

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA PROFESIONAL DE FÍSICA



**“Dispersión de Partículas por Potenciales Centrales
utilizando el Método de las Ondas Parciales y el de
Aproximación de Born”**

**INFORME DE SUFICIENCIA PARA OPTAR
EL TÍTULO DE LICENCIADO EN FÍSICA**

PRESENTADO POR:

OSCAR EDUARDO CASTILLO RUIZ

LIMA – PERÚ

2006

Índice

| | |
|--|-----------|
| 1. Prólogo | 2 |
| 2. Conceptos Generales | 3 |
| 2.1. Teoría Clásica de la Dispersión | 3 |
| 2.1.1. Intensidad de un haz de partículas | 3 |
| 2.1.2. Sección Eficaz para Dispersión de Partículas | 4 |
| 2.1.3. Sistemas de Laboratorio y Centro de Masa | 6 |
| 2.1.4. Dispersión de Rutherford | 11 |
| 2.2. Teoría Cuántica de la Dispersión | 16 |
| 2.2.1. Potencial de Dispersión. Características Generales | 16 |
| 2.2.2. Método de las Ondas Parciales | 20 |
| 2.2.3. Aproximación de Born | 24 |
| 3. Resolución de Problemas | 32 |
| 3.1. Dispersión por una Esfera Maciza | 32 |
| 3.1.1. Solución Clásica | 32 |
| 3.1.2. Solución Cuántica | 33 |
| 3.2. Dispersión de baja energía por un potencial “Cascarón Esférico” | 36 |
| 3.3. Dispersión de baja energía por un potencial “Esfera Suave” . . | 40 |
| 3.4. Dispersión por el potencial de Yukawa | 40 |
| 3.5. Dispersión de Rutherford | 42 |
| 4. Conclusiones | 43 |
| 5. Bibliografía | 44 |

1. Prólogo

Esta monografía para obtener el título de Licenciado en Física fue un trabajo motivado entre otras cosas por la curiosidad personal de desarrollar mi bagaje conceptual en temas de dispersión. Por ello, gracias a la motivación, asesoría y paciencia del Prof. Orlando Pereyra del Grupo de Física Fundamental de la Universidad Nacional de Ingeniería; fue que se me dio la oportunidad de desarrollar este tema.

El tema de la Dispersión de partículas por potenciales centrales fue tratado desde hace mucho tiempo desde la época de Rutherford. Sin embargo su estudio, en nuestro país, es muy poco difundido a nivel de antegrado a pesar que es un tema básico en la introducción de los estudiantes de física a temas tan apasionantes como la Física Atómica, Nuclear y de Partículas.

Es por ello que creí necesario llevar a cabo un trabajo en el cual se ponga de manifiesto que se puede abordar este tema sin mayor dificultad, con conocimientos de Física cuántica de antegrado.

Para tal fin, el trabajo se dividió en dos partes: la primera es un desarrollo teórico de los métodos de las ondas parciales y la aproximación de Born para la dispersión por potenciales centrales. La otra parte consiste en el desarrollo de algunos problemas sencillos para una posterior comparación entre los métodos y llegar a conclusiones relevantes.

2. Conceptos Generales

Antes de pasar a la resolución del problema de la dispersión, debemos conocer algunos conceptos relacionados con el tema. Estos conceptos se aplicarán tanto al punto de vista clásico como el cuántico.

2.1. Teoría Clásica de la Dispersión

Consideremos un haz uniforme de partículas, todas de igual masa m , de energía E y que no interactúan entre ellas (o que esta interacción es completamente despreciable). Estas partículas inciden sobre un *centro de fuerzas* con un parámetro de impacto b (ver figura 1).

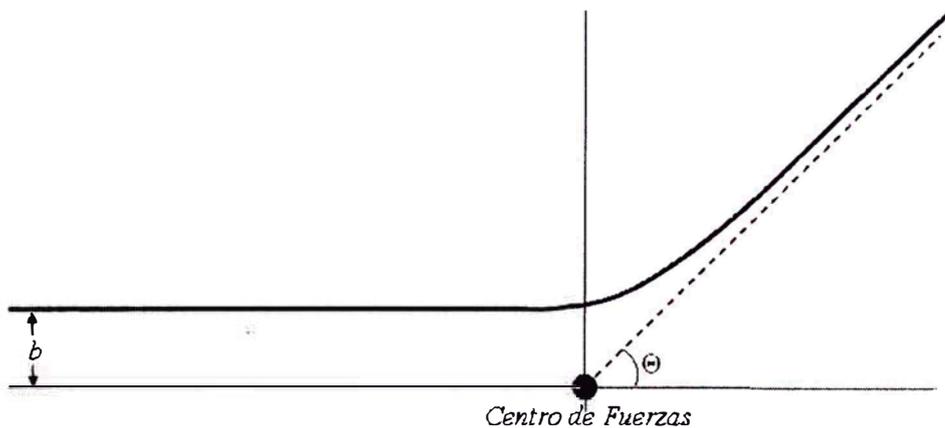


Figura 1: Dispersión Clásica, mostrando el parámetro de impacto b y el ángulo de Dispersión Θ .

2.1.1. Intensidad de un haz de partículas

Consideremos que las fuerzas que actúan sobre el haz de partículas disminuyen tendiendo cero a grandes distancias.

El haz incidente se caracteriza por su *intensidad* I (también llamada densidad

de flujo ó luminosidad):

$$I = \frac{\text{Número de Partículas Incidentes}}{\text{Unidad de Área} \times \text{Unidad de tiempo}} \quad (1)$$

Esta intensidad nos da el número de partículas que atraviesan en una unidad de tiempo una unidad de superficie normal al haz. Al acercarse una partícula al centro de fuerzas será atraída o repelida y su trayectoria se desviará de la rectilínea incidente.

Después de haber pasado el campo de fuerzas, la fuerza que se ejerce sobre el haz de partículas va disminuyendo hasta que la trayectoria vuelve a ser rectilínea. En general, la dirección final de cada partícula no coincide con la incidente y diremos que las partículas se han desviado o dispersado.

2.1.2. Sección Eficaz para Dispersión de Partículas

Supongamos que el haz de partículas incidentes tiene una intensidad uniforme en el tiempo y en cada sección diferencial (ver figura 2). Llamemos F a la intensidad de partículas incidentes, N al número de partículas dispersadas en en la dirección (Θ, ϕ) por unidad de tiempo y $d\sigma$ a la diferencial de área en la misma dirección.

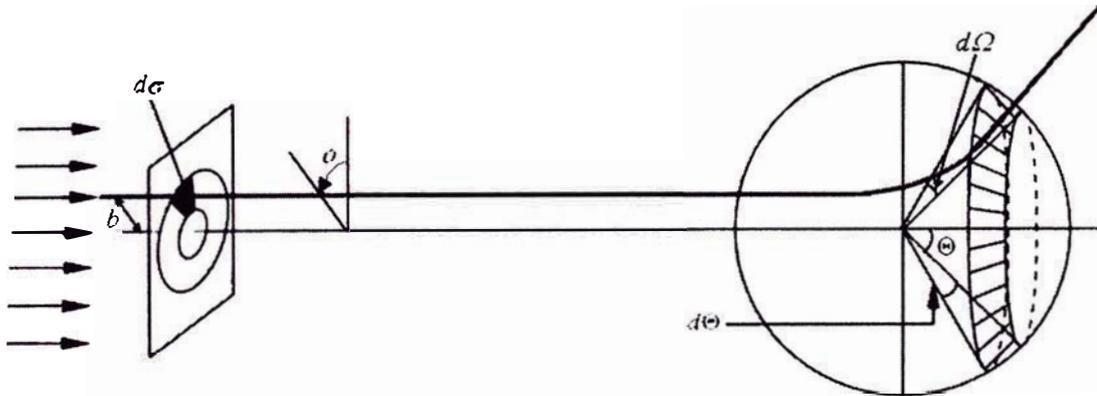


Figura 2: Dispersión de un haz partículas por un potencial central.

Utilizando un razonamiento lógico, decimos que el número de partículas incidentes es igual al número de partículas dispersadas (por unidad de tiempo).

Entonces,
$$dN = F d\sigma = F \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega.$$

De esta última relación definimos la *sección eficaz diferencial*¹. como

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{F} \frac{dN}{d\Omega} \quad (2)$$

Esta última ecuación nos indica que la sección eficaz diferencial es la relación que existe entre el número de partículas dispersadas por unidad de ángulo sólido entre la intensidad incidente. Las cantidades que se relacionan en esta ecuación son medibles en el laboratorio.

La sección eficaz total σ queda entonces como el área total del haz incidente que es dispersado por un blanco (centro de fuerzas).

$$\sigma = \int D(\Theta) d\Omega \quad (3)$$

donde:

$$D(\Theta) = \frac{d\sigma}{d\Omega} \quad (4)$$

Como se aprecia en la figura 2, la porción de partículas incidentes que forman un área infinitesimal $d\sigma$, se dispersan en su correspondiente ángulo sólido $d\Omega$ en alguna dirección azimutal ϕ . Mientras más grande sea $d\sigma$, mayor será $d\Omega$; y $D(\Theta)$ es un factor de proporcionalidad entre ambas.

$$d\sigma = D(\Theta) d\Omega \quad (5)$$

También podemos observar de la gráfica que, en términos del parámetro de impacto y del ángulo azimutal ϕ , $d\sigma = b db d\phi$; y por definición de ángulo sólido $d\Omega = \text{sen}\Theta d\Theta d\phi$.

Entonces,

$$D(\Theta) = \frac{b}{\text{sen}\Theta} \left| \frac{db}{d\Theta} \right| \quad (6)$$

Además de la misma figura, el área sombreada de la esfera tiene un área $(2\pi R \text{sen}\Theta)(Rd\Theta)$, que corresponde al ángulo sólido $d\Omega = 2\pi \text{sen}\Theta d\Theta$. Además, como el flujo incidente es uniforme, la sección eficaz diferencial es simétrica con respecto al ángulo azimutal (siempre que el potencial sea central) y la sección eficaz total quedaría como,

$$\sigma = \int \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right) d\Omega = 2\pi \int_0^\pi d\Theta \text{sen}\Theta \frac{d\sigma}{d\Omega} \quad (7)$$

¹A pesar que no es una diferencial sino una derivada y tampoco es una sección eficaz; sin embargo, es el nombre que se le da en muchos textos

Podemos comprobar de las definiciones de N y F que σ tiene unidades de área, lo cual es consistente con su descripción original.

2.1.3. Sistemas de Laboratorio y Centro de Masa

Consideremos una colisión no relativista entre un haz de partículas caracterizada por la partícula A y un blanco caracterizado por la partícula B .

El sistema de laboratorio L es un sistema en el cual la partícula B está en reposo antes de la colisión. En cambio, en el sistema de centro de masa CM , lo que permanece en reposo es justamente el centro de masa de las partículas A y B .

Si nos situamos en el sistema CM , se verifica que $(m_A + m_B)\vec{v}_{CM} = m_A\vec{v}_A + m_B\vec{v}_B = \vec{0}$.

Entonces, en el CM tenemos

$$\vec{p}_{CM} = \vec{0} \Rightarrow \vec{p}_A = -\vec{p}_B \equiv \vec{p} \quad (8)$$

Utilizando (8), podemos escribir para la energía cinética inicial total (antes de la interacción):

$$T = \frac{p_A^2}{2m_A} + \frac{p_B^2}{2m_B} = \frac{p^2}{2} \left(\frac{1}{m_A} + \frac{1}{m_B} \right)$$

Llamemos masa reducida $\mu = \frac{m_A m_B}{m_A + m_B}$, entonces la energía cinética del sistema de partículas en el sistema CM es

$$T = \frac{p^2}{2\mu} \quad (9)$$

Después de la colisión:

$$\vec{p}_{CM}' = \vec{0} \Rightarrow \vec{p}_A' = -\vec{p}_B' \equiv \vec{p}' \quad (10)$$

Por otro lado, el ángulo de dispersión medido desde el sistema L , Θ_L ; no es el mismo que su correspondiente medido desde el sistema CM , Θ (ver figuras 3 y 4).

Determinaremos la relación entre ambos ángulos para el caso de una dispersión elástica:

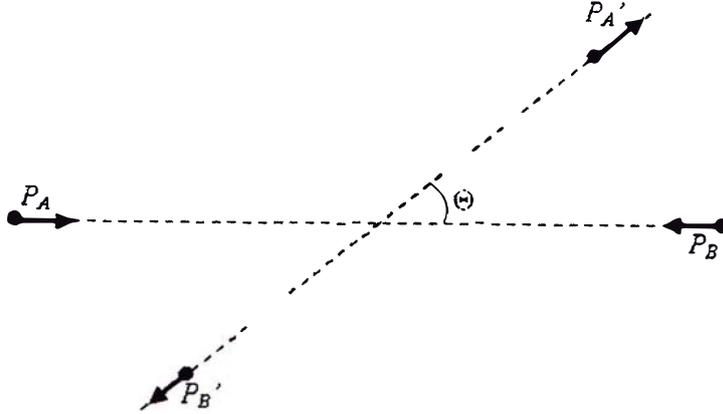


Figura 3: Dispersión en el Sistema CM .

Como la colisión es elástica, la energía de las partículas es la misma antes y después de la colisión,

$$\frac{p_A^2}{2m_A} + \frac{p_B^2}{2m_B} = \frac{p_A'^2}{2m_A} + \frac{p_B'^2}{2m_B} \Rightarrow \frac{p^2}{2\mu} = \frac{p'^2}{2\mu}$$

Entonces de (8) y (10) y considerando sólo los módulos:

$$p = p' \quad p_A = p_A' \quad p_B = p_B' \quad (11)$$

Sea $\vec{v} = \vec{v}_A - \vec{v}_B$ la velocidad relativa de A con respecto de B antes de la interacción. Por lo tanto, con las relaciones que se dan en (8),

$$\left. \begin{array}{l} \vec{p} = \vec{p}_A = m_A \vec{v}_A \\ \vec{p} = -\vec{p}_B = -m_B \vec{v}_B \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{p} \left(\frac{1}{m_A} + \frac{1}{m_B} \right) = \vec{v}_A - \vec{v}_B$$

Entonces,

$$\vec{p} = \mu \vec{v} \quad (12)$$

Recordemos que las relaciones obtenidas en (9) y (12) son referidas al sistema CM .

Por otro lado, la velocidad de A antes de la colisión relativa al sistema L es $\vec{v}_{A,L} = \vec{v}_A - \vec{v}_L$ (estas últimas respecto al sistema CM). Además, habíamos dicho al principio de esta sección que en el sistema L la partícula B estaba en reposo antes de la colisión, así que antes de la colisión el sistema L se mueve con una velocidad \vec{v}_B (también respecto al sistema CM). Entonces,

$$\vec{v}_{A,L} = \vec{v}_A - \vec{v}_B$$

Observemos que la notación que hemos utilizado para los momentum lineales en el sistema CM es \vec{p} . Ahora para el sistema L , usaremos \vec{q} .

Si multiplicamos la última ecuación por m_A y usando la ecuación (8),

$$\vec{q}_A = \vec{p}_A - m_A \vec{v}_B = \vec{p} + \frac{m_A}{m_B} \vec{p}$$

Y de la ecuación (12),

$$\vec{p} \left(1 + \frac{m_A}{m_B} \right) = \mu \vec{v} \left(1 + \frac{m_A}{m_B} \right) = m_A \vec{v}$$

Entonces,

$$\vec{q}_A = m_A \vec{v} \tag{13}$$

Recordemos que en el sistema L , la velocidad relativa de A respecto a B es sólo la velocidad de A ya que B está en reposo. Entonces podemos decir que $\vec{q}_A \parallel \vec{v}_A$.

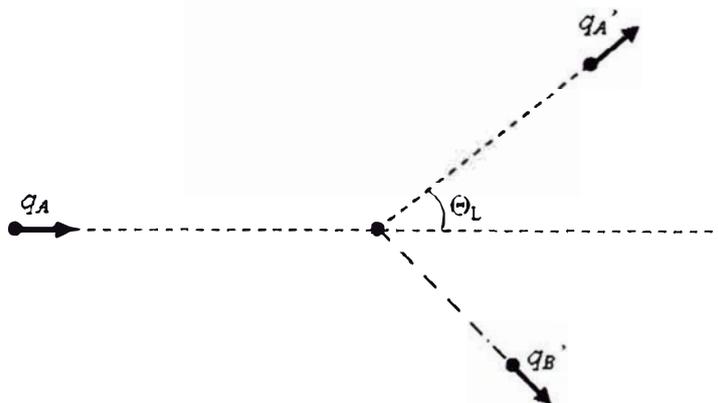


Figura 4: Dispersión en el Sistema L .

Después de la colisión, A y B se mueven con momentum lineal \vec{q}_A' y \vec{q}_B' , como se ve en la figura (4).

Utilizando el principio de la conservación del momentum lineal y el hecho que en un sistema de partículas el momentum lineal total se puede reemplazar por el momentum de una partícula cuya masa es la masa total del sistema y su velocidad es la velocidad del centro de masa (todo respecto al sistema L),

$$\vec{q}_A = \vec{q}_A' + \vec{q}_B' = (m_A + m_B) \vec{v}_{CM,L}$$

Entonces,

$$\vec{v}_{CM,L} = \frac{\vec{q}_A}{(m_A + m_B)} \quad (14)$$

Con lo que vemos que $\vec{v}_{CM,L}$ es constante y paralela al eje horizontal ya que \vec{q}_A también lo es.

Por otro lado, como la velocidad de A con respecto al sistema CM es $\vec{v}_{A,CM} = \vec{v}_{A,L} - \vec{v}_{CM,L}$, entonces multiplicando por la masa de A y utilizando (14) queda

$$\vec{p}_A = \vec{q}_A - m_A \vec{v}_{CM,L} = \vec{q}_A - \frac{m_A}{m_A + m_B} \vec{q}_A = \frac{m_B}{m_A + m_B} \vec{q}_A$$

Observemos que la última relación es válida para cualquier momento de la dispersión (antes, durante o después), ya que para obtenerla se parte de la definición general de velocidad relativa.

Utilizando la última ecuación, las componentes del momentum lineal de A a lo largo de la dirección de incidencia en los dos sistemas de referencia están relacionados después de la colisión por:

$$p'_A \cos \Theta = q'_A \cos \Theta_L - m_A v_{CM,L} \Rightarrow q'_A \cos \Theta_L = p \cos \Theta + m_A v_{CM,L}$$

Las componentes del momentum lineal de A normales a la dirección de incidencia:

$$p'_A \sin \Theta = q'_A \sin \Theta_L \Rightarrow q'_A \sin \Theta_L = p \sin \Theta$$

Entonces,

$$\tan \Theta_L = \frac{p \sin \Theta}{p \cos \Theta + m_A v_{CM,L}}$$

Por otro lado de la ecuación (14),

$$\begin{aligned} \vec{v}_{CM,L} &= \frac{\vec{q}_A}{(m_A + m_B)} = \frac{\vec{p}_A}{m_B} = \frac{\vec{p}}{m_B} \\ \Rightarrow m_B \vec{v}_{CM,L} &= \vec{p} \\ \Rightarrow m_A \vec{v}_{CM,L} &= \frac{m_A}{m_B} \vec{p} \\ \Rightarrow \tan \Theta_L &= \frac{p \sin \Theta}{p \cos \Theta + \frac{m_A}{m_B} p} = \frac{\sin \Theta}{\cos \Theta + \frac{m_A}{m_B}} \end{aligned}$$

Luego,

$$\tan \Theta_L = \frac{\sin \Theta}{\cos \Theta + \xi}, \quad \text{donde } \xi = \frac{m_A}{m_B} \quad (15)$$

Como el plano de dispersión es el mismo para ambos sistemas de referencia el ángulo azimutal es el mismo $\phi_L = \phi$.

Habíamos dicho que σ es el área total del haz que es dispersado por el blanco. Bajo ese punto de vista, debe ser el mismo en los dos sistemas de referencia. Revisando la relación (7), podemos decir que

$$\begin{aligned}\sigma &= 2\pi \int_{-1}^1 d(\cos \Theta_L) \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_L = 2\pi \int_{-1}^1 d(\cos \Theta) \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right) \\ \Rightarrow \int_{-1}^1 d(\cos \Theta_L) \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_L &= \int_{-1}^1 d(\cos \Theta) \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right) \\ \Rightarrow \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_L &= \left| \frac{d(\cos \Theta)}{d(\cos \Theta_L)} \right| \frac{d\sigma}{d\Omega}\end{aligned}\quad (16)$$

Utilizando la ecuación (15) y conceptos de trigonometría se demuestra que

$$\cos \Theta_L = \frac{\cos \Theta + \xi}{\sqrt{1 + 2\xi \cos \Theta + \xi^2}}$$

Derivando,

$$\frac{d(\cos \Theta_L)}{d(\cos \Theta)} = \frac{1 + \xi \cos \Theta}{(1 + 2\xi \cos \Theta + \xi^2)^{3/2}}$$

Luego,

$$\left| \frac{d(\cos \Theta)}{d(\cos \Theta_L)} \right| = \frac{(1 + 2\xi \cos \Theta + \xi^2)^{3/2}}{|1 + \xi \cos \Theta|}$$

En la ecuación (16),

$$\boxed{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_L = \frac{(1 + 2\xi \cos \Theta + \xi^2)^{3/2}}{|1 + \xi \cos \Theta|} \frac{d\sigma}{d\Omega}}$$

A pesar de que se llevan a cabo numerosos experimentos de dispersión en los cuales las partículas incidentes son dispersadas por un blanco estacionario, ese no es siempre el caso. Muchas veces los dos haces de partículas se dirigen una contra el otro y se dispersan mutuamente. Sin embargo, cabe mencionar que el resultado de tal experimento se puede transformar a un sistema CM utilizando argumentos cinemáticos como los que se usaron anteriormente.

2.1.4. Dispersión de Rutherford

Rutherford hizo un cálculo detallado de la distribución angular que se esperaría para la dispersión de partículas α por átomos como los propuestos en su modelo (con la carga positiva centrada en una región muy pequeña).

Se asumía que la dispersión era del tipo coulombiana y provocada por átomos pesados, con el objeto de permitir la suposición de que la masa del núcleo era tan grande comparada con la de la partícula α que este núcleo no retrocede de forma apreciable (permanece fijo en el espacio) durante el proceso de dispersión. También se supuso que tanto la partícula α como el núcleo se comportaban como cargas puntuales. Finalmente en los cálculos se considera la mecánica no relativista, ya que $v/c \simeq 1/20$.

Para un sistema de dos partículas con interacción coulombiana, la energía potencial entre ellas depende únicamente de la distancia de separación entre ellas. La lagrangiana para el sistema CM será entonces

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m_A|\dot{\vec{r}}_A|^2 + \frac{1}{2}m_B|\dot{\vec{r}}_B|^2 - U(|\vec{r}_A - \vec{r}_B|)$$

Donde \vec{r}_A y \vec{r}_B son los vectores posición de las partículas A y B respectivamente.

Sea $\vec{r} = \vec{r}_A - \vec{r}_B$; y como estamos en el sistema CM , $m_A\vec{r}_A + m_B\vec{r}_B = 0$.

Entonces, de estas dos últimas ecuaciones se obtiene

$$\vec{r}_A = \frac{m_B\vec{r}}{m_A + m_B}, \quad \vec{r}_B = -\frac{m_A\vec{r}}{m_A + m_B}$$

Con lo cual la lagrangiana anterior queda

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\mu|\dot{\vec{r}}|^2 - U(r) \tag{17}$$

En estas condiciones, cuando el potencial es central (y por lo tanto también lo es la fuerza relacionada), el torque del sistema es $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}(r) = \vec{0}$ y el momentum angular $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ es constante.

Por consiguiente el vector posición y el momentum lineal permanecen siempre en el mismo plano normal a \vec{L} . Entonces podemos decir que el movimiento se da en el plano.

Utilizando coordenadas polares y haciendo que \vec{L} sea paralelo al eje Z , la ecuación (17) quedaría,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - U(r) \quad (18)$$

Entonces,

$$\dot{p}_\theta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0 = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}$$

Osea,

$$p_\theta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = \mu r^2 \dot{\theta} = cte.$$

Como $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = r\hat{e}_r \times \mu(r\dot{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta) = \mu r^2 \dot{\theta} \hat{e}_z$, entonces podemos decir que

$$p_\theta = L = \mu r^2 \dot{\theta} = cte. \quad (19)$$

La energía total del sistema es,

$$E = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + U(r)$$

Expresado de otra forma utilizando (19),

$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{L^2}{\mu r^2} + U(r) \quad (20)$$

Cuando se conoce $U(r)$, la ecuación (20) describe completamente y su integral nos dará la integral general del problema en función de los parámetros E y L . Si en (20) despejamos \dot{r} , tendremos

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{\mu}(E - U) - \frac{L^2}{\mu^2 r^2}}$$

De esta ecuación puede obtenerse la ecuación del movimiento de manera habitual $r = r(t)$. Pero por el momento nos interesa más la ecuación de la trayectoria para poder describir el comportamiento angular en la dispersión. Para eso podemos escribir,

$$d\theta = \frac{d\theta}{dt} \frac{dt}{dr} dr = \frac{\dot{\theta}}{\dot{r}} dr$$

Donde podemos introducir el valor de $\dot{\theta}$ dado en (19), $\dot{\theta} = \frac{L}{\mu r^2}$. Tras integrar,

$$\theta(r) = \int_r^{r_{min}} \frac{\frac{L}{r^2} dr}{\sqrt{2\mu \left(E - U - \frac{L^2}{2\mu r^2} \right)}} + \theta_0$$

Esta última integral tiene los límites de integración de acuerdo a la figura 5.

En el caso de Rutherford, el potencial tiene la forma

$$U(r) = -\frac{k}{r} \quad \text{donde } k = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0}$$

Siendo $q_1 = 2e$ la carga de la partícula α y $q_2 = Ze$ la carga del núcleo del átomo blanco en su experimento mas famoso. Sin embargo, estas cargas pueden tomar cualquier valor dependiendo de las partículas involucradas.

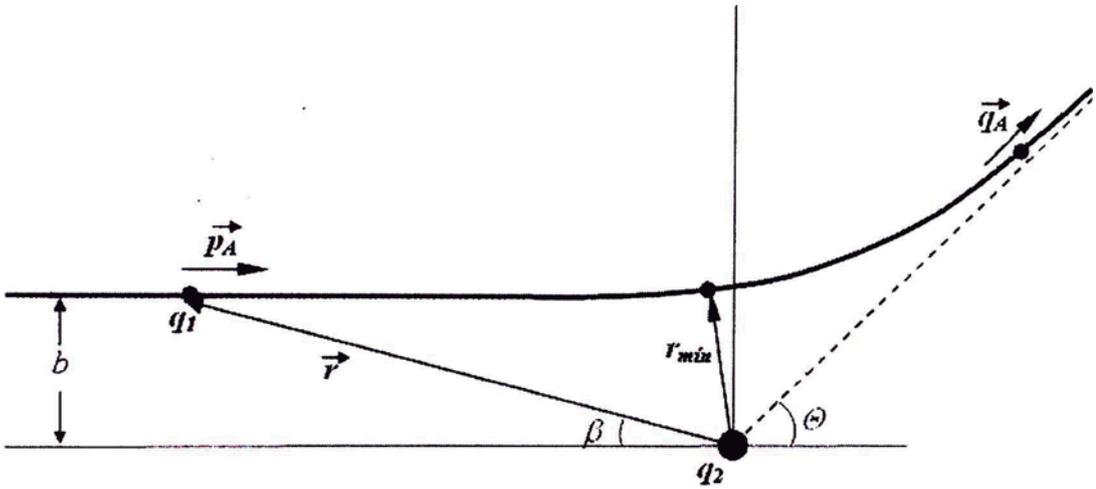


Figura 5: Trayectoria hiperbólica seguida por el modelo de Rutherford.

Se debe recalcar que en el modelo de Rutherford, como la partícula B permanece en reposo, entonces podemos decir que el sistema L es un sistema de referencia también en reposo.

Además como $m_B \gg m_A \Rightarrow \mu \approx m_A$. Por lo tanto la última integral toma la forma:

$$\theta(r) = \int_r^{r_{mín}} \frac{\frac{L}{r^2} dr}{\sqrt{2m_A \left(E + \frac{k}{r} - \frac{L^2}{2m_A r^2} \right)}} + \theta_0 \quad (21)$$

En la figura (5) se puede ver que $b = r \text{ sen } \beta$ y entonces de la ecuación (19)

podemos decir que

$$\begin{aligned}\vec{L} &= \vec{r} \times \vec{p}_A \\ &= m_A r^2 \dot{\theta} \hat{e}_z \\ &= p_A r \sin \beta \hat{e}_z \\ &= p_A b \hat{e}_z\end{aligned}$$

Pero antes de la colisión $E = \frac{p_A^2}{2m_A}$, entonces $p_A = \sqrt{2m_A E}$.

Luego podemos llegar a la relación

$$L = m_A v_A b = b \sqrt{2m_A E} \quad (22)$$

Ahora podemos utilizar la última relación y reemplazar L en la integral (21) obteniendo la siguiente integral

$$\theta(r) = \int_r^{r_{\min}} \frac{\frac{b}{r^2} dr}{\sqrt{1 + \frac{k}{rE} - \frac{b^2}{r^2}}} + \theta_0 \quad (23)$$

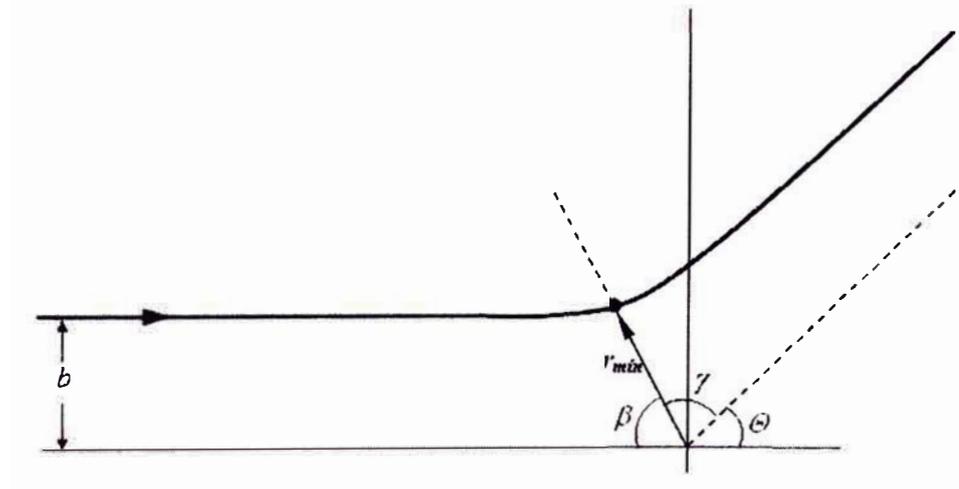


Figura 6: Relación entre los parámetros de angulares en una dispersión repulsiva.

Como la órbita debe ser simétrica respecto al eje donde se encuentra el vector \vec{r}_{\min} (que corresponde al mayor acercamiento en la figura 6), entonces $\gamma = \beta$

y el ángulo de dispersión vendrá dado por

$$\Theta = \pi - 2\beta$$

Por otro lado, cuando $r \mapsto \infty$ entonces $\theta_0 \mapsto \pi$ (dirección incidente) y además $\theta(r) = \pi - \beta(r)$. Entonces

$$\theta = \int_{\infty}^{r_{\min}} \frac{\frac{b}{r^2} dr}{\sqrt{1 + \frac{k}{r} \frac{1}{E} - \frac{b^2}{r^2}}} + \pi = \pi - \beta$$

Fácilmente se llega a la siguiente relación

$$\beta = \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{\frac{b}{r^2} dr}{\sqrt{1 + \frac{k}{r} \frac{1}{E} - \frac{b^2}{r^2}}}$$

O también

$$\Theta = \pi - 2 \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{\frac{b}{r^2} dr}{\sqrt{1 + \frac{k}{r} \frac{1}{E} - \frac{b^2}{r^2}}} \quad (24)$$

Si resolvemos la integral haciendo el cambio de variable $u \equiv \frac{1}{r}$ y despejando para b , nos dará

$$b = \frac{k}{2E} \cot \frac{\Theta}{2}$$

Derivando con respecto a Θ , $\frac{db}{d\Theta} = -\frac{k}{4E} \csc^2 \frac{\Theta}{2}$.

Por último podemos utilizar la ecuación (5) para obtener la sección eficaz diferencial para la dispersión de Rutherford

$$D(\Theta) = \left[\frac{k}{4E \sin^2 \left(\frac{\Theta}{2} \right)} \right]^2 \quad \text{donde } k = \frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0}$$

2.2. Teoría Cuántica de la Dispersión

En esta sección vamos a tratar el problema de la dispersión, pero desde el punto de vista cuántico. La primera gran diferencia con la teoría clásica de la dispersión que detallamos en la sección anterior, es que encontraremos que las partículas serán tratadas como ondas con sus respectivas funciones de onda y las soluciones que encontraremos serán soluciones de la ecuación de Schrödinger, como cualquier teoría cuántica.

Para la resolución de esta ecuación de Schrödinger, utilizaremos el método de las ondas parciales y la aproximación de Born que describiremos más adelante.

2.2.1. Potencial de Dispersión. Características Generales

Nuestro sistema de estudio está descrito por la ecuación de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r}, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\vec{r}) \right] \Psi(\vec{r}, t)$$

Aquí vamos a asumir que tratamos con el problema en el que la partícula blanco B permanece en reposo; Entonces $m = m_A$

Sea un potencial $V(\vec{r})$ que no depende del tiempo, entonces las soluciones son del tipo $\Psi(\vec{r}, t) = \varphi(\vec{r})e^{-i\frac{Et}{\hbar}}$, con lo cual

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \varphi(\vec{r})e^{-i\frac{Et}{\hbar}} &= -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \varphi(\vec{r})e^{-i\frac{Et}{\hbar}} + V(\vec{r})\varphi(\vec{r})e^{-i\frac{Et}{\hbar}} \\ \Rightarrow (i\hbar) \left(\frac{-iE}{\hbar} e^{-i\frac{Et}{\hbar}} \right) \varphi(\vec{r}) &= e^{-i\frac{Et}{\hbar}} \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \varphi(\vec{r}) \right] + V(\vec{r})\varphi(\vec{r})e^{-i\frac{Et}{\hbar}} \\ \Rightarrow \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\vec{r}) \right] \varphi(\vec{r}) &= E\varphi(\vec{r}) \\ \Rightarrow \left[\nabla^2 - \frac{2m}{\hbar^2} V(\vec{r}) + \frac{2mE}{\hbar^2} \right] \varphi(\vec{r}) &= 0 \end{aligned}$$

Sea $\frac{2m}{\hbar^2} V(\vec{r}) \equiv U(\vec{r})$ y $\frac{2mE}{\hbar^2} = \frac{2m}{\hbar^2} \cdot \frac{p^2}{2m} = \frac{p^2}{\hbar^2} \equiv k^2$, entonces

$$[\nabla^2 + k^2 - U(\vec{r})] \varphi(\vec{r}) = 0$$

Debemos considerar potenciales $U(\vec{r})$ de tal forma que cuando $r \mapsto \infty \Rightarrow U(\vec{r}) \mapsto 0$. De esa manera, para r grandes el problema se reduce al problema de la partícula libre:

$$[\nabla^2 + k^2] \varphi_{r \rightarrow \infty}(\vec{r}) = 0$$

En esta región (grandes r), $\varphi(\vec{r})$ debe describir tanto a las partículas del haz incidente como a las dispersadas:

$$\varphi_{r \rightarrow \infty}(\vec{r}) = \varphi_{inc}(\vec{r}) + \varphi_{disp}(\vec{r}) \quad (25)$$

Las partículas del haz incidente tienen todas el mismo momentum lineal $p = \hbar k$ y viajan en la misma dirección (sea x). Entonces la onda asociada puede expresarse

$$\varphi_{inc}(\vec{r}) = e^{ikx} \quad (26)$$

Entonces su normalización $|\varphi(\vec{r})|^2 = 1$, quiere decir que existe una partícula en la unidad de volumen. Recordando la definición de F (sección 2.1.2):

$$\begin{aligned} F &= \frac{\# \text{ de Partículas Incidentes}}{\text{Unidad de Área} \times \text{Unidad de tiempo}} \times \frac{\text{unidad de longitud (en } x\text{)}}{\text{unidad de longitud (en } x\text{)}} \\ &= \frac{\# \text{ de Partículas Incidentes}}{\text{unidad de volumen}} \times \frac{\text{unidad de longitud (en } x\text{)}}{\text{unidad de tiempo}} \\ &= (1) \times (v) \quad \text{donde } v \text{ es la velocidad de las partículas} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow F = v \quad (27)$$

La onda plana descrita en (26) es en teoría infinita pero en la práctica el haz está colimado y tiene un ancho finito. Sin embargo, el ancho del haz es muy grande comparado con las dimensiones atómicas o nucleares y se puede describir como una onda plana en la región de dispersión.

Muy lejos del centro de dispersión, φ_{disp} debe representar una onda esférica con dirección radial hacia afuera. La forma de las ondas esféricas es

$$\frac{A \cos(kr + \delta)}{r}$$

tomando sólo la parte espacial. Entonces nuestra onda quedaría como:

$$\varphi_{disp} = f(k, \theta, \phi) \frac{e^{ikr}}{r} \quad (28)$$

Recordemos que (r, θ, ϕ) son las coordenadas esféricas del vector posición de la partícula dispersada. La amplitud f de la onda esférica dispersada,

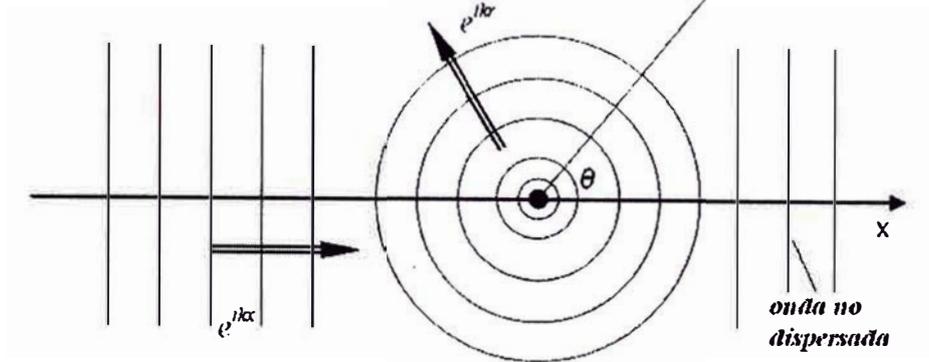


Figura 7: Dispersión de ondas; una onda plana incidente produce una onda esférica dispersada.

llamada *amplitud de dispersión* depende del número de onda y de la dirección (θ, ϕ) (ver figura 7) y determina el flujo de las partículas dispersadas en esa dirección.

De las ecuaciones (25), (26) y (28) vemos que para r grandes la función de onda de dispersión satisface

$$\varphi(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} e^{ikx} + f(k, \theta, \phi) \frac{e^{ikr}}{r} \quad (29)$$

La densidad de corriente de probabilidad \vec{j} es

$$\vec{j}(\vec{r}) = \frac{\hbar}{2mi} [\varphi^*(\nabla\varphi) - (\nabla\varphi^*)\varphi],$$

donde el gradiente en coordenadas esféricas es

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial r} \hat{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \hat{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \hat{e}_\phi$$

Como el segundo y tercer términos son muy pequeños cuando $r \mapsto \infty$ entonces \vec{j} sólo tiene dirección radial y usando (28), la corriente de las partículas

dispersadas es

$$\begin{aligned}
 j_r &= \frac{\hbar}{2mi} \left[f^*(k, \theta, \phi) \frac{e^{-ikr}}{r} \cdot f(k, \theta, \phi) \left(\frac{ike^{ikr}}{r} - \frac{e^{ikr}}{r^2} \right) \right. \\
 &\quad \left. - f(k, \theta, \phi) \frac{e^{ikr}}{r} \cdot f^*(k, \theta, \phi) \left(-\frac{ike^{-ikr}}{r} - \frac{e^{-ikr}}{r} \right) \right] \\
 &= \frac{\hbar}{2mi} |f(k, \theta, \phi)|^2 \left[\frac{ik}{r^2} - \frac{ik}{r^3} + \frac{ik}{r^2} + \frac{ik}{r^3} \right] \\
 &\Rightarrow j_r = \frac{\hbar k}{m} \frac{|f(k, \theta, \phi)|^2}{r^2}
 \end{aligned}$$

Por definición de densidad de corriente, j_r representa el número de partículas que atraviesa la unidad de área por unidad de tiempo. Esto, sumado al hecho que el detector presenta un área de sección eficaz $r^2 d\Omega$ al haz dispersado, el número de partículas por unidad de tiempo que entran al detector dN (ver sección 2.1.2), es

$$dN = \frac{\hbar k}{m} |f(k, \theta, \phi)|^2 d\Omega \quad (30)$$

Debido a que la velocidad de la partícula es $v = \frac{p}{m} = \frac{\hbar k}{m}$, encontramos la sección eficaz diferencial usando la ecuación (6), (27) y (30):

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{F} \frac{dN}{d\Omega} = \frac{\frac{\hbar k}{m} |f(k, \theta, \phi)|^2}{\frac{\hbar k}{m}}$$

Entonces,

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(k, \theta, \phi)|^2} \quad (31)$$

Esto significa que todo el problema se reduce a determinar la amplitud de dispersión $f(k, \theta, \phi)$, que nos da la probabilidad de dispersión en una dirección (θ, ϕ) para un haz de partículas de energía $E = \frac{k^2 \hbar^2}{2m}$.

Para calcular esta amplitud (por consiguiente la sección eficaz diferencial), vamos a utilizar *el método de las ondas parciales*.

2.2.2. Método de las Ondas Parciales

Formalismo

Se sabe que la solución espacial de la ecuación de Schrödinger en coordenadas esféricas para potenciales de la forma $V(r)$ admite soluciones separables de la forma

$$\varphi(r, \theta, \phi) = R_l(r)Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (32)$$

Donde $Y_{lm}(\theta, \phi)$ son los armónicos esféricos y $u(r) = rR(r)$ satisface la ecuación radial

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 u}{dr^2} + \left[V(r) + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{l(l+1)}{r^2} \right] u = Eu$$

Vamos a asumir que el potencial está *localizado* y dividiremos el problema en tres regiones: para r muy grande, para r intermedio y para r relativamente pequeño (ver figura 8).

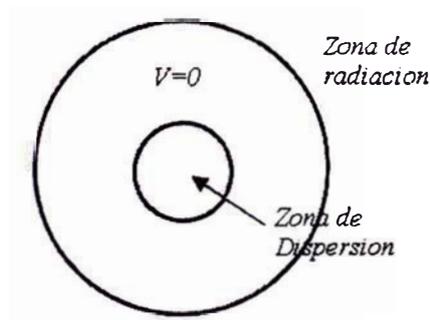


Figura 8: Dispersión de ondas para un potencial localizado: la región de dispersión, la región intermedia y la zona de radiación

a) **Zona de Radiación** : Cuando $r \rightarrow \infty$ ($kr \gg 1$)

$$\frac{d^2 u}{dr^2} \approx -k^2 u$$

Hemos dicho desde el principio que estamos considerando potenciales que se anulan en el infinito, entonces la solución general es:

$$u(r) = Ce^{ikr} + De^{-ikr}$$

El primer término representa la onda esférica saliente y el segundo la entrante. Para la onda dispersada $D = 0$, y queda

$$R(r) \approx \frac{e^{ikr}}{r} \quad (33)$$

Como dedujimos cualitativamente en la ecuación (29).

b) **Zona Intermedia** ²: Cuando $V \mapsto 0$ y $\frac{\hbar^2 l(l+1)}{2m r^2} \mapsto 0$

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2m r^2} u = -k^2 u$$

y la solución general es una combinación lineal de las *funciones esféricas de Bessel y de Neumann*:

$$u(r) = A r j_l(kr) + B r n_l(kr)$$

Sin embargo, ni $j_l(kr)$ (que es algo parecido a una función seno) ni $B r n_l(kr)$ (como coseno) representan una onda entrante o saliente. Lo que necesitamos entonces, es una combinación lineal análoga a e^{ikr} y e^{-ikr} ; estas se conocen como *funciones esféricas de Hankel*:

$$h_l^{(1)}(x) \equiv j_l(x) + i n_l(x); \quad h_l^{(2)}(x) \equiv j_l(x) - i n_l(x)$$

Las primeras funciones de Hankel se listan en el cuadro 1.

Cuadro 1: Funciones de Hankel esféricas, $h_l^{(1)}(x)$ y $h_l^{(2)}(x)$.

| | |
|---|--|
| $h_0^{(1)} = -i \frac{e^{ix}}{x}$ | $h_0^{(2)} = -i \frac{e^{-ix}}{x}$ |
| $h_1^{(1)} = \left(-\frac{i}{x^2} - \frac{1}{x}\right) e^{ix}$ | $h_1^{(2)} = \left(\frac{i}{x^2} - \frac{1}{x}\right) e^{-ix}$ |
| $\left. \begin{aligned} h_l^{(1)} &\rightarrow \frac{1}{x} \exp \left\{ +i \left[x - \frac{\pi}{2} (l+1) \right] \right\} \\ h_l^{(2)} &\rightarrow \frac{1}{x} \exp \left\{ -i \left[x - \frac{\pi}{2} (l+1) \right] \right\} \end{aligned} \right\} \text{para } x \gg 1$ | |

Se observa del cuadro que para r grande, las funciones de Hankel de primera clase $h_l^{(1)}(kr)$, tienden a $\frac{e^{ikr}}{r}$; mientras que las de segunda clase $h_l^{(2)}(kr)$, tienden a $\frac{e^{-ikr}}{r}$.

²lo que sigue no se aplica a un potencial de Coulomb

Entonces para las ondas salientes es obvio que necesitamos las funciones esféricas de Hankel de primera clase:

$$R(r) \approx Ch_l^{(1)}(kr)$$

Por consiguiente, la función de onda quedaría:

$$\varphi(r, \theta, \phi) = A \left[e^{ikx} + \sum_{l,m} C_{l,m} h_l^{(1)}(kr) Y_l^m(\theta, \phi) \right] \quad (34)$$

Observar del cuadro 1 que para r grande la funciones de Hankel tienden a $(-i)^{l+1} \frac{e^{ikr}}{kr}$, entonces la ecuación (34) queda

$$\varphi(r, \theta, \phi) \approx A \left[e^{ikx} + f(\theta, \phi) \frac{e^{ikr}}{r} \right]$$

Donde

$$f(\theta, \phi) = \frac{1}{k} \sum_{l,m} (-i)^{l+1} C_{l,m} Y_l^m(\theta, \phi) \quad (35)$$

Esto confirma de manera rigurosa la estructura general postulada en la ecuación (29), y nos dice cómo calcular la amplitud de dispersión $f(\theta, \phi)$ en términos de las *amplitudes de onda parcial* $C_{l,m}$. Evidentemente la sección eficaz diferencial queda

$$D(\theta, \phi) = |f(\theta, \phi)|^2 = \frac{1}{k^2} \sum_{l,m} \sum_{l',m'} (i)^{l-l'} C_{l,m}^* C_{l',m'} (Y_l^m)^* Y_{l'}^{m'} \quad (36)$$

Para determinar la sección eficaz total usamos el hecho que los armónicos esféricos son funciones ortonormales y podemos decir

$$\sigma = \frac{1}{k^2} \sum_{l,m} \sum_{l',m'} (i)^{l-l'} C_{l,m}^* C_{l',m'} \int (Y_l^m)^* Y_{l'}^{m'} d\Omega = \frac{1}{k^2} \sum_{l,m} |C_{l,m}|^2 \quad (37)$$

Por otro lado por definición de armónicos esféricos tenemos

$$Y_{l,m}(\theta, \phi) = \epsilon \sqrt{\frac{(2l+1)(l-|m|)!}{4\pi(l+|m|)!}} e^{im\phi} P_l^m(\cos\theta)$$

Donde $\epsilon = (-1)^m$ para $m \geq 0$ y $\epsilon = 1$ para $m \leq 0$. Además $P_l^m(\cos\theta)$ es el *polinomio asociado de Legendre*.

Para un potencial central $V(r)$, el sistema es completamente simétrico alrededor del eje de incidencia (eje x). Esto significa que φ es independiente de ϕ y que $m = 0$. Entonces,

$$Y_{l,0}(\theta, \phi) = Y_l(\theta) = \sqrt{\frac{(2l+1)l!}{4\pi l!}} P_l^0(\cos \theta)$$

Por definición, $P_l^0(x) = (1-x^2)^{\frac{|m|}{2}} \frac{d^{|m|}}{dx^{|m|}} P_l(x) \Big|_{m=0} = P_l(x)$

Entonces,

$$Y_l(\theta) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos \theta)$$

Entonces reemplazando en (34):

$$\varphi \equiv \varphi(r, \theta) = A \left[e^{ikx} + \sum_{l=0}^{\infty} C_l h_l^{(1)} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos \theta) \right] \quad (38)$$

La amplitud de dispersión es

$$f(\theta) = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (-i)^{l+1} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} C_l P_l(\cos \theta) \quad (39)$$

Y la sección eficaz total es

$$\sigma = \frac{1}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} |C_l|^2 \quad (40)$$

Resolución de los problemas

Todo lo que resta es determinar las amplitudes de ondas parciales C_l para el potencial en cuestión. Esto se consigue resolviendo la ecuación de Schrödinger en la región interior (donde $V(r)$ es diferente de cero) y haciendo que tenga el mismo valor en la región exterior (ecuación 38) justo en la frontera entre ambas, de donde se obtienen las condiciones de contorno adecuadas.

Antes de proceder, es útil reescribir la función de onda con una notación más consistente ya que como se observa en las ecuaciones se utilizan tanto coordenadas esféricas para la onda esférica saliente como coordenadas cartesianas para la onda incidente.

De hecho, hemos dicho que e^{ikx} satisface la ecuación de Schrödinger con $V = 0$. Por otro lado, también se dijo que la solución general de la ecuación de Schrödinger con $V = 0$ se puede escribir de la forma

$$\sum_{l,m} [A_{l,m} j_l(kr) + B_{l,m} n_l(kr)] Y_l^m(\theta, \phi)$$

Eso significa que es posible expresar e^{ikx} de esa manera. Sin embargo, e^{ikx} es finito en el origen, entonces no debe haber funciones de Neumann en la solución ya que divergen para $r = 0$. Además como $x = r \cos \theta$ (ver figura 7) no depende ϕ , entonces sólo se permiten términos con $m = 0$.

Se sabe por la ecuación de Rayleigh que

$$e^{ikx} = \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) j_l(kr) P_l(\cos \theta)$$

Entonces la función de onda en la región exterior se puede escribir en una forma más consistente:

$$\varphi(r, \theta) = A \sum_{l=0}^{\infty} \left[i^l (2l+1) j_l(kr) + \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} C_l h_l^{(1)}(kr) \right] P_l(\cos \theta) \quad (41)$$

2.2.3. Aproximación de Born

Forma Integral de la Ecuación de Schrödinger

La ecuación de Schrödinger independiente del tiempo

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \varphi + V\varphi = E\varphi$$

puede escribirse según el punto 2.2.1 como

$$(\nabla^2 + k^2)\varphi = Q \quad (42)$$

Donde $k \equiv \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$ y $Q \equiv \frac{2m}{\hbar^2} V\varphi$

Esto tiene la forma de la ecuación de Helmholtz, con la diferencia que el término Q depende de φ . Sea $G(\vec{r})$ la solución de la ecuación de Helmholtz de la forma

$$(\nabla^2 + k^2) G(\vec{r}) = \delta^3(\vec{r}) \quad (43)$$

donde $\delta^3(\vec{r})$ es la función *Delta de Dirac* en tres dimensiones.

Luego, podemos expresar φ como una integral:

$$\varphi(\vec{r}) = \int G(\vec{r} - \vec{r}_0) Q(\vec{r}_0) d^3 r_0$$

Esta última relación se puede demostrar fácilmente si reemplazamos $\varphi(r)$ en la ecuación (42):

$$\begin{aligned} (\nabla^2 + k^2)\varphi(\vec{r}) &= (\nabla^2 + k^2) \int G(\vec{r} - \vec{r}_0) Q(\vec{r}_0) d^3 r_0 \\ &= \int [(\nabla^2 + k^2) G(\vec{r} - \vec{r}_0)] Q(\vec{r}_0) d^3 r_0 \\ &= \int \delta^3(\vec{r} - \vec{r}_0) Q(\vec{r}_0) d^3 r_0 \\ &= Q(\vec{r}) \end{aligned}$$

A $G(\vec{r})$ se le conoce como la *función de Green* de la ecuación de Helmholtz.

Lo primero que tenemos que hacer es resolver la ecuación (43) para $G(\vec{r})$. Esto se puede hacer utilizando el método de la transformada de Fourier, la cual cambia la ecuación diferencial en una ecuación algebraica.

Sea $g(\vec{r})$ la transformada de Fourier de $G(\vec{r})$, entonces

$$G(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{i\vec{s}\cdot\vec{r}} g(\vec{s}) d^3 s \quad (44)$$

Entonces,

$$(\nabla^2 + k^2) G(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int [(\nabla^2 + k^2)e^{i\vec{s}\cdot\vec{r}}] g(\vec{s}) d^3 s$$

Pero $\nabla^2 e^{i\vec{s}\cdot\vec{r}} = -s^2 e^{i\vec{s}\cdot\vec{r}}$ y $\delta^3(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\vec{s}\cdot\vec{r}} d^3 r$

Entonces la ecuación (43) queda

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int (-s^2 + k^2) e^{i\vec{s}\cdot\vec{r}} g(\vec{s}) d^3 \vec{s} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\vec{s}\cdot\vec{r}} d^3 \vec{s}$$

Con lo que

$$g(\vec{s}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}(k^2 - s^2)}$$

Colocando el último resultado en (44) tenemos

$$G(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\vec{s}\cdot\vec{r}} \frac{1}{k^2 - s^2} d^3s \quad (45)$$

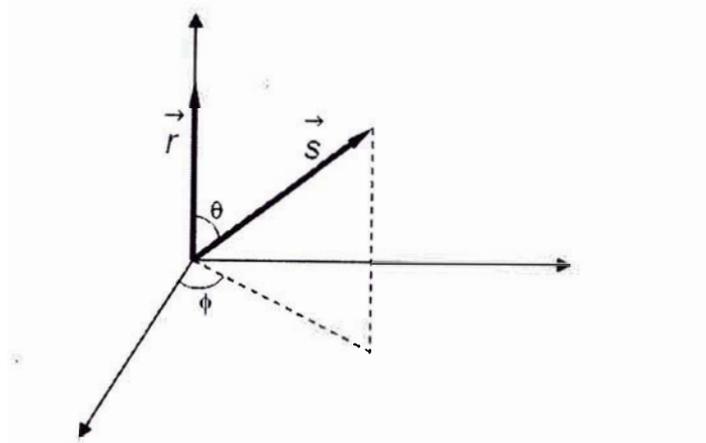


Figura 9: Coordenadas convenientes para la integral en la ecuación (45)

En coordenadas esféricas $\vec{s}\cdot\vec{r} = s r \cos \theta$ (ver figura 9) y $d^3s = s^2 ds \sin \theta d\theta d\phi$.

Además la integral para ϕ es trivial (2π); y la integral para θ es

$$\int_0^\pi e^{isr \cos \theta} \sin \theta d\theta = - \left. \frac{e^{isr \cos \theta}}{isr} \right|_0^\pi = \frac{2 \operatorname{sen}(sr)}{sr}$$

Entonces,

$$G(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{2}{r} \int_0^\infty \frac{s \operatorname{sen}(sr)}{k^2 - s^2} ds = \frac{-1}{4\pi^2 r} \int_{-\infty}^\infty \frac{s \operatorname{sen}(sr)}{s^2 - k^2} ds$$

Hay que hacer notar que se espera de la solución de esta última integral que tenga la forma e^{ikr} ya que debe ser una onda esférica dispersada hacia afuera del centro de fuerzas. Esto se deduce de la forma integral de $\varphi(r)$.

La resolución de esta última integral, se hace expresándola primero con notación exponencial:

$$\begin{aligned} G(\vec{r}) &= \frac{-1}{8i\pi^2 r} \left[\int_{-\infty}^\infty \frac{s e^{isr}}{(s-k)(s+k)} ds - \int_{-\infty}^\infty \frac{s e^{-isr}}{(s-k)(s+k)} ds \right] \\ &= \frac{i}{8\pi^2 r} (I_1 - I_2) \end{aligned} \quad (46)$$

Estas integrales se pueden evaluar utilizando el *Teorema del Residuo*:

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi \sum (\text{Residuos encerrados por } C) \quad (47)$$

Donde C es una curva cerrada y su integral cerrada es positiva si se toma en sentido antihorario y negativa en caso contrario.

Sea C una semicircunferencia que pasa por los polos tal como se ve en la figura 10. La integral alrededor de estos puntos es $\pm i\pi \text{Res } f(z)$. El signo se da como se describe en el párrafo anterior.

La forma que la curva pasa por los polos es indiferente. Escogemos un semicírculo en el plano complejo de radio infinito tal como se ve en la figura 10 y luego integramos la función a lo largo de la curva establecida.

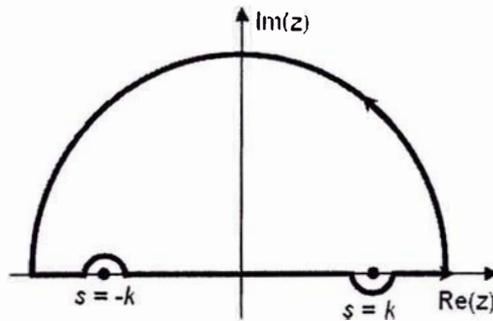


Figura 10: Bordeando los polos en la integral de contorno de la ecuación (46)

Para cada integral en la ecuación (46), se cierra el contorno C de tal manera que el semicírculo en el infinito no efectúa contribución alguna. En el caso de I_1 , el factor e^{izr} tiende a cero cuando s posee una parte imaginaria positiva muy grande; para este caso cerramos el contorno por arriba. El contorno sólo encierra el polo $s = +k$ como en la figura 11(a).

Para el caso de la integral I_1 los residuos se calculan

$$\text{Res}_{z=k} f(z) = \lim_{z \rightarrow k} \frac{ze^{izr}}{z+k} = \frac{e^{ikr}}{2}$$

$$\text{Res}_{z=-k} f(z) = \lim_{z \rightarrow -k} \frac{ze^{izr}}{z-k} = \frac{e^{-ikr}}{2}$$

Entonces, tomando la curva según la figura (11a),

$$\oint_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + I_1 - i\pi \left(\frac{e^{-ikr}}{2} \right) + i\pi \left(\frac{e^{ikr}}{2} \right) = 2\pi i \left(\frac{e^{ikr}}{2} \right)$$

$$\implies I_1 = i\pi \cos(kr)$$

Para el caso de la integral I_2 los residuos se calculan

$$\text{Res}_{z=k} f(z) = \lim_{z \rightarrow k} \frac{ze^{-izr}}{z+k} = \frac{e^{-ikr}}{2}$$

$$\text{Res}_{z=-k} f(z) = \lim_{z \rightarrow -k} \frac{ze^{izr}}{z-k} = \frac{e^{ikr}}{2}$$

Entonces

$$\oint_C f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz + I_2 - i\pi \left(\frac{e^{ikr}}{2} \right) + i\pi \left(\frac{e^{-ikr}}{2} \right) = -2\pi i \left(\frac{e^{ikr}}{2} \right)$$

$$\implies I_2 = -i\pi \cos(kr)$$

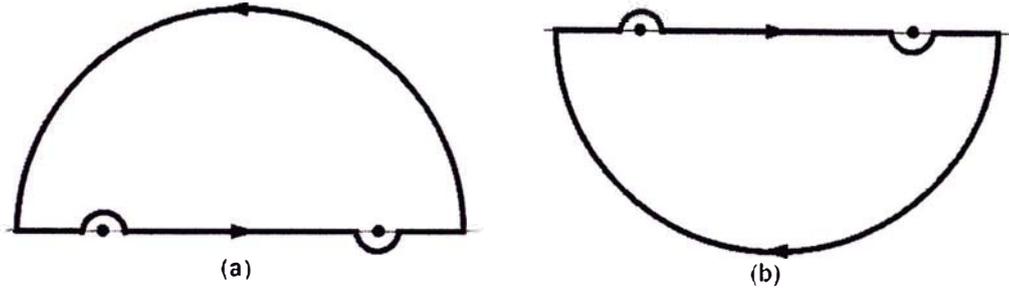


Figura 11: Cerrando el contorno en las ecuaciones para I_1 e I_2 .

Reemplazando en la ecuación (46),

$$G(\vec{r}) = \frac{i}{8\pi^2 r} (2i\pi \cos kr) = -\frac{\cos(kr)}{4\pi r}$$

Esta sería la solución y pero no tiene la forma de la onda que buscábamos desde un principio.

Para obtener dicha onda, vamos a hacer un artificio. En vez de tener las curvas alrededor de los polos, vamos a moverlos fuera del eje real. Para eso, sea $k \mapsto k + i\gamma$ y $-k \mapsto -k - i\gamma$; donde γ es un real positivo y eventualmente puede aproximarse a cero. Esto significa que $I_{1,2}(k) = \lim_{\gamma \rightarrow 0} I_{1,2}(k \pm i\gamma)$.

Con esto para I_1 el polo $z = k + i\gamma$ está dentro del semicírculo y el el otro polo $z = -k - i\gamma$ no lo está (figura 11a), con lo que utilizamos sólo el residuo del primero.

Entonces

$$\oint_C f(z)dz = I_1 = 2i\pi \left(\frac{e^{i(k+i\gamma)r}}{2} \right) = i\pi e^{i(k+i\gamma)r} \quad (48)$$

Utilizamos el mismo razonamiento para I_2 , pero esta vez $z = -k - i\gamma$ está dentro del semicírculo (figura 11b).

$$I_2 = -2i\pi \left(\frac{e^{i(k+i\gamma)r}}{2} \right) = -i\pi e^{i(k+i\gamma)r} \quad (49)$$

Reemplazando (48) y (49) en la ecuación (46) con $\gamma \mapsto 0$, tenemos

$$G(\vec{r}) = \frac{i}{8\pi^2 r} [i\pi e^{ikr} - (-i\pi e^{ikr})] = -\frac{e^{ikr}}{4\pi r} \quad (50)$$

Esta es la función de Green para la ecuación de Helmholtz (solución de la ecuación 43).

Entonces la función de onda quedaría de la forma:

$$\boxed{\varphi(\vec{r}) = \varphi_0(\vec{r}) - \frac{m}{2\pi\hbar^2} \int \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}_0|}}{|\vec{r}-\vec{r}_0|} V(\vec{r}_0) \varphi(\vec{r}_0) d^3\vec{r}_0} \quad (51)$$

Donde φ_0 satisface la ecuación de Schrödinger para la partícula libre, $(\nabla^2 + k^2)\varphi_0 = 0$.

La ecuación (51) es la *forma integral de la ecuación de Schrödinger* y es muy útil en la solución de problemas de dispersión.

La primera aproximación de Born

Supongamos que $V(\vec{r}_0)$ está localizado alrededor de algún punto $\vec{r}_0 = 0$; esto es, el potencial cae a cero afuera de alguna región finita (como es típico en los problemas de dispersión), y queremos calcular $\varphi(\vec{r}_0)$ en puntos muy alejados del centro de dispersión. Entonces $|\vec{r}| \gg |\vec{r}_0|$ para todos los puntos que contribuyen a la integral en la ecuación (51),

$$|\vec{r} - \vec{r}_0|^2 = r^2 + r_0^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}_0 = r^2 \left(1 - 2\frac{\vec{r} \cdot \vec{r}_0}{r^2} + \frac{r_0^2}{r^2} \right) \approx r^2 \left(1 - 2\frac{\vec{r} \cdot \vec{r}_0}{r^2} \right),$$

Utilizando Taylor, $(1 - 2x)^{1/2} \cong 1 - x$ en primera aproximación, entonces:

$$|\vec{r} - \vec{r}_0| \approx r - \hat{r} \cdot \vec{r}_0.$$

Si $\vec{k} = k\hat{r}$

$$e^{ik|\vec{r}-\vec{r}_0|} \approx e^{ikr} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}_0},$$

Utilizando Taylor de nuevo,

$$|\vec{r}-\vec{r}_0|^{-1} \approx \frac{1}{r} \left(1 - 2\frac{\hat{r}\cdot\vec{r}_0}{r}\right)^{-1/2} \approx \frac{1}{r} + \frac{\hat{r}\cdot\vec{r}_0}{r^2}$$

Luego,

$$\frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}_0|}}{|\vec{r}-\vec{r}_0|} \approx \frac{e^{ikr}}{r} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}_0}. \quad (52)$$

En el caso de la dispersión, tenemos $\varphi_0(\vec{r}) = Ae^{ikx}$ para la onda incidente.

Para r grandes, reemplazando (52) en (51):

$$\varphi(\vec{r}) \approx Ae^{ikx} - \frac{m}{2\pi\hbar^2} \frac{e^{ikr}}{r} \int e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}_0} V(\vec{r}_0) \varphi(\vec{r}_0) d^3\vec{r}_0 \quad (53)$$

Comparando esta relación con la ecuación (29), podemos despejar la amplitud de dispersión:

$$f(\theta, \phi) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2 A} \int e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}_0} V(\vec{r}_0) \varphi(\vec{r}_0) d^3\vec{r}_0. \quad (54)$$

Utilicemos ahora la *aproximación de Born*: supongamos que la onda incidente no es alterada de manera sustancial por el potencial; entonces tiene sentido usar

$$\varphi(\vec{r}_0) \approx \varphi_0(\vec{r}_0) = Ae^{ikx_0} = Ae^{i\vec{k}'\cdot\vec{r}_0}, \quad \text{donde } \vec{k}' \equiv k\hat{e}_x$$

dentro de la integral (esta es esencialmente una aproximación para un potencial débil). En la aproximación de Born, entonces

$$\boxed{f(\theta, \phi) \approx -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int e^{i(\vec{k}'-\vec{k})\cdot\vec{r}_0} V(\vec{r}_0) d^3\vec{r}_0.} \quad (55)$$

Entender que \vec{k}' y \vec{k} son vectores que tienen ambos magnitud k , pero de direcciones del haz incidente y del haz dispersado en dirección del detector (ver figura 12). En particular, para la *dispersión de bajas energías*, el factor exponencial es esencialmente constante en la región de dispersión; y la aproximación de Born se simplifica a:

$$\boxed{f(\theta, \phi) \approx -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int V(\vec{r}) d^3\vec{r}. \quad (\text{bajas energías})} \quad (56)$$

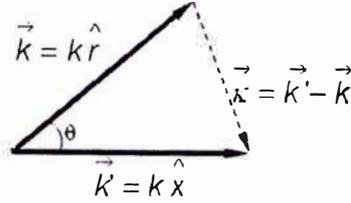


Figura 12: \vec{k}' en la dirección del haz incidente y \vec{k} en la dirección del haz dispersado

Se puede escribir \vec{r} ya que no hay lugar para confusión en este punto del análisis.

Para un potencial simétricamente esférico, $V(\vec{r}) = V(r)$ (pero no necesariamente para bajas energías), la aproximación de Born otra vez se reduce a una forma más simple.

Para ello hemos definido (ver figura anterior): $\vec{\kappa} \equiv \vec{k}' - \vec{k}$. Además vamos a asumir que el eje polar para la integral con \vec{r}_0 está en la dirección de $\vec{\kappa}$, entonces

$$(\vec{k}' - \vec{k}) \cdot \vec{r}_0 = \kappa r_0 \cos \theta_0$$

Luego,

$$f(\theta) \approx -\frac{m}{\hbar^2 \kappa} \int_0^\infty r V(r) \text{sen}(\kappa r) dr, \quad (\text{simetría esférica}) \quad (57)$$

La dependencia angular de f se expresa por κ . De la figura (11) podemos obtener

$$\kappa = 2k \text{sen}(\theta/2).$$

3. Resolución de Problemas

3.1. Dispersión por una Esfera Maciza

Este es el problema más simple y vamos a resolverlo de dos maneras, desde el punto de vista clásico y desde el punto de vista cuántico con el método de las ondas parciales.

3.1.1. Solución Clásica

Supongamos el blanco una bola de billar de radio R . La partícula incidente colisiona elásticamente con ella (ver figura 13).

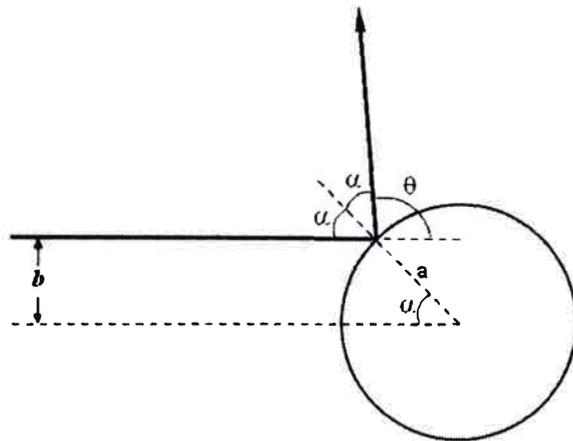


Figura 13: Dispersión por una esfera maciza elástica

De la figura se observa que el parámetro de impacto es $b = a \operatorname{sen} \alpha$, y el ángulo de dispersión es $\theta = \pi - 2\alpha$. Entonces

$$b = a \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} \right) = a \cos \frac{\theta}{2}$$

Evidentemente

$$\theta = \begin{cases} 2 \cos^{-1}(b/a), & \text{si } b \leq a \\ 0, & \text{si } b \geq a \end{cases}$$

Para determinar la sección eficaz diferencial derivamos $\frac{db}{d\theta} = -\frac{1}{2}a \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}$ y

utilizamos la ecuación (5):

$$D(\theta) = \frac{a \cos(\theta/2)}{\sin \theta} \left(\frac{a \sin \theta}{2} \right)$$

Por consiguiente,

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{a^2}{4}} \quad (58)$$

Para la sección eficaz total utilizamos la ecuación (2), $\sigma = (a^2/4) \int d\Omega$
Al final queda,

$$\boxed{\sigma = \pi a^2} \quad (59)$$

Este resultado es exactamente lo que esperábamos, es el área transversal de la esfera; las partículas incidentes que están dentro de esta área colisionarán con el blanco; y aquellas que están fuera no se verán afectadas por él (se seguirán de largo).

3.1.2. Solución Cuántica

Supongamos que el potencial de dispersión tenga la forma

$$V(r) = \begin{cases} \infty, & \text{para } r \leq a \\ 0, & \text{para } r > a \end{cases}$$

Entonces la condición de frontera es $\varphi(a, \theta) = 0$

Utilizando la ecuación (41) para $r = a$ se tiene

$$\varphi(a, \theta) = A \sum_{l=0}^{\infty} \left[i^l (2l+1) j_l(ka) + \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} C_l h_l^{(1)}(ka) \right] P_l(\cos \theta) = 0$$

Para cualquier θ .

Podemos aprovechar la ortonormalidad de los polinomios de Legendre y multiplicar la ecuación anterior por $P_l^*(\cos \theta)$ e integrar:

$$\int_{-1}^1 A \sum_{l=0}^{\infty} \left[i^l (2l+1) j_l(ka) + \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} C_l h_l^{(1)}(ka) \right] P_l(\cos \theta) P_l^*(\cos \theta) d(\cos \theta) = 0$$

O lo que es lo mismo

$$\sum_{l=0}^{\infty} \left[i^l (2l+1) j_l(ka) + \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} C_l h_l^{(1)}(ka) \right] \int_{-1}^1 P_l(\cos \theta) P_l^*(\cos \theta) d(\cos \theta) = 0$$

Todas la integrales se cancelan excepto la que corresponde a $l = l'$, entonces queda

$$i^{l'}(2l' + 1)j_{l'}(ka) + \sqrt{\frac{2l' + 1}{4\pi}} C_{l'} h_{l'}^{(1)}(ka) = 0$$

Despejando $C_{l'}$ y recordando que l' puede tomar cualquier valor

$$C_l = -i^l \sqrt{4\pi(2l + 1)} \frac{j_l(ka)}{h_l^{(1)}(ka)} \quad (60)$$

Para hallar la sección eficaz total utilizamos la ecuación (40),

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l + 1) \left| \frac{j_l(ka)}{h_l^{(1)}(ka)} \right|^2 \quad (61)$$

Esta es una respuesta exacta, pero no tiene una interpretación a simple vista. Por eso vamos a considerar el caso de *bajas energías* (que si tiene una interpretación bastante plausible).

Debemos recordar que $k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} = \frac{2\pi}{\lambda}$.

Para bajas energías, podemos decir que $E \ll 1 \Rightarrow k \ll 1 \Rightarrow \lambda \gg 1$.

Con lo que podemos asumir que la onda tiene una longitud de onda mucho mas grande que el radio de la esfera y entonces: $ka \ll 1$.

Podemos analizar lo que ocurre con las funciones esféricas de Bessel y de Neumann en el caso $ka \ll 1$, en la gráfica (13).

Se puede apreciar de la gráfica que para x pequeños, las funciones de Neumann son mucho mas grandes que las de Bessel y entonces podemos decir que $h_l^{(1)}(x) = j_l(x) + in_l(x) \approx in_l(x)$, quedando la expresión,

$$\begin{aligned} \frac{j_l(x)}{h_l^{(1)}(x)} &= \frac{j_l(x)}{j_l(x) + in_l(x)} \\ &\approx -i \frac{j_l(x)}{n_l(x)} \end{aligned}$$

Pero se sabe que cuando $x \ll 1$ se cumple que

$$j_l \mapsto \frac{2^l l!}{(2l + 1)!} x^l, \quad \text{y} \quad n_l \mapsto -\frac{(2l)!}{2^l l!} x^{-l-1}.$$

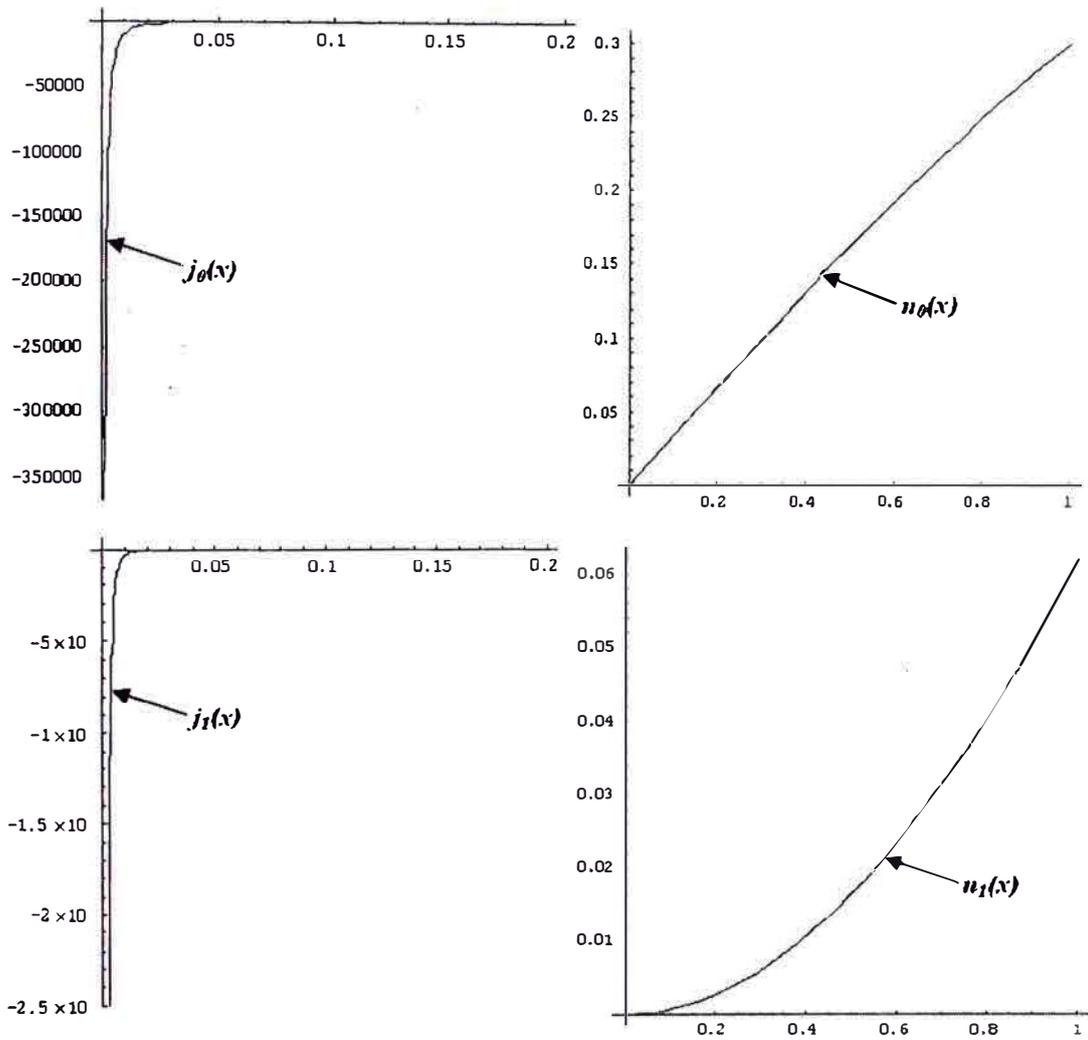


Figura 14: Gráfico de las dos primeras funciones de Bessel y Neumann en un dominio cercano a cero

Entonces tenemos

$$\begin{aligned} \frac{j_l(x)}{h_l^{(1)}(x)} &\approx -i \frac{2^l l! x^l / (2l+1)!}{-(2l)! x^{-l-1} / 2^l l!} \\ &= \frac{i}{2l+1} \left[\frac{2^l l!}{(2l)!} \right]^2 x^{2l+1} \end{aligned} \quad (62)$$

Reemplazando la ecuación (62) en la (61) obtenemos

$$\sigma \approx \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2l+1} \left[\frac{2^l l!}{(2l)!} \right]^4 (ka)^{4l+2}$$

Pero, habíamos asumido que $ka \ll 1$, entonces los términos de la sumatoria con las potencias más altas son despreciables y el valor de la sección eficaz queda dominada por el término $l = 0$. Esto significa con buena aproximación que

$$\boxed{\sigma \approx 4\pi a^2} \quad (63)$$

Este resultado es el área de una esfera de radio a , lo cual es consistente con el hecho que se tratan de ondas esféricas a diferencia del caso clásico, donde el modelo era de partículas.

Si quisiéramos desarrollar este problema utilizando la aproximación de Born tendríamos que desarrollar la integral de la ecuación (57), la cual contiene el potencial infinito en su interior.

3.2. Dispersión de baja energía por un potencial “Cas-carón Esférico”

Aquí el potencial es de la forma

$$V(\vec{r}) = \alpha \delta(r - a)$$

La resolución es utilizando el método de las ondas parciales. Para ello debemos recordar que

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \left[\frac{\hbar^2}{2m} \frac{l(l+1)}{r^2} + V(r) \right] u = -k^2 u$$

Donde $ru(r) = R(r)$ y $R(r)$ es la solución radial de la ecuación de Schrödinger.

Según la ecuación (41):

$$\varphi(r, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} r u_l(r) P_l(\cos \theta)$$

Con lo que podemos decir que

$$\varphi(r) = r u_l(r) = A \sum_{l=0}^{\infty} \left[i^l (2l+1) j_l(kr) + C_l h_l^{(1)} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos \theta) \right] \quad (64)$$

Como en el caso anterior a bajas energías $ka \ll 1$ y sólo consideramos los valores para $l = 0$, con lo que sólo tomamos

$$\varphi(r) = A \left[j_0(kr) + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} C_0 h_0^{(1)}(kr) \right]$$

Sabemos que si $r \mapsto 0$, entonces $h_0^{(1)}(kr) \mapsto \infty$ (ver cuadro 1); por lo que si estamos en la región $r < a$, la función $\varphi(r)$ debe ser de la forma

$$\varphi_-(r) = A j_0(kr); \quad r \leq a \quad (65)$$

En cambio cuando $r > a$, debemos considerar los dos tipos de onda (incidente y dispersada). Entonces

$$\varphi_+(r) = B \left[j_0(kr) + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} C_0 h_0^{(1)}(kr) \right]; \quad r > a \quad (66)$$

Ahora se puede aplicar la propiedad de la continuidad de la función de onda en el punto a : $\varphi_-(a) = \varphi_+(a)$.

$$A j_0(ka) = B \left[j_0(ka) + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} C_0 h_0^{(1)}(ka) \right]$$

Entonces,

$$A = B \left[1 + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} C_0 \frac{h_0^{(1)}(ka)}{j_0(ka)} \right] \quad (67)$$

Hacemos dos aproximaciones considerando que $ka \ll 1$, una para $j_0(ka)$ y otra para $h_0^{(1)}(ka)$:

$$\begin{aligned} j_0(ka) &= \frac{\text{sen } ka}{ka} \\ &\approx 1 - \frac{k^2 a^3}{6} + \frac{k^4 a^5}{120} + \dots \\ &\approx 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h_0^{(1)}(ka) &= -i \frac{e^{ikr}}{kr} \\
&\approx -\frac{i}{ka} + Lne + \frac{1}{2} ik(Lne)^2 a - \frac{1}{6} (k^2 Lne)^3 a^2 + \dots \\
&\approx -\frac{i}{ka}
\end{aligned}$$

Con estas aproximaciones, la ecuación (67) queda

$$A = B \left[1 + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} C_0 \left(-\frac{i}{ka} \right) \right] \quad (68)$$

De las ecuaciones (55) y (56) podemos obtener la función $u(r) = r \varphi(r)$

$$u(r) = r \varphi(r) = \begin{cases} Ar; & \text{si } r \leq a \\ Br \left(1 - \frac{iC_0}{2kr\sqrt{\pi}} \right); & \text{si } r > a \end{cases} \quad (69)$$

Donde hemos hecho las mismas aproximaciones utilizadas para obtener la ecuación (68), ya que en este problema lo que nos interesa es lo que pasa alrededor de $r = a$.

Por otro lado, cuando utilizamos potenciales de la forma de la función delta de Dirac, se integra la ecuación de Schrödinger alrededor del punto a :

$$\int_{a-\epsilon}^{a+\epsilon} \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 u(r)}{dr^2} + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{l(l+1)}{r^2} u(r) + \alpha u(r) \delta(r-a) \right] dr = \int_{a-\epsilon}^{a+\epsilon} \frac{2mE}{\hbar^2} u(r) dr$$

Si asumimos que $\epsilon \mapsto 0$ podemos decir que el término de la derecha de la ecuación anterior puede igualarse a cero.

También se ha asumido que $l = 0$, con lo que la ecuación queda:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \int_{a-\epsilon}^{a+\epsilon} \frac{d^2 u(r)}{dr^2} + \alpha \int_{a-\epsilon}^{a+\epsilon} u(r) \delta(r-a) dr = 0$$

En la primera integral la antiderivada queda función derivada de $u(r)$ y en la segunda integral por propiedad de la función delta de Dirac, queda $u(a)$.

Luego:

$$\left[\frac{du(r)}{dr} \right] \Big|_{a-\epsilon}^{a+\epsilon} = \frac{2m}{\hbar^2} \alpha u(a) \quad (70)$$

De la relación (69) podemos obtener las derivadas que se necesitan en (70) y reemplazarlas ahí:

$$\left. \begin{aligned} \frac{du_-(r)}{dr} \Big|_{a-\epsilon} &= A \\ \frac{du_+(r)}{dr} \Big|_{a+\epsilon} &= B \end{aligned} \right\} B - A = \frac{2m}{\hbar^2} \alpha A a$$

Sea $\gamma = \frac{2m\alpha a}{\hbar^2}$, entonces la última ecuación queda:

$$B = A(1 + \gamma) \quad (71)$$

Comparando la ecuación (68) y (71), tenemos

$$B = A(1 + \gamma) = B \left[1 + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} C_0 \left(-\frac{i}{ka} \right) \right] (1 + \gamma)$$

Despejando C_0 , tenemos

$$C_0 = -2ika\sqrt{\pi} \left(\frac{\gamma}{1 + \gamma} \right) \quad (72)$$

Para hallar la sección eficaz, utilizamos la ecuación (40):

$$\sigma = \frac{1}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} |C_l|^2 = \frac{|C_0|^2}{k^2}$$

Recordando que sólo estamos utilizando $l = 0$. Por consiguiente la sección eficaz queda:

$$\boxed{\sigma = 4\pi a^2 \left(\frac{\gamma}{1 + \gamma} \right)^2 \quad \text{con } \gamma = \frac{2m\alpha a}{\hbar^2}}$$

Este resultado es el área de una esfera de radio $\frac{a\gamma}{1 + \gamma}$. Este valor del radio va a depender de los valores de la masa de la partícula incidente y del valor de α en el potencial. Sin embargo el radio queda casi igual a a con lo que se reduce a la sección eficaz del problema anterior.

3.3. Dispersión de baja energía por un potencial “Esfera Suave”

En este caso el potencial es de la forma

$$V(\vec{r}) = \begin{cases} V_0, & \text{si } r \leq a, \\ 0, & \text{si } r > a. \end{cases}$$

Si usamos el método de la aproximación de Born (ecuación 56)

$$\begin{aligned} f(\theta, \phi) &\approx -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int_0^a V_0 r^2 dr \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \text{sen } \theta d\theta \\ &= -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \left(\frac{V_0 a^3}{3} \right) (2\pi)(-2) \\ &= \frac{2m V_0 a^3}{3\hbar^2} \end{aligned}$$

Independiente de θ y de ϕ . La sección eficaz diferencial es

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f|^2 \approx \left(\frac{2m V_0 a^3}{3\hbar^2} \right)^2,$$

y la sección eficaz total es

$$\sigma \approx 4\pi \left(\frac{2m V_0 a^3}{3\hbar^2} \right)^2.$$

3.4. Dispersión por el potencial de Yukawa

El potencial de Yukawa (que es un modelo aproximado de la energía de enlace en el núcleo atómico), tiene la forma

$$V(r) = \beta \frac{e^{-\mu r}}{r}$$

donde β y μ son constantes reales positivas.

Utilizando de nuevo la aproximación de Born, pero en el caso de la ecuación (57) tenemos:

$$f(\theta) \approx -\frac{2m}{\hbar^2 \kappa} \int_0^\infty r \beta \frac{e^{-\mu r}}{r} \text{sen}(\kappa r) dr = -\frac{2m\beta}{\hbar^2 \kappa} \int_0^\infty \frac{e^{-\mu r}}{r} \text{sen}(\kappa r) dr$$

Sea $I = \int_0^{\epsilon \rightarrow \infty} \frac{e^{-\mu r}}{r} \text{sen}(\kappa r) dr$, entonces

$$\begin{aligned} I &= -\frac{e^{-\mu r}}{\kappa} \cos(\kappa r) \Big|_0^{\epsilon} - \frac{\mu}{\kappa} \int_0^{\epsilon} e^{-\mu r} \cos(\kappa r) dr \\ &= -\frac{e^{-\mu r}}{\kappa} \cos(\kappa r) \Big|_0^{\epsilon} - \frac{\mu}{\kappa} \left[\frac{e^{-\mu r}}{\kappa} \text{sen}(\kappa r) \Big|_0^{\epsilon} + \frac{\mu}{\kappa} \int_0^{\epsilon} e^{-\mu r} \text{sen}(\kappa r) dr \right] \\ &= -\frac{e^{-\mu r}}{\kappa} \left[\cos(\kappa r) + \frac{\mu}{\kappa} \text{sen}(\kappa r) \right] \Big|_0^{\epsilon} + \frac{\mu^2}{\kappa^2} I \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{\mu^2}{\kappa^2}\right) I &= -\frac{e^{-\mu \epsilon}}{\kappa} \left[\cos(\kappa \epsilon) + \frac{\mu}{\kappa} \text{sen}(\kappa \epsilon) \right] + \frac{1}{\kappa} \\ I &= -\frac{\kappa e^{-\mu \epsilon}}{\kappa^2 - \mu^2} \left[\cos(\kappa \epsilon) + \frac{\mu}{\kappa} \text{sen}(\kappa \epsilon) \right] + \frac{\kappa}{\kappa^2 - \mu^2} \\ &= \frac{\kappa}{\kappa^2 - \mu^2} \end{aligned}$$

Por consiguiente

$$\begin{aligned} f(\theta) &\approx \left(-\frac{2m\beta}{\hbar^2 \kappa} \right) \left(\frac{\kappa}{\kappa^2 - \mu^2} \right) \\ &= -\frac{2m\beta}{\hbar^2(\kappa^2 - \mu^2)} \\ &= -\frac{2m\beta}{\hbar^2([2k \text{sen}(\theta/2)]^2 - \mu^2)} \\ &= -\frac{2m\beta}{\hbar^2(4k^2 \text{sen}^2(\theta/2) - \mu^2)} \end{aligned} \tag{73}$$

La sección eficaz diferencial es

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} = |f|^2 &\approx \left(\frac{2m\beta}{\hbar^2(4k^2 \text{sen}^2(\theta/2) - \mu^2)} \right)^2 \\ &= \frac{4m^2\beta^2}{\hbar^4(4k^2 \text{sen}^2(\theta/2) - \mu^2)^2} \end{aligned}$$

y la sección eficaz total es

$$\begin{aligned}
 \sigma &\approx \frac{4 m^2 \beta^2}{\hbar^4} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \frac{\text{sen } \theta d\theta}{(4 k^2 \text{sen}^2(\theta/2) - \mu^2)^2} \\
 &= \frac{4 m^2 \beta^2}{\hbar^4} (2\pi) \left[-\frac{1}{2 k^2 \mu^2} + \frac{1}{2 k^2 (-4 k^2 + \mu^2)} \right] \\
 &= \frac{4 \pi m^2 \beta^2}{k^2 \hbar^4} \left[\frac{4 k^2 - \mu^2 + \mu^2}{\mu^2 (-4 k^2 + \mu^2)} \right]
 \end{aligned}$$

$$\boxed{\sigma \approx \frac{4 \pi m^2 \beta^2}{\hbar^2 \mu^2 (-4 k^2 + \mu^2)}}$$

3.5. Dispersión de Rutherford

Si en el potencial del Yukawa desarrollado en la sección anterior hacemos que $\beta = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0}$ y $\mu = 0$; se reduce al potencial de Coulomb, describiendo la interacción eléctrica entre dos cargas puntuales. Evidentemente, usando la ecuación (73), la amplitud de dispersión es

$$f(\theta) \approx -\frac{m q_1 q_2}{8\pi\epsilon_0 \hbar^2 k^2 \text{sen}^2(\theta/2)}$$

Recordando que $k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$, entonces

$$f(\theta) \approx -\frac{q_1 q_2}{16\pi\epsilon_0 E \text{sen}^2(\theta/2)}$$

Entonces la sección eficaz diferencial

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} \approx \left[\frac{q_1 q_2}{16\pi\epsilon_0 E \text{sen}^2(\theta/2)} \right]^2} \quad (74)$$

Este resultado es el mismo que se obtuvo cuando se trató el tema desde el punto de vista clásico.

4. Conclusiones

- En el desarrollo del caso de la esfera maciza se concluye que los resultados están de acuerdo con lo que se espera para el caso clásico (como lo discutimos en su momento). En cambio en el caso cuántico la sección eficaz es 4 veces el valor de su par clásico, dándonos información del comportamiento ondulatorio del haz dispersado.

En ese sentido, este haz dispersado se comporta como una onda esférica siguiendo un “camino” a lo largo de toda la esfera, mientras que clásicamente el haz se dispersa sólo en la dirección del haz incidente.

- En el desarrollo de la dispersión por un potencial “Cascarón Esférico” podemos concluir con buena aproximación que la partícula dispersada se comporta como en el caso de la esfera maciza para valores de $\gamma \gg 1$.

En ese caso la probabilidad que una partícula atraviese el cascarón es prácticamente nula.

- En el desarrollo del caso de la esfera suave, el método de la aproximación de Born nos da un resultado casi directo en el cálculo de la sección eficaz, de los que podemos concluir que es un método adecuado para tal fin.

El resultado se parece al caso de la esfera maciza pero de radio $\frac{2mV_0a^3}{3\hbar^2}$, lo cual es consistente con la simetría esférica del problema al igual que los casos anteriores.

- En el desarrollo de la dispersión de Rutherford (potencial de Coulomb), nos damos cuenta que es un caso específico del potencial de Yukawa y el resultado es exactamente el mismo que cuando se desarrolló clásicamente, recordando que hicimos una aproximación en el cálculo de la ecuación (73) a diferencia de los cálculos exactos del caso clásico.
- En todos estos casos se han utilizado una serie de aproximaciones con las cuales hemos podido hallar las secciones eficaces. En un trabajo posterior se podría tratar de encontrar relaciones ya no en primera aproximación y calcular un porcentaje de diferencia en las secciones.
- También se recomienda hacer una comparación detallada de la mayoría de potenciales posibles entre los métodos empleados. Para ello se pueden utilizar métodos numéricos si el caso lo requiere.

- Por último podemos concluir de esta monografía que los dos métodos son adecuados dependiendo del tipo de potencial con el que se trabaje. Sin embargo, estamos en condiciones de recomendar la utilización del método de la aproximación de Born en primera instancia por ser mucho más directo en el cálculo.

En caso que no se pueda calcular la integral de la ecuación (56) ó (57) de manera analítica, se recomienda intentar con método de las ondas parciales.

5. Bibliografía

1. David Griffiths. "Introduction to Quantum Mechanics". Editorial Prentice Hall. Capítulo 11.
2. B. H. Bransden & C. J. Joachain. "Introduction to Quantum Mechanics". Editorial Longman. Capítulo 13.
3. H. Goldstein. "Mecánica Clásica". 2da Edición. Editorial Reverté. Capítulo 3.
4. G. Arfken. "Mathematical Methods for Physicists". Segunda Edición. Academic Press. Capítulos 7, 11 y 16.