

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA  
FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA Y ELECTRONICA

" MODELO Y ANÁLISIS GENERAL DE MÁQUINAS  
ELÉCTRICAS INCLUYENDO ARMÓNICOS  
ESPACIALES DE CAMPO MAGNÉTICO "

T E S I S

PARA OPTAR EL TITULO PROFESIONAL DE INGENIERO ELECTRICISTA

RODOLFO MANUEL MORENO MARTINEZ

PROMOCION: 83-2

LIMA-PERÚ

1986

"A mis queridos padres, en agradecimiento por todos sus sacrificios, su apoyo y sus sabios consejos"

## RESUMEN

TITULO : "MODELO Y ANALISIS GENERAL DE MAQUINAS ELECTRICAS INCLUYENDO ARMONICOS ESPACIALES DE CAMPO MAGNETICO"

AUTOR : RODOLFO MANUEL MORENO MARTINEZ

PROYECTO PARA OPTAR EL TITULO PROFESIONAL DE INGENIERO ELECTRICISTA

FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA Y ELECTRONICA

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA

CIUDAD : LIMA-PERU

AÑO : 1986

-----

Hasta antes de la era de la computadora, las limitaciones de las facilidades computacionales restringieron el estudio de los efectos de los armónicos espaciales de la máquina de inducción para condiciones de estado estable.

Frecuentemente, tales estudios fueron solo experimentales, acompañados de algunas explicaciones cualitativas de los resultados.

La mayoría de estos primeros trabajos usaron la aproximación de campo giratorio, de los cuales derivó el circuito equivalente pero que no incluía la acción síncrona.

Posteriormente, se obtuvo la formulación matemática de una máquina de inducción conteniendo armónicos espaciales usando la teoría de circuitos acoplados.

Se sabe que en el análisis de máquinas eléctricas, las transformaciones pueden brindar una gran ayuda. Por ejemplo, en el análisis

lisis standard de las máquinas sin incluir los armónicos, la transformación d-q nos brinda mayor simplificación debido a que cambia las ecuaciones diferenciales con coeficientes variables en el tiempo por ecuaciones diferenciales de coeficientes constantes.

Desafortunadamente, cuando se quiso considerar los armónicos en la Fuerza Magnetomotriz (F.M.M.) la tarea de encontrar una transformación que simplificara el análisis o facilitara el desarrollo de las ecuaciones de la máquina resultó una tarea dificultosa.

Una de estas transformaciones propuestas fue la transformación compleja de la máquina de m-n fases a bifásicas-múltiple, donde se obtuvo un juego independiente por cada armónico sugiriéndose de que cada armónico podía ser considerado independientemente.

Posteriormente, aparecieron otros trabajos proponiendo transformaciones para el análisis de las máquinas conteniendo armónicos pero cada una con alguna limitación propia. Además de que no se tenía muy clara la interacción de los armónicos en la máquina, no existía un tratamiento coherente del análisis de las acciones síncronas y asíncronas que pudiera aplicarse al caso general.



## INDICE

	Pág.
INTRODUCCION	1
CAPITULO I: CONSIDERACIONES BASICAS DEL ESTUDIO	4
CAPITULO II: REPRESENTACION DE UNA MAQUINA DE M-N FASES	8
2.1 Descripción de la Máquina de M-N fases	9
2.2 Parámetros Matriciales	14
2.3 Ecuaciones de Equilibrio Eléctrico y Mecánico	17
2.3.1 Ecuaciones de Voltaje-Corriente para el Estator y Rotor	17
2.3.2 Período Básico	19
2.3.3 Ecuación de Torque Eléctrico y de Equilibrio Mecánico	21
CAPITULO III: TRANSFORMACIONES	27
3.1 Transformación General	27
3.2 Matriz de Transformación	29
3.3 Transformación de Ecuaciones	31
3.3.1 Transformación de Variables Rotóricas a Variables Bifásicas $\alpha$ - $\beta$ - o de las Ecuaciones de Fases Originales de Voltaje-Corriente y de Torque Eléctrico	31
3.3.2 Transformación de las Variables Rotóricas y Estatóricas a Variables Bifásicas	

	Pág.
$\alpha - \beta - 0$ de las ecuaciones originales de Fase de Voltaje-Corriente y Torque Eléctrico	46
3.3.3 Transformación de las Variables Rotóricas a Variables Ortogonales d- q- 0 de las ecuaciones de Fase $\alpha - \beta - 0$ de Voltaje-Corriente y Torque Eléctrico	59
CAPITULO IV: REFERENCIAS AL FUNCIONAMIENTO ASINCRONO Y SINCRONO	70
CAPITULO V: APLICACION DE LOS MODELOS AL MOTOR ASINCRONO DE ROTOR TIPO JAULA DE ARDILLA EMPLEANDO METODOS COMPUTACIONALES	77
5.1 Modelos equivalentes del Motor Asíncrono	
5.1.1 Modelo Original de Fases	78
5.1.2 Modelo equivalente Bifásico $\alpha - \beta - 0$	83
5.1.3 Modelo equivalente Ortogonal d-q-0	88
5.2 Especificaciones de los Motores usados	93
5.3 Cálculo de Parámetros	100
5.4 Selección de Armónicos significativos para el Análisis Transitorio	102
5.4.1 Análisis de la Solución Transitoria	107
5.5 Simulación en Computadora Digital	109

	Pág.
5.5.1 Software de Solución	109
5.5.2 Diagramas de Flujo	114
5.5.3 Organización de Datos	118
5.6 Resultados	121
CAPITULO VI: CONCLUSIONES	123
ANEXO	125

\*\*\*

## INTRODUCCION

El presente trabajo está dirigido a examinar las transformaciones que faciliten el análisis transitorio de la máquina de inducción, en la que son considerados los armónicos espaciales de campo magnético, determinándose el efecto que tienen estas transformaciones en las ecuaciones y las simplificaciones que puedan brindar al estudio.

Como se sabe el campo magnético en el entrehierro de una máquina rotativa no es perfectamente sinusoidal y esto es debido principalmente a la distribución no sinusoidal del bobinado y a la variación de la permeancia, producida por la existencia de las ranuras. Entonces este campo magnético podrá ser desarrollado en una serie de armónicos, los cuales a su vez, serán incluidos en los modelos obtenidos.

En primer lugar se plantean las ecuaciones de fase de una máquina general de  $m$ - $n$  fases haciendo uso de la teoría de los circuitos acoplados, en el que todos los armónicos de campo son considerados o tomados en cuenta, a través de las expresiones obtenidas para las inductancias. El modelo así obtenido será aplicable tanto para el motor de rotor bobinado como para el motor de rotor tipo jaula de ardilla con o sin el número de barras rotóricas por

par de polos estatóricos entero.

Luego es aplicada la transformación polifásica a bifásica  $\alpha$ - $\beta$ -0 al estator y al rotor de la máquina, obtiene como resultado circuitos componentes  $\alpha$  -  $\beta$  y un circuito componente cero, en donde cada uno de estos circuitos agrupa una cantidad de armónicos con la posibilidad de la interacción entre armónicos dentro de cada grupo o circuito. Finalmente, sería aplicada la transformación d-q-0 al rotor cuando solo un armónico (el más importante) de cada circuito componente  $\alpha$ - $\beta$  es considerado.

Se observará entonces que el empleo de uno u otro de los modelos obtenidos de la aplicación de las transformaciones, estará sujeto a un análisis previo de las interacciones existentes entre los armónicos, que dan como resultado los torques asíncronos y síncronos, dicho análisis es desarrollado en estado estable.

Finalmente, la teoría es aplicada a tres tipos de motores asíncronos de rotor jaula de ardilla de igual diseño estatórico pero con diferentes rotores, siendo uno de ellos el diseño estándar, es decir donde los torques asíncronos y síncronos están disminuidos, mientras que los otros dos están expresamente diseñados para dar grandes torques armónicos asíncronos y síncronos respectivamente.

En estos 3 motores son probados los modelos, observándose las consideraciones envueltas en la construcción de una razonable representación aproximada, además dar alguna idea del relativo es fuerzo de computación requerido cuando se usa el modelo  $\alpha$ - $\beta$ -0,

d-q-o y el modelo original de fases para la simulación de la operación dinámica de la máquina.

## CAPITULO I

### CONSIDERACIONES BASICAS DEL ESTUDIO

Las expresiones de inductancia que se obtienen para una máquina idealizada difieren considerablemente de una máquina real.

Algunos de los factores los cuales afectan la performance de una máquina son:

Dispersión.- En un circuito electromagnético acoplado los flujos de dispersión son aquellos que concatenan con un circuito, pero no con el otro. En las máquinas giratorias existen un gran número de caminos de dispersión para los flujos. Con cada uno de estos está asociada una reactancia de dispersión, las cuales afectan todas las importantes características de operación de la máquina. Algunas de estas dispersiones encontradas en una máquina giratoria son las siguientes:

Dispersión en los extremos de conexión, en las ranuras y dientes, zig-zag y belt.

Armónicos.- Los diferentes bobinados en las estructuras magnéticas de una máquina giratoria, producen campos magnéticos en el entrehierro no sinusoidales, debido a la distribución no sinusoidal de las bobinas, y a la variación de permeancia en el entrehierro, debido a la presencia de ranuras. Estos campos pueden ser desarrollados



en una serie de armónicos, los cuales giran a velocidades subsíncronas.

Los armónicos son responsables de efectos tales como: ruido magnético, vibraciones, trabamientos, rizado de tensión. Estos efectos son indeseables y muchos intentos se han hecho por minimizarse aunque en ciertas máquinas se encuentran presentes inherentemente.

Saturación, Debido a que los flujos dependen de las FMM, la saturación del circuito magnético influye en el funcionamiento de la máquina. Cuando la excitación es tal que la máquina opera bajo condiciones de saturación, los coeficientes de inductancia derivados del análisis lineal dejan de tener validez.

En nuestro estudio haremos las siguientes simplificaciones y consideraciones:

- 1) Solo serán considerados aquellos armónicos producidos por la distribución no sinusoidal de las bobinas.
- 2) Se asume que tanto las superficies del estator, así como la del rotor son completamente lisas, lo que nos permite afirmar que la permeancia en el entrehierro se mantiene constante y que por lo tanto los armónicos producidos por las ranuras no serán considerados.
- 3) El material magnético del rotor y de estator se define magnéticamente por una característica lineal B-H con una permeabilidad relativa muy grande que no exhibe saturación. Esta suposición hace que todos los parámetros eléctricos sean independien



tes de las variables eléctricas; aunque, sin embargo, estos pueden ser función de las variables mecánicas. Con esta asunción podemos hacer uso del principio de superposición y del álgebra matricial.

- 4) Los bobinados distribuidos serán reemplazados por bobinados concentrados, cuyo número de vueltas será igual al número efectivo de vueltas del bobinado original.

Además, de considerar  $m$  fases idénticas y simétricamente distribuidas en el estator y  $n$  barras o bobinas rotóricas uniformemente distribuidas con sus ejes de simetría.

- 5) El rotor jaula de ardilla será visto como  $n$  lazos rotóricos idénticos e igualmente espaciados como, por ejemplo, el primer lazo rotórico podría formarse con la 1ra y la  $(K+1)$ -ésima barras rotóricas, además de las porciones de anillos terminales que las conectan, donde  $K$  es cualquier número entero que se encuentre en el rango  $(1 \leq K \leq n)$ , el segundo circuito rotórico consistiría de la 2da y la  $(K+2)$ -ésima barras rotóricas y las correspondientes porciones de anillos terminales que las conectan, y así sucesivamente.

- 6) Las inductancias que resultan de los caminos de dispersión no serán incluidas en el modelo ideal; primero por que las dispersiones no afectan las propiedades de la conversión de energía de la máquina y segundo por que pueden ser tomadas en cuenta al incluirlas en las expresiones finales de inductancia propia de cada bobinado.

- 7) La formulación será desarrollada en base al método de la conservación de la energía y de los trabajos virtuales, además de hacer uso de los parámetros concentrados, teoría de circuitos acoplados que implican el uso de las leyes de Kirchoff y Faraday.

## CAPITULO II

### REPRESENTACION DE UNA MAQUINA DE M-N FASES

Frecuentemente, se ha conceptualizado que el análisis de las máquinas de inducción de rotor bobinado es más fácil que el de rotor tipo jaula de ardilla, por la razón de que el rotor bobinado está diseñado para tener el mismo número de polos que el estator, requerimiento indispensable para la producción de torque electromagnético.

Aquí consideraremos una máquina de M-N fases en la cual, las máquinas de inducción de rotor bobinado y rotor jaula de ardilla podrán ser tomada en cuenta como casos particulares de la representación unificada, simplemente especificando adecuadamente las matrices de inductancia y resistencia.

Comúnmente, en el análisis de las máquinas de inducción jaula de ardilla se asume que el rotor puede ser reemplazado por un bobinado polifásico simétrico, con el mismo número de polos que el estator. Esta suposición está justificada para operación en estado estable y con corrientes rotóricas sinusoidales. Además, de la restricción innecesaria, de que el número de barras por par de polos debe ser un número entero.

Aquí se considerará al rotor jaula de ardilla como una serie de circuitos acoplados mutuamente, siendo una ventaja de este método, el de que también puede ser aplicado al rotor jaula de ardilla

con un número no entero de barras por par de polos estáticos.

## 2.1 Descripción de una Máquina de M-N fases

La descripción física de la máquina de M-N fases es reducida a parámetros equivalentes, como resistencias e inductancias; como se verá de los (M+N) pares de terminales eléctricos y en fricción, dureza e inercia como se verá del par de terminales mecánico.

En la fig. 1, se representa esquemáticamente a la máquina de M-N fases en la que se muestran las (M+N) corrientes de fases como variables eléctricas y a la posición del eje como la variable mecánica.

A continuación definiremos los flujos concatenados :

$$\lambda_1^s, \lambda_2^s, \dots, \lambda_m^s, \lambda_1^r, \lambda_2^r, \dots, \lambda_n^r$$

en términos de las corrientes

$$i_1^s, i_2^s, \dots, i_m^s, i_1^r, i_2^r, \dots, i_n^r$$

y las inductancias.

Así mismo, el momento mecánico  $P_\theta$ , y la fuerza mecánica  $f_\theta$  serán definidos en términos de las variables independientes  $\theta_r$  y  $\dot{\theta}_r$ .

Definiendo el momento de inercia del rotor como  $J$  y la dureza de origen externo como  $K$ .

Esto nos permite definir:

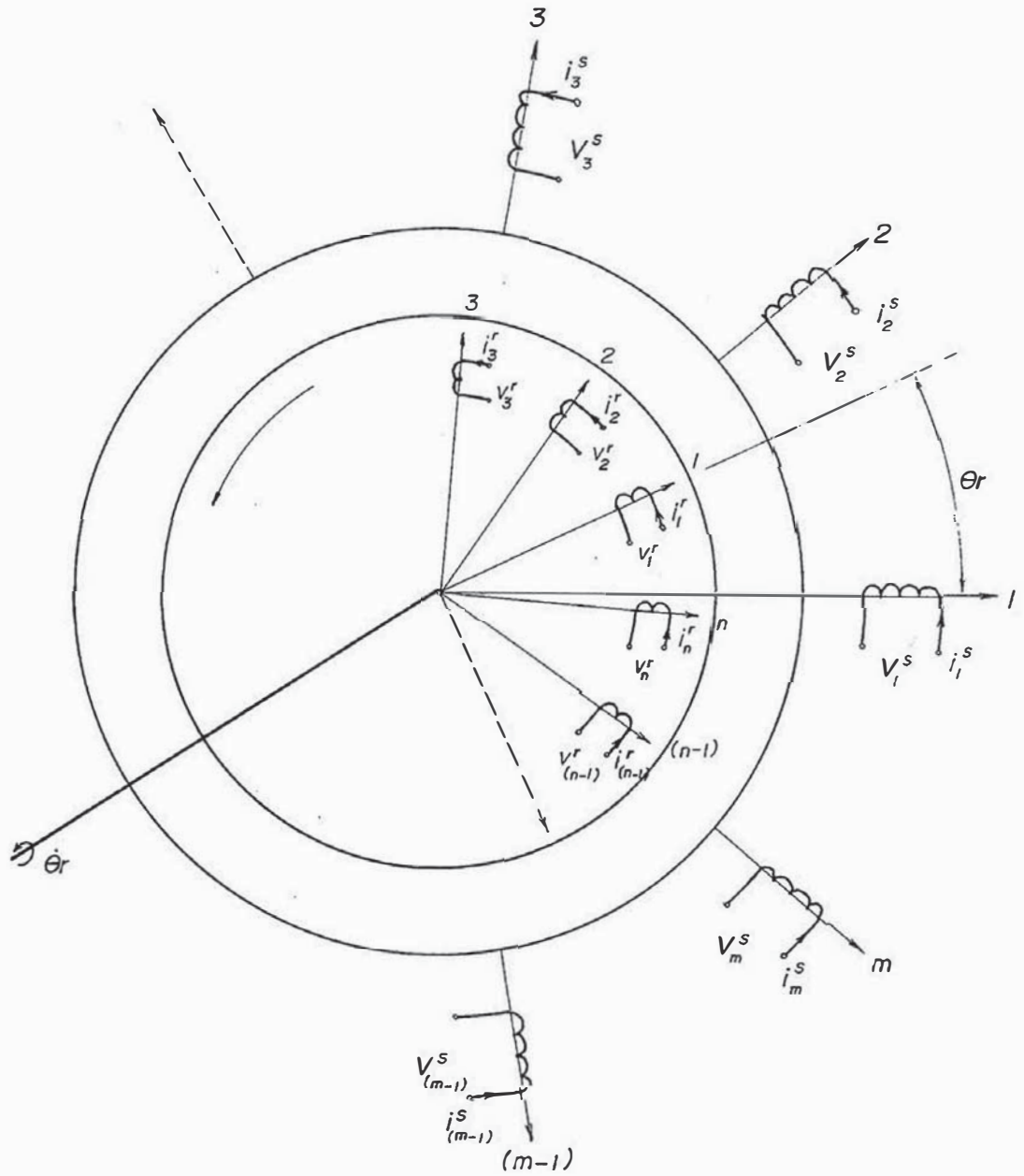


Fig. 1: Ejes de bobinados estat6ricos y rot6ricos de una m1quina de  $m-n$  fases.

$$P_{\theta_r} = J \dot{\theta}_r \quad (2.1)$$

$$f_{\theta_r} = K \theta_r \quad (2.2)$$

Y las expresiones, para el flujo concatenado para cada par de terminales serán:

Estator:

$$\begin{aligned} \lambda_l^s (i_1^s, \dots, i_m^s, i_1^r, \dots, i_n^r) &= \sum_{i=1}^m L_{li}^{ss} i_i^s + \sum_{j=1}^n L_{lj}^{sr} i_j^r \\ &\vdots \\ \lambda_k^s (i_1^s, \dots, i_m^s, i_1^r, \dots, i_n^r) &= \sum_{i=1}^m L_{ki}^{ss} i_i^s + \sum_{j=1}^n L_{kj}^{sr} i_j^r \end{aligned}$$

$$k = 1, 2, \dots, m$$

(2.3)

Rotor:

$$\begin{aligned} \lambda_l^r (i_1^s, \dots, i_m^s, i_1^r, \dots, i_n^r) &= \sum_{j=1}^n L_{lj}^{rr} i_j^r + \sum_{i=1}^m L_{li}^{rs} i_i^s \\ &\vdots \\ \lambda_k^r (i_1^s, \dots, i_m^s, i_1^r, \dots, i_n^r) &= \sum_{j=1}^n L_{kj}^{rr} i_j^r + \sum_{i=1}^m L_{ki}^{rs} i_i^s \end{aligned}$$

$$k = 1, 2, \dots, n$$

(2.4)

$i_i^s$  : corriente que fluye en la  $i$ -ésima bobina estatórica

$i_j^r$  : corriente que fluye en la  $j$ -ésima bobina rotórica

$L_{ki}^{ss}$  : inductancia estatórica ( $k = 1, 2, \dots, m$ )

$L_{kj}^{rr}$  : inductancia rotórica ( $k = 1, 2, \dots, n$ )

$L_{ji}^{rs}$  : inductancia mutua (estator rotor) da el voltaje inducido en la  $j$ -ésima bobina rotórica debido a la razón de cambio de corriente en la  $i$ -ésima bobina estatórica,

El valor de las inductancias mutuas entre estator y rotor son funciones de la posición  $\theta_r$ .

Las expresiones (2.3) y (2.4) para el flujo concatenado serán ahora escritas en forma matricial;

$$\begin{bmatrix} \lambda^s \\ \lambda^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L^s & L^{sr} \\ L^{rs} & L^r \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I^s \\ I^r \end{bmatrix} \quad (2,5)$$

donde

$$[L^s] = \begin{bmatrix} L_{11}^{ss} & L_{12}^{ss} & \dots & L_{1m}^{ss} \\ L_{21}^{ss} & L_{22}^{ss} & \dots & L_{2m}^{ss} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{m1}^{ss} & L_{m2}^{ss} & \dots & L_{mm}^{ss} \end{bmatrix}$$

$$[L^r] = \begin{bmatrix} L_{11}^{rr} & L_{12}^{rr} & \dots & L_{1n}^{rr} \\ L_{21}^{rr} & L_{22}^{rr} & \dots & L_{2n}^{rr} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{n1}^{rr} & L_{n2}^{rr} & \dots & L_{nn}^{rr} \end{bmatrix}$$

$$[L^{sr}] = \begin{bmatrix} L_{11}^{sr} & L_{12}^{sr} & \dots & L_{1n}^{sr} \\ L_{21}^{sr} & L_{22}^{sr} & \dots & L_{2n}^{sr} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{m1}^{sr} & L_{m2}^{sr} & \dots & L_{mn}^{sr} \end{bmatrix}$$

$$[L^{rs}] = \begin{bmatrix} L_{11}^{rs} & L_{12}^{rs} & \dots & L_{1m}^{rs} \\ L_{21}^{rs} & L_{22}^{rs} & \dots & L_{2m}^{rs} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ L_{n1}^{rs} & L_{n2}^{rs} & \dots & L_{nm}^{rs} \end{bmatrix}$$

$$[\lambda^s] = \begin{bmatrix} \lambda_1^s \\ \lambda_2^s \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \lambda_m^s \end{bmatrix}$$

$$[\lambda^r] = \begin{bmatrix} \lambda_1^r \\ \lambda_2^r \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \lambda_n^r \end{bmatrix}$$

$$[I^s] = \begin{bmatrix} i_1^s \\ i_2^s \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ i_m^s \end{bmatrix}$$

$$[I^r] = \begin{bmatrix} i_1^r \\ i_2^r \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ i_n^r \end{bmatrix}$$



Se demuestra que  $L_{ij}^{sr} = L_{ji}^{rs}$  es que nos permite expresar a  $\begin{bmatrix} L^{rs} \end{bmatrix}$  como:

$$\begin{bmatrix} L^{rs} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L^{sr} \end{bmatrix}^T$$

## 2.2 Parámetros Matriciales

La matriz de inductancia del estator  $\begin{bmatrix} L^s \end{bmatrix}$  es una matriz de  $m \times n$ , simétrica y cíclica. Esto es, en la formulación de la matriz, la segunda fila puede ser escrita ubicando el  $m$ -ésimo término de la primera fila como el primer elemento de la segunda fila y desplazando todos los otros términos una posición a la derecha, similarmente la 3ra fila puede ser generada a partir de la segunda fila obtenida, y así sucesivamente, hasta que la  $m$ -ésima fila es alcanzada.

$$\begin{bmatrix} L^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1^s & L_2^s & L_3^s & \dots & L_2^s \\ L_2^s & L_1^s & L_2^s & \dots & L_3^s \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ L_2^s & L_3^s & L_4^s & \dots & L_1^s \end{bmatrix}$$

Nótese que la matriz es simétrica alrededor de la diagonal;

$$\begin{bmatrix} L^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L^s \end{bmatrix}^T$$

En general  $R^s$  podría tener la misma forma que la de  $\begin{bmatrix} L^s \end{bmatrix}$ , pero desde que los bobinados estáticos son idénticos y no comparten camino común,  $R^s$  es un escalar, las matrices  $\begin{bmatrix} R^r \end{bmatrix}$  y  $\begin{bmatrix} L^r \end{bmatrix}$  son de  $n \times n$  cíclicas y simétricas cada una tiene la forma dada:

$$[R^r] = \begin{bmatrix} R_1^r & R_2^r & R_3^r & \dots & R_2^r \\ R_2^r & R_1^r & R_2^r & \dots & R_3^r \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_2^r & R_3^r & R_4^r & \dots & R_1^r \end{bmatrix}$$

$$[L^r] = \begin{bmatrix} L_1^r & L_2^r & L_3^r & \dots & L_2^r \\ L_2^r & L_1^r & L_2^r & \dots & L_3^r \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_2^r & L_3^r & L_4^r & \dots & L_1^r \end{bmatrix}$$

Matriz de inductancias mutuas  $[L^{sr}]$  es de  $m \times n$  donde el  $i$ - $j$ -ésimo término es expresado como:

$$L_{ij}^{sr} = \sum_{\nu} L_{\nu}^{sr} [\cos \nu (P\theta_r - (i-1)\alpha + (j-1)P\beta)]$$

donde:

$$i = 1, 2, \dots, m \quad ; \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$\alpha = 2\pi / m$$

$$\beta = 2\pi / n$$

$\nu$  : es el orden de cualquier armónico a considerar incluyendo el fundamental



$\theta_r$  : es el ángulo rotor

Nota: Las deducciones de las inductancias aparecen en el Anexo.

## 2.3 Ecuaciones de Equilibrio Eléctrico y Mecánico

### 2.3.1 Ecuaciones de Voltaje-Corriente

Haciendo uso de la ley de Kirchhoff y de Faraday se puede escribir una ecuación de lazo por cada par de terminales eléctricos, así:

Estator

$$\begin{aligned} V_i^s &= R^s i_i^s + p \lambda_i^s \\ &\vdots \\ V_i^s &= R^s i_i^s + p \lambda_i^s \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$i = 1, 2, \dots, m$$

Rotor

$$\begin{aligned} V_i^r &= R^r i_i^r + p \lambda_i^r \\ &\vdots \\ V_j^r &= R^r i_j^r + p \lambda_j^r \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$j = 1, 2, \dots, n$$

Los flujos están definidos por las ecuaciones (2.3) y (2.4). Entonces expresando las ecuaciones de Voltaje-Corriente (2.7) y (2.8) en forma matricial haciendo uso de la ecuación (2.5) para los flujos se tiene

$$\begin{bmatrix} [V^s] \\ [V^r] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [R^s] & \\ & [R^r] \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} [I^s] \\ [I^r] \end{bmatrix} + p \begin{bmatrix} [L^s] & [L^{sr}] \\ [L^{sr}]^T & [L^r] \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} [I^s] \\ [I^r] \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

donde:

$$\begin{bmatrix} [V^s] \\ [V^r] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1^s \\ \vdots \\ v_m^s \\ v_1^r \\ \vdots \\ v_n^r \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} [I^s] \\ [I^r] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_1^s \\ \vdots \\ i_m^s \\ i_1^r \\ \vdots \\ i_n^r \end{bmatrix}$$

Ahora desarrollando las ecuaciones de voltaje para las m fases estáticas y los n lazos o fases rotóricas.

$$[V^s] = [R^s][I^s] + p [L^s][I^s] + p [L^{sr}][I^r] \quad (2.10)$$

$$[V^r] = [R^r][I^r] + p [L^r][I^r] + p [L^{sr}]^T [I^s] \quad (2.11)$$

donde:

$$\left[ I^s \right] = \left[ i_1^s, i_2^s, \dots, i_m^s \right]^T$$

$$\left[ I^r \right] = \left[ i_1^r, i_2^r, \dots, i_n^r \right]^T$$

$$\left[ V^s \right] = \left[ v_1^s, v_2^s, \dots, v_m^s \right]^T$$

$$\left[ V^r \right] = \left[ v_1^r, v_2^r, \dots, v_n^r \right]^T$$

$$\left[ L^{rs} \right] = \left[ L^{sr} \right]^T$$

Como se estableció al inicio en las consideraciones del estudio, que la máquina es de entrehierro uniforme, por lo tanto, las inductancias  $\left[ L^s \right]$  y  $\left[ L^r \right]$  son constantes independientes de la posición del rotor (reluctancia constante) y además sabiendo que  $R^s$  es un escalar, las ecuaciones de voltaje-corriente (2.10) y (2.11) podrán ser escritas como:

$$\left[ V^s \right] = ( R^s + \left[ L^s \right] p ) \left[ I^s \right] + p \left[ L^{sr} \right] \left[ I^r \right] \quad (2.12)$$

$$\left[ V^r \right] = ( \left[ R^r \right] + \left[ L^r \right] p ) \left[ I^r \right] + p \left[ L^{sr} \right]^T \left[ I^s \right] \quad (2.13)$$

### 2.3.2 Período Básico

En la mayoría de las representaciones de máquina eléctricas, éstas se desarrollan en términos de una máquina equivalente de dos polos, debido a que las distribuciones de flujos y corrientes se repiten cada dos polos. Sin embargo, para una máquina de rotor tipo jaula de ardilla con un número de barras rotóricas,

por par de polos no entero, no es dos.

Para este tipo de máquinas, se define el período básico  $P_0$  como el máximo común divisor de los  $P$  pares de polos y de las  $n$  barras rotóricas, esto es:

$$P_0 = \frac{n}{n'} = \frac{P}{P'} \quad (2.14)$$

donde:

$P'$  : N° de pares de polos en cada período básico

$n'$  : N° de barras del rotor en cada período básico

Usando la definición de un período básico, un rotor tipo jaula con el número de barras rotóricas por par de polos no entero se puede acomodar fácilmente al modificar la definición usual del ángulo eléctrico. El nuevo ángulo eléctrico  $\theta_r'$  del rotor se define como:

$$\theta_r' = P_0 \theta_r \quad (2.15)$$

En general el análisis de una máquina de inducción de rotor tipo jaula de ardilla con  $P$  pares de polos y  $n$  barras rotóricas, puede ser realizado en una máquina que tiene únicamente  $P'$  pares de polos y  $n'$  circuitos rotóricos básicos.

En cuyo caso las ecuaciones (2.11), (2.12) pueden ser reescritas en términos de  $[L^{sr}]$ ,  $[R^r]$ ,  $[L^r]$  y  $[I^r]$  que están definidas para un período básico de rotor con  $n'$  circuitos rotóricos.

$$\boxed{[V^s] = (R^s + [L^s] p) [I^s] + P_0 p [L^{sr}] [I^r]} \quad (2.16)$$

$$\boxed{[V^r] = ([R^r] + [L^r] p) [I^r] + p [L^{sr}]^T [I^s]} \quad (2.17)$$

### 2.3.3 Ecuación de Torque Eléctrico y de Equilibrio Mecánico

Para la evaluación del torque electromagnético se hará uso del método de la conservación de la energía en un desplazamiento arbitrario  $d\theta_r$  aplicado en el eje en un  $dt$  de tiempo.

Suministro		Suministro	
de	+	de	=
Energía Mec.		Energía Eléct.	

Cambio en la		Cambio en la	
Energía Mec.	+	Energía Magn.	+ Pérdidas
Almacenada		Almacenada	

$$T d\theta_r + \sum_{i=1}^m i_i d\lambda_i + \sum_{j=1}^n i_j d\lambda_j = dW_{mec} + dW_{mag} + \alpha (\dot{\theta}_r)^2 dt \quad (2.18)$$

El cambio en la energía mecánica almacenada se halla de las leyes de Newton.

$$dW_{mec} = (J \ddot{\theta}_r) d\theta_r + (k \theta_r) d\theta_r \quad (2.19)$$

reemplazando en la expresión de torque



$$T = J\ddot{\theta}_r + \alpha \dot{\theta}_r + k\theta_r + \frac{1}{d\theta_r} \left( dW_{mag} - \sum_{i=1}^m i_i^s d\lambda_i^s - \sum_{j=1}^n i_j^r d\lambda_j^r \right) \quad (2.20)$$

como la energía magnética almacenada, así como el flujo concatenado son función de las corrientes y de la posición, el término entre paréntesis es la ecuación (2.20) podrá ser calculado.

$$W_{mag}(\theta_r, i_1^s, \dots, i_m^s, i_1^r, \dots, i_n^r)$$

$$\lambda_i^s(\theta_r, i_1^s, \dots, i_m^s, i_1^r, \dots, i_n^r)$$

$$\lambda_j^r(\theta_r, i_1^s, \dots, i_m^s, i_1^r, \dots, i_n^r)$$

$$\left( dW_{mag} - \sum_{i=1}^m i_i^s d\lambda_i^s - \sum_{j=1}^n i_j^r d\lambda_j^r \right) = \frac{\partial W_{mag}}{\partial \theta_r} d\theta_r + \sum_{i=1}^m \frac{\partial W_{mag}}{\partial i_i^s} di_i^s$$

$$+ \sum_{j=1}^n \frac{\partial W_{mag}}{\partial i_j^r} di_j^r - \sum_{i=1}^m i_i^s \left( \frac{\partial \lambda_i^s}{\partial \theta_r} d\theta_r + \sum_{i=1}^m \frac{\partial \lambda_i^s}{\partial i_i^s} di_i^s + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \lambda_i^s}{\partial i_j^r} di_j^r \right)$$

$$- \sum_{j=1}^n i_j^r \left( \frac{\partial \lambda_j^r}{\partial \theta_r} d\theta_r + \sum_{i=1}^m \frac{\partial \lambda_j^r}{\partial i_i^s} di_i^s + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \lambda_j^r}{\partial i_j^r} di_j^r \right)$$

(2.21)

reagrupando en esta expresión los coeficientes de los términos en  $d\theta_r, di_i^s, di_j^r$

$$(dW_{mag} - \sum_{i=1}^m i_i^s d\lambda_i^s - \sum_{j=1}^n i_j^r d\lambda_j^r) =$$

$$\left( \frac{\partial W_{mag}}{\partial \theta_r} - \sum_{i=1}^m i_i^s \frac{\partial \lambda_i^s}{\partial \theta_r} - \sum_{j=1}^n i_j^r \frac{\partial \lambda_j^r}{\partial \theta_r} \right) d\theta_r +$$

$$\sum_{i=1}^m \left( \frac{\partial W_{mag}}{\partial i_i^s} - \sum_{i=1}^m i_i^s \frac{\partial \lambda_i^s}{\partial i_i^s} - \sum_{j=1}^n i_j^r \frac{\partial \lambda_j^r}{\partial i_i^s} \right) di_i^s +$$

$$\sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial W_{mag}}{\partial i_j^r} - \sum_{i=1}^m i_i^s \frac{\partial \lambda_i^s}{\partial i_j^r} - \sum_{j=1}^n i_j^r \frac{\partial \lambda_j^r}{\partial i_j^r} \right) di_j^r$$

Los coeficientes de  $di_i^s$  y  $di_j^r$  son siempre iguales a cero, esto demuestra que el torque electromagnético depende únicamente de la magnitud de la corriente y no de la razón de cambio de ésta. En consecuencia, solo se mantiene el coeficiente en  $d\theta_r$ .

$$T = J \ddot{\theta}_r + \alpha \dot{\theta}_r + k \theta_r + \frac{\partial W_{mag}}{\partial \theta_r} - \sum_{i=1}^m i_i^s \frac{\partial \lambda_i^s}{\partial \theta_r} - \sum_{j=1}^n i_j^r \frac{\partial \lambda_j^r}{\partial \theta_r}$$

Esta ecuación se puede expresar en forma simple al reconocer que  $W_{mag}$  puede ser expresado en términos de la coenergía  $W'_{mag}$ .

$$W_{mag} = \sum_{i=1}^m i_i^s \lambda_i^s + \sum_{j=1}^n i_j^r \lambda_j^r - W'_{mag} \quad (2.23)$$

derivando esta expresión se tiene:

$$\frac{\partial W_{mag}}{\partial \theta_r} = \sum_{i=1}^m i_i^s \frac{\partial \lambda_i^s}{\partial \theta_r} + \sum_{j=1}^n i_j^r \frac{\partial \lambda_j^r}{\partial \theta_r} - \frac{\partial W'_{mag}}{\partial \theta_r}$$

sustituyendo en la ecuación de torque se tendrá:

$$T = J \ddot{\theta}_r + \alpha \dot{\theta}_r + k \theta_r - \frac{\partial W'_{mag}}{\partial \theta_r} \quad (2.24)$$

donde:

$$W'_{mag} = \int_{0, \dots, 0}^{i_1^s, \dots, i_m^s} \sum_{i=1}^m \lambda_i^s di_i^s + \int_{0, \dots, 0}^{i_1^r, \dots, i_n^r} \sum_{j=1}^n \lambda_j^r di_j^r \quad (2.25)$$

debido a que las inductancias se asumen lineales, entonces las inductancias no son función de la corriente, la coenergía  $W'_{mag}$  es integrable e igual a la energía magnética así.

$$W_{mag} = 1/2 \sum_{i=1}^m \lambda_i^s i_i^s + 1/2 \sum_{j=1}^n \lambda_j^r i_j^r \quad (2.26)$$

esta expresión en forma matricial será:

$$W'_{mag} = 1/2 \begin{bmatrix} [I^s] \\ [I^r] \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} [L^s] & [L^{sr}] \\ [L^{sr}]^T & [L^r] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [I^s] \\ [I^r] \end{bmatrix}$$

$$W'_{mag} = 1/2 \begin{bmatrix} [I^s]^T & [I^r]^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [L^s] & [L^{sr}] \\ [L^{sr}]^T & [L^r] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [I^s] \\ [I^r] \end{bmatrix}$$

la ecuación (2.24) puede ser escrita entonces como:

$$T = J \ddot{\theta}_r + \alpha \dot{\theta}_r + k \theta_r - 1/2 \begin{bmatrix} [I^s] \\ [I^r] \end{bmatrix}' \frac{\partial}{\partial \theta_r} \begin{bmatrix} [L^s] & [L^{sr}] \\ [L^{sr}]' & [L^r] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [I^s] \\ [I^r] \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

de donde:

$$T_e = 1/2 \begin{bmatrix} [I^s]' & [I^r]' \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \theta_r} \begin{bmatrix} [L^s] & [L^{sr}] \\ [L^{sr}] & [L^r] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [I^s] \\ [I^r] \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

como el entrehierro es uniforme (permeancia constante) se cumple que:

$$\frac{\partial}{\partial \theta_r} [L^s] = 0 \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial \theta_r} [L^r] = 0$$

y además haciendo uso del concepto de período básico, la ecuación (2.28) podrá escribirse como:

$$T_e = P_o^2 [I^s]' \frac{\partial}{\partial \theta_r} [L^{sr}] [I^r] \quad (2.29)$$

ó

$$T_e = P_o^2 \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \frac{\partial L_{ij}^{sr}}{\partial \theta_r} i_i^s i_j^r \quad (2.29a)$$

$$T_e = -P_o^2 P \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{\nu} \nu L_{\nu}^{sr} \left[ \text{Sen } \nu (P\theta - (i-1)\alpha + (j-1)\beta) \right] i_i^s i_j^r \quad (2.29b)$$

Ecuación de Equilibrio Mecánico

La expresión que relaciona la velocidad del rotor y el torque es la (2.27) si despreciamos la fricción y asumimos que no existe torque antagonista.

$$T_e - T_L = J p W_r \quad (2.30)$$

donde:

$J$  : momento de inercia

$T_L$  : torque de carga

$W_r = p\Theta_r$ : velocidad del rotor

haciendo uso del período básico tendremos

$$T_e - T_L = J \left( \frac{1}{P_o} \right) p W_r \quad (2.31)$$

### CAPITULO III

#### TRANSFORMACIONES

Las ecuaciones (2.16) y (2.17) para la máquina general de m-n fases son ecuaciones con coeficientes dependientes del tiempo y que están variando con la posición del rotor.

Para la solución de estas ecuaciones se requiere de considerable tiempo. Cuando se ignoran los armónicos espaciales, existen transformaciones muy conocidas que pueden simplificar las ecuaciones, las ecuaciones resultantes se resuelven más fácilmente y normalmente son de menor orden que las ecuaciones originales. Pero cuando se incluyen los armónicos espaciales, la tarea de encontrar una transformación efectiva se vuelve más complicada.

En primer lugar aquí se presentará la forma general de la transformación que se empleará para la transformación de variables polifásicas a variables bifásicas  $\alpha - \beta - 0$  y a variables d-q. Posteriormente, se aplicará la transformación polifásica a  $\alpha - \beta - 0$  a las variables del estator y rotor de la máquina general de m-n fases en etapas separadas de tal manera que se puedan estudiar detalladamente el efecto de la transformación en cada etapa.

Normalmente, las representaciones intermedias son de menor interés en tanto que faciliten la solución del problema. Sin embargo, se muestra que estos resultados intermedios arrojan nuevos

conocimientos sobre la interacción de los armónicos, interacción que ha sido despreciada en trabajos previos en la representación de circuitos equivalentes en donde se considera circuitos independientes para cada armónico.

Estos resultados intermedios también revelan la restricción fundamental que afecta el uso de la transformación d-q para obtener la simplificación que es bien conocida en el análisis estándar.

### 3.1 Transformación General

Una forma general de la transformación para el armónico de orden  $\nu$  de los  $n$  variables de fase a variables bifásicas ortogonales.

$$\begin{bmatrix} f_{\nu}^x & f_{\nu}^y \end{bmatrix}^t$$

Puede expresarse como:

$$\begin{bmatrix} F_{\nu} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{\nu}(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F \end{bmatrix}$$

Donde:

$$\begin{bmatrix} F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_n \end{bmatrix}^t$$

$$\begin{bmatrix} F_{\nu} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{\nu}^x & f_{\nu}^y \end{bmatrix}^t$$

$$\begin{bmatrix} T_{\nu}(\theta) \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{n}} \begin{bmatrix} \cos \nu(P\theta) & \cos \nu(P\theta - \delta) & \dots & \cos \nu(P\theta - (n-1)\delta) \\ \sin \nu(P\theta) & \sin \nu(P\theta - \delta) & \dots & \sin \nu(P\theta - (n-1)\delta) \end{bmatrix}$$



$\delta$ : es el ángulo eléctrico con respecto al fundamental entre 2 fases adyacentes.

$f$ : puede representar corriente, flujo concatenado o tensión de las  $n$  fases

$\sqrt{\frac{2}{n}}$ : coeficiente introducido para que la transformación sea de potencia invariante

La transformación (3.1) es una versión generalizada de la muy conocida transformación trifásica a  $\alpha$ - $\beta$ -0 y d-q-0. Una transformación particular en este grupo se puede conseguir con una apropiada selección para el valor del ángulo  $\theta$ .

### 3.2 Matriz de Transformación

La transformación polifásica a  $\alpha$ - $\beta$ -0 es definida como

$$[F^{\alpha\beta}] = [A][F] \quad (3.2)$$

Donde:

$$[F] = [f_1 \ f_2 \ \dots \ f_n]^t$$

Cuando  $n$  es impar

$$\begin{aligned} [F_i^{\alpha\beta}] &= [f_1^\alpha \ f_1^\beta \ f_2^\alpha \ f_2^\beta \ \dots \ f_j^\alpha \ f_j^\beta \ \dots \ \frac{f_{n-1}^\alpha}{2} \ \frac{f_{n-1}^\beta}{2} \ f_n^0]^t \\ &= \left[ [F_1^{\alpha\beta}]^t \ \dots \ [F_j^{\alpha\beta}]^t \ \dots \ [F_{\frac{n-1}{2}}^{\alpha\beta}]^t \ [F_n^0]^t \right]^t \end{aligned}$$

Pero cuando  $n$  es par



$$\begin{aligned} [F^{\alpha\beta}] &= \left[ f_1^\alpha \ f_1^\beta \ f_2^\alpha \ f_2^\beta \ \dots \ f_j^\alpha \ f_j^\beta \ \dots \ f_{\frac{n}{2}-1}^\alpha \ f_{\frac{n}{2}-1}^\beta \ f_{\frac{n}{2}}^\alpha \ f_{\frac{n}{2}}^\beta \right]^t \\ &= \left[ [F_1^{\alpha\beta}]^t \ \dots \ [F_j^{\alpha\beta}]^t \ \dots \ [F_{\frac{n}{2}-1}^{\alpha\beta}]^t \ [F_{\frac{n}{2}}]^t \ [F_n^o]^t \right]^t \end{aligned}$$

la matriz de transformación  $[A]$  puede ser construída como sigue:

Si  $n$  es impar

$$[A] = \begin{bmatrix} [T_1(0)] \\ [T_2(0)] \\ \vdots \\ [T_{\frac{n-1}{2}}(0)] \\ [T_n] \end{bmatrix}$$

Pero cuando  $n$  es par

$$[A] = \begin{bmatrix} [T_{1(0)}] \\ [T_{2(0)}] \\ \vdots \\ [T_{\frac{n}{2}-1(0)}] \\ [T_{\frac{n}{2}}] \\ [T_n] \end{bmatrix}$$

Donde:

$$[T_n] = \frac{1}{\sqrt{n}} [1 \ 1 \ 1 \ \dots \ 1 \ 1 \ \dots \ 1 \ 1]$$

$$[T_{\frac{n}{2}}] = \frac{1}{\sqrt{n}} [1 \ -1 \ 1 \ \dots \ 1 \ -1 \ \dots \ 1 \ -1]$$

la matriz  $[A]$  es ortogonal. La componente relativa a  $[T_n]$  se le denomina la componente cero de acuerdo a la transformación trifásica standard. La presencia de la componente  $[T_{n/2}]$  se puede explicar por el hecho que cuando  $n$  es par existe 2 fases adyacentes que están desfasadas 180 grados con respecto al armónico  $n/2$ .

### 3.3 Transformación de Ecuaciones

#### 3.3.1 Transformación de Variables Rotóricas a Variables Bifásicas $\alpha - \beta - 0$ de las Ecuaciones de Fases Originales de Voltaje-Corriente y de Torque Eléctrico

Las ecuaciones que describen el comportamiento de la máquina son (2.16), (2.17) y (2.29) son escritas a continuación:

$$[V^s] = (R^s + [L^s] p) [I^s] + R_r p [L^{sr}] [I^r] \quad (3.3)$$

$$[V^r] = ( [R^r] + [L^r] p ) [I^r] + p [L^{sr}]^t [I^s] \quad (3.4)$$

$$T_e = (P_o)^2 [I^s]^t \frac{\partial}{\partial \theta_r} [L^{sr}] [I^r] \quad (3.5)$$

Cuando aplicamos la transformación a las variables rotóricas:

$$[I^{\alpha\beta r}] = [A] [I^r]$$

$$[V^{\alpha\beta r}] = [A] [V^r]$$

Donde  $[A]$  es una matriz cuadrada de orden  $n$  ( $n$ : número de fases rotóricas)

En (3.3)

$$[V^s] = ( R^s + [L^s] p ) [I^s] + P p [L^{sr}] [A]^t [I^{\alpha\beta r}] \quad (3.6)$$

En (3-4)

$$[A]^t [V^{\alpha\beta r}] = ( [R^r] + [L^r] p ) [A]^t [I^{\alpha\beta r}] + p [L^{sr}]^t [I^s]$$

multiplicando esta última relación por  $[A]$ .

$$[V^{\alpha\beta r}] = ( [A] [R^r] [A]^t + [A] [L^r] [A]^t p ) [I^{\alpha\beta r}] + p [L^{sr}]^t [I^s] \quad (3.7)$$

En (3.5)

$$T_e = (P_0)^2 [I^s]^t \frac{\partial}{\partial \theta_r} [L^{sr}] [A]^t [I^{\alpha\beta r}] \quad (3.8)$$

en las ecuaciones (3.6), (3.7) y (3.8) podemos hacer:

$$[A] [R^r] [A]^t = [R^{\alpha\beta r}] \quad (3.9)$$

$$[A] [L^r] [A]^t = [L^{\alpha\beta r}] \quad (3.10)$$

$$[L^{sr}] [A]^t = [L^{\alpha\beta sr}] \quad (3.11)$$

entonces se tendrá:

$$[V^s] = (R^s + [L^s] p) [I^s] + P_0 p [L^{\alpha\beta sr}] [I^{\alpha\beta r}] \quad (3.12)$$

$$[V^{\alpha\beta r}] = ([R^{\alpha\beta r}] + [L^{\alpha\beta r}] p) [I^{\alpha\beta r}] + p [L^{\alpha\beta sr}]^t [I^s] \quad (3.13)$$

$$T_e = (P_0)^2 [I^s]^t \frac{\partial}{\partial \theta_r} [L^{\alpha\beta sr}] [I^{\alpha\beta r}] \quad (3.14)$$

desarrollando las relaciones (3.9) y (3.10) se puede demostrar que

$[R^{\alpha\beta r}]$  y  $[L^{\alpha\beta r}]$  son matrices diagonales, es decir:

$$[R^{\alpha\beta r}] = \text{diag} \left[ R_1^{\alpha\beta r} R_1^{\alpha\beta r} \dots R_j^{\alpha\beta r} R_j^{\alpha\beta r} \dots \frac{R_{n-1}^{\alpha\beta r}}{2} \frac{R_{n-1}^{\alpha\beta r}}{2} R_n^{or} \right]^t$$

$$[L^{\alpha\beta r}] = \text{diag} \left[ L_1^{\alpha\beta r} L_1^{\alpha\beta r} \dots L_j^{\alpha\beta r} L_j^{\alpha\beta r} \dots \frac{L_{n-1}^{\alpha\beta r}}{2} \frac{L_{n-1}^{\alpha\beta r}}{2} L_n^{or} \right]^t$$

Donde:

$$R_j^{\alpha\beta r} = R_1^r + 2R_2^r \cos(jP \frac{2\pi}{n}) + 2R_3^r \cos(jP \frac{4\pi}{n}) + \dots + 2R_{\frac{n+1}{2}}^r \cos(jP \frac{(n-1)\pi}{n})$$

$$L_j^{\alpha\beta r} = L_1^r + 2L_2^r \cos(jP \frac{2\pi}{n}) + 2L_3^r \cos(jP \frac{4\pi}{n}) + \dots + 2L_{\frac{n+1}{2}}^r \cos(jP \frac{(n-1)\pi}{n})$$

(3.16)

j toma valores dentro del rango  $(0 < j < \frac{n}{2})$

La resistencia e inductancia de la componente cero son:

$$R_n^{or} = R_1^r + 2R_2^r + 2R_3^r + \dots + 2R_{\frac{n+1}{2}}^r$$

$$L_n^{or} = L_1^r + 2L_2^r + 2L_3^r + \dots + 2L_{\frac{n+1}{2}}^r$$

Nótese que  $R_n^{or}$  y  $L_n^{or}$  son iguales a  $R_j^{\alpha\beta r}$  y  $L_j^{\alpha\beta r}$  respectivamente para j igual a n

Analizando ahora la relación (3.11)

$$[L^{\alpha\beta sr}] = [L^{sr}] [A]^t$$

$$[L^{\alpha\beta sr}] = [L^{sr}] \begin{bmatrix} [T_1(0)] \\ [T_2(0)] \\ \vdots \\ [T_j(0)] \\ \vdots \\ [T_{\frac{n-1}{2}}(0)] \\ [T_n] \end{bmatrix}^t$$

$$[L^{\alpha\beta sr}] = [L^{sr}] \left[ [T_1(0)]^t [T_2(0)]^t \cdot \cdot \cdot [T_j(0)]^t \cdot \cdot \cdot [T_{\frac{n-1}{2}}(0)]^t [T_n]^t \right]$$

efectuando el producto de submatrices

$$[L^{\alpha\beta sr}] = \left[ [L_1^{\alpha\beta sr}] [L_2^{\alpha\beta sr}] \cdot \cdot \cdot [L_j^{\alpha\beta sr}] \cdot \cdot \cdot [L_{\frac{n-1}{2}}^{\alpha\beta sr}] [L_n^{osr}] \right] \quad (3.17)$$

Aquí el término general es de la forma:

$$[L_j^{\alpha\beta sr}] = [L^{sr}] [T_j(0)]^t$$

además las submatrices

$[L_1^{\alpha\beta sr}]$ ,  $[L_2^{\alpha\beta sr}]$  sucesivamente hasta  $[L_{\frac{n-1}{2}}^{\alpha\beta sr}]$  son matrices de orden  $m \times 2$ , pero  $[L_n^{osr}]$  es una matriz de orden  $m \times 1$ .

La forma de  $[L^{\alpha, \beta sr}]$  puede ahora ser descrita en general por las submatrices  $[L_j^{\alpha, \beta sr}]$  y  $[L^{osr}]$

Efectuando el producto

$$[L_j^{\alpha, \beta sr}] = [L^{sr}] [T_{j(\omega)}]^t$$

sabiendo que  $[T_{j(\omega)}]^t$  es la transformación general

$$[T_{j(\omega)}]^t = \sqrt{\frac{2}{n}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \cos jP\beta & -\text{Sen } jP\beta \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ \cos (k-1)jP\beta & -\text{Sen}(k-1)jP\beta \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ \cos (n-1)jP\beta & -\text{Sen}(n-1)jP\beta \end{bmatrix}$$

y  $[L^{sr}]$  es la matriz de inductancias mutuas, tiene la forma ya presentada en la expresión (2.6) se tendrá:



$$\begin{aligned}
 & \left[ \begin{array}{c} \sum_n \sum_v L_v^{sr} \cos v (P\theta_r + (n-1)P\beta) \cos j(n-1)P\beta \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \sum_n \sum_v L_v^{sr} \cos v (P\theta_r - (i-1)\alpha + (n-1)P\beta) \cos j(n-1)P\beta \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \sum_n \sum_v L_v^{sr} \cos v (P\theta_r - (m-1)\alpha + (n-1)P\beta) \cos j(n-1)P\beta \end{array} \right] \\
 & \left[ L_j^{qbsr} \right] = \sqrt{\frac{2}{n}} \left[ \begin{array}{c} \sum_n \sum_v L_v^{sr} \cos v (P\theta_r + (n-1)P\beta) \operatorname{Sen} j(n-1)P\beta \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \sum_n \sum_v L_v^{sr} \cos v (P\theta_r - (i-1)\alpha + (n-1)P\beta) \operatorname{Sen} j(n-1)P\beta \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \sum_n \sum_v L_v^{sr} \cos v (P\theta_r - (m-1)\alpha + (n-1)P\beta) \operatorname{Sen} j(n-1)P\beta \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

los términos generales de la matriz resultante (3.18) son

$$\sum_n \sum_\nu L_\nu^{sr} \cos \nu (P\theta_r - (i-1)\alpha + (n-1)P\beta) \cos j(n-1)P\beta$$

y

$$- \sum_n \sum_\nu L_\nu^{sr} \cos \nu (P\theta_r - (i-1)\alpha + (n-1)P\beta) \operatorname{Sen} j(n-1)P\beta$$

Pueden ser reducidas a las formas

$$1/2 \sum_\nu L_\nu^{sr} \cos \nu (P\theta_r - (i-1)\alpha) \sum_n \cos(\nu-j)(n-1)P\beta -$$

$$1/2 \sum_\nu L_\nu^{sr} \operatorname{Sen} \nu (P\theta_r - (i-1)\alpha) \sum_n \operatorname{Sen}(\nu-j)(n-1)P\beta$$

y

$$1/2 \sum_\nu L_\nu^{sr} \operatorname{Sen} \nu (P\theta_r - (i-1)\alpha) \sum_n \cos j(\nu-j)(n-1)P\beta +$$

$$1/2 \sum_\nu L_\nu^{sr} \cos \nu (P\theta_r - (i-1)\alpha) \sum_n \operatorname{Sen} j(\nu-j)(n-1)P\beta$$

con  $\nu$  (positivo o negativo) respectivamente.

En donde las sumatorias son cero excepto cuando

$$(\nu-j)P\beta = K 2\pi \quad , \quad \beta = 2\pi/n$$

o bien 
$$\nu = K \frac{n}{P} + j \quad (3.19)$$

donde: 
$$K = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\sigma_{\nu j} = +1$$

con lo que la matriz  $\left[ L_j^{sr} \right]$  toma finalmente la forma:

$$\begin{aligned}
 [L_j^{\alpha\beta sr}] &= \sqrt{\frac{n}{2}} \sum_{\{j\}}^{sr} L_{vj} \\
 &= \begin{bmatrix} \cos v_j P\theta r & \sigma_{vj} \text{Sen } v_j P\theta r \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cos v_j (P\theta r - (i-1)\alpha) & \sigma_{vj} \text{Sen } v_j (P\theta r - (i-1)\alpha) \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cos v_j (P\theta r - (m-1)\alpha) & \sigma_{vj} \text{Sen } v_j (P\theta r - (m-1)\alpha) \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

ahora desarrollando el término  $\begin{bmatrix} L_n^{osr} \end{bmatrix}$  de componente cero

$$\begin{bmatrix} L_n^{osr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L^{sr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_n \end{bmatrix}^t$$

$$\begin{bmatrix} L_n^{osr} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{\nu} L_{\nu n}^{sr} \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n \cos \nu (P\theta_r + (j-1)P\beta) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n \cos \nu (P\theta_r - (i-1)\alpha + (j-1)P\beta) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n \cos \nu (P\theta_r - (m-1)\alpha + (j-1)P\beta) \end{bmatrix}$$

en esta matriz se puede apreciar que el término general es de la forma

$$\sum_{\nu} L_{\nu n}^{sr} \sum_{j=1}^n \cos \nu_n (P\theta_r - (i-1)\alpha + (j-1)P\beta)$$

Desarrollando:

$$\sum_{\nu} L_{\nu n}^{sr} \sum_{j=1}^n \left[ \cos \nu_n (P\theta_r - (i-1)\alpha) \cos \nu_n (j-1)P\beta - \sin \nu_n (P\theta_r - (i-1)\alpha) \sin \nu_n (j-1)P\beta \right]$$

$$\sum_{\nu} L_{\nu n}^{sr} \left[ \cos \nu_n (P\theta_r - (i-1)\alpha) \sum_{j=1}^n \cos \nu_n (j-1)P\beta - \sin \nu_n (P\theta_r - (i-1)\alpha) \sum_{j=1}^n \sin \nu_n (j-1)P\beta \right]$$

en donde la sumatoria es cero, excepto cuando

$$\nu_n P\beta = K 2\pi \quad , \quad \beta = 2\pi/n$$

o bien,

$$\nu_n = K \frac{n}{P}$$

$Kn$  : múltiplo entero de  $\{n\}$

$U_n P$  : número de pares de polos del armónico

entonces  $\left[ L_n^{osr} \right]$  se reduce a:

$$\left[ L_n^{osr} \right] = \sqrt{n} \sum_{\{n\}} L_{b_n}^{sr} \begin{bmatrix} \cos U_n P \theta_r \\ \vdots \\ \cos U_n (P \theta_r - (i-1)\alpha) \\ \vdots \\ \cos U_n (P \theta_r - (m-1)\alpha) \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

De todo lo anterior se concluye que la sumatoria para  $\left[ L_j^{\alpha\beta sr} \right]$  es tomada sobre un número de grupos de armónicos, donde cada grupo define un juego  $\{j\}$

Para  $(0 < j < n/2)$ , los elementos del juego  $\{j\}$  son  $P U_j$ , donde

$$b = K \frac{n}{P} + j$$

$$K = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$U_j = 1$$

$P U_j$  es el # de pares de polos del armónico de orden  $j$

$u_j$  en cada período básico

El juego  $\{n\}$  contiene únicamente múltiplos enteros de  $n$ .

Según la definición anterior alguno de los armónicos en el juego  $\{j\}$  tendrán valores negativos.

Alternativamente, se puede definir el juego  $\{j\}$  como el juego que contiene a los armónicos.

$$v_j = K \frac{n}{p} \pm j \quad (3.22)$$

$$K = 0, 1, 2, \dots$$

donde:

$$\sigma_{v_j} = +1 \quad \text{cuando} \quad v_j = K \frac{n}{p} + j$$

$$\sigma_{v_j} = -1 \quad \text{cuando} \quad v_j = K \frac{n}{p} - j$$

nótese que  $v_j$  tal como se da en las ecuaciones (3.19) y (3.22) será una fracción cuando  $n/p$  no sea entero; sin embargo,  $p v_j$  siempre es un entero.

El agrupamiento de los armónicos del rotor en juegos separados se hace más claro aún cuando las ecuaciones (3.12) y (3.13) se reescriben de la siguiente forma:

en la ecuación (3.12)

$$\left[ V^s \right] = \left( R^s + \left[ L^s \right] p \right) \left[ I^s \right] + P_0 p \left[ L^{\alpha\beta sr} \right] \left[ I^{\alpha\beta r} \right]$$

El sumando  $p \left[ L^{\alpha\beta sr} \right] \left[ I^{\alpha\beta r} \right]$  puede ser desarro-

llado como:

$$P \left[ \begin{bmatrix} L_1^{\alpha\beta sr} \\ \vdots \\ L_j^{\alpha\beta sr} \\ \vdots \\ L_{\frac{n-1}{2}}^{\alpha\beta sr} \\ L_n^{osr} \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} i_1^{\alpha\beta r} \\ \vdots \\ i_j^{\alpha\beta r} \\ \vdots \\ i_{\frac{n-1}{2}}^{\alpha\beta r} \\ i_n^{or} \end{bmatrix}$$

$$P \left[ L_j^{\alpha\beta r} \right] \left[ I_j^{\alpha\beta r} \right] = \sum_{j=1}^{\frac{n-1}{2}} P \left[ L_j^{\alpha\beta r} \right] \left[ i_j^{\alpha\beta r} \right] + P \left[ L_n^{osr} \right] i_n^{or}$$

reemplazando en la ecuación (3.12) se tiene

$$\left[ V^s \right] = \left( R^s + \left[ L^s \right] P \right) \left[ I^s \right] + P_0 \sum_{j=1}^{\frac{n-1}{2}} P \left[ L_j^{\alpha\beta sr} \right] \begin{bmatrix} i_j^{\alpha r} \\ i_j^{\beta r} \end{bmatrix} + P_0 P \left[ L_n^{osr} \right] i_n^{or} \quad (3.23)$$

En la ecuación (3.23) la sumatoria se toma sobre todos los  $\frac{n-1}{2}$  circuitos componentes  $\alpha - \beta$ , cada uno de estos componentes contiene una cantidad de armónicos cuyos órdenes están dados por la ecuación (3.19) ó (3.22). Como resultado entonces de la transformación, el rotor puede representarse por  $\frac{n-1}{2}$  circuitos componentes  $\alpha - \beta$  y un circuito componente cero. Y asociado a cada circuito componente  $\alpha - \beta$  existe un cierto juego de armónicos.

entonces la ecuación (3.13)



$$[V^{\alpha\beta r}] = ([R^{\alpha\beta r}] + [L^{\alpha\beta r}]p) [I^{\alpha\beta r}] + p [L^{\alpha\beta sr}]^t [I^s]$$

podrá ser desarrollada como:

$$\begin{bmatrix} [V_1^{\alpha\beta r}] \\ \vdots \\ [V_j^{\alpha\beta r}] \\ \vdots \\ [V_{\frac{n-1}{2}}^{\alpha\beta r}] \\ V_n^{or} \end{bmatrix} = \left( \begin{bmatrix} [R_1^{\alpha\beta r}] \\ \vdots \\ [R_j^{\alpha\beta r}] \\ \vdots \\ [R_{\frac{n-1}{2}}^{\alpha\beta r}] \\ R_n^{or} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [L_1^{\alpha\beta r}] \\ \vdots \\ [L_j^{\alpha\beta r}] \\ \vdots \\ [L_{\frac{n-1}{2}}^{\alpha\beta r}] \\ L_n^{or} \end{bmatrix} p \right) \times$$

$$\begin{bmatrix} [I_1^{\alpha\beta r}] \\ \vdots \\ [I_j^{\alpha\beta r}] \\ \vdots \\ [I_{\frac{n-1}{2}}^{\alpha\beta r}] \\ I_n^{or} \end{bmatrix} + p \begin{bmatrix} [L_1^{\alpha\beta sr}]^t \\ \vdots \\ [L_j^{\alpha\beta sr}]^t \\ \vdots \\ [L_{\frac{n-1}{2}}^{\alpha\beta sr}]^t \\ [L_n^{or}]^t \end{bmatrix} [I^s]$$

en donde el  $j$ -ésimo circuito rotórico es:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} V_j^{\alpha r} \\ V_j^{\beta r} \end{bmatrix} &= ( \begin{bmatrix} R_j^{\alpha \beta r} \\ L_j^{\alpha \beta r} \end{bmatrix} \rho ) \begin{bmatrix} i_j^{\alpha r} \\ i_j^{\beta r} \end{bmatrix} + \rho \begin{bmatrix} L_j^{\alpha \beta sr} \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} I^s \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} V_j^{\alpha r} \\ V_j^{\beta r} \end{bmatrix} &= ( R_j^{\alpha \beta r} + L_j^{\alpha \beta r} \rho ) \begin{bmatrix} i_j^{\alpha r} \\ i_j^{\beta r} \end{bmatrix} + \rho \begin{bmatrix} L_j^{\alpha \beta sr} \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} I^s \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.24)$$

y la ecuación de circuito de componente cero

$$V_n^{or} = ( R_n^{or} + L_n^{or} \rho ) i_n^{or} + \rho \begin{bmatrix} L_n^{osr} \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} I^s \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

Un examen del efecto de la transformación muestra que el rotor con el número de fases impar se puede reemplazar por  $\frac{n-1}{2}$  circuitos de componentes  $\alpha - \beta$  y un circuito de componente cero.

Quando  $n$  es par el número correspondiente de circuitos componentes  $\alpha - \beta$  es  $\frac{n}{2} - 1$  y el circuito de componente cero, además existe un circuito de componente  $n/2$ .

Ahora el torque desarrollado por la máquina en términos de las componentes  $\alpha - \beta - 0$  del rotor se puede expresar como:

$$T_e = (P_o)^2 \begin{bmatrix} I^s \end{bmatrix}^t \frac{\partial}{\partial \theta_r} \begin{bmatrix} L^{\alpha \beta sr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I^{\alpha \beta r} \end{bmatrix}$$

donde el término  $\frac{\partial}{\partial \theta_r} \begin{bmatrix} L^{\alpha \beta sr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I^{\alpha \beta r} \end{bmatrix}$  según (a) es

$$\sum_{j=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{\partial}{\partial \theta_r} \begin{bmatrix} L_j^{\alpha \beta sr} \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial \theta_r} \begin{bmatrix} L_n^{or} \end{bmatrix} i_n^{or}$$

y la expresión de torque se transforma en:

$$T_e = (P_0)^2 [I^s]^t \left( \sum_{j=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{\partial}{\partial \theta_r} [L_j^{\alpha\beta sr}] \begin{bmatrix} i_j^{\alpha r} \\ i_j^{\beta r} \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial \theta_r} [L_n^{osr}] i_n^{or} \right) \quad (3.26)$$

### 3.3.2 Transformación de las Variables Rotóricas y Estatóricas a dos Fases $\alpha$ - $\beta$ -0 de las ecuaciones originales de Fase de Voltaje-Corriente y de Torque eléctrico

Al igual que se le aplica la transformación de las variables del rotor ahora será aplicada a las variables del estator.

$$[I^{\alpha\beta s}] = [A] [I^s]$$

$$[V^{\alpha\beta s}] = [A] [V^s]$$

En este caso  $[A]$  es una matriz cuadrada de orden  $m$  ( $m$ : número de fases estatóricas).

en la ecuación (3.12)

$$[A]^t [V^{\alpha\beta s}] = (R^s + [L^s] p) [A]^t [I^{\alpha\beta s}] + P_0 p [L^{\beta sr}] [I^{\alpha\beta r}]$$

multiplicando por  $[A]$

$$[V^{\alpha\beta s}] = ([A] R^s [A]^t + [A] [L^s] [A]^t p) [I^{\alpha\beta s}] + P_0 p [A] [L^{\beta sr}] [I^{\alpha\beta r}]$$

haciendo

$$[A] [L^s] [A]^t = [L^{\alpha\beta s}]$$

y sabiendo que  $R^s$  es un escalar

$$[A] R^s [A]^t = R^s$$

entonces se tendrá

$$[V^{\alpha\beta s}] = (R^s + [L^{\alpha\beta s}] p) [I^{\alpha\beta s}] + P_0 p [A] [L^{\alpha\beta sr}] [I^{\alpha\beta r}] \quad (3.27)$$

donde

$$[L^{\alpha\beta s}] = \text{diag} \left[ L_1^{\alpha\beta s} \quad L_1^{\alpha\beta s} \quad \dots \quad L_i^{\alpha\beta s} \quad L_i^{\alpha\beta s} \quad \dots \quad L_{\frac{m-1}{2}}^{\alpha\beta s} \quad L_{\frac{m-1}{2}}^{\alpha\beta s} \quad L_m^{os} \right]$$

y

$$L_i^{\alpha\beta s} = L_1^s + 2 L_2^s \cos(i \frac{2\pi}{m}) + \dots + 2 L_{\frac{m+1}{2}}^s \cos(i \frac{m-1}{m} \pi) \quad (3.28)$$

en la ecuación (3.6)

$$[V^{\alpha\beta r}] = ( [R^{\alpha\beta r}] + [L^{\alpha\beta r}] p ) [I^{\alpha\beta r}] + p [L^{\alpha\beta sr}]^t [A]^t [I^{\alpha\beta s}]$$

Se puede demostrar que:

$$[L^{\alpha\beta sr}]^t [A]^t = ( [A] [L^{\alpha\beta sr}] )^t$$

entonces

$$[V^{\alpha\beta r}] = ( [R^{\alpha\beta r}] + [L^{\alpha\beta r}] p ) [I^{\alpha\beta r}] + p ( [A] [L^{\alpha\beta sr}] )^t [I^{\alpha\beta s}] \quad (3.29)$$

aplicando la transformación a la ecuación de torque (3.14)

$$T_e = (P_0)^2 [I^s]^t \frac{\partial}{\partial \theta_r} [L^{\alpha\beta sr}] [I^{\alpha\beta r}]$$

$$T_e = (P_0)^2 [I^{\alpha\beta s}]^t \frac{\partial}{\partial \theta_r} ( [A] [L^{\alpha\beta sr}] ) [I^{\alpha\beta r}] \quad (3.30)$$

En las tres ecuaciones (3.27), (3.29) y (3.30) se tiene el término común

$$[A] \quad [L^{\alpha\beta sr}]$$

el cual será desarrollado a continuación; sabiendo que

$$[A] = \begin{bmatrix} [T_1(o)] \\ [T_2(o)] \\ \vdots \\ [T_i(o)] \\ \vdots \\ [T_{m-1}(o)] \\ [T_m(o)] \end{bmatrix}$$

y además que

$$[L^{\alpha\beta sr}] = \left[ [L_1^{\alpha\beta sr}] [L_2^{\alpha\beta sr}] \cdots [L_j^{\alpha\beta sr}] \cdots [L_{\frac{n-1}{2}}^{\alpha\beta sr}] [L_n^{osr}] \right]$$

$$\begin{aligned}
 [A] [L^{\alpha\beta sr}] = & \begin{bmatrix} [T_1(o)] [L_1^{\alpha\beta sr}] & [T_1(o)] [L_2^{\alpha\beta sr}] & \dots & [T_1(o)] [L_j^{\alpha\beta sr}] & \dots & [T_1(o)] [L_{\frac{n-1}{2}}^{\alpha\beta sr}] & [T_1(o)] [L_n^{osr}] \\ [T_2(o)] [L_1^{\alpha\beta sr}] & [T_2(o)] [L_2^{\alpha\beta sr}] & \dots & [T_2(o)] [L_j^{\alpha\beta sr}] & \dots & [T_2(o)] [L_{\frac{n-1}{2}}^{\alpha\beta sr}] & [T_2(o)] [L_n^{osr}] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ [T_i(o)] [L_1^{\alpha\beta sr}] & [T_i(o)] [L_2^{\alpha\beta sr}] & \dots & [T_i(o)] [L_j^{\alpha\beta sr}] & \dots & [T_i(o)] [L_{\frac{n-1}{2}}^{\alpha\beta sr}] & [T_i(o)] [L_n^{osr}] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ [T_{\frac{m-1}{2}(o)}] [L_1^{\alpha\beta sr}] & [T_{\frac{m-1}{2}(o)}] [L_2^{\alpha\beta sr}] & \dots & [T_{\frac{m-1}{2}(o)}] [L_j^{\alpha\beta sr}] & \dots & [T_{\frac{m-1}{2}(o)}] [L_{\frac{n-1}{2}}^{\alpha\beta sr}] & [T_{\frac{m-1}{2}(o)}] [L_n^{osr}] \\ [T_m] [L_1^{\alpha\beta sr}] & [T_m] [L_2^{\alpha\beta sr}] & \dots & [T_m] [L_j^{\alpha\beta sr}] & \dots & [T_m] [L_{\frac{n-1}{2}}^{\alpha\beta sr}] & [T_m] [L_n^{osr}] \end{bmatrix} \\
 & \dots (3.31)
 \end{aligned}$$

Si reemplazamos este resultado en la ecuación (3.27) del estator y sabiendo además que:

$$[I^{\alpha\beta r}] = \begin{bmatrix} [i_1^{\alpha\beta r}] \\ [i_2^{\alpha\beta r}] \\ \vdots \\ [i_j^{\alpha\beta r}] \\ \vdots \\ [i_{\frac{n-1}{2}}^{\alpha\beta r}] \\ i_n^{or} \end{bmatrix}$$

efectuando el producto

$$[V^{\alpha\beta s}] = (R^s + [L^{\alpha\beta s}]p) [I^{\alpha\beta s}] + P_0 p \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{\frac{n-1}{2}} [T_{1j}(0)] [L_j^{\alpha\beta sr}] [i_j^{\alpha\beta r}] \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{\frac{n-1}{2}} [T_{ij}(0)] [L_j^{\alpha\beta sr}] [i_j^{\alpha\beta r}] \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{\frac{n-1}{2}} [T_{m-1j}(0)] [L_j^{\alpha\beta sr}] [i_j^{\alpha\beta r}] \\ [T_m] [L_n^{osr}] i_n^{or} \end{bmatrix}$$



entonces para el i-ésimo circuito estático se tendrá:

$$\left[ V_i^{\alpha\beta s} \right] = (R^s + \left[ L_i^{\alpha\beta s} \right] p) \left[ i_i^{\alpha\beta s} \right] + P_0 p \sum_{j=1}^{\frac{n-1}{2}} \left[ T_{i(o)} \right] \left[ L_j^{\alpha\beta sr} \right] \left[ i_j^{\alpha\beta r} \right] \quad (3.32)$$

y para el correspondiente circuito componente cero se tiene

$$V_m^{os} = (R^s + L_m^{os} p) i_m^{os} + P_0 p \left[ T_m \right] \left[ L_n^{osr} \right] i_n^{or} \quad (3.33)$$

Si el producto  $\left[ A \right] \left[ L^{\alpha\beta sr} \right]$  le tomamos transpuesta y lo reemplazamos en la ecuación (3.29) del rotor y sabiendo además que

$$\left[ I^{\alpha\beta s} \right] = \begin{bmatrix} \left[ i_1^{\alpha\beta s} \right] \\ \left[ i_2^{\alpha\beta s} \right] \\ \cdot \\ \cdot \\ \left[ i_i^{\alpha\beta s} \right] \\ \cdot \\ \cdot \\ \left[ i_{m-1}^{\alpha\beta s} \right] \\ \frac{i_m^{os}}{2} \end{bmatrix}$$

y efectuamos el producto se tiene

$$\left[ V^{\alpha\beta r} \right] = \left( \left[ R^{\alpha\beta r} \right] + \left[ L^{\alpha\beta r} \right] \rho \right) \left[ I^{\alpha\beta r} \right] + \rho \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{\frac{m-1}{2}} \left( \left[ T_{i(o)} \right] \left[ L_j^{\alpha\beta sr} \right] \right)^t \left[ i_i^{\alpha\beta s} \right] \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{\frac{m-1}{2}} \left( \left[ T_{i(o)} \right] \left[ L_j^{\alpha\beta sr} \right] \right)^t \left[ i_i^{\alpha\beta s} \right] \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{\frac{m-1}{2}} \left( \left[ T_{\frac{m-1}{2}(o)} \right] \left[ L_j^{\alpha\beta sr} \right] \right)^t \left[ i_i^{\alpha\beta s} \right] \\ \left( \left[ T_m \right] \left[ L_n^{osr} \right] \right)^t i_m^{os} \end{bmatrix}$$

entonces tomando el j-ésimo circuito rotórico

$$\left[ V_j^{\alpha\beta r} \right] = \left( \left[ R_j^{\alpha\beta r} \right] + \left[ L_j^{\alpha\beta r} \right] \rho \right) \left[ i_j^{\alpha\beta r} \right] + \rho \sum_{i=1}^{\frac{m-1}{2}} \left( \left[ T_{i(o)} \right] \left[ L_j^{\alpha\beta sr} \right] \right)^t \left[ i_i^{\alpha\beta s} \right] \quad (3.34)$$

y para el correspondiente circuito componente cero estático.

$$V_n^{or} = \left( R_n^{or} + L_n^{or} \rho \right) i_n^{or} + \rho \left( \left[ T_m \right] \left[ L_n^{osr} \right] \right)^t i_m^{os} \quad (3.35)$$

finalmente reemplazando la expresión (3.31) en la ecuación de torque (3.30)

$$T_e = (P_0)^2 \begin{bmatrix} [i_1^{\alpha\beta s}]^t \\ \vdots \\ [i_i^{\alpha\beta s}] \\ \vdots \\ [i_{m-1}^{\alpha\beta s}] \\ i_m^{os} \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \theta_r} \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{\frac{n-1}{2}} [T_{i(o)}] [L_j^{\alpha\beta sr}] [i_j^{\alpha\beta r}] \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{\frac{n-1}{2}} [T_{i(o)}] [L_j^{\alpha\beta sr}] [i_j^{\alpha\beta r}] \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{\frac{n-1}{2}} [T_{\frac{m-1}{2}(o)}] [L_j^{\alpha\beta sr}] [i_j^{\alpha\beta r}] \\ [T_m] [L_n^{osr}] i_n^{or} \end{bmatrix}$$

$$T_e = (P_0)^2 \left( \sum_{i=1}^{\frac{m-1}{2}} [i_i^{\alpha\beta s}]^t \sum_{j=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{\partial}{\partial \theta_r} [T_{i(o)}] [L_j^{\alpha\beta sr}] [i_j^{\alpha\beta r}] + i_m^{os} \frac{\partial}{\partial \theta_r} [T_m] [L_n^{osr}] i_n^{or} \right)$$

$$T_e = (P_0)^2 \left( \sum_{i=1}^{\frac{m-1}{2}} \sum_{j=1}^{\frac{n-1}{2}} [i_i^{\alpha\beta s}]^t \frac{\partial}{\partial \theta_r} ([T_{i(o)}] [L_j^{\alpha\beta sr}]) [i_j^{\alpha\beta r}] + i_m^{os} \frac{\partial}{\partial \theta_r} [T_m] [L_n^{osr}] i_n^{or} \right)$$

Ahora efectuando el producto  $[T_{i(o)}] [L_j^{\alpha\beta sr}]$  obtenemos

mos

$$[T_{i(o)}] [L_j^{\alpha\beta sr}] = \frac{\sqrt{mn}}{2} \sum_{\{ij\}} L_{\nu_{ij}}^{sr} \begin{bmatrix} \cos \nu_{ij} P\Theta_r & \sigma_{\nu_j} \text{Sen } \nu_{ij} P\Theta_r \\ -\sigma_{\nu_i} \text{Sen } \nu_{ij} P\Theta_r & \sigma_{\nu_i} \sigma_{\nu_j} \cos \nu_{ij} P\Theta_r \end{bmatrix}$$

esta relación se cumple para los  $\nu_i = K_1 m + i$ ,  $\sigma_{\nu_i} = +1$  armónicos estatóricos que son comunes a los  $\nu_j = K_2 \frac{n}{p} + j$  armónicos rotóricos, es decir, los armónicos  $\nu_{ij}$  que vienen a ser los elementos comunes a los conjuntos  $\{i\}$  y  $\{j\}$  reemplazando este resultado en la ecuación (3.32)

$$\begin{bmatrix} V_i^{\alpha s} \\ V_i^{\beta s} \end{bmatrix} = (R^s + L_i^{\beta s} p) \begin{bmatrix} i_j^{\alpha s} \\ i_j^{\beta s} \end{bmatrix} + P_0 \frac{\sqrt{mn}}{2} \sum_{j=1}^{\frac{n-1}{2}} p \left( \sum_{\{ij\}} L_{\nu_{ij}}^{sr} \begin{bmatrix} \cos \nu_{ij} P\Theta_r & \sigma_{\nu_j} \text{Sen } \nu_{ij} P\Theta_r \\ -\sigma_{\nu_i} \text{Sen } \nu_{ij} P\Theta_r & \sigma_{\nu_i} \sigma_{\nu_j} \cos \nu_{ij} P\Theta_r \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} i_j^{\alpha r} \\ i_j^{\beta r} \end{bmatrix}$$

(3.37)

y en la ecuación (3.34) se tendrá

$$\begin{bmatrix} V_j^{\alpha r} \\ V_j^{\beta r} \end{bmatrix} = (R_j^{\alpha r} + L_j^{\alpha r} p) \begin{bmatrix} i_j^{\alpha r} \\ i_j^{\beta r} \end{bmatrix} + \frac{\sqrt{mn}}{2} \sum_{i=1}^{\frac{m-1}{2}} p \left( \sum_{\{ij\}} L_{\nu_{ij}}^{sr} \begin{bmatrix} \cos \nu_{ij} P\Theta_r & -\sigma_{\nu_i} \text{Sen } \nu_{ij} P\Theta_r \\ \sigma_{\nu_j} \text{Sen } \nu_{ij} P\Theta_r & \sigma_{\nu_i} \sigma_{\nu_j} \cos \nu_{ij} P\Theta_r \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} i_i^{\alpha s} \\ i_i^{\beta s} \end{bmatrix}$$

(3.38)

donde:

$$\sigma_{v_j} = + 1 \quad \text{cuando} \quad v_j = K_2 \frac{n}{p} + j$$

$$\sigma_{v_j} = - 1 \quad \text{cuando} \quad v_j = K_2 \frac{n}{p} - j$$

$$\sigma_{v_i} = + 1 \quad \text{cuando} \quad v_i = K_1 m + i$$

$$\sigma_{v_i} = - 1 \quad \text{cuando} \quad v_i = K_1 m - i$$

ahora si efectuamos el producto  $\begin{bmatrix} T_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_n^{osr} \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} T_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_n^{osr} \end{bmatrix} = \sqrt{mn} \sum_{\{mn\}} L_{v_{mn}}^{sr} \cos v_{mn} P \theta_r$$

Esta expresión solo será válida para los  $v_{mn}$  que son los elementos comunes a  $(v_n = K \frac{n}{p})$  y a  $(v_m = Km)$

reemplazando en (3.33) y (3.35)

$$V_m^{os} = (R^s + L_m^{os} p) i_m^{os} + P_0 \sqrt{mn} p \left( \sum_{\{mn\}} L_{v_{mn}}^{sr} \cos v_{mn} P \theta_r \right) i_n^{or} \quad (3.39)$$

$$V_n^{or} = (R_n^{or} + L_n^{or} p) i_n^{or} + \sqrt{mn} p \left( \sum_{\{mn\}} L_{v_{mn}}^{sr} \cos v_{mn} P \theta_r \right) i_m^{os} \quad (3.40)$$

la ecuación de torque de la máquina de m-n fases en términos de las componentes  $\alpha - \beta - 0$  sabiendo que:

$$\frac{\partial}{\partial \theta_r} \begin{bmatrix} T_i(\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_j^{\alpha\beta sr} \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{mn}}{2} P \sum_{\{ij\}} L_{v_{ij}}^{sr} \begin{bmatrix} - \text{Sen } v_{ij} P \theta_r & \sigma_{v_j} \text{Cos } v_{ij} P \theta_r \\ - \sigma_{v_i} \text{Cos } v_{ij} P \theta_r & - \sigma_{v_i} \sigma_{v_j} \text{Sen } v_{ij} P \theta_r \end{bmatrix}$$

y que

$$\frac{\partial}{\partial \theta_r} [T_m] [L_n^{osr}] = -\sqrt{mn} P \sum_{mn} L_{v_{mn}}^{sr} v_{mn} \text{Sen } v_{mn} P \theta_r$$

y reemplazando todo esto en (3.36) será

$$T_e = (P_0)^2 \left[ \sum_{i=1}^{\frac{m-1}{2}} \sum_{j=1}^{\frac{n-1}{2}} \begin{bmatrix} i_i^{\alpha s} & i_i^{\alpha s} \end{bmatrix} \left( \frac{\sqrt{mn}}{2} P \sum_{\{ij\}} L_{v_{ij}}^{sr} v_{ij} \begin{array}{c|c} -\text{Sen } v_{ij} P \theta_r & \sigma_{v_j} \text{Cos } v_{ij} P \theta_r \\ \hline -\sigma_{v_i} \text{Cos } v_{ij} P \theta_r & -\sigma_{v_i} \sigma_{v_j} \text{Sen } v_{ij} P \theta_r \end{array} \right) \right]$$

$$\times \begin{bmatrix} i_j^{\alpha r} \\ i_j^{\beta r} \\ i_j^{\beta r} \end{bmatrix} - \sqrt{mn} P \sum_{\{mn\}} L_{v_{mn}}^{sr} v_{mn} \text{Sen } (v_{mn} P \theta_r) \begin{bmatrix} i_m^{\alpha s} & i_n^{\alpha r} \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

efectuando los productos y agrupando se obtiene

$$\begin{aligned}
 T_e = (P_0)^2 P & \left[ \frac{\sqrt{mn}}{2} \sum_{i=1}^{\frac{m-1}{2}} \sum_{j=1}^{\frac{n-1}{2}} L_{bij}^{sr} \left\{ \cos(v_{ij} P \Theta_r) \left( \sigma_{y_i}^{xs} i_j^{pr} - \sigma_{y_j}^{xr} i_i^{ps} \right) - \text{Sen}(v_{ij} P \Theta_r) \times \right. \right. \\
 & \left. \left. \left( i_i^{xs} i_j^{xr} + \sigma_{y_i} \sigma_{y_j} i_j^{pr} i_i^{ps} \right) \right\} - \sqrt{mn} \sum_{\{mn\}} v_{mn}^{sr} L_{v_{mn}}^{sr} \text{Sen}(v_{mn} P \Theta_r) i_{v_m}^{os} i_{v_n}^{or} \right] \dots (3.42)
 \end{aligned}$$



los armónicos  $P_{\nu_{ij}}$  pertenecientes al juego  $\{ij\}$  son aquellos elementos comunes a los juegos  $\{i\}$  y  $\{j\}$  se pueden definir alternativamente por

$$\nu_i = K_1 m \pm i > 0, \quad K_1 = 0, 1, 2, \dots \quad 0 < i < \frac{m}{2}$$

$$\nu_j = K_2 \frac{n}{p} \pm j > 0, \quad K_2 = 0, 1, 2, \dots \quad 0 < j < \frac{n}{2}$$

los juegos  $\{m\}$  y  $\{n\}$  contienen múltiplos enteros de  $m$  y  $n$  respectivamente y el juego  $\{mn\}$  contiene únicamente los elementos comunes a  $\{m\}$  y  $\{n\}$

Acerca de la transformación a 2 fases se puede hacer las siguientes observaciones:

- 1) Una máquina general de  $m-n$  fases se puede representar por  $\left(\frac{m-1}{2}\right)$  circuitos componentes  $\alpha-\beta$  y un circuito componente cero para el estator, y  $\left(\frac{n-1}{2}\right)$  circuitos componentes  $\alpha-\beta$  y un circuito componente cero para el rotor.
- 2) Solamente los armónicos comunes al estator y al rotor, pertenecientes al juego  $\{ij\}$ , son los que producen torque
- 3) Las componentes cero producen torque si existen armónicos comunes entre los juegos  $\{n\}$  y  $\{m\}$

### 3.3.3 Transformación de las Variables Rotóricas a dos Fases Ortogonales d-q -0 de las ecuaciones de fase $\alpha$ - $\beta$ -0 de voltaje-corriente y de torque eléctrico

En el análisis convencional de máquinas donde se considera solamente la componente fundamental de la onda de flujo, una selección adecuada del eje de referencia giratorio d-q transformaría las ecuaciones originales de fase con coeficientes dependientes del tiempo a una forma más simple y rápidas de resolver. Por ejemplo, para una operación a velocidad constante, las ecuaciones resultantes en variables d-q serían lineales con coeficientes constantes. Pero cuando se incluyen los armónicos espaciales, las dificultades encontradas en la aplicación de la transformación d-q al modelo bifásico para obtener alguna simplificación sería aparente. La ecuación (3.24) muestra que cada juego de componentes  $\alpha$ - $\beta$ , aunque desacoplados una de otra, contienen armónicos. Esta observación difiere de la común suposición de que los armónicos en el rotor tipo jaula de ardilla se pueden tratar independientemente. Aún cuando múltiples transformaciones d-q se puedan aplicar a cada juego para eliminar la dependencia de los coeficientes del ángulo rotórico  $\theta_r$ , esto no conduciría a alguna simplificación en aquellos casos en el que se considere una tensión de entrada, debido a que la tensión de entrada tendría que separarse en tensiones armónicas dentro de cada juego de componentes  $\alpha$ - $\beta$ .

El acoplamiento entre las componentes cero del estator y rotor, las que están representadas por los segundos términos, tanto en la ecuación (3.39) y (3.40) es una función del ángulo rotórico  $\theta_r$ , sus coeficientes dependientes de  $\theta_r$  no se pueden eliminar

por una transformación de variables. Afortunadamente, no existe acoplamiento de las componentes cero en una máquina de rotor tipo jaula de ardilla. Esto se mostrará en el capítulo 5.

Similarmente, una conexión de fases en el estator sin neutro de retorno no tendría corriente de componente cero.

Cuando no existe acoplamiento de componente cero y si únicamente se considera el armónico dominante en cada juego  $\alpha - \beta$ , y el resto de los armónicos no son tomados en cuenta, se puede conseguir una considerable simplificación al aplicar la transformación d-q como se mostrará en el siguiente análisis.

Hagamos que el armónico dominante de cada juego  $\alpha - \beta$  es representado por  $P\nu$ . Entonces la transformación  $\alpha - \beta$  a d-q para el armónico de orden  $\nu$  en ese juego  $\alpha - \beta$  se puede escribir como:

$$\begin{bmatrix} f_{\nu}^d \\ f_{\nu}^q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \nu P\theta_r & -\sqrt{\nu} \sin \nu P\theta_r \\ \sin \nu P\theta_r & \sqrt{\nu} \cos \nu P\theta_r \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} f_{\nu}^{\alpha} \\ f_{\nu}^{\beta} \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

Donde  $\theta$  es  $\theta_r$  para la transformación del estator al rotor y  $-\theta_r$  para la transformación del rotor hacia el estator y

$$v = K \frac{n}{p} \pm j > 0 \quad K = 0, 1, 2, \dots$$

$$\sigma_v = +1 \quad \text{cuando} \quad v = K, m + i$$

$$\sigma_v = -1 \quad \text{cuando} \quad v = K, m - i$$

Alternativamente, la transformación de fases a d-q para el armónico de orden  $v$  se puede implementar usando

$$\left[ T_{v(\theta)} \right] = \sqrt{\frac{2}{n}} \begin{bmatrix} \cos v(P\theta) & \cos v(P\theta - \delta) & \dots & \dots & \cos v(P\theta - (n-1)\delta) \\ \sin v(P\theta) & \sin v(P\theta - \delta) & \dots & \dots & \sin v(P\theta - (n-1)\delta) \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

con  $n=2$

Aplicando la transformación (3.42) únicamente a las variables del rotor en las ecuaciones (3-23), (3.24) mientras mantenemos las variables de fase del estator. La ecuación (3.23) es escrita a continuación:

$$\left[ V^s \right] = (R^s + \left[ L^s \right] p) \left[ I^s \right] + P_o \sum_{j=1}^{\frac{n-1}{2}} P \left[ L_j^{\alpha\beta sr} \right] \left[ i_j^{\alpha\beta r} \right] + P \left[ L_n^{osr} \right] i_n^{or}$$

Cuando no existe componente de acoplamiento cero y si solo se considera únicamente el armónico dominante en cada juego  $\alpha-\beta$  y el resto de los armónicos se ignoran. La ecuación de tensión del estator se transforma en

$$[V^s] = (R^s + [L^s] p) [I^s] + P_0 \sum_{\nu} p [L_{\nu}^{\alpha\beta sr}] [i_{\nu}^{\alpha\beta sr}] \quad (3.45)$$

Aplicamos la transformación d-q a las variables rotóricas

$$[i_{\nu}^{dq}] = [A_{dq}] [i_{\nu}^{\alpha\beta sr}]$$

$$[V^s] = (R^s + [L^s] p) [I^s] + P_0 \sum_{\nu} p [L_{\nu}^{\alpha\beta sr}] [A_{dq}]^t [i_{\nu}^{dq}]$$

Desarrollando

$$[L_{\nu}^{\alpha\beta sr}] [A_{dq}]^t$$

Siendo:

$$[A_{dq}]^t = \begin{bmatrix} \cos \nu P\theta_r & -\sin \nu P\theta_r \\ \sqrt{\nu} \sin \nu P\theta_r & \sqrt{\nu} \cos \nu P\theta_r \end{bmatrix}$$

se obtiene

$$[V^s] = (R^s + [L^s] p) [I^s] + P_0 \sqrt{\frac{n}{2}} \sum L_v^{sr} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ \cos v(i-1)\alpha & \sin v(i-1)\alpha \\ \vdots & \vdots \\ \cos v(m-1)\alpha & \sin v(m-1)\alpha \end{bmatrix} p \begin{bmatrix} i_v^{dr} \\ i_v^{qr} \end{bmatrix}$$

Ahora la ecuación para la  $v$ -ésima componente d-q de el rotor se obtiene a partir de la expresión (3.24) que es escrita a continuación:

$$[V_v^{\alpha\beta r}] = (R_v^{\alpha\beta r} + L_v^{\alpha\beta r} p) [i_v^{\alpha\beta r}] + p [L_v^{\alpha\beta sr}]^t [I^s]$$

aplicamos la transformación d-q a las variables rotóricas

$$[V_v^{dq r}] = [A_{dq}] [V_v^{\alpha\beta r}]$$

$$[i_v^{dq r}] = [A_{dq}] [i_v^{\alpha\beta r}]$$

reemplazando

$$[V_v^{dq r}] = ([A_{dq}] R_v^{\alpha\beta r} [A_{dq}]^t + [A_{dq}] L_v^{\alpha\beta r} [A_{dq}]^t p) [i_v^{dq r}] + [A_{dq}] L_v^{\alpha\beta r} [i_v^{dq r}] p [A_{dq}]^t + [A_{dq}] p [L_v^{\alpha\beta sr}]^t [I^s] \quad (3.46)$$

haciendo

$$[A_{dq}] L_v^{\alpha\beta r} [A_{dq}]^t = L_v^{dq r} \quad (3.47)$$

$$\left[ A_{dq} \right] R_{\nu}^{\alpha\beta r} \left[ A_{dq} \right]^t = R_{\nu}^{dqr} \quad (3.48)$$

Se puede demostrar que el término

$$\left[ A_{dq} \right] L_{\nu}^{\alpha\beta r} \left[ i_{\nu}^{dqr} \right] P \left[ A_{dq} \right]^t$$

es equivalente a:

$$P W_r L_{\nu}^{dqr} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{\nu}^{dr} \\ i_{\nu}^{qr} \end{bmatrix}$$

y el término

$$\left[ A_{dq} \right] P \left[ L_{\nu}^{\alpha\beta sr} \right]^t \left[ I^s \right]$$

es equivalente a:

$$\sqrt{\frac{n}{2}} L_{\nu}^{sr} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ \cos \nu(m-1)\alpha & \sin \nu(m-1)\alpha \end{bmatrix} P \left[ I^s \right] +$$

$$\sqrt{\frac{n}{2}} \nu P W_r L_{\nu}^{dqr} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ \cos \nu(m-1)\alpha & \sin \nu(m-1)\alpha \end{bmatrix}^t \left[ I^s \right]$$



todo esto reemplazándolo en la ecuación (3.46) se tendrá

$$\begin{bmatrix} V_b^{dr} \\ V_b^{qr} \end{bmatrix} = (R_b^{dqr} + L_b^{dqr} p) \begin{bmatrix} i_b^{dr} \\ i_b^{qr} \end{bmatrix} + \sqrt{\frac{n}{2}} L_b^{sr} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \cdot & \cdot \\ \cos \nu(i-1)\alpha & \text{Sen} \nu(i-1)\alpha \\ \cdot & \cdot \\ \cos \nu(m-1)\alpha & \text{Sen} \nu(m-1)\alpha \end{bmatrix}^t p \begin{bmatrix} I^s \end{bmatrix}$$

$$+ \nu P W r L_b^{dqr} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_b^{dr} \\ i_b^{qr} \end{bmatrix} + \sqrt{\frac{n}{2}} \nu P W r L_b^{sr} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^x$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \cdot & \cdot \\ \cos \nu(i-1)\alpha & \text{Sen} \nu(i-1)\alpha \\ \cdot & \cdot \\ \cos \nu(m-1)\alpha & \text{Sen} \nu(m-1)\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I^s \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

y la ecuación para la componente cero del rotor se convierte en

$$V_n^{or} = (R_n^{or} + L_n^{or} p) i_n^{or}$$

desarrollando las relaciones (3.47) y (3.48).

$$\text{Se obtiene que } R_b^{dqr} = R_b^{\alpha\beta r} \text{ y } L_b^{dqr} = L_b^{\alpha\beta r}$$



Cuando aplicamos la transformación d-q al modelo bifásico, ecuación (3.31) en el que se considera solo un armónico por cada circuito rotórico.

$$\begin{bmatrix} V_i^{\alpha\beta s} \end{bmatrix} = (R^s + \begin{bmatrix} L_i^{\alpha\beta s} \end{bmatrix} p) \begin{bmatrix} i_i^{\alpha\beta s} \end{bmatrix} + P_o p \sum_b \begin{bmatrix} T_{i(o)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_b^{\alpha\beta sr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_b^{\alpha\beta sr} \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

haciendo

$$\begin{bmatrix} i_b^{dqr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{dq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_b^{\alpha\beta r} \end{bmatrix}$$

se obtiene:

$$\begin{bmatrix} V_i^{\alpha\beta s} \end{bmatrix} = (R^s + \begin{bmatrix} L_i^{\alpha\beta s} \end{bmatrix} p) \begin{bmatrix} i_i^{\alpha\beta s} \end{bmatrix} + P_o p \sum_b \begin{bmatrix} T_{i(o)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_b^{\alpha\beta sr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{dq} \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} i_b^{dqr} \end{bmatrix}$$

en donde el término en la sumatoria es equivalente a:

$$\begin{bmatrix} T_{i(o)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_b^{\alpha\beta sr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{dq} \end{bmatrix}^t = \frac{\sqrt{mn}}{2} L_b^{sr} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sigma_b \end{bmatrix}$$

Entonces finalmente la ecuación toma la forma:

$$\begin{bmatrix} V_i^{\alpha s} \\ V_i^{\beta s} \end{bmatrix} = (R^s + \begin{bmatrix} L_i^{\alpha\beta s} \end{bmatrix} p) \begin{bmatrix} i_i^{\alpha s} \\ i_i^{\beta s} \end{bmatrix} + \frac{\sqrt{mn}}{2} P_o \sum_b L_b^{sr} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sigma_b \end{bmatrix} p \begin{bmatrix} i_b^{dr} \\ i_b^{qr} \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

Luego aplicando la transformación a la ecuación (3.34) y haciendo las mismas consideraciones.

$$\begin{bmatrix} V_b^{\alpha\beta r} \end{bmatrix} = ( \begin{bmatrix} R_b^{\alpha\beta r} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_b^{\alpha\beta r} \end{bmatrix} p ) \begin{bmatrix} i_b^{\alpha\beta r} \end{bmatrix} + p \sum_{i=1}^{\frac{m-1}{2}} ( \begin{bmatrix} T_{i(o)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_b^{\alpha\beta sr} \end{bmatrix} )^t \begin{bmatrix} i_i^{\alpha\beta s} \end{bmatrix}$$

y hacemos:

$$\begin{bmatrix} V_b^{\alpha\beta r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{dq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_b^{dqr} \end{bmatrix}$$

$$\left[ A_{dq} \right] \left[ L_v^{\alpha\beta r} \right] \left[ A_{dq} \right]^t = \left[ L_v^{dqr} \right]$$

Se obtiene:

$$\begin{aligned} \left[ V_v^{dqr} \right] = & \left( \left[ A_{dq} \right] \left[ R_b^{\alpha\beta r} \right] \left[ A_{dq} \right]^t + \left[ A_{dq} \right] \left[ L_v^{\alpha\beta r} \right] \left[ A_{dq} \right]^t \right) \left[ i_v^{dqr} \right] + \\ & \left[ A_{dq} \right] \left[ L_v^{\alpha\beta r} \right] p \left[ A_{dq} \right]^t \left[ i_v^{dqr} \right] + \sum_{i=1}^{\frac{m-1}{2}} \left[ A_{dq} \right] p \left( \left[ T_{i(o)} \right] \left[ L_v^{\alpha\beta sr} \right]^t \right) \left[ i_i^{\alpha\beta s} \right] + \\ & \sum_{i=1}^{\frac{m-1}{2}} \left[ A_{dq} \right] \left( \left[ T_{i(o)} \right] \left[ L_v^{\alpha\beta r} \right]^t \right) p \left[ i_i^{\alpha\beta s} \right] \end{aligned} \quad (3.50)$$

Donde:

$$\left[ A_{dq} \right] \left[ R_b^{\alpha\beta} \right] \left[ L_{dq} \right]^t = \left[ R_v^{dqr} \right]$$

$$\left[ A_{dq} \right] \left[ L_v^{\alpha\beta r} \right] \left[ A_{dq} \right]^t = \left[ L_v^{dqr} \right]$$

el término:

$$\left[ A_{dq} \right] \left[ L_v^{\alpha\beta r} \right] p \left[ A_{dq} \right]^t \left[ i_v^{dqr} \right] = L_v^{dqr} p W_r \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_v^{dr} \\ i_v^{qr} \end{bmatrix}$$

el término:

$$\left[ A_{dq} \right] p \left( \left[ T_{i(o)} \right] \left[ L_v^{\alpha\beta sr} \right]^t \right) \left[ i_i^{\alpha\beta s} \right] = \frac{\sqrt{mn}}{2} p W_r L_v^{sr} \begin{bmatrix} 0 & -\sigma_v \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_i^{\alpha s} \\ i_i^{\beta s} \end{bmatrix}$$

y el término:

$$[A_{dq}] ( [T_{i(o)}] [L_v^{\alpha\beta sr}] )^t P [i_i^{\alpha\beta s}] = \frac{\sqrt{mn}}{2} L_v^{sr} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sigma_v \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} i_i^{\alpha s} \\ i_i^{\beta s} \end{bmatrix}$$

Reemplazando estos resultados parciales en (3.50) obtenemos finalmente:

$$\begin{bmatrix} V_v^{dr} \\ V_v^{qr} \end{bmatrix} = (R_v^{dqr} + L_v^{dqr} P) \begin{bmatrix} i_v^{dr} \\ i_v^{qr} \end{bmatrix} + L_v^{dqr} v P W_r \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_v^{dr} \\ i_v^{qr} \end{bmatrix} +$$

$$\frac{\sqrt{mn}}{2} \sum_{i=1}^{\frac{m-1}{2}} v P W_r L_v^{sr} \begin{bmatrix} 0 & -\sigma_v \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_i^{\alpha s} \\ i_i^{\beta s} \end{bmatrix} + \frac{\sqrt{mn}}{2} \sum_{i=1}^{\frac{m-1}{2}} L_v^{sr} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sigma_v \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} i_i^{\alpha s} \\ i_i^{\beta s} \end{bmatrix}$$

(3.51)

Para la ecuación de torque se parte de la expresión (3.41) que se escribe a continuación

$$T_e = (P_0)^2 \sum_{i=1}^{\frac{m-1}{2}} \sum_{j=1}^{\frac{n-1}{2}} [i_i^{\alpha\beta s}]^t \left( \frac{\sqrt{mn}}{2} P \sum_{\{ij\}} L_{ij}^{sr} v_{ij} \begin{bmatrix} -\text{Sen } v_{ij} P\theta_r & \sigma_{v_j} \text{Cos } v_{ij} P\theta_r \\ -\sigma_{v_i} \text{Cos } v_{ij} P\theta_r & -\sigma_{v_i} \sigma_{v_j} \text{Sen } v_{ij} P\theta_r \end{bmatrix} \right)$$

$$) \times \begin{bmatrix} i_j^{\alpha r} \end{bmatrix}$$

considerando únicamente el armónico dominante por cada circuito rotórico.

$$T_e = (P_o)^2 P \sum_{i=1}^{\frac{m-1}{2}} \sum_{\nu} [i_i^{\alpha\beta s}]^t \left( \frac{\sqrt{mn}}{2} \nu L_{\nu}^{sr} \begin{bmatrix} -\text{Sen } \nu P\theta_r & \text{Cos } \nu P\theta_r \\ -\sigma_{\nu} \text{Cos } \nu P\theta_r & -\text{Sen } \nu P\theta_r \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} i_{\nu}^{\alpha\beta r} \\ i_{\nu}^{\gamma\beta r} \end{bmatrix}$$

Ahora aplicamos la transformación d-q es decir:

$$\begin{bmatrix} i^{dqr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{dq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i^{\gamma\beta r} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} i_{\nu}^{\gamma\beta r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{dq} \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} i_{\nu}^{dqr} \end{bmatrix}$$

siendo:

$$\begin{bmatrix} A_{dq} \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} \text{Cos } \nu P\theta_r & -\text{Sen } \nu P\theta_r \\ \sigma_{\nu} \text{Sen } \nu P\theta_r & \sigma_{\nu} \text{Cos } \nu P\theta_r \end{bmatrix}$$

reemplazando en la ecuación (3.52) y efectuando las operaciones.

Se obtendrá:

$$T_e = (P_o)^2 P \frac{\sqrt{mn}}{2} \sum_{i=1}^{\frac{m-1}{2}} \sum_{\nu} \nu L_{\nu}^{sr} (i_i^{\alpha s} i_{\nu}^{qr} - \sigma_{\nu} i_i^{\beta s} i_{\nu}^{dr}) \quad (3.53)$$

Se observa entonces que la transformación facilitaría la solución del problema si en cada juego  $\alpha \rightarrow \beta$  consideramos sólo un armónico.

## CAPITULO IV

### REFERENCIA DE FUNCIONAMIENTO ASINCRONO Y

#### SINCRONO

Cuando analizamos los armónicos espaciales en un motor de inducción se encuentra que existe una multiplicidad de distribuciones de flujo viajando en el entrehierro debido a las corrientes del estator y rotor.

Cuando las condiciones son tales que dos distribuciones de flujo con el mismo número de polos, uno debido al estator y el otro debido al rotor están viajando a la misma velocidad y en la misma dirección, estas distribuciones desarrollarán ya sea un torque horario o antihorario dependiendo de su posición relativa en el entrehierro y no de su dirección de movimiento. Este torque se puede clasificar ya sea como un torque de inducción o como un torque síncrono dependiendo de qué forma se produce la componente de flujo rotórica.

Recuérdese que únicamente los flujos del estator y el rotor que tienen el mismo número de polos pueden interaccionar para producir un torque estable.

Si el flujo rotórico se produce por una corriente rotórica que es inducida por un flujo del estator del mismo número de polos, el torque se clasifica como de inducción o "Asíncrono".

Pero si el flujo del rotor se produce por una corriente rotórica que es inducida por un flujo del estator de diferente número de polos, el torque se clasifica como torque "Síncrono".

En el primer caso los dos componentes de campo viajan a la misma velocidad sin considerar la velocidad del rotor. Este es la característica del torque desarrollado por un motor de inducción.

En el último caso, las dos ondas viajarían a la misma velocidad y así desarrollarían torques solo para una velocidad particular del rotor. Esta es la característica de torque desarrollada por una máquina síncrona.

Por ejemplo, si el 7mo armónico del flujo del estator induce una corriente en el rotor, la cual produce el 7mo armónico en flujo rotórico, esas dos componentes de flujo daría un torque asíncrono.

Por otro lado si, por ejemplo, el flujo fundamental del estator induce una corriente en el rotor la cual produce el 13mo armónico en el flujo rotórico. Este reaccionaría con el 13mo armónico del flujo estator para una velocidad particular del rotor, esto es a un sétimo de la velocidad sincronismo, y produciría torque síncrono.

### Armónicos Dentales

Entre los armónicos del estator, que crean momentos asíncronos, hay que destacar los primeros armónicos dentales del estator, es decir aquellos armónicos dados por la relación:



$$v = K \frac{Z_1}{P} \pm 1 \quad (4.1)$$

$Z_1$  : # de ranuras estat6ricas

$P$  : pared de polos

$K$  : entero positivo

para estos arm6nicos el factor de bobinado es igual al factor de la primera arm6nica, mientras que para las arm6nicas de otro orden dicho factor es mucho menor.

Una medida contra los momentos asincr6nos par6sitos es el sesgamiento de las barras rot6ricas en un paso dental del estator.

Los momentos sincr6nicos que tienen importancia primordial son los producidos por los arm6nicos dentales del rotor y del estator de igual orden, es decir:

$$v_{estator} = v_{rotor}$$
$$\frac{Z_1}{P} \pm 1 = \frac{Z_2}{P} \pm 1$$

Por consiguiente, los momentos sincr6nos m6s considerables tienen lugar cuando

$$Z_1 = Z_2 \quad (4.2) ; \quad Z_1 - Z_2 = \pm 2P \quad (4.3)$$

Estas relaciones entre el n6mero de ranuras del estator y el rotor deben ser evitadas. Para debilitar la influencia nociva de los momentos sincr6nos se puede recurrir al sesgamiento de las ranuras rot6ricas en un paso dental del rotor.

Para el modelo  $\alpha-\beta-0$  los órdenes de los armónicos del estator y del rotor están dados por las siguientes relaciones.

$$\nu_i = Km + i, \quad 0 < i < \frac{m}{2} \text{ y } K = 0, 1, 2, \dots \text{ (estator)} \quad (4.4)$$

$$\nu_j = H \frac{n}{p} + j, \quad 0 < j < \frac{n}{2} \text{ y } H = 0, 1, 2, \dots \text{ (rotor)} \quad (4.5)$$

Solo aquellos armónicos comunes a estas dos relaciones, reaccionarán para producir torque asíncrono.

mientras que para desarrollar torque síncrono se deberá cumplir con la relación.

$$P(\nu_1 + \nu_2) = Hn \quad (4.6)$$

donde: H: es entero positivo o negativo diferente de cero

n: es el número de ranuras rotóricas por par de polos

Además de que  $\nu_1$  y  $\nu_2$  deben pertenecer al mismo juego  $\alpha-\beta$

Entonces el torque síncrono se desarrollará para la velocidad rotórica.

$$W_r = \frac{2W}{P(\nu_1 + \nu_2)} \quad (4.7)$$

o

$$W_r = \frac{2W}{Hn} \quad (4.8)$$

de lo que se puede concluir de que existe una serie infinita de



armónicos sincronizados a la velocidad rotórica dada por la ecuación (4.7).

También, la acción síncrona se presenta cuando el rotor está detenido en el momento del arranque y la condición para que se de este caso es:

$$P (\nu_1 - \nu_2) = Hn \quad (4.9)$$

de estas dos últimas expresiones (4.6) y (4.9) se concluye que el torque síncrono en el motor de inducción sí existe, depende sólo del número de barras rotóricas y además del ángulo entre las fases del estator y rotor.

Debido a la acción del momento síncrono el rotor del motor puede "atracarse" durante el arranque a la velocidad dada por la relación (4.8) y no permitir alcanzar la velocidad normal. No obstante, a diferencia del momento asíncrono, el cual se manifiesta en una banda bastante amplia de velocidades angulares, el momento síncrono actúa durante el arranque un tiempo bastante corto al pasar por la velocidad en la que este efecto se pone de manifiesto y puede ser fácilmente vencido a cuenta de la energía cinética acumulada en el rotor en rotación.

## CAPITULO V

### APLICACION DE LOS MODELOS AL MOTOR ASINCRONO DE ROTOR JAULA DE ARDILLA EMPLEANDO METODOS COMPUTACIONALES

En este capítulo hacemos la aplicación numérica de la teoría desarrollada, mostrando las consideraciones envueltas en la construcción de una razonable representación, y además de dar alguna idea del esfuerzo computacional requerido. Para este propósito, serán considerados tres tipos de motores de inducción jaula de ardilla de diferentes características. El efecto de los armónicos en la FNM en operación transitoria de las tres máquinas serán examinadas.

La característica en estado estable será considerada primero, debido a que es más fácil ver alguno de los efectos de la característica en estado estable que de la característica transitoria, además la computación en estado estable es mucho más fácil que en estado transitorio,

Aquí haremos uso de los resultados obtenidos del estudio en estado estable de la tesis de grado "Análisis del Funcionamiento Síncrono y Asíncrono de las Máquinas de Inducción" por Víctor Fidel Pando, ya que en este estudio la aplicación se ha hecho en las mismas máquinas y porque además nos suministrará información acerca de los armónicos que deberán ser considerados para la computación de las características transitorias.

Estos ejemplos demostrarán como las transformaciones pueden ser aplicadas ventajosamente.

El procedimiento de solución comienza con la selección del apropiado modelo o transformación. La selección está basada en el conocimiento de que armónicos están presentes y sus interacciones, los armónicos del estator y rotor en el modelo  $\alpha-\beta$  están dados por  $\nu = Km + i$  y  $\nu = H \frac{n}{p} + j$  respectivamente.

Para una máquina de inducción trifásica, la interacción está presente entre dos armónicos cuyas órdenes son comunes a

$$\nu = Km + i \quad \text{y} \quad \nu = H \frac{n}{p} + j$$

Es de interés también el ahorro (en esfuerzo) de computación que resulta cuando el modelo d-q es aplicado. Una idea de esto puede ser obtenido por la evaluación comparativa de los requerimientos computacionales. Para este propósito, ambas ecuaciones las originales de fase y las transformadas serán usadas para obtener la característica de aceleración libre de las máquinas. Tres tipos de motores de inducción jaula de ardilla son usados en este estudio, los parámetros son dados en el Capítulo V, punto 5.3. Estas máquinas tienen un diseño estatórico común, solo sus rotores son diferentes, La Máquina I tiene un rotor expresamente diseñado para dar grandes torques asíncronos, mientras que la máquina III tiene un rotor el cual da pronunciados torques síncronos. La Máquina II presenta pequeños torques asíncronos y síncronos, esta última máquina viene a ser el diseño recomendado.

## 5.1 Modelos Equivalentes del Motor de Inducción Jaula de Ardilla

### 5.1.1 Modelo Original de Fases

La máquina a ser analizada es de  $P$  pares de polos y  $n$  barras rotóricas. Aquí  $n$  y  $P$  serán modificados para considerar únicamente un período básico  $P_0$ . Cada circuito rotórico está formado por 2 barras sucesivas y por los segmentos de anillos que las conectan.

Los circuitos están enumerados de 1 hasta  $n$  en la dirección de rotación.

La resistencia de cada circuito rotórico es expresada en términos de la resistencia de barra ( $R_b$ ) y la resistencia de anillo ( $R_e$ .)

Las ecuaciones diferenciales a ser resueltas son:

$$\frac{d}{dt} [I] = [L]^{-1} \left[ [V] - [R][I] \right] \quad (5.1)$$

$$\frac{d}{dt} W_r = \frac{T_e}{J} \quad (5.2)$$

$$\frac{d}{dt} \Theta_r = W_r \quad (5.3)$$

Teniendo en cuenta que:



$$[L] = \left[ \begin{array}{c|c} [L^s] & [L^{sr}] \\ \hline [L^{sr}]^T & [L^r] \end{array} \right]$$

$$[L] = \left[ \begin{array}{ccc|cccccccc} L_{11}^s & L_{12}^s & L_{21}^s & L_{11}^{sr} & L_{12}^{sr} & \cdot & \cdot & \cdot & L_{1j}^{sr} & \cdot & \cdot & \cdot & L_{1n}^{sr} \\ L_{21}^s & L_{11}^s & L_{22}^s & L_{21}^{sr} & L_{22}^{sr} & \cdot & \cdot & \cdot & L_{2j}^{sr} & \cdot & \cdot & \cdot & L_{2n}^{sr} \\ L_{31}^s & L_{32}^s & L_{11}^s & L_{31}^{sr} & L_{32}^{sr} & \cdot & \cdot & \cdot & L_{3j}^{sr} & \cdot & \cdot & \cdot & L_{3n}^{sr} \\ \hline L_{11}^{sr} & L_{21}^{sr} & L_{31}^{sr} & L_1^r & L_2^r & -L_{loop} & -L_{loop} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -L_{loop} & L_2^r \\ L_{12}^{sr} & L_{22}^{sr} & L_{32}^{sr} & L_2^r & L_1^r & L_2^r & -L_{loop} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -L_{loop} & -L_{loop} \\ L_{13}^{sr} & L_{23}^{sr} & L_{33}^{sr} & -L_{loop} & L_2^r & L_1^r & L_2^r & -L_{loop} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -L_{loop} & -L_{loop} \\ \cdot & \cdot & \cdot & -L_{loop} & -L_{loop} & L_2^r & L_1^r & L_2^r & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -L_{loop} & -L_{loop} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ L_{1j}^{sr} & L_{2j}^{sr} & L_{3j}^{sr} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & -L_{loop} & -L_{loop} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ L_{1n}^{sr} & L_{2n}^{sr} & L_{3n}^{sr} & L_2^r & -L_{loop} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -L_{loop} & L_2^r & L_1^r \end{array} \right]$$

...(5.8)

Donde: estator

$$L_1^s = \mu_0 \frac{r l e}{g_e} \frac{4}{\pi} \left( \frac{N}{P} \right)^2 \sum_{\nu} \left( \frac{K_{\nu}}{\nu} \right)^2 \quad (5.9)$$

$$L_2^s = \mu_0 \frac{r l e}{g_e} \frac{4}{\pi} \left( \frac{N}{P} \right)^2 \sum_{\nu} \left( \frac{K_{\nu}}{\nu} \right)^2 \cos \nu \frac{2\pi}{3} \quad (5.10)$$

Rotor

$$L_1^r = 2(L_b + L_e) + (n-1)L_{loop} \quad (5.11)$$

$$L_2^r = -L_b - L_{loop} \quad (5.12)$$

$$L_i^r = -L_{loop} \quad (i = 3, 4, \dots, n) \quad (5.13)$$

$$(n-1)L_{loop} = \mu_0 \frac{r l e}{g_e} \frac{4}{\pi} \frac{1}{P^2} \sum_{\nu} \frac{1}{\nu^2} \text{Sen}^2 \left( \nu P \frac{\pi}{n} \right) \quad (5.14)$$

$$L_{loop} = \mu_0 \frac{r l e}{g_e} \frac{4}{\pi} \frac{1}{P^2} \sum_{\nu} \frac{1}{\nu^2} \text{Sen}^2 \left( \nu P \frac{\pi}{n} \right) \cos \nu (j-1) P \frac{2\pi}{n} \quad (5.15)$$

$$(j = 2, 3, \dots, n)$$

Estator-Rotor

$$L_{ij}^{sr} = \sum_{\nu} L_{\nu}^{sr} \cos \nu \left( P\theta_r - (i-1) \frac{2\pi}{3} + (j-1) P \frac{2\pi}{n} \right) \quad (5.16)$$

$$1 \leq i \leq 3 \quad y \quad 1 \leq j \leq n$$



$$L_v^{sr} = \mu_0 \frac{r l e}{9e} \frac{4}{\pi} \frac{N}{P^2} \sum_v \frac{K_v}{v^2} \text{Sen}(vP \frac{\pi}{n}) \quad (5.17)$$

Siendo:  $v$  : impar

$P$  : pares de polos

$N$  : número de vueltas por fase

Matriz  $\frac{\partial [L^{sr}]}{\partial \theta r}$

$$\frac{\partial [L^{sr}]}{\partial \theta r} = \begin{bmatrix} L_{11}^{sr} & L_{12}^{sr} & \cdot & \cdot & \cdot & L_{1j}^{sr} & \cdot & \cdot & \cdot & L_{1n}^{sr} \\ L_{21}^{sr} & L_{22}^{sr} & \cdot & \cdot & \cdot & L_{2j}^{sr} & \cdot & \cdot & \cdot & L_{2n}^{sr} \\ L_{31}^{sr} & L_{32}^{sr} & \cdot & \cdot & \cdot & L_{3n}^{sr} & \cdot & \cdot & \cdot & L_{3n}^{sr} \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

Donde:

$$L_{ij}^{sr} = -P \sum_v v L_v^{sr} \text{Sen} v (P\theta r - (i-1)\frac{2\pi}{3} + (j-1)P\frac{2\pi}{n}) \quad (5.19)$$

$$L_v^{sr} = \mu_0 \frac{r l e}{9e} \frac{4}{\pi} \frac{N}{P^2} \sum_v \frac{K_v}{v^2} \text{Sen}(vP \frac{\pi}{n}) \quad (5.20)$$

$$1 \leq i \leq 3$$

$$1 \leq j \leq n$$



Matriz de Tensiones  $[V]$

$$[V] = \left[ \begin{array}{ccc|cccc} V_1^s & V_2^s & V_3^s & V_1^r & V_2^r & \dots & V_j^r & \dots & V_n^r \end{array} \right]^t \quad (5.21)$$

Donde:

$$V_1^s = V_M \cos(\omega t)$$

$$V_2^s = V_M \cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$V_3^s = V_M \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$V_j^r = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

Matriz de Corrientes  $[I]$

$$[I] = \left[ \begin{array}{ccc|cccc} i_1^s & i_2^s & i_3^s & i_1^r & i_2^r & \dots & i_j^r & \dots & i_n^r \end{array} \right]^t \quad (5.22)$$

### 5.1.2 Modelo Equivalente Bifásico $\alpha$ - $\beta$

Estas se deducen directamente a partir de las ecuaciones (3.37), (3.38) y 3.42). Desde que el estator es trifásico se puede representar por 1 solo circuito de componente  $\alpha$ - $\beta$  y un circuito de componente cero, el subíndice  $i$  en las variables del estator se eliminarán.

Ecuaciones a resolver:

$$\frac{d}{dt} [I] = [L]^{-1} \left[ [V] - [R][I] \right] \quad (5.23)$$

$$\frac{dWr}{dt} = \frac{Te}{J} \quad (5.24)$$

$$\frac{d\theta_r}{dt} = W_r \quad (5.25)$$

$$T_e = [I^s]^t \frac{\partial}{\partial \theta_r} [L^r] [I^r] \quad (5.26)$$

donde las matrices  $[L]$ ,  $[R]$  son:

$$[R] = \left[ \begin{array}{c|c} R^s & \\ \hline & [R^{\alpha\beta r}] \end{array} \right]$$

$$[R] = \left[ \begin{array}{c|c} R^s & \\ \hline R_1^{\alpha\beta r} & \\ & R_1^{\alpha\beta r} \\ & & R_2^{\alpha\beta r} \\ & & & R_2^{\alpha\beta r} \\ & & & & \ddots \\ & & & & & R_j^{\alpha\beta r} \\ & & & & & & R_j^{\alpha\beta r} \\ & & & & & & & R_{\frac{n-1}{2}}^{\alpha\beta r} \\ & & & & & & & & R_{\frac{n-1}{2}}^{\alpha\beta r} \end{array} \right] \dots (5.27)$$

$$R_j^{\alpha\beta r} = R_1^r + 2 R_2^r \cos(jP \frac{2\pi}{n}) \quad (5.28)$$

$\sigma$

$$R_j^{\alpha\beta r} = 2 ( R_e + 2 R_b \text{Sen}^2(jP \frac{\pi}{n}) ) \quad (5.29)$$

$$[L] = \begin{bmatrix} [L^{\alpha\beta s}] & [L^{\alpha\beta sr}] \\ [L^{\alpha\beta sr}] & [L^{\alpha\beta r}] \end{bmatrix}$$

$$[L] = \begin{bmatrix} L_1^{\alpha\beta s} & [L_{11}^{\alpha\beta sr}] & [L_{12}^{\alpha\beta sr}] & \dots & [L_{1j}^{\alpha\beta sr}] & \dots & [L_{1 \frac{n-1}{2}}^{\alpha\beta sr}] \\ L_1^{\alpha\beta s} & L_1^{\alpha\beta r} & L_2^{\alpha\beta r} & & L_j^{\alpha\beta r} & & L_{\frac{n-1}{2}}^{\alpha\beta r} \\ [L_{11}^{\alpha\beta sr}] & L_1^{\alpha\beta r} & L_2^{\alpha\beta r} & & L_j^{\alpha\beta r} & & L_{\frac{n-1}{2}}^{\alpha\beta r} \\ [L_{12}^{\alpha\beta sr}] & & L_2^{\alpha\beta r} & & L_j^{\alpha\beta r} & & L_{\frac{n-1}{2}}^{\alpha\beta r} \\ \vdots & & & & & & \\ [L_{1j}^{\alpha\beta sr}] & & & & L_j^{\alpha\beta r} & & L_{\frac{n-1}{2}}^{\alpha\beta r} \\ \vdots & & & & & & \\ [L_{1 \frac{n-1}{2}}^{\alpha\beta sr}] & & & & & & L_{\frac{n-1}{2}}^{\alpha\beta r} \end{bmatrix}$$

... (5.30)

Donde:

$$L_1^{\alpha\beta s} = L_{dispersion}^s + \frac{m}{2} \mu_0 \frac{r l e}{g_e} \frac{4}{\pi} \left(\frac{N}{P}\right)^2 \sum_{\nu} \left(\frac{K_{\nu}}{\nu}\right)^2 \quad (5.31)$$

$$\nu = K m + 1, \quad (K=0, \pm 1, \dots)$$

$$L_j^{\alpha\beta r} = 2 \left( L_e + 2 L_b \text{Sen}^2 \left( j P \frac{\pi}{n} \right) \right) +$$

$$\frac{n}{2} \mu_0 \frac{r l e}{g_e} \frac{4}{\pi} \frac{1}{P^2} \text{Sen}^2 \left( \nu P \frac{\pi}{n} \right) \sum_K \frac{1}{\left( K \frac{n}{P} + j \right)^2} \quad (5.32)$$

$$K = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\left[ L_{ij}^{\alpha\beta sr} \right] = \left[ \begin{array}{c|c} \sum_{\{ij\}} L_{\nu ij}^{sr} \text{Cos } \nu_{ij} P \Theta r & \sigma_{\nu j} \sum_{\{ij\}} L_{\nu ij}^{sr} \text{Sen } \nu_{ij} P \Theta r \\ \hline -\sigma_{\nu i} \sum_{\{ij\}} L_{\nu ij}^{sr} \text{Sen } \nu_{ij} P \Theta r & \sigma_{\nu i} \sigma_{\nu j} \sum_{\{ij\}} L_{\nu ij}^{sr} \text{Cos } \nu_{ij} P \Theta r \end{array} \right] \quad (5.33)$$

$$L_{\nu ij}^{sr} = \mu_0 \frac{r l e}{g_e} \frac{4}{\pi} \frac{N}{P^2} \sum_{\nu} \frac{K_{\nu}}{\nu^2} \text{Sen} \left( \nu P \frac{\pi}{n} \right) \quad (5.34)$$

$\nu_{ij}$ : son los armónicos comunes a  $\{i\}$  y  $\{j\}$

En general las ecuaciones de voltaje de los circuitos componentes cero del estator y rotor son:

$$V_3^{os} = (R^s + L_3^s p) i_3^{os} + P_0 \sqrt{3n} p \left( \sum_{3n} L_{\nu 3n}^{sr} \text{Cos}(\nu_{3n} P \Theta r) \right) i_n^{or}$$

$$0 = (R_n^{or} + L_n^{or} p) i_n^{or} + \sqrt{3n} p \left( \sum L_{v_{3n}}^{sr} \cos(v_{3n} P \theta_r) \right) i_3^{os}$$

como se está considerando el motor trifásico de inducción jaula de ardilla, entonces:

$$L_3^{os} = L^s \text{ dispersión} \quad ; \quad L_n^{or} = 2 L_e$$

y la inductancia mutua  $L_{v_{3n}}^{sr}$  es igual a cero para todos los  $v_n$ .

Las ecuaciones de voltaje de las componentes ceros se reducen a:

$$V_3^{os} = (R^s + L_3^{os} p) i_3^{os} \quad (5.35)$$

$$0 = (R_n^{or} + L_n^{or} p) i_n^{or} \quad (5.36)$$

Nótese que al no existir acoplamiento entre las componentes cero del estator y rotor, las componentes cero no producen torque; lo que sucede es que en realidad la corriente componentes cero del rotor es cero.

La expresión del torque desarrollado por una máquina trifásica de rotor jaula de ardilla, en términos de las componentes  $\alpha$ - $\beta$  del estator y rotor, es:

$$T_e = (P_o)^2 P \left[ \frac{\sqrt{3n}}{2} \sum_{j=1}^{\frac{n-1}{2}} v_{ij} L_{v_{ij}}^{sr} \left\{ \cos(v_{ij} P \theta_r) \right. \right. \\ \left. \left. (\sigma_{vj} i^{\alpha s} i_j^{\beta r} - \sigma_{vi} i_j^{\alpha r} i^{\beta s}) - \text{Sen}(v_{ij} P \theta_r) (\sigma_{vi} i_j^{\alpha s} + \sigma_{vj} i_j^{\beta r} i^{\beta s}) \right\} \right] \quad (5.37)$$

Matriz de Tensiones  $[V]$

$$[V] = \left[ \begin{array}{cc|cc} V_1^{\alpha s} & V_1^{\beta s} & V_1^{\alpha r} & V_1^{\beta r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ V_j^{\alpha r} & V_j^{\beta r} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ V_{\frac{n-1}{2}}^{\alpha r} & V_{\frac{n-1}{2}}^{\beta r} & \dots & \dots \end{array} \right]^t \quad (5.38)$$

donde:

$$V^{\alpha s} = V \cos \omega t$$

$$V^{\beta s} = V \cos \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right)$$

$$V_j^{\alpha r} = V_j^{\beta r} = 0 \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, \frac{n-1}{2}$$

Motor de Corrientes  $[I]$

$$[I] = \left[ \begin{array}{cc|cc} i_1^{\alpha s} & i_1^{\beta s} & i_1^{\alpha r} & i_1^{\beta r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ i_j^{\alpha r} & i_j^{\beta r} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ i_{\frac{n-1}{2}}^{\alpha r} & i_{\frac{n-1}{2}}^{\beta r} & \dots & \dots \end{array} \right]^t \quad (5.39)$$

### 5.1.3 Modelo Equivalente D-Q

Si solo el armónico dominante  $P_0$  en cada juego  $\{j\}$  en el modelo  $\alpha\text{-}\beta\text{-}0$  es retenido, la transformación d-q puede ser aplicada para efecto de obtener una considerable simplificación. Las ecuaciones son:

$$\frac{d}{dt} [I] = [L]^{-1} \left[ [V] - [R][I] - [G] \omega_r [I] \right] \quad (5.40)$$

$$\frac{d}{dt} \omega_r = \frac{T_e}{J} \quad (5.41)$$

siendo:

$$T_e = [I]^t [G] [I] \quad (5.42)$$

Matriz de Tensiones V

$$[V] = \left[ \begin{array}{cc|cccc} V^{ds} & V^{qs} & V_i^{dr} & V_i^{qr} & \dots & V_j^{dr} & V_j^{qr} & \dots & V_{\frac{n-1}{2}}^{dr} & V_{\frac{n-1}{2}}^{qr} \end{array} \right]^t \quad (5.43)$$

$$V^{ds} = V \cos wt$$

$$V^{qs} = V \sin wt$$

$$V_j^{dr} = V_j^{qr} = 0 \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, \frac{n-1}{2}$$

Matriz de Corrientes I

$$[I] = \left[ \begin{array}{cc|cccc} i^{ds} & i^{qs} & i_{u_i}^{dr} & i_{u_i}^{qr} & \dots & i_{u_j}^{dr} & i_{u_j}^{qr} & \dots & i_{\frac{u_{n-1}}{2}}^{dr} & i_{\frac{u_{n-1}}{2}}^{qr} \end{array} \right]^t \quad (5.44)$$

y las matrices  $[R]$ ,  $[L]$  y  $[G]$  las siguientes





$$\begin{bmatrix}
 L_{\alpha\beta}^{sr} & 0 & \frac{\sqrt{3n}}{2} L_{\alpha_1}^{sr} & 0 & \dots & \frac{\sqrt{3n}}{2} L_{\alpha_{n-1}}^{sr} & 0 \\
 0 & L_{\alpha\beta}^{rs} & 0 & \frac{\sqrt{3n}}{2} L_{\alpha_1}^{sr} & \dots & 0 & \frac{\sqrt{3n}}{2} L_{\alpha_{n-1}}^{sr} \\
 \frac{\sqrt{3n}}{2} L_{\alpha_1}^{sr} & 0 & L_{\alpha_1}^{dqr} & & & & \\
 0 & \sigma_{\alpha_1} \frac{\sqrt{3n}}{2} L_{\alpha_1}^{sr} & & L_{\alpha_1}^{dqr} & & & \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\
 \frac{\sqrt{3n}}{2} L_{\alpha_j}^{sr} & 0 & & & L_{\alpha_j}^{dqr} & & \\
 0 & \sigma_{\alpha_j} \frac{\sqrt{3n}}{2} L_{\alpha_j}^{sr} & & & & L_{\alpha_j}^{dqr} & \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
 \frac{\sqrt{3n}}{2} L_{\alpha_{n-1}}^{sr} & 0 & & & & & L_{\alpha_{n-1}}^{dqr} \\
 0 & \sigma_{\alpha_{n-1}} \frac{\sqrt{3n}}{2} L_{\alpha_{n-1}}^{sr} & & & & &
 \end{bmatrix}$$

... (5.47)



donde:

$$L^{srs} = L_{disp}^s + \frac{m}{2} \mu_0 \frac{r l_e}{g_e} \frac{4}{\pi} \left(\frac{N}{P}\right)^2 \sum_v \left(\frac{K_v}{v}\right)^2 \quad (5.49)$$

$$L_v^{sr} = \mu_0 \frac{r l_e}{g_e} \frac{4}{\pi} \frac{N}{P^2} \frac{K_v}{v^2} \text{Sen} \left( v P \frac{\pi}{n} \right) \quad (5.50)$$

$$L_v^{dqr} = 2 \left( L_e + 2 L_b \text{Sen}^2 \left( v P \frac{\pi}{n} \right) \right) + \frac{n}{2} \mu_0 \frac{r l_e}{g_e} \frac{4}{\pi} \frac{l}{P^2} \text{Sen}^2 \left( v P \frac{\pi}{n} \right) \frac{l}{v^2} \quad (5.51)$$

Se debe observar que las matrices de inductancia de los modelos bifásicos  $\alpha-\beta-0$  y original de fases, son funciones de la posición  $\theta_r$ .

Para otro lado, al emplearse el modelo  $d-q-0$ , este podrá ser visto como un modelo desacoplado, es decir, en donde cada armónico rotórico, es considerado como un circuito rotórico independiente. Entonces el número de circuitos rotóricos será una función del número de armónicos que allí se consideren.

## 5.2 Especificaciones de los Motores usados

Las tres máquinas tienen el mismo diseño estático pero sus rotores son diferentes.

La máquina I tiene un rotor diseñado para producir torques armónicos asíncronos pronunciados, mientras que la máquina III tiene un diseño rotórico de manera que produzca torques síncronos pronunciados. La máquina II tiene un diseño rotórico recomendado, es

decir, los torques armónicos síncronos y asíncronos son pequeños.

### Especificaciones Generales

- Potencia : 5 HP
- Número de polos : 4
- Número de fases  
estatóricas : 3
- Tensión : 460 voltios
- Frecuencia : 60 Hz
- Conexión : estrella

#### 5.2.1 Especificaciones del Estator

(Las dimensiones están en pulgadas)

- |   |        |
|---|--------|
| - Número de ranuras                                     | 24     |
| - Paso bobina/paso polar                                | 5/6    |
| - Longitud del estator apilado                          | 4.5    |
| - Longitud efectiva ( $l_e$ )                           | 4.54   |
| - Longitud del entrehierro ( $g_e$ )                    | 0.018  |
| - Entrehierro efectivo de la máquina I ( $g_e$ )        | 0.0247 |
| - Entrehierro efectivo de la máquina II y III ( $g_e$ ) | 0.024  |
| - Número de vueltas por fase (N)                        | 240    |

Los valores de entrehierro efectivo se obtienen al corregirlos por el coeficiente de Carter y el factor de Saturación.

El estator tiene un bobinado imbricado de doble capa con alambre de cobre esmaltado calibre N°15 AWG.

La densidad de flujo en el entrehierro se asume que está por debajo de la saturación (36.6 kilolíneas/pulg<sup>2</sup>).

Las ranuras estatóricas son rectangulares y semicerradas con las siguientes dimensiones:

- Ancho de la abertura 0.125
- Profundidad de la abertura 0.04
- Ancho de la porción rectangular 0.5
- Profundidad de la porción rectangular 0.85
- Profundidad total 0.93

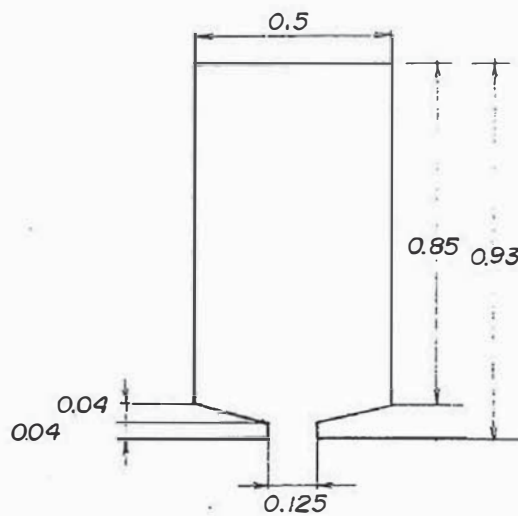


Fig. 2: Ranura Estatórica.

Bobinado Estatórico

Tipo: imbricado de dos capas

N° de bobinas = N° ranuras-estatóricas : 24

N° de bobinas/fase : 8

N° de bobinas/grupo = N° ranuras/(polo x fase) : 2

N° de grupo/fase = (N° polos) : 4

Paso polar (t) : 6 ranuras/polo

Paso bobina : 5 ranuras (paso recortado)

Paso de fase = N° ranuras/(fase-pares polos): 4 ranuras (2/3 t)

Paso de grupo = N° ranuras/N° polos : 6 ranuras

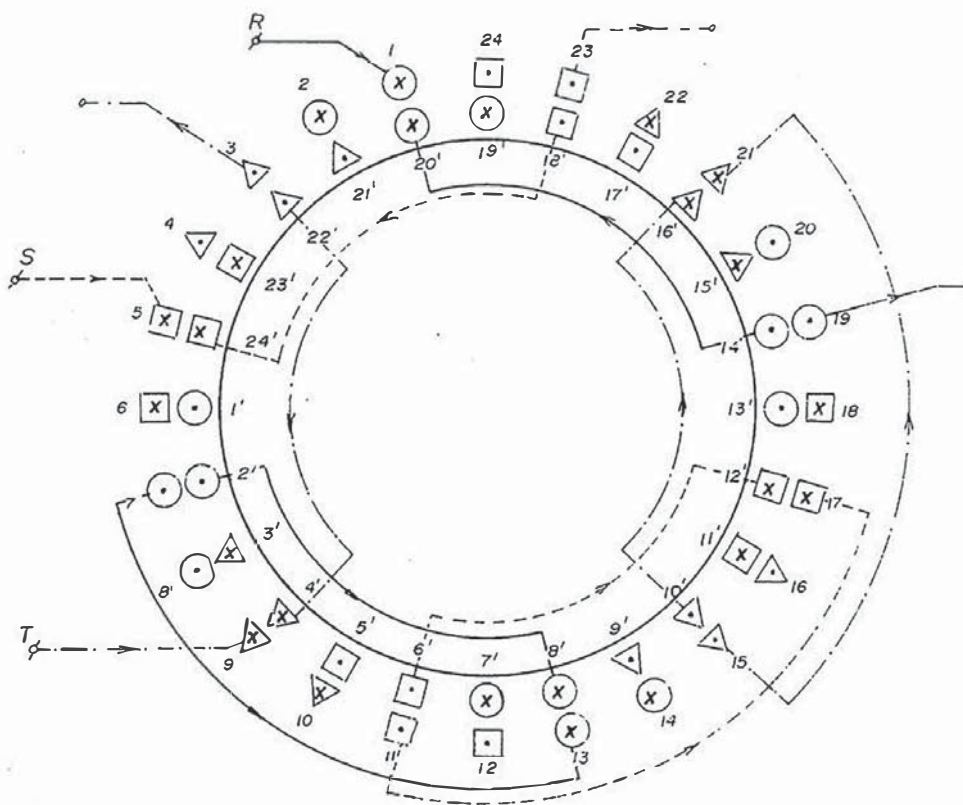


Fig. 3: Esquema lateral Simplificado mostrando las fases

R, S, T <> ( ○ , □ , △ )

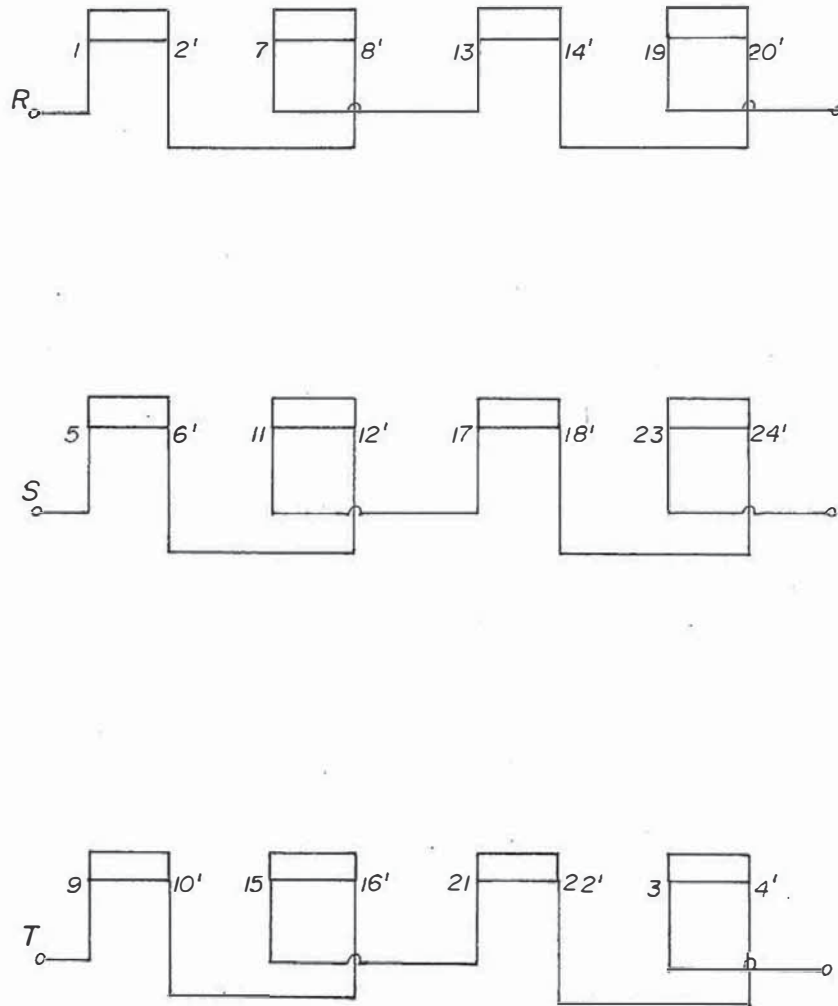


Fig. 4: Esquema de Conexiones de los grupos de bobinas en las fases del Devanado.

### 5.2.2 Especificaciones de los Rotores

Todas las ranuras rotóricas de las tres máquinas son del tipo rectangular y semicerradas (todas las dimensiones están en pulgadas).

#### A) Rotor de la Máquina I

- Número de barras (n) : 46
- Sección transversal de la barra : 0.0255
- Sección transversal del anillo : 0.09
- Longitud de la barra : 5.5

#### Dimensiones de la ranura

- Ancho de abertura : 0.06
- Profundidad de abertura : 0.04
- Ancho de la porción rectangular : 0.085
- Profundidad de la porción rectangular : 0.3287
- Profundidad total : 0.42

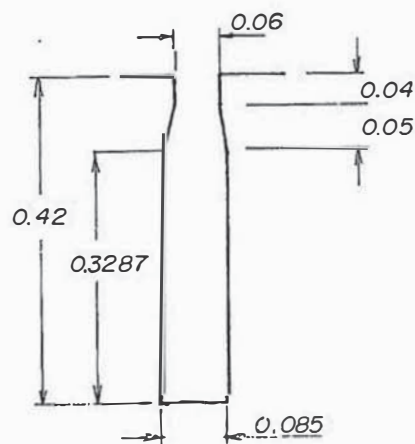


Fig. 5: Ranura Rotórica - Máquina I



B) Rotor de la Máquina II

- Número de barras (n) : 30
- Sección transversal de la barra : 0.039
- Sección transversal del anillo : 0.09
- Longitud de la barra : 5.5

Dimensiones de la Ranura

- Ancho de abertura : 0.06
- Profundidad de abertura : 0.04
- Ancho de la porción rectangular : 0.105
- Profundidad de la porción rectangular : 0.40
- Profundidad total : 0.447

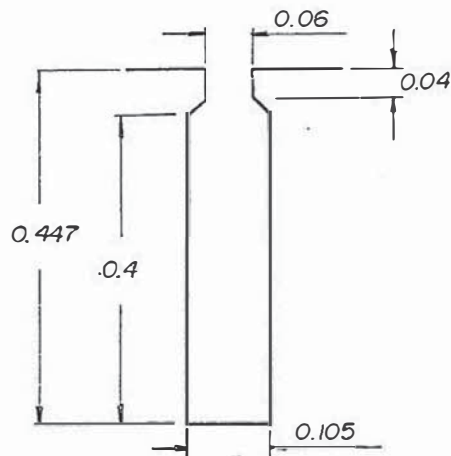


Fig. 6: Ranura rotórica - Máquina II

C) Rotor Máquina III

- Número de barras : 28
- Sección transversal de la barra : 0.042
- Sección transversal del anillo : 0.09
- Longitud de la barra : 5.5

Dimensiones de la ranura

- Ancho de abertura : 0.06
- Profundidad de abertura : 0.04
- Ancho de la porción rectangular : 0.105
- Profundidad de la porción rectangular : 0.43
- Profundidad total : 0.477

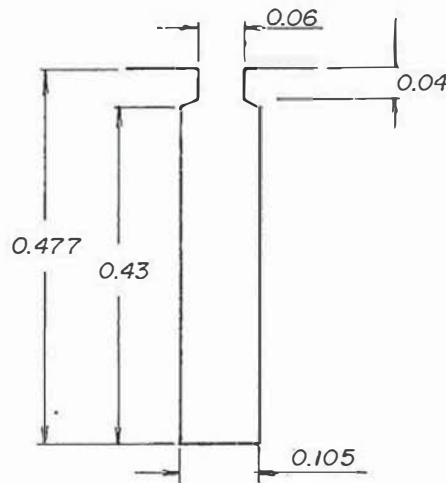


Fig. 7: Ranura Rotórica - Máq. III

5.3 Cálculo de Parámetros

Cálculo de Parámetros del Estator (común a las tres máquinas)

- Resistencia del estator (  $R^s$  ) : 1.866
- Inductancia de dispersión (  $L_{dis}^s$  ) :  $11.6 \times 10^{-3}$  H  
(Incluye la inductancia de dispersión de ranuras, cabeza de bobinas y zig-zag)

- 
$$L_{mi}^s = 0.2984 \sum_u \left( \frac{K_u}{U} \right)^2 H.$$

Donde:

$$K_u = \frac{\text{Sen}(90^\circ u) \text{Sen}(75^\circ u)}{2 \text{Sen}(15^\circ u)} \frac{\text{Sen}(30^\circ u)}{0.0462 u}$$

Parámetros calculados para la máquina (I)

- Resistencia de barra (  $R_b$  ) : 178  $\mu\Omega$
- Resistencia del segmento de anillo  
(  $R_a$  ) : 275  $\mu\Omega$
- Inductancia de dispersión de cada  
barra (  $L_b$  ) :  $0.296 \times 10^{-6}$  H
- Inductancia de dispersión del seg-  
mento de anillo (  $L_e$  ) :  $5.1 \times 10^{-9}$  H
- Inductancia mutua estator-rotor  
(  $L_v^{sr}$  ) :  $1.2459 \times 10^{-3} \frac{K_v}{v^2} \text{Sen} \left( \frac{180}{23} v \right)$

Parámetros calculados para la máquina (II)

- Resistencia de barra (  $R_b$  ) : 116.3  $\mu\Omega$
- Resistencia del segmento de anillo.  
(  $R_a$  ) : 4.22  $\mu\Omega$
- Inductancia de dispersión de barra  
(  $L_b$  ) :  $0.2953 \times 10^{-6}$  H
- Inductancia de dispersión del seg-  
mento de anillo (  $L_e$  ) :  $7.8 \times 10^{-9}$  H
- Inductancia mutua estator-rotor  
(  $L_v^{sr}$  ) :  $1.196 \times 10^{-3} \frac{K_v}{v^2} \text{Sen} \left( \frac{180}{15} v \right)$

Parámetros calculados para la máquina (III)

- Resistencia de Barra (  $R_b$  ) : 1.08  $\mu\Omega$
- Resistencia del segmento de anillo  
(  $R_a$  ) : 4.52  $\mu\Omega$
- Inductancia de dispersión de barra  
(  $L_b$  ) :  $0.31 \times 10^{-5}$  H

- Inductancia de dispersión del Segmento anillo ( $L_e$ ) :  $8.4 \times 10^{-9}$  H
- Inductancia mutua estator-rotor ( $L_{\sigma}^{sr}$ ) :  $1.196 \times 10^{-3} \frac{K_u}{p^2} \text{Sen} \left( \frac{180}{14} u \right)$  H

#### 5.4 Selección de Armónicos significativos para el Análisis Transitorio

El procedimiento de solución se inicia con la selección del modelo o transformación adecuada y la elección se basa en el conocimiento de que armónicos están presentes y de sus interacciones.

Si empleamos el modelo  $\alpha - \beta$  los armónicos del estator y del rotor para una máquina trifásica son:

$$v = Km + l \quad y \quad v = H \frac{n}{p} + j$$

respectivamente.

La interacción estará presente para los armónicos comunes a las dos relaciones anteriores.

La magnitud de esta interacción armónico se determina mejor a partir de los cálculos en estado estable, además, como se dijo anteriormente, este tipo de interacción producirá los torques asíncronos armónicos.

Sin embargo, para cálculos del torque síncrono debido a la interacción de 2 armónicos  $v_1$  y  $v_2$ , se deberá de considerar el efecto combinado en estos dos.

El devanado estatórico de la máquina es de diseño estandar, en

el que no se ha intentado incrementar el contenido de armónicos, más del que se obtiene con un Diseño Práctico convencional.

Debido a que el devanado estatórico tiene un paso de bobina de  $5/6$ , los armónicos 5 y 7 son reducidos, por lo tanto, los armónicos estatóricos más importantes son los armónicos dentales son el armónico 11 y 13.

Con la configuración del devanado estatórico dada los torques armónicos asíncronos y síncronos dependerán entonces del número de barras rotóricas. Los rotores de las máquinas I, II y III tienen 46, 30 y 28 barras respectivamente.

Las tablas 1, 2 y 3 muestran la distribución de los armónicos de menor orden en los diferentes circuitos componentes.

Los armónicos rotóricos, los cuales interactúan con aquellos del estator están encerrados en un círculo.

Esta clasificación de armónicos dentro de los diferentes circuitos  $\alpha - \beta - 0$  componentes dadas en las tablas, nos proporciona un medio simple de identificar la interacción entre los armónicos. Ahora, no todos los armónicos son significativos, en realidad, muchos de los armónicos pueden ser ignorados. Los armónicos de más alto orden en particular tienen menor efecto en la mayoría de los casos. Basados en estas tablas y en la conexión del bobinado, una juiciosa eliminación de ciertos grupos de armónicos puede ser hecha por este procedimiento, el orden de las ecuaciones de la máquina para una razonable representación se podría mantener a un mínimo, previo conocimiento de como sería su solución.

Armónicos Estatóricos

$$v_i = Km + i \quad , \quad i = 1, 2, \dots, \frac{m-1}{2}$$

siendo:  $m = 3$  (Trifásico)

$$v_i = 3K + 1 \quad \sigma_j = +1$$

K	0	+1	-1	+2	-2	+3	-3	+4	-4	+5	-5	+6	-6	+7	-7	+8	-8	+9	-9
$v_1$	1	4	-2	7	-5	10	-8	13	-11	16	-14	19	-17	22	-20	25	-23	23	-26

+10	-10	+12	-12
31	-29	37	-35

Adicionalmente los armónicos dentales del estator son: dados por la expresión (4.1)

$$v = 12C \pm 1$$

C	1	2	3
+1	13	25	37
-1	11	23	35

Armónicos Rotóricos

$$v_j = H \frac{n}{p} + j \quad , \quad j = 1, 2, \dots, \frac{n-1}{2}$$

Máquina I:

$$v_j = 23H + j \quad j = 1, 2, \dots, 11$$

$$\sigma_j = +1$$



TABLA 1

H \ J	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	0
0	①	2	3	4	⑤	6	⑦	8	9	10	⑪	0
-1	22	21	20	⑲	18	⑰	16	15	14	⑬	12	23
1	24	25	26	27	28	⑲	30	⑳	32	33	34	23
-2	45	44	43	42	④	40	39	38	③	36	35	46

Máquina II

$$\boxed{v_j = 15H + j} \quad j = 1, 2, \dots, 7$$

$$q_j = +1$$

TABLA 2

H \ J	1	2	3	4	5	6	7	0
0	①	2	3	4	⑤	6	⑦	0
-1	14	⑬	12	⑪	10	9	8	15
1	16	⑰	18	⑲	20	21	22	15
-2	⑲	28	27	26	⑳	24	⑳	30
2	⑳	32	33	34	⑳	36	⑳	30

Máquina III

$$\boxed{v_j = 14H + j} \quad j = 1, 2, \dots, 7$$

$$q_j = +1$$

TABLA 3

H \ J	1	2	3	4	5	6	7	0
0	(1)	2	3	4	(5)	6	(7)	0
-1	(13)	12	(11)	10	9	8	7	17
1	15	16	(17)	18	(19)	20	21	14
-2	27	26	(25)	24	(23)	22	21	28
2	(29)	30	(31)	32	33	34	(35)	28
-3	(41)	40	39	38	(37)	36	35	12

Como resultado del analisis de estado estable, los armónicos mas significativos para la Máquina I son:

+1, -11, +13, -5, +7 en ese orden respectivamente. Desde que el rotor tiene 23 barras por par de polos. El armónico 23 no existe en este caso y el efecto del armónico 25 es equieño. De la tabla 1 se ve claramente que no existe acción síncrona entre los armónicos puesto que no existen dos armónicos que pertenescan al mismo juego.

Para la Máquina II, los armónicos importantes son el +1, -11 y +13. Desde que estos armónicos no pertenecen al mismo juego  $\alpha-\beta$ , la Máquina II no tiene mayores efectos síncronos.

Para la máquina III, los armónicos importantes son: +1, -11, 23, -5, +25, +7 y el +13. Note que dos o mas de estos armónicos aparecen en el mismo juego  $\alpha-\beta$  componente.



Los armónicos importantes considerados para la producción del torque sincrónico son: el +1, +13 y -11, + 25, ambos pares tienen su velocidad sincrónica de  $\frac{W}{7}$ . Este resultado es obtenido al aplicar las relaciones (4-3), (4-6) y (4-7)

#### 5.4.1 Análisis Transitorio

La solución transitoria puede ser obtenida resolviendo las ecuaciones diferenciales originales de fase abc ó en variables transformadas  $\alpha-\beta-0$ . Sin embargo, si solo el armónico dominante de cada juego  $\alpha-\beta$  es considerado, la solución transitoria también puede ser obtenida de las ecuaciones diferenciales de la máquina en variables d-q-o.

Aquí solo 1 aproximación ó modelo es usado (modelo d-q-o)

El esfuerzo computacional requerido por cada una de las tres aproximaciones es un indicativo de la simplificación obtenida por las transformaciones, aunque alguna simplificación podría ser aparente como es la reducción en el orden de las ecuaciones diferenciales.

A diferencia de la solución obtenida del modelo d - q, la solución de los modelos; el original de fases y el modelo  $\alpha-\beta-0$  envuelven el recálculo de la matriz de inductancias antes de resolver las ecuaciones para las corrientes en cada intervalo de tiempo, y porque debido a las altas frecuencias de las componentes, pequeños intervalos de tiempo deberán ser usados. Por otro lado, el efecto Skin es más fácil de ser considerado en el modelo d-q-o.

Refiriéndonos a la Tabla 1 para la máquina I, desde que todo juego componente  $\alpha-\beta$  contiene un solo armónico importante, el modelo d-q es aplicable.

El orden de los modelos; el original de fases, el modelo  $\alpha-\beta$  y el modelo d-q para la máquina I con los 5 primeros armónicos (+1, -11, +13, -5, +7) son 26, 12 y 12 respectivamente, se puede observar que el orden las ecuaciones en variables  $\alpha-\beta$  es el mismo que en d-q, pero la solución en  $\alpha-\beta$  obliga al recalculo de la matriz de inductancias en cada intervalo de tiempo, no siendo necesario esto cuando el modelo d-q es usado puesto que tiene una matriz de inductancias que es constante.

Para la máquina II, los armónicos importantes son: 1, 11 y 13 siendo el orden de los modelos original de fases, modelo  $\alpha-\beta$  y modelo d-q; 18, 8 y 8 respectivamente.

Se observa que si todos los armónicos son considerados el modelo  $\alpha-\beta$  se incrementa solo en 12. Este es un ejemplo de como la transformación suministra simplificación. En el caso de la máquina III, el modelo d-q no es conveniente por que existe interacción entre los armónicos importantes 1 y 13, los cuales pertenecen a el mismo juego  $\alpha-\beta$  componente.

Los requerimientos computacionales para la solución numérica del modelo de fases y del modelo  $\alpha-\beta$  son mayores, porque la matriz de inductancias debe ser recomputada antes de resolver para las corrientes en cada intervalo de integración. Siendo también posible de obtenerse la solución de las corrientes sin nece

sidad de computar la inversa de la matriz de inductancias, la computación sin embargo consume mucho tiempo.

El extenso rango de valores de los elementos en matriz de inductancia puede ser un problema, a menos que adecuadas técnicas de solución sean usadas. En este estudio es usado el método de Runge-Kutta y Predictor Colector con control de error, para la solución de las ecuaciones diferenciales.

### 5.5 Simulación en Computadora Digital

Se describe la simulación digital en estado transitorio de la máquina general de inducción de  $m$ - $n$  fases en la que se incluyen los efectos de los armónicos espaciales. En este punto solo usaremos el modelo  $d$ - $q$ - $0$  indicado en (5.1.3).

#### 5.5.1 Software de Solución

El Lenguaje de Programación empleado es el Fortran se hace uso de un Paquete Científico El 'S.S.P' (Souboutines Scientific Packet) de la cual se ha tomado una de las Subrutinas para la solución de un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden; nos referimos a la subrutina 'HPCG' que viene a ser el método modificado de Haming para el predictor-corrector.

Este es un procedimiento de integración de 4to orden que requiere de la evaluación del sistema de ecuaciones únicamente dos veces por intervalo. Otra ventaja es que en cada paso, el procedimiento de cálculo da una estimación para el error local.

Se hara uso también, de otra subrutina de este paquete, que es la subrutina 'MINV' para la inversión de Matrices. La cual emplea el método standard de Gauss-Jordan.

### Subrutina HPCG

#### Propósitos:

Resolver un sistema general de Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orde, con condiciones iniciales.

#### Manejo:

CALL HPCG (PRNT, y, DERY,NDIM,IHLF,FCF, OUTF, AUX)

Requiere de declaración externa para los parametros FCT y OUTF

#### Descripción de Parametros:

PRNT            Vector de entrada y salida con una dimensión igual o mayor que 5, el cual especifica los parametros del intervalo y el error requerido, ademas de servir para la comunicación entre la subrutina OUTF (diseñada por el usuario) y la subrutina HPCG. A excepción de PRNT(S). El resto de componentes no son destruídas por la subrutina HPCG y son

PRNT(1)        Límite inferior del intervalo (entrada)

PRNT(2)        Límite superior del intervalo (entrada)

PRNT(3)        Incremento de la variable independiente (entrada)

- PRNT(4) Error maxima (entrada) si el error absoluto es mayor - que PRNT(4), el incremento es dividido.  
Si el incremento es menor que PRINT(3) y el error absoluto es menor que PRNT(4)/50. El incremento es duplicado.  
El usuario puede cambiar PRNT(4) por medio de la subrutina OUTF.
- PRNT(5) No es parametro de entrada la subrutina HPCG inicializa PRNT(5) = 0. Si el usuario quiere terminar la subrutina HPCG en algun punto de salida. Se tendra que cambiar PRNT(5) a un valor diferente de cero por medio de la subrutina OUTF.
- Y Vector de entrada de valores iniciales (destruido) posteriormente y es el vector resultante de la variable dependiente.
- DERY Vector de entrada de errores ponderados (destruidos) la suma de sus componentes debera ser igual a 1. Posteriormente DERY es el vector de derivadas.
- NDIM Es un valor de entrada, el cual especifica el número de ecuaciones en el sistema.
- IHLF Es un valor de salida, el cual especifica el número de bisecciones del incremento inicial (paso de integración)  
Si IHLF llega a ser mayor que 10, la subrutina HPCG regresa con un mensaje de error IHLF=11 en el Programa -



principal los mensajes de error IHLF=12 ó IHLF=13 aparecen en el caso en que  $PRNT(3)=0$ . ó en el caso de que  $Signo (PRMT(3)) \cdot NE \cdot Signo (PRMT(2)) - PRMT(1)$  Respectivamente.

FCT El nombre de una subrutina externa usada esta compuesta de el lado derecho (DERY) de el sistema de ecuaciones dando valores de X y Y. Su lista de parámetros debe ser X,Y, DERY. La subrutina no debe destruir ó cambiar X ni Y

OUTP El nombre de una subrutina externa usada su lista de parámetros deben ser cambiados (excepto, si es necesario,  $PRMT(4)$ ,  $PRMT(5)$ ,,...) por la subrutina OUTP si  $PRNT(5)$  es cambiado a un valor diferente de cero la subrutina HPCG es terminada.

AUX Un vector auxiliar de almacenamiento con 16 filas y ND-IM columnas.

### Observaciones

El procedimiento termina y regresa programa que lo llamo, si

- (1) Mas de 10 bisecciones del intervalo inicial son necesarias para satisfacer el error especificado (Mensaje de error IHLF=11)
- (2) El incremento inicial (paso de integración) es igual a cero o tiene signo errado (mensaje de error IALF=12 ó IHLF=13)

- (3) Todo el intervalo de integración es acabado.
- (4) Cuando en la subrutina OUTF ha sido cambiado el valor de PRMT
- (5) a un valor diferente de cero.

Subrutina MINV

Propósito:

Invertir una matriz

Manejo

CALL MINV (A,N,D,L,M)

Descripción de parámetros:

- A Matriz de entrada, destruida en la computación reemplazada por la inversa resultante.
- N Orden de la matriz A
- D Determinante resultante
- L Vector de trabajo de longitud N
- M Vector de trabajo de longitud N

Subrutina Fabo

Es una subrutina del tipo real función tiene por finalidad calcular el factor de bobinado. El dato de entrada es el armónico.

$$K_v = \text{Sen}\left(v \frac{\pi}{2}\right) \text{Sen}\left(v P \frac{\pi}{n}\right) \frac{\text{Sen}\left(v q \frac{\gamma_r}{2}\right)}{q \text{Sen}\left(v \frac{\gamma_r}{2}\right)} \frac{\text{Sen}\left(v \frac{\beta_r}{2}\right)}{v \frac{\beta_r}{2}}$$

- P Paso de bobina/paso polar  
q Ranuras/ (polo x fase)  
 $\beta_r$  Ancho de la abertura de ranura en radianes  
 $\gamma_r$  Paso de ranura en radianes.

Estos parámetros son constantes para nuestro trabajo en particular, los que podrían ser modificados si se considera otro diseño estático.

### 5.5.2 Diagramas de Flujo

#### Modelo D-Q

El programa se inicia con la lectura de los datos para la máquina así como de los datos para la subrutina HPCG para la solución de las ecuaciones diferenciales.

Se lee el número de armónicos a considerar así como de cuales son: El número de armónicos nos permite saber el número de ecuaciones eléctricas ( $NEC=2+2 \times IA$ ) la que nos permitirá dimensionar de antemano las matrices  $[K]$ ,  $[L]$ ,  $[G]$  y  $[G1]$  (matrices cuadradas). Así como el número de ecuaciones diferenciales totales (considerando la ecuación mecánica) es  $(NEC+1)$  que es un dato para la subrutina HPCG.

A continuación en el programa son calculadas las inductancias y resistencias con las que se procede al llenado de las matrices.

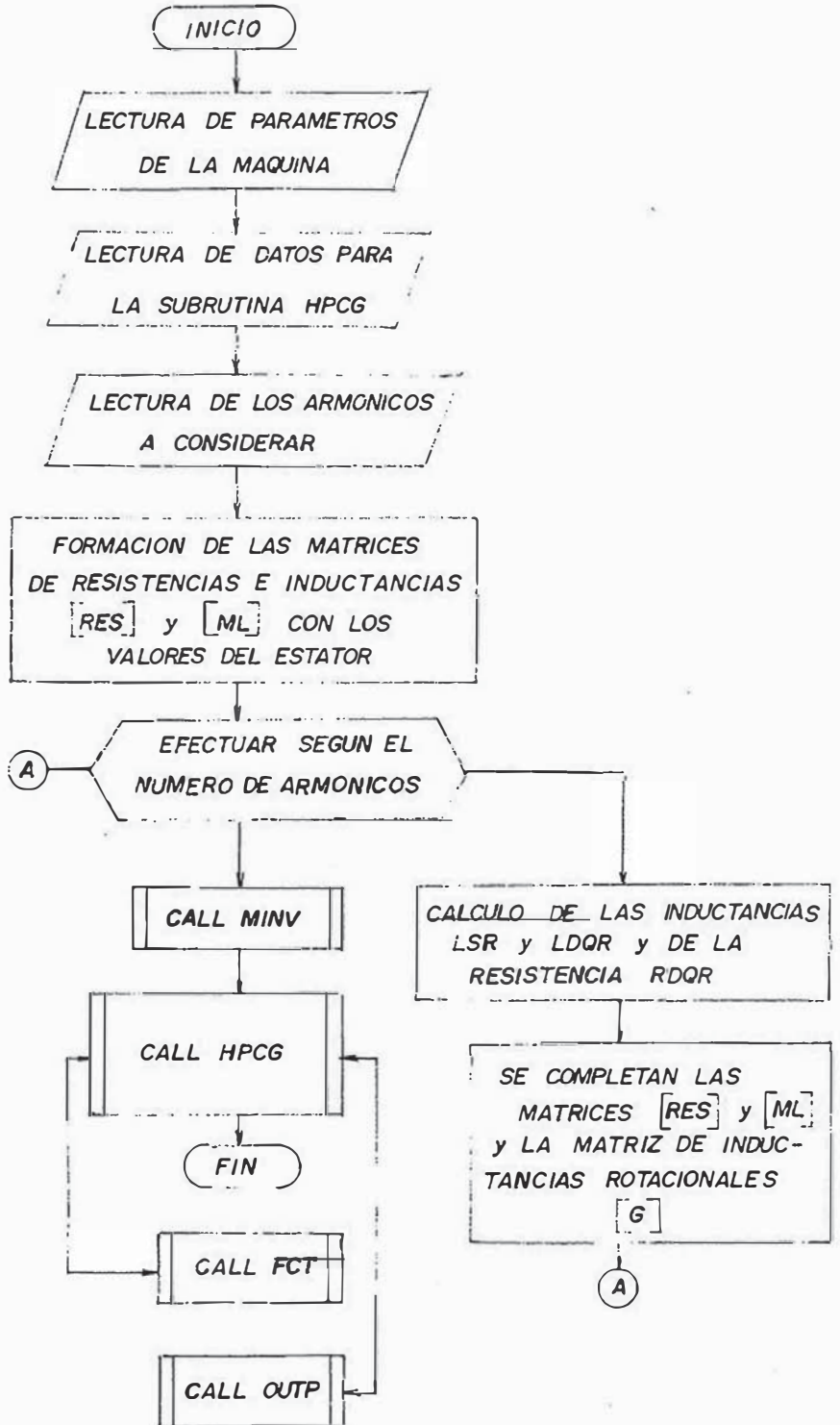
Como se indico anteriormente, ya que empleamos el modelo d-q-o la matriz de inductancias  $[L]$  deberá ser invertida una

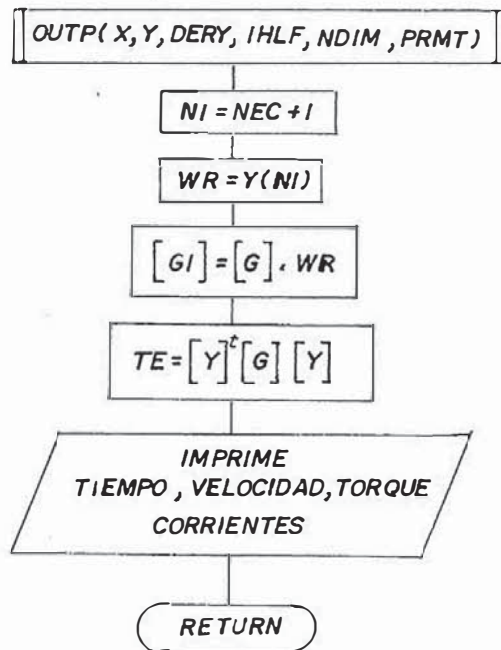
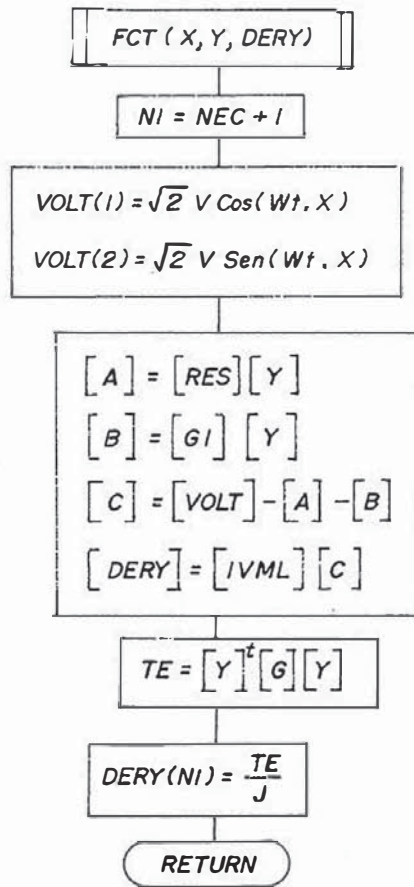


vez empleando la subrutina 'MINV' ya que esta matriz es independiente de la posición del rotor.

Finalmente se hace ingreso al paquete HPCG para la solución de las ecuaciones.

Observe que la matriz  $[G]$  (5-48) depende de la velocidad rotórica  $W_r$ , la cual es obtenida por integración de (5-41) al final de cada intervalo. Vease diagrama de flujo a continuación.





### 5.5.3 Organización de Datos

RB	Resistencia de barra en ohm (Rb)
RE	Resistencia del segmento de anillo en ohm (Re)
LB	Inductancia de dispersión de la ranura en (H)(Lb)
LE	Inductancia de dispersión del segmento del anillo en H. (Le)
F	Frecuencia en Hz.
NY	Número de vueltas por fase del devanado estatorico (N)
PAP	Pares de polos (P)
PO	Período básico (P <sub>0</sub> )
MOIN	Momentos de inercia en Kgr-m <sup>2</sup> (J)
NBR	Número de barras rotoricas por par de polos
V	Voltaje aplicado en voltios (V)
CS	Constante estatorica
CSR	Constante estator rotor
CR	Constante rotórica
NA	Número de armónico considerada
ARM (NA)	Vector de armónicos
PI	Constante igual a 3.1416 ( $\pi$ )
GRAPA	Opción de gráfico (si se desea graficar una variable en tonces GRAPA = 1)

YMIN	Valor mínimo de la variable a graficar
YMAX	Valor máximo de la variable a graficar
YSCAL	Factor de escala
YPR(11)	Vector de Escalas (Valores reales)
NYPR (11)	Vector de Escalas (Valores enteros)
NDIM	Número de ecuaciones diferenciales (NDIM=NEC+1)
PRMT (5)	Vector de entrada; especifica los parámetros del intervalo y el error.
Y(NDIM)	Vector de condiciones iniciales
DERY(NDIM)	Vector de errores ponderados
AUX(16,NDIM)	Matriz auxiliar
NEC	Número de ecuaciones diferenciales eléctricas (NEC=2+2*NA)
SIGMA	Signo del armónico
COUNT	Contador
LS	Inductancia estática en (H)
LSR	Inductancia estator-rotor en (H)
LDQR	Inductancia rotórica en (H)
RDQR	Resistencia rotórica en (Ohm)
VOLT(NEC)	Vector de voltajes
RES(NEC,NEC)	Matriz de resistencias
ML (NEC,NEC)	Matriz de inductancias
G (NEC,NEC)	Matriz de inductancias rotacionales
G1 (NEC,NEC)	G (NEC,NEC)*WR
IVML (NEC,NEC)	Inversa de la matriz de inductancias (ML)
AUX 1 (NEC), AUX 2 (NEC)	Vectores de trabajo para la subrutina MINV
A(NEC), B(NEC), C(NEC)	Vectores auxiliares para la subrutina FTC
X	Tiempo en segundos (t)
T <sub>E</sub>	Torque eléctrico total en N-m (T)
TT1	Torque eléctrico producido por el fundamental en (N-m)

TT2            Torque eléctrico producido por un armónico en (N-m)  
ISA, ISB, ISC    Corrientes estáticas en (Amp)  
IRA, IRB        Corrientes rotóricas en (Amp)  
WR              Velocidad rotórica en (rad/seg)  
VAR             Variable a graficar puede ser  $T_E$ , ISA, IRA, WR, ... etc

Nota: Antes de usar la opción de gráfica el programa deberá ser corrido sin graficar, para así obtener los valores de YMIN, YMAX y YSCAL.

#### Hardware Usado

El sistema usado fue IBM modelo 4341 con el sistema operativo VM/CMS y OS/VS1 del Centro de Cómputo de la Universidad Nacional de Ingeniería.

## 5.6 Resultados

Para la máquina I se muestra en la figura (8) la curva de torque vs velocidad obtenida con el modelo d-q. En este caso el torque viene a ser el torque resultante debido al fundamental y todos los armónicos.

En esta misma figura se muestra también la característica de torque producida para la componente fundamental.

Como se puede observar, los armónicos ejercen notable influencia sobre la amplitud del torque resultante, siendo los más importantes el 11 y 13 cuyas características de torque son mostradas en la figura (9).

Los armónicos 5 y 7 son similares a los armónicos 11 y 13 pero de pequeña magnitud y ocurren a diferentes velocidades síncronas.

La corriente estatórica es mostrada en la figura (10) y se observa que decrece hasta un valor constante, es decir hasta su valor de magnetización, cuando la velocidad síncrona es alcanzada.

En las figuras (11) y (12), se tiene la componente fundamental y el armónico 13 de la corriente rotórica obtenidas con el modelo d-q. Como se ve ellos se reducen a cero para sus respectivas velocidades de sincronismo. Se observa también que a la velocidad de sincronismo de la corriente rotórica fundamental ésta se reduce a cero, mientras que la corriente armónica no.

Los resultados para la máquina II son similares a los obtenidos para la máquina I como se muestra en las figuras (13), (14) y



(15) pero con la diferencia que para esta máquina existe poca influencia de los torques asíncronos armónicos y ninguna influencia de torques síncronos, por lo que este viene a ser el diseño recomendado.

Para la máquina III se tiene que el modelo que debería ser usado es el modelo bifásico, y esto como consecuencia de la existencia de interacción armónica como se deduce de la tabla 3.

Ya que el uso del modelo bifásico implica el recómputo de la inversa de la matriz de inductancias en cada intervalo de tiempo de integración y siendo los valores de las inductancias de extenso rango esto exige de un método de inversión de matriz que no arroje mucho error y de la necesidad de considerar intervalos de integración muy pequeños, todo esto haría que el esfuerzo computacional aumente considerablemente, por lo que este cálculo no será llevado a cabo.

Sin embargo, si la interacción armónica indicada por la tabla 3 es ignorada y el modelo d-q es usado para su representación, la característica torque vs velocidad será obtenida fácilmente como se muestra en la fig. (16) pero deberá tomarse este resultado con sumo cuidado por cuanto discreparía significativamente del resultado real. De lo que se concluye que el efecto de la interacción armónica (torques síncronos) no debe ser ignorada.



## CONCLUSIONES

- Un modelo matemático de un motor de inducción de entrehierro - uniforme y de m-n fases ha sido desarrollado usando la aproximación de circuitos acoplados.
- El modelo es aplicable tanto para el motor de rotor jaula de ardilla como el motor de rotor bobinado. Así como es aplicable a un motor de rotor jaula de ardilla con un número no entero de barras por par de polos.
- Es establecida una formulación general de la transformación polifasia a bifásica (dos-ejes) y cuando la transformación polifásica ha  $\alpha-\beta-0$  es aplicada a una máquina de inducción general de m-n fases, agrupa a los armónicos con posible interacción entre ellos. Cada grupo de armónicos está relacionado con un juego de componentes
- Los resultados de la transformación muestran porque la común a sunción de que los armónicos rotoricos de un motor de inducción jaula de ardilla pueden ser representados por circuitos independientes, no es del todo válida.
- Desde que cada juego de  $\alpha-\beta$  componentes contienen más de un armónico, en general, la transformación a ejes  $d-q$  no produciría toda la simplificación que se esperaría, esto porque considerando el voltaje de entrada se crearía un gran pro

blema el separar los armónicos de voltaje, si la transformación d-q es intentada de ser aplicada.

- La transformación d-q facilita el problema siempre y cuando en cada componente  $\alpha-\beta$  se considera solo un armónico. Esto es si todos los armónicos diferentes del dominante son ignorados.
- Se concluye que todo par de armónicos los cuales producen acción síncrona pertenecen al mismo juego  $\alpha-\beta$  componente y viceversa.
- Los ejemplos muestran que es fácil identificar los armónicos con posible interacción, calculando la velocidades sincronismo y determinando, empleando el estudio en estado estable, los armónicos importantes que deben ser considerados.
- En ciertos casos como ocurre con la máquina II se muestra que el modelo  $\alpha-\beta-0$  puede ser mas simple que el modelo de fases.
- Aunque el modelo de fases es aplicable a todas las situaciones, su solución demanda mayor esfuerzo computacional, y podría obtenerse una considerable economía en esfuerzo computacional siempre que sea posible usar el modelo  $\alpha-\beta-0$  o el modelo d-q, especialmente este último, en el caso en que solo los torques asíncronos sean los únicos existentes y no haya mayores efectos síncronos.

## BIBLIOGRAPHIA

1. Fudeh, H.R. and Ong, C.M.,  
"Modeling and Analysis of Induction Machines Containing Space Harmonics, Part I : Modeling and Transformation,"  
IEEE Trans., Power Apparatus and Systems. Vol. PAS-102, August 1983, pp. 2608-2615  
Part II : "Analysis of Asynchronous and Synchronous Actions," pp. 2616-2620  
Part III : "Three-Phase Cage Rotor Induction Machines," pp. 2621-2628
2. Dreesse, E.,  
"Synchronous Motor Effect in Induction Machine"  
AIEE Trans., Vol. 49, 1930, pp. 1033-1040
3. Nasar, N.A.,  
"Electromagnetic Energy conversion in n-m-winding Double Cylindrical Structure in Presence of Space Harmonics"  
IEEE trans. Power Apparatus and Systems. Vol. PAS-87, 1968, pp. 1099-1106.
4. Koopman, R.J.M. and Trutt, F.C., "Direct Simulation of AC Machinery Including Third Harmonic Effects"  
IEEE Trans. Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-85, 1969, pp. 1099-1106.
5. Devis, J.H. and Novotny D.S.,  
"Equivalent Circuits for Single-Phase Square-Wave Induction Machines with both Odd and Even Order Harmonics,"  
IEEE Trans., Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-

6. Barton, T.H., and Dunfield, J.C.  
"Inductances of a Practical Slip-Ring Primitive I-  
an Analitical Study",  
IEEE Trans., Power Apparatus and Systems, Vol. Pas-  
87, 1969, pp. 1080-1085.
  7. Asisa K. de Sarkar and Gunnar J.B.  
"Digital Simulation of Three-Phase Induction Motors"  
IEEE Trans., Power Apparatus and Systems, Vol. Pas-  
89, 1970, pp. 1031-1037.
  8. White, D.C. and Woodson, H.H.,  
"Electromechanical Energy Conversion", John Wiley,  
New York, 1959 .
  9. Jones, C.V., "The Unified Theory of Electrical Machi-  
nes", Butterworths, London.
  10. A.V. Ivanov-Smolenski, "Máquinas Eléctricas" Tomos  
I, II y III Editorial MIR, 1984.
  11. M.P. Kostenko, L.M. Piotrovski  
"Máquinas Eléctricas" , Tomo II , Editorial MIR, 1976
  12. Say, M.G.  
"Alternating Current Machines, John Wiley, New York  
1978.
  13. Pando, B.V.  
"Análisis del Funcionamiento Síncrono y Asíncrono  
de las Máquinas de Inducción"  
Tesis de Grado.
-