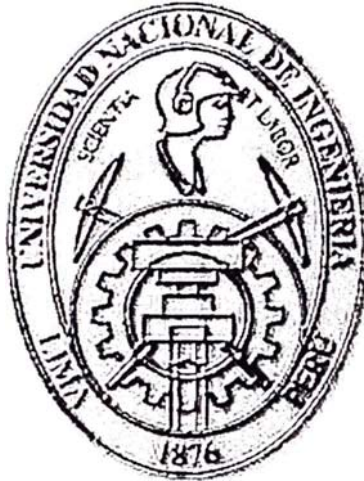


UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE FÍSICA



INFORME DE SUFICIENCIA
PARA OPTAR AL TÍTULO PROFESIONAL DE
LICENCIADO EN FÍSICA

TITULADO

***“MOVIMIENTO DE UNA PARTÍCULA EN EL
CAMPO GRAVITATORIO PRODUCIDO POR UNA
MASA DISTRIBUIDA UNIFORMEMENTE EN UN
ANILLO”***

PRESENTADO POR:

EDWIN MOHENIR BORDA MEZA

LIMA – PERÚ

2006

Dedicado a

Mis padres, hermanos y mi esposa

Agradecimientos

Agradezco a mi asesor Magíster Edgar Vidalon por ofrecerme este tema, por su constante orientación y ayuda en el desarrollo del presente informe.

Asimismo a la Lic. Alejandra Altamirano por su apoyo en la realización de programas de computación en Borland Delphi 6.0.

Indice

Introducción	1
1. Movimiento de una partícula alrededor de un anillo.....	2
1.1 Introducción	3
1.2 Cálculo del potencial gravitatorio producido por una masa distribuida uniformemente en un anillo	3
1.3 Cálculo de la fuerza gravitatoria ejercida por el anillo sobre la partícula	8
1.4 Ecuaciones diferenciales ordinarias de movimiento adimensionales de la partícula	9
1.5 Ecuación de la energía mecánica adimensional.....	11
2. Resolución numérica de las ecuaciones de movimiento de una partícula alrededor del anillo.....	13
2.1 Introducción.....	14
2.2 Solución numérica de las ecuaciones diferenciales ordinarias de movimiento de la partícula.....	14
2.3 Resultados.....	16
3. Movimiento de una partícula alrededor de dos anillos	42
3.1 Introducción.....	43
3.2 Ecuaciones diferenciales del movimiento de una partícula alrededor de dos anillos.....	43
3.3 Ecuaciones diferenciales ordinarias de movimiento adimensionales.....	45
3.4 Ecuación de la energía mecánica adimensional.....	47
3.5 Solución numérica de las ecuaciones diferenciales ordinarias de movimiento de la partícula alrededor de los dos anillos.....	49
3.6 Resultados.....	51
4. Conclusiones	67
4.1 Movimiento de una partícula alrededor de un anillo	68
4.2 Movimiento de una partícula alrededor de dos anillos.....	69
Apéndice 1	70
Apéndice 2	74
Apéndice 3	77
Apéndice 4	78
Bibliografía	81

Introducción

Desde el comienzo de la humanidad, uno de los problemas más fascinantes que ha enfrentado el hombre ha sido predecir el movimiento de los cuerpos celestes. La mecánica de Newton nos ha proporcionado las herramientas necesarias para resolver estos problemas: sin embargo, la solución de éstos mediante fórmulas simples se obtiene solamente para una cantidad muy limitada, debido a que las leyes de movimiento nos conducen a un sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden. Este sistema de ecuaciones es simple, por ejemplo, en el caso del movimiento de dos partículas sometidas a su fuerza de gravedad. Este problema fue resuelto analíticamente en el siglo XVII y nos ha permitido establecer un modelo mecánico muy simple para describir adecuadamente el movimiento de los satélites alrededor de un planeta. Es evidente que en este caso se considera que el planeta y sus satélites tienen simetría esférica.

En una situación real, el planeta no tiene simetría esférica, como en el caso del planeta Saturno. Por lo que la descripción del movimiento de los satélites alrededor de Saturno se complica porque:

- es muy difícil expresar el potencial gravitatorio del planeta en términos de funciones elementales.
- aunque se determine el potencial gravitatorio se tienen que resolver ecuaciones diferenciales de movimiento *no lineales y acopladas*.

Por estas razones durante el siglo XIX y gran parte del siglo XX se determinan las trayectorias de los satélites mediante la *teoría de perturbaciones*. Sin embargo, gracias al avance de la computación, ahora podemos determinar estos movimientos usando simplemente la segunda ley de Newton, haciendo previamente la expansión de términos del potencial gravitatorio y considerando los primeros términos.

El objetivo del presente informe es estudiar el caso particular del movimiento bidimensional de una partícula alrededor de un anillo en reposo que representa a Saturno.

A pesar de que la distribución de masa es geoméricamente simple nos obligará a determinar el potencial gravitatorio mediante una serie de *polinomios de Legendre*. Una vez obtenidas las ecuaciones diferenciales ordinarias de movimiento, se resolverán utilizando el método numérico de *Runge-Kutta*. Los parámetros considerados (masa del anillo y el radio del anillo) serán los del planeta Saturno y las condiciones iniciales de la partícula serán del orden de magnitud de la distancia y rapidez de sus satélites. Como un caso más general se analizará el movimiento de una partícula alrededor de dos anillos que se encuentran fijos.

Se espera que el presente trabajo se considere como punto de referencia para determinar movimiento de partícula en problemas reales, como el movimiento de una partícula (caso tridimensional) alrededor de un cuerpo elipsoidal.

1. Movimiento de una partícula alrededor de un anillo

- 1.1 Introducción.**
- 1.2 Cálculo del potencial gravitatorio producido por una masa distribuida uniformemente en un anillo.**
- 1.3 Cálculo de la fuerza gravitatoria ejercida por el anillo sobre la partícula**
- 1.4 Ecuaciones diferenciales ordinarias de movimiento adimensionales.**
- 1.5 Ecuación de la energía mecánica adimensional.**

1.1 Introducción

En este capítulo se hallan las ecuaciones diferenciales ordinarias de movimiento de la partícula. Previamente expresaremos el potencial gravitatorio del anillo por una integral y mediante la función generatriz de los polinomios de Legendre se obtendrá el potencial gravitatorio expresado mediante una serie. Consideramos los cinco primeros términos no nulos de esta expansión para obtener las ecuaciones.

En el planteamiento del problema se han realizado las siguientes consideraciones:

- El anillo está fijo con centro en el origen de coordenadas.
- La velocidad inicial y el vector de posición inicial de la partícula se encuentran contenidos en el mismo plano que contiene al anillo.
- El sistema formado por el anillo y la partícula se encuentra aislado de toda influencia exterior.
- La masa de la partícula es muy pequeña en comparación de la masa del anillo.
- El movimiento se efectúa en el vacío.
- La rapidez de la partícula es pequeña en comparación a la rapidez de la luz.

Nos centraremos en el caso que la trayectoria realizada por la partícula sea exterior a la circunferencia del anillo.

1.2 Cálculo del potencial gravitatorio producido por una masa distribuida uniformemente en un anillo

Consideremos una partícula de masa m que se encuentra ubicada en el punto P , en la parte externa de una masa M distribuida uniformemente en una circunferencia de radio R , tal como se muestra en la siguiente figura:

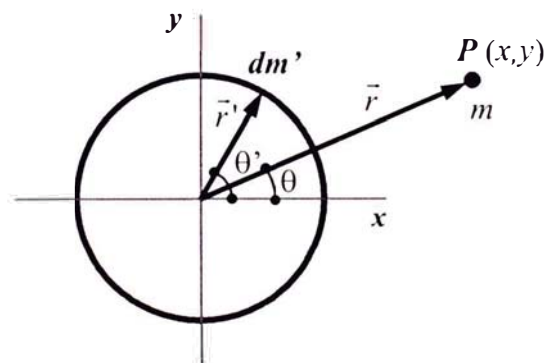


Figura 1.1

Para hallar el potencial gravitatorio del anillo de masa M y radio R en el punto P de coordenadas (x,y) , consideremos la contribución infinitesimal al potencial gravitatorio, dU , de una masa infinitesimal, dm' , que pertenece al anillo:

$$dU = -\frac{G dm'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (1.1)$$

De la figura 1.1 observamos que:

$$\vec{r} = x \vec{i} + y \vec{j} \quad (1.2)$$

$$\vec{r}' = x' \vec{i} + y' \vec{j} \quad (1.3)$$

De las ecuaciones (1.2) y (1.3) obtenemos:

$$\vec{r} - \vec{r}' = (x - x') \vec{i} + (y - y') \vec{j} \quad (1.4)$$

Por lo tanto:

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = [(x - x')^2 + (y - y')^2]^{1/2} \quad (1.5)$$

Reemplazando en la ecuación (1.1):

$$dU = -\frac{G dm'}{[(x - x')^2 + (y - y')^2]^{1/2}} \quad (1.6)$$

Esta contribución se puede escribir en coordenadas polares, teniendo en cuenta las siguientes expresiones:

$$\vec{r} = r \cos \theta \vec{i} + r \sin \theta \vec{j} \quad (1.7)$$

$$\vec{r}' = R \cos \theta' \vec{i} + R \sin \theta' \vec{j} \quad (1.8)$$

De las ecuaciones (1.7) y (1.8) tenemos:

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = [(r \cos \theta - R \cos \theta')^2 + (r \sin \theta - R \sin \theta')^2]^{1/2} \quad (1.10)$$

Simplificando la ecuación (1.10) obtenemos:

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = [r^2 + R^2 - 2rR(\cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta')]^{1/2}$$

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = [r^2 + R^2 - 2rR \cos(\theta' - \theta)]^{1/2} \quad (1.11)$$

Teniendo en cuenta que la masa del anillo está distribuida uniformemente a lo largo de su longitud, tenemos que la densidad lineal de masa λ está definida por:

$$\lambda \equiv \frac{dm'}{dl'} \quad (1.12)$$

Y como la densidad lineal de masa es constante:

$$\lambda = \frac{M}{L} \quad (1.13)$$

Además se puede notar que la longitud de la circunferencia es:

$$L = 2\pi R \quad (1.14)$$

La longitud de arco infinitesimal, dl' , donde está el diferencial de masa, dm' , se relaciona con el diferencial del ángulo central que subtiende, expresado en radianes, $d\theta'$, mediante:

$$dl' = R d\theta' \quad (1.15)$$

Obteniendo:

$$dm' = \frac{M}{2\pi} d\theta' \quad (1.16)$$

De las ecuaciones (1.6), (1.11) y (1.16) el dU en coordenadas polares es:

$$dU = -\frac{GM}{2\pi [r^2 + R^2 - 2rR \cos(\theta' - \theta)]^{1/2}} d\theta' \quad (1.17)$$

Para obtener el potencial gravitatorio, debemos sumar todas las contribuciones infinitesimales, obteniendo así:

$$U(r, \theta) = -\frac{GM}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta'}{[r^2 + R^2 - 2rR \cos(\theta' - \theta)]^{1/2}} \quad (1.18)$$

El proceso de integración es muy difícil, salvo que se efectúe por métodos numéricos para r y θ determinados, pero podemos realizar una expansión en serie mediante los polinomios de Legendre.

Nos limitaremos al caso del movimiento de la partícula en la región exterior al anillo, es decir, consideremos que para todo instante de tiempo $\frac{R}{r} < 1$, por lo que la ecuación (1.18) se puede escribir así:

$$U(r, \theta) = -\frac{GM}{2\pi r} \int_0^{2\pi} \left[1 + \frac{R^2}{r^2} - \frac{2R}{r} \cos(\theta' - \theta) \right]^{-1/2} d\theta' \quad (1.19)$$

Recordando una de las propiedades de los polinomios de Legendre $P_n(x)$, tenemos:

$$\frac{1}{(1 - 2t \cos \theta + t^2)^{1/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \theta) t^n, \text{ si } t < 1 \quad (1.20)$$

Reemplazando en la ecuación (1.19) se obtiene:

$$U(r, \theta) = -\frac{GM}{2\pi r} \int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos(\theta' - \theta)) \left(\frac{R}{r}\right)^n d\theta' \quad (1.21)$$

Que se puede escribir como:

$$U(r, \theta) = -\frac{GM}{2\pi r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^n \int_0^{2\pi} P_n(\cos(\theta' - \theta)) d\theta' \quad (1.22)$$

La integral definida contiene a los polinomios de Legendre, por lo que se pueden calcular algunos términos. Para simplificar la notación definimos:

$$a_n \equiv \int_0^{2\pi} P_n(\cos(\theta' - \theta)) d\theta' \quad (1.23)$$

Luego el potencial gravitatorio se puede expresar como:

$$U(r, \theta) = -\frac{GM}{2\pi r} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{R}{r}\right)^n$$

Por lo tanto:

$$U(r, \theta) = -\frac{GmM}{2\pi r} \left(a_0 + a_1 \frac{R}{r} + a_2 \frac{R^2}{r^2} + a_3 \frac{R^3}{r^3} + a_4 \frac{R^4}{r^4} + \dots \right) \quad (1.24)$$

En el apéndice 1 (ver pág. 70) se realiza el cálculo de estos coeficientes cuyos resultados se presentan en la tabla siguiente:

Tabla 1.1

a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
2π	0	$\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{9\pi}{32}$	0	$\frac{25\pi}{128}$	0	$\frac{1225\pi}{8192}$

En la tabla anterior se observa que los coeficientes a_n no dependen del ángulo θ . Este resultado es evidente por la geometría del problema.

Luego el potencial gravitatorio está dado por la serie:

$$U(r) = -\frac{GM}{r} \left(1 + \frac{1}{4} \frac{R^2}{r^2} + \frac{9}{64} \frac{R^4}{r^4} + \frac{25}{256} \frac{R^6}{r^6} + \frac{1225}{16384} \frac{R^8}{r^8} + \dots \right) \quad (1.25)$$

Si el movimiento de la partícula está restringido a valores de $r > 1,5R$, es fácil probar que el quinto término no nulo de la serie es menor que el 0,30% del primer término no nulo.

Por lo tanto, consideramos que es suficiente tomar los cinco primeros términos diferentes de cero de la serie, de tal manera que el potencial gravitatorio se puede expresar por:

$$U(r) = -GM \left(r^{-1} + \frac{1}{4} R^2 r^{-3} + \frac{9}{64} R^4 r^{-5} + \frac{25}{256} R^6 r^{-7} + \frac{1225}{16384} R^8 r^{-9} \right) \quad (1.26)$$

1.3 Cálculo de la fuerza gravitatoria ejercida por el anillo sobre la partícula

Ahora que conocemos el potencial gravitatorio producido por el anillo de masa distribuida uniformemente es posible determinar la energía potencial gravitatoria de la partícula, $E_p(r)$ de masa m , así:

$$E_p(r) = mU(r) \quad (1.27)$$

El movimiento de la partícula se realiza en un campo gravitatorio cuya energía potencial depende solamente de la distancia entre la partícula y el centro del anillo r . Este campo gravitatorio es *central*.

La fuerza gravitatoria que le ejerce el anillo a la partícula de masa m está dada por:

$$\vec{F} = -\text{grad } E_p(r) = -\nabla E_p(r) \quad (1.28)$$

Es decir:

$$\vec{F} = -m\nabla U(r) \quad (1.29)$$

Por otra parte usando la identidad:

$$\nabla r^n = n r^{n-2} \vec{r} \quad (1.30)$$

Obtenemos la tabla siguiente:

Tabla 1.2

N	-1	-3	-5	-7	-9
∇r^n	$-\frac{1}{r^3} \vec{r}$	$-\frac{3}{r^5} \vec{r}$	$-\frac{5}{r^7} \vec{r}$	$-\frac{7}{r^9} \vec{r}$	$-\frac{9}{r^{11}} \vec{r}$

Aplicando la función gradiente a cada uno de los términos de la energía potencial gravitatoria y utilizando los resultados de la tabla 1.2 se obtiene:

$$\vec{F} = -GmM(r^{-3} + \frac{3}{4}R^2 \cdot r^{-5} + \frac{45}{64}R^4 r^{-7} + \frac{175}{256}R^6 r^{-9} + \frac{11025}{16384}R^8 r^{-11})\vec{r} \quad (1.31)$$

donde M es la masa del anillo que como se mencionó anteriormente se considera fijo.

Es evidente que la fuerza gravitatoria tiene un módulo que solamente es una función de r y su dirección en cada punto es opuesta a la del vector de posición \vec{r} .

Dado que la partícula se mueve en un *campo central* su momento angular L respecto al centro del anillo se conserva. Esto significa que, durante todo el movimiento, el vector de posición de la partícula permanece en un mismo plano perpendicular a L . Es decir, la trayectoria de la partícula se encuentra contenida en un plano.

De acuerdo a la *teoría del movimiento de una partícula en un campo central*^[1], la partícula podría efectuar dos tipos de movimientos:

- 1º. Uno en el que la región de posible variación de r está limitada por la condición $r \geq r_{min}$. Es decir, la distancia entre la partícula y el centro del anillo alcanza un valor mínimo. En este caso el movimiento de la partícula es infinito: Su trayectoria comienza y termina en el infinito.
- 2º. Otro en el que la región de posible variación de r tenga dos límites r_{min} y r_{max} . Es decir, la distancia entre la partícula y el centro del anillo está acotado entre dos valores, un máximo y un mínimo. El movimiento de la partícula es finito, y la trayectoria está contenido enteramente en el interior de una corona limitada por las circunferencias $r = r_{min}$ y $r = r_{max}$.

En el presente informe estudiaremos el segundo tipo de movimiento de la partícula, pues consideramos que este tipo de movimiento es más interesante.

1.4 Ecuaciones diferenciales ordinarias de movimiento adimensionales de la partícula

Aplicando la segunda ley de Newton:

$$F = m \vec{r} \quad (1.32)$$

De las ecuaciones (1.31) y (1.32) tenemos:

$$\ddot{\vec{r}} = -GM(r^{-3} + \frac{3}{4}R^2 \cdot r^{-5} + \frac{45}{64}R^4 r^{-7} + \frac{175}{256}R^6 r^{-9} + \frac{11025}{16384}R^8 r^{-11})\vec{r} \quad (1.33)$$

Expresando la ecuación (1.33) en términos de sus componentes rectangulares, obtenemos:

$$\ddot{x} = -GM(r^{-3} + \frac{3}{4}R^2 \cdot r^{-5} + \frac{45}{64}R^4 r^{-7} + \frac{175}{256}R^6 r^{-9} + \frac{11025}{16384}R^8 r^{-11})x \quad (1.34)$$

$$\ddot{y} = -GM(r^{-3} + \frac{3}{4}R^2 \cdot r^{-5} + \frac{45}{64}R^4 r^{-7} + \frac{175}{256}R^6 r^{-9} + \frac{11025}{16384}R^8 r^{-11})y \quad (1.35)$$

La resolución de este sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden nos permite determinar las coordenadas de la partícula de masa m y por consiguiente la trayectoria que realiza.

Este sistema de ecuaciones es no lineal y acoplado. Por lo tanto no podemos determinar una expresión analítica para las componentes rectangulares de la posición de la partícula en función del tiempo. El método numérico de Runge-Kutta de cuarto orden es el método apropiado para resolver el sistema de ecuaciones.

Para una mayor facilidad en el análisis del problema escribiremos las ecuaciones diferenciales ordinarias en forma adimensional. Para obtener estas ecuaciones definimos:

$x^* \equiv \frac{x}{R}$	$y^* \equiv \frac{y}{R}$	$t^* \equiv \frac{t}{\gamma}$
--------------------------	--------------------------	-------------------------------

donde R es el radio del anillo y $\gamma = 1,00 \text{ día} = 8,64 \times 10^4 \text{ s}$. De esta manera los valores de x^* e y^* (o $r^* = \sqrt{x^{*2} + y^{*2}}$) significan distancias medidas en radios del anillo, así como t^* expresa el tiempo medido en días.

Además de la definición:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow r = R \cdot r^* \quad r'' = R'' \cdot r^{*''} \quad (1.36)$$

Asimismo podemos hallar las componentes rectangulares de la velocidad y aceleración adimensionales:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{R}{\gamma} \frac{dx^*}{dt^*} \quad ; \quad \frac{dy}{dt} = \frac{R}{\gamma} \frac{dy^*}{dt^*} \quad (1.37)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{R}{\gamma^2} \frac{d^2x^*}{dt^{*2}} \quad ; \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{R}{\gamma^2} \frac{d^2y^*}{dt^{*2}} \quad (1.38)$$

Reemplazando las ecuaciones (1.36), (1.37) y (1.38) en las ecuaciones (1.34) y (1.35) obtenemos las siguientes ecuaciones diferenciales adimensionales:

$$\ddot{x}^* = -\frac{GM\gamma^2}{R^3} \left(\frac{1}{r^{*3}} + \frac{3}{4} \frac{1}{r^{*5}} + \frac{45}{64} \frac{1}{r^{*7}} + \frac{175}{256} \frac{1}{r^{*9}} + \frac{11025}{16384} \frac{1}{r^{*11}} \right) x^* \quad (1.39)$$

$$\ddot{y}^* = -\frac{GM\gamma^2}{R^3} \left(\frac{1}{r^{*3}} + \frac{3}{4} \frac{1}{r^{*5}} + \frac{45}{64} \frac{1}{r^{*7}} + \frac{175}{256} \frac{1}{r^{*9}} + \frac{11025}{16384} \frac{1}{r^{*11}} \right) y^* \quad (1.40)$$

Considerando que la masa y el radio del anillo circular corresponden al planeta Saturno, obtenemos para la constante:

$$\frac{GM\gamma^2}{R^3} = \frac{6,67 \times 10^{-11} \cdot 5,69 \times 10^{26} \cdot (8,64 \times 10^4)^2}{(6,03 \times 10^7)^3} = 1290 \quad (1.41)$$

Reemplazando la ecuación (1.41) en las ecuaciones (1.39) y (1.40):

$$\ddot{x}^* = -1290\left(\frac{1}{r^{*3}} + \frac{3}{4} \frac{1}{r^{*5}} + \frac{45}{64} \frac{1}{r^{*7}} + \frac{175}{256} \frac{1}{r^{*9}} + \frac{11025}{16384} \frac{1}{r^{*11}}\right)x^* \quad (1.42)$$

$$\ddot{y}^* = -1290\left(\frac{1}{r^{*3}} + \frac{3}{4} \frac{1}{r^{*5}} + \frac{45}{64} \frac{1}{r^{*7}} + \frac{175}{256} \frac{1}{r^{*9}} + \frac{11025}{16384} \frac{1}{r^{*11}}\right)y^* \quad (1.43)$$

Comparando las ecuaciones (1.42) y (1.43) con (1.39) y (1.40) observamos que los coeficientes de las potencias de $\frac{1}{r^*}$ son los mismos que las de las potencias de $\frac{1}{r}$.

1.5 Ecuación de la energía mecánica adimensional

La fuerza resultante que actúa sobre la partícula es conservativa. Por lo tanto, la energía mecánica de la partícula se mantiene constante. Para comprobar que los cálculos que se efectuarán son correctos, se hallará una nueva constante de movimiento: la energía mecánica adimensional. Es evidente que esta cantidad depende de x^* e y^* (o r^*), así como de \dot{x}^* e \dot{y}^* .

La energía cinética de la partícula está dada por:

$$E_k \equiv \frac{1}{2} m \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 \right] \quad (1.44)$$

Utilizando la ecuación (1.37) en la ecuación (1.44), obtenemos:

$$E_k \equiv \frac{1}{2} \frac{mR^2}{\gamma^2} \left[\left(\frac{dx^*}{dt^*} \right)^2 + \left(\frac{dy^*}{dt^*} \right)^2 \right] \quad (1.45)$$

Que se puede escribir como:

$$E_k \equiv \frac{1}{2} \frac{mR^2}{\gamma^2} (\dot{x}^{*2} + \dot{y}^{*2}) \quad (1.46)$$

A partir de las ecuaciones (1.26) y (1.27) tenemos que la energía potencial gravitatoria de la partícula es:

$$E_p(r) = -GmM \left(r^{-1} + \frac{1}{4} R^2 \cdot r^{-3} + \frac{9}{64} R^4 r^{-5} + \frac{25}{256} R^6 r^{-7} + \frac{1225}{16384} R^8 r^{-9} \right) \quad (1.47)$$

Utilizando la ecuación (1.37) en la ecuación (1.47), obtenemos:

$$E_p = -GmM \left(r^{*-1} + \frac{1}{4} r^{*-3} + \frac{9}{64} r^{*-5} + \frac{25}{256} r^{*-7} + \frac{1225}{16384} r^{*-9} \right) \quad (1.48)$$

Mediante las ecuaciones (1.45) y (1.48) obtenemos que la energía mecánica de la partícula está dada por:

$$E_m = \frac{mR^2}{\gamma^2} \left\{ \frac{1}{2} [\dot{x}^{*2} + \dot{y}^{*2}] - \frac{GM\gamma^2}{R^3} \left(\frac{1}{r^*} + \frac{1}{4r^{*3}} + \frac{9}{64r^{*5}} + \frac{25}{256r^{*7}} + \frac{1225}{16384r^{*9}} \right) \right\} \quad (1.49)$$

La ecuación (1.49) se puede escribir así:

$$\frac{\gamma^2}{mR^2} E_m = \left\{ \frac{1}{2} [\dot{x}^{*2} + \dot{y}^{*2}] - \frac{GM\gamma^2}{R^3} \left(\frac{1}{r^*} + \frac{1}{4r^{*3}} + \frac{9}{64r^{*5}} + \frac{25}{256r^{*7}} + \frac{1225}{16384r^{*9}} \right) \right\} \quad (1.50)$$

Definimos la energía mecánica adimensional E_m^* como la magnitud:

$$E_m^* = \frac{\gamma^2}{mR^2} E_m \quad (1.51)$$

Es evidente que esta cantidad es directamente proporcional a la energía mecánica de la partícula y que por lo tanto es una constante del movimiento de la partícula.

De las ecuaciones (1.50) y (1.51) tenemos la energía mecánica adimensional de la partícula en función de r^* , así como de \dot{x}^* e \dot{y}^* .

$$E_m^* = \left\{ \frac{1}{2} [\dot{x}^{*2} + \dot{y}^{*2}] - \frac{GM\gamma^2}{R^3} \left(\frac{1}{r^*} + \frac{1}{4r^{*3}} + \frac{9}{64r^{*5}} + \frac{25}{256r^{*7}} + \frac{1225}{16384r^{*9}} \right) \right\} \quad (1.52)$$

2. Resolución numérica de las ecuaciones de movimiento de una partícula alrededor del anillo

2.1 Introducción.

2.2 Solución numérica de las ecuaciones diferenciales ordinarias de movimiento de la partícula.

2.3 Resultados.

2.1 Introducción

En este capítulo se muestran los resultados obtenidos al resolver las ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden del movimiento de la partícula alrededor de un anillo.

Antes de resolver numéricamente las ecuaciones diferenciales ordinarias de movimiento se efectuó un cambio de variable para transformar éstas en un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden de la forma $\frac{dx_k}{dt} = F(x_k, t)$.

Este nuevo sistema de ecuaciones diferenciales fue resuelto mediante el método de Runge- Kutta, para lo cual se elaboró un programa en Borland Delphi 6.0. Este programa se ejecutó en una computadora de microprocesador Pentium 3 que fue suficiente para el presente informe.

2.2 Solución numérica de las ecuaciones diferenciales ordinarias de movimiento de la partícula

Las ecuaciones diferenciales ordinarias adimensionales de movimiento de la partícula alrededor del anillo están dadas por las ecuaciones (1.42) y (1.43):

$$\ddot{x}^* = -1290\left(\frac{1}{r^{*3}} + \frac{3}{4} \frac{1}{r^{*5}} + \frac{45}{64} \frac{1}{r^{*7}} + \frac{175}{256} \frac{1}{r^{*9}} + \frac{11025}{16384} \frac{1}{r^{*11}}\right)x^* \quad (2.1)$$

$$\ddot{y}^* = -1290\left(\frac{1}{r^{*3}} + \frac{3}{4} \frac{1}{r^{*5}} + \frac{45}{64} \frac{1}{r^{*7}} + \frac{175}{256} \frac{1}{r^{*9}} + \frac{11025}{16384} \frac{1}{r^{*11}}\right)y^* \quad (2.2)$$

Para resolver estas ecuaciones diferenciales las transformaremos en un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden, realizando el siguiente cambio de variable:

$$x^* \equiv x_1, \quad (2.3)$$

$$y^* \equiv x_2, \quad (2.4)$$

$$\frac{dx^*}{dt^*} \equiv x_3, \quad (2.5)$$

$$\frac{dy^*}{dt^*} \equiv x_4, \quad (2.6)$$

De esta definición tenemos que

$$r^{*n} = (\sqrt{x^{*2} + y^{*2}})^n = (\sqrt{x_1^2 + x_2^2})^n \quad (2.7)$$

Con estas nuevas definiciones las ecuaciones diferenciales (2.1) y (2.2) se transforman en las siguientes cuatro ecuaciones diferenciales *no lineales y acopladas*

$$\frac{dx_1}{dt^*} = x_3 \quad (2.8)$$

$$\frac{dx_2}{dt^*} = x_4 \quad (2.9)$$

$$\frac{dx_3}{dt^*} = -1290 \left(\frac{1}{r^{*3}} + \frac{3}{4} \frac{1}{r^{*5}} + \frac{45}{64} \frac{1}{r^{*7}} + \frac{175}{256} \frac{1}{r^{*9}} + \frac{11025}{16384} \frac{1}{r^{*11}} \right) x_1 \quad (2.10)$$

$$\frac{dx_4}{dt^*} = -1290 \left(\frac{1}{r^{*3}} + \frac{3}{4} \frac{1}{r^{*5}} + \frac{45}{64} \frac{1}{r^{*7}} + \frac{175}{256} \frac{1}{r^{*9}} + \frac{11025}{16384} \frac{1}{r^{*11}} \right) x_2 \quad (2.11)$$

Este sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden se resolvió mediante el método de Runge-Kutta de orden 4 elaborando para ello un programa en Borland Delphi 6.0. Este programa lo denominamos *Mov_Particula_Un_Anillo* y el código de programación efectuado se detalla en el apéndice 2, ver página 74.

Para resolver estas ecuaciones diferenciales se consideró un paso igual a $h = 10^{-3}$. Además se verificó que la distancia mínima entre el centro del anillo y la partícula sea mayor que $1,5 R$, pues si no se cumple esta condición se invalidaría la aproximación del potencial gravitatorio que consideramos.

Además para tener la certeza de los cálculos efectuados se determinó la energía mecánica adimensional de la partícula y se observó que para cada caso que analizamos ésta no varía inclusive en sus primeras cinco cifras decimales.

Debemos mencionar que en la descripción del movimiento de la partícula se considera como referencias de distancia y tiempo al radio del anillo y un día respectivamente.

2.3 Resultados

En los casos que a continuación analizamos se consideró que las condiciones iniciales del movimiento de la partícula correspondan a los órdenes de magnitud de los datos astronómicos observados de los satélites de Saturno, que se detallan en el apéndice 3, ver página 77.

Caso 1

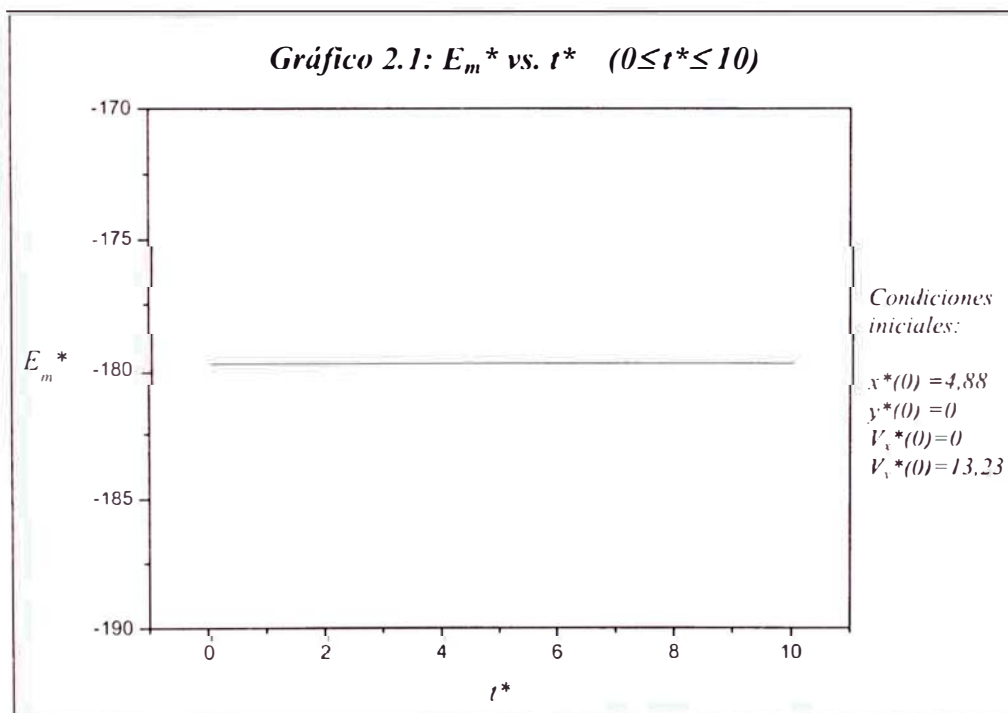
Se consideraron las siguientes condiciones iniciales para el lanzamiento de la partícula

$$\begin{aligned}x^*(0) &= 4,88, & y^*(0) &= 0, \\ \dot{x}^*(0) &= 0, & \dot{y}^*(0) &= 13,23.\end{aligned}$$

Estas condiciones corresponden a los órdenes de magnitud del satélite *Tetis* que orbita alrededor de *Saturno*. Bajo estas condiciones se obtuvieron los gráficos que se detallan a continuación:

a) Gráfico 2.1

En este gráfico se muestra como varía la energía mecánica adimensional de la partícula en función del tiempo adimensional. La energía mecánica adimensional resulta ser constante igual a -179,67038.



b) Gráficos del 2.2 y al 2.7

Se muestra la trayectoria de la partícula para seis intervalos de tiempo $[0, t_f]$, donde t_f toma los valores 1, 2, 3, 4, 5 y 10 días.

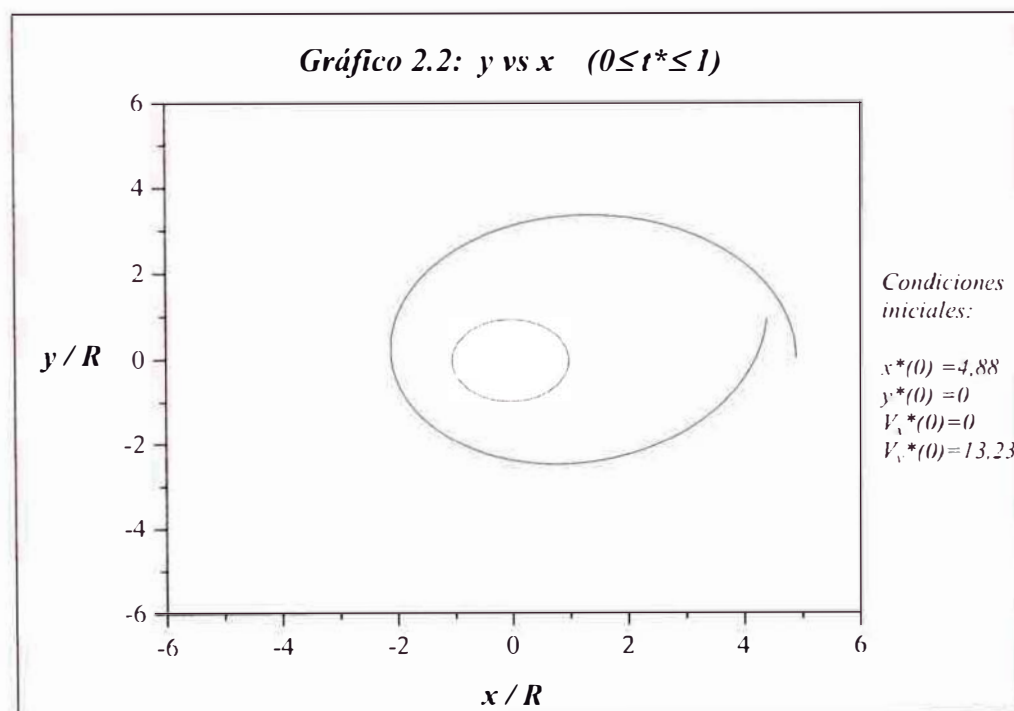
La trayectoria de la partícula está limitada a una región anular alrededor del anillo porque la distancia entre la partícula y el centro del anillo tiene dos límites, un mínimo y un máximo.

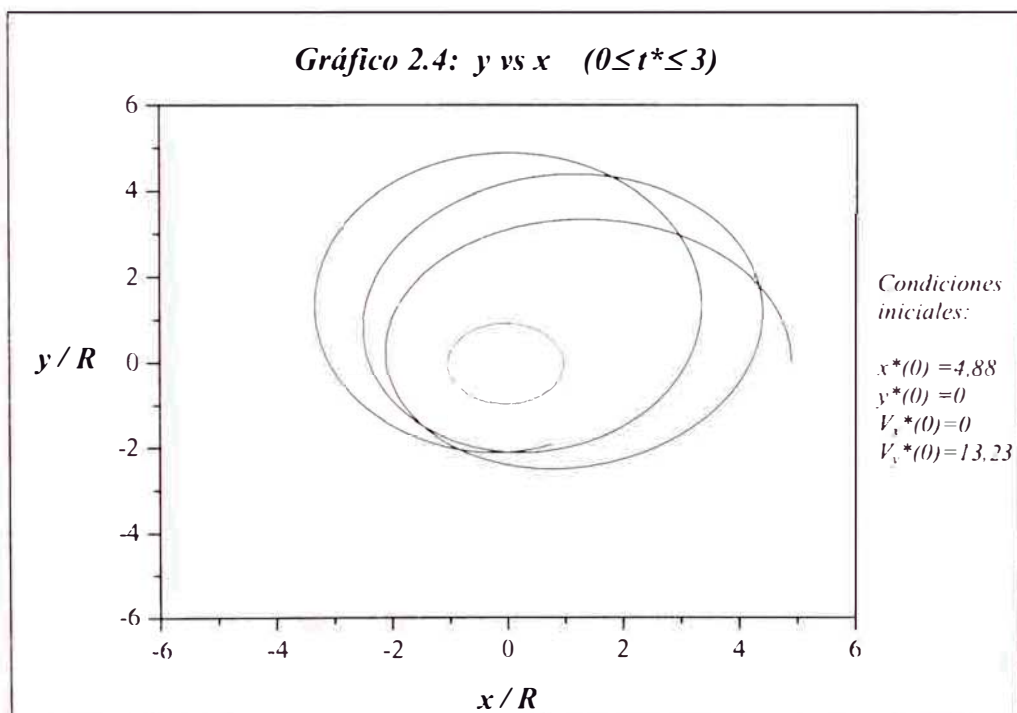
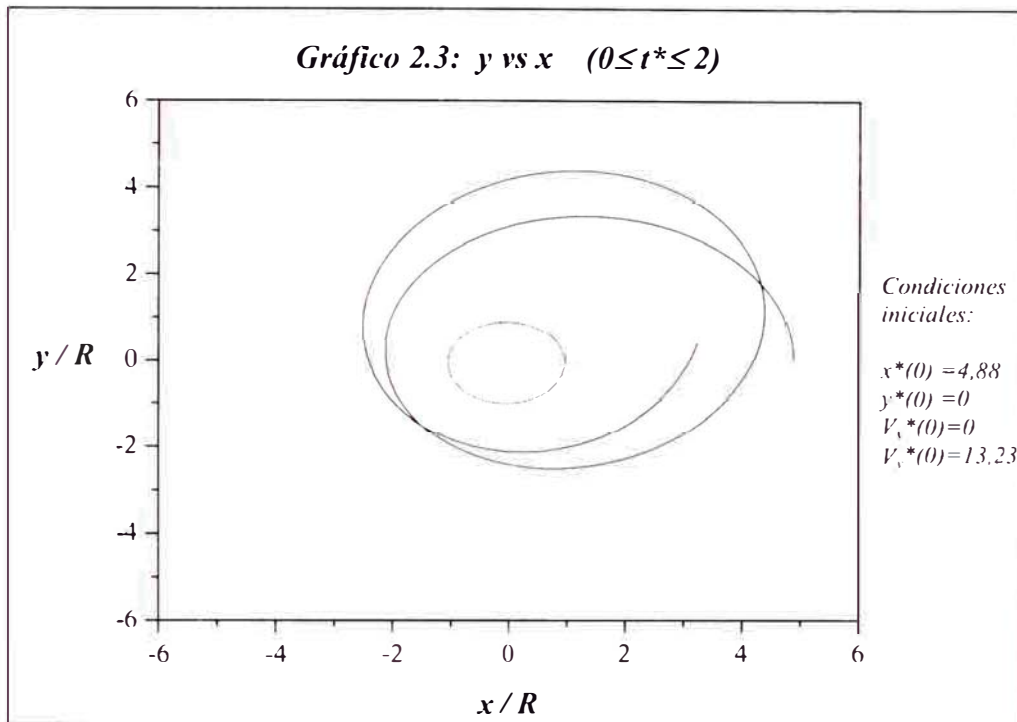
Además se puede observar que la partícula está orbitando alrededor del anillo de tal forma que su trayectoria pareciera corresponder a una *elipse rotante* o *pseudo-elipse*. Cuando la partícula pasa de un punto $r = r_{m\grave{a}x}$, la partícula atraviesa un arco de trayectoria hasta un punto $r = r_{m\grave{m}n}$, después del cual hay una porción de trayectoria dispuesta simétricamente hasta el próximo arco en el que $r = r_{m\grave{a}x}$, y así sucesivamente, de tal forma que toda la trayectoria se obtiene repitiendo un ir y venir los mismos arcos.

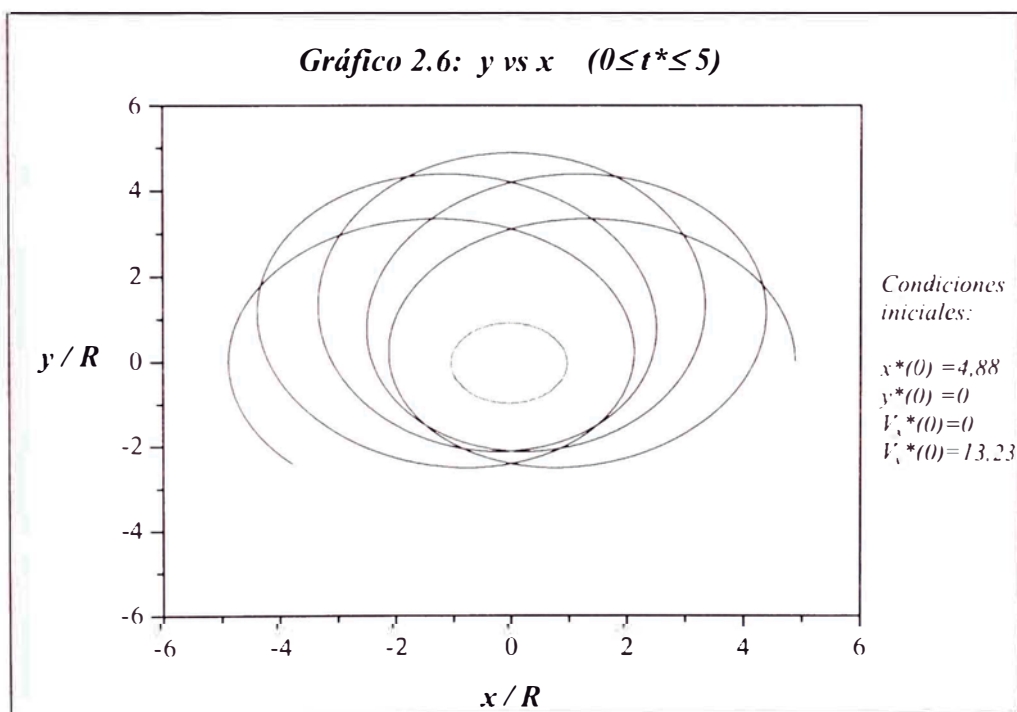
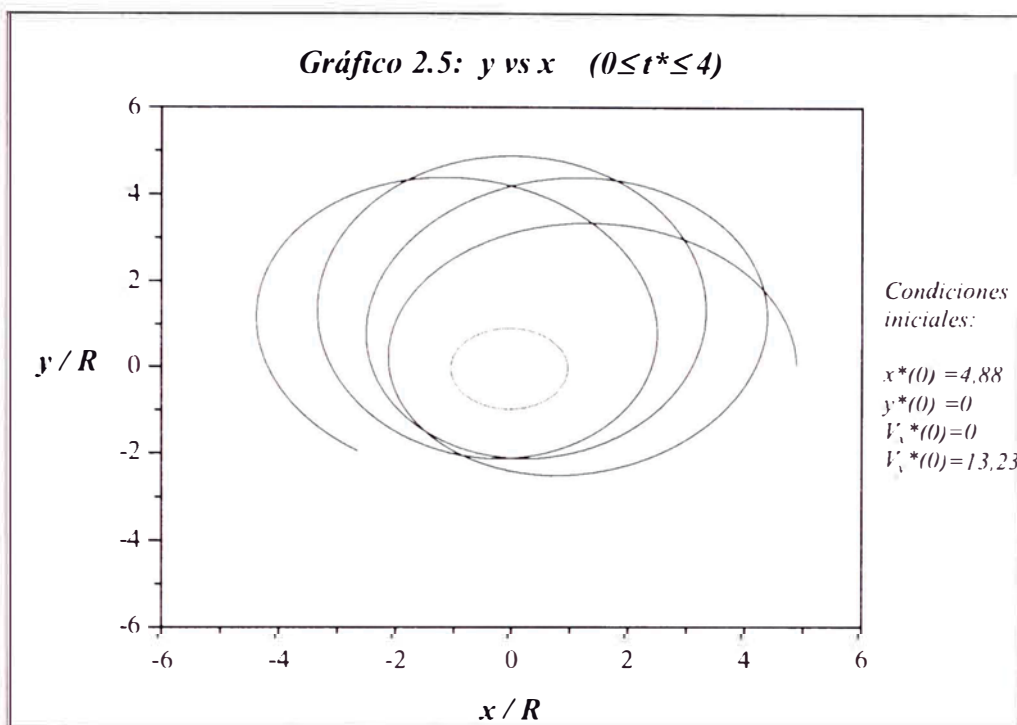
En el gráfico 2.7 se observa que la trayectoria de la partícula es simétrica respecto a la línea $\phi = 0$.

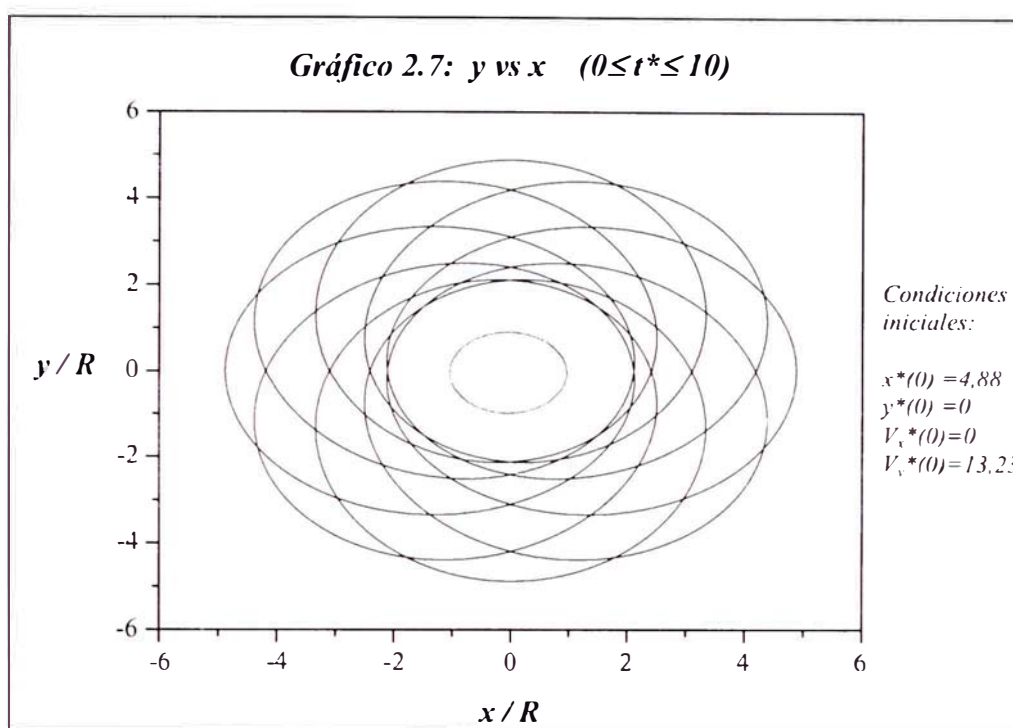
Aunque el movimiento de la partícula es finito porque su trayectoria está contenida en una región anular, su trayectoria pareciera ser *cerrada*.

Sin embargo, para verificar este resultado incrementamos el intervalo de tiempo que dura el movimiento a 500 días observándose que la partícula pasa por las distancias máximas y mínimas muchas veces cubriendo la corona comprendida entre las dos circunferencias límites.









c) Gráficos del 2.8 y al 2.19

Se muestran como varían las cantidades x^* , y^* , V_x^* , V_y^* y r^* respecto del tiempo para dos intervalos de tiempo:

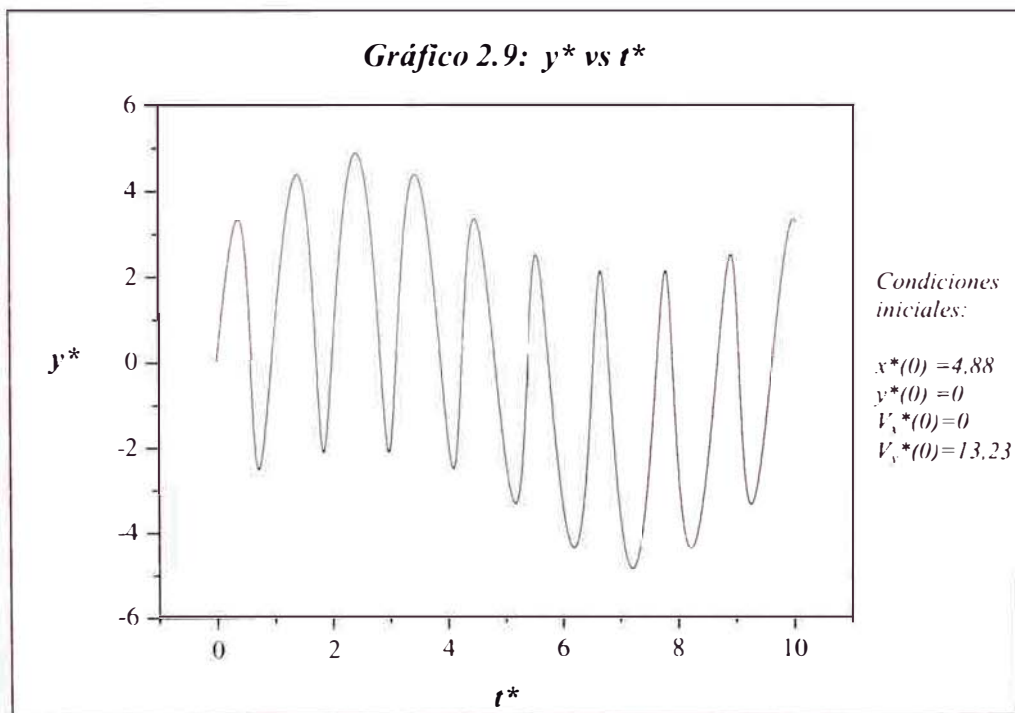
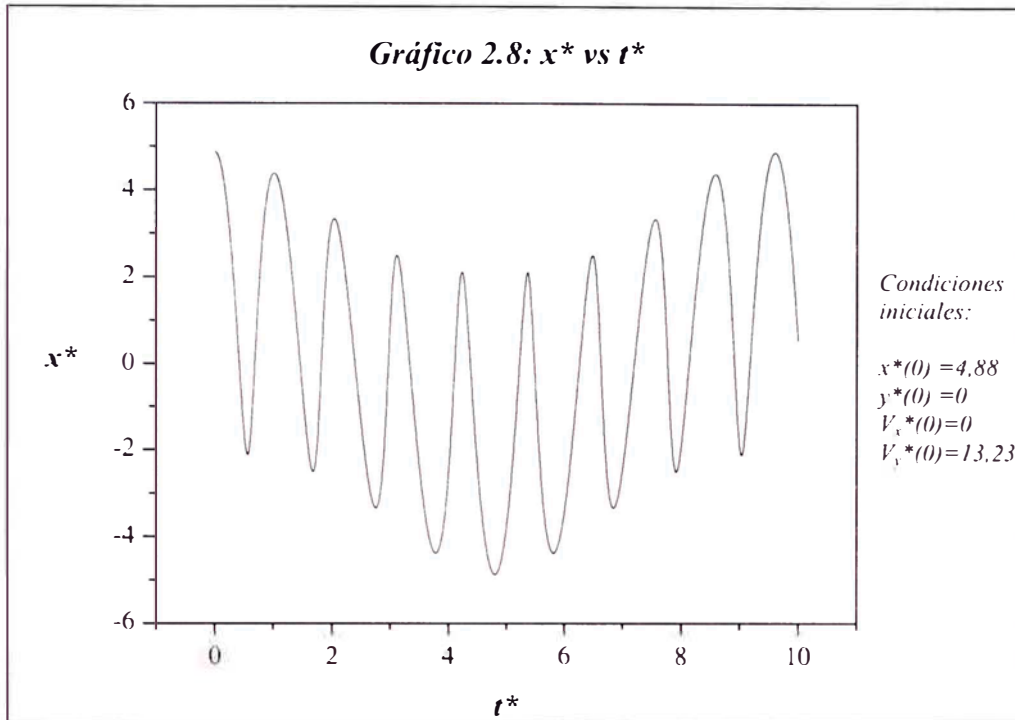
1. $0 \leq t \leq 10$ días

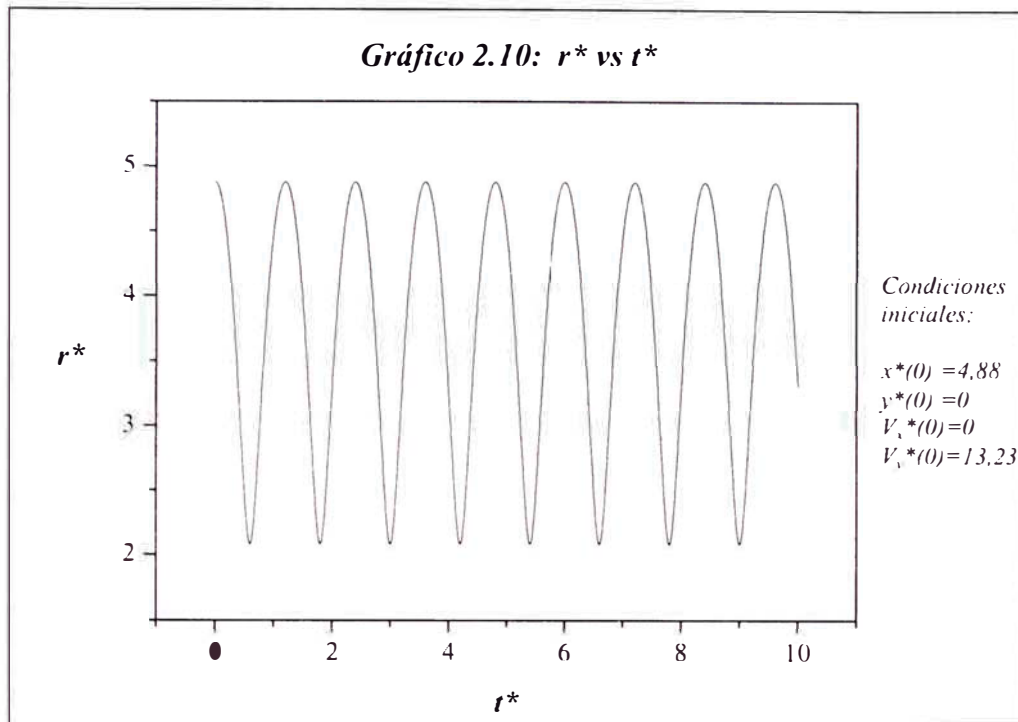
Gráficos del 2.8 y al 2.10

Representan como varían respecto del tiempo las coordenadas (x^*, y^*) de la posición de la partícula y la distancia de la partícula al centro del anillo r^* . Las coordenadas x^* e y^* de la posición de la partícula se encuentran acotadas pues varían entre un valor máximo y mínimo. El tiempo que dura el movimiento resulta insuficiente para afirmar que estas componentes son funciones periódicas.

Sin embargo, se observa claramente que la distancia r^* es una función acotada y periódica en función al tiempo, por lo que intuimos que las coordenadas de la posición también lo serán. La función $r^*(t)$ tiene máximos y mínimos. Esto implica que para ciertos instantes de tiempo $\dot{r}^*(t) = 0$, es decir, la componente radial de la velocidad de la partícula se anula. Esto significa *un punto de retorno* de la trayectoria, en el que la función se convierte de creciente en decreciente o viceversa.

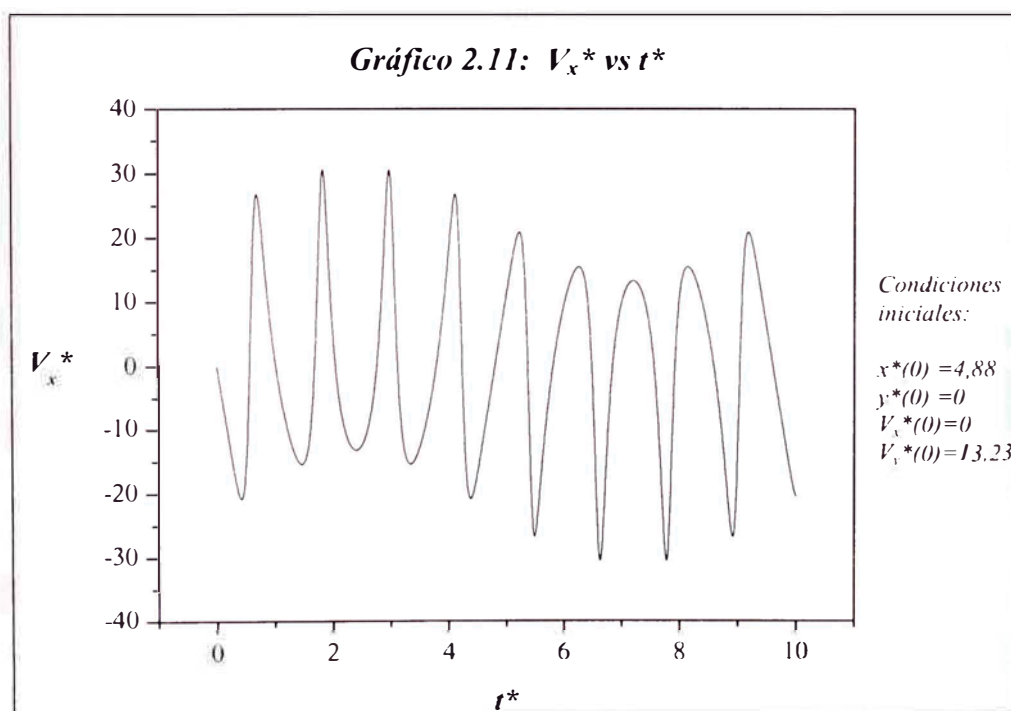
Es evidente que el periodo de la función $r^*(t)$ es menor que el posible periodo de las funciones $x^*(t^*)$ e $y^*(t^*)$.

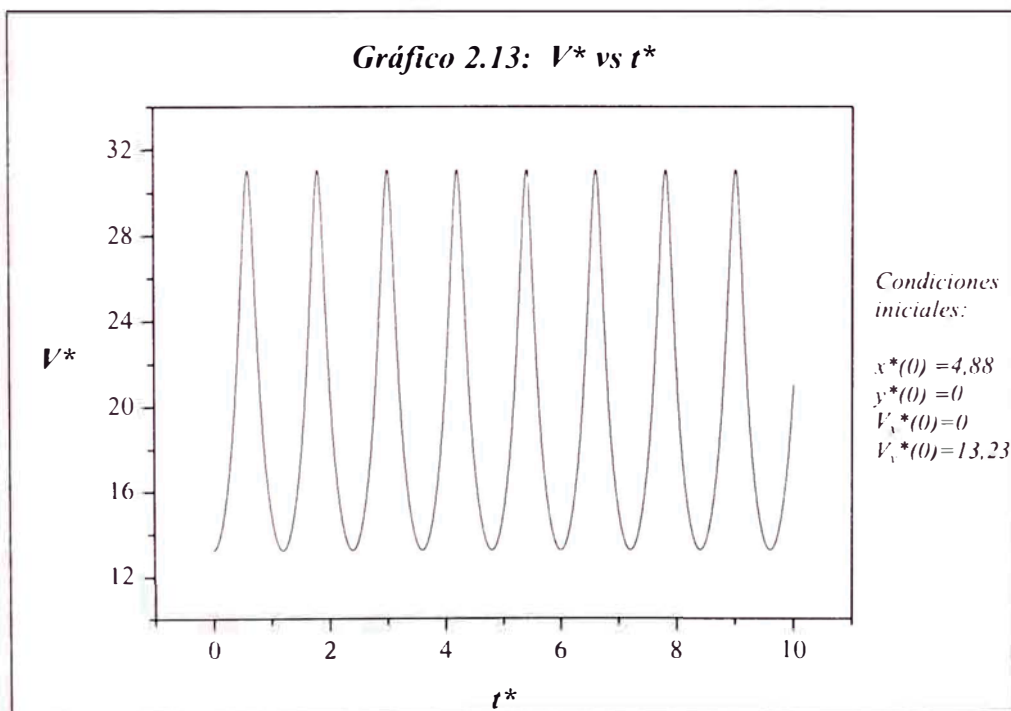
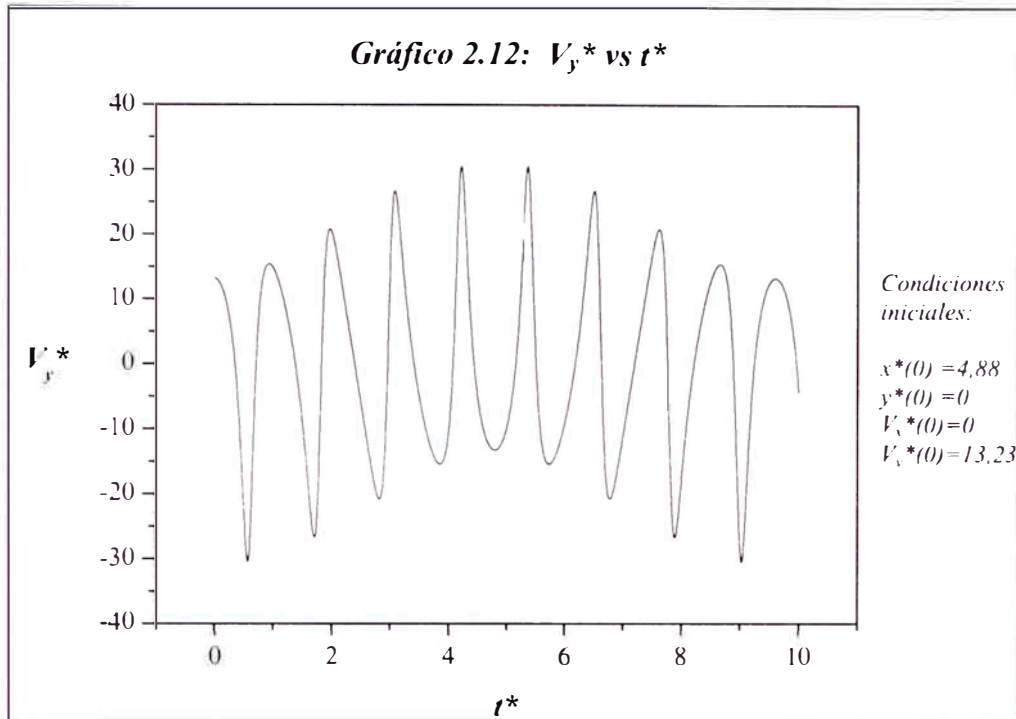




Gráficos del 2.11 y al 2.13

Representan como varían respecto del tiempo las componentes de la velocidad de la partícula y su respectiva rapidez. Las componentes $V_x^*(t^*)$ y $V_y^*(t^*)$ están acotadas. Otra vez el tiempo que dura el movimiento es insuficiente para afirmar que estas componentes varían periódicamente. La rapidez de la partícula respecto del tiempo varía periódicamente y además se encuentra acotada.

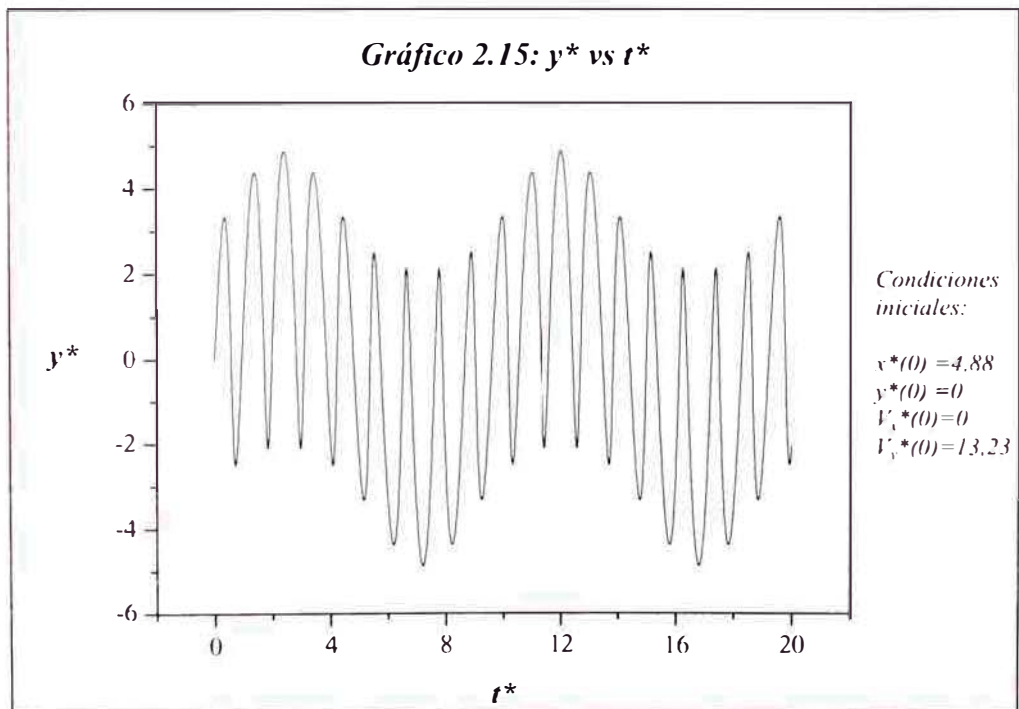
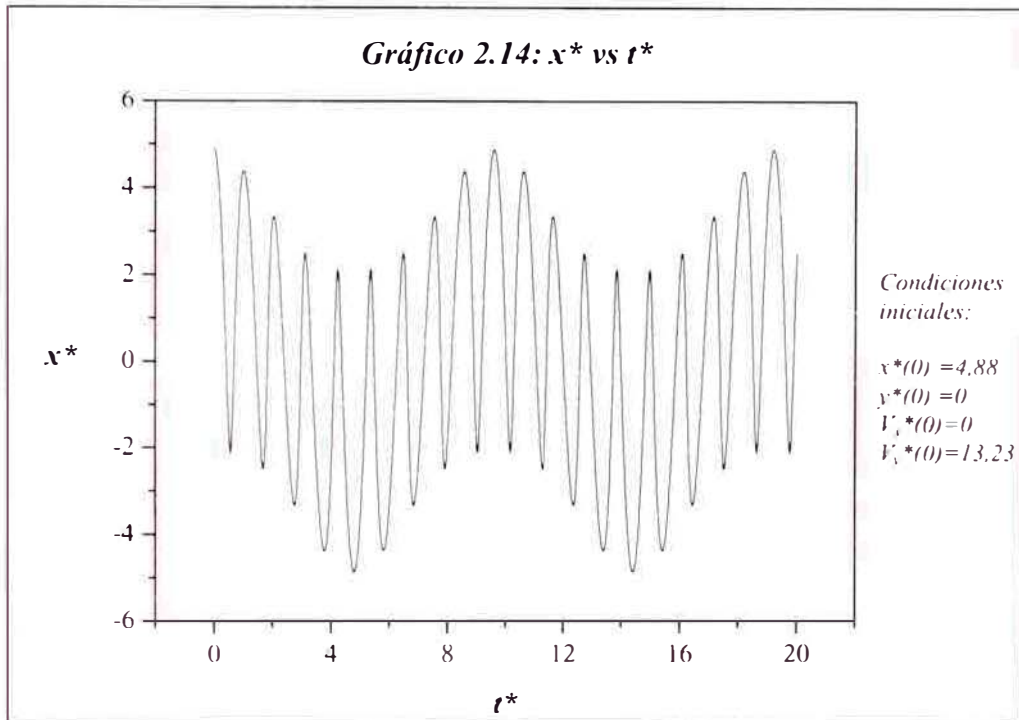


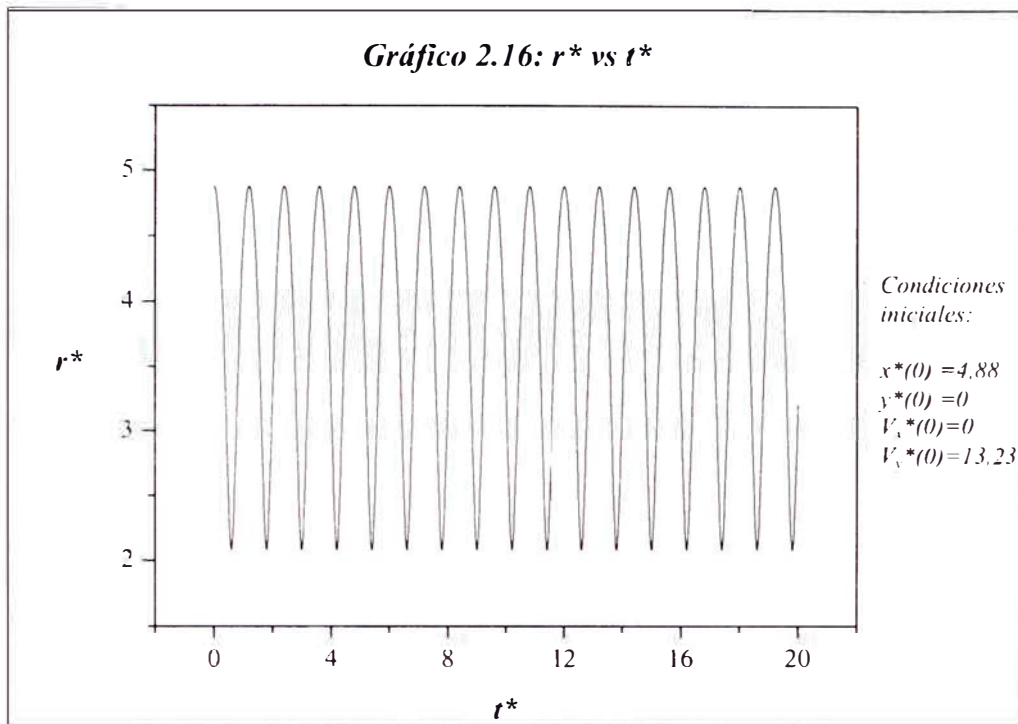


ii. $0 \leq t \leq 20$ días

Gráficos del 2.14 y al 2.16

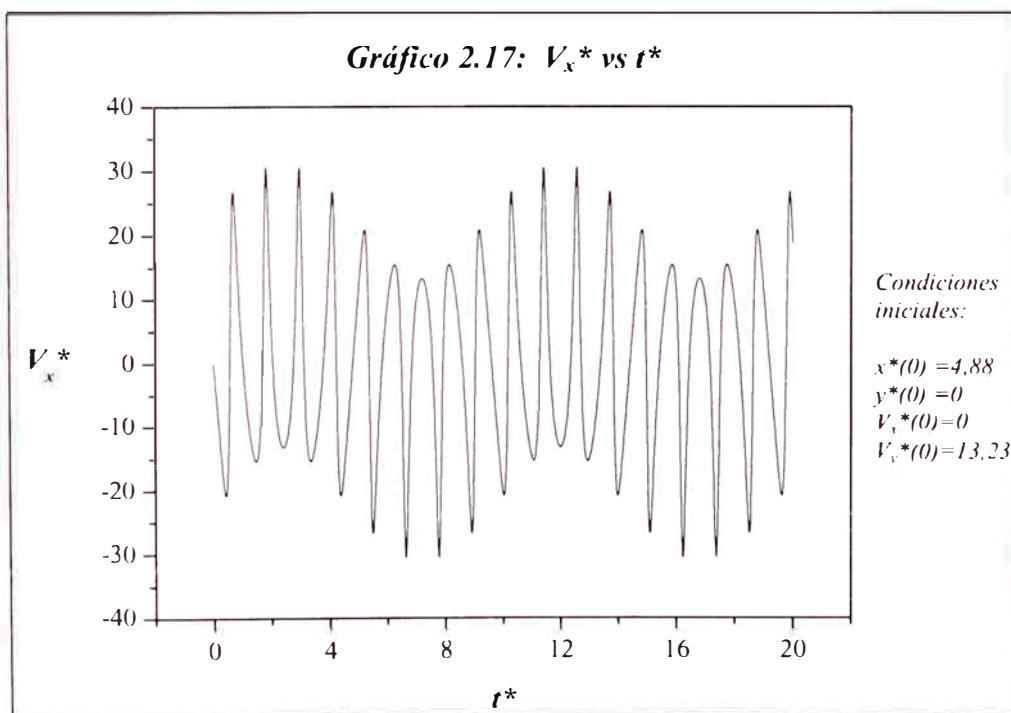
Representan como varían respecto del tiempo las coordenadas de la posición de la partícula y la distancia de ésta al centro del anillo. Se observa claramente que x^* , y^* y r^* varían periódicamente respecto del tiempo.

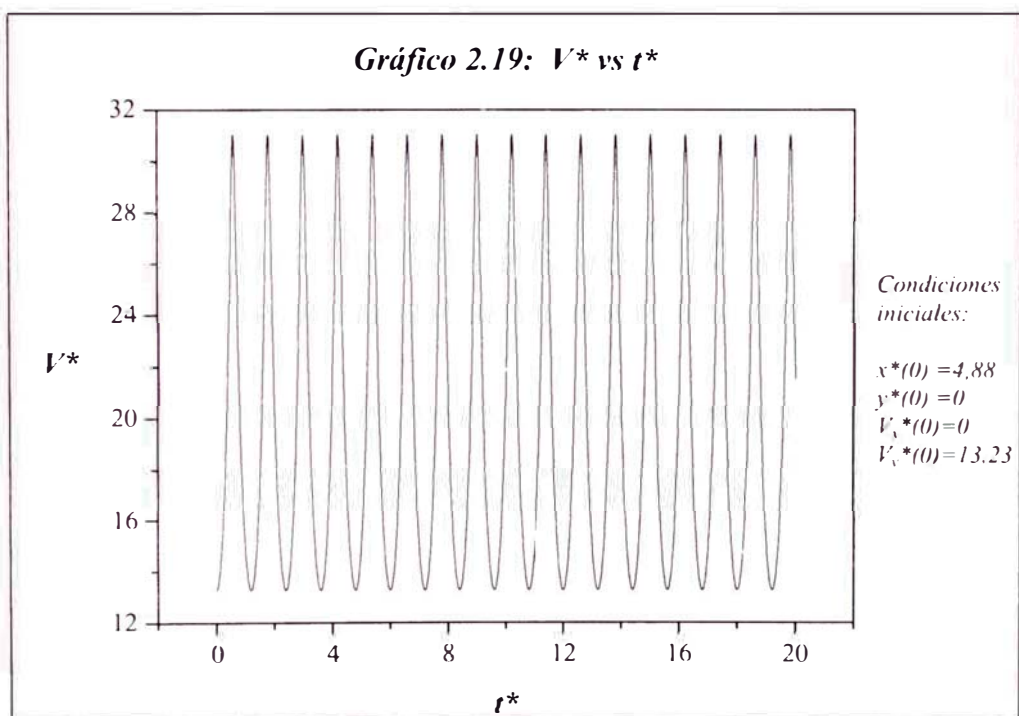
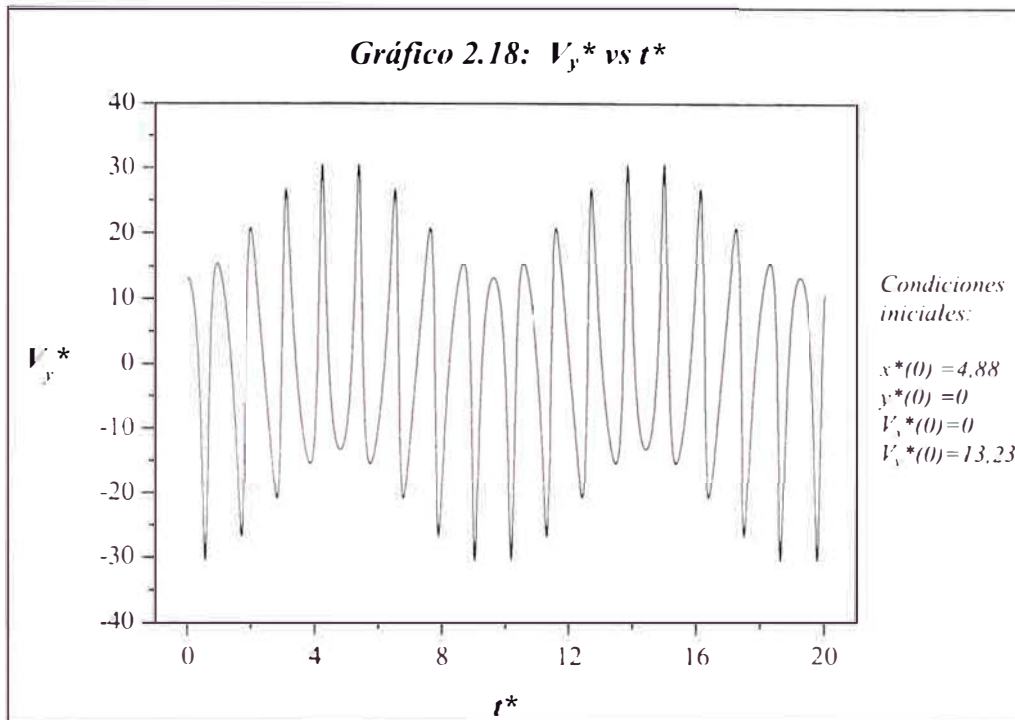




Gráficos del 2.17 y al 2.19

Representan como varían respecto del tiempo las componentes de la velocidad de la partícula, así como su magnitud. Estas cantidades son funciones periódicas del tiempo.





Caso 2

Las condiciones iniciales consideradas en este caso son del orden de magnitud del satélite *Febe* que orbita alrededor de *Saturno*.

En este segundo caso variamos la magnitud de la velocidad de lanzamiento de la partícula, sin cambiar su dirección, manteniendo constante la posición de lanzamiento en:

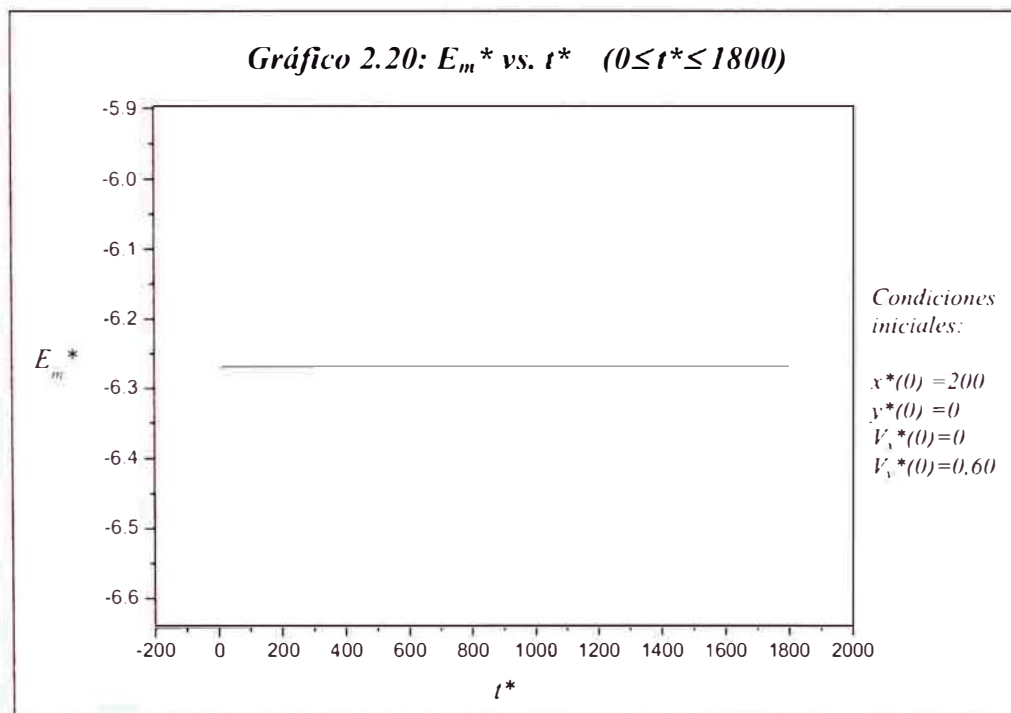
$$x^*(0) = 200, \quad y^*(0) = 0,$$

Gráfico 2.20 y 2.21:

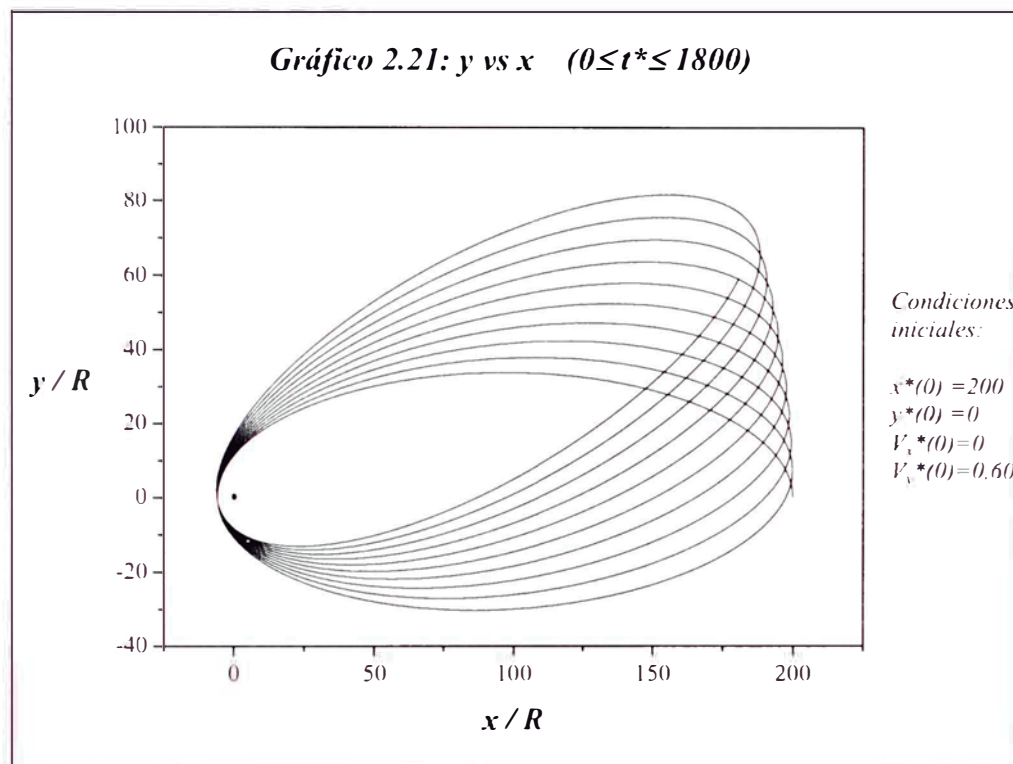
En estos gráficos se representan respectivamente como varía la energía mecánica adimensional de la partícula respecto del tiempo adimensional y la trayectoria realizada por la partícula que tiene una velocidad inicial igual a:

$$\dot{x}^*(0) = 0, \quad \dot{y}^*(0) = 0,60$$

La energía mecánica adimensional de la partícula es una constante del movimiento, se mantuvo igual a -6,2700.



En el gráfico 2.21 se muestra la trayectoria realizada por la partícula. Se aprecia claramente que ésta corresponde a una curva abierta que tiene la forma de una *elipse rotante* y que la distancia entre la partícula y el anillo alcanza un valor mínimo. El anillo se visualiza como un punto material ubicado en el origen de coordenadas.



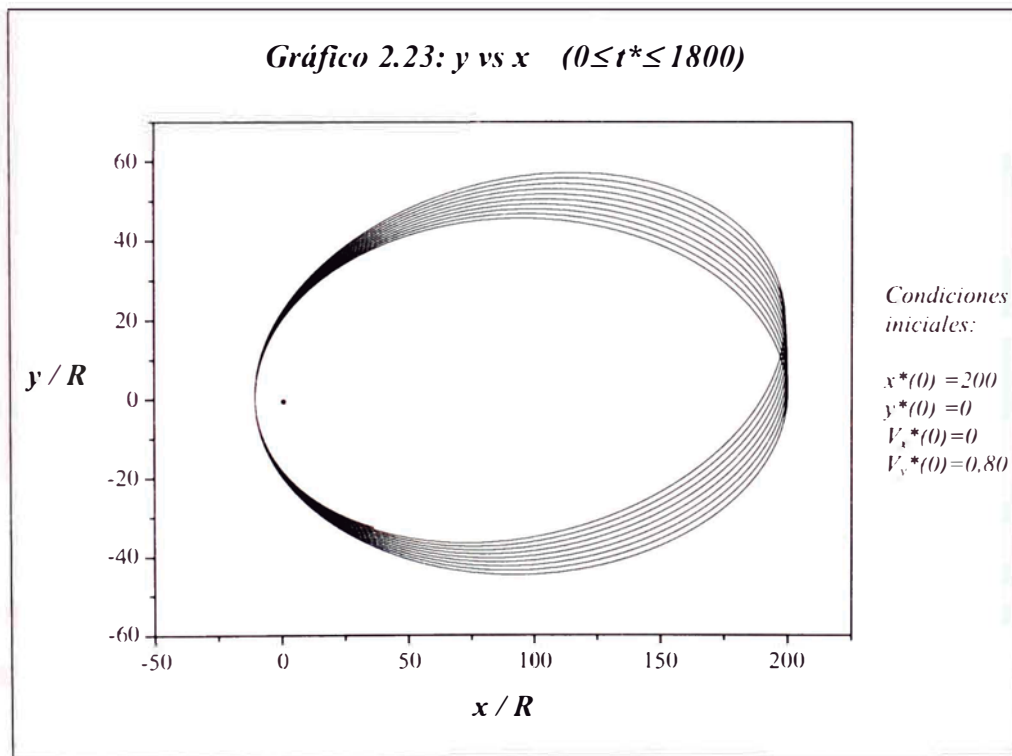
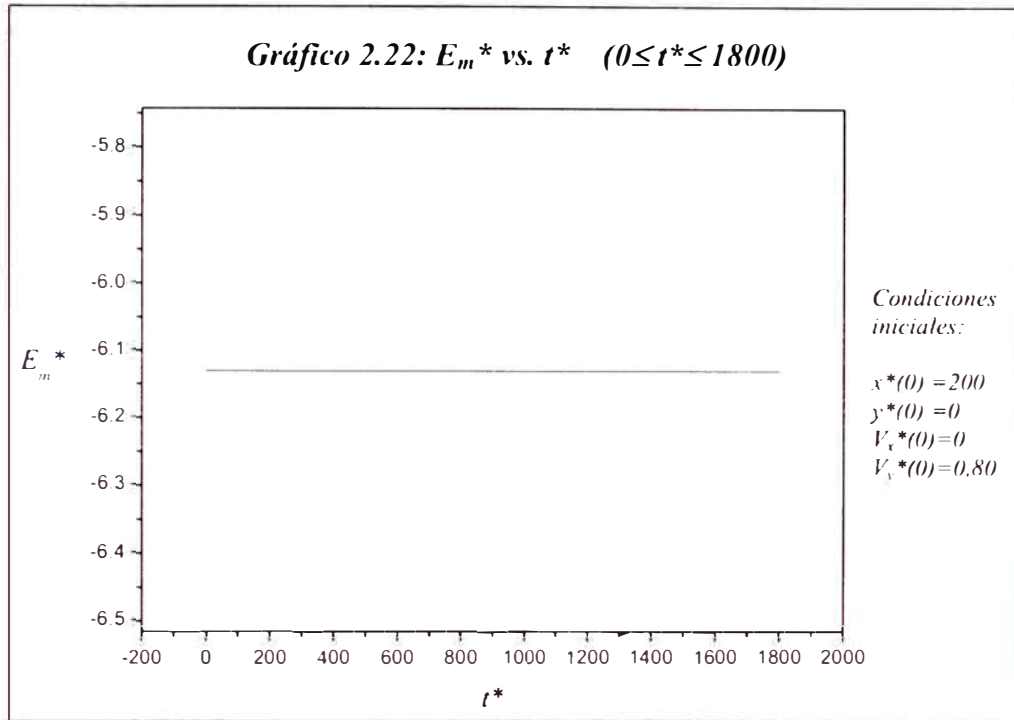
Gráficos 2.22 y 2.23:

En estos gráficos se representan respectivamente la energía mecánica adimensional de la partícula en función del tiempo adimensional y la trayectoria realizada por la partícula cuando su velocidad inicial es:

$$\dot{x}^*(0) = 0, \quad \dot{y}^*(0) = 0,80$$

En el gráfico 2.22 se puede observar que la energía mecánica adimensional de la partícula es una constante del movimiento. Esta energía mecánica adimensional se mantuvo igual a -6,1300.

En el gráfico 2.23 se muestra la trayectoria de la partícula. Como en el caso anterior corresponde a una curva abierta que tiene la forma de una *elipse rotante*.

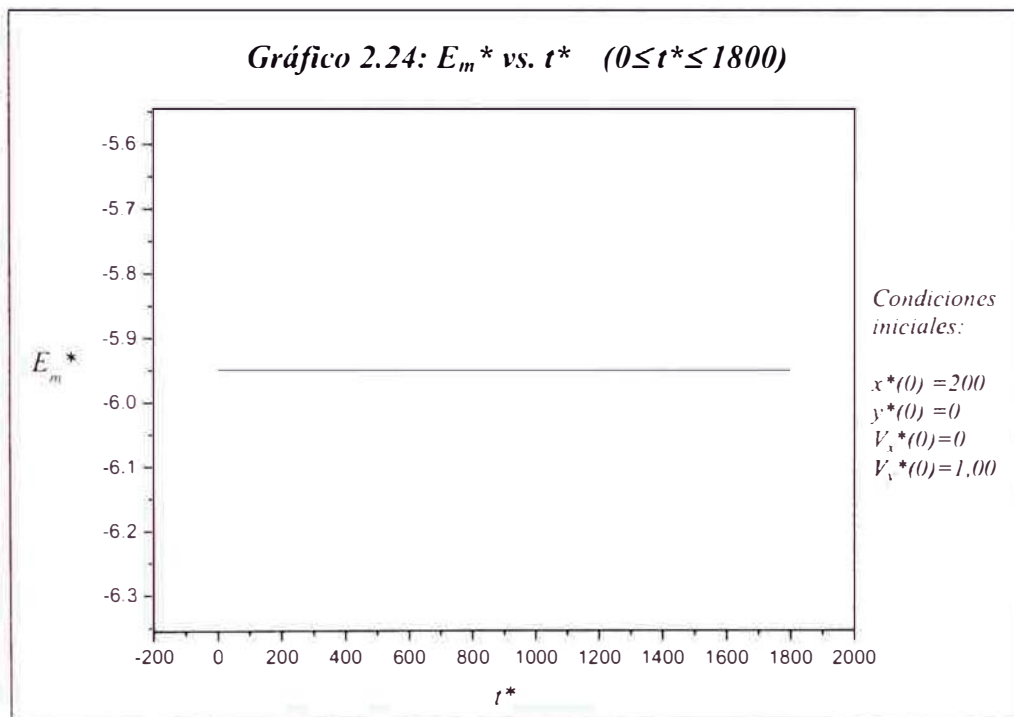


Gráficos del 2.24 al 2.26:

En estos gráficos se representan respectivamente la energía mecánica adimensional de la partícula en función del tiempo adimensional, la trayectoria realizada por la partícula y ampliación de ésta cuando su velocidad inicial es:

$$\dot{x}^*(0) = 0, \quad \dot{y}^*(0) = 1,00$$

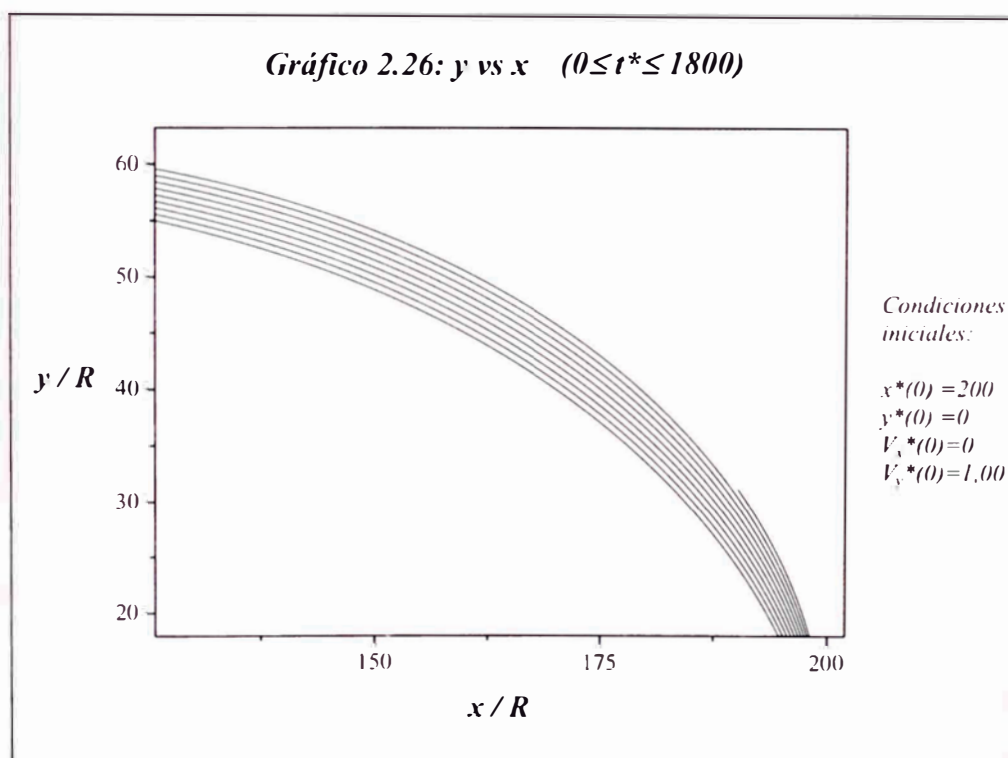
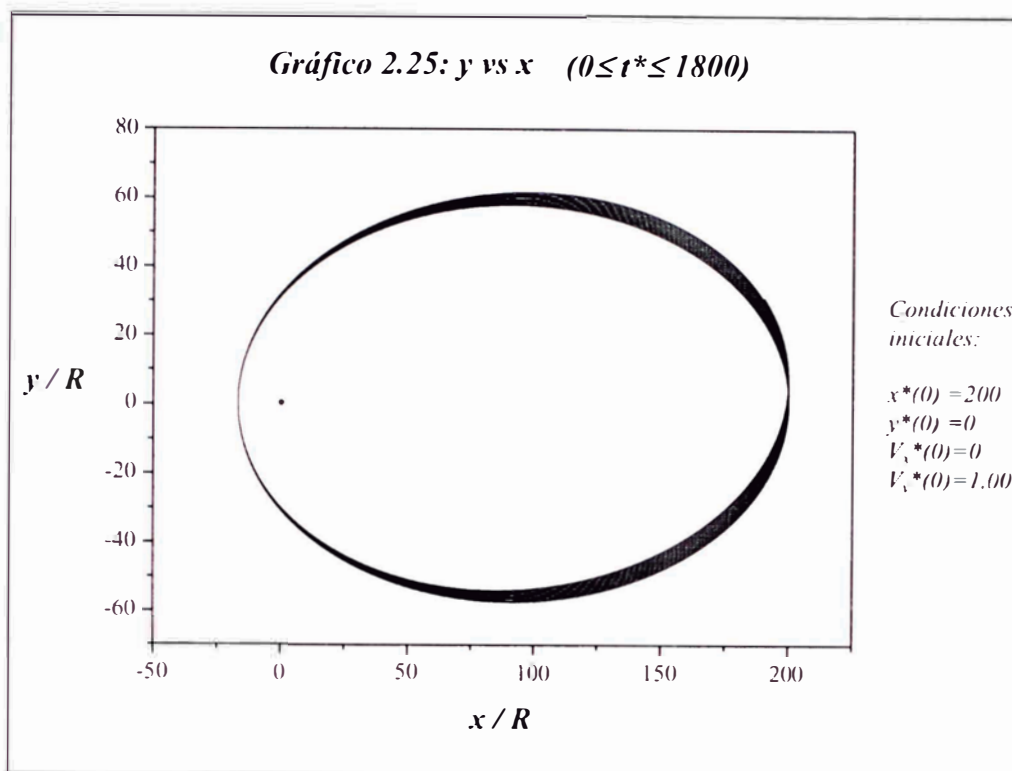
El gráfico 2.24 muestra a la energía mecánica adimensional de la partícula en función del tiempo unidimensional. Esta cantidad se mantuvo constante en $-5,9500$.



En el gráfico 2.25 se muestra la trayectoria de la partícula, que como en los casos anteriores es una curva abierta que tiene la forma de una *elipse rotante*.

En este caso se observa que las “elipses” se encuentran más próximas que en las situaciones anteriores, de tal manera que en algunas zonas de la gráfica, la trayectoria se visualiza como una línea muy gruesa. En realidad la partícula pasa por puntos próximos.

En el gráfico 2.26 se muestra una ampliación de una parte de la trayectoria realizada por la partícula. En esta se puede observar que la trayectoria está formada por curvas no paralelas.

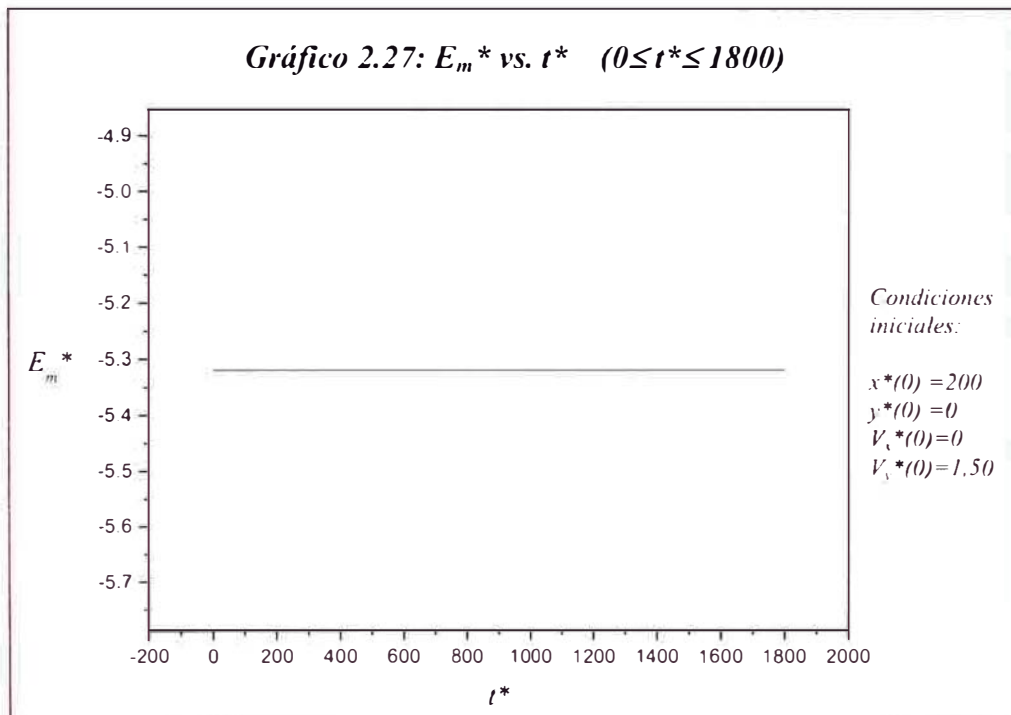


Gráficos del 2.27 al 2.29:

En estos gráficos se representan respectivamente la energía mecánica adimensional de la partícula en función del tiempo adimensional, la trayectoria realizada por la partícula y ampliación de ésta cuando la velocidad inicial en el instante $t = 0$ es:

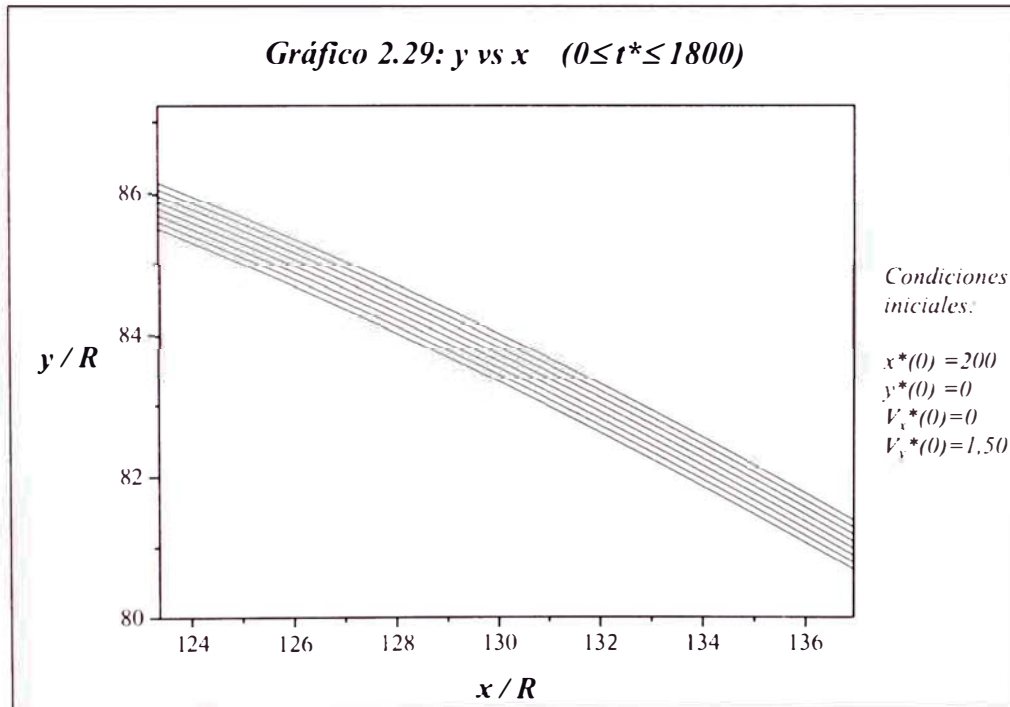
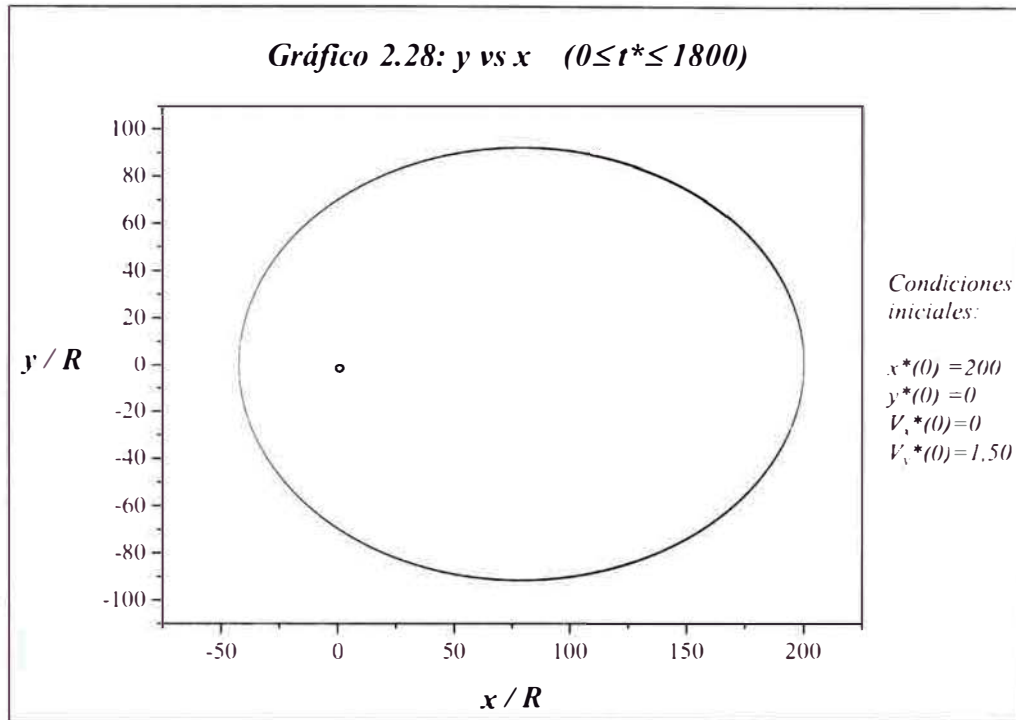
$$\dot{x}^*(0) = 0, \quad \dot{y}^*(0) = 1,50$$

El gráfico 2.27 muestra a la energía mecánica adimensional de la partícula en función del tiempo unidimensional. Esta energía se mantuvo invariante en $-5,3250$.



En el gráfico 2.28 se muestra la trayectoria de la partícula, esta *pareciera* corresponder a una curva elíptica. Aparentemente la trayectoria es cerrada.

Sin embargo en el gráfico 2.29 se muestra una ampliación de la trayectoria observándose claramente que ésta es abierta y está formada por curvas *elípticas* muy próximas.

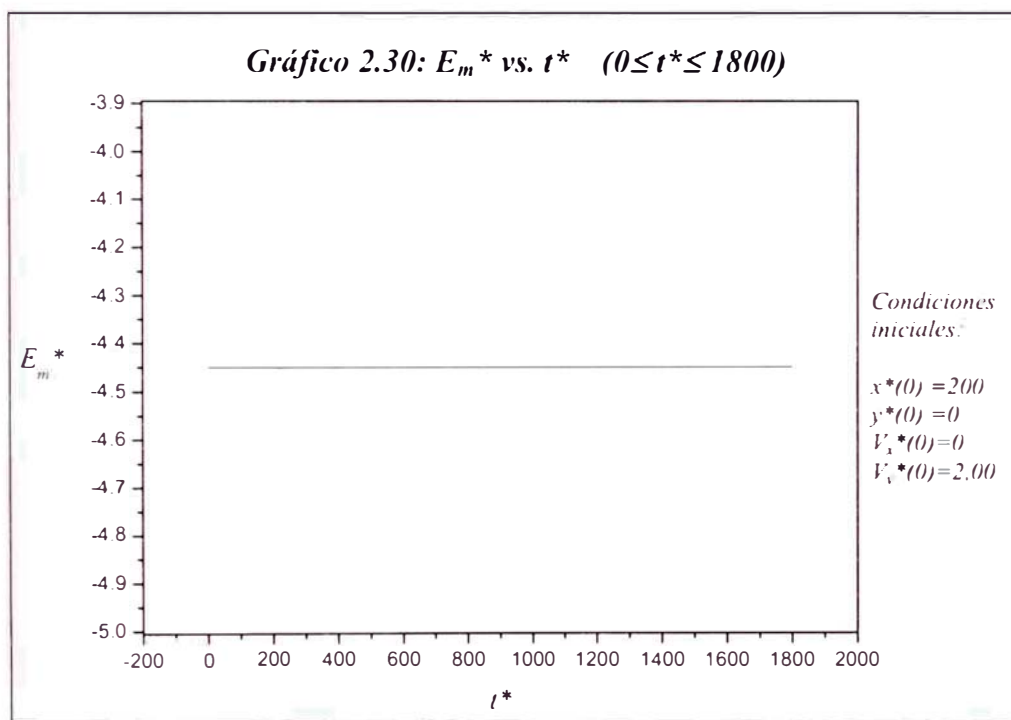


Gráficos del 2.30 y 2.32:

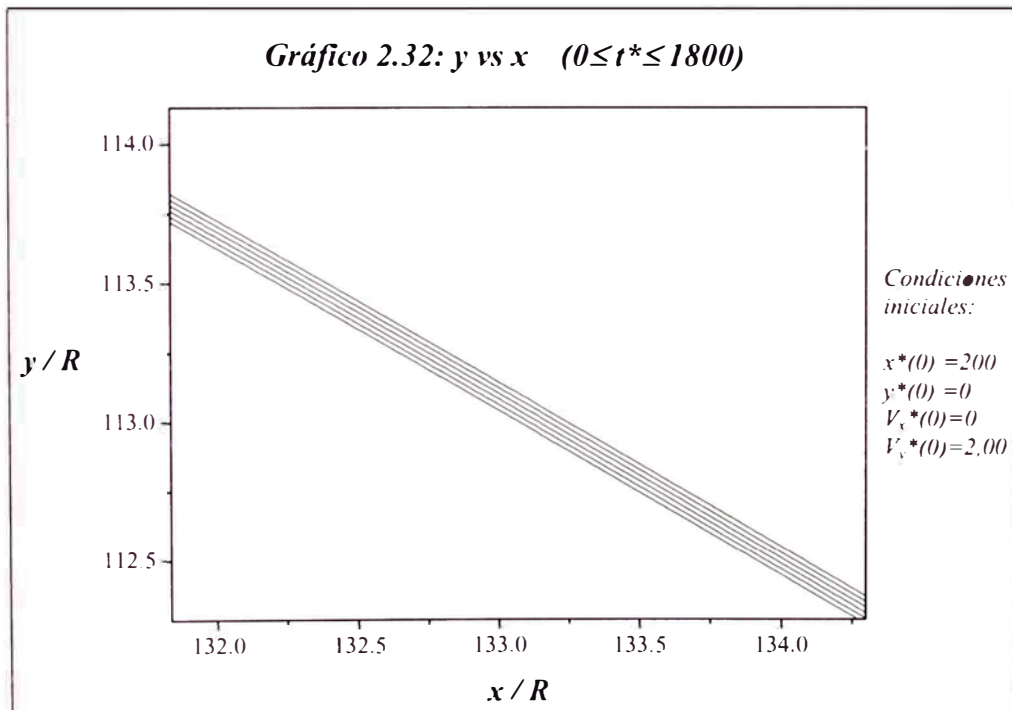
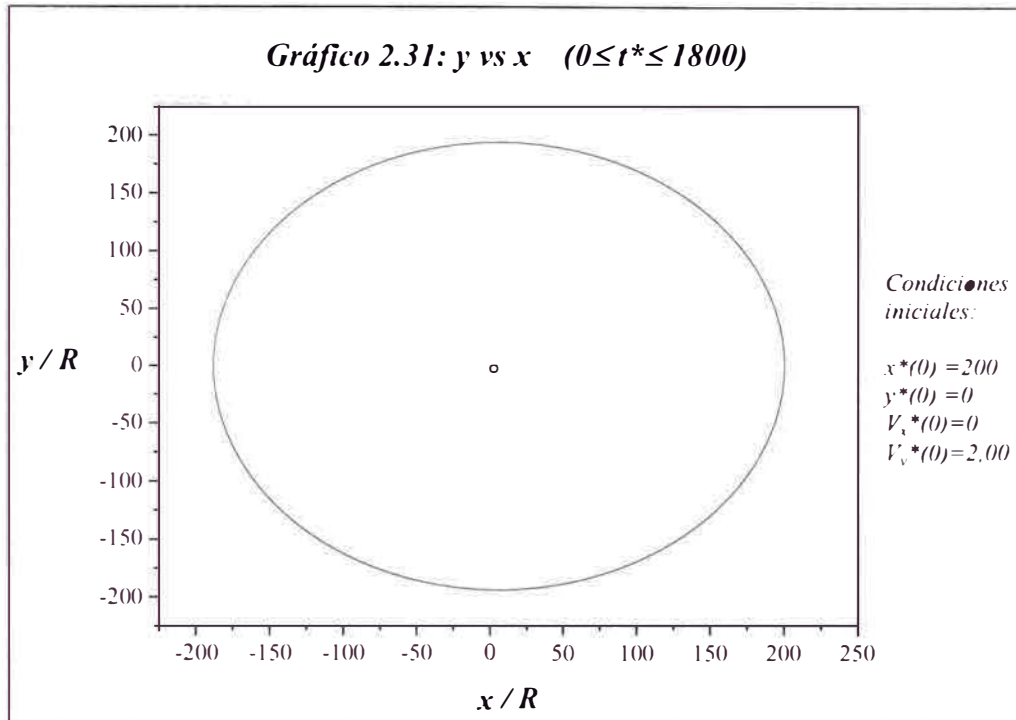
En estos gráficos se representan respectivamente la energía mecánica adimensional de la partícula en función del tiempo adimensional, la trayectoria realizada por la partícula y ampliación de ésta cuando la velocidad inicial en el instante $t = 0$ es:

$$\dot{x}^*(0) = 0, \quad \dot{y}^*(0) = 2,00$$

El gráfico 2.30 muestra a la energía mecánica adimensional de la partícula en función del tiempo unidimensional. Esta energía se mantuvo invariante en $-4,4500$.



Como en el caso anterior la trayectoria de la partícula mostrada en los gráfico 2.31 y 2.32, esta *parece* corresponder a una curva elíptica. Sin embargo, una ampliación de la trayectoria muestra claramente que ésta es abierta y está formada por curvas *elípticas* muy próximas.

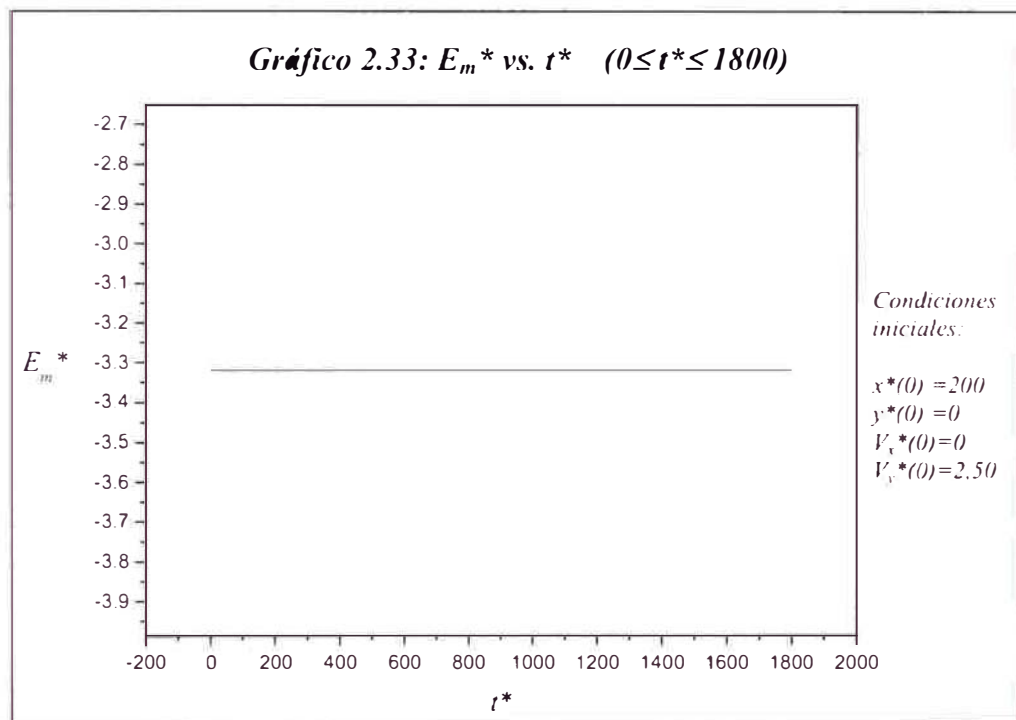


Gráficos del 2.33 y 2.35:

En estos gráficos se representan respectivamente la energía mecánica adimensional de la partícula en función del tiempo adimensional, la trayectoria realizada por la partícula y ampliación de ésta cuando la velocidad inicial en el instante $t = 0$ es:

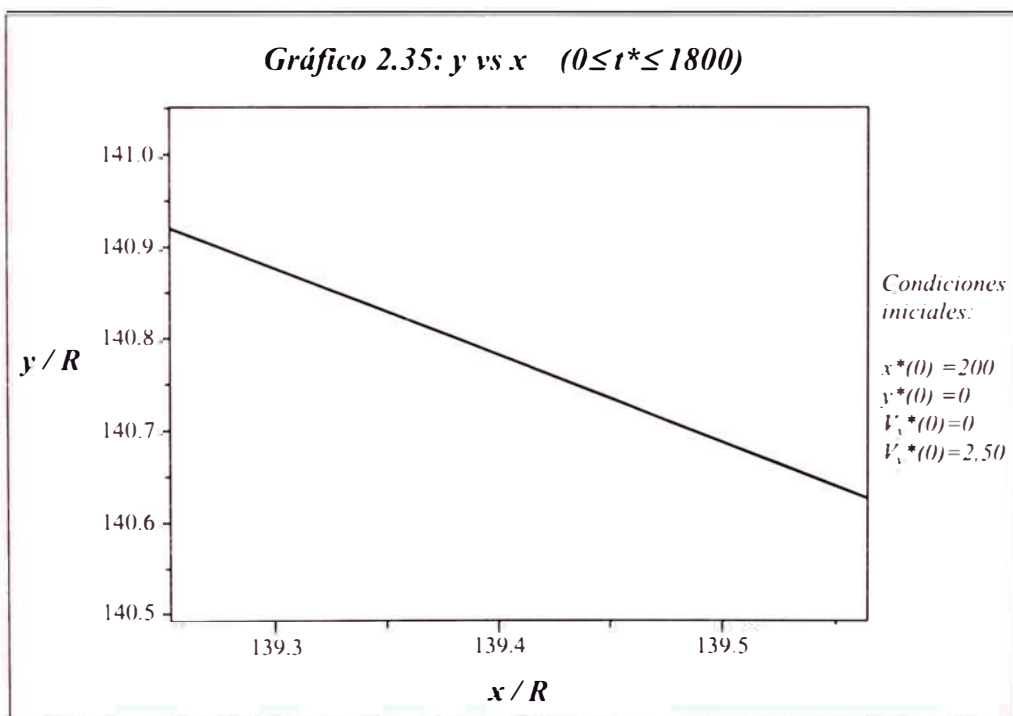
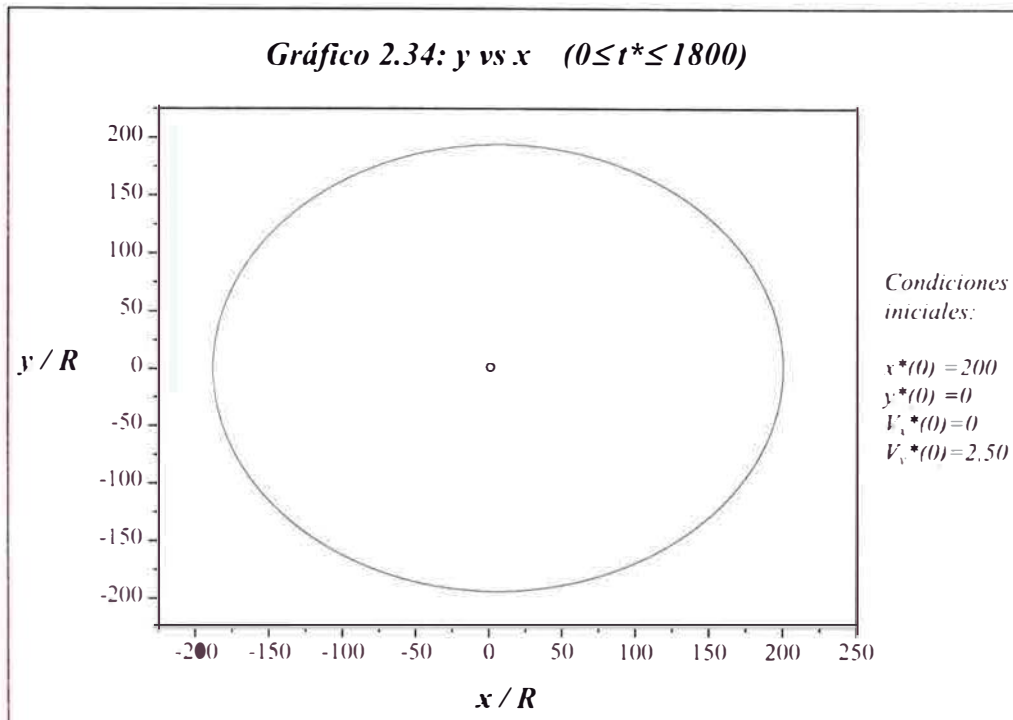
$$\dot{x}^*(0) = 0, \quad \dot{y}^*(0) = 2,50$$

En el gráfico 2.33 muestra a la energía mecánica adimensional de la partícula en función del tiempo unidimensional. Esta energía se mantuvo constante en $-3,3250$.



El gráfico 2.34 representa la trayectoria de la partícula. Como se puede observar se mantiene la misma tendencia que en los gráficos anteriores porque la trayectoria parece aproximarse a una curva elíptica.

En el gráfico 2.35 se realiza una ampliación de parte de la trayectoria de la partícula observándose que está formada por línea gruesa que en realidad está constituida por líneas muy próximas.



En los gráficos anteriores se mostraron las trayectorias que realizaría la partícula para diferentes velocidades iniciales. Se puede observar que a medida que la magnitud de esta velocidad aumenta de $0,60$ a $2,50$ radios-día^{-1} , la trayectoria pasa de una curva abierta que tiene la forma de una “*elipse rotante*” a una curva prácticamente cerrada que correspondería a una *elipse*. Es decir, la trayectoria de la partícula está restringida a una región anular de valores extremos cada vez más próximos alrededor del anillo.

Cuando la rapidez de la partícula es $2,50$ radios-día^{-1} su orbita alrededor del anillo es *estable*. Este resultado se confirmó ampliando el tiempo que dura el movimiento de la partícula a 5000 días y no se observó variación con respecto al gráfico 2.34.

En los gráficos del 2.36 al 2.41 se muestran como varía respecto del tiempo la distancia de la partícula al centro del anillo. Esta distancia es una función periódica del tiempo y además se encuentra acotada. Se observara que cuando aumenta la velocidad de lanzamiento de $0,90$ radios-día^{-1} \vec{j} a $2,50$ radios-día^{-1} \vec{j} , se incrementa el periodo de la función $r^*(t)$, mientras que el valor mínimo de la distancia se aproxima a su valor máximo el cual permanece constante. Por lo que otra vez comprobamos que la partícula se mueve en una región anular.

Gráfico 2.36:

En este gráfico se representa como varía la distancia de la partícula adimensional al centro del anillo r^* en función del tiempo adimensional t^* cuando la partícula es lanzada con una velocidad:

$$\dot{x}^*(0) = 0, \quad \dot{y}^*(0) = 0,60$$

Como se puede observar la distancia de la partícula al centro del anillo está acotada entre un valor mínimo y uno máximo, además es una función periódica respecto del tiempo.

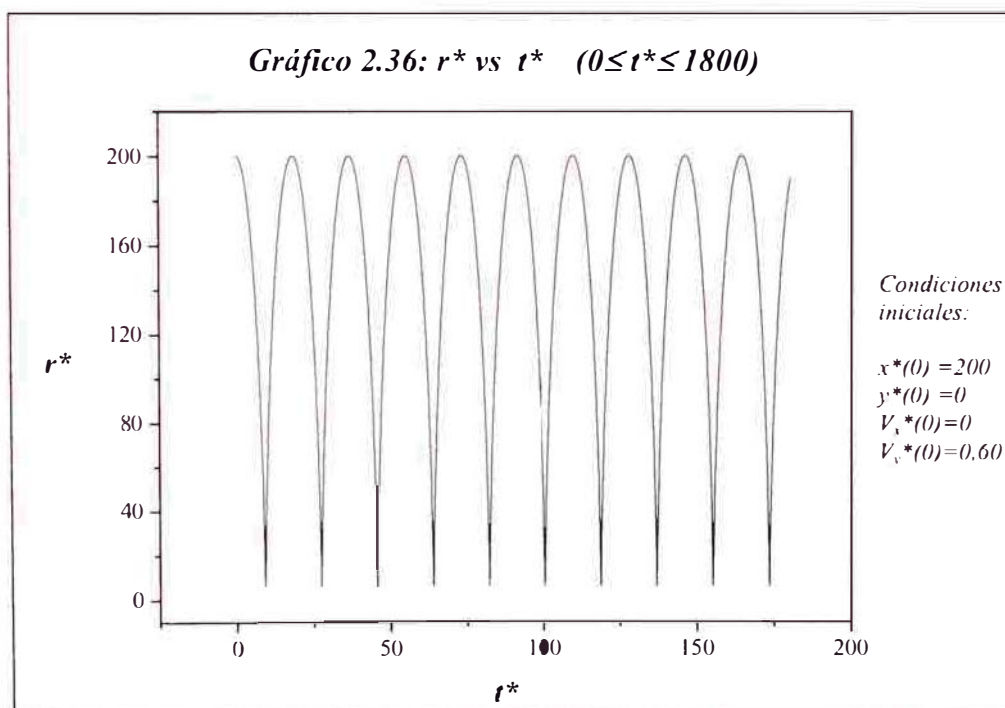


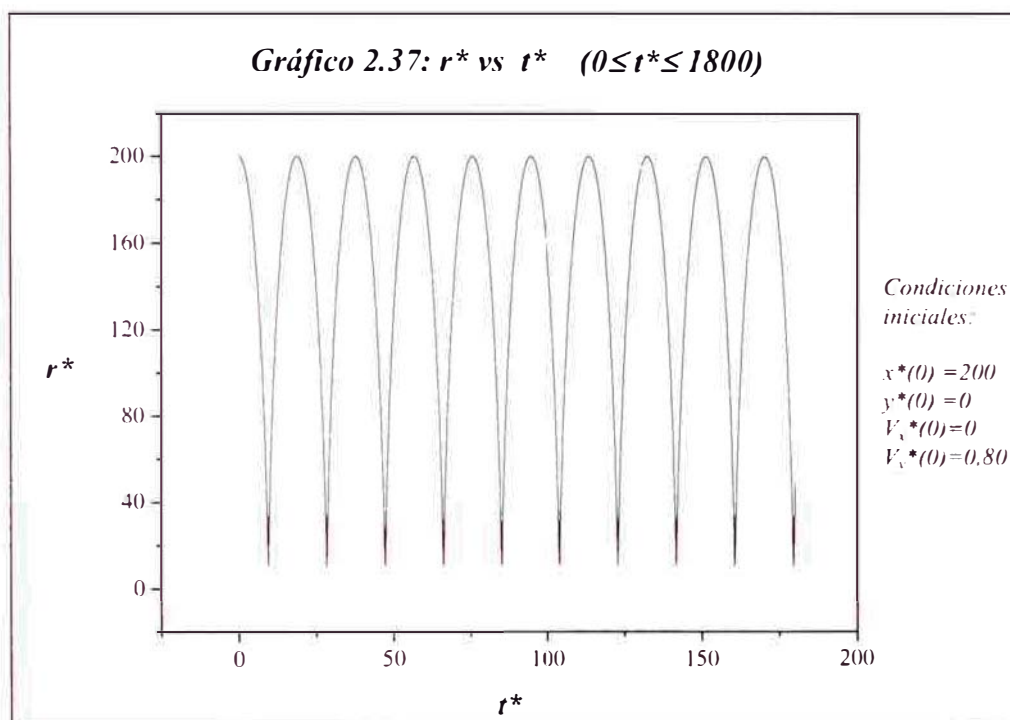
Gráfico 2.37:

Cuando la partícula es lanzada con una velocidad inicial de:

$$\dot{x}^*(0) = 0, \quad \dot{y}^*(0) = 0,80$$

El gráfico 2.37 muestra como varía la distancia de la partícula adimensional al centro del anillo r^* en función del tiempo adimensional t^* .

Este gráfico tiene las mismas características del gráfico anterior.

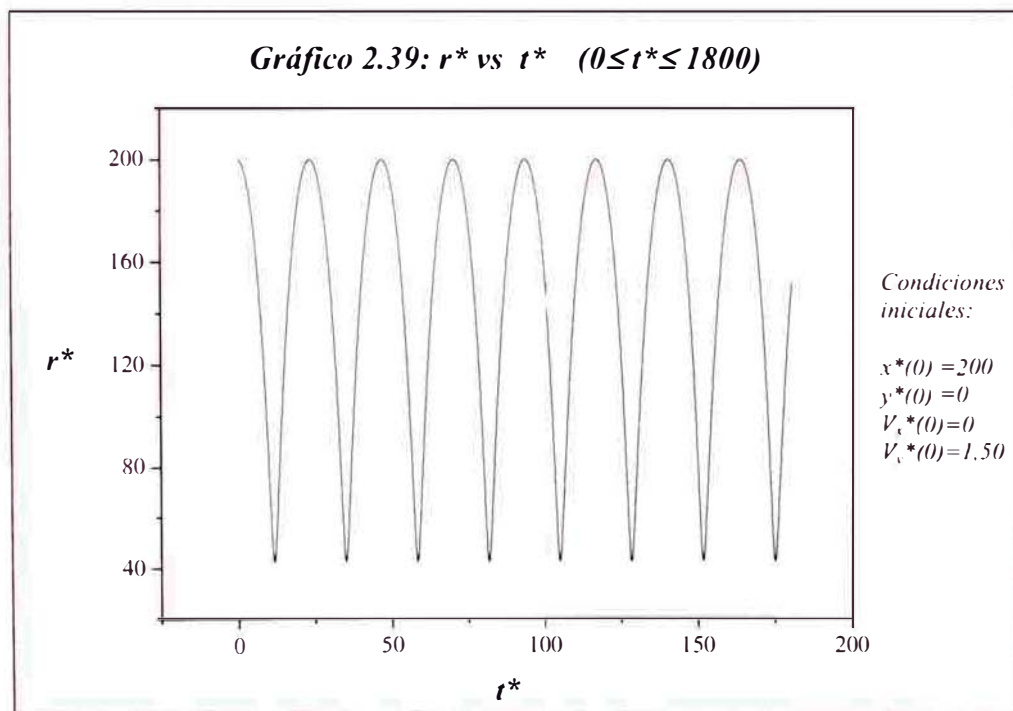
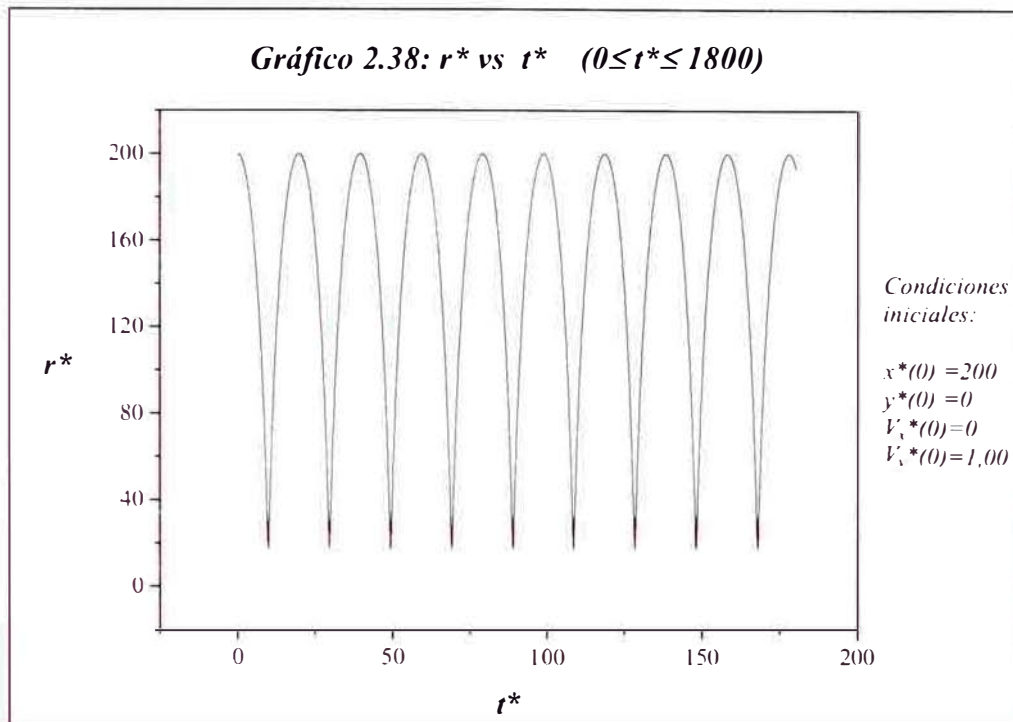


Gráficos 2.38 y 2.39:

En estos gráficos se representa como varía la distancia de la partícula adimensional al centro del anillo r^* en función del tiempo adimensional t^* cuando la partícula es lanzada respectivamente con velocidades de:

$$\dot{x}^*(0) = 0, \quad \dot{y}^*(0) = 1,00$$

$$\dot{x}^*(0) = 0, \quad \dot{y}^*(0) = 1,50$$

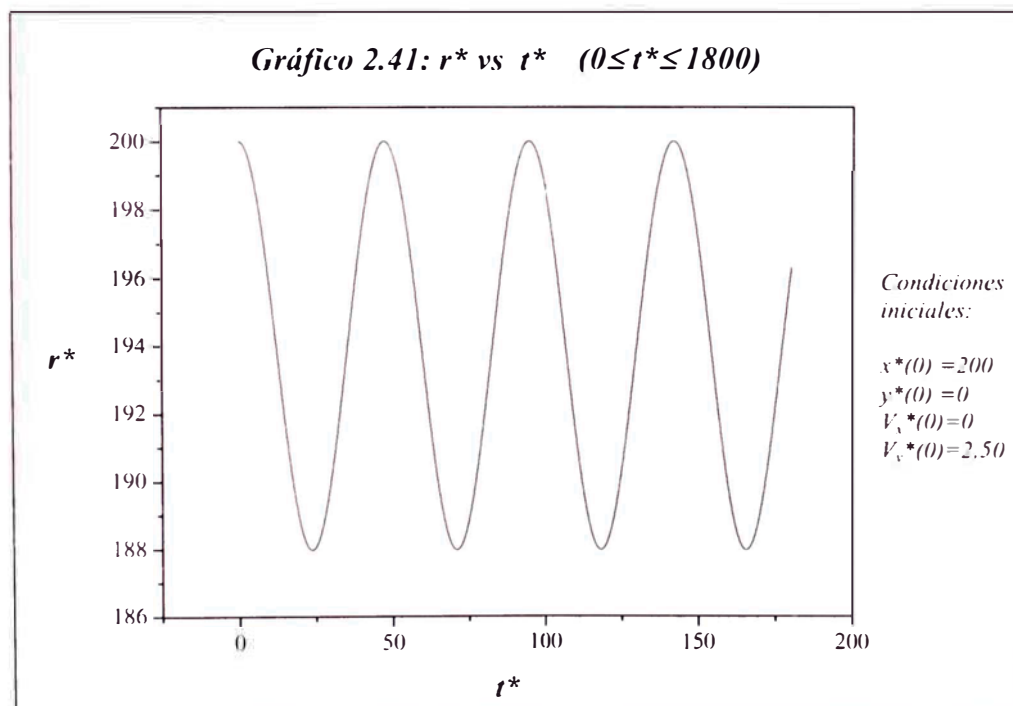
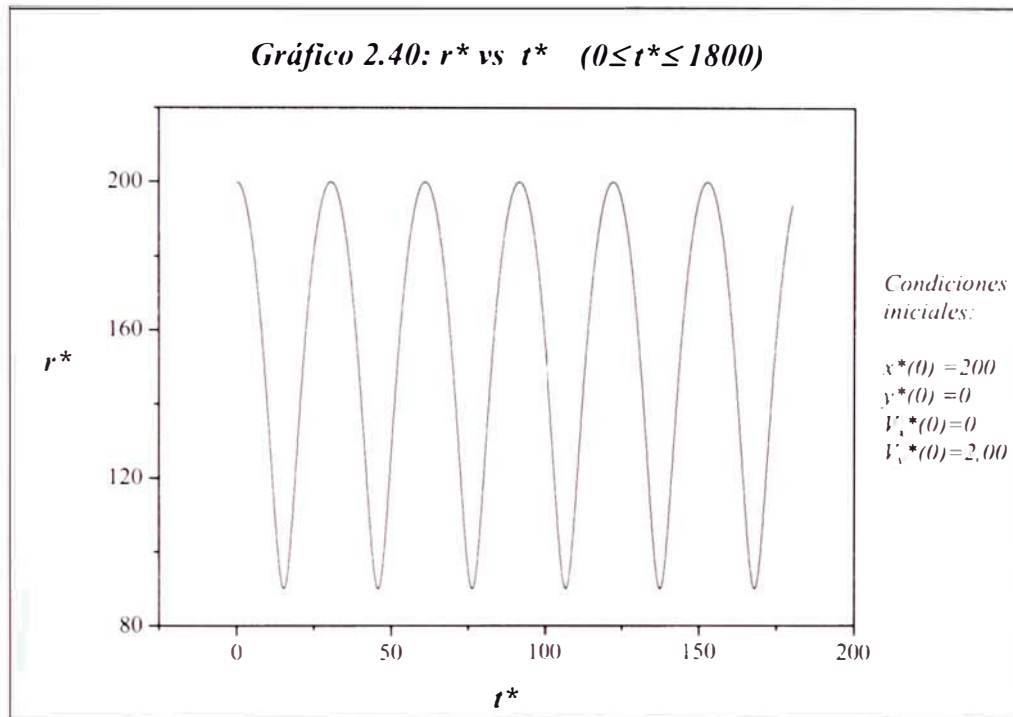


Gráficos 2.40 y 2.41:

En los gráficos 2.40 y 2.41 se muestra como varía la distancia de la partícula adimensional al centro del anillo r^* en función del tiempo adimensional t^* cuando la partícula es lanzada respectivamente con velocidades de:

$$\dot{x}^*(0) = 0, \quad \dot{y}^*(0) = 2,00$$

$$\dot{x}^*(0) = 0, \quad \dot{y}^*(0) = 2,50$$



3. Movimiento de una partícula alrededor de dos anillos

3.1 Introducción.

3.2 Ecuaciones diferenciales del movimiento de una partícula alrededor de dos anillos.

3.3 Ecuaciones diferenciales ordinarias de movimiento adimensionales.

3.4 Ecuación de la energía mecánica adimensional.

3.5 Solución numérica de las ecuaciones diferenciales ordinarias de movimiento de la partícula.

3.6 Resultados.

3.1 Introducción

En este capítulo se determinan las ecuaciones diferenciales ordinarias de movimiento de una partícula que se traslada en la región externa a dos anillos. Los anillos tienen masas iguales e igual radio y se encuentran ubicados simétricamente respecto del origen de coordenadas. Utilizaremos algunos de las ecuaciones obtenidas en el capítulo anterior para determinar la fuerza gravitatoria ejercida por cada anillo sobre la partícula, para luego obtener las ecuaciones diferenciales ordinarias de movimiento.

En la solución de este problema se han realizado las siguientes consideraciones:

- Los anillos están fijos en posiciones simétricas respecto del origen de coordenadas.
- La velocidad inicial y el vector de posición inicial de la partícula se encuentran contenidas en el mismo plano que contiene a ambos anillos.
- El sistema formado por los anillos y la partícula se encuentra aislado de toda influencia exterior.
- La masa de la partícula es muy pequeña en comparación con la masa de cada anillo.
- El movimiento se efectúa en el vacío.
- La rapidez de la partícula es pequeña en comparación a la rapidez de la luz.

Nos limitaremos al caso en el que la trayectoria realizada por la partícula sea exterior a la circunferencia de ambos anillos.

3.2 Ecuaciones diferenciales del movimiento de una partícula alrededor de dos anillos

Consideremos a una partícula de masa m que se encuentra ubicada en el punto P , en la región exterior a dos cuerpos A y B , en reposo, que tienen masas M distribuida uniformemente en circunferencias de radio R , tal como se muestra en la siguiente figura:

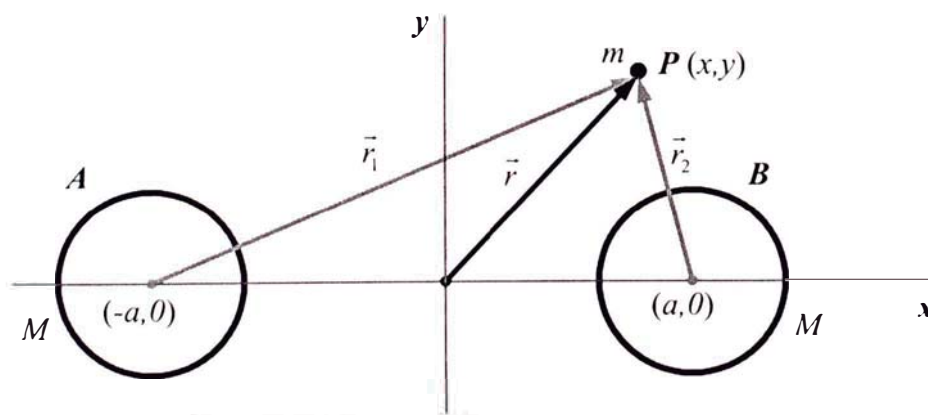


Figura 3.1

La fuerza gravitatoria resultante que actúa sobre la partícula de masa m ubicada en el punto P de coordenadas (x,y) se obtiene sumando las fuerzas gravitatorias ejercidas individualmente por los anillos A y B sobre la partícula.

La fuerza gravitatoria ejercida por un anillo de masa M uniformemente distribuida y radio R , con su centro ubicado en el origen de coordenadas, sobre una partícula ubicada en el punto P de coordenadas (x,y) está dada por la ecuación (1.31):

$$\vec{F} = -GmM(r^{-3} + \frac{3}{4}R^2 \cdot r^{-5} + \frac{45}{64}R^4r^{-7} + \frac{175}{256}R^6r^{-9} + \frac{11025}{16384}R^8r^{-11})\vec{r} \quad (3.1)$$

donde \vec{r} representa la posición del punto P respecto del centro del anillo.

De la figura 3.1 se observa que las posiciones del punto P respecto de los centros de los anillos A y B son \vec{r}_1 y \vec{r}_2 , respectivamente. Por lo tanto, las fuerzas gravitatorias ejercidas por los anillos A y B, \vec{F}_1 y \vec{F}_2 , son:

$$\vec{F}_1 = -GmM(r_1^{-3} + \frac{3}{4}R^2r_1^{-5} + \frac{45}{64}R^4r_1^{-7} + \frac{175}{256}R^6r_1^{-9} + \frac{11025}{16384}R^8r_1^{-11})\vec{r}_1 \quad (3.2)$$

$$\vec{F}_2 = -GmM(r_2^{-3} + \frac{3}{4}R^2r_2^{-5} + \frac{45}{64}R^4r_2^{-7} + \frac{175}{256}R^6r_2^{-9} + \frac{11025}{16384}R^8r_2^{-11})\vec{r}_2 \quad (3.3)$$

A partir de la figura 3.1 tenemos que:

$$\vec{r}_1 = \vec{r} + \vec{a} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x_1 &= x + a \quad ; \quad y_1 = y \\ |\vec{r}_1| &= \sqrt{(x+a)^2 + y^2} \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\vec{r}_2 = \vec{r} - \vec{a} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x_2 &= x - a \quad ; \quad y_2 = y \\ |\vec{r}_2| &= \sqrt{(x-a)^2 + y^2} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Reemplazando las ecuaciones (3.4) y (3.5) en las ecuaciones (3.2) y (3.3) se obtiene:

$$\vec{F}_1 = -GmM(r_1^{-3} + \frac{3}{4}R^2 \cdot r_1^{-5} + \frac{45}{64}R^4r_1^{-7} + \frac{175}{256}R^6r_1^{-9} + \frac{11025}{16384}R^8r_1^{-11})(\vec{r} + \vec{a}) \quad (3.6)$$

$$\vec{F}_2 = -GmM(r_2^{-3} + \frac{3}{4}R^2 \cdot r_2^{-5} + \frac{45}{64}R^4r_2^{-7} + \frac{175}{256}R^6r_2^{-9} + \frac{11025}{16384}R^8r_2^{-11})(\vec{r} - \vec{a}) \quad (3.7)$$

La fuerza gravitatoria resultante, \vec{F} , que actúa sobre la partícula de masa m debido a la acción de los anillos es:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \quad (3.8)$$

Aplicando la segunda ley de Newton tenemos que:

$$\vec{F} = m \vec{\ddot{r}} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \quad (3.9)$$

Reemplazando las ecuaciones (3.6), (3.7) y (3.8) en (3.9) obtenemos que las componentes de la aceleración de la partícula están dadas por:

$$\ddot{x} = -GM \left[\left(\frac{1}{r_1^3} + \frac{3 R^2}{4 r_1^5} + \frac{45 R^4}{64 r_1^7} + \frac{175 R^6}{256 r_1^9} + \frac{11025 R^8}{16384 r_1^{11}} \right) (x+a) + \left(\frac{1}{r_2^3} + \frac{3 R^2}{4 r_2^5} + \frac{45 R^4}{64 r_2^7} + \frac{175 R^6}{256 r_2^9} + \frac{11025 R^8}{16384 r_2^{11}} \right) (x-a) \right] \quad (3.10)$$

$$\ddot{y} = -GM \left[\left(\frac{1}{r_1^3} + \frac{3 R^2}{4 r_1^5} + \frac{45 R^4}{64 r_1^7} + \frac{175 R^6}{256 r_1^9} + \frac{11025 R^8}{16384 r_1^{11}} \right) (y+a) + \left(\frac{1}{r_2^3} + \frac{3 R^2}{4 r_2^5} + \frac{45 R^4}{64 r_2^7} + \frac{175 R^6}{256 r_2^9} + \frac{11025 R^8}{16384 r_2^{11}} \right) (y-a) \right] \quad (3.11)$$

3.3 Ecuaciones diferenciales ordinarias de movimiento adimensionales

La resolución de este sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden nos permite determinar las coordenadas de la partícula de masa m y por consiguiente la trayectoria que realiza.

Para una mayor facilidad en el análisis del problema escribiremos las ecuaciones diferenciales ordinarias en forma adimensional. Para obtener estas ecuaciones definimos:

$$x^* \equiv \frac{x}{R}, \quad y^* \equiv \frac{y}{R}, \quad t^* \equiv \frac{t}{\gamma}, \quad a^* \equiv \frac{a}{R}, \quad r_1^* \equiv \frac{r_1}{R}, \quad r_2^* \equiv \frac{r_2}{R} \quad (3.12)$$

donde R es el radio del anillo y $\gamma = 1,00 \text{ día} = 8,64 \times 10^4 \text{ s}$. De esta manera los valores de x^* , y^* , a^* , r_1^* y r_2^* significan distancias medidas en radios del anillo, así como t^* expresa el tiempo medido en días.

Además de las definiciones anteriores, tenemos

$$r_1^n = R r_1^{*n} \quad ; \quad r_2^n = R r_2^{*n} \quad (3.13)$$

A partir de la ecuación (3.12) podemos hallar las componentes x e y de la velocidad y la aceleración adimensionales:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{R}{\gamma} \frac{dx^*}{dt^*} \quad ; \quad \frac{dy}{dt} = \frac{R}{\gamma} \frac{dy^*}{dt^*} \quad (3.14)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{R}{\gamma^2} \frac{d^2x^*}{dt^{*2}} \quad ; \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{R}{\gamma^2} \frac{d^2y^*}{dt^{*2}} \quad (3.15)$$

Reemplazando las ecuaciones (3.12), (3.13), (3.14) y (3.15) en las ecuaciones (3.10) y (3.11) obtenemos las siguientes ecuaciones diferenciales adimensionales:

$$\ddot{x}^* = -\frac{GM\gamma^2}{R^3} \left[\left(\frac{1}{r_1^{*3}} + \frac{3}{4r_1^{*5}} + \frac{45}{64r_1^{*7}} + \frac{175}{256r_1^{*9}} + \frac{11025}{16384r_1^{*11}} \right) (x^* + a^*) + \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{r_2^{*3}} + \frac{3}{4r_2^{*5}} + \frac{45}{64r_2^{*7}} + \frac{175}{256r_2^{*9}} + \frac{11025}{16384r_2^{*11}} \right) (x^* - a^*) \right] \quad (3.16)$$

$$\ddot{y}^* = -\frac{GM\gamma^2}{R^3} \left[\left(\frac{1}{r_1^{*3}} + \frac{3}{4r_1^{*5}} + \frac{45}{64r_1^{*7}} + \frac{175}{256r_1^{*9}} + \frac{11025}{16384r_1^{*11}} \right) (y^* + a^*) + \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{r_2^{*3}} + \frac{3}{4r_2^{*5}} + \frac{45}{64r_2^{*7}} + \frac{175}{256r_2^{*9}} + \frac{11025}{16384r_2^{*11}} \right) (y^* - a^*) \right] \quad (3.17)$$

Considerando que la masa y el radio del anillo circular corresponden al planeta Saturno, obtenemos para la constante:

$$\frac{GM\gamma^2}{R^3} = \frac{6,67 \times 10^{-11} \cdot 5,69 \times 10^{26} \cdot (8,64 \times 10^4)^2}{(6,03 \times 10^7)^3} = 1290 \quad (3.18)$$

Reemplazando la ecuación (3.18) en las ecuaciones (3.16) y (3.17):

$$\ddot{x}^* = -1290 \left[\left(\frac{1}{r_1^{*3}} + \frac{3}{4r_1^{*5}} + \frac{45}{64r_1^{*7}} + \frac{175}{256r_1^{*9}} + \frac{11025}{16384r_1^{*11}} \right) (x^* + a^*) + \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{r_2^{*3}} + \frac{3}{4r_2^{*5}} + \frac{45}{64r_2^{*7}} + \frac{175}{256r_2^{*9}} + \frac{11025}{16384r_2^{*11}} \right) (x^* - a^*) \right] \quad (3.19)$$

$$\ddot{y}^* = -1290 \left[\left(\frac{1}{r_1^{*3}} + \frac{3}{4r_1^{*5}} + \frac{45}{64r_1^{*7}} + \frac{175}{256r_1^{*9}} + \frac{11025}{16384r_1^{*11}} \right) (y^* + a^*) + \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{r_2^{*3}} + \frac{3}{4r_2^{*5}} + \frac{45}{64r_2^{*7}} + \frac{175}{256r_2^{*9}} + \frac{11025}{16384r_2^{*11}} \right) (y^* - a^*) \right] \quad (3.20)$$

Comparando las ecuaciones (3.10) y (3.11) con (3.19) y (3.20) observamos que los coeficientes de las potencias de $\frac{1}{r_1^*}$ y $\frac{1}{r_2^*}$ son los mismos que las de las potencias de $\frac{1}{r_1}$ y

$\frac{1}{r_2}$ respectivamente.

3.4 Ecuación de la energía mecánica adimensional

La fuerza gravitatoria resultante que actúa sobre la partícula es una fuerza conservativa. Por lo tanto, la energía mecánica de la partícula se mantiene constante. Como se procedió en el movimiento de una partícula alrededor de un anillo, comprobaremos que los cálculos que se efectuarán son correctos, calculando la energía mecánica adimensional. Es obvio que esta magnitud depende de x^* , y^* , r_1^* , r_2^* y a^* , así como de \dot{x}^* e \dot{y}^* .

La energía cinética de la partícula está dada por:

$$E_k \equiv \frac{1}{2} m \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 \right] \quad (3.21)$$

Utilizando la ecuación (3.14) en la ecuación (3.21), obtenemos:

$$E_k \equiv \frac{1}{2} \frac{mR^2}{\gamma^2} \left[\left(\frac{dx^*}{dt^*} \right)^2 + \left(\frac{dy^*}{dt^*} \right)^2 \right] \quad (3.22)$$

Esta expresión se puede escribir como:

$$E_k \equiv \frac{1}{2} \frac{mR^2}{\gamma^2} (\dot{x}^{*2} + \dot{y}^{*2}) \quad (3.23)$$

A partir de la ecuación (1.47) tenemos que la energía potencial gravitatoria de la partícula ubicada a una distancia r respecto del centro de un anillo es

$$E_p(r) = -GmM \left(r^{-1} + \frac{1}{4} R^2 r^{-3} + \frac{9}{64} R^4 r^{-5} + \frac{25}{256} R^6 r^{-7} + \frac{1225}{16384} R^8 r^{-9} \right) \quad (3.24)$$

Por el principio de superposición, la energía potencial gravitatoria de la partícula es igual a la suma de las energías potenciales de la partícula debido a las interacciones individuales con cada anillo, es decir

$$E_p(r) = E_p(r_1) + E_p(r_2) \quad (3.25)$$

A partir de la ecuación (3.24) obtenemos

$$E_p(r_1) = -GmM \left(r_1^{-1} + \frac{1}{4} R^2 r_1^{-3} + \frac{9}{64} R^4 r_1^{-5} + \frac{25}{256} R^6 r_1^{-7} + \frac{1225}{16384} R^8 r_1^{-9} \right) \quad (3.26)$$

$$E_p(r_2) = -GmM \left(r_2^{-1} + \frac{1}{4} R^2 r_2^{-3} + \frac{9}{64} R^4 r_2^{-5} + \frac{25}{256} R^6 r_2^{-7} + \frac{1225}{16384} R^8 r_2^{-9} \right) \quad (3.27)$$

Utilizando las ecuaciones (3.12), (3.13), (3.26) y (3.27) en la (3.25) obtenemos

$$E_p = -GmM(r_1^{*-1} + \frac{1}{4}r_1^{*-3} + \frac{9}{64}r_1^{*-5} + \frac{25}{256}r_1^{*-7} + \frac{1225}{16384}r_1^{*-9} + r_2^{*-1} + \frac{1}{4}r_2^{*-3} + \frac{9}{64}r_2^{*-5} + \frac{25}{256}r_2^{*-7} + \frac{1225}{16384}r_2^{*-9}) \quad (3.28)$$

Mediante las ecuaciones (3.23) y (3.28) obtenemos que la energía mecánica de la partícula está dada por:

$$E_m = \frac{mR^2}{\gamma^2} \left\{ \frac{1}{2}[\dot{x}^{*2} + \dot{y}^{*2}] - \frac{GM\gamma^2}{R^3} \left(\frac{1}{r_1^*} + \frac{1}{4r_1^{*3}} + \frac{9}{64r_1^{*5}} + \frac{25}{256r_1^{*7}} + \frac{1225}{16384r_1^{*9}} + \frac{1}{r_2^*} + \frac{1}{4r_2^{*3}} + \frac{9}{64r_2^{*5}} + \frac{25}{256r_2^{*7}} + \frac{1225}{16384r_2^{*9}} \right) \right\} \quad (3.29)$$

La ecuación (3.29) se puede escribir así:

$$\frac{mR^2}{\gamma^2} E_m = \left\{ \frac{1}{2}[\dot{x}^{*2} + \dot{y}^{*2}] - \frac{GM\gamma^2}{R^3} \left(\frac{1}{r_1^*} + \frac{1}{4r_1^{*3}} + \frac{9}{64r_1^{*5}} + \frac{25}{256r_1^{*7}} + \frac{1225}{16384r_1^{*9}} + \frac{1}{r_2^*} + \frac{1}{4r_2^{*3}} + \frac{9}{64r_2^{*5}} + \frac{25}{256r_2^{*7}} + \frac{1225}{16384r_2^{*9}} \right) \right\} \quad (3.30)$$

Definimos la energía mecánica adimensional E_m^* como la magnitud:

$$E_m^* = \frac{\gamma^2}{mR^2} E_m \quad (3.31)$$

Es evidente que esta cantidad es directamente proporcional a la energía mecánica de la partícula y que por lo tanto es una constante del movimiento de la partícula.

De las ecuaciones (3.30) y (3.31) tenemos la energía mecánica adimensional de la partícula en función de r_1^* y r_2^* , así como de \dot{x}^* e \dot{y}^* .

$$E_m^* = \left\{ \frac{1}{2}[\dot{x}^{*2} + \dot{y}^{*2}] - \frac{GM\gamma^2}{R^3} \left(\frac{1}{r_1^*} + \frac{1}{4r_1^{*3}} + \frac{9}{64r_1^{*5}} + \frac{25}{256r_1^{*7}} + \frac{1225}{16384r_1^{*9}} + \frac{1}{r_2^*} + \frac{1}{4r_2^{*3}} + \frac{9}{64r_2^{*5}} + \frac{25}{256r_2^{*7}} + \frac{1225}{16384r_2^{*9}} \right) \right\} \quad (3.32)$$

3.5 Solución numérica de las ecuaciones diferenciales ordinarias de movimiento de la partícula alrededor de los dos anillos

Las ecuaciones diferenciales ordinarias adimensionales de movimiento de la partícula alrededor del anillo están dadas por las ecuaciones (3.22) y (3.20):

$$\ddot{x}^* = -1290 \left[\left(\frac{1}{r_1^{*3}} + \frac{3}{4r_1^{*5}} + \frac{45}{64r_1^{*7}} + \frac{175}{256r_1^{*9}} + \frac{11025}{16384r_1^{*11}} \right) (x^* + a^*) + \left(\frac{1}{r_2^{*3}} + \frac{3}{4r_2^{*5}} + \frac{45}{64r_2^{*7}} + \frac{175}{256r_2^{*9}} + \frac{11025}{16384r_2^{*11}} \right) (x^* - a^*) \right] \quad (3.33)$$

$$\ddot{y}^* = -1290 \left[\left(\frac{1}{r_1^{*3}} + \frac{3}{4r_1^{*5}} + \frac{45}{64r_1^{*7}} + \frac{175}{256r_1^{*9}} + \frac{11025}{16384r_1^{*11}} \right) (y^* + a^*) + \left(\frac{1}{r_2^{*3}} + \frac{3}{4r_2^{*5}} + \frac{45}{64r_2^{*7}} + \frac{175}{256r_2^{*9}} + \frac{11025}{16384r_2^{*11}} \right) (y^* - a^*) \right] \quad (3.34)$$

Para resolver estas ecuaciones diferenciales las transformaremos en un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden, realizando el siguiente cambio de variable:

$$x^* \equiv x_1, \quad (3.35)$$

$$y^* \equiv x_2, \quad (3.36)$$

$$\frac{dx^*}{dt^*} \equiv x_3, \quad (3.37)$$

$$\frac{dy^*}{dt^*} \equiv x_4, \quad (3.38)$$

De esta definición tenemos que

$$r_1^{*n} = (\sqrt{(x^* + a^*)^2 + y^{*2}})^n = (\sqrt{(x_1 + a^*)^2 + x_2^2})^n \quad (3.39)$$

$$r_2^{*n} = (\sqrt{(x^* - a^*)^2 + y^{*2}})^n = (\sqrt{(x_1 - a^*)^2 + x_2^2})^n \quad (3.40)$$

Con estas nuevas definiciones las ecuaciones diferenciales (3.33) y (3.34) se transforman en las siguientes cuatro ecuaciones diferenciales no lineales y acopladas

$$\frac{dx_1}{dt^*} = x_3 \quad (3.41)$$

$$\frac{dx_2}{dt^*} = x_4 \quad (3.42)$$

$$\begin{aligned} \frac{dx_3}{dt^*} = -1290 \left[\left(\frac{1}{r_1^{*3}} + \frac{3}{4r_1^{*5}} + \frac{45}{64r_1^{*7}} + \frac{175}{256r_1^{*9}} + \frac{11025}{16384r_1^{*11}} \right) (x_1 + a^*) + \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{r_2^{*3}} + \frac{3}{4r_2^{*5}} + \frac{45}{64r_2^{*7}} + \frac{175}{256r_2^{*9}} + \frac{11025}{16384r_2^{*11}} \right) (x_1 - a^*) \right] \end{aligned} \quad (3.43)$$

$$\begin{aligned} \frac{dx_4}{dt^*} = -1290 \left[\left(\frac{1}{r_1^{*3}} + \frac{3}{4r_1^{*5}} + \frac{45}{64r_1^{*7}} + \frac{175}{256r_1^{*9}} + \frac{11025}{16384r_1^{*11}} \right) (x_2 + a^*) + \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{r_2^{*3}} + \frac{3}{4r_2^{*5}} + \frac{45}{64r_2^{*7}} + \frac{175}{256r_2^{*9}} + \frac{11025}{16384r_2^{*11}} \right) (x_2 - a^*) \right] \end{aligned} \quad (3.44)$$

Considerando el caso particular en el que $a^* = 2$, es decir, los centros de los anillos iguales A y B se encuentran fijos ubicados en las coordenadas $(-2R,0)$ y $(2R,0)$, se resolvieron el sistema de ecuaciones diferenciales adimensionales de primer orden. Se utilizó el método numérico de Runge Kutta de orden 4 realizando para ello un programa de computación en Borland Delphi 6.0. Este programa denominado *Mov_Partícula_Dos_Anillos* y su respectivo código de programación se detalla en el apéndice 4, ver página 78.

El paso que se utilizó en la aplicación de este método numérico fue igual a $h = 10^{-3}$. En las soluciones obtenidas se verificó que simultáneamente los valores de las distancias de la partícula a los centros de los anillos no sean menores a $1,5R$ y $5,5R$. Esto garantiza que la aproximación de potencial gravitatorio que utilizamos sea válida.

Asimismo se calculó la energía mecánica adimensional de la partícula verificándose que para cada caso individual ésta no varía inclusive en sus primeras cuatro cifras decimales. Este resultado es muy importante porque nos permite tener la certeza de que los cálculos efectuados son correctos.

Debemos mencionar que en la descripción del movimiento de la partícula se considera como referencias de distancia y tiempo al radio del anillo y un día respectivamente.

3.6 Resultados

En los siguientes casos que estudiaremos se ha considerado que las condiciones iniciales para el movimiento de la partícula correspondan a los órdenes de magnitud de los datos astronómicos observados de los satélites de Saturno, que se detallan en el apéndice 3, ver página 77.

Caso 1

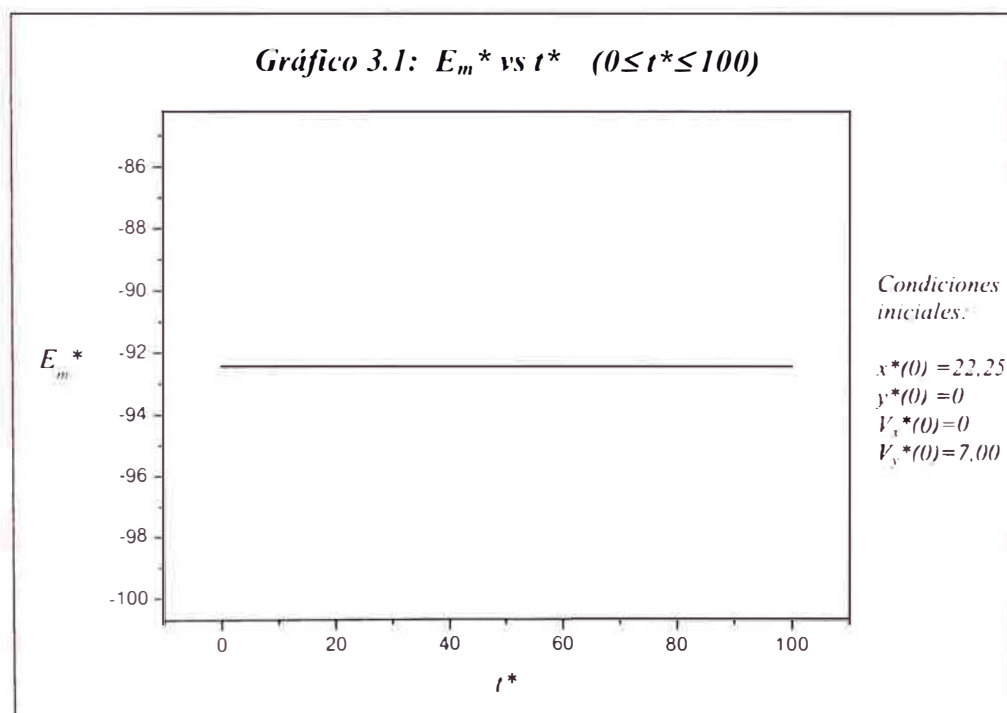
Se consideraron las siguientes condiciones iniciales para el movimiento de la partícula

$$\begin{aligned}x^*(0) &= 22,25, & y^*(0) &= 0, \\ \dot{x}^*(0) &= 0, & \dot{y}^*(0) &= 7,00.\end{aligned}$$

Estas condiciones son del orden de magnitud correspondientes al satélite *Titán*. El movimiento de la partícula corresponde a cinco intervalos de tiempo $[0, t_i]$, donde t_i toma los valores 10, 20, 40, 80 y 100 días.

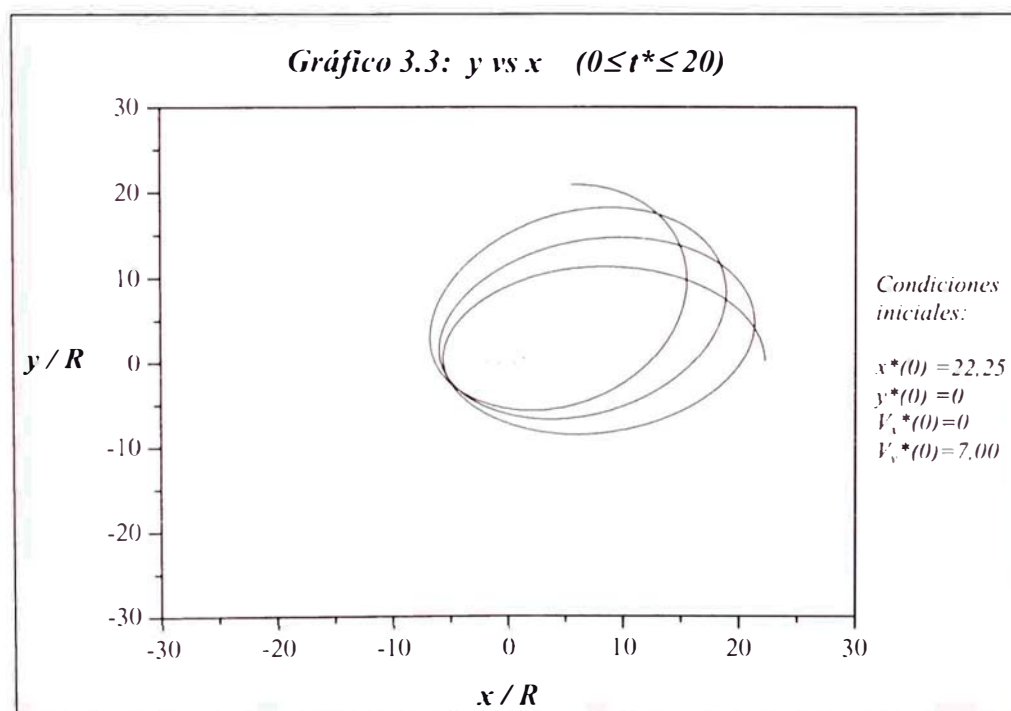
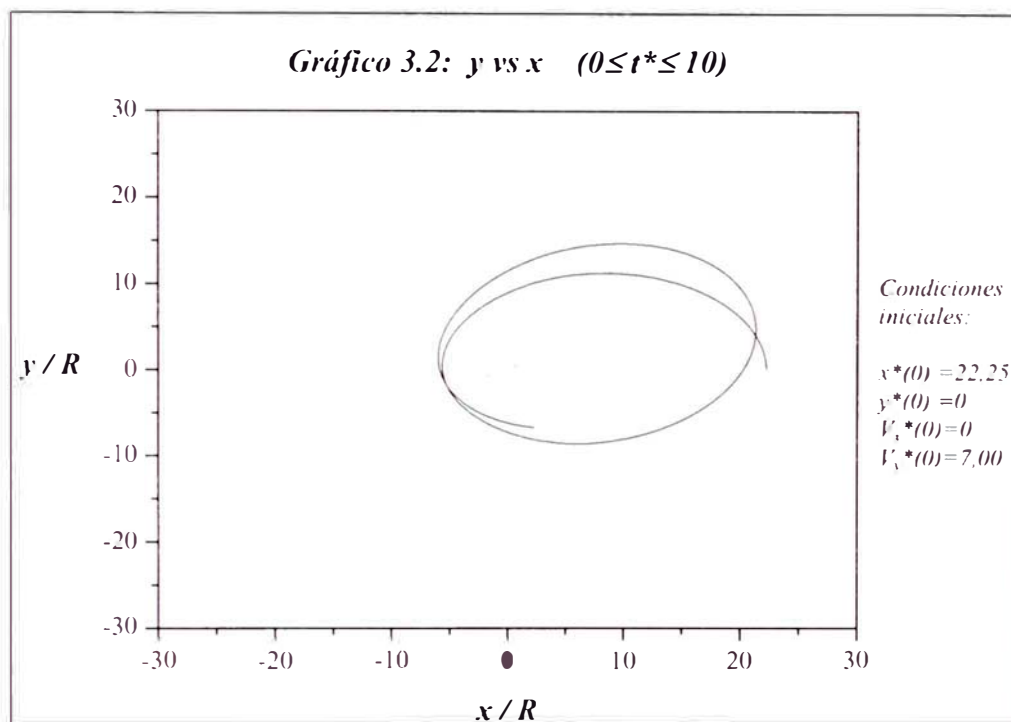
a) Gráfico 3.1

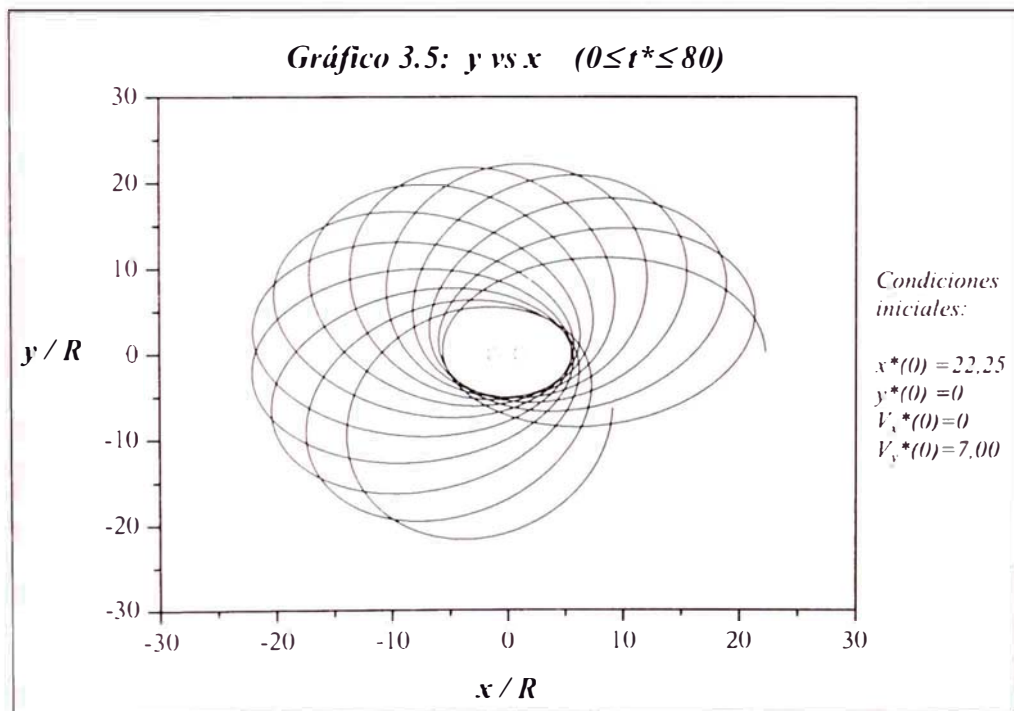
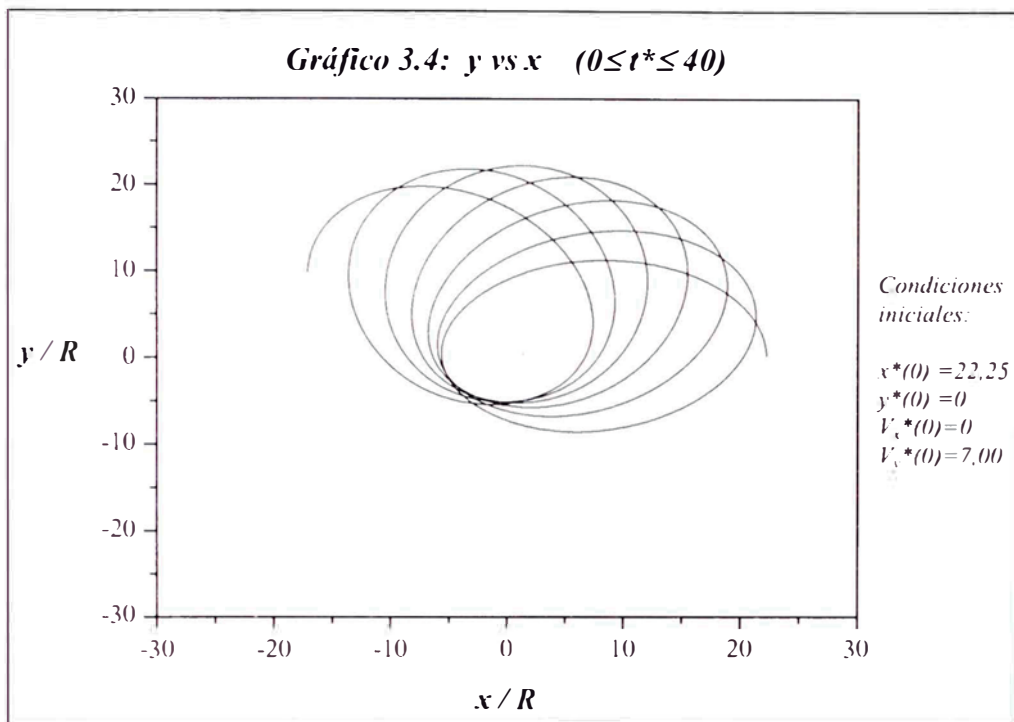
Este gráfico muestra como varía la energía adimensional de la partícula respecto del tiempo. Esta energía se mantuvo constante en un valor de -92,4654.

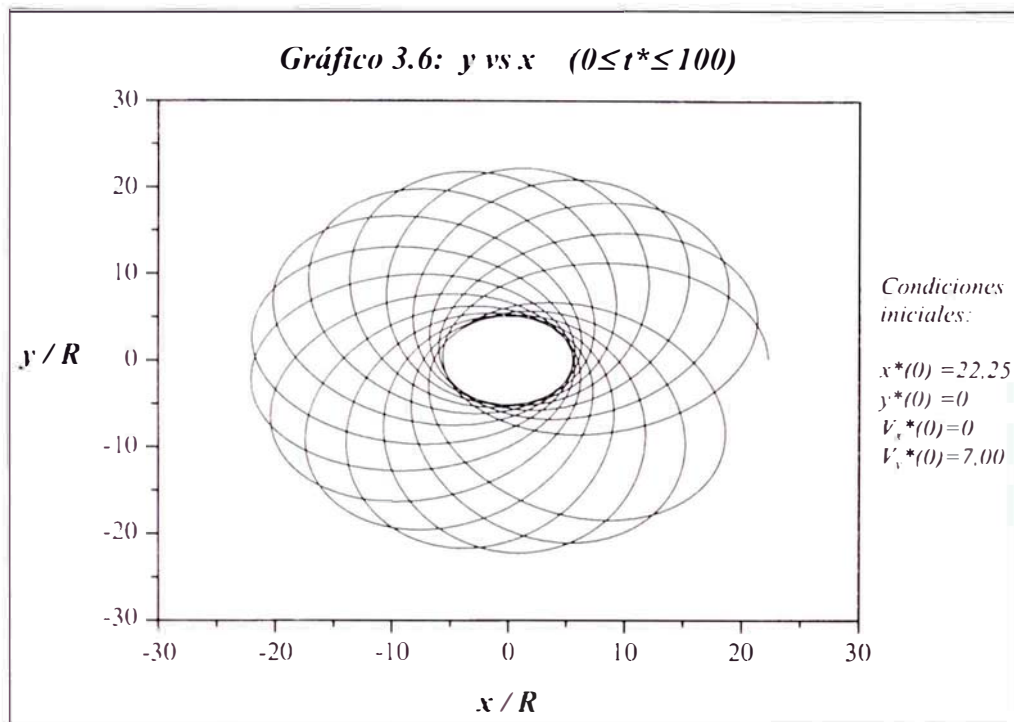


b) Gráficos del 3.2 y al 3.6

Representan la trayectoria de la partícula alrededor de los anillos para los intervalos de tiempo mencionados. Se observa que la partícula está orbitando alrededor del anillo realizando una trayectoria abierta. Mientras mayor es el tiempo que dura el movimiento, se nota más claramente que la trayectoria de la partícula se encuentra limitada a una región elíptica anular alrededor de los anillos. Se puede considerar que la trayectoria abierta descrita por la partícula es una *elipse rotante*.

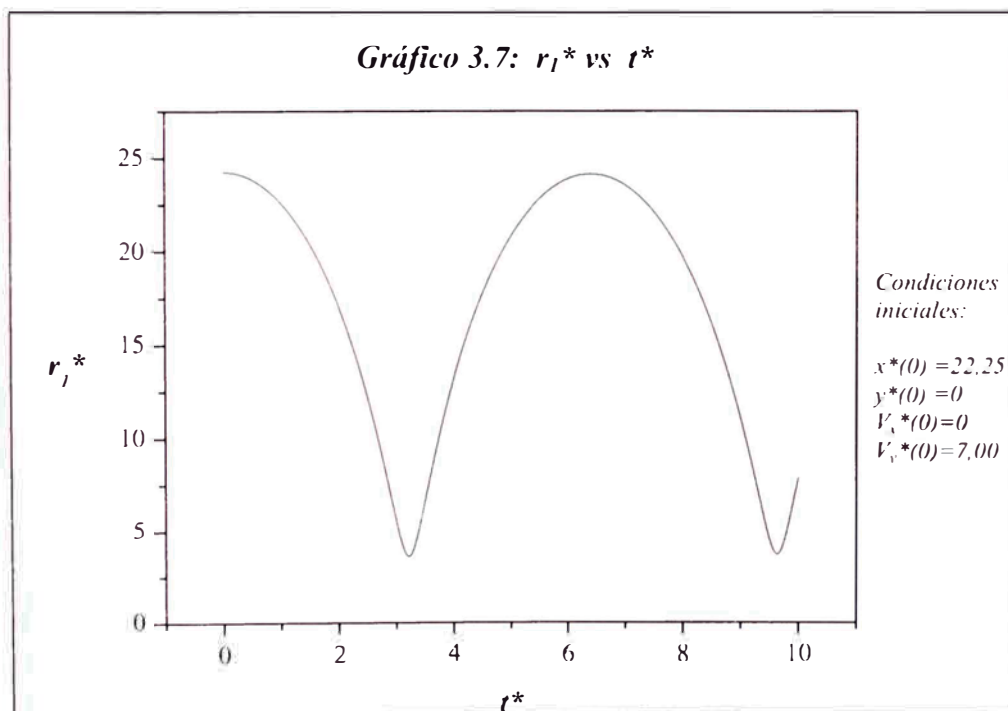


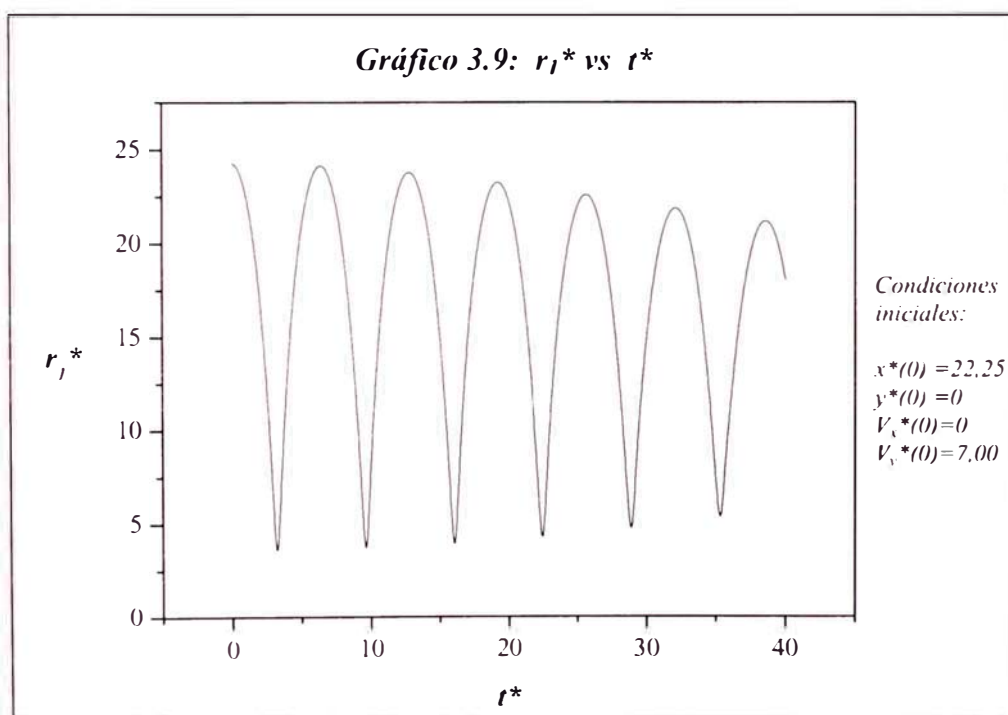
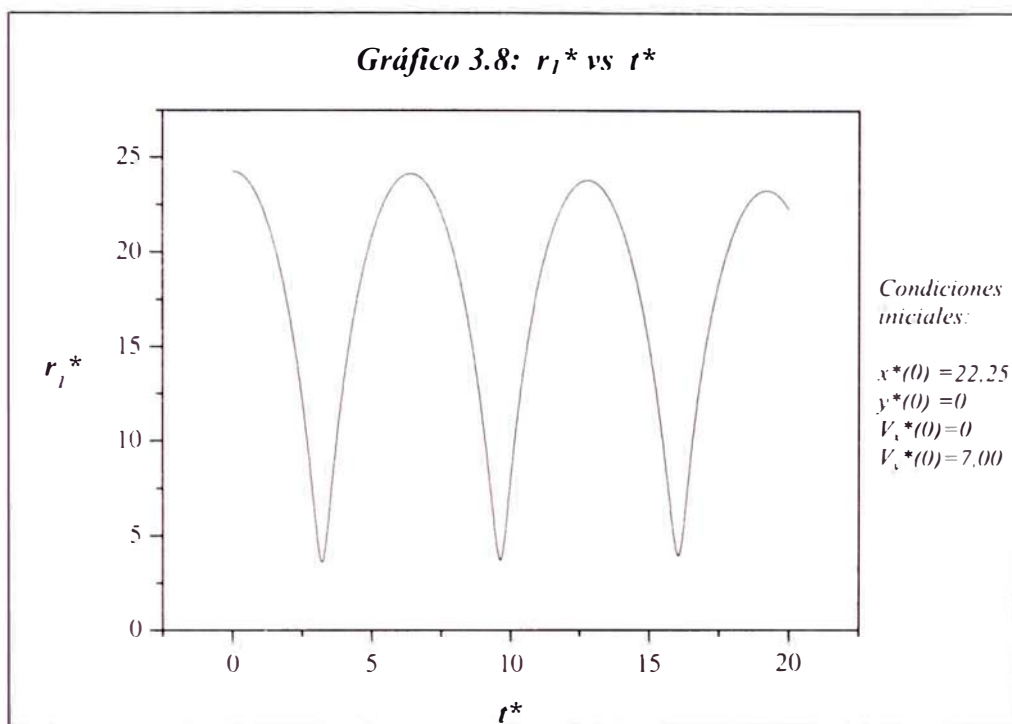


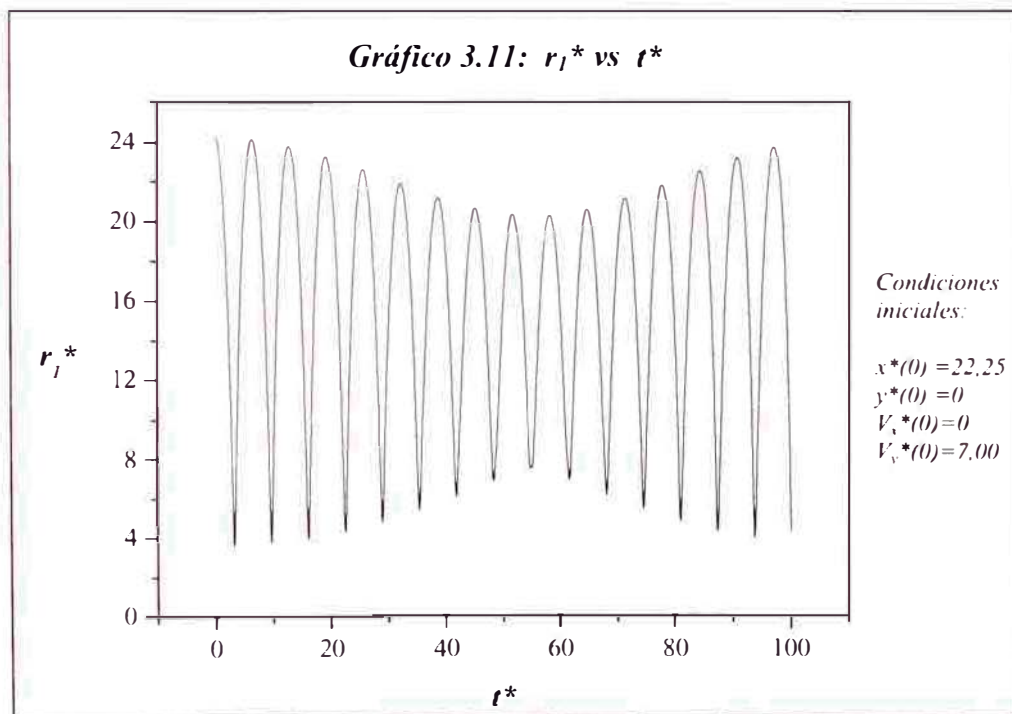
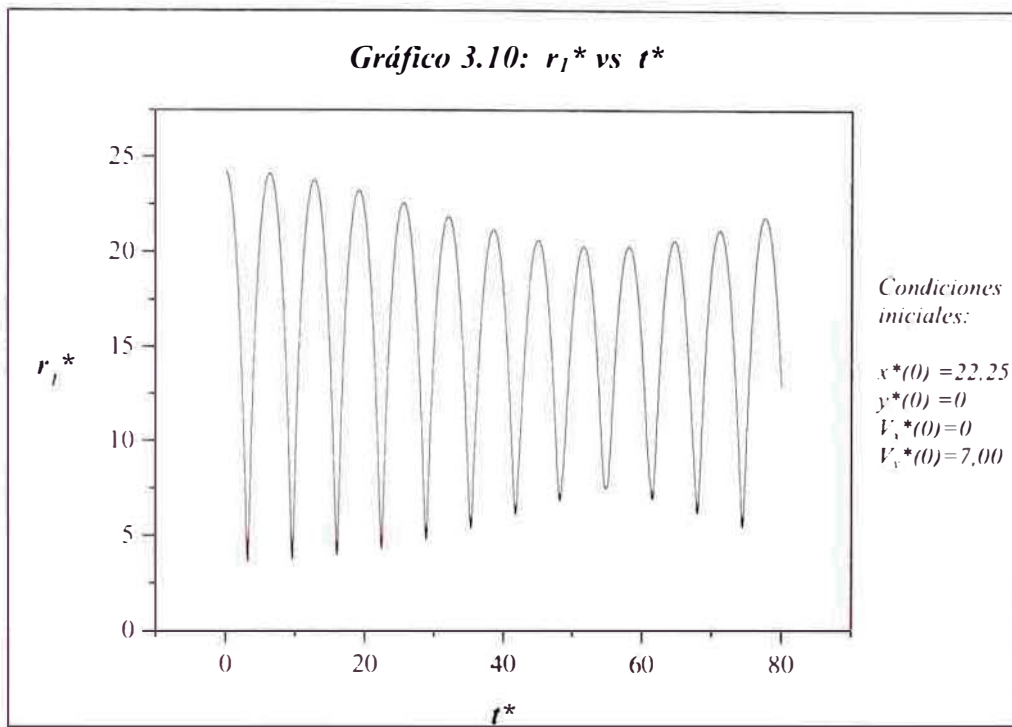


c) Gráficos del 3.7 al 3.11

Representan como varía respecto del tiempo la distancia de la partícula al centro del anillo A (ver figura 3.1). Esta distancia aparentemente es una función periódica respecto del tiempo. Confirmamos que tiene esta característica incrementando el número de días que dura el movimiento a 100 días. Además se puede observar que fluctúa entre dos valores, un mínimo de $3.7R$ y un máximo de $24R$.



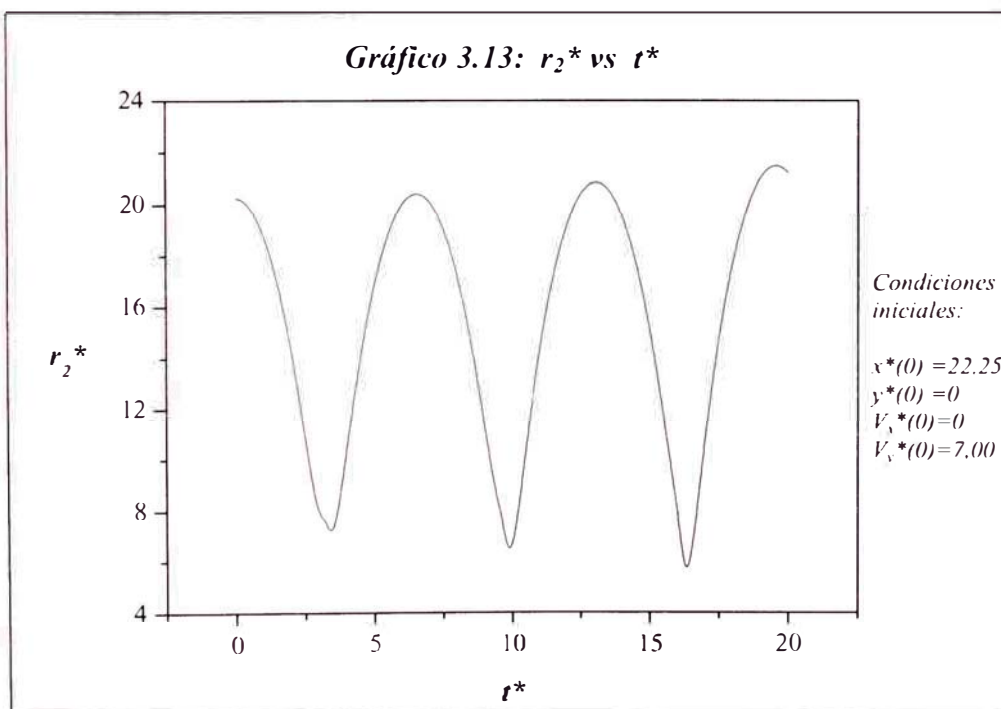
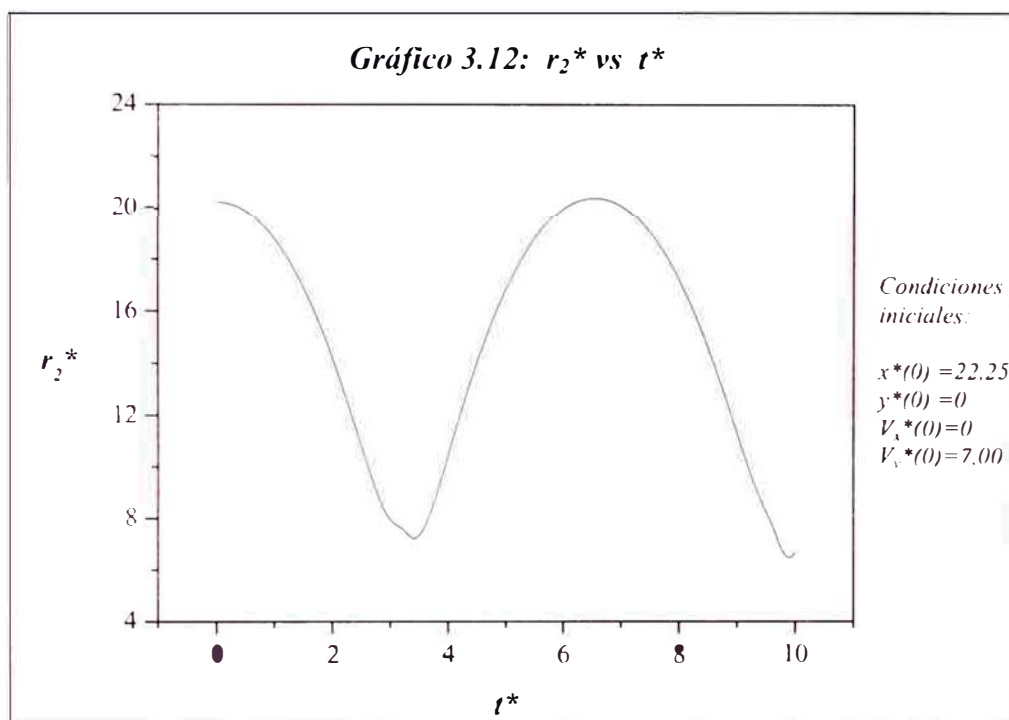


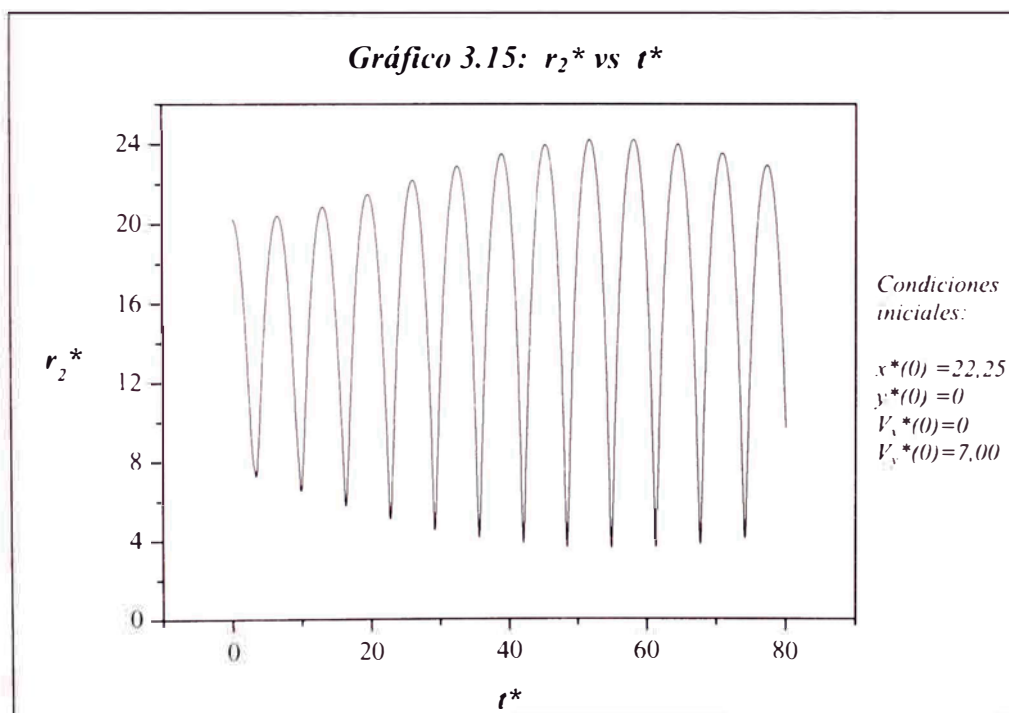
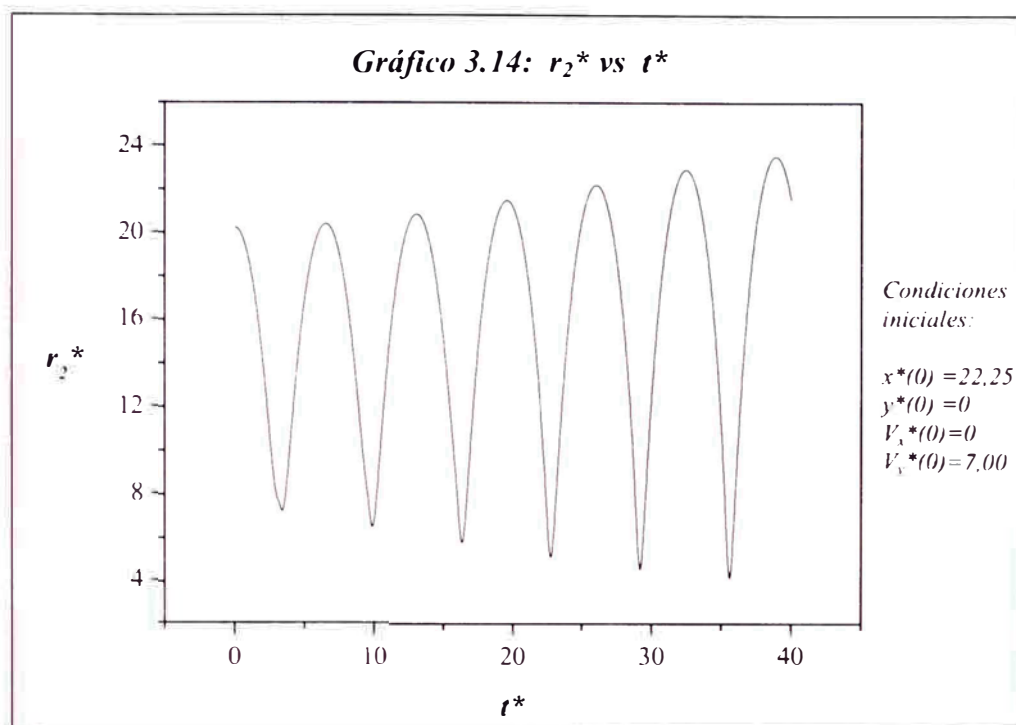


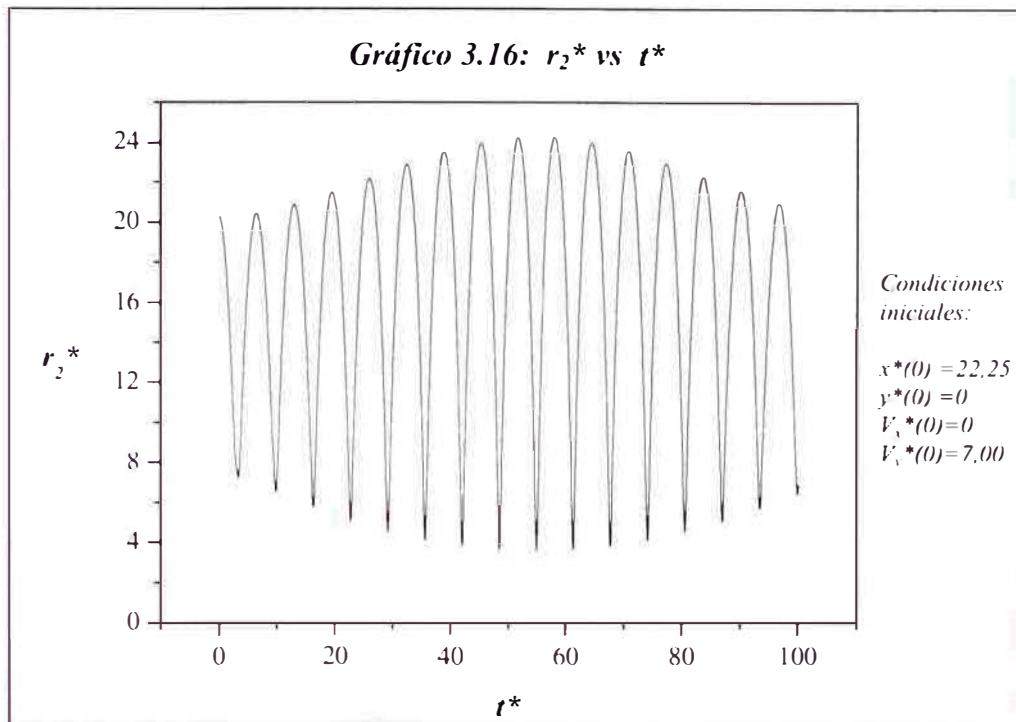
d) Gráficos del 3.12 y al 3.16

Representan como varía la distancia de la partícula al centro del anillo B (ver figura 3.1) respecto del tiempo. Tiene las mismas características de los gráficos del ítem anterior. Los valores de esta distancia fluctúan entre $5,1R$ y $22,5R$.

Es interesante observar que prácticamente de forma simultánea las distancias r_1 y r_2 alcanzan sus valores mínimos y máximos.

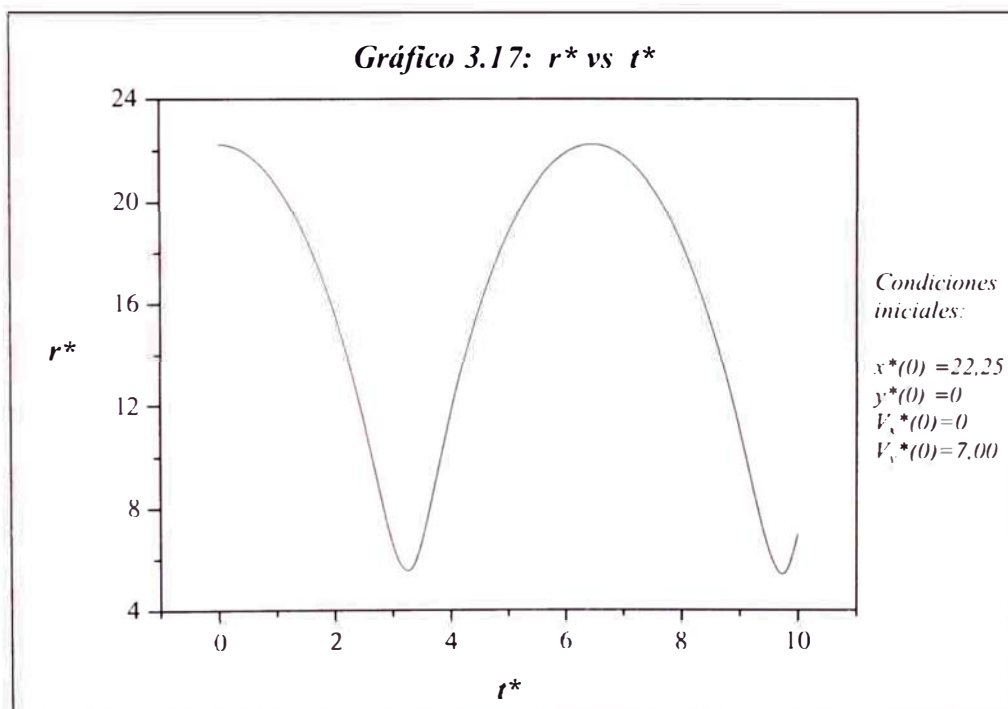


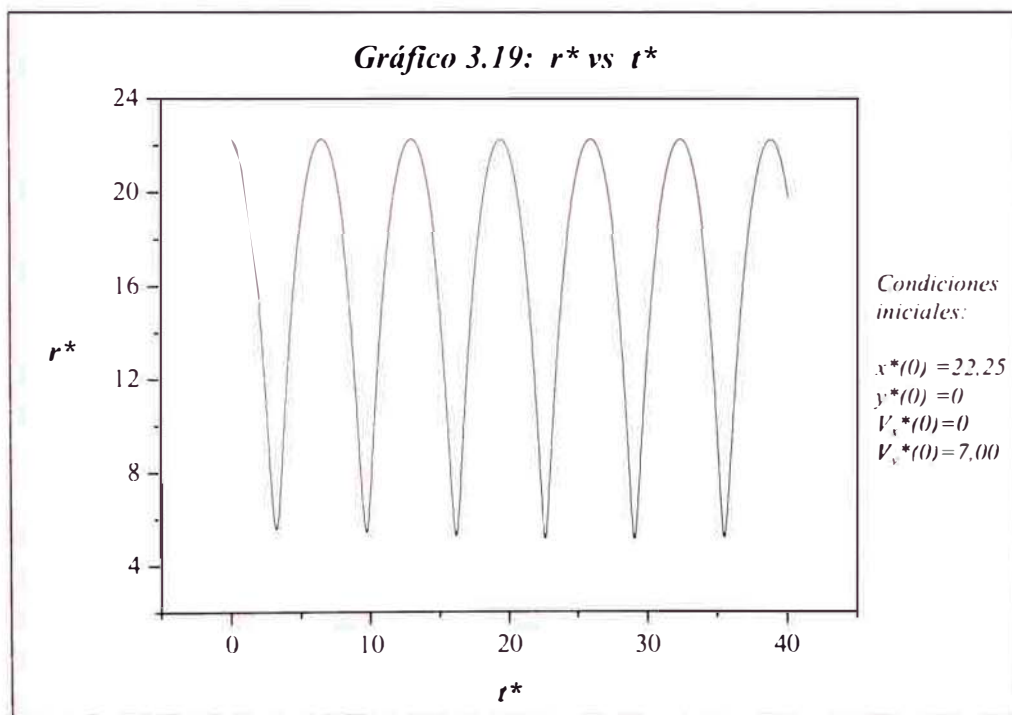
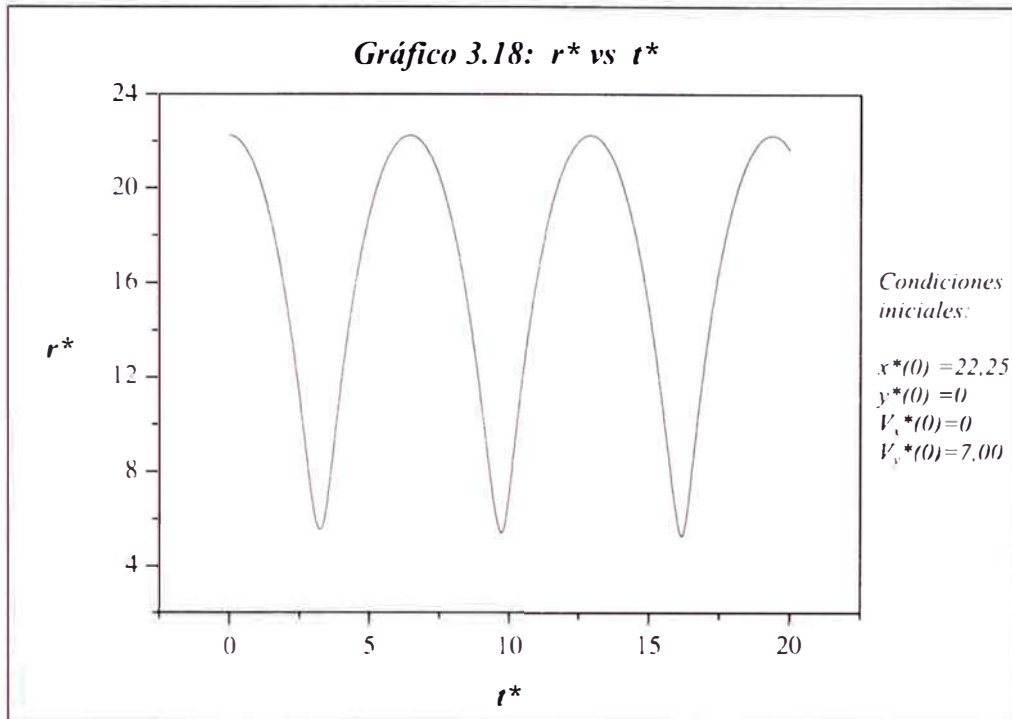


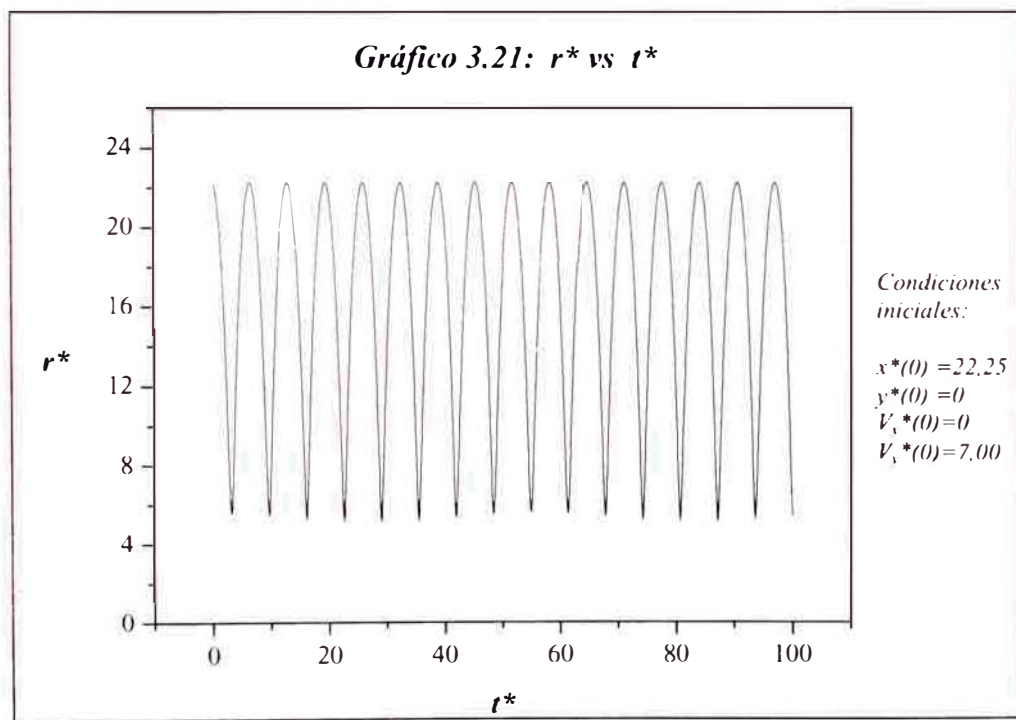
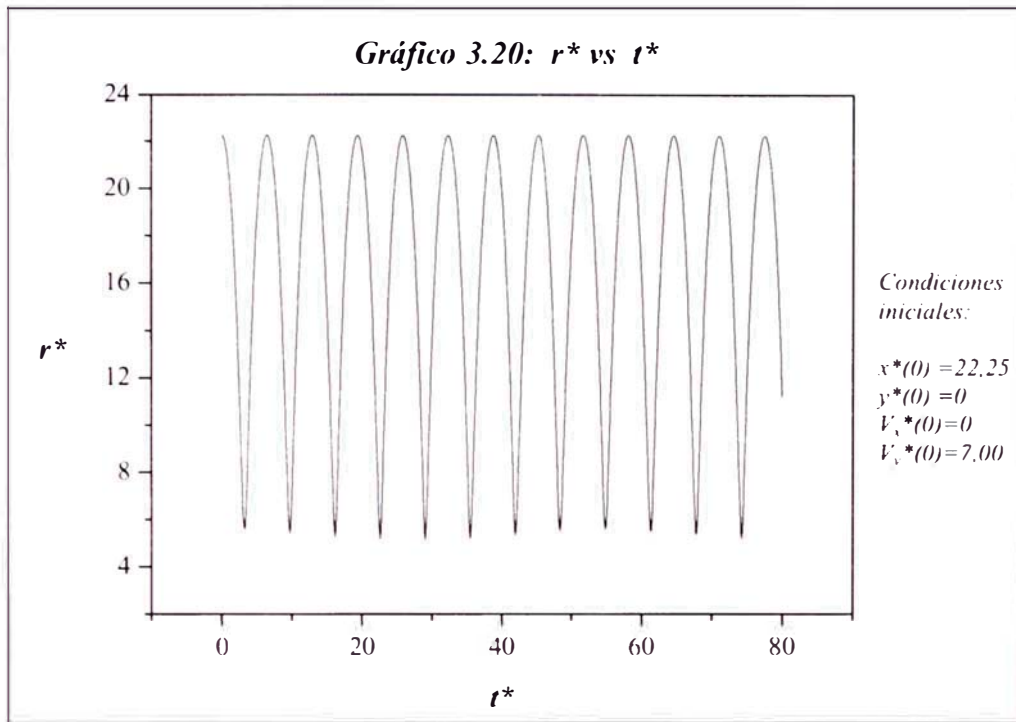


e) Gráficos del 3.17 y al 3.21

Se muestra como varía la distancia de la partícula al origen de coordenadas respecto del tiempo. Se puede observar que la función $r(t)$ es periódica con un periodo de 6,5 días.







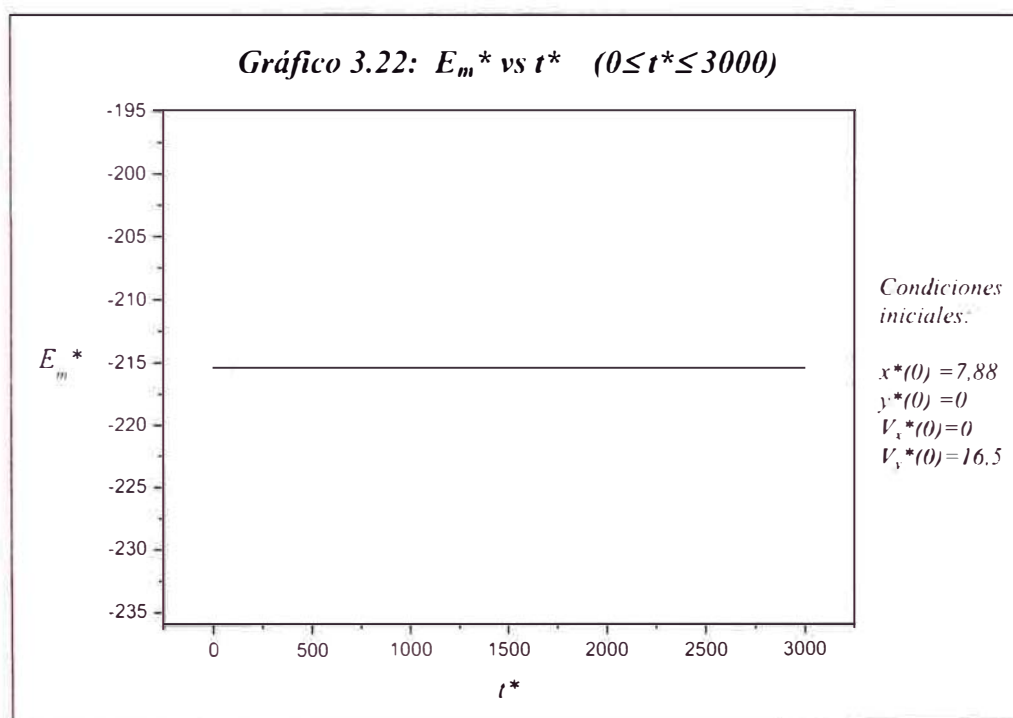
Caso 2

Se tomaron las siguientes condiciones iniciales

$$\begin{aligned}x^*(0) &= 7,88, & y^*(0) &= 0, \\ \dot{x}^*(0) &= 0, & \dot{y}^*(0) &= 16,5.\end{aligned}$$

a) Gráfico 3.22

Este gráfico representa como varía la energía mecánica adimensional de la partícula en función al tiempo unidimensional. Esta energía se mantuvo constante en -215,4236.

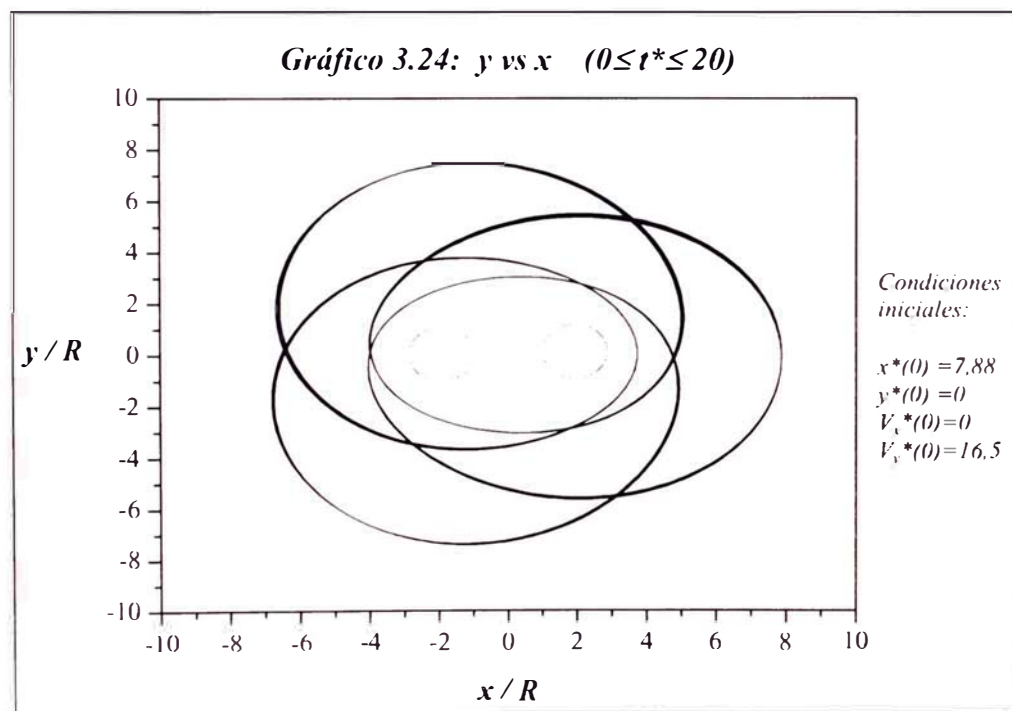
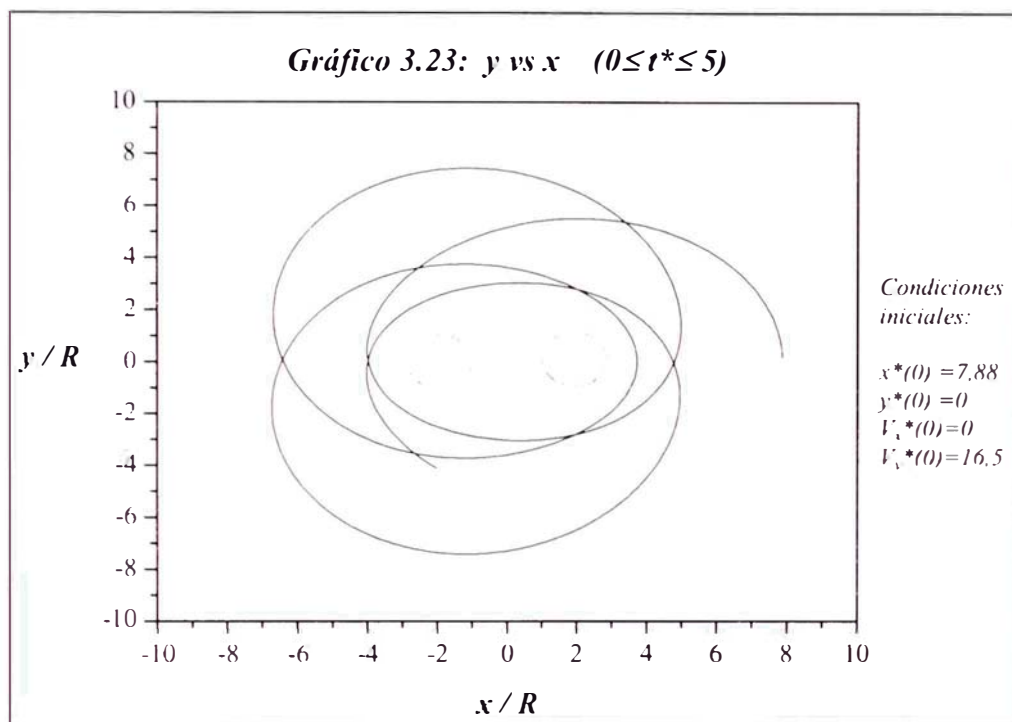


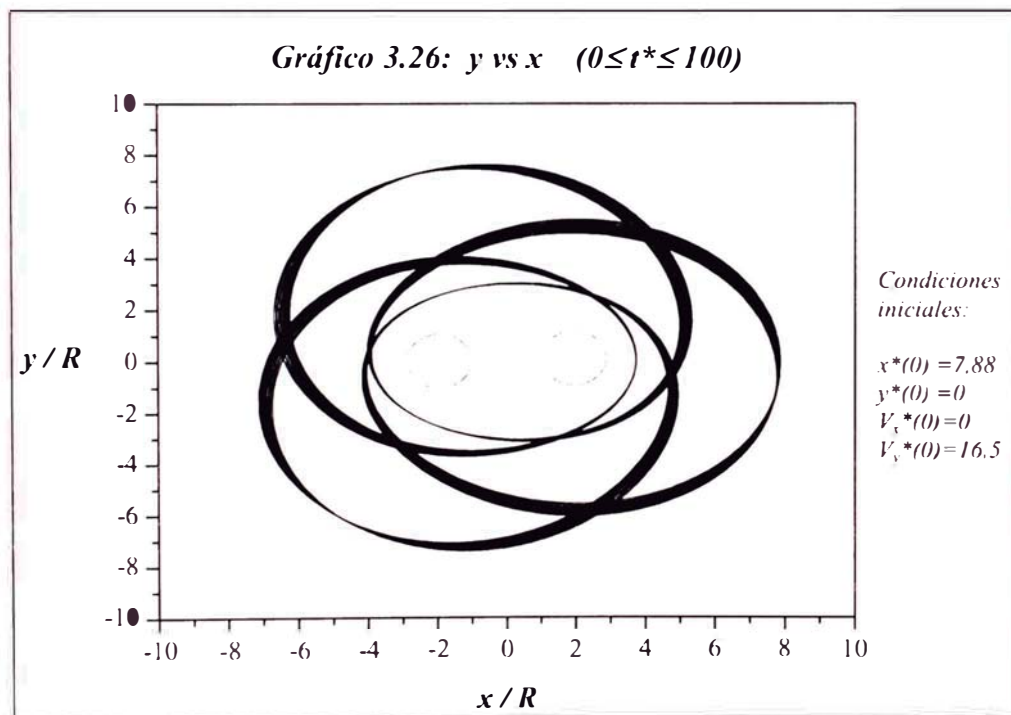
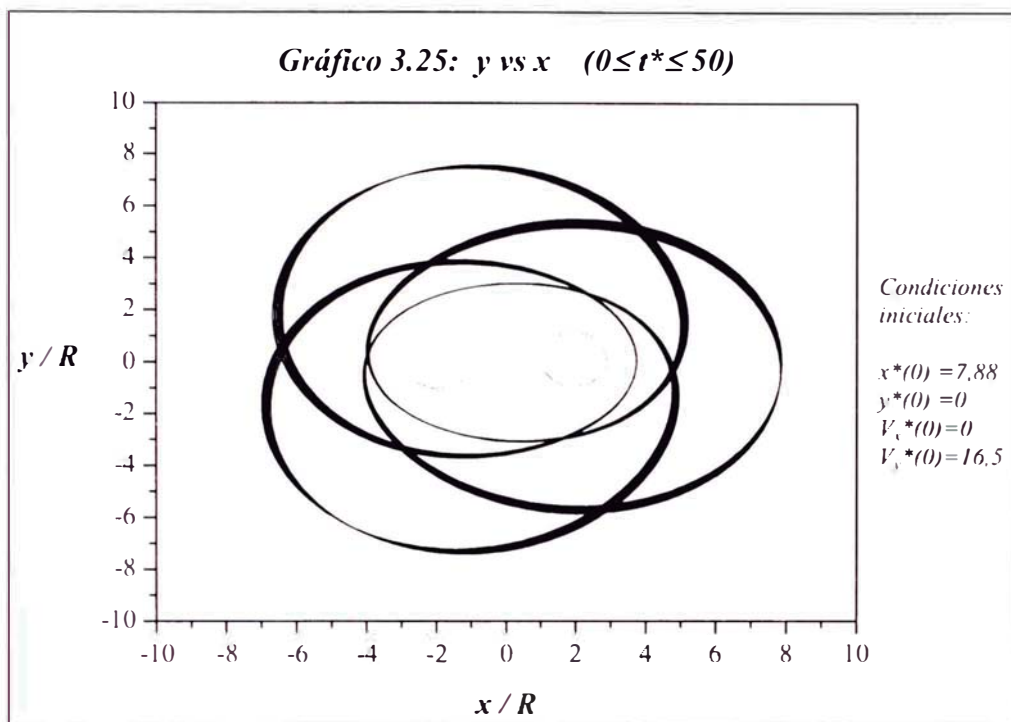
b) Gráficos del 3.23 y al 3.27

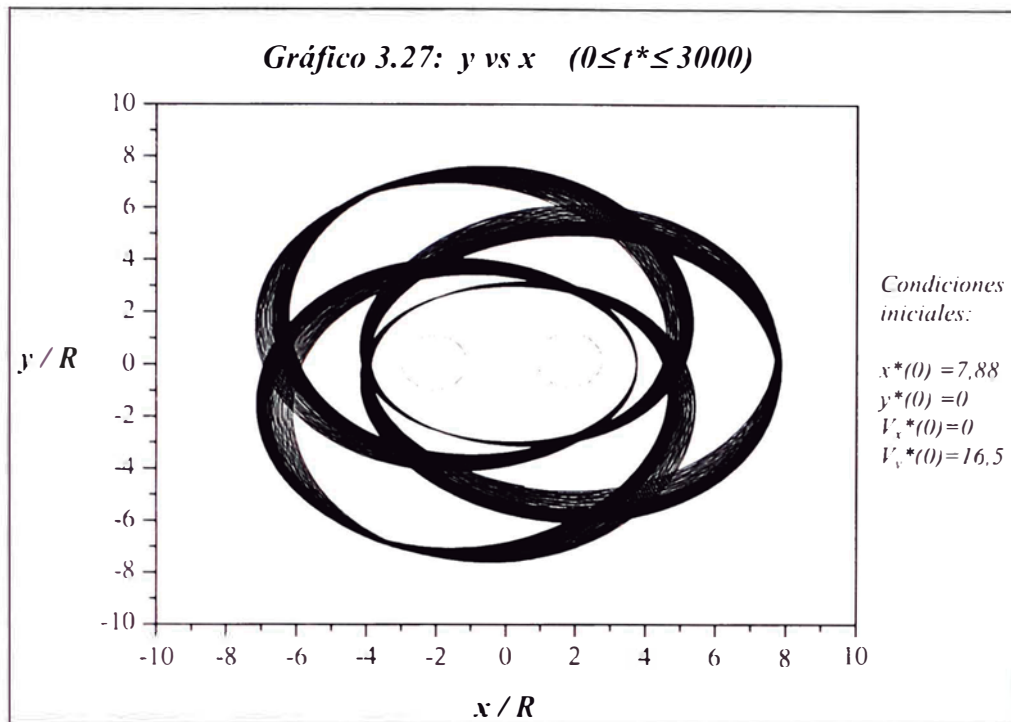
Muestran la trayectoria de la partícula para diferentes intervalos de tiempo $[0, t_f]$, con $t_f = 5, 20, 50, 100$ y 3000 días.

Estos gráficos nos permiten observar como varía la trayectoria realizada por partícula en función al tiempo que dura el movimiento. La trayectoria de la partícula es abierta. Mientras mayor es el tiempo de duración del movimiento se observa claramente que la trayectoria está limitada a una región elíptica exterior a ambos anillos. Incrementando el tiempo de duración del movimiento a 500 días, se observa mejor que la trayectoria está limitada a una región elíptica exterior a los dos anillos.

Cuando la trayectoria obtenida corresponde a $t_j = 5, 20$ y 50 días se observa que la partícula se mueve *casi* en la misma trayectoria, más aún existen puntos del espacio en los que la partícula pasa siempre hasta el intervalo $[0, 50]$ días.



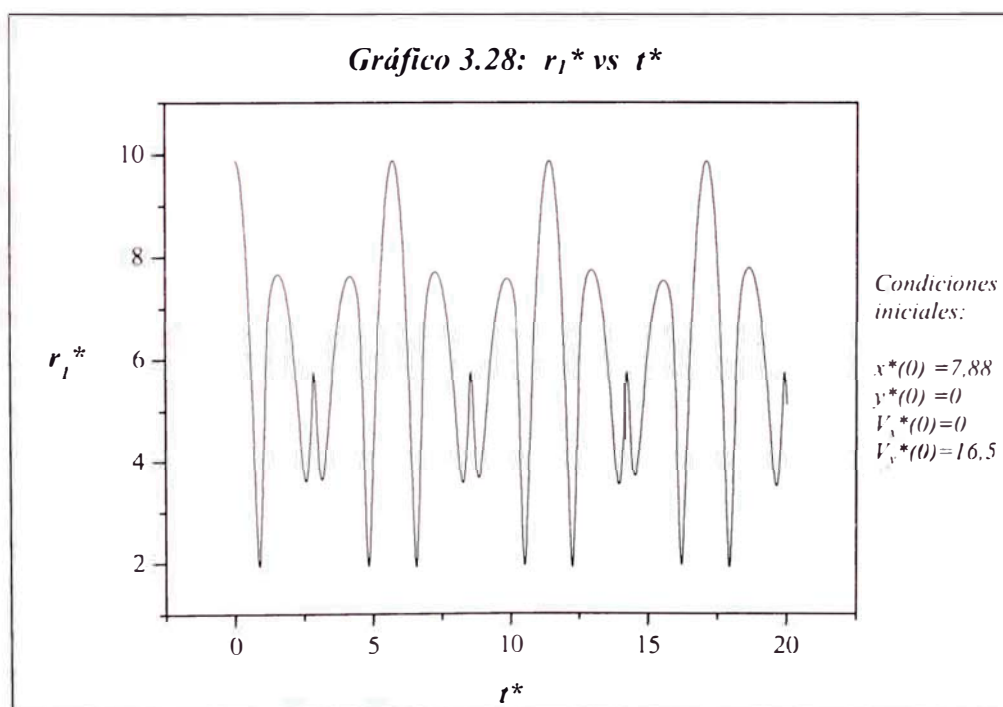


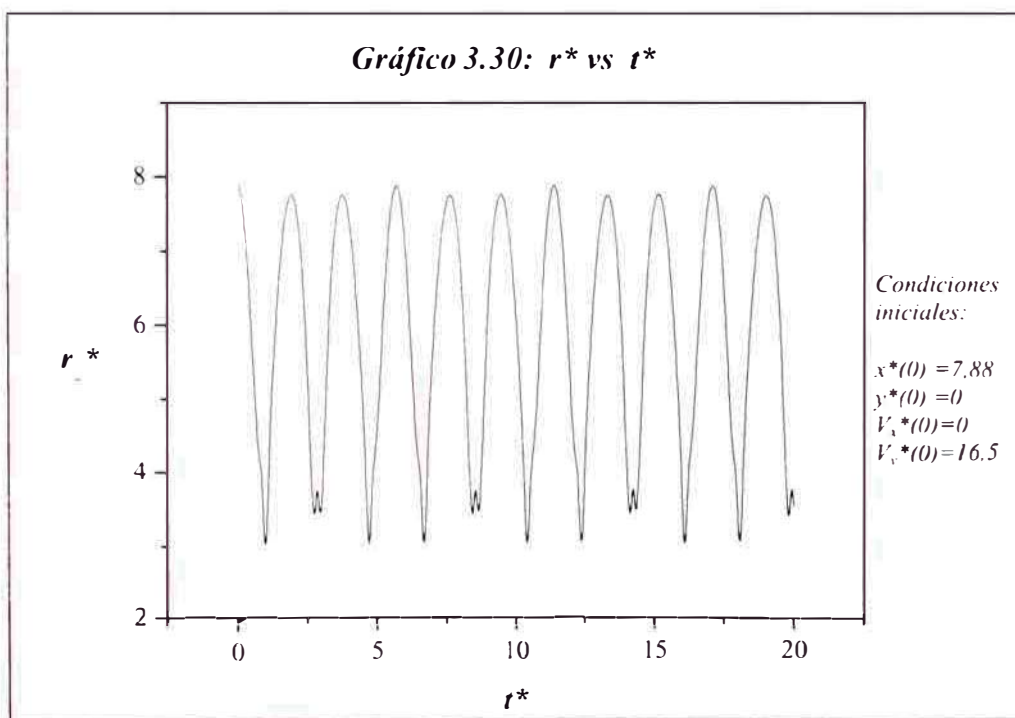
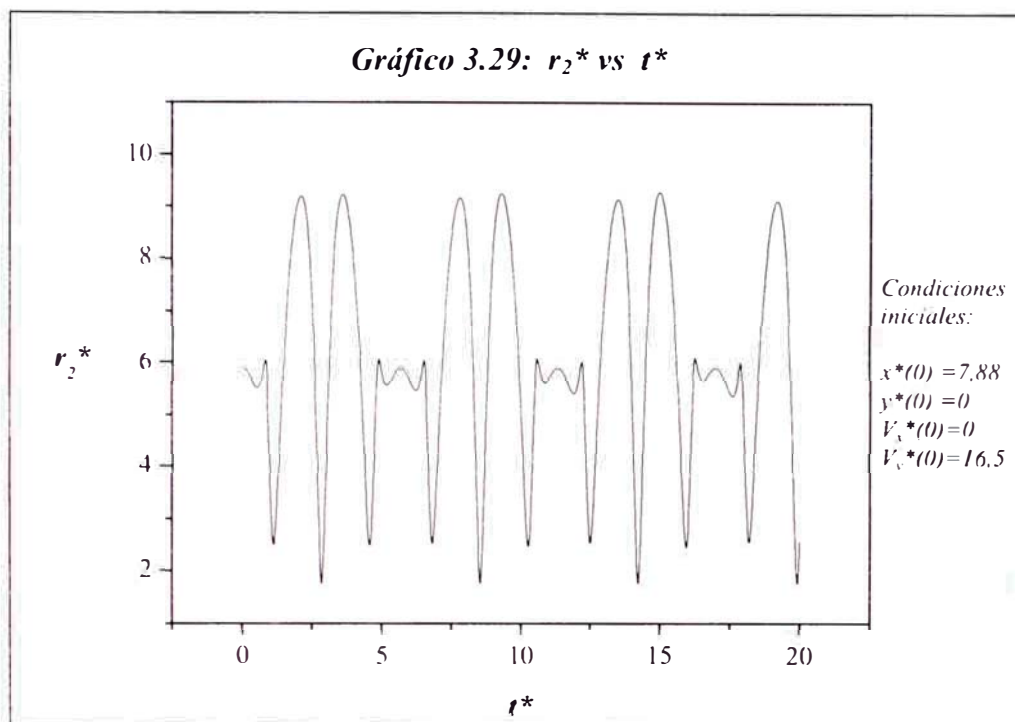


c) Gráficos del 3.28 y al 3.30

Considerando que el intervalo de tiempo de duración del movimiento de la partícula se mantiene en $0 \leq t \leq 20$ días .

Se obtuvieron estos gráficos que representan como varían respecto del tiempo las distancias de la partícula a los centros de los anillos y al origen de coordenadas. Son funciones prácticamente periódicas respecto del tiempo con un “periodo” de 5,69 días. La distancia de la partícula al anillo A , r_1 , fluctúa entre $1,91R$ y $9,88R$, mientras que la distancia de la partícula al anillo B , r_2 , varía entre $2,57R$ y $9,22R$. Además la distancia entre la partícula y el origen de coordenadas, r , varía entre $3,00R$ y $7,88R$.





4. Conclusiones

- 4.1 Movimiento de una partícula alrededor de un anillo.**
- 4.2 Movimiento de una partícula alrededor de dos anillos.**

4.1 Movimiento de una partícula alrededor de un anillo

Para todas las condiciones iniciales del movimiento de la partícula alrededor del anillo consideradas en el presente informe se obtuvo que:

- 1°. La trayectoria de la partícula está contenida en el interior de una corona limitada por dos circunferencias, cuyos radios corresponden a la distancia mínima y la distancia máxima de la partícula al centro del anillo. Por lo tanto se dice que el movimiento de la partícula es finito.
- 2°. La trayectoria realizada por la partícula alrededor del anillo es abierta porque después de un tiempo muy prolongado la trayectoria cubriría toda el área comprendida entre las dos circunferencias límites.
- 3°. La trayectoria de la partícula es simétrica respecto a la línea $\phi = 0$. Cuando la partícula pasa de un punto $r = r_{\max}$, la partícula atraviesa un arco de trayectoria hasta un punto $r = r_{\min}$, después del cual hay una porción de trayectoria dispuesta simétricamente hasta el próximo arco en el que $r = r_{\max}$, y así sucesivamente, de tal forma que toda la trayectoria se obtiene repitiendo un ir y venir los mismos arcos.
- 4°. Podemos concluir además que las funciones $x(t)$, $y(t)$, $V_x(t)$, $V_y(t)$ y $r(t)$ son periódicas respecto al tiempo y que el periodo de esta última función es menor que el de las otras funciones. Es importante observar que cuando $\dot{r}(t) = 0$ indica un *punto de retorno* en la trayectoria de la partícula.
- 5°. En todos los casos la energía mecánica de la partícula se mantiene constante y además tiene signo negativo. Por lo tanto, podemos concluir que cuando la energía mecánica de la partícula sea negativa, la trayectoria que describe está en una región finita del espacio.
- 6°. Cuando las condiciones iniciales de movimiento de la partícula corresponden a $\vec{r}(0) = 200 \text{ radios } \vec{j}$ y $\vec{V}(0) = 2,50 \text{ radios-día}^{-1} \vec{j}$, la trayectoria realizada por la partícula, a diferencia de las que habíamos analizado antes, resulta ser *casi cerrada*. Consideramos que este caso se produce debido a que la partícula se mantiene alejada entre 180 y 200 radios respecto del centro del anillo. Es decir, el término predominante en el potencial gravitatorio producido por el anillo es el proporcional a $-r^{-1}$, mientras que los demás términos del potencial son despreciables frente al primero. Sabemos que cuando el potencial gravitatorio tiene esa forma se trata del *problema de Kepler*, es decir la trayectoria realizada correspondería, en este caso, a una elipse.
- 7°. Consideramos que la trayectoria de la partícula es abierta debido a que la expresión del potencial gravitatorio obtenido corresponde a una expansión en serie, en la que el primer término es proporcional a $-r^{-1}$ que no es el término predominante de la expansión.

- 8°. Este sistema mecánico se puede aplicar a un sistema real constituido por un planeta con un grado de achatamiento apreciable (que es el caso de Saturno) y un satélite que se mueve próximo al planeta. La trayectoria del satélite se debe parecer al mostrado en el gráfico 2.19, es decir, no corresponde a una trayectoria elíptica.
- 9°. Todos los resultados obtenidos en el presente informe están en total concordancia con las predicciones de la mecánica de Newton, pues ésta prevé que cuando una partícula se mueve en un campo de fuerza central, bajo ciertas condiciones iniciales, ocurriría lo anteriormente descrito.

4.2 Movimiento de una partícula alrededor de dos anillos

Para las condiciones iniciales del movimiento de la partícula alrededor de los dos anillos consideradas en el presente informe se obtuvo que:

- 1°. El movimiento de la partícula es finito porque la distancia entre la partícula y el sistema de coordenadas tiene un valor máximo y un valor mínimo. De tal manera que para tiempos muy prolongados la trayectoria de la partícula cubre una región elíptica.
- 2°. La energía mecánica de la partícula se mantuvo constante y además tiene signo negativo. Se podría afirmar que en el caso que la energía mecánica de la partícula sea de signo negativo, esta partícula se encontrará realizando su movimiento en una región finita del espacio.
- 3°. La trayectoria realizada por la partícula alrededor de los dos anillos es análoga a que realizaría alrededor de un anillo cuando la distancia de lanzamiento es casi seis veces mayor que la distancia entre los centros de los anillos. Por lo que el efecto de la acción de los dos anillos es análogo al de un solo anillo.
- 4°. Manteniendo la posición inicial constante y aumentando la rapidez inicial de la partícula se observa que el área de la región anular elíptica en la que se encuentra la trayectoria de la partícula disminuye. En caso contrario se incrementa.
- 5°. Aunque en este caso la fuerza gravitatoria (resultante) que actúa sobre la partícula *no es una fuerza central*, como predice la teoría de Newton, la energía mecánica de la partícula es una constante del movimiento. Además, la partícula realiza un movimiento finito con una trayectoria abierta como en el caso del movimiento de la partícula alrededor de un solo anillo.

Apéndice 1

El potencial gravitatorio del anillo de masa M y radio R a una distancia r respecto del centro del anillo está dado por la ecuación (1.24):

$$U(r, \theta) = -\frac{GmM}{2\pi r} \left(a_0 + a_1 \frac{R}{r} + a_2 \frac{R^2}{r^2} + a_3 \frac{R^3}{r^3} + a_4 \frac{R^4}{r^4} + \dots \right) \quad (1.56)$$

Donde los coeficientes de la expansión en serie del potencial gravitatorio son:

$$a_n \equiv \int_0^{2\pi} P_n(\cos(\theta' - \theta)) d\theta' \quad (1.57)$$

Los polinomios de Legendre se pueden expresar mediante la siguiente expresión:

$$P_l(x) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2l-1)}{l!} \left[x^l - \frac{l(l-1)}{2(2l-1)} x^{l-2} + \frac{l(l-1)(l-2)(l-3)}{2 \cdot 4 \cdot (2l-1) \cdot (2l-3)} x^{l-4} - \dots \right] \quad (1.58)$$

Utilizando la ecuación (1.58) encontramos los primeros nueve polinomios de Legendre:

$$P_0(x) = 1 \quad (1.59)$$

$$P_1(x) = x \quad (1.60)$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \quad (1.61)$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \quad (1.62)$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3) \quad (1.63)$$

$$P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 5x) \quad (1.64)$$

$$P_6(x) = \frac{1}{16}(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5) \quad (1.65)$$

$$P_7(x) = \frac{1}{16}(429x^7 - 693x^5 + 315x^3 - 35x) \quad (1.66)$$

$$P_8(x) = \frac{1}{128}(6435x^8 - 12012x^6 + 6930x^4 - 1260x^2 + 35) \quad (1.67)$$

Antes de proceder a efectuar el cálculo de los coeficientes, es muy útil tener en cuenta los resultados de las siguientes integrales definidas:

$$\int_0^{2\pi} \cos^k \theta \cdot d\theta = 0, k \text{ es impar.} \quad (1.68)$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^k \theta \cdot d\theta = \frac{(k-1) \cdot (k-3) \dots (1)}{k \cdot (k-2) \dots (4)} \pi, k \text{ es par.} \quad (1.69)$$

Utilizando las ecuaciones (1.59) en (1.57) obtenemos:

$$a_0 = \int_0^{2\pi} P_0(\cos(\theta' - \theta)) \cdot d\theta' = \int_0^{2\pi} d\theta' = 2\pi \quad (1.70)$$

Reemplazando las ecuaciones (1.60) y (1.68) en (1.57) encontramos:

$$a_1 = \int_0^{2\pi} P_1(\cos(\theta' - \theta)) \cdot d\theta' = \int_0^{2\pi} \cos(\theta' - \theta) \cdot d\theta' = 0 \quad (1.71)$$

Mediante las ecuaciones (1.61) y (1.69) en (1.57) se obtiene:

$$\begin{aligned} a_2 &= \int_0^{2\pi} P_2(\cos(\theta' - \theta)) \cdot d\theta' \\ a_2 &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (3 \cos^2(\theta' - \theta) - 1) \cdot d\theta' \\ a_2 &= \frac{\pi}{2} \end{aligned} \quad (1.72)$$

Utilizando las ecuaciones (1.62) y (1.68) en (1.57) encontramos:

$$a_3 = \int_0^{2\pi} P_3(\cos(\theta' - \theta)) \cdot d\theta' = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (5 \cos^3(\theta' - \theta) - 3 \cos(\theta' - \theta)) \cdot d\theta' = 0$$

$$a_3 = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (5 \cos^3(\theta' - \theta) - 3 \cos(\theta' - \theta)) \cdot d\theta'$$

$$a_3 = 0 \quad (1.73)$$

Reemplazando las ecuaciones (1.63) y (1.69) en (1.57) encontramos:

$$a_4 = \int_0^{2\pi} P_4(\cos(\theta' - \theta)) \cdot d\theta' = \int_0^{2\pi} \frac{1}{8} (35 \cos^4(\theta' - \theta) - 30 \cos^2(\theta' - \theta) + 3) \cdot d\theta' = \frac{9}{32} \pi$$

$$a_4 = \int_0^{2\pi} \frac{1}{8} (35 \cos^4(\theta' - \theta) - 30 \cos^2(\theta' - \theta) + 3) \cdot d\theta'$$

$$a_4 = \frac{9}{32} \pi \quad (1.74)$$

Mediante las ecuaciones (1.64) y (1.68) en (1.57) encontramos:

$$a_5 = \int_0^{2\pi} P_5(\cos(\theta' - \theta)) \cdot d\theta'$$

$$a_5 = \int_0^{2\pi} \frac{1}{8} (63 \cos^5(\theta' - \theta) - 70 \cos^3(\theta' - \theta) + 5 \cos(\theta' - \theta)) \cdot d\theta'$$

$$a_5 = 0 \quad (1.75)$$

Utilizando las ecuaciones (1.65) y (1.69) en (1.57) encontramos:

$$a_6 = \int_0^{2\pi} P_6(\cos(\theta' - \theta)) \cdot d\theta'$$

$$a_6 = \int_0^{2\pi} \frac{1}{16} (231 \cos^6(\theta' - \theta) - 315 \cos^4(\theta' - \theta) + 105 \cos^2(\theta' - \theta) - 5) \cdot d\theta'$$

$$a_6 = \frac{25}{128} \pi \quad (1.76)$$

Reemplazando las ecuaciones (1.66) y (1.68) en (1.57) encontramos:

$$a_7 = \int_0^{2\pi} P_7(\cos(\theta' - \theta)) \cdot d\theta'$$

$$a_7 = \int_0^{2\pi} \frac{1}{16} (429 \cos^7(\theta' - \theta) - 693 \cos^5(\theta' - \theta) + 315 \cos^3(\theta' - \theta) - 35 \cos(\theta' - \theta)) \cdot d\theta'$$

$$a_7 = 0 \quad (1.77)$$

Usando las ecuaciones (1.67) y (1.69) en (1.57) encontramos:

$$a_8 = \int_0^{2\pi} P_8(\cos(\theta' - \theta)) \cdot d\theta'$$

$$a_8 = \int_0^{2\pi} \frac{1}{128} (6435 \cos^8(\theta' - \theta) - 12012 \cos^6(\theta' - \theta) + 6930 \cos^4(\theta' - \theta) - \dots$$

$$\dots - 1260 \cos^2(\theta' - \theta) + 35) \cdot d\theta$$

$$a_8 = \frac{1225}{8192} \pi \quad (1.78)$$

Apéndice 2

Para resolver las ecuaciones diferenciales ordinarias del movimiento de una partícula alrededor de un anillo se utilizó el método numérico de Runge-Kutta de orden 4 mediante la realización de un programa en Borland Delphi 6.0.

El código de programación realizado se detalla a continuación:

```

program mov_part_un_anillo;
  {Aplicación del método de Runge-Kutta de orden 4 para estudiar el movimiento de una
  partícula alrededor de un anillo en el caso bidimensional tomando cinco términos no
  nulos del potencial gravitatorio}
uses
  dialogs,
  sysutils;
label l1;
const N = 4;
type group = array [1..N] of real;
var xend, x0: group;
    t: real;
    i: integer;
    v, ep, dis, dis1, dis2, k, ene: extended;
    s:string;
    datos: text;

procedure derives (x: group; t: real; var f: group);
begin
  f[1] := x[3];
  f[2] := x[4];
  f[3] := -k*(x[1])/(( x[1]* x[1]+ x[2]* x[2])*sqrt( x[1]* x[1]+ x[2]* x[2]))
    -k*0.75*(x[1])/((sqr(sqr(x[1]) + x[2]* x[2])*sqrt(sqr(x[1]) + x[2]* x[2]))
    -k*45*( x[1])/(64*(sqr(x[1]) + x[2]* x[2])*sqr(sqr(x[1]) + x[2]* x[2])*
    sqrt(sqr(x[1]) + x[2]* x[2]))
    -k*175*( x[1])/(256*(sqr(sqr(sqr(x[1]) + x[2]* x[2]))*sqrt(sqr(x[1]) + x[2]*
    x[2])
    -k*11025*( x[1])/(16384*( sqr(x[1]) + x[2]* x[2])*( sqr(x[1]) + x[2]*
    x[2])* (sqr(x[1]) + x[2]* x[2])* (sqr(x[1]) + x[2]* x[2])* (sqr(x[1]) + x[2]*
    x[2])*sqrt((sqr(x[1]) + x[2]* x[2])));
  f[4] := -k*(x[2])/(( x[1]* x[1]+ x[2]* x[2])*sqrt( x[1]* x[1]+ x[2]* x[2]))
    -k*0.75*(x[2])/((sqr(sqr(x[1]) + x[2]* x[2])*sqrt(sqr(x[1]) + x[2]* x[2]))
    -k*45*( x[2])/(64*(sqr(x[1]) + x[2]* x[2])*sqr(sqr(x[1]) + x[2]* x[2])*
    sqrt(sqr(x[1]) + x[2]* x[2]))
    -k*175*( x[2])/(256*(sqr(sqr(sqr(x[1]) + x[2]* x[2]))*sqrt(sqr(x[1]) + x[2]*
    x[2])
    -k*11025*( x[2])/(16384*( sqr(x[1]) + x[2]* x[2])*( sqr(x[1]) + x[2]*
    x[2])* (sqr(x[1]) + x[2]* x[2])* (sqr(x[1]) + x[2]* x[2])* (sqr(x[1]) + x[2]*
    x[2])*sqrt((sqr(x[1]) + x[2]* x[2])));
end;
```

```

procedure rksyst(var xend: group; x0: group; t: real);
var f: group;
xwrk: array [1..4, 1..N] of real;
h: real;
i: integer;
begin
    h:= 0.001; // Paso del método de Runge-Kutta
    derivs(x0, t, f);
    for i:= 1 to N do
        begin
            xwrk[1,i]:= h*f[i];
            xend[i]:=x0[i] + xwrk[1,i]/2
        end;
    derivs(xend, t+h/2,f);
    for i :=1 to N do
        begin
            xwrk[2,i]:=h*f[i];
            xend[i]:=x0[i] + xwrk[2,i]/2
        end;
    derivs(xend, t +h/2,f);
    for i :=1 to N do
        begin
            xwrk[3,i]:=h*f[i];
            xend[i]:=x0[i] + xwrk[3,i]
        end;
    derivs(xend, t+h.f);
    for i :=1 to N do
        xwrk[4,i]:=h*f[i];
    for i :=1 to N do
        xend[i]:=x0[i] + (xwrk[1,i] + 2*(xwrk[2,i] + xwrk[3,i]) + xwrk[4,i])/6;
    end;

begin
    ASSIGN(Datos, 'e:\bordaprueba.dat'); Rewrite(Datos); //Archivo de datos
    x0[1]:= 4.88; x0[2]:=0; // Posición de lanzamiento
    x0[3]:= 0; x0[4]:=16.23; // Velocidad de lanzamiento
    t:= 0;
    while t<50000 do
        begin
            dis:= sqrt(sqr(x0[1])+sqr(x0[2]));
            v:= sqrt(sqr(x0[3])+sqr(x0[4]));
            ene:= (1/2)*(sqr(x0[3])+sqr(x0[4]))-k/sqrt(sqr(x0[1])+sqr(x0[2])) -
            0.25*k/(sqr(x0[1])+sqr(x0[2]))*sqrt(sqr(x0[1])+sqr(x0[2])) -
            k*9/(64*sqr(sqr(x0[1])+sqr(x0[2]))*sqrt(sqr(x0[1])+sqr(x0[2])) -
            k*25/(256*(sqr(x0[1])+sqr(x0[2]))*(sqr(x0[1])+sqr(x0[2]))*
            sqrt(sqr(x0[1])+sqr(x0[2])) -
            k*1225/(16384*sqr(sqr(x0[1])+sqr(x0[2]))*
            sqrt(sqr(x0[1])+sqr(x0[2]))*sqrt(sqr(x0[1])+sqr(x0[2])));
        end;

```

```

// IF T mod 10 = 0 then
    s:= ' ';
    rksyst(xend,x0,t*0.001);
    for i:= 1 to N do
        x0[i]:=xend[i];
        t:= t+ 1;
        writeln(datos,T*0.001:12:8,' ',(x0[1]):12:6,' ',(x0[2]):12:6,' ',
            ', (x0[3]):12:6,' ',(x0[4]):12:6,' ',ene:9:6,' ',dis:12:6,'
            ');
        s:= s+floattostr(t*0.001)+#9+floattostr(ene)+ #13;
    end;
    showmessage(s)
    close(datos);
end.

```


Apéndice 3

Los datos astronómicos observados de los satélites de Saturno son el radio orbital promedio r , es decir, la distancia promedio del centro del satélite al centro de Saturno y el periodo de traslación T , o sea el intervalo de tiempo tarda el satélite en completar una vuelta alrededor de Saturno.

Assumiendo que los satélites de Saturno realizan una trayectoria circular de radio r y que se mueven con rapidez constante V , es fácil demostrar que:

$$V = \frac{2 \pi r}{T}$$

En la tabla siguiente se muestran los datos astronómicos de algunos de los satélites de Saturno con su respectiva rapidez orbital.

Satélite	r (R)	T (días)	V (R/días)
Encelaceo	3,95	1,37	18,10
Tetis	4,88	1,88	16,23
Titán	20,25	15,95	7,97
Febe	214,7	550,4	2,44

Apéndice 4

El código de programación que se realizó para resolver las ecuaciones diferenciales del movimiento de una partícula alrededor de dos anillos se muestra a continuación:

program Mov_Partícula_Dos_Anillos;

{Aplicación del método de Runge-Kutta de orden 4 para estudiar el movimiento de una partícula alrededor de dos anillos en el caso bidimensional tomando cinco términos no nulos de los potenciales gravitatorios producidos por cada uno de los anillos}

uses

dialogs,
sysutils;

label l1;

const N=4;

type group=array[1..N] of real;

var xend, x0 : group;

t:real;

i:integer;

dis.dis1,dis2,k,ene: extended;

s:string;

datos: text;

procedure derivs (x:group; t:real; var f:group);

begin

f[1]:= x[3];

f[2]:= x[4];

f[3]:=-k*(x[1]-2)/(((x[1]-2)*(x[1]-2)+x[2]*x[2])*sqrt((x[1]-2)*(x[1]-2)+x[2]*x[2]))

-k*0.75*(x[1]-2)/(sqrt(sqrt(x[1]-2)+x[2]*x[2])*sqrt(sqrt(x[1]-2)+x[2]*x[2]))

-k*45*(x[1]-2)/(64*(sqrt(x[1]-2)+x[2]*x[2])*sqrt(sqrt(x[1]-2)+x[2]*x[2])*

sqrt(sqrt(x[1]-2)+x[2]*x[2]))

-k*175*(x[1]-2)/(256*sqrt(sqrt(sqrt(x[1]-2)+x[2]*x[2]))*sqrt(sqrt(x[1]-2)+x[2]*x[2]))

-k*11025*(x[1]-2)/(16384*(sqrt(x[1]-2)+x[2]*x[2])*(sqrt(x[1]-2)+x[2]*x[2])*

(sqrt(x[1]-2)+x[2]*x[2])*(sqrt(x[1]-2)+x[2]*x[2])*(sqrt(x[1]-2)+x[2]*x[2])*

sqrt(sqrt(x[1]-2)+x[2]*x[2]))

-k*(x[1]+2)/(((x[1]+2)*(x[1]+2)+x[2]*x[2])*sqrt((x[1]+2)*(x[1]+2)+x[2]*x[2]))

-k*0.75*(x[1]+2)/(sqrt(sqrt(x[1]+2)+x[2]*x[2])*sqrt(sqrt(x[1]+2)+x[2]*x[2]))

-k*45*(x[1]+2)/(64*(sqrt(x[1]+2)+x[2]*x[2])*sqrt(sqrt(x[1]+2)+x[2]*x[2])*

sqrt(sqrt(x[1]+2)+x[2]*x[2]))

-k*175*(x[1]+2)/(256*sqrt(sqrt(sqrt(x[1]+2)+x[2]*x[2]))*sqrt(sqrt(x[1]+2)+x[2]*x[2]))

sqrt(sqrt(x[1]+2)+x[2]*x[2]))

-k*11025*(x[1]+2)/(16384*(sqrt(x[1]+2)+x[2]*x[2])*(sqrt(x[1]+2)+x[2]*x[2])*

(sqrt(x[1]+2)+x[2]*x[2])*(sqrt(x[1]+2)+x[2]*x[2])*(sqrt(x[1]+2)+x[2]*x[2])*

sqrt(sqrt(x[1]+2)+x[2]*x[2]));

```

f[4]:= -k*(x[2])/(((x[1]-2)*(x[1]-2)+x[2]*x[2])*sqrt((x[1]-2)*(x[1]-2)+x[2]*x[2]))
-k*0.75*(x[2])/(sqr(sqr(x[1]-2)+x[2]*x[2])*sqrt(sqr(x[1]-2)+x[2]*x[2]))
-k*45*(x[2])/(64*(sqr(x[1]-2)+x[2]*x[2])*sqr(sqr(x[1]-2)+x[2]*x[2])*
sqrt(sqr(x[1]-2)+x[2]*x[2]))
-k*175*(x[2])/(256*sqr(sqr(sqr(x[1]-2)+x[2]*x[2]))*sqrt(sqr(x[1]-2)+x[2]*x[2]))
-k*11025*(x[2])/(16384*(sqr(x[1]-2)+x[2]*x[2])*(sqr(x[1]-2)+x[2]*x[2])*
(sqr(x[1]-2)+x[2]*x[2])*(sqr(x[1]-2)+x[2]*x[2])*(sqr(x[1]-2)+x[2]*x[2])*
sqrt(sqr(x[1]-2)+x[2]*x[2]))
-k*(x[2])/(((x[1]+2)*(x[1]+2)+x[2]*x[2])*sqrt((x[1]+2)*(x[1]+2)+x[2]*x[2]))
-k*0.75*(x[2])/(sqr(sqr(x[1]+2)+x[2]*x[2])*sqrt(sqr(x[1]+2)+x[2]*x[2]))
-k*45*(x[2])/(64*(sqr(x[1]+2)+x[2]*x[2])*sqr(sqr(x[1]+2)+x[2]*x[2])*
sqrt(sqr(x[1]+2)+x[2]*x[2]))
-k*175*(x[2])/(256*sqr(sqr(sqr(x[1]+2)+x[2]*x[2]))*sqrt(sqr(x[1]+2)+x[2]*x[2]))
-k*11025*(x[2])/(16384*(sqr(x[1]+2)+x[2]*x[2])*(sqr(x[1]+2)+x[2]*x[2])*
(sqr(x[1]+2)+x[2]*x[2])*(sqr(x[1]+2)+x[2]*x[2])*(sqr(x[1]+2)+x[2]*x[2])*
sqrt(sqr(x[1]+2)+x[2]*x[2]));

```

end;

procedure rksyst(var xend: group; x0: group; t: real);

var f: group;

xwrk: array [1..4, 1..N] of real;

h: real;

i: integer;

begin

h:= 0.001; // Paso del método de Runge-Kutta

derivs(x0, t, f);

for i:= 1 to N do

begin

xwrk[1,i]:= h*f[i];

xend[i]:=x0[i] + xwrk[1,i]/2

end;

derivs(xend, t+h/2,f);

for i :=1 to N do

begin

xwrk[2,i]:=h*f[i];

xend[i]:=x0[i] + xwrk[2,i]/2

end;

derivs(xend, t+h/2,f);

for i :=1 to N do

begin

xwrk[3,i]:=h*f[i];

xend[i]:=x0[i] + xwrk[3,i]

end;

derivs(xend, t+h,f);

for i :=1 to N do

xwrk[4,i]:=h*f[i];

for i :=1 to N do

xend[i]:=x0[i] + (xwrk[1,i] + 2*(xwrk[2,i] + xwrk[3,i]) + xwrk[4,i])/6;

end;

```
begin
```

```

ASSIGN(Datos, 'd:\Titan.dat'); Rewrite(Datos); // Archivo de datos
x0[1]:= 22.25;      x0[2]:=0;           // Posición de lanzamiento
x0[3]:= 0;        x0[4]:=7.00;       // Velocidad de lanzamiento
k:= 1290;
t:= 0;
while t<100000 do
  begin
    dis:= sqrt(sqr(x0[1])+sqr(x0[2]));
    dis1:= sqrt(sqr(x0[1]+2)+x0[2]*x0[2]);
    dis2:= sqrt(sqr(x0[1]-2)+x0[2]*x0[2]);
    ene:=0.5*(sqr(x0[3])+sqr(x0[4])) -k/sqrt(sqr(x0[1]-2)+sqr(x0[2]))
    -0.25*k/((sqr(x0[1]-2)+sqr(x0[2]))*sqrt(sqr(x0[1]-2)+sqr(x0[2])))
    -k*9/(64*sqr(sqr(x0[1]-2)+x0[2]*x0[2])*sqrt(sqr(x0[1]-2)+x0[2]*
    x0[2]))
    -k*25/(256*(sqr(x0[1]-2)+x0[2]*x0[2])*(sqr(x0[1]-2)+sqr(x0[2]))*
    (sqr(x0[1]-2)+sqr(x0[2]))*sqrt(sqr(x0[1]-2)+sqr(x0[2])))
    -k*1225/(16384*sqr(sqr(x0[1]-2)+sqr(x0[2]))*
    sqr(sqr(x0[1]-2)+sqr(x0[2]))*sqrt(sqr(x0[1]-2)+sqr(x0[2])))
    -k/sqrt(sqr(x0[1]+2)+sqr(x0[2]))
    -0.25*k/((sqr(x0[1]+2)+sqr(x0[2]))*sqrt(sqr(x0[1]+2)+sqr(x0[2])))
    -k*9/(64*sqr(sqr(x0[1]+2)+x0[2]*x0[2])*
    sqrt(sqr(x0[1]+2)+x0[2]*x0[2]))
    -k*25/(256*(sqr(x0[1]+2)+x0[2]*x0[2])*(sqr(x0[1]+2)+sqr(x0[2]))*
    (sqr(x0[1]+2)+sqr(x0[2]))*sqrt(sqr(x0[1]+2)+sqr(x0[2])))
    -k*1225/(16384*sqr(sqr(x0[1]+2)+sqr(x0[2]))*sqr(sqr(x0[1]+2)+
    sqr(x0[2]))*sqrt(sqr(x0[1]+2)+sqr(x0[2]))));

// IF T mod 10 = 0 then
s:= ' ';
rkstxt(xend, x0, t*0.001);
for i:=1 to N do
  x0[i]:= xend[i];
  t:= t + 1;
writeln(datos,T*0.001:12:8,' ', (x0[1]):12:6, ' ', (x0[2]):12:6, ' ',
dis1:12:6,' ',dis2:12:6,' ',dis:12:6,' ',ene:9:6,' ');
s:= s+floattostr(t*0.001)+#9+floattostr(ene)+ #13;
end;
showmessage(s);
close(datos);
end.

```

Bibliografía

1. Landau y Lifshitz. “Física Teórica: Mecánica”. Editorial Reverté, S.A., 1965.
2. Taff, Laurence G.. “Celestial Mechanics A Computacional Guide For The Practitioner”. A Wiley – Interscience Publication, 1985.
3. Goldstein, H.. “Classical Mechanics, Second Edition”. Editorial Reverté, S.A., 1994.
4. Butkov, Eugene. “Mathematical Physics “. Adison Wesley Publishing Company, 1968
5. Arfken, George. “Mathematical Methods for Physicists”. Academic Press International Edition.
6. Burden, Richard L.. “Análisis Numérico”. Thompson Learning, Séptima Edición.
7. Maron, Melvin J.. “Análisis Numérico”. Editorial CECSA.
8. Venero Armando. “Análisis Matemático 2”. Editorial Ciencias S.R.L. Segunda Edición.