejes rotantes y están relacionados a los antiguos ejes por la relación :

$$\left. \begin{aligned} \xi &= x \cos t - y \sin t \\ \eta &= x \sin t + y \cos t \\ \zeta &= z \end{aligned} \right\} (3.9)$$

Diferenciando (3.9) dos veces con respecto al tiempo y sustituyendo la expresión resultante en (3.8) obtenemos:

$$\left. \begin{aligned} & \left[ (x - 2y - x) \cos t - (y + 2x - y) \sin t = \right. \\ & \left[ (1 - \mu) \frac{x_1 - x}{r_1^3} + \mu \frac{x_2 - x}{r_2^3} \right] \cos t + \left[ \frac{1 - \mu}{r_1^3} + \frac{\mu}{r_2^3} \right] y \sin t \\ & \left[ (x - 2y - x) \sin t + (y + 2x - y) \cos t = \right. \\ & \left[ (1 - \mu) \frac{x_1 - x}{r_1^3} + \mu \frac{x_2 - x}{r_2^3} \right] \sin t + \left[ \frac{1 - \mu}{r_1^3} + \frac{\mu}{r_2^3} \right] y \cos t \\ & z = - \left[ \left( \frac{1 - \mu}{r_1^3} \right) + \frac{\mu}{r_2^3} \right] z \end{aligned} \right\} (3.10)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} - 2\dot{y} - \dot{x} &= -(1-\mu)\frac{x-x_1}{r_1^3} - \mu\frac{x-x_2}{r_2^3} \\ y + 2\dot{x} - \dot{y} &= -\left(\frac{1-\mu}{r_1^3} + \frac{\mu}{r_2^3}\right)y \\ z &= -\left(\frac{1-\mu}{r_1^3} + \frac{\mu}{r_2^3}\right)z \end{aligned} \right\} (3.11)$$

Multiplicando la primera ecuación de (3.10) por  $\cos t$ , y la segunda por  $\sin t$ , para luego sumarlos y obtener la primera ecuación de (3.11), la segunda ecuación de (3.11) se obtiene de multiplicar la primera ecuación de (3.10) por  $-\sin t$  y la segunda por  $\cos t$  y sumando ambas ecuaciones como el caso anterior.

Estas son las ecuaciones del movimiento de la partícula pequeña con respecto al conjunto de coordenadas rotantes. [4]

### 3.2 Puntos de Lagrange

Considerando estos puntos en donde los términos de velocidad y aceleración son iguales a cero, es decir:

$$\dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0 \text{ y } x = y = z = 0 \text{ para todo tiempo } t$$

Para obtener los puntos triangulares  $L_4$  y  $L_5$ : De las dos primeras ecuaciones de (3.11) haciendo  $r_1 = r_2$  Se obtiene  $r_1 = r_2 = 1$  es decir los lados de un triángulo equilátero. [1]

Para obtener los puntos  $L_1$ ,  $L_2$  y  $L_3$ : Observando que  $y=0$  es una solución de la segunda ecuación de (3.11) y reemplazando para  $r_1$  y  $r_2$ , encontramos la siguiente expresión para la primera ecuación de (3.11):

$$x = \frac{(1-\mu)(x+\mu)}{(x+\mu)^3} + \frac{\mu(x-1+\mu)}{(x-1+\mu)^3} \quad (3.12)$$

De donde se obtienen 5 soluciones de las cuales 3 son reales [1].



### 3.3 Constante del Movimiento

Se puede expresar (3.11) como gradiente de una función escalar U [6]:

$$\dot{x} - 2\dot{y} = \frac{\partial U}{\partial x} \quad (3.13)$$

$$\dot{y} - 2\dot{x} = \frac{\partial U}{\partial y} \quad (3.14)$$

$$\dot{z} = \frac{\partial U}{\partial z} \quad (3.15)$$

Donde  $U = U(x,y,z)$  esta dado por:

$$U = \frac{(x^2 + y^2)}{2} + \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} \quad (3.16)$$

con:

$$r_1 = (x + \mu)^2 + y^2 + z^2 \quad y \quad r_2 = (x - \mu)^2 + y^2 + z^2$$

Si multiplicamos a las ecuaciones (3.13, 3.14, 3.15) por  $\dot{x}$ ,  $\dot{y}$ ,  $\dot{z}$ , respectivamente y sumando todo se obtiene la siguiente expresión:

$$\dot{x}\dot{x} + \dot{y}\dot{y} + \dot{z}\dot{z} = \frac{\partial U}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial U}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial U}{\partial z}\dot{z} = \frac{\partial U}{\partial t} \quad (3.16)$$

integrando (3.16) obtenemos:

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = 2U - C_J \quad (3.17)$$

Donde  $C_J$  es la constante de integración y además sabemos que

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = v^2 \quad \text{por tanto la velocidad del sistema es [6]:}$$

$$v^2 = 2U - C_J \quad (3.18)$$

Esto significa que la cantidad  $C_J = 2U - v^2$  es una constante de movimiento y es llamado la Constante de Jacobi y es solamente valido en el problema circular restringido de los tres cuerpos [6].

## 4

**MÉTODO NUMÉRICO**

El método a ser empleado es Runge Kutta Fehlberg con control de error.

Debido a que generalmente no podemos determinar el error global de un método de diferencia, trabajaremos en su lugar con el error de truncamiento local del método.

Esta técnica fue presentada en 1970 por Fehlberg y consiste en usar el método de Runge Kutta con error de truncamiento local de orden cinco,

$$\bar{w}_{i+1} = w_i + \frac{16}{135}k_1 + \frac{6656}{12825}k_3 + \frac{28561}{56430}k_4 - \frac{9}{50}k_5 + \frac{2}{55}k_6$$

para estimar el error local en el método de Runge Kutta de orden cuatro,

$$w_{i+1} = w_i + \frac{25}{216}k_1 + \frac{1408}{2565}k_3 + \frac{2197}{4104}k_4 - \frac{1}{5}k_5$$

donde

$$k_1 = hf(t_i, w_i)$$

$$k_2 = hf(t_i + h/4, w_i + 1/4k_1)$$

$$k_3 = hf(t_i + 3h/8, w_i + 3/32k_1 + 9/32k_2)$$

$$k_4 = hf(t_i + 12h/13, w_i + 1932/2197k_1 - 7200/2197k_2 + 7296/2197k_3)$$

$$k_5 = hf(t_i + h, w_i + 439/216k_1 - 8k_2 + 3680/513k_3 - 845/4104k_4)$$

$$k_6 = hf(t_i + h/2, w_i - 8/27k_1 + 2k_2 - 3544/2565k_3 + 1859/4104k_4 - 11/40k_5)$$

Una ventaja clara de este método es que solo se requieren seis evaluaciones de  $f$  por paso mientras que los métodos de Runge Kutta de orden cuatro y cinco usados conjuntamente requerirían diez evaluaciones de  $f$  por paso, cuatro evaluaciones para el método de cuarto orden y seis evaluaciones adicionales para el método de quinto orden.

#### **4.1 Algoritmo**

Ver apéndice A.

#### **4.2 Software y lenguaje de programación utilizado**

El software utilizado es el Microsoft Office – Excel, que es muy sencillo y conocido por la gran mayoría de usuarios de todo el mundo.

Además se encuentra instalado en cualquier computadora como software básico, la computadora empleada para este fin fue una Pentium IV con plataforma windows.

El lenguaje de programación empleado fue el Visual Basic que es un lenguaje estructurado muy sencillo.

Seleccione estas herramientas informáticas para diseñar el modelo de simulación aprovechando la combinación de las hojas de cálculo y gráficos para mostrar los resultados.

Ver Apéndice B.

## 5

## RESULTADOS

**5.1 Puntos de Lagrange ( $L_1$ ,  $L_2$  y  $L_3$ ) para diferentes sistemas**

Las tres raíces reales de la ecuación (3.12) se obtuvieron utilizando el software MAPLE 9.01 y cuyos resultados para diferentes sistemas se muestran en el siguiente cuadro:

Numero de Trayectoria	1	2	3	4	5	6	7	8
Condiciones Iniciales	Tierra - Luna $L_4$ y $L_5$	Tierra - Luna $L_4$	Tierra - Luna $L_5$	Tierra - Luna $L_4$	Sol - Tierra	Sol - Tierra	Sol - Tierra	Sol - Jupiter
X	-1.92	-1.4	-1.4	0.487	0.9604	0.9591	0.499	0.49904565
Y	0	0	0	0.866	0	0	0.866	0.8660254
Vx	0	0.427	-0.427	0	0	-0.075	0.001486	0
Vy	1.725	0.875	0.875	0	0	0	0.052	0
M1(Kg)	5.97E+24	5.97E+24	5.97E+24	5.97E+24	1.989E+30	1.989E+30	1.989E+30	1.989E+30
M2 (Kg)	7.35E+22	7.35E+22	7.35E+22	7.35E+22	5.97E+24	5.97E+24	5.97E+24	1.9E+27
<b>Puntos Lagrangianos <math>L_1, L_2</math> y <math>L_3</math></b>								
L1	0.837530907	0.837530907	0.837530907	0.837530907	0.990028791	0.990028791	0.990028791	0.932376644
L2	1.156894098	1.156894098	1.156894098	1.156894098	1.010031924	1.010031924	1.010031924	1.068883953
L3	-1.005091467	-1.005091467	-1.005091467	-1.005091467	-1.000001251	-1.000001251	-1.000001251	-1.000397794

Tabla 1: Resultados obtenidos para los puntos  $L_1$ ,  $L_2$  y  $L_3$  para diferentes sistemas.

**5.2 Trayectorias del cuerpo de masa pequeña en puntos triangulares para diferentes sistemas**

Se muestra a continuación dos casos en los que se ha tenido información acerca de la trayectoria de un cuerpo infinitesimal en los siguientes sistemas:

**Sistema Tierra - Luna: Orbita en  $L_4$  y  $L_5$** 

Condiciones Iniciales	Valores
X	-1,92
Y	0
Vx	0
Vy	1,725
M1(Kg)	5,97E+24
M2 (Kg)	7,35E+22

Tabla 2: Valores para encontrar la trayectoria de la figura 7.

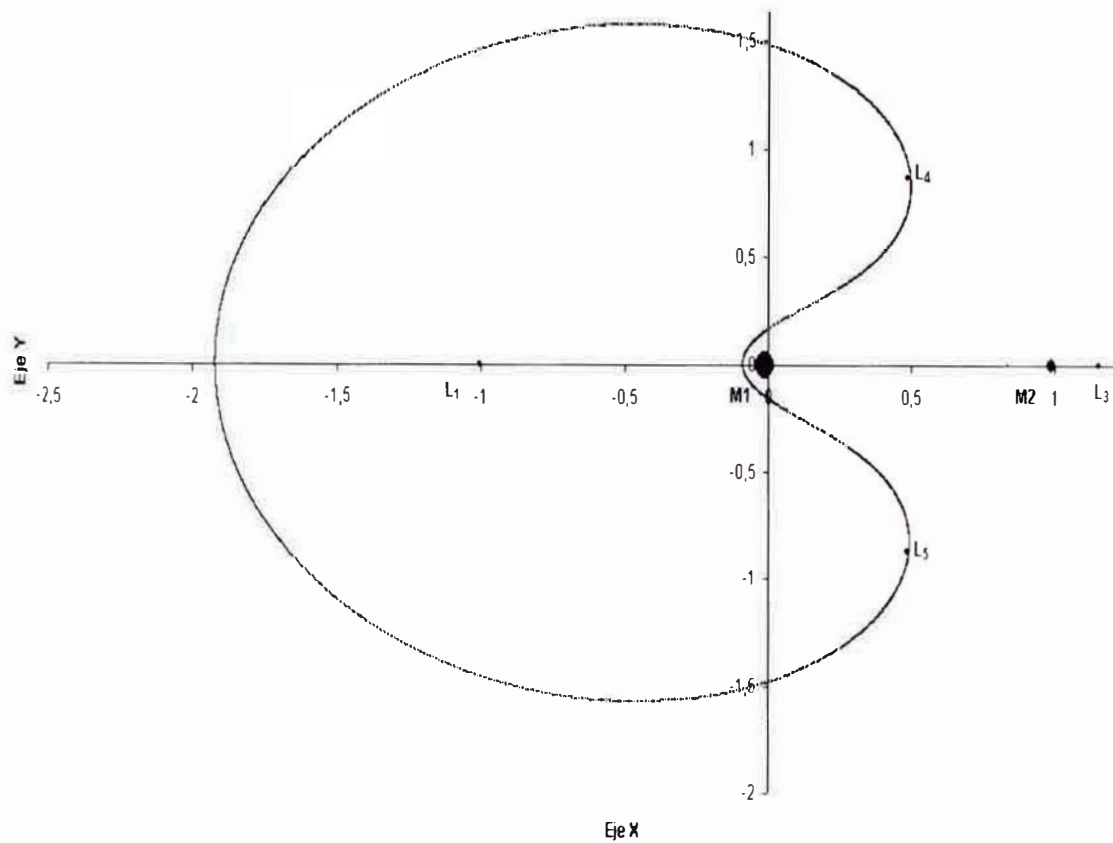


Figura 7: Trayectoria obtenida según los datos de la tabla 1.

Como podemos apreciar en la figura 7 la trayectoria realizada por la partícula infinitesimal pasa por los puntos  $L_4$  y  $L_5$ , cuya utilidad podría servir para el envío de una misión que observe asteroides troyanos en esos puntos.

La similitud con la figura siguiente nos asegura que los pasos y cálculos hechos son correctos.

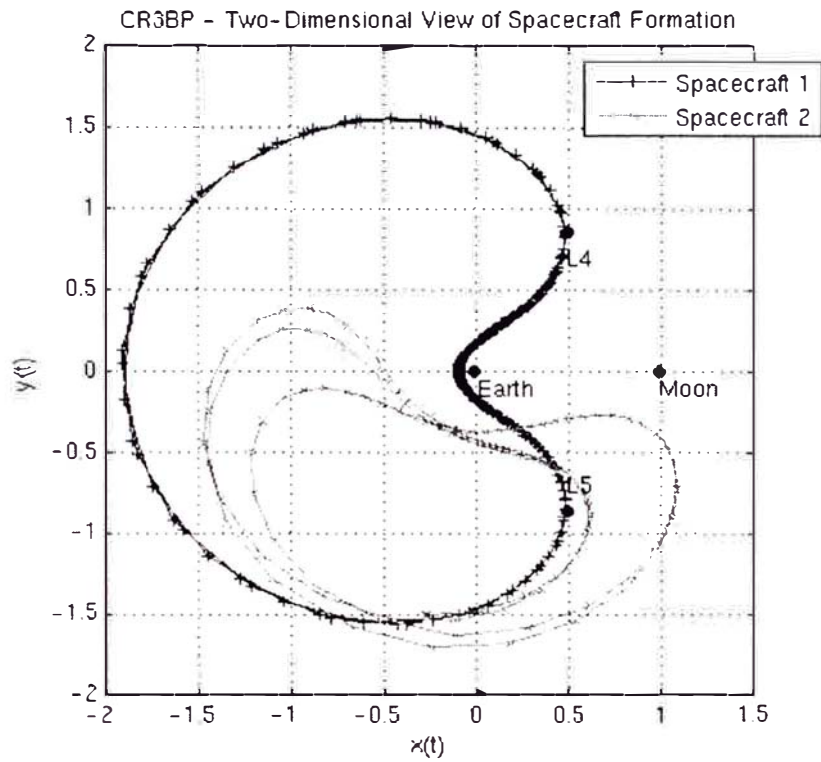


Figura 8: [1] SIAM Conference on Applications of Dynamical Systems Snowbird, Utah, 22-26 May 2005 *VIRTUAL RIGID BODIES IN THE CIRCULAR, RESTRICTED THREE-BODY PROBLEM: DYNAMICALLY NATURAL SPACECRAFT FORMATIONS* Prepared By Ralph R. Basilio and Paul K. Newton - University of Southern California

**Sistema Sol - Jupiter: Orbits en  $L_4$**

Condiciones Iniciales	Valores
X	0.49904565
Y	0.8660254
Vx	0
Vy	0
M1(Kg)	1.989E+30
M2 (Kg)	1.9E+27

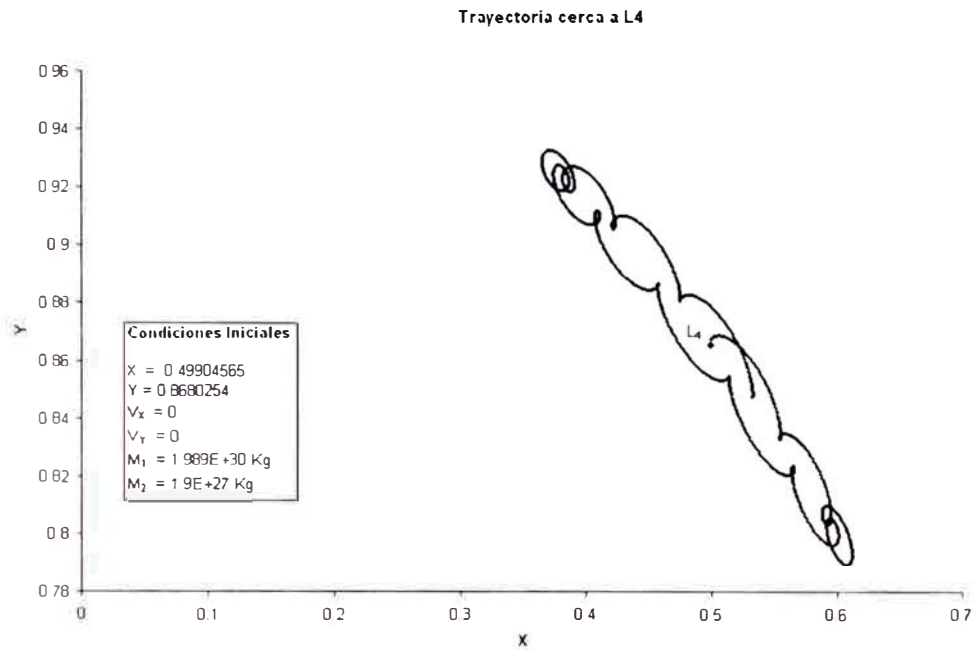


Figura 9: Trayectoria cerca de L<sub>4</sub>

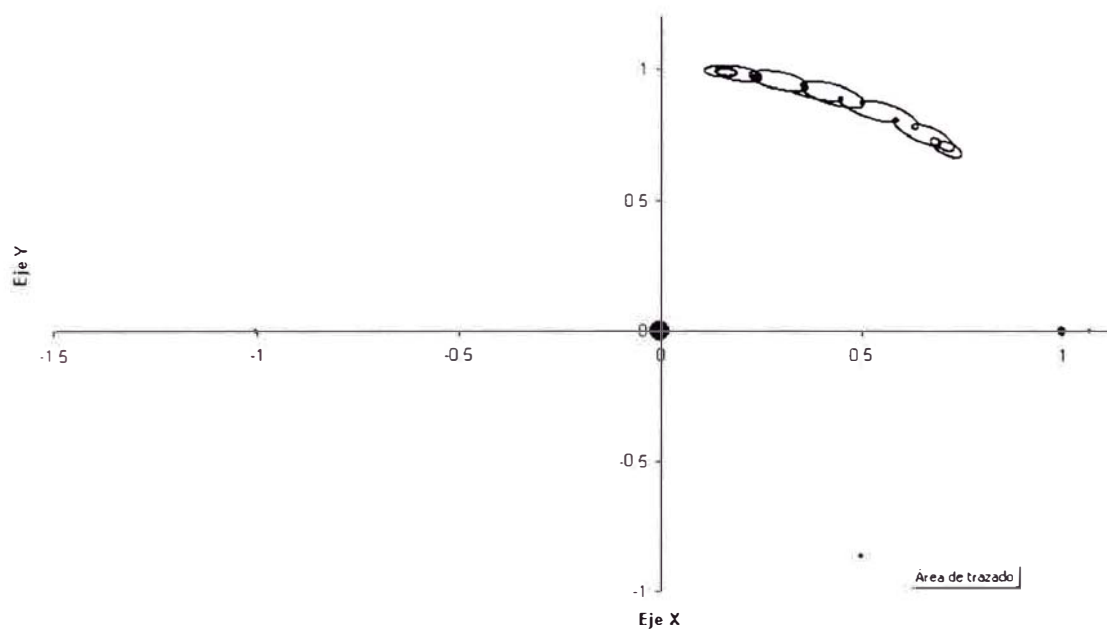


Figura 10: Trayectoria en L<sub>4</sub> con cambio en la velocidad  $V_x=0.01$

Como podemos apreciar en la figura 9 y 10 la partícula pequeña regresa a orbitar en L<sub>4</sub> pese a un cambio en la velocidad (perturbación).

### 5.3 Otras Trayectorias del cuerpo de masa pequeña para diferentes sistemas

Sistema Sol - Tierra:

Condiciones Iniciales	Valores
X	0.9591
Y	0
Vx	-0.075
Vy	0
M1(Kg)	1.989E+30
M2 (Kg)	5.97E+24

Tabla 3: Valores para encontrar la trayectoria de la figura 11.

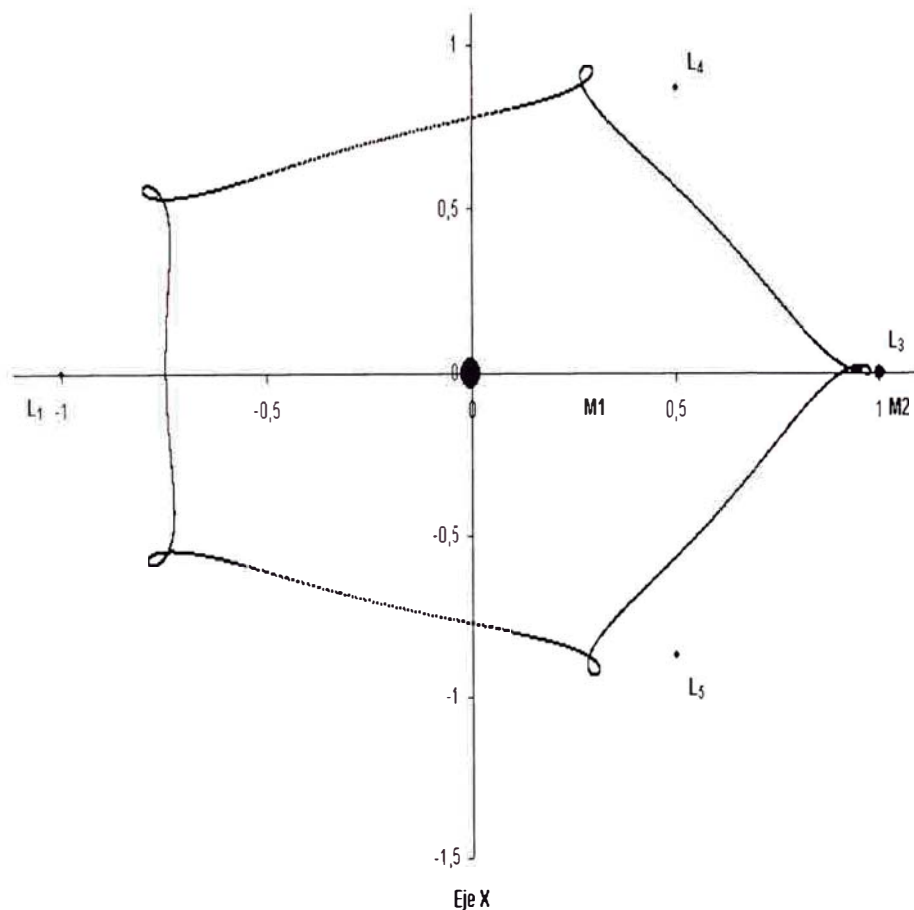


Figura 11: Trayectoria obtenida según los datos de la tabla 3.

Esta trayectoria es muy curiosa, tiene forma de pentágono con un giro en cada vértice, y es una órbita alrededor del sol. El gráfico obtenido es muy similar al de la figura siguiente que apareció en una publicación.



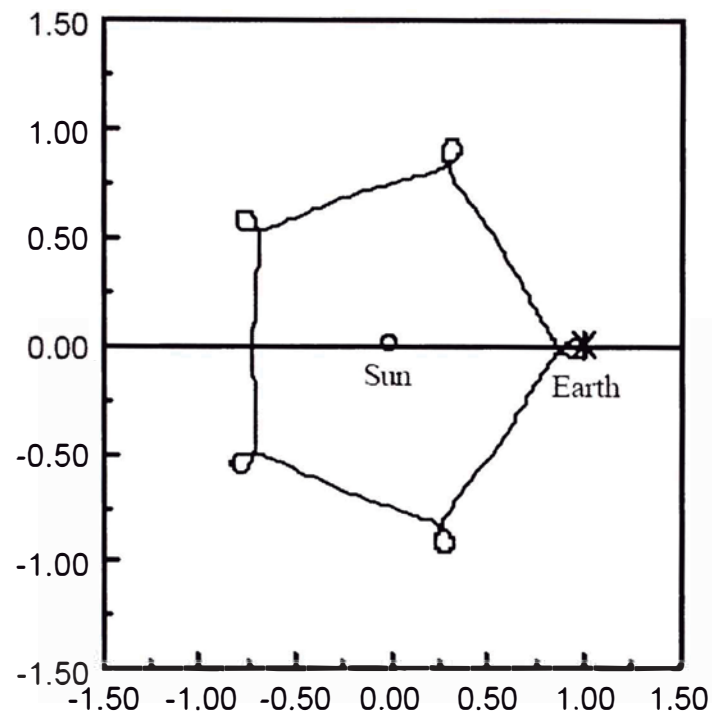


Figura 12: [2] Trayectoria obtenida de la publicación *TRANSFER ORBITS IN THE RESTRICTED PROBLEM*, Antonio Fernando Bertachini de Almeida Prado\*, Research Engineer, Depto. of Space Mechanics and Control Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais - INPE – Brazil, São José dos Campos - SP - 12227-010 – Brazil and Roger Broucke+ Professor, Depto. of Aerospace Eng. and Eng. Mechanics University of Texas at Austin, Austin-TX-78712 – USA

#### Sistema Sol - Tierra: puntos $L_1$ , $L_4$ y $L_5$

Condiciones Iniciales	Valores
X	0.499
Y	0.866
$V_x$	0.001486
$V_y$	0.052
$M_1$ (Kg)	$1.989E+30$
$M_2$ (Kg)	$5.97E+24$

Tabla 4: Valores para encontrar la trayectoria de la figura 13.

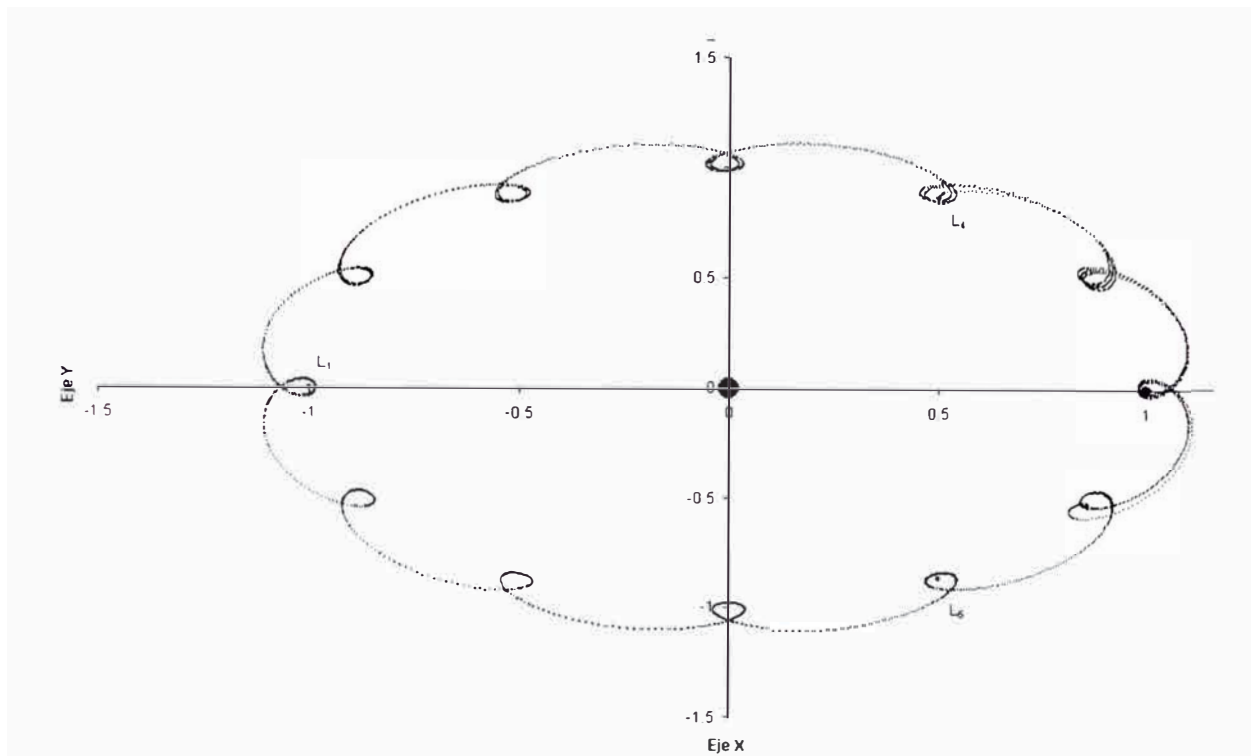


Figura 13: Trayectoria de  $M_3$

Otra trayectoria muy curiosa, que pasa por 3 puntos lagrangianos ( $L_1$ ,  $L_4$  y  $L_5$ ), y es una órbita alrededor del sol.

#### Sistema Tierra - Luna: punto $L_4$

Condiciones Iniciales	Valores
X	0.499
Y	0.866
Vx	0.001486
Vy	0.052
M1(Kg)	1.989E+30
M2 (Kg)	5.97E+24

Tabla 5: Valores para encontrar la trayectoria de la figura 14.

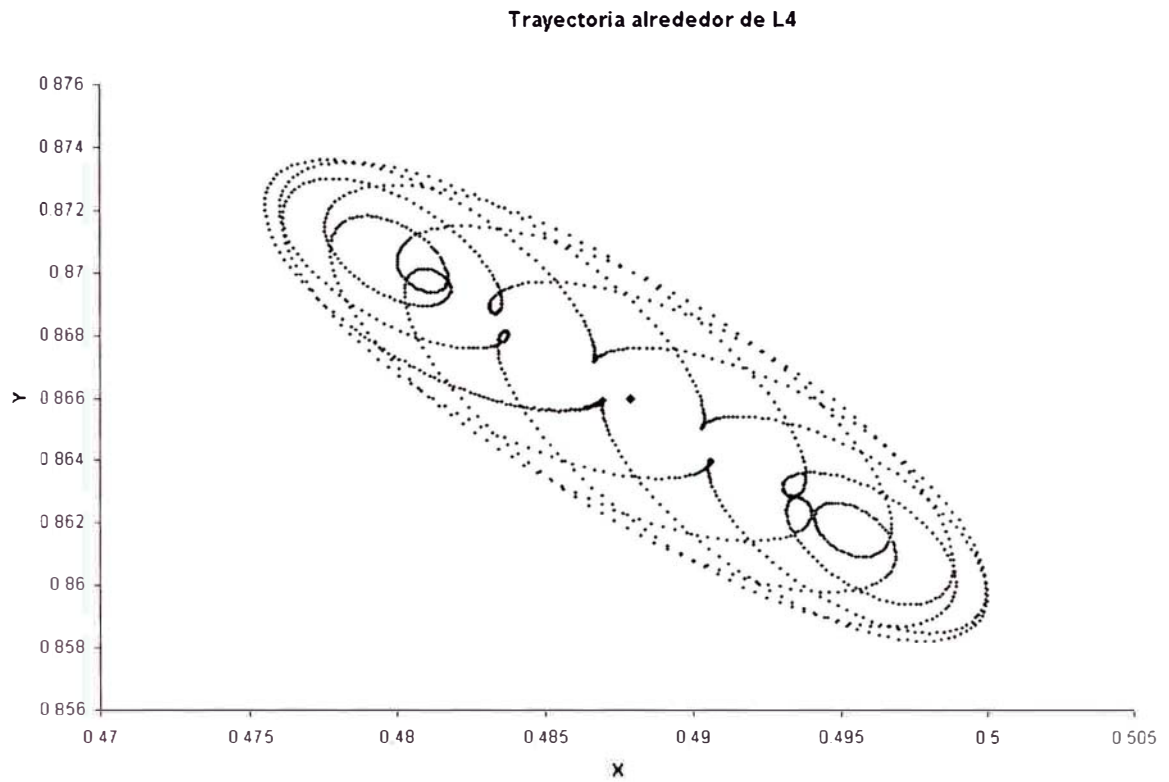


Figura 14: Trayectoria de  $M_3$  en el punto  $L_4$ .

Trayectoria de  $M_3$  en el punto de estabilidad  $L_4$  muy diferente a la figura 9. del Sistema Sol

– Jupiter.

## 6

## CONCLUSIONES

En el sistema Sol-Tierra el punto  $L_2$  es ideal para hacer observaciones del Sol. Los objetos aquí nunca son eclipsados por la Tierra o la Luna.

El Tierra-Luna  $L_2$  permite un fácil acceso a las órbitas lunar y terrestre con un mínimo de velocidad y sería ideal para una estación espacial a mitad de camino con el fin de ayudar el transporte de carga y personal hacia y de la Luna (como se puede apreciar en la figura una orbita alrededor de la tierra).

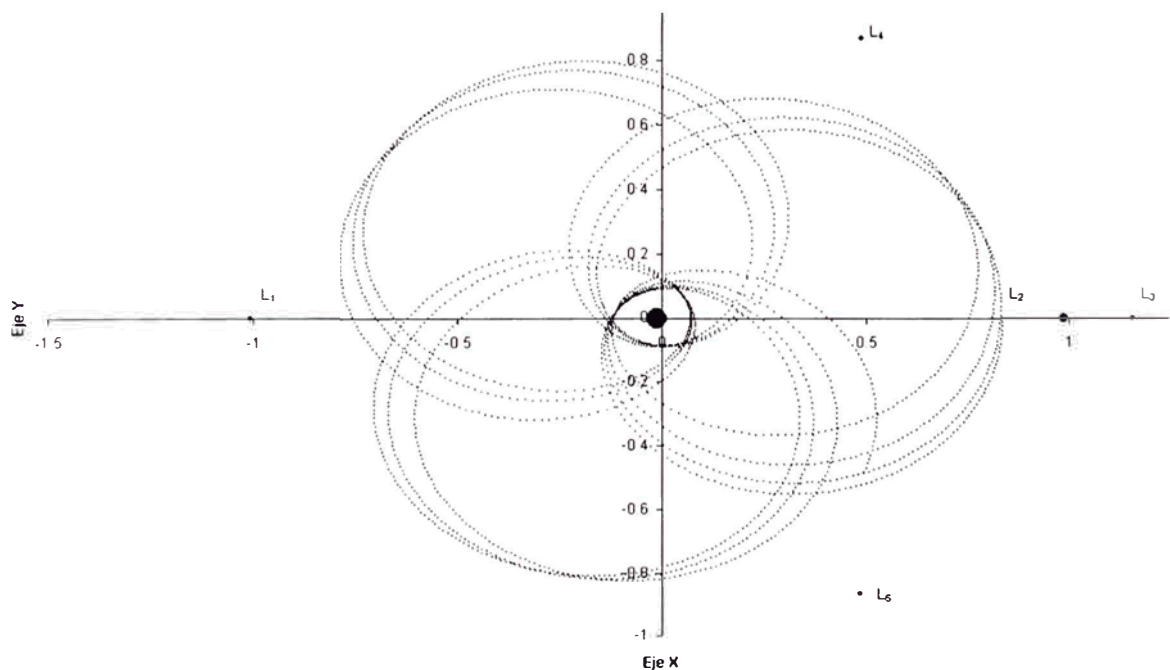


Figura 14: Trayectoria alrededor de la Tierra de  $M_3$  partiendo del punto  $L_2$ .

Aunque los puntos  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_3$  son nominalmente inestables, resulta que es posible encontrar órbitas periódicas estables alrededor de estos puntos, por lo menos en el problema de los tres cuerpos restringido. Estas órbitas perfectamente periódicas, denominadas órbitas "halo", no existen en un sistema dinámico completo de  $n$  cuerpos, como el sistema solar. Sin embargo, órbitas de Lissajous casi-periódicas (es decir,

limitadas pero no precisamente se repiten) si existen en un sistema de  $n$  cuerpos. Estas órbitas casi-periódicas son las que usaron todas las misiones espaciales hasta la fecha. A pesar de que no son perfectamente estables, un modesto esfuerzo puede permitir a una nave espacial permanecer en una órbita Lissajpus deseada por un largo período de tiempo.

El método numérico empleado dio como resultado una buena aproximación de las trayectorias de la partícula (de masa insignificante) que se aprecian en los gráficos obtenidos de trayectorias estables reportados en algunas publicaciones como es el caso del sistema Sol –Tierra y Tierra – Luna.

Se empleo un software muy sencillo como es el Excel y una programación básica como es el visual Basic, para obtener los puntos de las trayectorias y su grafica correspondiente.

Este trabajo nos permite conocer mas aun sobre el estudio de los asteroides troyanos y de posibles trayectorias que pudieran realizar misiones con satélites en diferentes sistemas a través de simulaciones hechas por computadora.

## 7

**SUGERENCIAS**

Como sugerencia se podría plantear la reproducción de algunas misiones realizadas por la NASA, como por ejemplo la del Observatorio Solar y de la Heliosfera (SOHO) se encuentra en una órbita en el punto  $L_1$  y la Advanced Composition Explorer (ACE) en una órbita, también en el punto  $L_1$ .

Se sugiere la reproducción de esta aplicación en Java Applets para su divulgación (via web) por parte de los grupos de investigación relacionados a la astronomía.

## REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

- [1] VIRTUAL RIGID BODIES IN THE CIRCULAR, RESTRICTED THREE-BODY PROBLEM: DYNAMICALLY NATURAL SPACECRAFT FORMATIONS by Ralph R Basilio and Paul K. Newton, 2005, SIAM Conference on Applications of Dynamical Systems Snowbird University of Southern California, Utah.
- [2] TRANSFER ORBITS IN THE RESTRICTED PROBLEM by Antonio Fernando Bertachini de Almeida Prado, 1994, Research Engineer, Depto. of Space Mechanics and Control Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais - INPE – Brazil, São José dos Campos - SP - 12227-010 – Brazil and Roger Broucke+ Professor, Depto. of Aerospace Eng. and Eng. Mechanics University of Texas at Austin, Austin-TX-78712 - USA.
- [3] EL PROBLEMA DE LOS TRES CUERPOS Y LOS ASTEROIDES TROYANOS by Carlos S. Chinea, 2005, <http://personales.ya.com/casanchi/ast/atroyanos.htm>
- [4] ORBITAL MOTION by A E Roy, Philadelphia New York USA, Adam Hilger, Tercera Edición 1991.
- [5] ANALISIS NUMERICO by Burden Richard L. Iberoamerica S.A. Mexico 1985.
- [6] The Restricted Three-Body Problem by Shinichi Tokoro, May, 22 2002