

**UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE FÍSICA**



**“ANÁLISIS NUMÉRICO DEL MOVIMIENTO DE UN
TROMPO ORDINARIO”**

INFORME DE SUFICIENCIA
Para optar el Título Profesional de:

LICENCIADO EN FÍSICA

ALDO MARTÍN QUIROGA ROJAS

**LIMA – PERU
2006**

*A mi hijo Gianmarco
a mi esposa
y a mi madrecita linda*

AGRADECIMIENTO

- ❖ A la Universidad Nacional de Ingeniería, en especial, a la Facultad de Ciencias, Escuela Profesional de Física por darme acogida para realizar mis estudios.
- ❖ Al asesor, Edgard Vidalón, por su orientación y asesoría durante el desarrollo del trabajo de investigación encomendado.
- ❖ A los colegas del Servicio Nacional de Metrología, que contribuyeron con el apoyo moral para la culminación del trabajo
- ❖ Finalmente a los compañeros del II ciclo de Titulación por actualización de conocimientos

INDICE

PROLOGO	1
CAPITULO 1: MOVIMIENTO DE UN TROMPO SIMÉTRICO, HOMOGENEO Y PESADO CON UN PUNTO DE APOYO FIJO.	
1.0 Introducción	3
1.1 Análisis cualitativo del movimiento de un trompo mediante la Energía mecánica.	4
1.2 Ecuaciones diferenciales ordinarias de movimiento de un trompo simétrico, homogéneo y pesado con un punto de apoyo fijo.	13
1.3 El caso de precesión pura para el movimiento del trompo.	19
1.4 Aplicación a un trompo simétrico, homogéneo y pesado de forma cónica.	22
1.5 Observaciones y conclusiones de la solución numérica de un trompo de forma cónica utilizando el método de Runge Kutta de orden 4.	26
CAPITULO 2: MOVIMIENTO DE UN TROMPO SIMÉTRICO, HOMOGENEO Y PESADO CON UN PUNTO DE APOYO MÓVIL.	
2.0 Introducción	192
2.1 Análisis cualitativo, mediante la energía mecánica, del movimiento de un trompo simétrico, homogéneo y pesado con un punto de apoyo móvil.	193
2.2 Ecuaciones diferenciales ordinarias de movimiento de un trompo simétrico, homogéneo y pesado con un punto de apoyo móvil.	199
2.3 Aplicación a un trompo simétrico, homogéneo y pesado de forma cónica.	206
2.4 Observaciones y conclusiones de la solución numérica de un trompo de forma cónica utilizando el método de Runge Kutta de orden 4.	208
APENDICE:	
1 Momentos de Inercia de un cono de revolución.	219
2 Método numérico de Runge Kutta para resolver ecuaciones diferenciales.	228
3 Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden que describen el movimiento del trompo	245
BIBLIOGRAFÍA	274

PROLOGO

El análisis del movimiento de un trompo con el punto inferior fijo se encuentra en varios textos de Mecánica clásica (Ejemplo: Goldstein – Mecánica clásica). Las propiedades del movimiento de este cuerpo rígido presentadas en los textos se pueden ilustrar o percibir mejor si se halla las coordenadas generalizadas que describen al trompo, en función del tiempo, para ciertas condiciones iniciales y parámetros del trompo. Esto se puede conseguir si resolvemos las ecuaciones diferenciales de movimiento del trompo numéricamente. Debemos aplicar métodos numéricos porque estas ecuaciones diferenciales son acopladas y no lineales. Al resolver las ecuaciones diferenciales ordinarias de movimiento no solo comprobamos las más importantes propiedades obtenidas analíticamente, podemos aún encontrar nuevas propiedades del movimiento que son difícil de predecir teóricamente.

El objetivo del presente trabajo es por lo tanto construir las ecuaciones diferenciales ordinarias de movimiento usando las Ecuaciones de Lagrange y resolverlas numéricamente (que equivale a realizar simulaciones de experimento con el trompo) para ciertas condiciones iniciales. Lamentablemente este tipo de análisis no se presenta en los libros de Mecánica clásica, pero en la actualidad con el avance en informática es fácil realizarlo.

Finalmente en el presente trabajo se estudia un caso más real del movimiento del trompo que es cuando el punto de apoyo del trompo se mueve. En ambos casos se considera que la energía mecánica se conserva. Como es obvio se deja para una investigación posterior (desarrollada en una tesis de licenciatura) el movimiento del trompo con fricción.

CAPITULO 1

MOVIMIENTO DE UN TROMPO SIMÉTRICO, HOMOGÉNEO Y PESADO CON UN PUNTO DE APOYO FIJO

- 1.0 Introducción.
- 1.1 Análisis cualitativo del movimiento de un trompo mediante la Energía mecánica.
- 1.2 Ecuaciones diferenciales ordinarias de movimiento sin fricción de un trompo simétrico y pesado con un punto de apoyo fijo.
- 1.3 El caso de precesión pura para el movimiento del trompo.
- 1.4 Aplicación a un trompo simétrico y pesado de forma cónica.
- 1.5 Observaciones y conclusiones de la solución numérica de un trompo de forma cónica utilizando el método de Runge Kutta de orden 4.

1.0 INTRODUCCION

En el presente capítulo recordaremos los conceptos más importantes del movimiento del trompo simétrico, homogéneo y pesado con un punto de apoyo fijo considerando que la energía mecánica se conserva. Para ello, aplicaremos las ecuaciones de la dinámica de cuerpo rígido, ecuaciones de Lagrange, y el método numérico de Runge Kutta de orden 4 para resolver las ecuaciones diferenciales de movimiento del trompo debido a que son no lineales y acopladas.

Analizaremos los movimientos de precesión y nutación para diferentes condiciones iniciales tomadas en cuenta.

Debemos mencionar que para facilitar los cálculos de los momentos de Inercia se considera al trompo en el presente trabajo de forma de un cono.

También cabe resaltar que estudiaremos, como caso particular, el movimiento para el caso de precesión pura. Es decir, el trompo no realiza movimiento de nutación durante todo su movimiento.

1.1 Análisis cualitativo del movimiento de un trompo mediante la energía mecánica.

Se considerará el movimiento de un trompo simétrico y homogéneo en un campo gravitatorio uniforme en donde el punto de contacto con el plano XY está fijo en el origen de coordenadas. El eje de simetría es uno de los ejes principales de inercia y lo tomaremos como eje X_3 del sistema de coordenadas fijas al cuerpo. Como hay un punto fijo, en nuestro caso, la configuración del trompo quedará determinada por los tres ángulos de Euler: θ da la inclinación del eje X_3 respecto a la vertical, ϕ mide el acimut del trompo respecto a la vertical, mientras que ψ , lo llamaremos, el ángulo de rotación del trompo respecto a su eje X_3 , ver figura (1.1.1). La distancia del centro de gravedad (que está situado sobre el eje de simetría) al punto fijo está representado por l_g . Se considera que el eje de rotación pasa siempre por el punto fijo O.

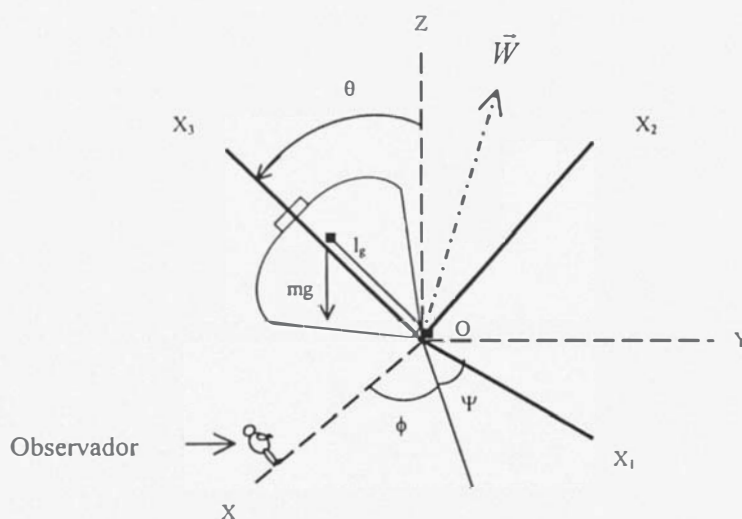


Figura (1.1.1)

Como el cuerpo es homogéneo tenemos I_1 (momento de inercia respecto al eje X_1) es igual a I_2 (momento de inercia respecto al eje X_2).

Denotando: $I_1 = I_2 \equiv I$.

Como se recuerda cuando se estudia el movimiento de un cuerpo rígido se tiene 2 bases de vectores $B \equiv \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ y $B_{CR} \equiv \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. Los 3 vectores \vec{e}_k se mueven siempre con el

cuerpo y coinciden con el eje X_k , ver figura (1.1.2). Asumimos que el eje de rotación pasa siempre por el punto fijo O.

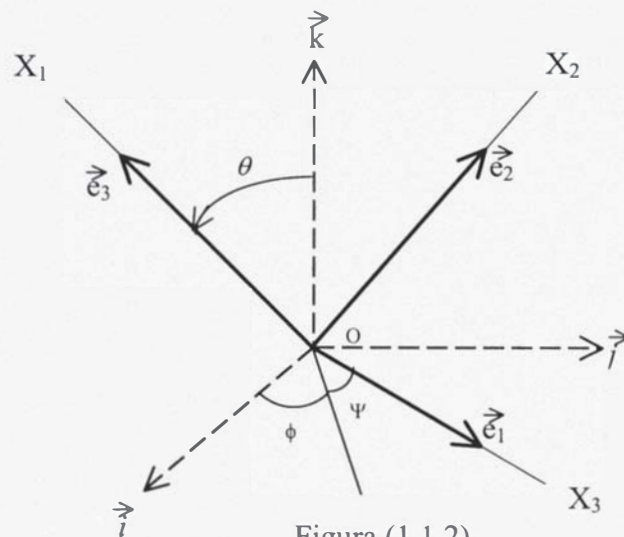


Figura (1.1.2)

Para obtener las ecuaciones diferenciales de movimiento del trompo vamos a utilizar las ecuaciones de Lagrange; pero previamente demostraremos que la energía mecánica se expresa como una función del ángulo θ y su derivada $\dot{\theta}$, es decir $E_M = f(\theta, \dot{\theta})$.

La expresión general de la energía cinética de un cuerpo rígido es:

$$T = \frac{m V_Q^2}{2} + m \vec{V}_{QG} \cdot \vec{V}_Q + \sum_{i=1}^3 \frac{I_i W_i^2}{2}$$

Donde Q es el punto por donde pasa el eje de rotación.

Ahora, como el cuerpo es simétrico y el punto por donde pasa la velocidad angular es fijo, podemos expresar la energía cinética de la forma

$$T = \frac{1}{2} I (w_1^2 + w_2^2) + \frac{1}{2} I_3 (w_3)^2$$

donde w_i representa las componentes de la velocidad angular \vec{W} medido en el sistema inercial.

Además (ver Landau - Mecánica).

$$w_1 = \dot{\phi} \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \psi + \dot{\theta} \cos \psi,$$

$$w_2 = \dot{\phi} \operatorname{sen} \theta \cos \psi - \dot{\theta} \operatorname{sen} \psi,$$

$$w_3 = \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}.$$

Reemplazando las componentes w_k en la expresión de la energía cinética:

$$T = \frac{1}{2} I \left[\left(\dot{\phi} \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \psi + \dot{\theta} \cos \psi \right)^2 + \left(\dot{\phi} \operatorname{sen} \theta \cos \psi - \dot{\theta} \operatorname{sen} \psi \right)^2 \right] + \frac{1}{2} I_3 \left(\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi} \right)^2$$

Simplificando obtenemos:

$$T = \frac{1}{2} I \left[\left(\dot{\phi} \operatorname{sen} \theta \right)^2 + \left(\dot{\theta} \right)^2 \right] + \frac{1}{2} I_3 \left(\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi} \right)^2. \quad \dots \quad (1.1.1)$$

La energía potencial del cuerpo rígido será:

$$V = m g l_g \cos \theta. \quad \dots \quad (1.1.2)$$

Considerando que el sistema mecánico es conservativo, es decir, la energía total del trompo será constante; de (1.1.1) y (1.1.2) la $E_M \equiv T + V$ se escribe.

$$E = \frac{1}{2} I \left[\left(\dot{\phi} \operatorname{sen} \theta \right)^2 + \left(\dot{\theta} \right)^2 \right] + \frac{1}{2} I_3 \left(\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi} \right)^2 + m g l_g \cos \theta \quad \dots \quad (1.1.3)$$

además la función de lagrange del cuerpo rígido es:

$$L = \frac{1}{2} I \left[\left(\dot{\phi} \operatorname{sen} \theta \right)^2 + \left(\dot{\theta} \right)^2 \right] + \frac{1}{2} I_3 \left(\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi} \right)^2 - m g l_g \cos \theta \quad \dots \quad (1.1.4)$$

Observación: Como se observa en la ecuación (1.1.4) estamos usando la notación incorrecta de la función de Lagrange que están en todos los textos y reconocemos que las expresiones

$\frac{\partial L}{\partial q_i}$ y $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ tampoco tienen sentido. Por consiguiente, para este presente trabajo, primero las funciones serán derivadas y luego serán evaluadas sobre la trayectoria.

Ahora tomando en cuenta las siguientes definiciones:

a) Fuerzas generalizadas F_i :

$$F_i \equiv \frac{\partial L}{\partial q_i},$$

Aplicaremos a cada coordenada generalizada (ϕ , ψ , θ)

$$\text{i) } F_\phi \equiv \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0; \quad \dots \quad (1.1.5)$$

$$\text{ii) } F_\psi \equiv \frac{\partial L}{\partial \psi} = 0; \quad \dots \quad (1.1.6)$$

$$\text{iii) } F_\theta \equiv \frac{\partial L}{\partial \theta} \neq 0$$

b) Momentos generalizados p_i :

$$p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i},$$

Usando esta definición para los ángulos de Euler θ , ϕ y ψ

$$\text{i) } p_\phi \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = (I \sin^2 \theta) \dot{\phi} + (I_3 \cos^2 \theta) \dot{\phi} + (I_3 \cos \theta \dot{\psi})$$

Que se puede expresar en la forma:

$$p_\phi = (I \sin^2 \theta + I_3 \cos^2 \theta) \dot{\phi} + (I_3 \cos \theta \dot{\psi}) \quad \dots \quad (1.1.7)$$

$$\text{ii) } p_\psi \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}},$$

Usando esta definición con el lagrangiano mencionado

$$p_\psi = I_3 \left(\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi} \right); \quad \dots \quad (1.1.8)$$

y como $w_3 = \left(\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi} \right)$, luego

$$p_\psi = I_3 w_3. \quad \dots \quad (1.1.9)$$

c) De la relación entre la fuerza y el momento generalizado (ver Landau - Mecánica)

$$\dot{p}_i = F_i;$$

y debido a que

$$F_\phi = F_\psi = 0,$$

Se concluye que p_ϕ y p_ψ son constantes. De esta conclusión demostramos, fácilmente, que w_3 es constante.

De las ecuaciones (1.1.7) y (1.1.8) podemos despejar $\dot{\phi}$ y $\dot{\psi}$. Para obtener este resultado comenzaremos despejando $\dot{\psi}$ de (1.1.8).

$$\dot{\psi} = \frac{p_\psi}{I_3} - \dot{\phi} \cos \theta, \quad \dots \quad (1.1.10)$$

reemplazando $\dot{\psi}$ en (1.1.7) obtenemos

$$p_\phi = \left(I \sin^2 \theta + I_3 \cos^2 \theta \right) \dot{\phi} + p_\psi \cos \theta - I_3 \dot{\phi} \cos^2 \theta,$$

De esta última ecuación, después de simplificar, despejaremos $\dot{\phi}$.

$$\dot{\phi} = \frac{p_\phi - p_\psi \cos \theta}{I \sin^2 \theta}, \quad \dots \quad (1.1.11)$$

reemplazando (1.1.11) en (1.1.10) resulta

$$\dot{\psi} = \frac{p_{\psi}}{I_3} - \frac{(p_{\phi} - p_{\psi} \cos \theta) \cos \theta}{I \sin^2 \theta}. \quad (1.1.12)$$

Nuevamente regresando a la ecuación de la energía (1.1.3) y teniendo en cuenta que w_3 es constante se tiene

$$E = \frac{1}{2} I \left[\left(\dot{\phi} \sin \theta \right)^2 + \left(\dot{\theta} \right)^2 \right] + \frac{1}{2} I_3 (w_3)^2 + m g l_g \cos \theta. \quad (1.1.13)$$

Ordenando la ecuación anterior:

$$E - \frac{1}{2} I_3 (w_3)^2 = \frac{1}{2} I \left(\dot{\theta} \right)^2 + \frac{1}{2} I \left(\dot{\phi} \sin \theta \right)^2 + m g l_g \cos \theta.$$

ahora reemplazando (1.1.11) en la ecuación anterior

$$E - \frac{1}{2} I_3 (w_3)^2 = \frac{1}{2} I \left(\dot{\theta} \right)^2 + \frac{1}{2} I \left(\frac{p_{\phi} - p_{\psi} \cos \theta}{I \sin^2 \theta} \right)^2 \sin^2 \theta + m g l_g \cos \theta.$$

y debido a que w_3 es constante, entonces nosotros podremos decir que $E - \frac{1}{2} I_3 (w_3)^2$ es una nueva constante de movimiento y a la cual la denominaremos E' .

$$E' \equiv \frac{1}{2} I \left(\dot{\theta} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{(p_{\phi} - p_{\psi} \cos \theta)^2}{I \sin^2 \theta} + m g l_g \cos \theta. \quad \dots \quad (1.1.14)$$

Como $\frac{1}{2} I \left(\dot{\theta} \right)^2 \geq 0$ el movimiento del trompo es de tal modo que $V'(\theta) \leq E'$ donde

$$V'(\theta) \equiv \frac{1}{2} \frac{(p_{\phi} - p_{\psi} \cos \theta)^2}{I \sin^2 \theta} + m g l_g \cos \theta, \quad \text{con } \theta \neq 0, \pi \quad \dots \quad (1.1.15)$$

Observamos que la función $V'(\theta)$ tiende al infinito si θ se aproxima a 0 o π . El gráfico de la función $V'(\theta)$ es de la forma mostrada en la figura (1.1.3)

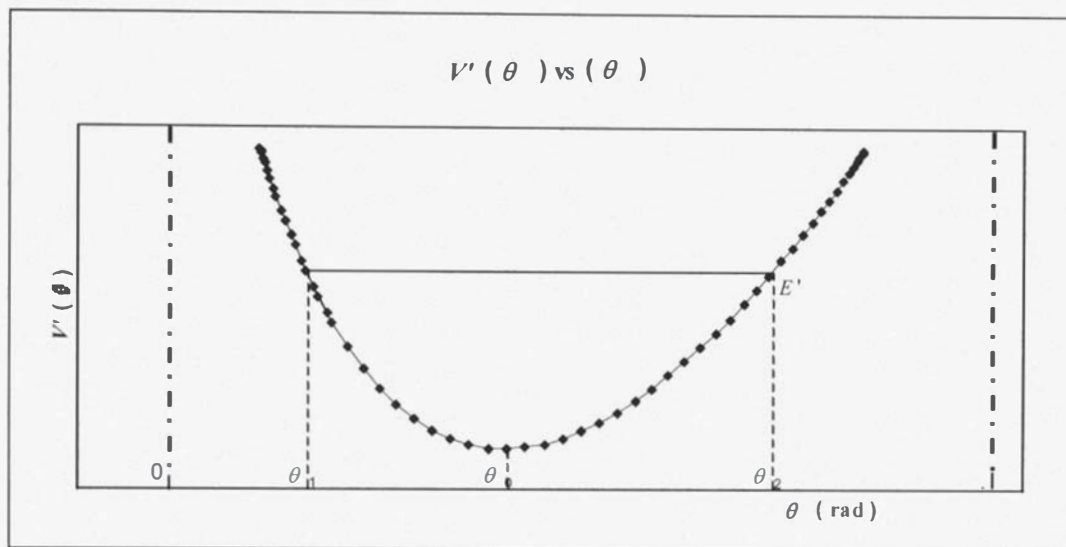


Gráfico (1.1.3)

Graficando la función $V'(\theta)$ y usando la relación $V'(\theta) \leq E'$, podemos concluir que el ángulo θ está acotado. Es decir que existe un θ_{Min} y $\theta_{\text{Máx}}$.

En la figura (1.1.3) se muestra la función $V'(\theta)$ obtenida con valores de parámetros y condiciones iniciales mostrados en la Tabla (1.1.1). También se obtiene, numéricamente, que la función $\theta(t)$ es periódica, ver sub capítulo 1.5.

Tabla (1.1.1)

Parámetro	Condición inicial
θ	10°
ϕ	0°
ψ	0°
$\dot{\theta}$	0 rad/seg
$\dot{\phi}$	20 rad/seg
$\dot{\psi}$	1000 rad/seg
I_1	0,000231 kg/m ²
I_3	0,0000152 kg/m ²
m	0,068 kg

Concepto de velocidad angular de precesión y nutación

En el movimiento de un cuerpo rígido se define velocidad angular de precesión, nutación y rotación propia, respectivamente, a las siguientes derivadas:

$$\dot{\phi} \equiv \frac{d\phi}{dt}, \quad \dot{\theta} \equiv \frac{d\theta}{dt}, \quad \dot{\psi} \equiv \frac{d\psi}{dt}$$

En el caso general, en que θ puede variar entre los límites $\theta_1 < \theta < \theta_2$, la ecuación (1.1.11) nos indica que $\dot{\phi}$ puede cambiar o no de signo cuando θ varíe entre sus límites, según sean los valores de p_ϕ y p_ψ .

Los movimientos del trompo se pueden clasificar en:

a) Si $\dot{\phi}$ no cambia de signo, el trompo ejecuta un movimiento que se dice movimiento de precesión monótona en torno al eje Z , mientras el eje de simetría, X_3 , oscila entre $\theta = \theta_1$ y $\theta = \theta_2$. Este fenómeno se llama nutación, ver figura (1.1.4) (a), mostrándose la trayectoria descrita por la proyección del eje de simetría del cuerpo sobre una esfera unidad proyectadas sobre el sistema de coordenadas fijas al cuerpo.

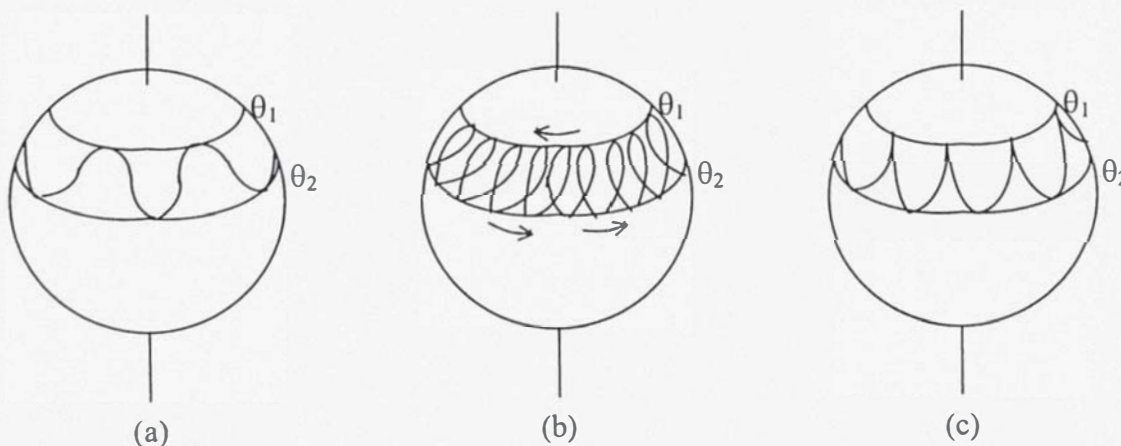


Figura (1.1.4)

b) Si cambia de signo $\dot{\phi}$ cuando θ varía entre sus dos valores límites, se puede demostrar que la velocidad angular de precesión deberá tener signos contrarios en $\theta = \theta_1$ y $\theta = \theta_2$, recordar ecuación (1.1.1). Así, el movimiento de precesión y nutación origina el movimiento rizado del eje de simetría del cuerpo que se muestra en la figura (1.1.4) (b). A este tipo de movimiento lo denominaremos precesión con bucles o rizos.

c) También, se presenta un caso especial importante, cuando el trompo gira inicialmente alrededor de su eje de simetría con velocidad angular w_3 y a su vez forma un ángulo θ_1 con el eje Z. Es decir:

$$\theta(0) = \theta_1, \quad \dot{\theta}(0) = 0, \quad \dot{\phi}(0) = 0, \quad \dot{\psi}(0) = w_3$$

Ahora, como el primer movimiento del trompo es comenzar a caer en el campo gravitatorio la trayectoria del eje del trompo es la representada en la figura (1.1.4) (c) y lo llamaremos precesión de caída.

d) Movimiento de precesión pura es cuando:

$$\theta(t) = \theta_0, \quad \psi(t) = \dot{\psi}(0)t + \psi(0), \quad \phi(t) = \dot{\phi}(0)t + \phi(0)$$

Este movimiento será analizado en detalle en el sub capítulo 1.3

1.2 Ecuaciones diferenciales ordinarias de movimiento de un trompo simétrico, homogéneo y pesado con un punto de apoyo fijo.

Teniendo en cuenta que el lagrangiano, L (1.1.4), para el movimiento de un trompo simétrico, homogéneo y pesado con un punto fijo se expresa de la siguiente manera:

$$L = \frac{1}{2} I \left[\left(\dot{\phi} \sin \theta \right)^2 + \left(\dot{\theta} \right)^2 \right] + \frac{1}{2} I_3 \left(\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi} \right)^2 - m g l_g \cos \theta$$

Aplicando las ecuaciones de Lagrange obtenemos lo siguiente:

a) Para θ :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \quad \dots \quad (1.2.1)$$

Hallando separadamente

$$\bullet \quad \frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{1}{2} I \left[\left(\dot{\phi} \sin \theta \right)^2 + \left(\dot{\theta} \right)^2 \right] + \frac{1}{2} I_3 \left(\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi} \right)^2 - m g l_g \cos \theta \right],$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{1}{2} I \left(\dot{\phi} \right)^2 \sin 2\theta - I_3 \left(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta \right) \dot{\phi} \sin \theta + m g l_g \sin \theta \quad \dots \quad (1.2.2)$$

$$\bullet \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}} \left[\frac{1}{2} I \left[\left(\dot{\phi} \sin \theta \right)^2 + \left(\dot{\theta} \right)^2 \right] + \frac{1}{2} I_3 \left(\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi} \right)^2 - m g l_g \cos \theta \right],$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = I \dot{\theta}; \quad \dots \quad (1.2.3)$$

Además

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = I \ddot{\theta} \quad \dots \quad (1.2.4)$$

Reemplazando (1.2.2) y (1.2.4) en (1.2.1) se tiene lo siguiente:

$$I \ddot{\theta} - \frac{1}{2} I \left(\dot{\phi} \right)^2 \operatorname{sen} 2\theta + I_3 \left(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta \right) \dot{\phi} \operatorname{sen} \theta - m g l_g \operatorname{sen} \theta = 0$$

Ordenando la ecuación anterior obtenemos:

$$I \ddot{\theta} - \frac{1}{2} (I - I_3) \left(\dot{\phi} \right)^2 \operatorname{sen} 2\theta + \left(\dot{\psi} I_3 \dot{\phi} - m g l_g \right) \operatorname{sen} \theta = 0 \quad \dots \quad (1.2.5)$$

b) Para ϕ :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0 \quad \dots \quad (1.2.6)$$

Hallando separadamente

$$\bullet \quad \frac{\partial L}{\partial \phi} = \frac{\partial}{\partial \phi} \left[\frac{1}{2} I \left[\left(\dot{\phi} \operatorname{sen} \theta \right)^2 + \left(\dot{\theta} \right)^2 \right] + \frac{1}{2} I_3 \left(\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi} \right)^2 - m g l_g \cos \theta \right]$$

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} = 0 \quad \dots \quad (1.2.7)$$

$$\bullet \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \frac{\partial}{\partial \dot{\phi}} \left[\frac{1}{2} I \left[\left(\dot{\phi} \operatorname{sen} \theta \right)^2 + \left(\dot{\theta} \right)^2 \right] + \frac{1}{2} I_3 \left(\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi} \right)^2 - m g l_g \cos \theta \right]$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = I \dot{\phi} \operatorname{sen}^2 \theta + I_3 \left(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta \right) \cos \theta = \left(I \operatorname{sen}^2 \theta + I_3 \cos^2 \theta \right) \dot{\phi} + I_3 \dot{\psi} \cos \theta \quad \dots \quad (1.2.8)$$

Luego

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = (I \operatorname{sen} 2\theta - I_3 \operatorname{sen} 2\theta) \dot{\theta} \dot{\phi} + (I \operatorname{sen}^2 \theta + I_3 \cos^2 \theta) \ddot{\phi} + I_3 \ddot{\psi} \cos \theta - I_3 \dot{\psi} \dot{\theta} \operatorname{sen} \theta \quad \dots \quad (1.2.9)$$

- Teniendo en cuenta que el momento generalizado p_ϕ es constante, ver ecuación (1.1.7), entonces la ecuación (1.2.9) es igual a cero:

$$(I \operatorname{sen} 2\theta - I_3 \operatorname{sen} 2\theta) \dot{\theta} \dot{\phi} + (I \operatorname{sen}^2 \theta + I_3 \cos^2 \theta) \ddot{\phi} + I_3 \ddot{\psi} \cos \theta - I_3 \dot{\psi} \dot{\theta} \operatorname{sen} \theta = 0,$$

Ordenando la ecuación anterior obtenemos:

$$(I - I_3) \dot{\theta} \dot{\phi} \operatorname{sen} 2\theta + (I \operatorname{sen}^2 \theta + I_3 \cos^2 \theta) \ddot{\phi} + I_3 \ddot{\psi} \cos \theta - I_3 \dot{\psi} \dot{\theta} \operatorname{sen} \theta = 0, \quad \dots \quad (1.2.10)$$

- c) Para ψ :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} - \frac{\partial L}{\partial \psi} = 0 \quad \dots \quad (1.2.11)$$

Hallando separadamente

- $\frac{\partial L}{\partial \psi} = \frac{\partial}{\partial \psi} \left[\frac{1}{2} I (\dot{\phi} \operatorname{sen} \theta)^2 + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi})^2 - m g l_g \cos \theta \right],$

$$\frac{\partial L}{\partial \psi} = 0 \quad \dots \quad (1.2.12)$$

- $\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = \frac{\partial}{\partial \dot{\psi}} \left[\frac{1}{2} I (\dot{\phi} \operatorname{sen} \theta)^2 + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi})^2 - m g l_g \cos \theta \right],$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = I_3 \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta ; \quad \dots \quad (1.2.13)$$

Derivando

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = I_3 \ddot{\psi} + \ddot{\phi} \cos \theta - \dot{\phi} \dot{\theta} \sin \theta \quad \dots \quad (1.2.14)$$

- Teniendo en cuenta que el momento generalizado p_ψ es constante, ver ecuación (1.1.8), entonces la ecuación (1.2.14) es igual a cero:

$$I_3 \ddot{\psi} + \ddot{\phi} \cos \theta - \dot{\phi} \dot{\theta} \sin \theta = 0$$

Ordenando la ecuación anterior obtenemos:

$$\ddot{\psi} + \ddot{\phi} \cos \theta - \dot{\phi} \dot{\theta} \sin \theta = 0 \quad \dots \quad (1.2.15)$$

Agrupando las ecuaciones (1.2.5), (1.2.10) y (1.2.15)

$$a) \quad I \ddot{\theta} - \frac{1}{2} (I - I_3) \dot{\phi}^2 \sin 2\theta + \dot{\psi} I_3 \dot{\phi} - m g l_g \sin \theta = 0, \quad \dots \quad (1.2.16)$$

$$b) \quad (I - I_3) \dot{\theta} \dot{\phi} \sin 2\theta + (I \sin^2 \theta + I_3 \cos^2 \theta) \ddot{\phi} + I_3 \ddot{\psi} \cos \theta - I_3 \dot{\psi} \dot{\theta} \sin \theta = 0, \quad \dots \quad (1.2.17)$$

$$c) \quad \ddot{\psi} + \ddot{\phi} \cos \theta - \dot{\phi} \dot{\theta} \sin \theta = 0, \quad \dots \quad (1.2.18)$$

Estas 3 ecuaciones diferenciales son las ecuaciones diferenciales ordinarias de movimiento del trompo y observamos que son acopladas y no lineales.

Para resolver numéricamente las ecuaciones ordinarias de movimiento del trompo (ecuaciones (1.2.16), (1.2.17) y (1.2.18)), despejaremos las 2^{das} derivadas.

- Despejando $\ddot{\theta}$ de (1.2.16)

$$\ddot{\theta} = \frac{(I - I_3) \left(\dot{\phi} \right)^2 \sin \theta \cos \theta - \left(\dot{\psi} I_3 \dot{\phi} - m g l_g \right) \sin \theta}{I} \quad \dots \quad (1.2.19)$$

- Despejaremos $\ddot{\phi}$ y para ello primero despejaremos $\ddot{\psi}$ de (1.2.18)

$$\ddot{\psi} = \dot{\phi} \dot{\theta} \sin \theta - \ddot{\phi} \cos \theta \quad \dots \quad (1.2.20)$$

Ahora, reemplazando $\ddot{\psi}$ en (1.2.17) obtenemos:

$$(I - I_3) \dot{\theta} \dot{\phi} \sin 2\theta + (I \sin^2 \theta + I_3 \cos^2 \theta) \ddot{\phi} + I_3 \left(\dot{\phi} \dot{\theta} \sin \theta - \ddot{\phi} \cos \theta \right) \cos \theta - I_3 \dot{\psi} \dot{\theta} \sin \theta = 0$$

simplificando

$$(2I - I_3) \dot{\theta} \dot{\phi} \sin \theta \cos \theta + I \ddot{\phi} \sin^2 \theta - I_3 \dot{\psi} \dot{\theta} \sin \theta = 0$$

$$(2I - I_3) \dot{\theta} \dot{\phi} \cos \theta + I \ddot{\phi} \sin \theta - I_3 \dot{\psi} \dot{\theta} = 0,$$

Despejando $\ddot{\phi}$

$$\ddot{\phi} = \frac{I_3 \dot{\psi} \dot{\theta} + (I_3 - 2I) \dot{\theta} \dot{\phi} \cos \theta}{I \sin \theta} \quad \dots \quad (1.2.21)$$

- Despejando $\ddot{\psi}$, y para ello reemplazaremos (1.2.21) en (1.2.20)

$$\ddot{\psi} = \dot{\phi} \dot{\theta} \sin \theta - \left[\frac{I_3 \dot{\psi} \dot{\theta} + (I_3 - 2I) \dot{\theta} \dot{\phi} \cos \theta}{I} \right] \cos \theta \quad \dots \quad (1.2.22)$$

Agrupando las ecuaciones de movimiento del trompo tenemos lo siguiente:

$$\ddot{\theta} = \frac{(I - I_3) \left(\dot{\phi} \right)^2 \sin \theta \cos \theta - \left(\dot{\psi} I_3 \dot{\phi} - m g l_g \right) \sin \theta}{I}, \quad \dots \quad (1.2.23a)$$

$$\ddot{\phi} = \frac{I_3 \dot{\psi} \dot{\theta} + (I_3 - 2I) \dot{\theta} \dot{\phi} \cos \theta}{I \sin \theta}, \quad \dots \quad (1.2.23b)$$

$$\ddot{\psi} = \dot{\phi} \dot{\theta} \operatorname{sen} \theta - \left[\frac{I_3 \dot{\psi} \dot{\theta} + (I_3 - 2I) \dot{\theta} \dot{\phi} \cos \theta}{I} \right] \cot \theta \quad \dots \quad (1.2.23c)$$

Observaciones:

De las ecuaciones diferenciales de 1^{er} orden (1.1.11), (1.1.12) y (1.1.14) obtenemos

$$\dot{\theta} = \pm \sqrt{\frac{2E'}{I} - \frac{(p_\phi - p_\psi \cos \theta)^2}{I^2 \operatorname{sen}^2 \theta} - \frac{2mg l_g \cos \theta}{I}} \quad \dots \quad (1.2.24a)$$

$$\dot{\phi} = \frac{p_\phi - p_\psi \cos \theta}{I \operatorname{sen}^2 \theta} \quad \dots \quad (1.2.24b)$$

$$\dot{\psi} = \frac{p_\psi}{I_3} - \frac{(p_\phi - p_\psi \cos \theta) \cos \theta}{I \operatorname{sen}^2 \theta} \quad \dots \quad (1.2.24c)$$

Aparentemente estas ecuaciones diferenciales ordinarias son más fáciles al resolver que las de 2^{do} orden. En el presente informe resolveremos algunos casos utilizando el sistema de ecuaciones de primer orden, ver apéndice 3.

1.3 El caso de precesión pura para el movimiento del trompo

El caso de Precesión Pura, es aquel en donde el trompo no realiza el "movimiento de nutación", es decir $\dot{\theta}(t) = 0$. Por lo tanto, el ángulo θ permanecerá constante.

$$\theta(t) = \theta_0; \quad \dots \quad (1.3.1)$$

Este tipo de movimiento es un caso particular del movimiento estacionario (movimiento de un sistema mecánico donde una o más de las coordenadas generalizadas es constante).

Siendo $\dot{\theta} = 0$, las ecuaciones de movimiento del trompo mostradas en la página anterior, ver las ecuaciones (1.2.23), quedan simplificadas a:

$$-\frac{1}{2}(I - I_2)\left(\dot{\phi}\right)^2 \sin 2\theta + \left(\dot{\psi} I_3 \dot{\phi} - M g l_g\right) \sin \theta = 0 \quad \dots \quad (1.3.2)$$

$$\ddot{\psi} + \ddot{\phi} \cos \theta = 0 \quad \dots \quad (1.3.3)$$

$$(I \sin^2 \theta + I_3 \cos^2 \theta) \ddot{\phi} + I_3 \ddot{\psi} \cos \theta = 0 \quad \dots \quad (1.3.4)$$

Resolveremos las ecuaciones de movimiento con esta condición $\dot{\theta}(t) = 0$.

Ahora, despejando $\ddot{\psi}$ de (1.3.3), tenemos:

$$\ddot{\psi} = -\ddot{\phi} \cos \theta \quad \dots \quad (1.3.5)$$

Reemplazando (1.3.5) en (1.3.4), llegamos a:

$$(I \sin^2 \theta + I_3 \cos^2 \theta) \ddot{\phi} + I_3 \left(-\ddot{\phi} \cos \theta\right) \cos \theta = 0$$

Simplificando, queda:

$$I \sin^2 \theta \ddot{\phi} = 0$$

Sabiendo que θ es diferente de cero, se deduce que:

$$\ddot{\phi} = 0 \quad \dots \quad (1.3.6)$$

Es decir $\dot{\phi}$ es constante, entonces:

$$\dot{\phi} = C \quad \dots \quad (1.3.7)$$

y

$$\phi(t) = C t + \phi_0 \quad \dots \quad (1.3.8)$$

Reemplazando (1.3.6) en (1.3.5) se obtiene:

$$\ddot{\psi} = 0 \quad \dots \quad (1.3.9)$$

Entonces $\dot{\psi}$ es constante. Luego $\psi = \alpha_1 t + \alpha_2$.

Por otra parte, despejando $\dot{\psi}$ de (1.3.2) y simplificando se obtiene

$$\dot{\psi} = \frac{M g l_g + (I - I_3) \left(\dot{\phi} \right)^2 \cos \theta}{I_3 \dot{\phi}} \quad \dots \quad (1.3.10)$$

Nota: De esta última ecuación se comprueba que $\dot{\psi}$ es un valor constante ya que $\dot{\phi}$ y θ corresponden a valores constantes.

Reemplazando (1.3.7) en (1.3.10), queda:

$$\dot{\psi} = \frac{M g l_g + (I - I_3) C^2 \cos \theta}{I_3 C} \quad \dots \quad (1.3.11)$$

Nota: Esta expresión matemática es importante porque nos da la relación que existe entre $\dot{\psi}(0)$, $\dot{\phi}(0)$ y $\theta(0)$, y los parámetros del trompo para que exista el movimiento de precesión pura.

Integrando la ecuación (1.3.11) y sabiendo que para $t = 0$, $\psi(0) = \psi_0$, se obtiene la siguiente expresión matemática:

$$\psi(t) = \left[\frac{M g l_g + (I - I_3) C^2 \cos \theta}{I_3 C} \right] t + \psi_0 \quad \dots \quad (1.3.13)$$

En resumen, los ángulos de euler y sus derivadas que describen el movimiento del trompo para el caso de precesión pura, son:

$$\theta(t) = \theta_0$$

$$\dot{\theta} = 0$$

$$\dot{\phi} = C$$

$$\phi(t) = C t + \phi_0$$

$$\dot{\psi} = \frac{M g l_g + (I - I_3) C^2 \cos \theta}{I_3 C}$$

$$\psi(t) = \left[\frac{M g l_g + (I - I_3) C^2 \cos \theta}{I_3 C} \right] t + \psi_0 \quad \dots \quad (1.3.14)$$

donde: C es la velocidad angular de precesión del trompo.

Las ecuaciones anteriores (1.3.14) también nos dan las relaciones que deben tener las condiciones finales para que exista precesión pura.

Ejemplo:

$$\theta_0 = 2 \text{ rad}$$

$$\dot{\theta} = 0 \text{ rad/s}$$

$$\phi_0 = 2 \text{ rad}$$

$$\dot{\phi} = 5 \text{ rad/s}$$

$$\psi_0 = 0 \text{ rad}$$

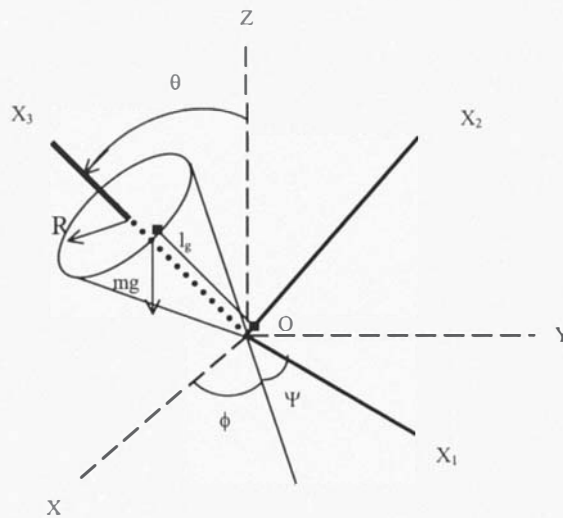
Luego hallamos las condiciones iniciales de $\dot{\psi}$ mediante (1.3.11)

$$\dot{\psi} = 457,48 \text{ rad/s}$$

Este resultado se obtuvo considerando al trompo como un cono de masa 68 g, altura 7,4 cm y radio 2,73 cm.

1.4 Aplicación a un trompo simétrico, homogéneo y pesado de forma cónica

Para poder resolver numéricamente las ecuaciones de movimiento del trompo, ver la ecuaciones (1.2.23), necesitamos determinar los valores numéricos de los momentos de inercia respecto a los ejes de coordenadas fijos al cuerpo del trompo. Y debido a que los momentos de inercia de un cuerpo también dependen de su forma geométrica; entonces por simplicidad, para este presente trabajo, asumiremos que el trompo es de forma cónica.



Donde: R , es el radio de la base;
 H , es la altura del cono (trompo)
 l_g , es la distancia entre el vértice y el centro de masa del cono

Reemplazando, en las ecuaciones de movimiento del trompo (1.2.23), los momentos de inercia de un cono, ver las ecuaciones (A.1.12) del anexo 1, respecto a su eje de simetría y a los ejes que atraviesan el vértice del cono obtendremos las ecuaciones diferenciales ordinarias de movimiento del trompo cónico:

$$\ddot{\theta} = \frac{\left[\frac{3m}{20}(R^2 + 4H^2) - \frac{3mR^2}{10} \right] (\dot{\phi})^2 \sin\theta \cos\theta - \left(\dot{\psi} \frac{3mR^2}{10} \dot{\phi} - mg l_g \right) \sin\theta}{\frac{3m}{20}(R^2 + 4H^2)}, \quad \dots \quad (1.4.1a)$$

$$\ddot{\phi} = \frac{\frac{3 m R^2}{10} \dot{\psi} \dot{\theta} + \left[\frac{3 m R^2}{10} - 2 \frac{3 m}{20} (R^2 + 4 H^2) \right] \dot{\theta} \dot{\phi} \cos \theta}{\frac{3 m}{20} (R^2 + 4 H^2) \sin \theta}, \quad \dots \quad (1.4.1b)$$

y

$$\ddot{\psi} = \dot{\phi} \dot{\theta} \operatorname{sen} \theta - \left[\frac{\frac{3 m R^2}{10} \dot{\psi} \dot{\theta} + \left[\frac{3 m R^2}{10} - 2 \frac{3 m}{20} (R^2 + 4 H^2) \right] \dot{\theta} \dot{\phi} \cos \theta}{\frac{3 m}{20} (R^2 + 4 H^2)} \right] \cot \theta \quad \dots \quad (1.4.1c)$$

Simplificando las ecuaciones (1.4.1), obtenemos las ecuaciones de movimiento sin fricción de un trompo simétrico, homogéneo y pesado con un punto fijo de forma cónica.

$$\ddot{\theta} = \frac{\left[\frac{3}{20} (4 H^2 - R^2) \right] (\dot{\phi})^2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta - \left(\dot{\psi} \frac{3 R^2}{10} \dot{\phi} - g l_g \right) \operatorname{sen} \theta}{\frac{3}{20} (R^2 + 4 H^2)}, \quad \dots \quad (1.4.2a)$$

$$\ddot{\phi} = \frac{2 R^2 \dot{\psi} \dot{\theta} - 8 H^2 \dot{\theta} \dot{\phi} \cos \theta}{(R^2 + 4 H^2) \operatorname{sen} \theta} \quad \dots \quad (1.4.2b)$$

y

$$\ddot{\psi} = \dot{\phi} \dot{\theta} \operatorname{sen} \theta - \left[\frac{2 R^2 \dot{\psi} \dot{\theta} - 8 H^2 \dot{\theta} \dot{\phi} \cos \theta}{(R^2 + 4 H^2)} \right] \cot \theta \quad \dots \quad (1.4.2c)$$

Se observa que las ecuaciones de movimiento no dependen de la masa del trompo.

Precesión pura

En forma similar reemplazaremos los momentos de inercia del cono calculados en el anexo 1, (A.1.14), en las ecuaciones (1.3.14) para el caso de movimiento de precesión pura, obteniendo:

$$\theta(t) = \theta_0 \quad \dots \quad (1.4.3a)$$

$$\dot{\theta} = 0 \quad \dots \quad (1.4.3b)$$

$$\dot{\phi} = C \quad \dots \quad (1.4.3c)$$

$$\phi(t) = C t + \phi_0 \quad \dots \quad (1.4.3d)$$

$$\dot{\psi} = \frac{M g l_g + \left(\frac{3 M}{20} (R^2 + 4 H^2) - \frac{3 M R^2}{10} \right) C^2 \cos \theta}{\frac{3 M R^2}{10} C} \quad \dots \quad (1.4.3e)$$

$$\psi(t) = \left[\frac{M g l_g + \left(\frac{3 M}{20} (R^2 + 4 H^2) - \frac{3 M R^2}{10} \right) C^2 \cos \theta}{\frac{3 M R^2}{10} C} \right] t + \psi_0 \quad \dots \quad (1.4.3f)$$

Simplificando las ecuaciones (1.4.3), obtenemos las ecuaciones del trompo para el caso de precesión pura.

$$\theta(t) = \theta_0$$

$$\dot{\theta} = 0$$

$$\dot{\phi} = C$$

$$\phi(t) = C t + \phi_0$$

$$\dot{\psi} = \frac{20 g l_g + 3 (4 H^2 - R^2) C^2 \cos \theta}{6 R^2 C}$$

$$\psi(t) = \left[\frac{20 g l_g + 3(4 H^2 - R^2) C^2 \cos \theta}{6 R^2 C} \right] t + \psi_0$$

En forma similar, se puede observar que las ecuaciones de movimiento no dependen de la masa del trompo.

1.5 Observaciones y conclusiones de la solución numérica para un trompo de forma cónica utilizando el método de Runge Kutta de orden cuatro

Para poder resolver las ecuaciones de movimiento del trompo, ver (1.4.2), primero necesitamos conocer las dimensiones y la masa de un trompo cónico y luego reemplazarlas en las ecuaciones. Estos valores se muestran en la tabla (1.5.1)

Tabla (1.5.1)

Material	Madera
Masa	0,068 kg
Radio (R)	0,0273 m
Altura (H)	0,074 m
Centro de Gravedad (l_g)	0,0555 m

Luego las ecuaciones diferenciales de movimiento quedaran de la forma:

$$\ddot{\theta} = \frac{0,00317381 \left(\dot{\phi} \right)^2 \sin \theta \cos \theta - \left(0,00022359 \dot{\psi} \dot{\phi} - 0,72594 \right) \sin \theta}{0,00339739}, \dots \quad (1.5.1a)$$

$$\ddot{\phi} = \frac{0,00149058 \dot{\psi} \dot{\theta} - 0,043808 \dot{\theta} \dot{\phi} \cos \theta}{0,02264929 \sin \theta}, \dots \quad (1.5.1b)$$

y

$$\ddot{\psi} = \dot{\phi} \dot{\theta} \sin \theta - \left[\frac{0,00149058 \dot{\psi} \dot{\theta} - 0,043808 \dot{\theta} \dot{\phi} \cos \theta}{0,02264929} \right] \cot \theta. \dots \quad (1.5.1c)$$

Para poder resolver las ecuaciones de movimiento (1.5.1), aplicando el método numérico de Runge Kutta de orden 4, necesitamos convertirlas a ecuaciones de primer orden.

Definiendo $X_\theta \equiv \dot{\theta}$, $X_\phi \equiv \dot{\phi}$ y $X_\psi \equiv \dot{\psi}$ luego de las ecuaciones (1.5.1) se obtiene las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias de 1^{er} orden.

$$\dot{\theta} = X_{\theta}$$

$$\dot{\phi} = X_{\phi}$$

$$\dot{\psi} = X_{\psi}$$

$$\dot{X}_{\theta} = \frac{0,00317381 (X_{\phi})^2 \sin \theta \cos \theta - (0,00022359 X_{\psi} X_{\phi} - 0,72594) \sin \theta}{0,00339739}$$

$$\dot{X}_{\phi} = \frac{0,00149058 X_{\psi} X_{\theta} + 0,043808 X_{\theta} X_{\phi} \cos \theta}{0,02264929 \sin \theta}$$

$$\dot{X}_{\psi} = X_{\theta} X_{\phi} \sin \theta - \left[\frac{0,00149058 X_{\theta} X_{\psi} + 0,043808 X_{\theta} X_{\phi} \cos \theta}{0,02264929} \right] \cot \theta \quad \dots \quad (1.5.2)$$

Con el nuevo sistema de ecuaciones (1.5.2) y con las condiciones iniciales que se consideraran podremos resolverlo aplicando el método de Runge Kutta.

Los gráficos de las funciones $\theta(t)$, $\phi(t)$, $\psi(t)$, $\dot{\theta}(t)$, $\dot{\phi}(t)$ y $\dot{\psi}(t)$ y el gráfico de la proyección del centro de masa (X_G vs Y_G) se muestran de la página 39 a la página 185. Las respectivas páginas y así como también sus características principales de los gráficos se muestran en la tabla (1.5.2). Y para aquellas funciones que son periódicas se indica el valor de su periodo.

Así como el tiempo en que demora en dar una vuelta el eje del trompo alrededor del eje Z (precesión completa) que denotaremos por T_{prec} .

Finalmente, de la proyección del centro de masa se puede deducir como es el movimiento del eje de simetría del trompo y por lo tanto se determina el gráfico de la proyección del eje del trompo en la esfera unitaria.

El paso considerado fue de $h = 10^{-3}$ y se consideraron los siguientes casos para las condiciones iniciales.

Caso a)

$$\theta(0) = 20^\circ$$

$$\phi(0) = 0^\circ$$

$$\psi(0) = 0^\circ$$

$$\dot{\theta}(0) = 0 \text{ rad/s}$$

$$\dot{\psi}(0) = 1000 \text{ rad/s}$$

Para la condición inicial de $\dot{\phi}(0)$ se consideró los siguientes valores 0 rad/s, 1 rad/s, 5 rad/s, 10 rad/s y 20 rad/s.

Tabla (1.5.2)

$\dot{\phi}(0)$	Función	Característica principal	Grafico	Página
0 rad/s	$\theta(t)$	Periódica $T = 0,1 \text{ s}$	(1.5.1)	39
	$\phi(t)$	Creciente $T_{\text{prec}} = 2,52 \text{ s}$	(1.5.2)	40
	$\psi(t)$	Creciente	(1.5.3)	41
	$\dot{\theta}(t)$	Periódica $T = 0,1 \text{ s}$	(1.5.4)	42
	$\dot{\phi}(t)$	Periódica $T = 0,1 \text{ s}$	(1.5.5)	43
	$\dot{\psi}(t)$	Periódica $T = 0,1 \text{ s}$	(1.5.6)	44
	$X_G \text{ vs } Y_G$	Precesión de caída $0 \text{ rad/s} < \dot{\phi}(t) < 4,9 \text{ rad/s}$	(1.5.7)	45

Tabla (1.5.2)

$\dot{\phi}(0)$	Función	Característica principal	Grafico	Página
1 rad/s	$\theta(t)$	Periódica T = 0,1 s	(1.5.8)	46
	$\phi(t)$	Creciente T _{prec} = 2,50 s	(1.5.9)	47
	$\psi(t)$	Creciente	(1.5.10)	48
	$\dot{\theta}(t)$	Periódica T = 0,1 s	(1.5.11)	49
	$\dot{\phi}(t)$	Periódica T = 0,1 s	(1.5.12)	50
	$\dot{\psi}(t)$	Periódica T = 0,1 s	(1.5.13)	51
	X_G vs Y_G	Precesión monótona 1 rad/s < $\dot{\phi}(t)$ < 4,0 rad/s	(1.5.14)	52
5 rad/s	$\theta(t)$	Periódica T = 0,1 s	(1.5.15)	53
	$\phi(t)$	Creciente T _{prec} = 2,48 s	(1.5.16)	54
	$\psi(t)$	Creciente	(1.5.17)	55
	$\dot{\theta}(t)$	Periódica T = 0,1 s	(1.5.18)	56
	$\dot{\phi}(t)$	Periódica T = 0,1 s	(1.5.19)	57
	$\dot{\psi}(t)$	Periódica T = 0,1 s	(1.5.20)	58
	X_G vs Y_G	Precesión con rizos -0,2 rad/s < $\dot{\phi}(t)$ < 5,0 rad/s	(1.5.21)	59

Tabla (1.5.2)

$\dot{\phi}(0)$	Función	Característica principal	Grafico	Página
10 rad/s	$\theta(t)$	Periódica $T = 0,1$ s	(1.5.22)	60
	$\phi(t)$	Creciente $T_{\text{prec}} = 2,60$ s	(1.5.23)	61
	$\psi(t)$	Creciente	(1.5.24)	62
	$\dot{\theta}(t)$	Periódica $T = 0,1$ s	(1.5.25)	63
	$\dot{\phi}(t)$	Periódica $T = 0,1$ s	(1.5.26)	64
	$\dot{\psi}(t)$	Periódica $T = 0,1$ s	(1.5.27)	65
	X_G vs Y_G	Precesión con rizos $-7,3 \text{ rad/s} < \dot{\phi}(t) < 10,0 \text{ rad/s}$	(1.5.28)	66
20 rad/s	$\theta(t)$	Periódica $T = 0,1$ s	(1.5.29)	67
	$\phi(t)$	Creciente $T_{\text{prec}} = 2,26$ s	(1.5.30)	68
	$\psi(t)$	Creciente	(1.5.31)	69
	$\dot{\theta}(t)$	Periódica $T = 0,1$ s	(1.5.32)	70
	$\dot{\phi}(t)$	Periódica $T = 0,1$ s	(1.5.33)	71
	$\dot{\psi}(t)$	Periódica $T = 0,1$ s	(1.5.34)	72
	X_G vs Y_G	Precesión con rizos $-35,8 \text{ rad/s} < \dot{\phi}(t) < 20,0 \text{ rad/s}$	(1.5.35)	73

Caso b)

$$\theta(0) = 20^\circ$$

$$\phi(0) = 0^\circ$$

$$\psi(0) = 0^\circ$$

$$\dot{\theta}(0) = 0 \text{ rad/s}$$

$$\dot{\phi}(0) = 10 \text{ rad/s}$$

Para las condiciones iniciales $\dot{\psi}(0)$ se considera los siguientes valores 900 rad/s, 800 rad/s, 700 rad/s, 600 rad/s, 500 rad/s, 400 rad/s, 300 rad/s, 200 rad/s y 100 rad/s.

Tabla (1.5.3)

$\dot{\psi}(0)$	Función	Característica principal	Grafico	Página
900 rad/s	$\theta(t)$	Periódica $T = 0,115 \text{ s}$	(1.5.36)	74
	$\phi(t)$	Creciente $T_{\text{prec}} = 2,14 \text{ s}$	(1.5.37)	75
	$\psi(t)$	Creciente	(1.5.38)	76
	$\dot{\theta}(t)$	Periódica $T = 0,115 \text{ s}$	(1.5.39)	77
	$\dot{\phi}(t)$	Periódica $T = 0,115 \text{ s}$	(1.5.40)	78
	$\dot{\psi}(t)$	Periódica $T = 0,115 \text{ s}$	(1.5.41)	79
	$X_G \text{ vs } Y_G$	Precesión con rizados	(1.5.42)	80
	$W_X \text{ vs } W_Y$	Precesión con rizados	(1.5.43)	81

Tabla (1.5.3)

$\dot{\psi}(0)$	Función	Característica principal	Grafico	Página
800 rad/s	$\theta(t)$	Periódica $T=0,133$ s	(1.5.44)	82
	$\phi(t)$	Creciente $T_{\text{prec}} = 1,9$ s	(1.5.45)	83
	$\psi(t)$	Creciente	(1.5.46)	84
	$\dot{\theta}(t)$	Periódica $T=0,133$ s	(1.5.47)	85
	$\dot{\phi}(t)$	Periódica $T=0,133$ s	(1.5.48)	86
	$\dot{\psi}(t)$	Periódica $T=0,133$ s	(1.5.49)	87
	X_G vs Y_G	Precesión con rizados	(1.5.50)	88
	W_X vs W_Y	Precesión con rizados	(1.5.51)	89
700 rad/s	$\theta(t)$	Periódica $T = 0,159$ s	(1.5.52)	90
	$\phi(t)$	Creciente $T_{\text{prec}} = 1,628$ s	(1.5.53)	91
	$\psi(t)$	Creciente	(1.5.54)	92
	$\dot{\theta}(t)$	Periódica $T = 0,159$ s	(1.5.55)	93
	$\dot{\phi}(t)$	Periódica $T = 0,159$ s	(1.5.56)	94
	$\dot{\psi}(t)$	Periódica $T = 0,159$ s	(1.5.57)	95
	X_G vs Y_G	Precesión con rizados	(1.5.58)	96
	W_X vs W_Y	Precesión con rizados	(1.5.59)	97

Tabla (1.5.3)

$\dot{\psi}(0)$	Función	Característica principal	Grafico	Página
600 rad/s	$\theta(t)$	Periódica $T = 0,199 \text{ s}$	(1.5.60)	98
	$\phi(t)$	Creciente $T_{\text{prec}} = 1,318 \text{ s}$	(1.5.61)	99
	$\psi(t)$	Creciente	(1.5.62)	100
	$\dot{\theta}(t)$	Periódica $T = 0,199 \text{ s}$	(1.5.63)	101
	$\dot{\phi}(t)$	Periódica $T = 0,199 \text{ s}$	(1.5.64)	102
	$\dot{\psi}(t)$	Periódica $T = 0,199 \text{ s}$	(1.5.65)	103
	$X_G \text{ vs } Y_G$	Precesión con rizados	(1.5.66)	104
	$W_X \text{ vs } W_Y$	Precesión con rizados	(1.5.67)	105
500 rad/s	$\theta(t)$	Periódica $T = 0,277 \text{ s}$	(1.5.68)	106
	$\phi(t)$	Creciente $T_{\text{prec}} = 1,106 \text{ s}$	(1.5.69)	107
	$\psi(t)$	Creciente	(1.5.70)	108
	$\dot{\theta}(t)$	Periódica $T = 0,277 \text{ s}$	(1.5.71)	109
	$\dot{\phi}(t)$	Periódica $T = 0,277 \text{ s}$	(1.5.72)	110
	$\dot{\psi}(t)$	Periódica $T = 0,277 \text{ s}$	(1.5.73)	111
	$X_G \text{ vs } Y_G$	Precesión con rizados	(1.5.74)	112
	$W_X \text{ vs } W_Y$	Precesión con rizados	(1.5.75)	113

Tabla (1.5.3)

$\dot{\psi}(0)$	Función	Característica principal	Grafico	Página
400 rad/s	$\theta(t)$	Periódica T = 0,570 s	(1.5.76)	114
	$\phi(t)$	Creciente T _{prec} = 0,776 s	(1.5.77)	115
	$\psi(t)$	Creciente	(1.5.78)	116
	$\dot{\theta}(t)$	Periódica T = 0,570 s	(1.5.79)	117
	$\dot{\phi}(t)$	Periódica T = 0,570 s	(1.5.80)	118
	$\dot{\psi}(t)$	Periódica T = 0,570 s	(1.5.81)	119
	X_G vs Y_G	Precesión monótona	(1.5.82)	120
	W_X vs W_Y	Precesión monótona	(1.5.83)	121
300 rad/s	$\theta(t)$	Periódica T = 0,717 s	(1.5.84)	122
	$\phi(t)$	Creciente T _{prec} = 0,568 s	(1.5.85)	123
	$\psi(t)$	Creciente	(1.5.86)	124
	$\dot{\theta}(t)$	Periódica T = 0,717 s	(1.5.87)	125
	$\dot{\phi}(t)$	Periódica T = 0,717 s	(1.5.88)	126
	$\dot{\psi}(t)$	Periódica T = 0,717 s	(1.5.89)	127
	X_G vs Y_G	Precesión monótona	(1.5.90)	128
	W_X vs W_Y	Precesión monótona	(1.5.91)	129

Tabla (1.5.3)

$\dot{\psi}(0)$	Función	Característica principal	Grafico	Página
200 rad/s	$\theta(t)$	Periódica $T = 0,560$ s	(1.5.92)	130
	$\phi(t)$	Creciente $T_{\text{prec}} = 0,552$ s	(1.5.93)	131
	$\psi(t)$	Creciente	(1.5.94)	132
	$\dot{\theta}(t)$	Periódica $T = 0,560$ s	(1.5.95)	133
	$\dot{\phi}(t)$	Periódica $T = 0,560$ s	(1.5.96)	134
	$\dot{\psi}(t)$	Periódica $T = 0,560$ s	(1.5.97)	135
	X_G vs Y_G	Precesión monótona	(1.5.98)	136
	W_X vs W_Y	Precesión monótona	(1.5.99)	137
100 rad/s	$\theta(t)$	Periódica $T = 0,495$ s	(1.5.100)	138
	$\phi(t)$	Creciente $T_{\text{prec}} = 0,518$ s	(1.5.101)	139
	$\psi(t)$	Creciente	(1.5.102)	140
	$\dot{\theta}(t)$	Periódica $T = 0,495$ s	(1.5.103)	141
	$\dot{\phi}(t)$	Periódica $T = 0,495$ s	(1.5.104)	142
	$\dot{\psi}(t)$	Periódica $T = 0,495$ s	(1.5.105)	143
	X_G vs Y_G	Precesión monótona	(1.5.106)	144
	W_X vs W_Y	Precesión monótona	(1.5.107)	145

Caso c)

Movimiento de precesión pura y movimiento aproximado al caso estacionario.

$$\theta(0) = 20^\circ$$

$$\phi(0) = 0^\circ$$

$$\psi(0) = 0^\circ$$

$$\dot{\theta}(0) = 0 \text{ rad/s}$$

$$\dot{\phi}(0) = 10 \text{ rad/s}$$

El valor de $\dot{\psi}$ toma los valores siguientes 390 rad/s, 380 rad/s, 376,9 rad/s, 370 rad/s y 360 rad/s. Denotaremos para la condición inicial $\dot{\psi}_{CR}(0)$, donde hay movimiento de precesión pura.

Tabla (1.5.4)

$\dot{\psi}(0)$	Función	Característica principal	Grafico	Página
390 rad/s	$\theta(t)$	Periódica T = 0,633 s	(1.5.108)	146
	$\phi(t)$	Creciente T _{prec} = 0,691 s	(1.5.109)	147
	$\psi(t)$	Creciente	(1.5.110)	148
	$\dot{\theta}(t)$	Periódica T = 0,633 s	(1.5.111)	149
	$\dot{\phi}(t)$	Periódica T = 0,633 s	(1.5.112)	150
	$\dot{\psi}(t)$	Periódica T = 0,633 s	(1.5.113)	151
	$X_G \text{ vs } Y_G$	Precesión monótona	(1.5.114)	152
	$W_X \text{ vs } W_Y$	Precesión monótona	(1.5.115)	153

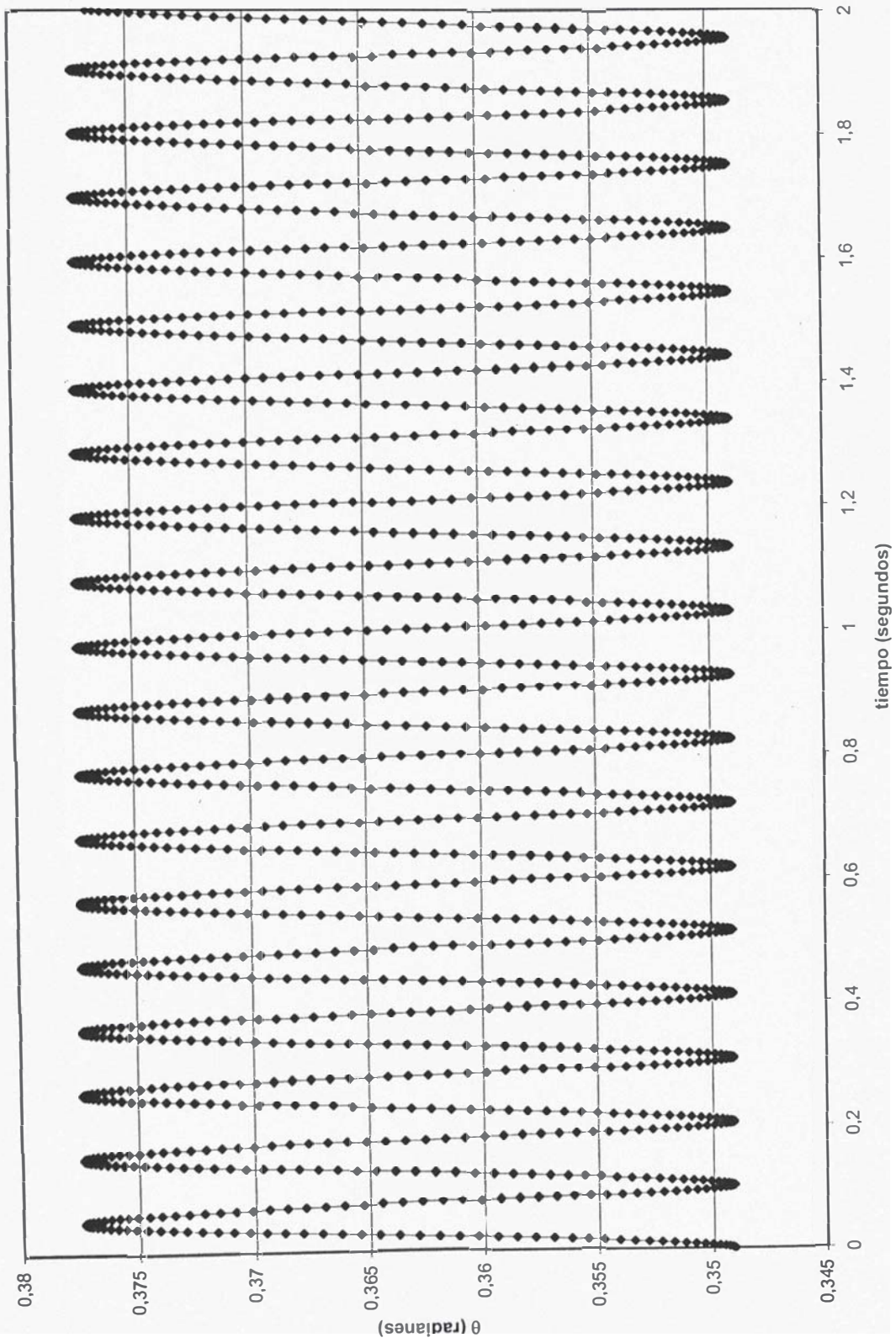
Tabla (1.5.4)

$\dot{\psi}(0)$	Función	Característica principal	Grafico	Página
380 rad/s	$\theta(t)$	Periódica $T = 0,795 \text{ s}$	(1.5.116)	154
	$\phi(t)$	Creciente $T_{\text{prec}} = 0,647 \text{ s}$	(1.5.117)	155
	$\psi(t)$	Creciente	(1.5.118)	156
	$\dot{\theta}(t)$	Periódica $T = 0,795 \text{ s}$	(1.5.119)	157
	$\dot{\phi}(t)$	Periódica $T = 0,795 \text{ s}$	(1.5.120)	158
	$\dot{\psi}(t)$	Periódica $T = 0,795 \text{ s}$	(1.5.121)	159
	$X_G \text{ vs } Y_G$	Precesión monótona	(1.5.122)	160
	$W_X \text{ vs } W_Y$	Precesión monótona	(1.5.123)	161
$\dot{\psi}_{CR}(0) = 376,9 \text{ rad/s}$	$\theta(t)$	Continua	(1.5.124)	162
	$\phi(t)$	Creciente $T_{\text{prec}} = 0,628 \text{ s}$	(1.5.125)	163
	$\psi(t)$	Creciente	(1.5.126)	164
	$\dot{\theta}(t)$	Continua	(1.5.127)	165
	$\dot{\phi}(t)$	Continua	(1.5.128)	166
	$\dot{\psi}(t)$	Continua	(1.5.129)	167
	$X_G \text{ vs } Y_G$	Precesión pura	(1.5.130)	168
	$W_X \text{ vs } W_Y$	Precesión pura	(1.5.131)	169

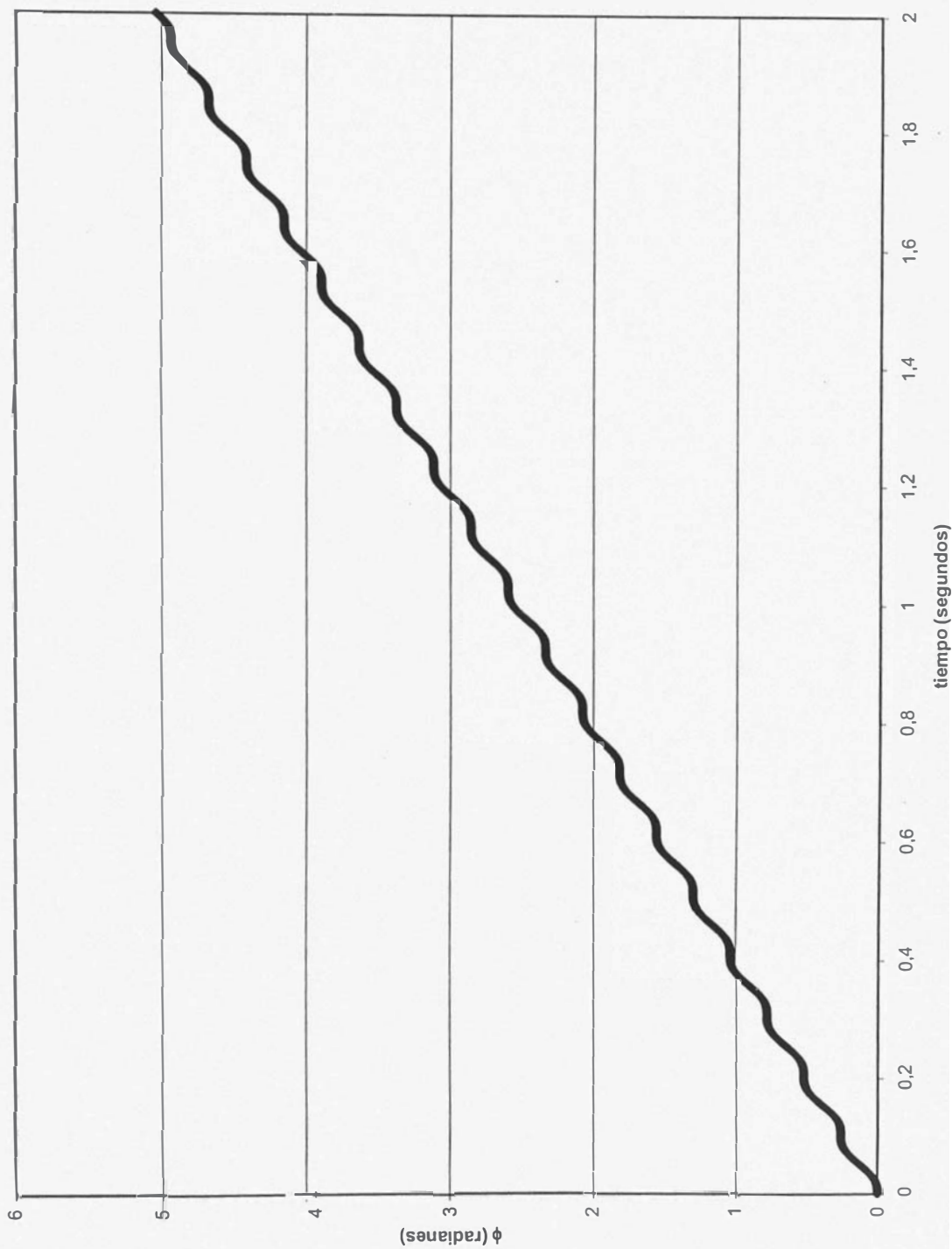
Tabla (1.5.4)

$\dot{\psi}(0)$	Función	Característica principal	Grafico	Página
370 rad/s	$\theta(t)$	Periódica $T = 0,936 \text{ s}$	(1.5.132)	170
	$\phi(t)$	Creciente $T_{\text{prec}} = 0,592 \text{ s}$	(1.5.133)	171
	$\psi(t)$	Creciente	(1.5.134)	172
	$\dot{\theta}(t)$	Periódica $T = 0,936 \text{ s}$	(1.5.135)	173
	$\dot{\phi}(t)$	Periódica $T = 0,936 \text{ s}$	(1.5.136)	174
	$\dot{\psi}(t)$	Periódica $T = 0,936 \text{ s}$	(1.5.137)	175
	$X_G \text{ vs } Y_G$	Precesión monótona	(1.5.138)	176
	$W_X \text{ vs } W_Y$	Precesión monótona	(1.5.139)	177
360 rad/s	$\theta(t)$	Periódica $T = 0,975 \text{ s}$	(1.5.140)	178
	$\phi(t)$	Creciente $T_{\text{prec}} = 0,560 \text{ s}$	(1.5.141)	179
	$\psi(t)$	Creciente	(1.5.142)	180
	$\dot{\theta}(t)$	Periódica $T = 0,975 \text{ s}$	(1.5.143)	181
	$\dot{\phi}(t)$	Periódica $T = 0,975 \text{ s}$	(1.5.144)	182
	$\dot{\psi}(t)$	Periódica $T = 0,975 \text{ s}$	(1.5.145)	183
	$X_G \text{ vs } Y_G$	Precesión monótona	(1.5.146)	184
	$W_X \text{ vs } W_Y$	Precesión monótona	(1.5.147)	185

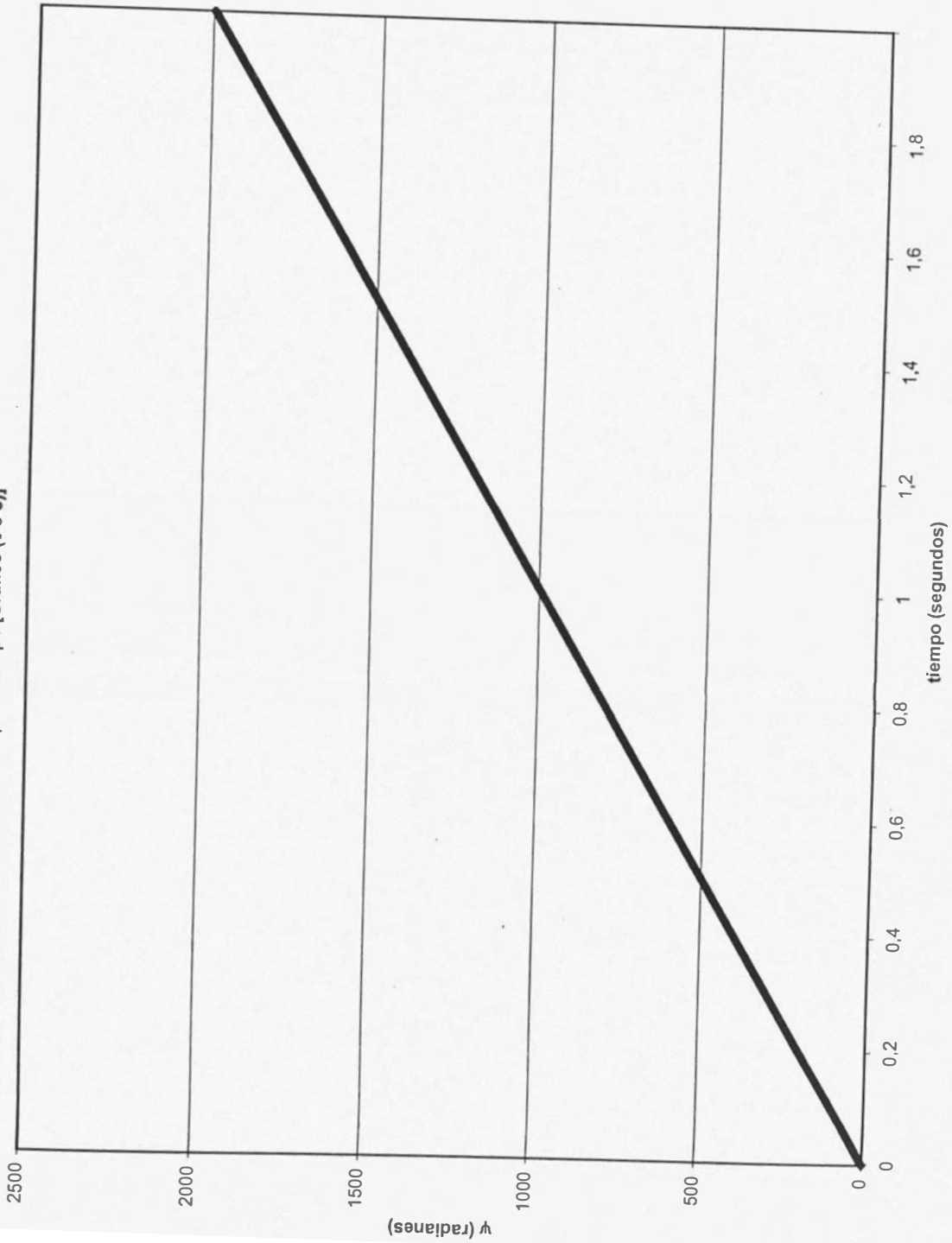
θ vs tiempo [Grafico (1.5.1)]

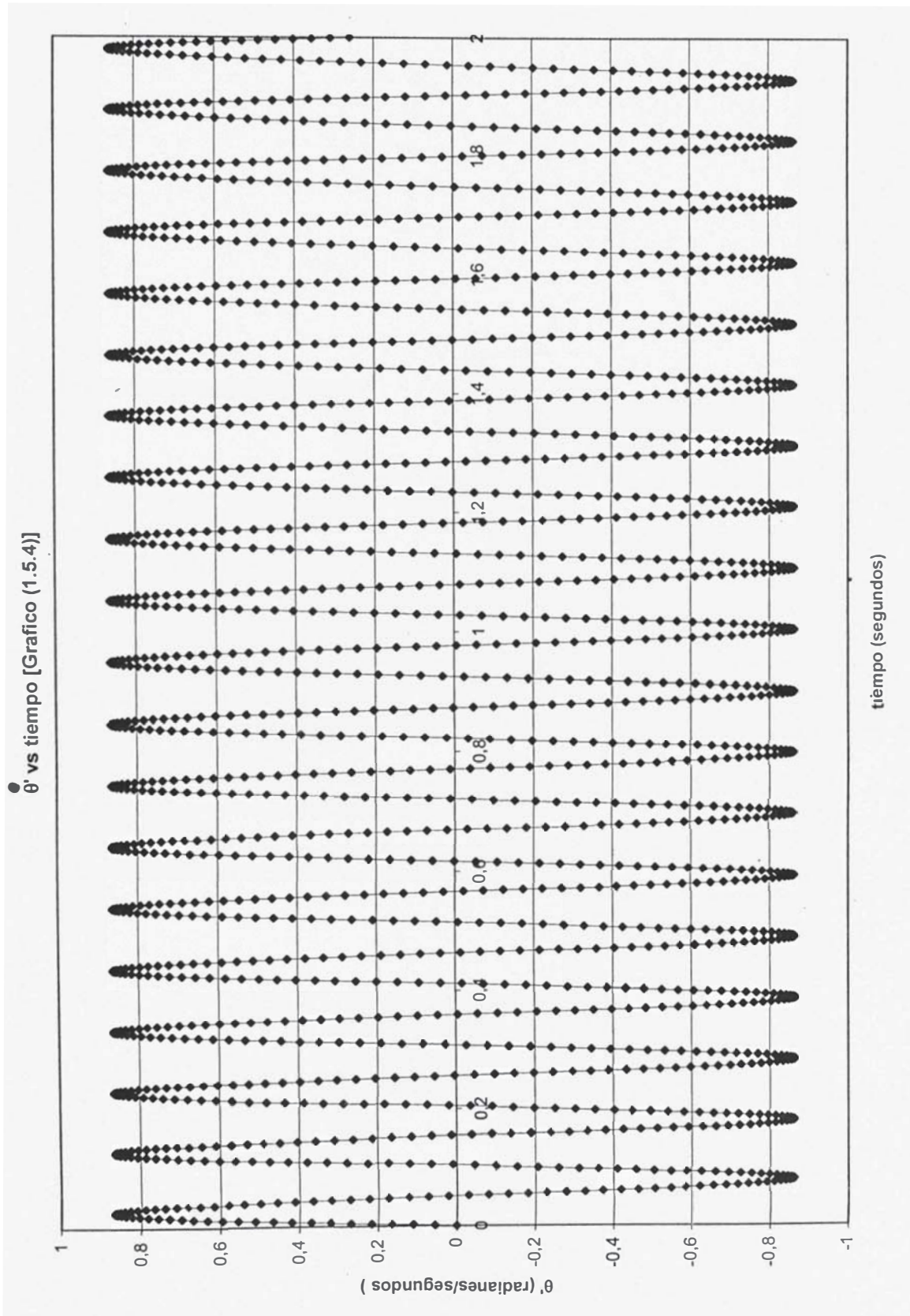


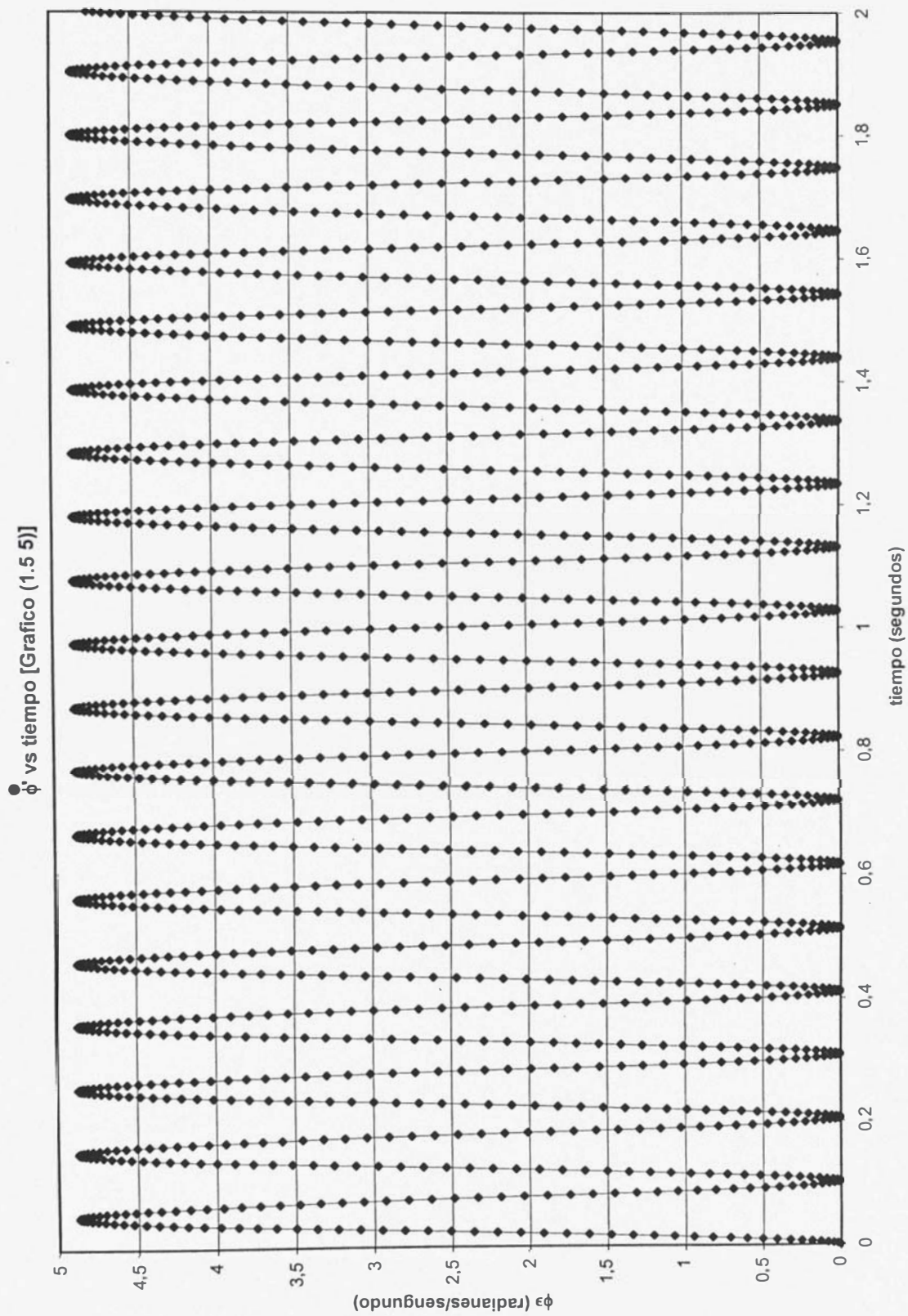
ϕ vs tiempo [Gráfico (1.5.2)]



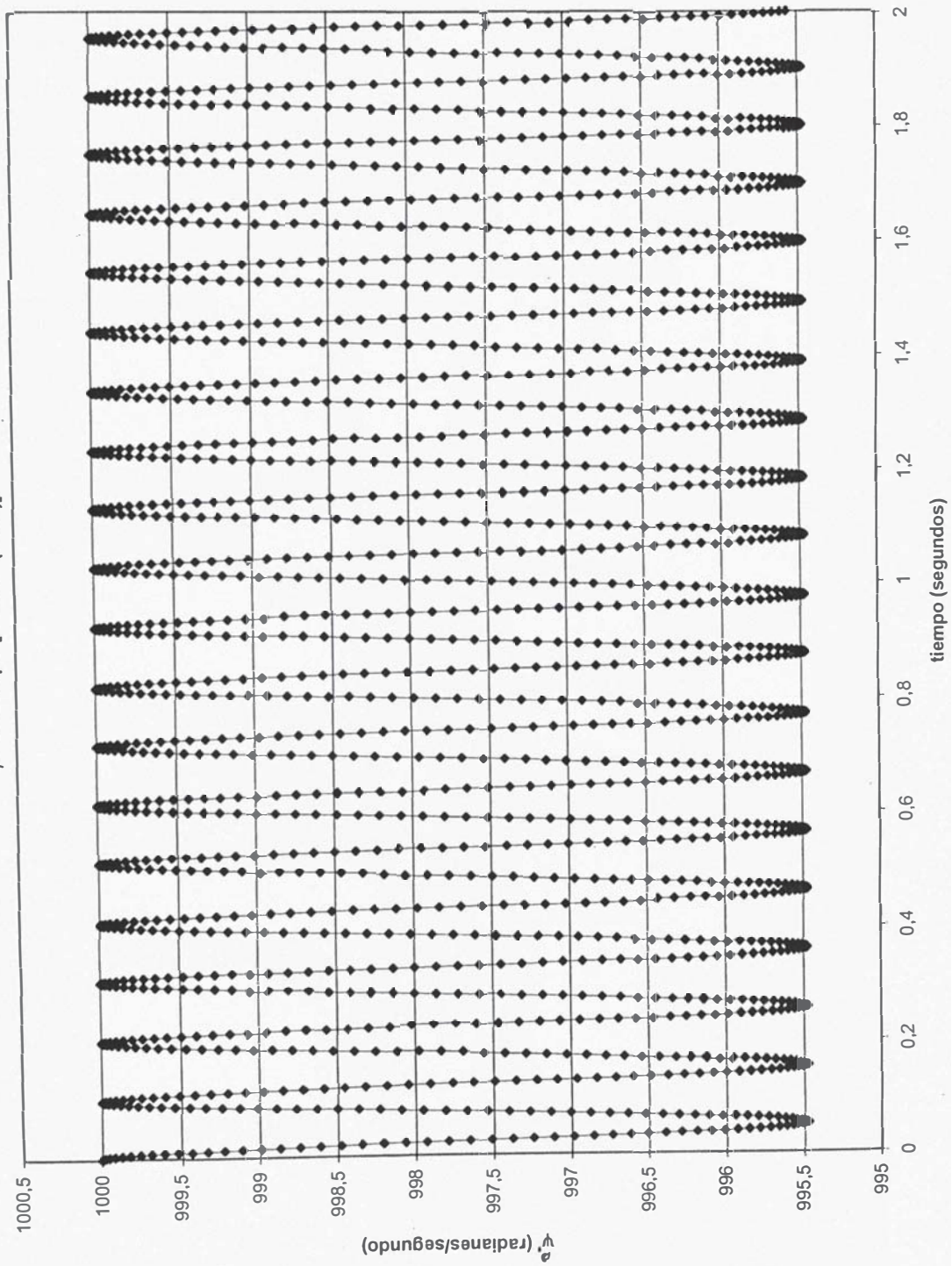
ψ vs tiempo [Grafico (1 5 3)]



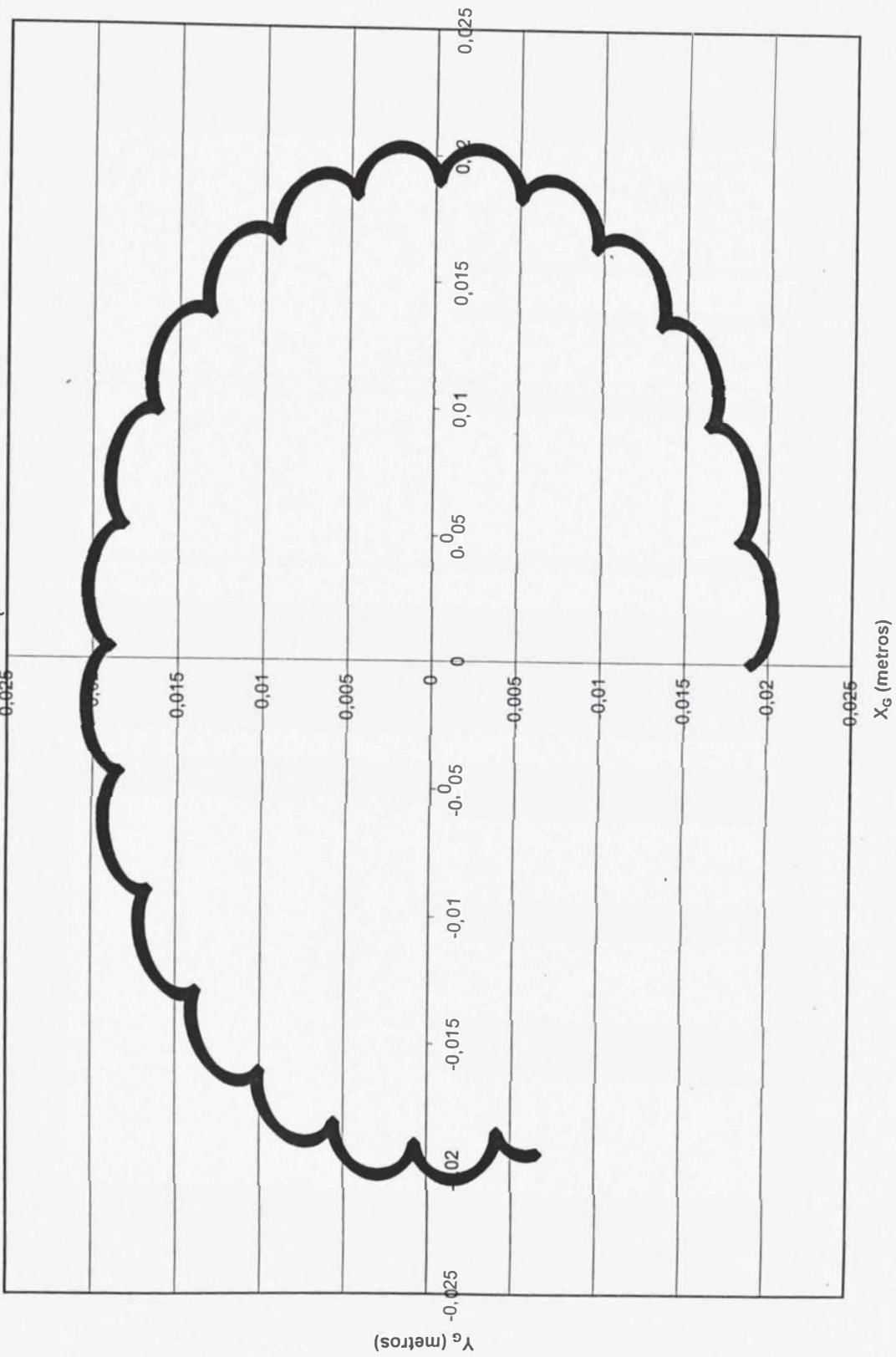




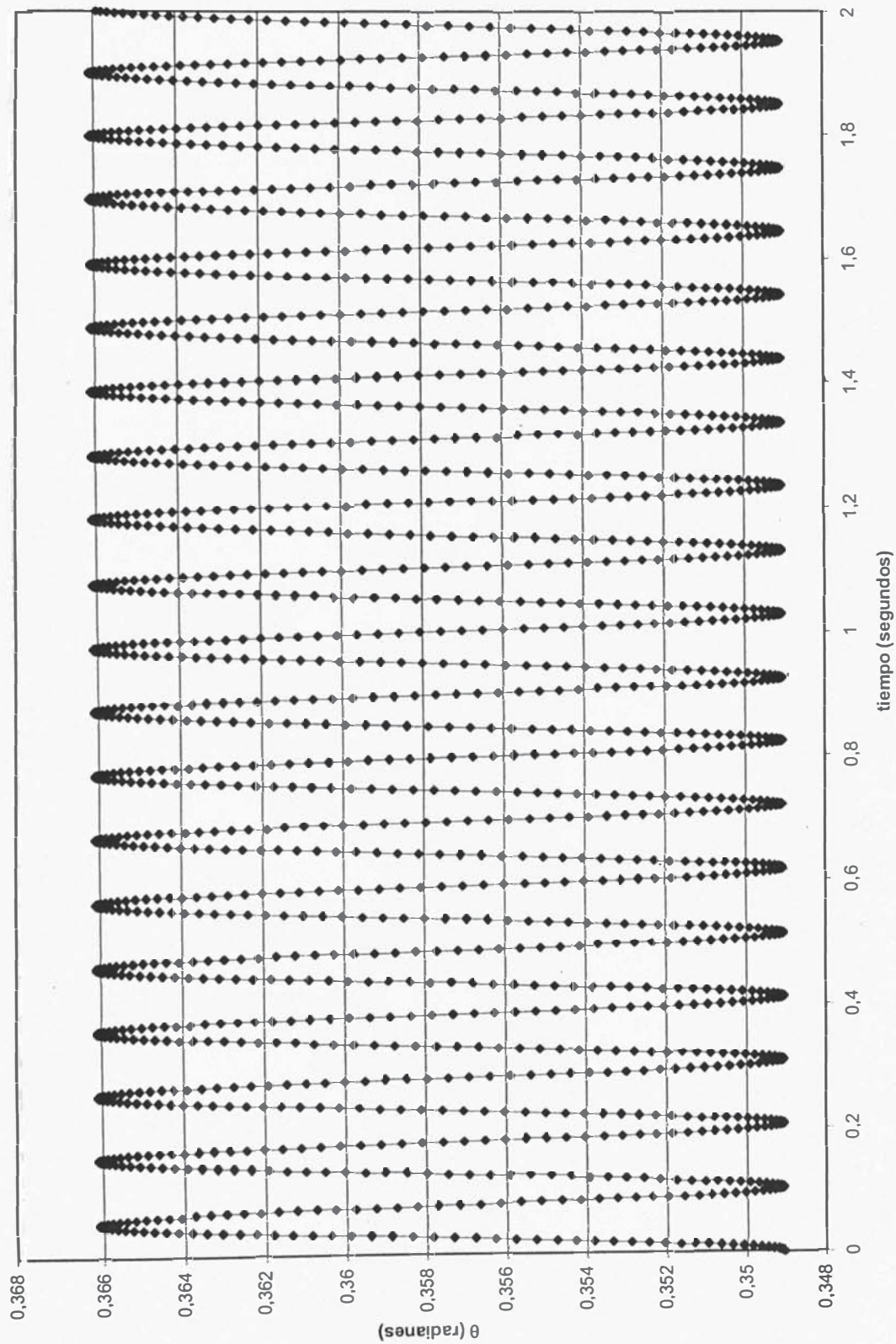
ψ' vs tiempo [Grafico (1.5.6)]



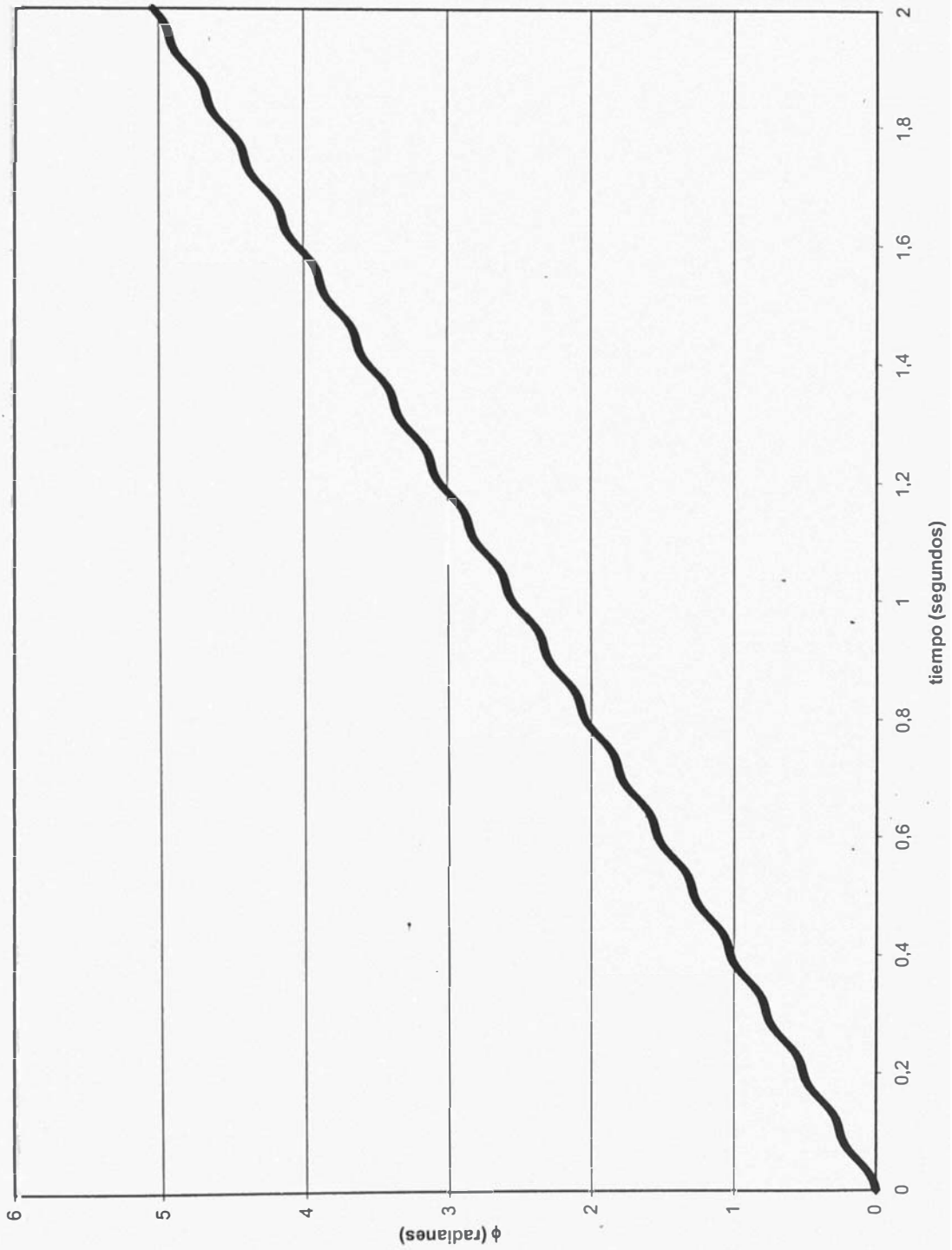
X_G vs Y_G [Grafico 1.5.7]

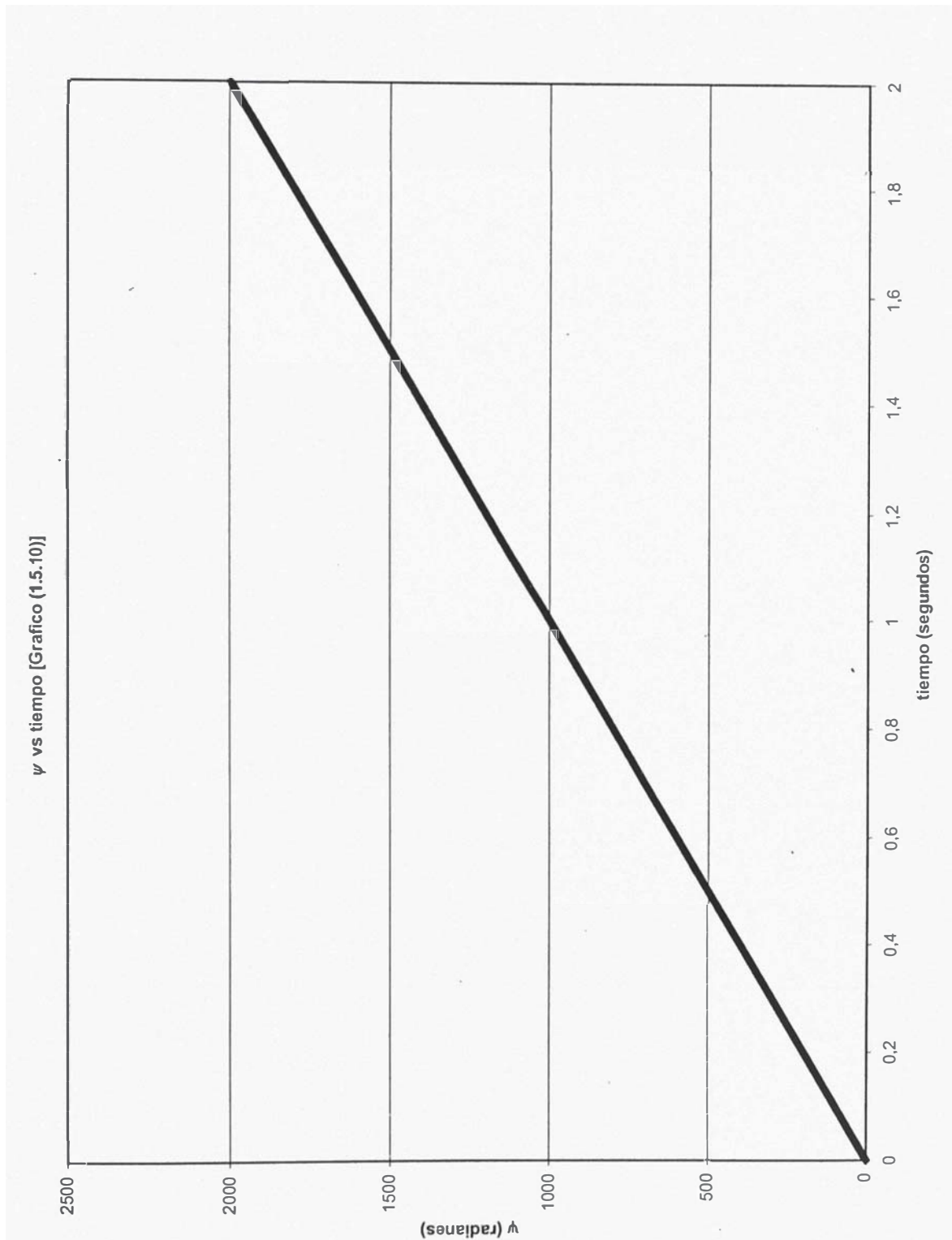


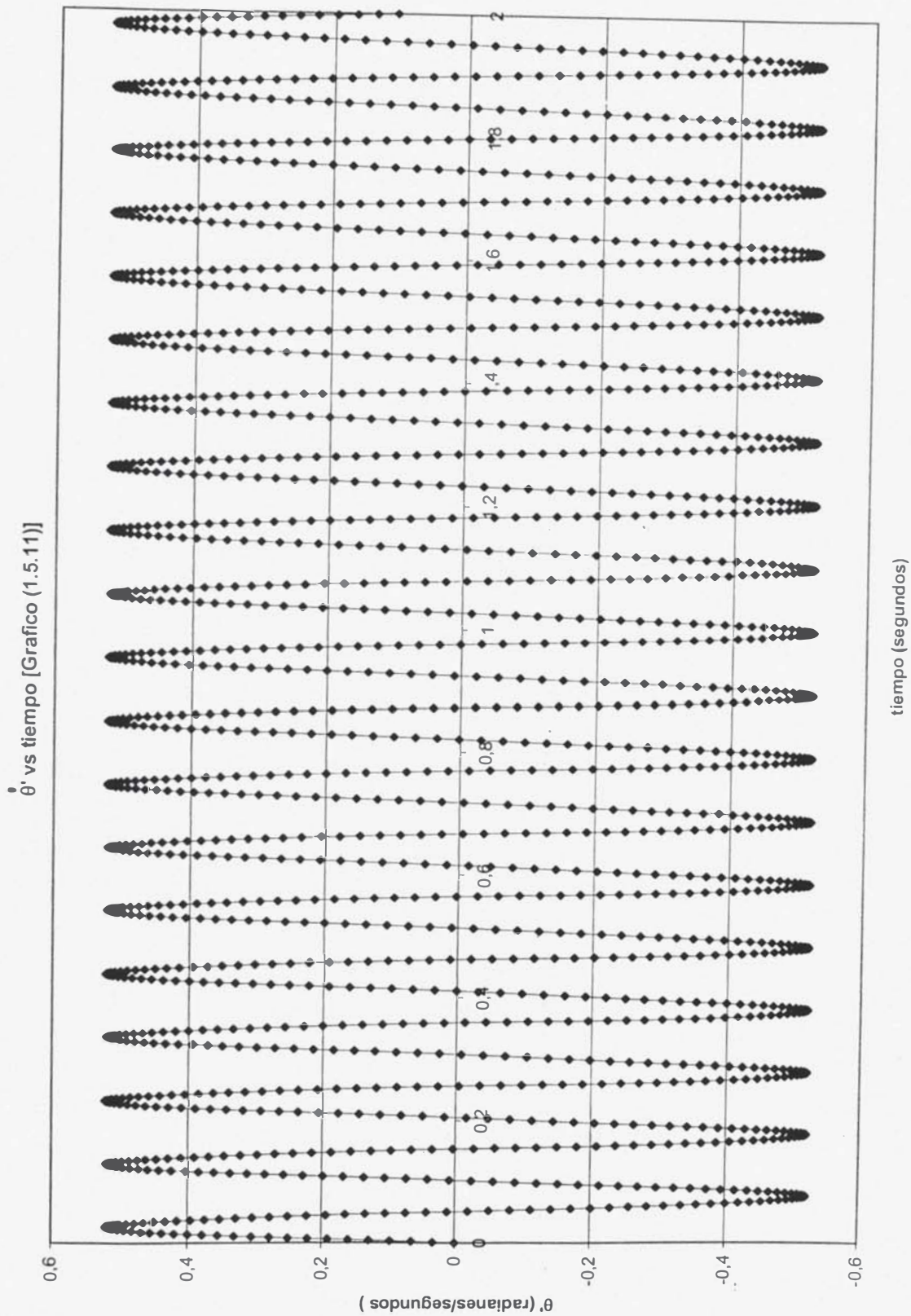
θ vs tiempo [Grafico (1.5.8)]

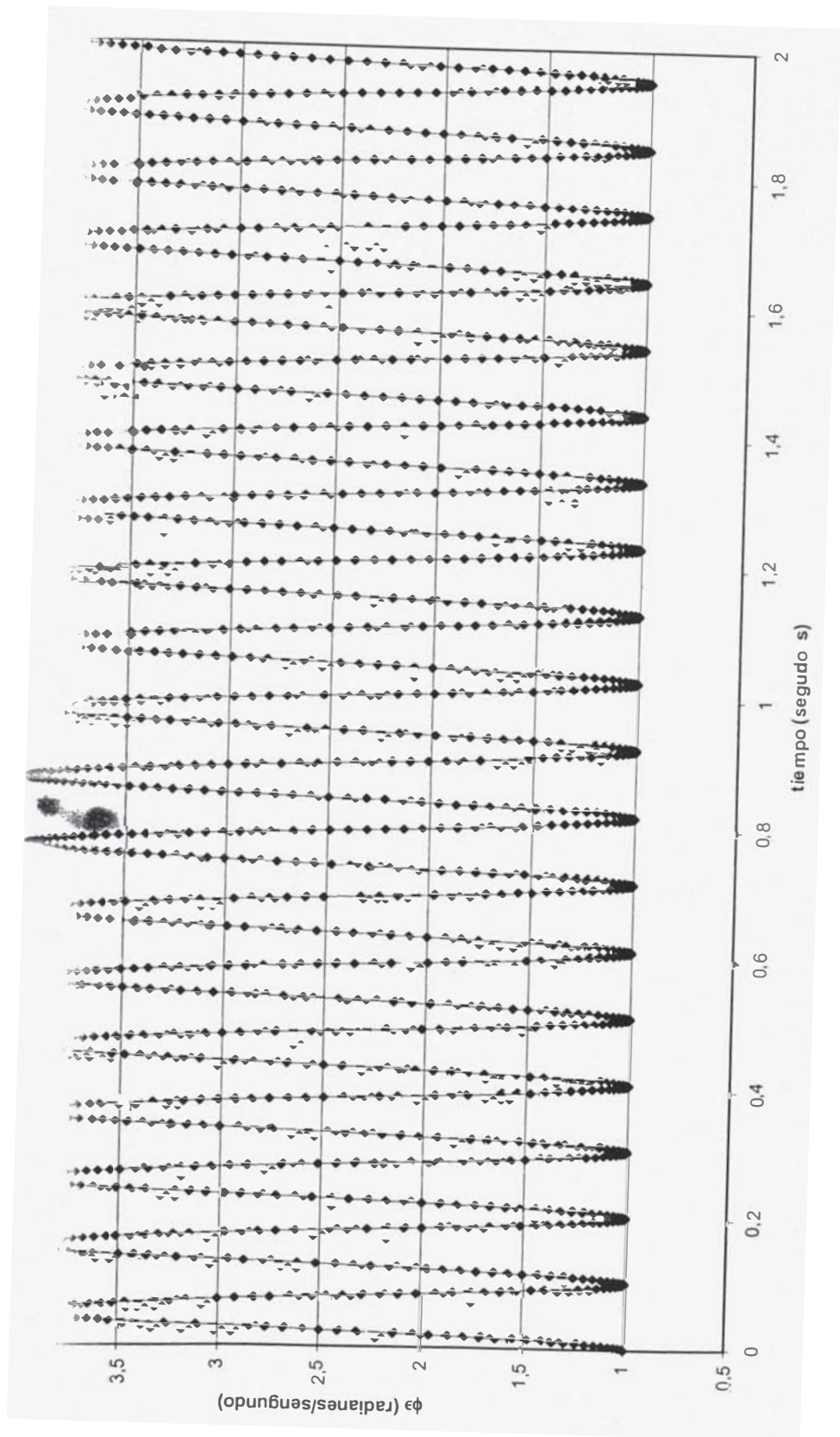


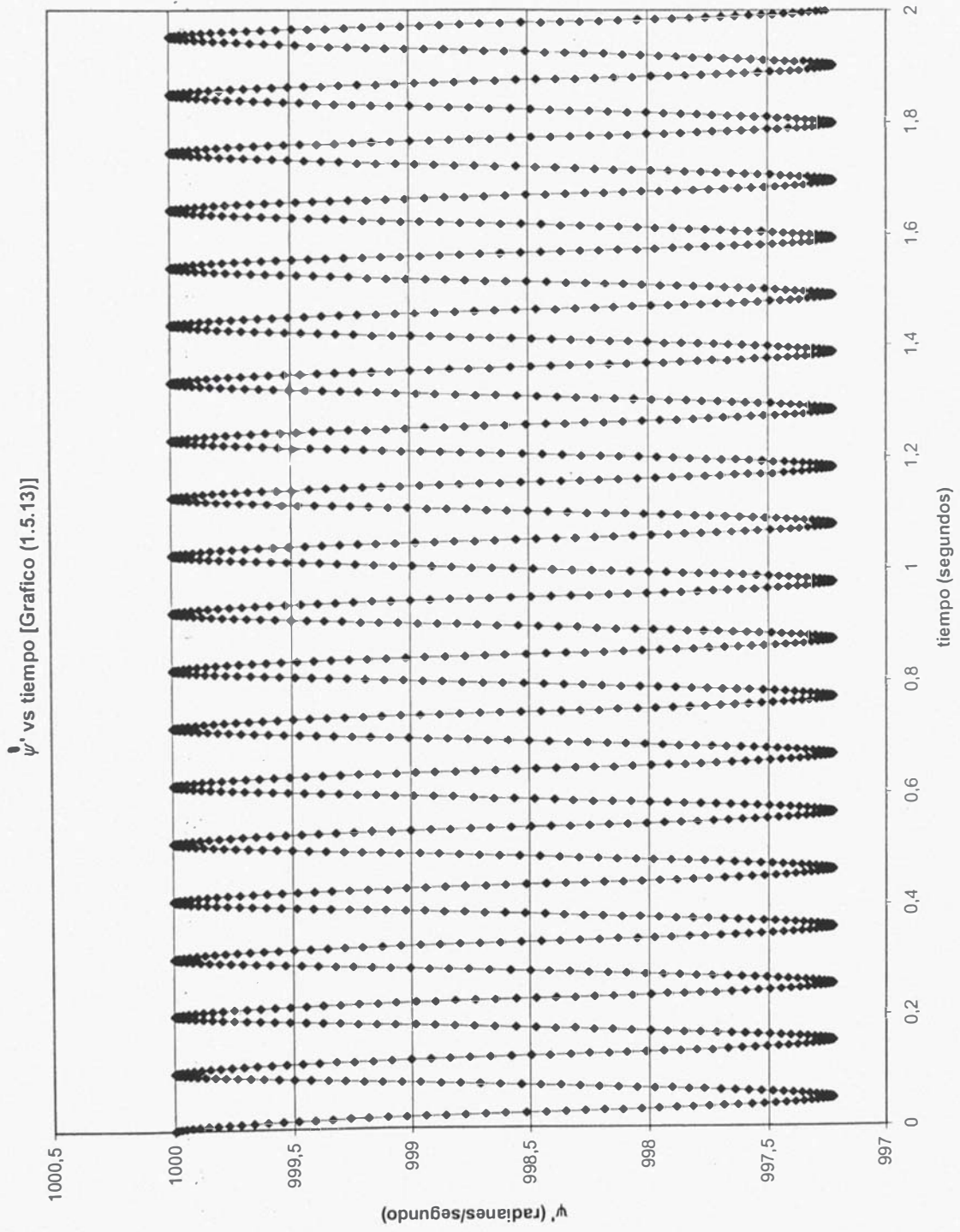
ϕ vs tiempo [Grafico (1.5.9)]

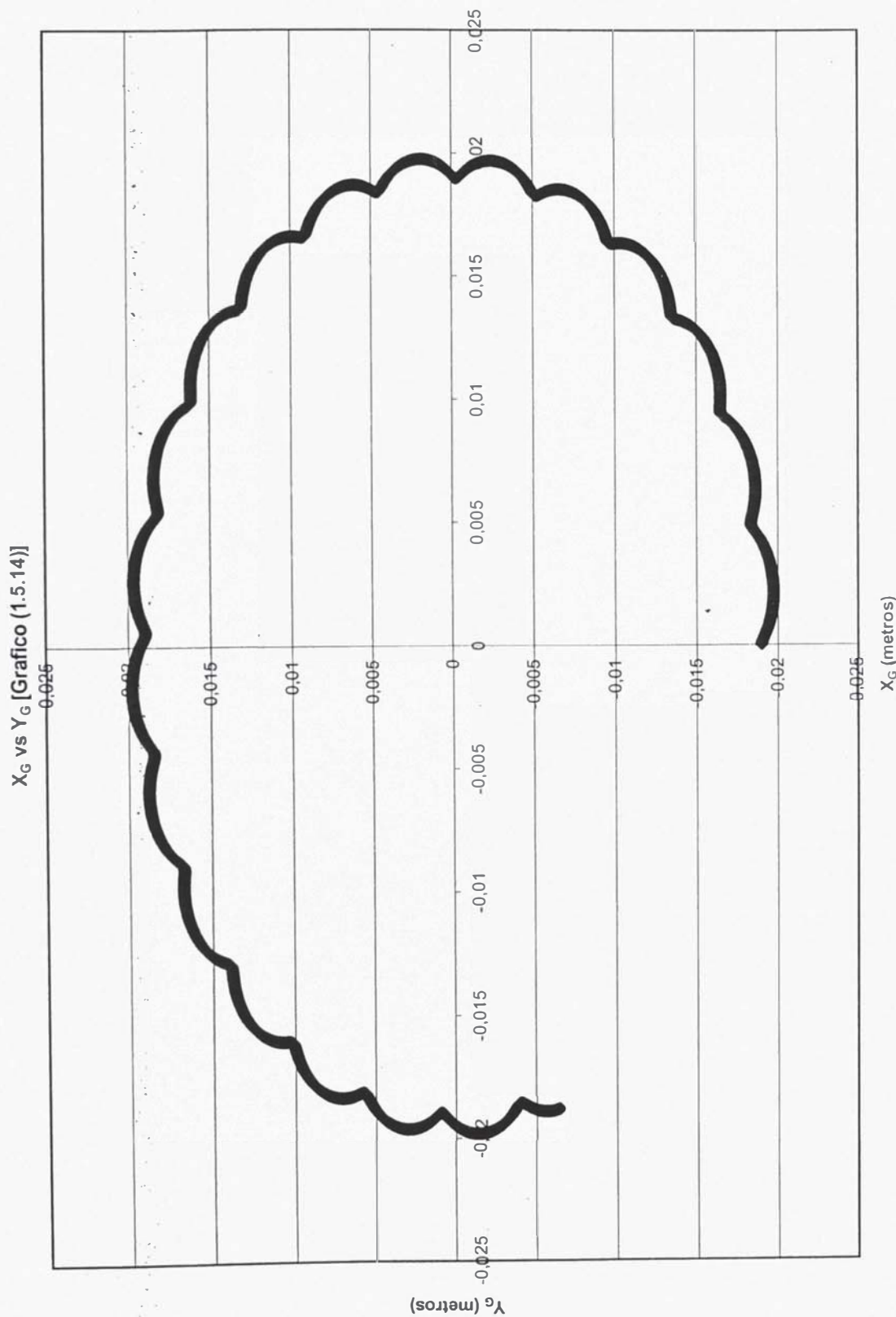


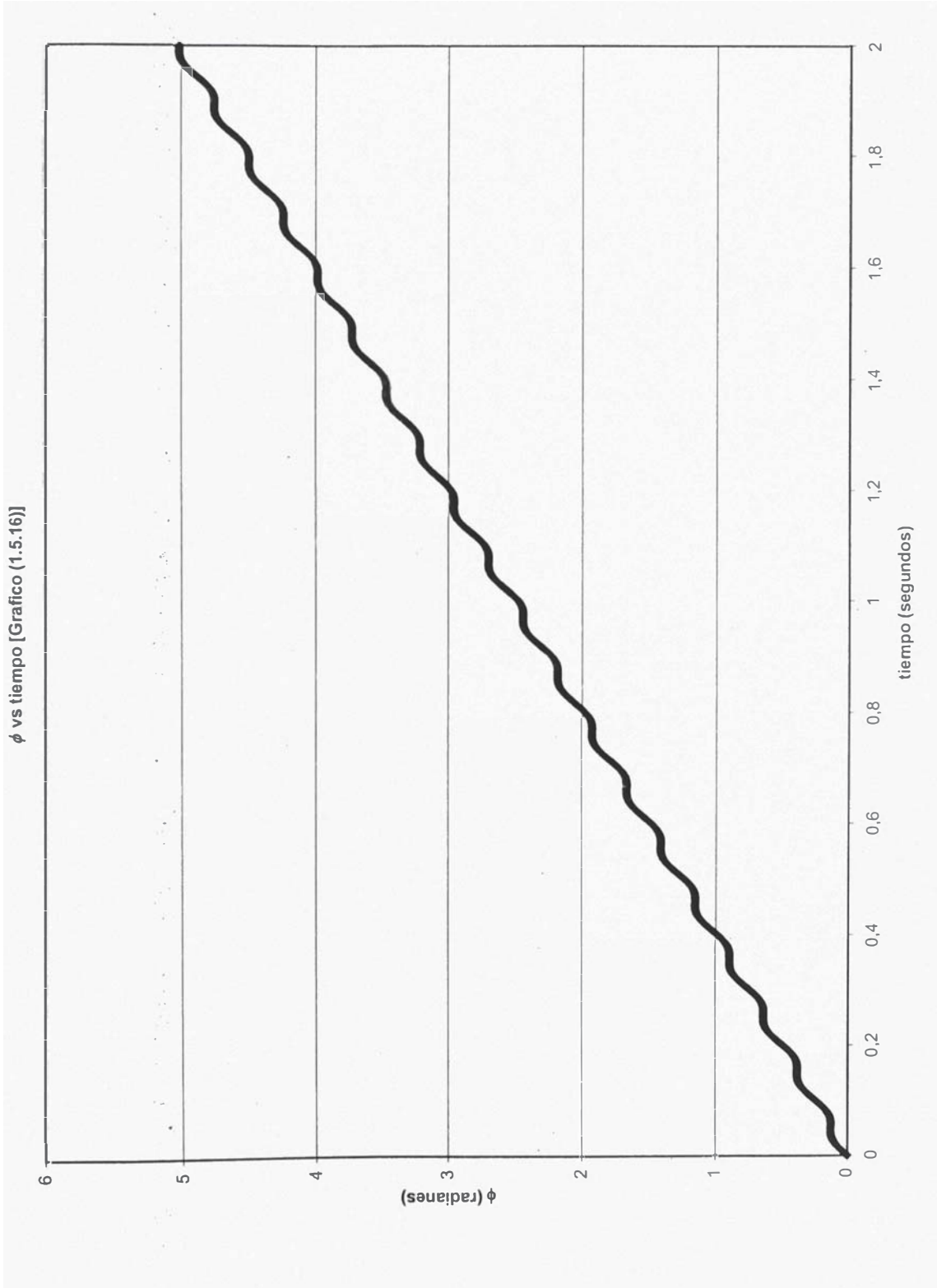




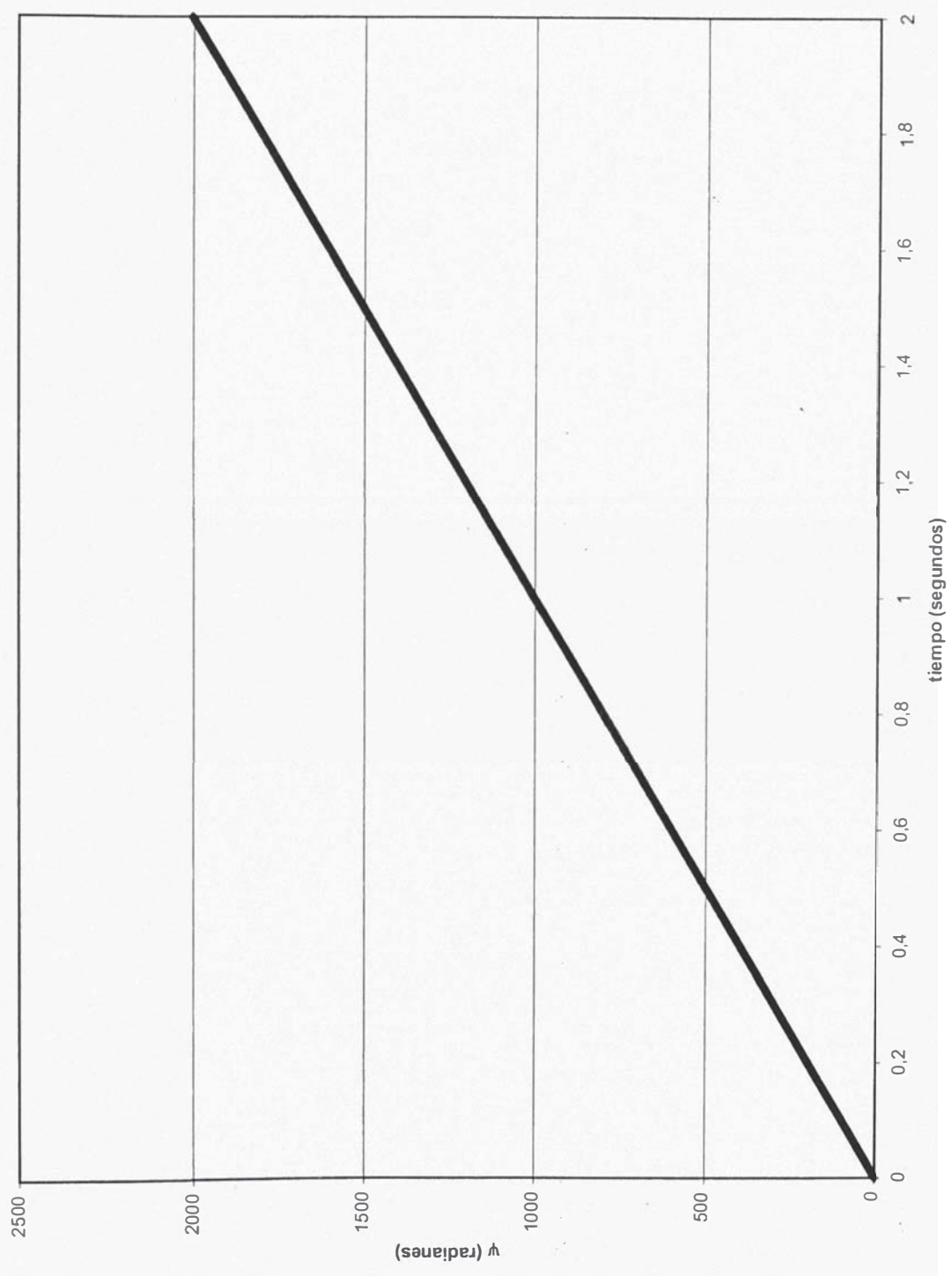




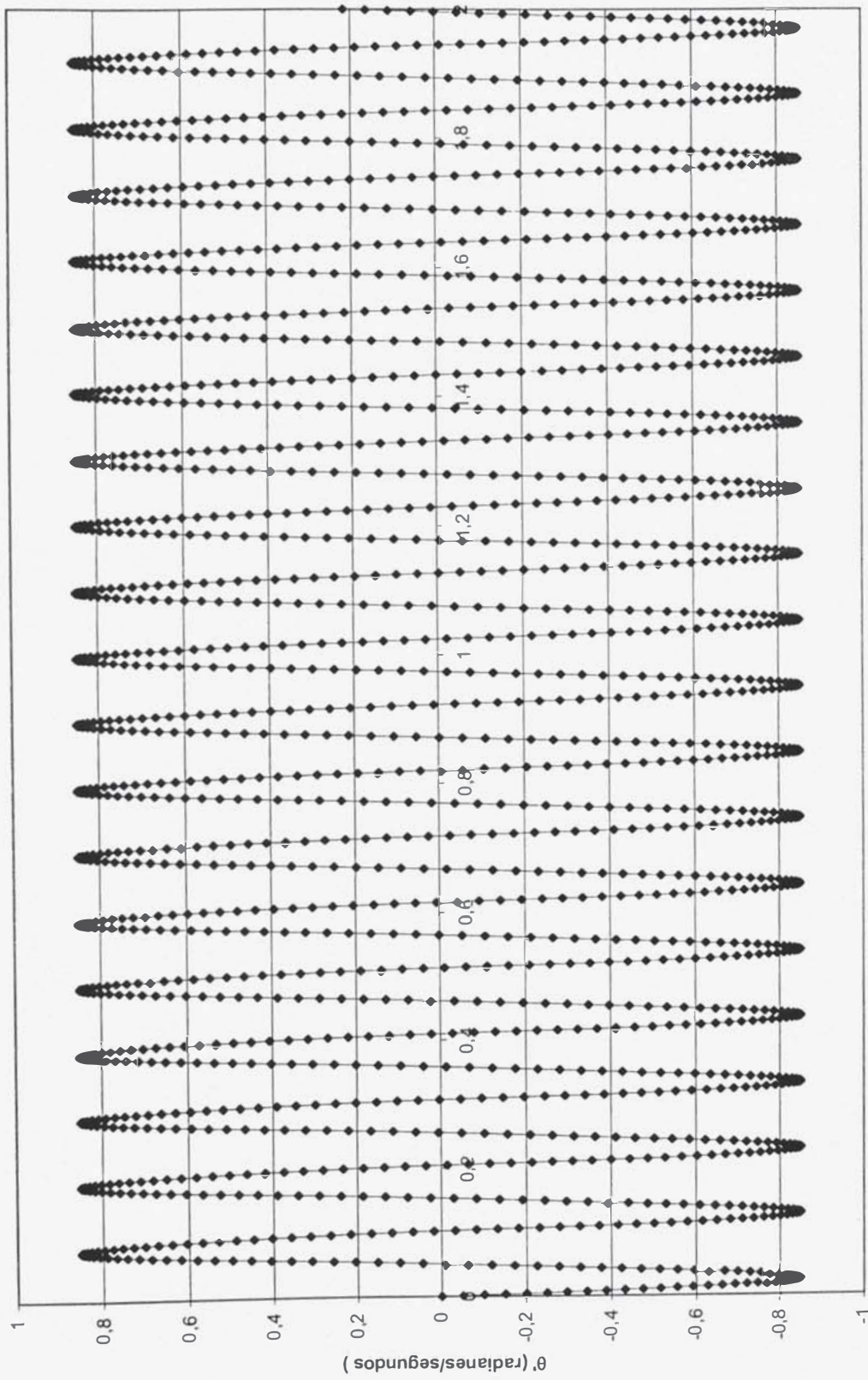




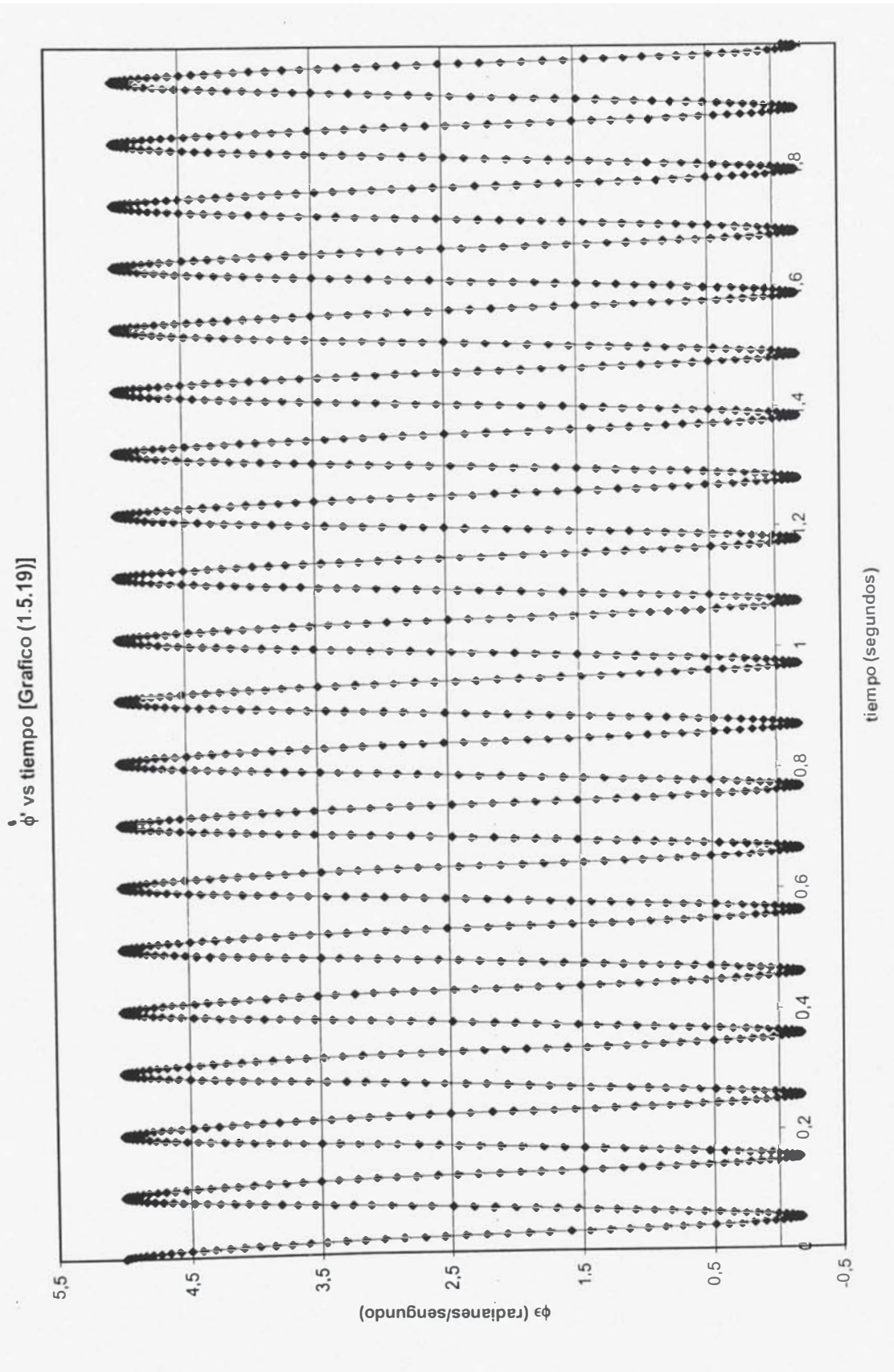
ψ vs tiempo [Grafico (1.5.17)]



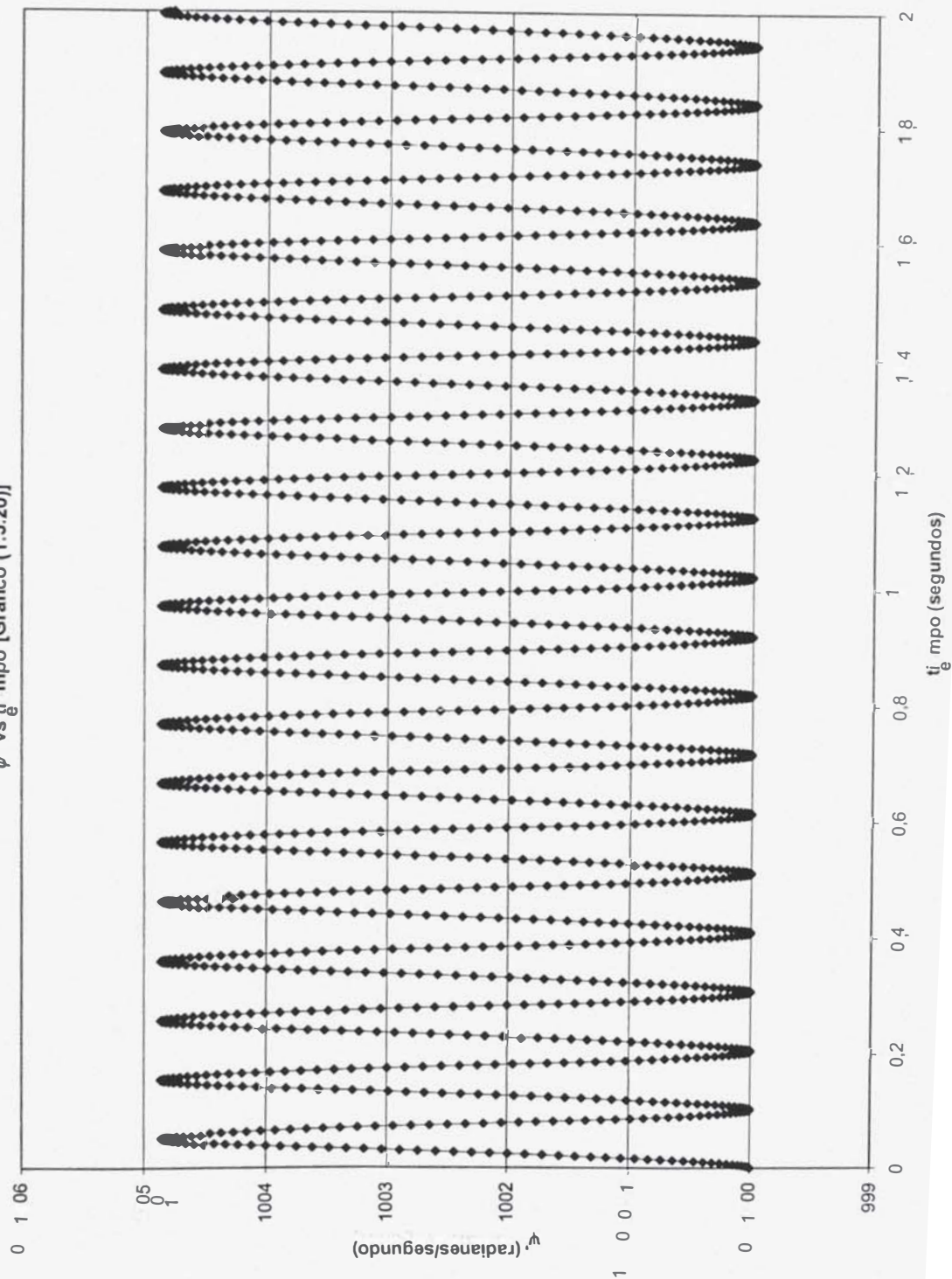
$\dot{\theta}$ vs tiempo [Grafico (1.5.18)]



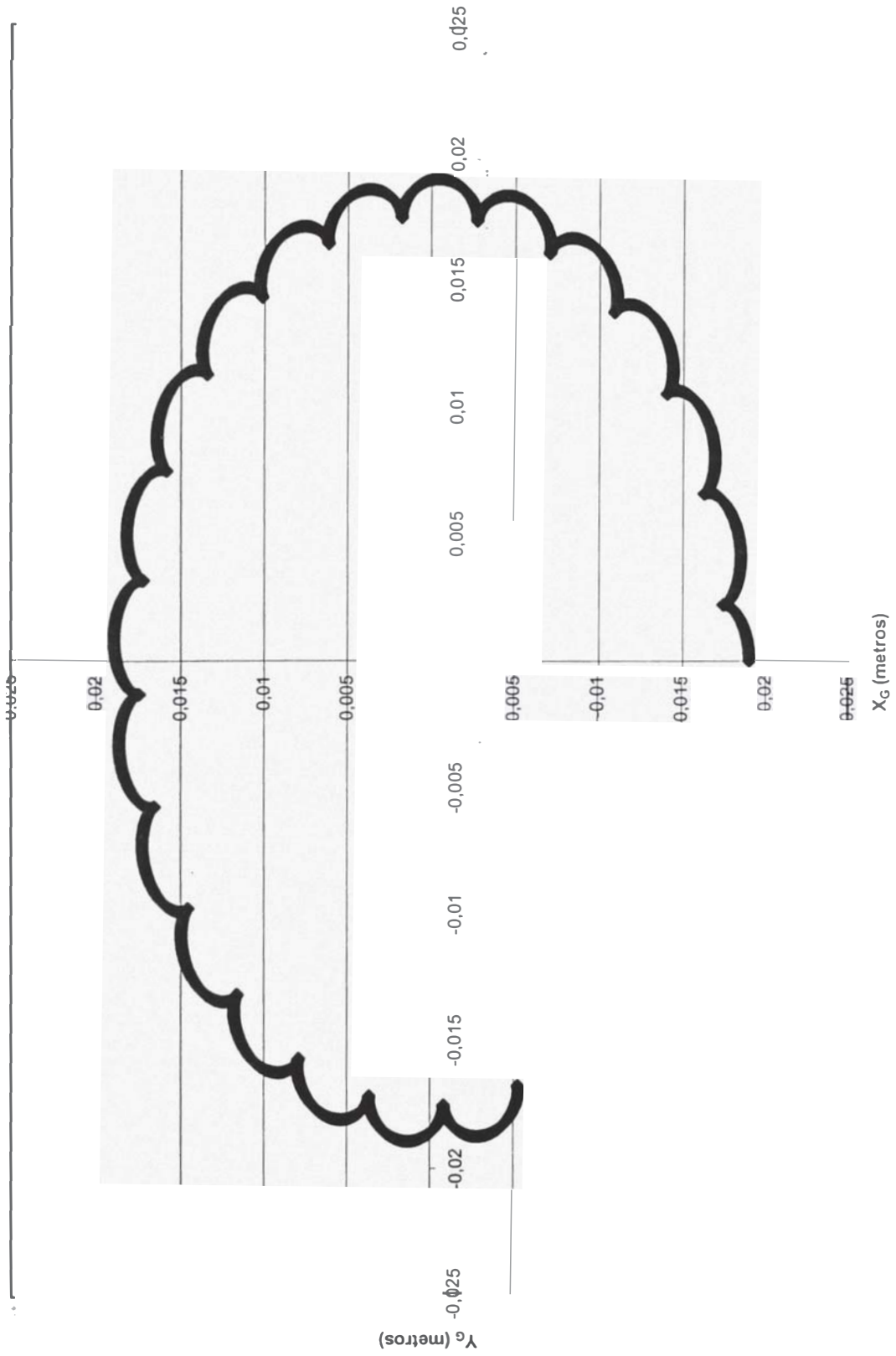
tiempo (segundos)



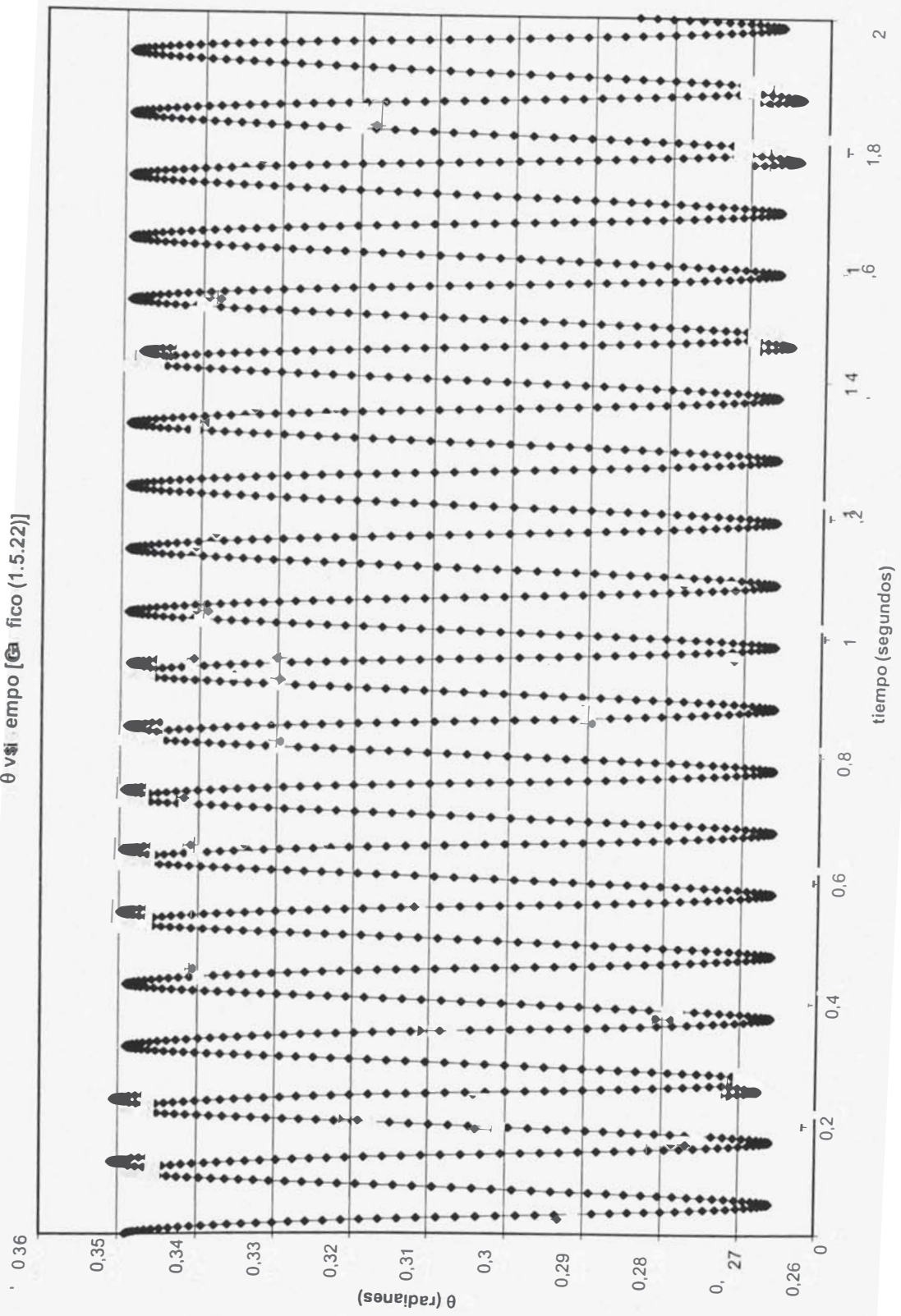
ψ^* vs t_j mpo [Grafico (1.5.20)]



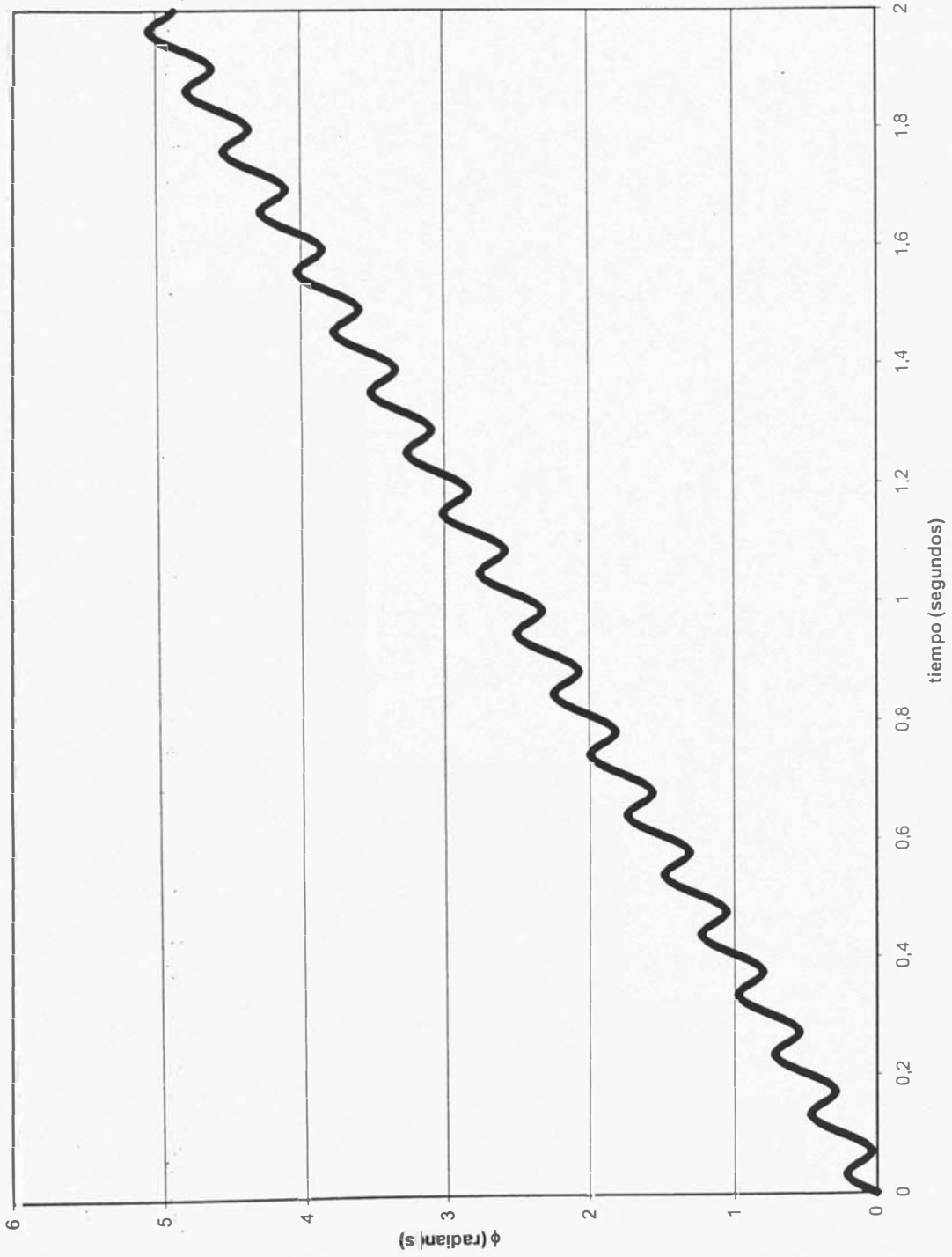
X_G vs Y_G [Grafico (1.5.21)]



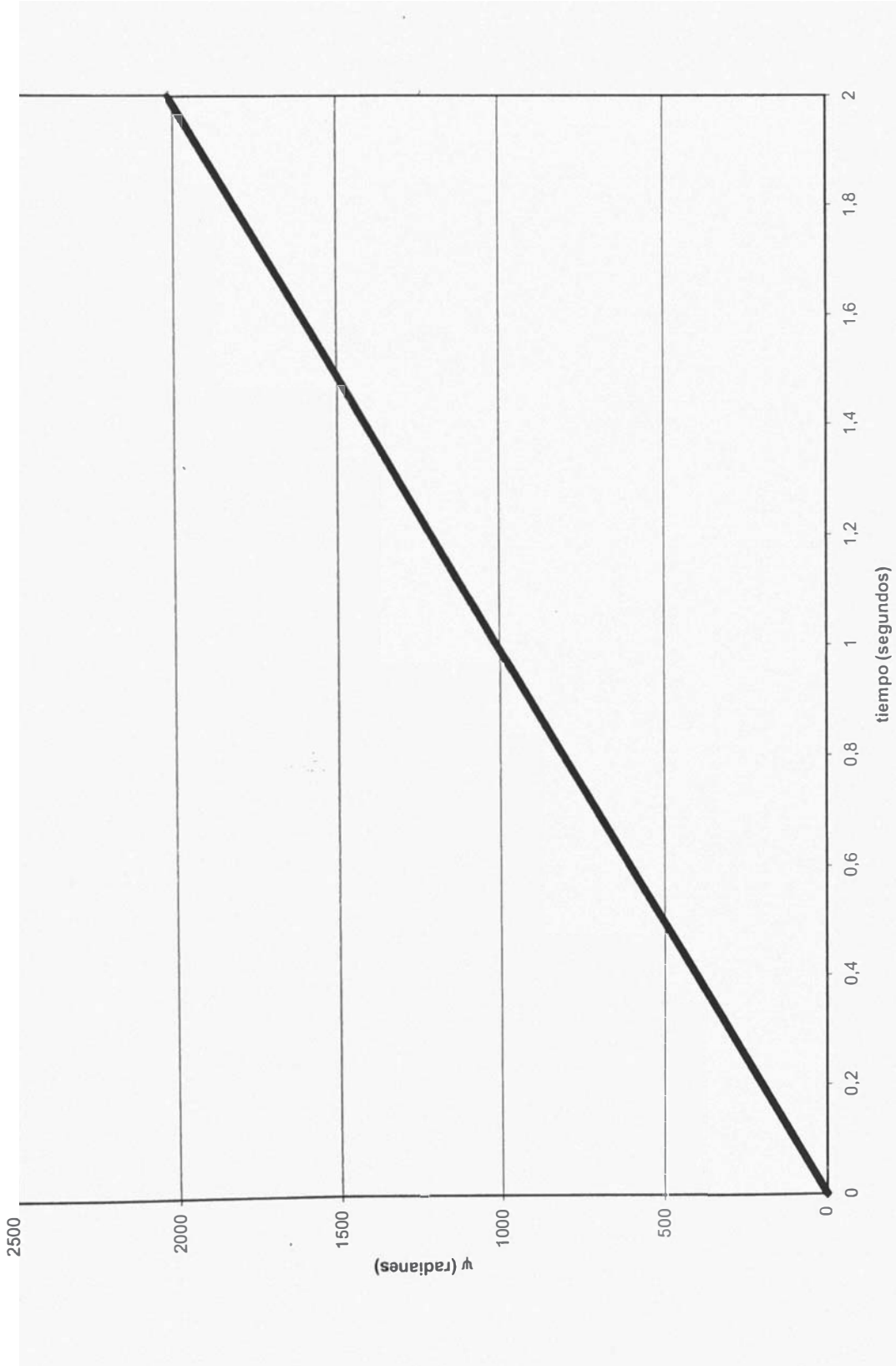
θ vs tiempo [Cáñico (1.5.22)]



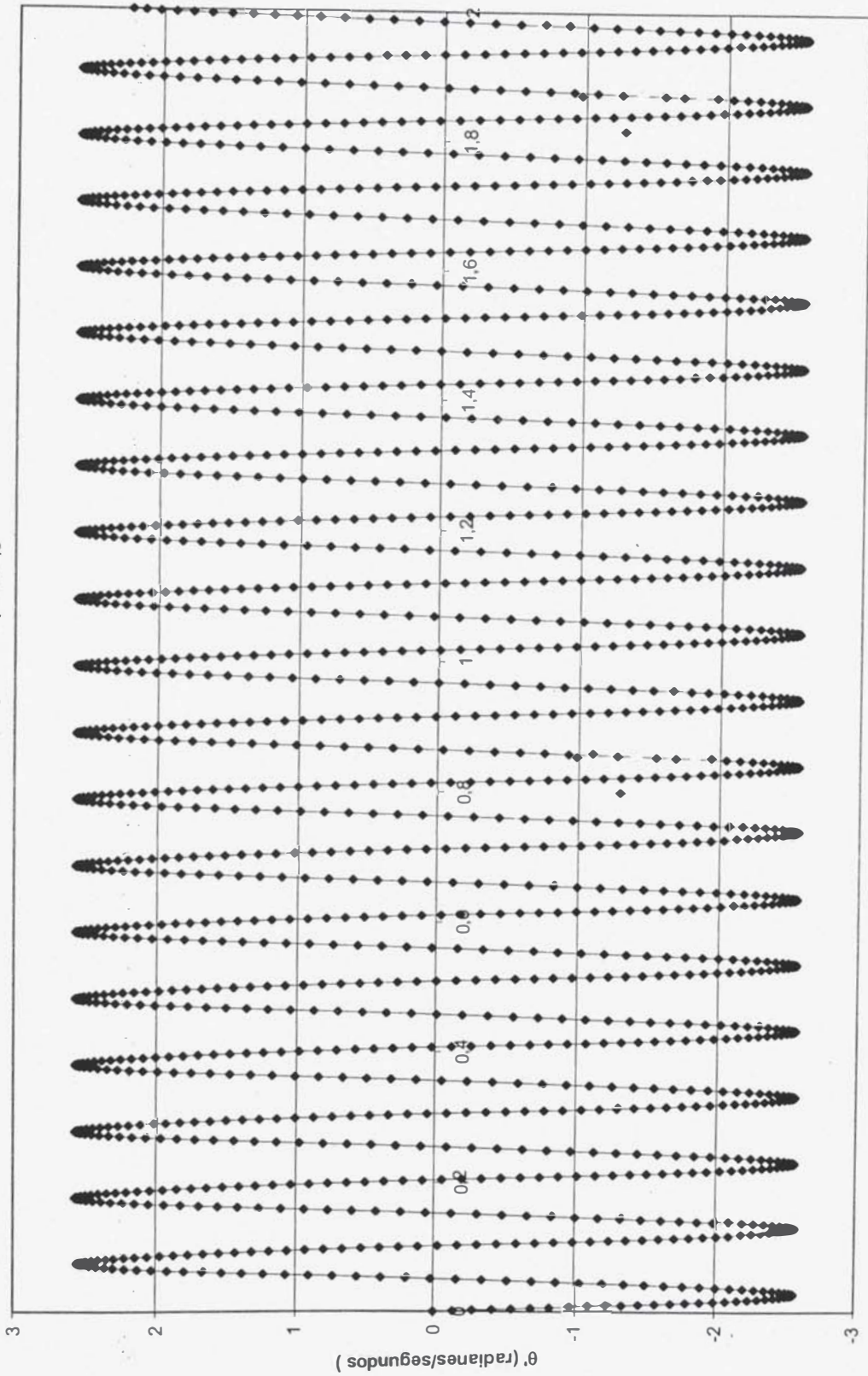
ϕ vs tiempo [Grafico (1.5.23)]



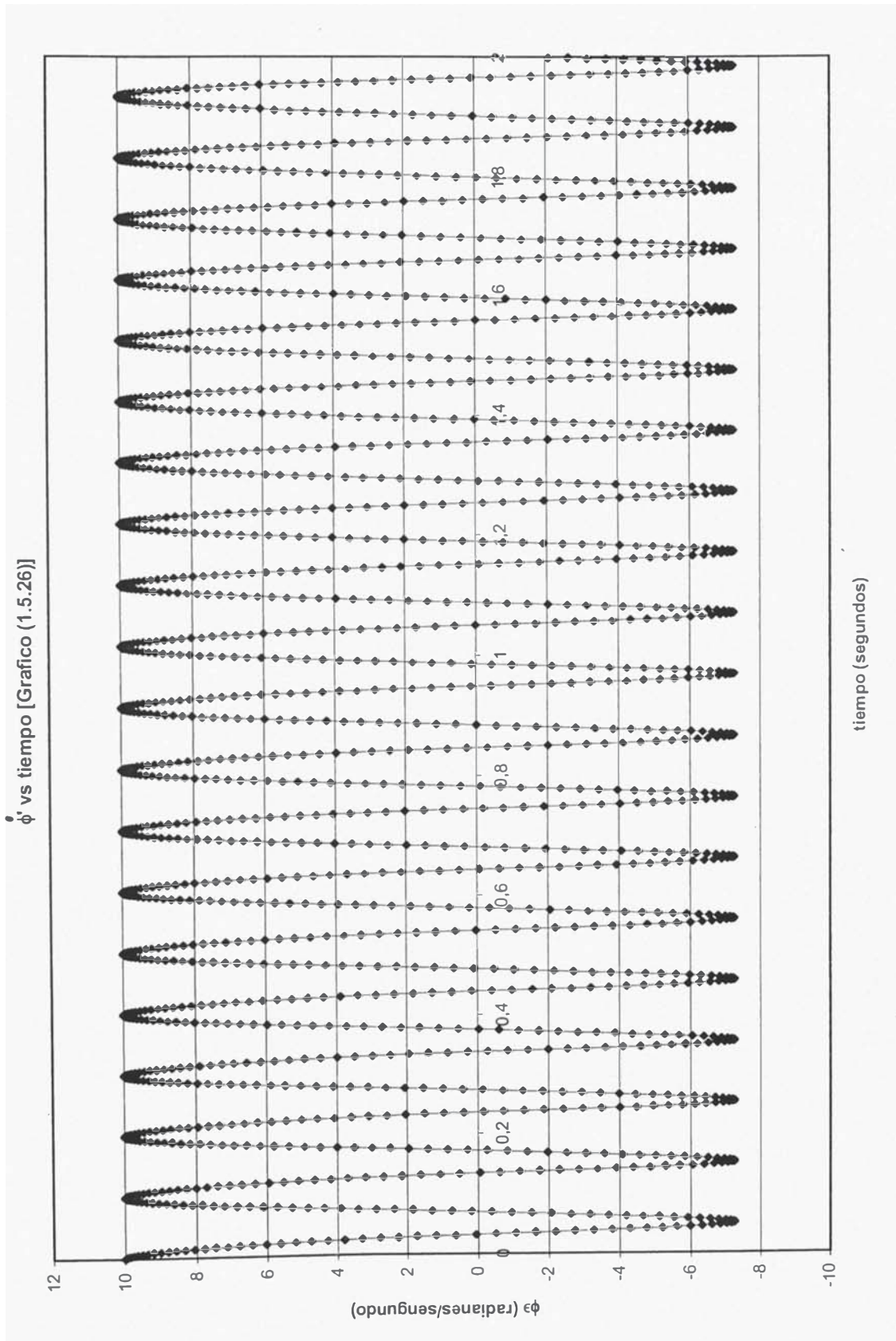
ψ vs tiempo [Gráfico (1.5.24)]

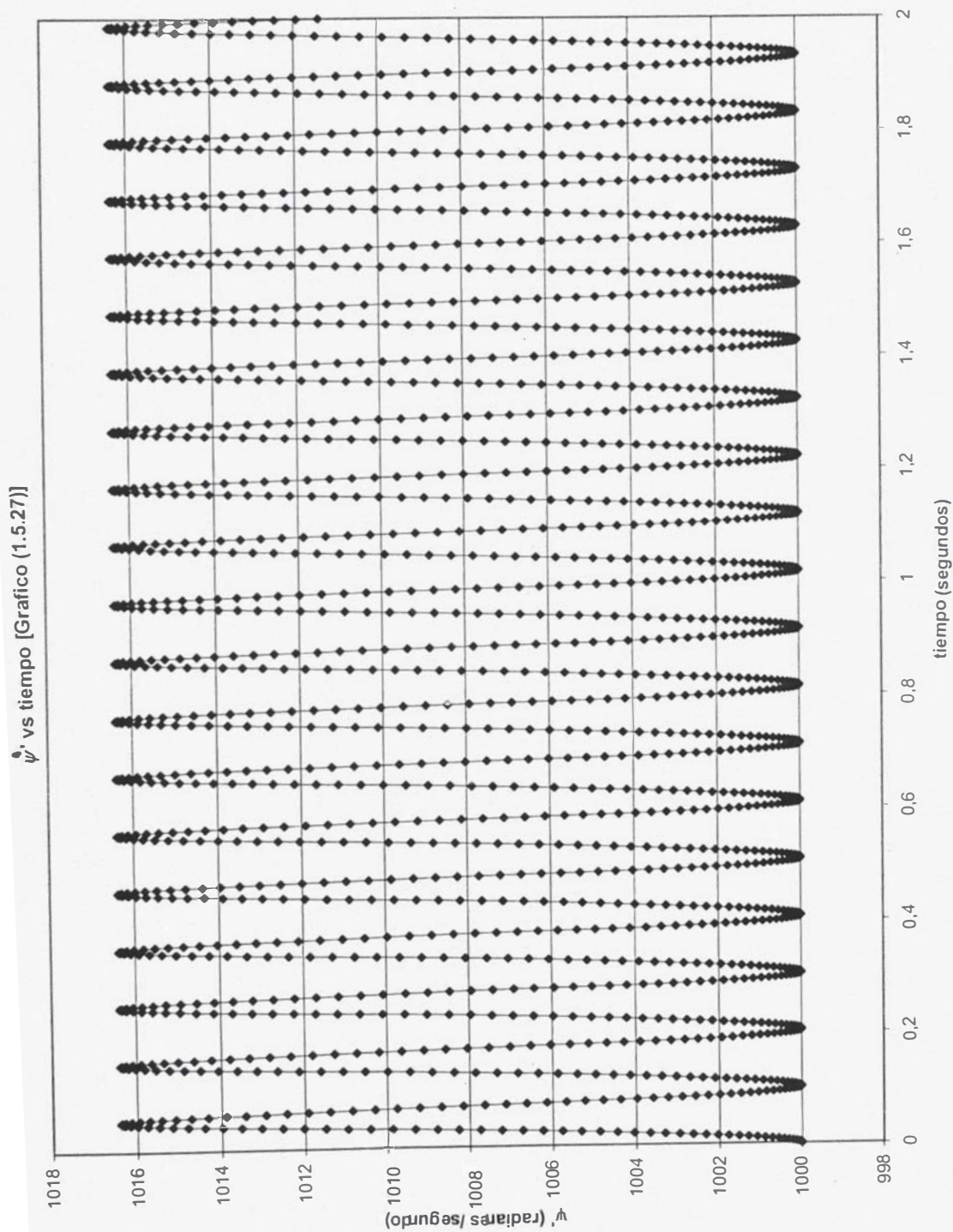


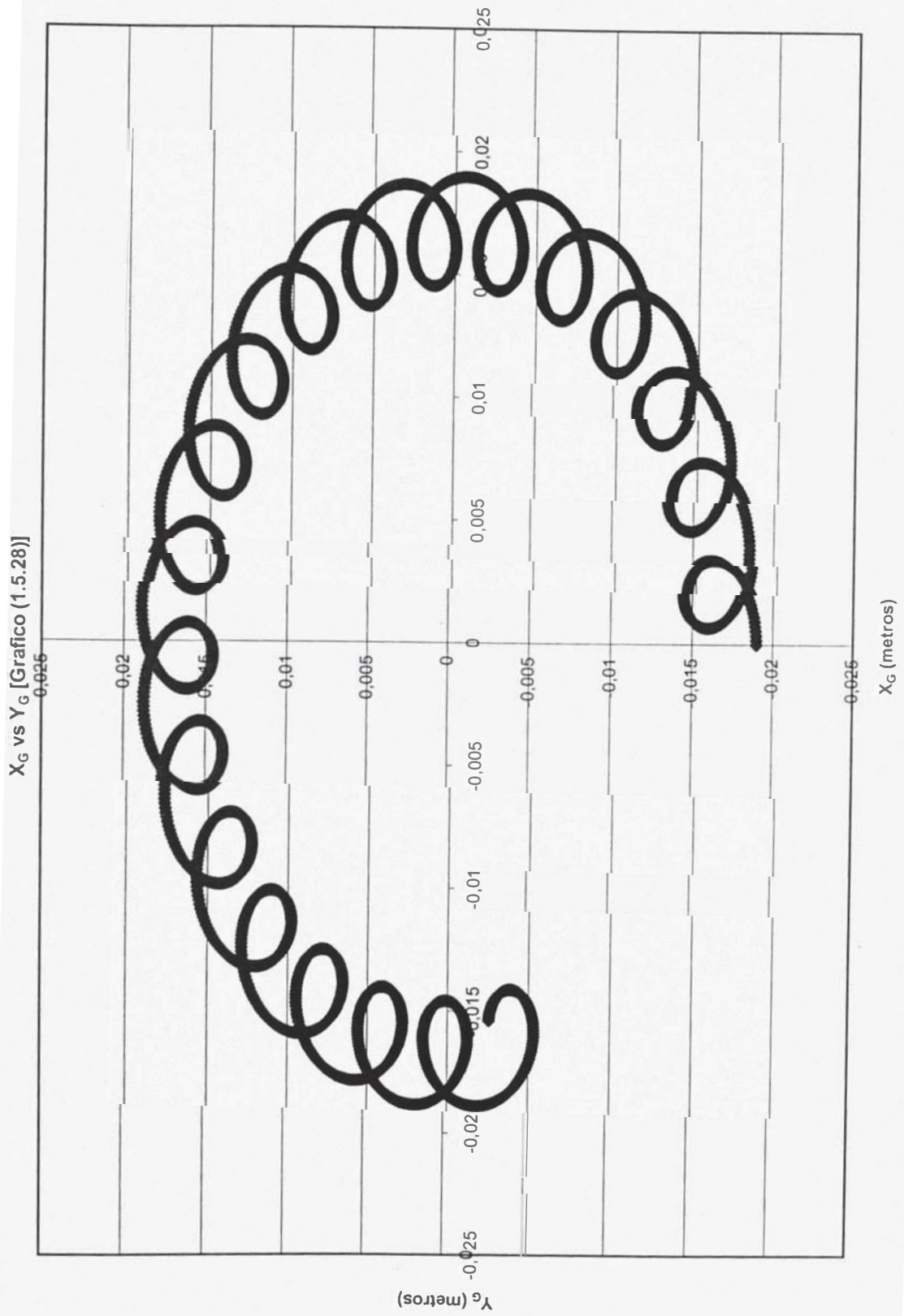
θ' vs tiempo [Grafico (1.5.25)]



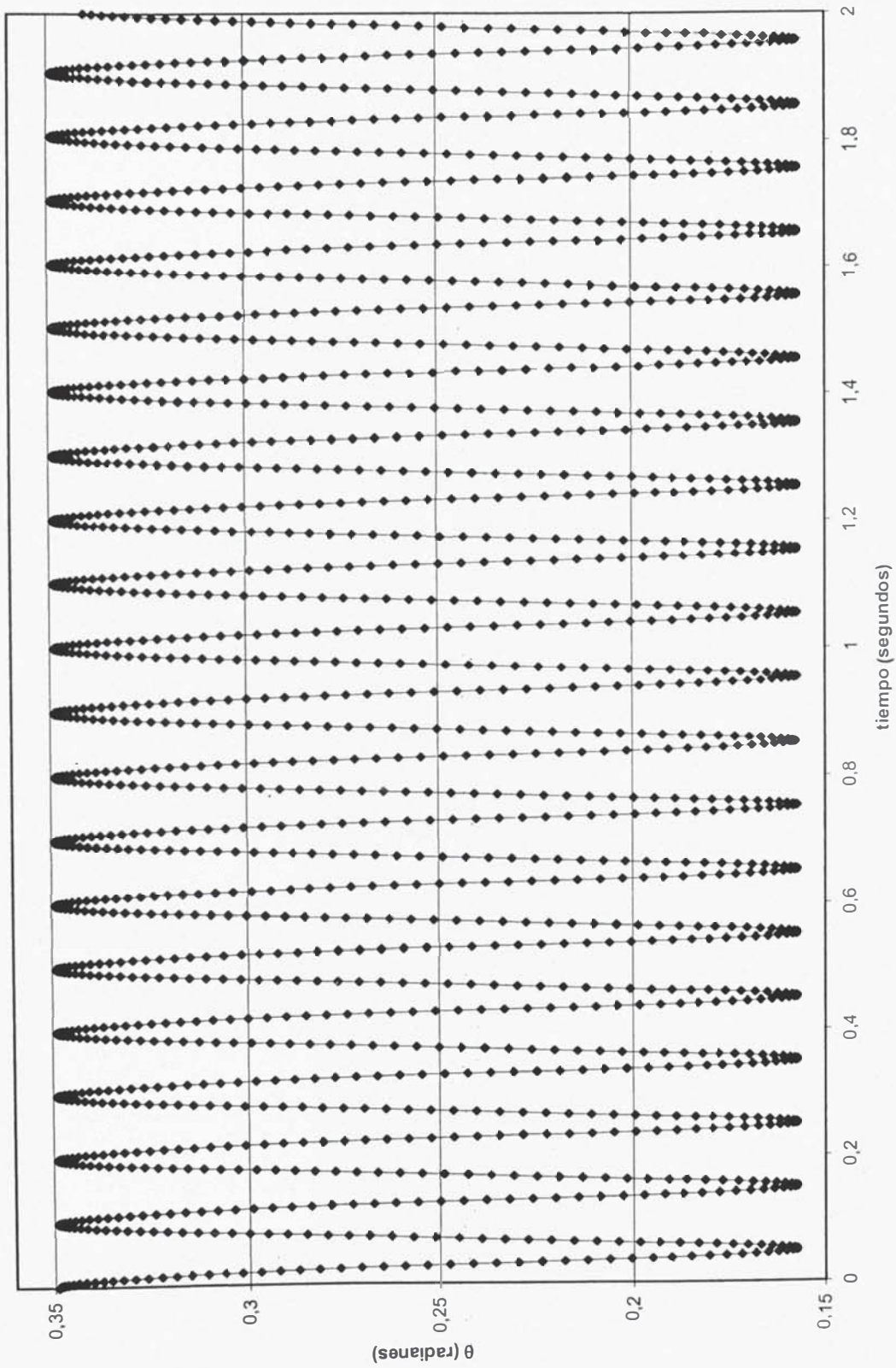
tiempo (segundos)

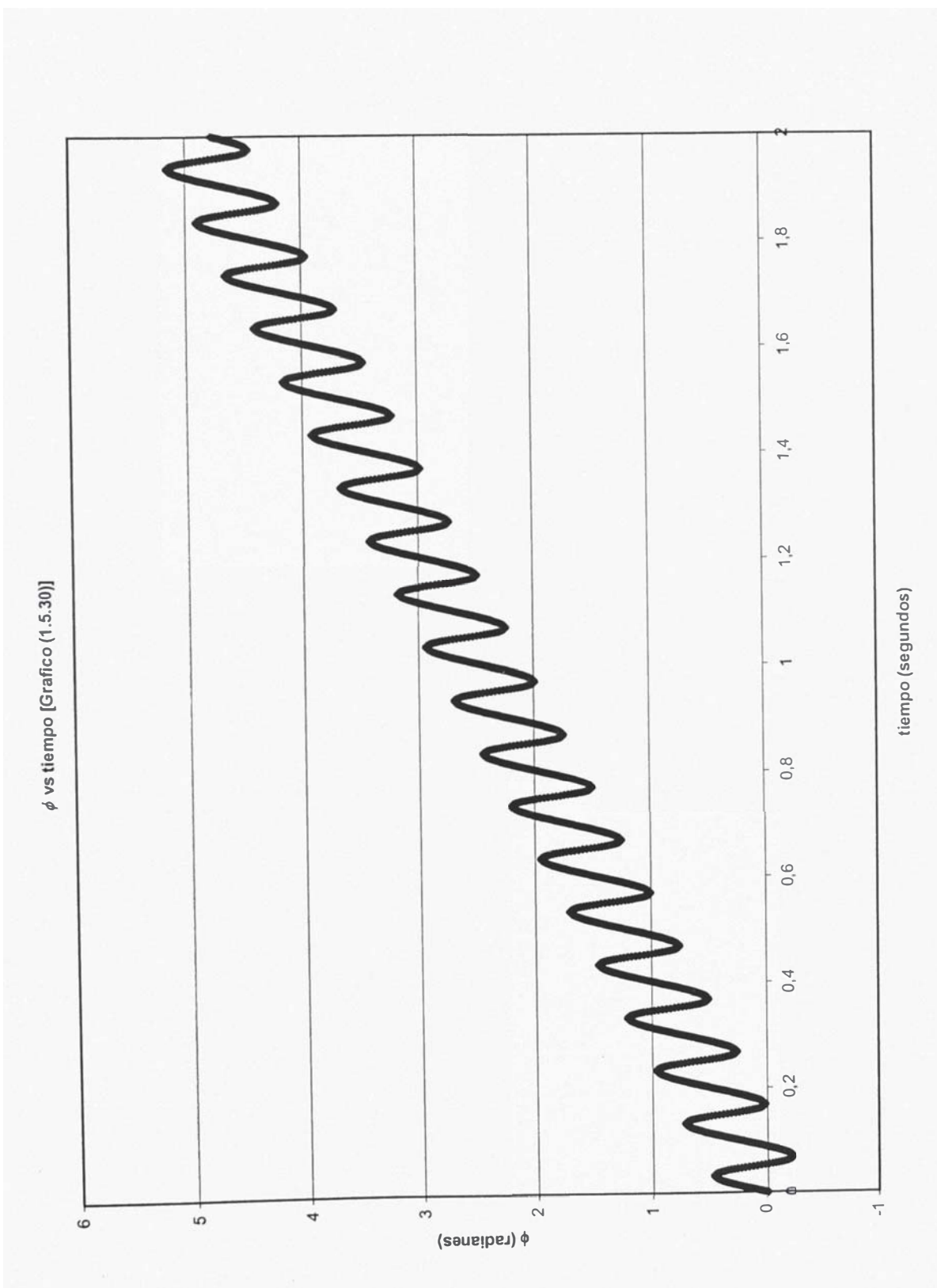




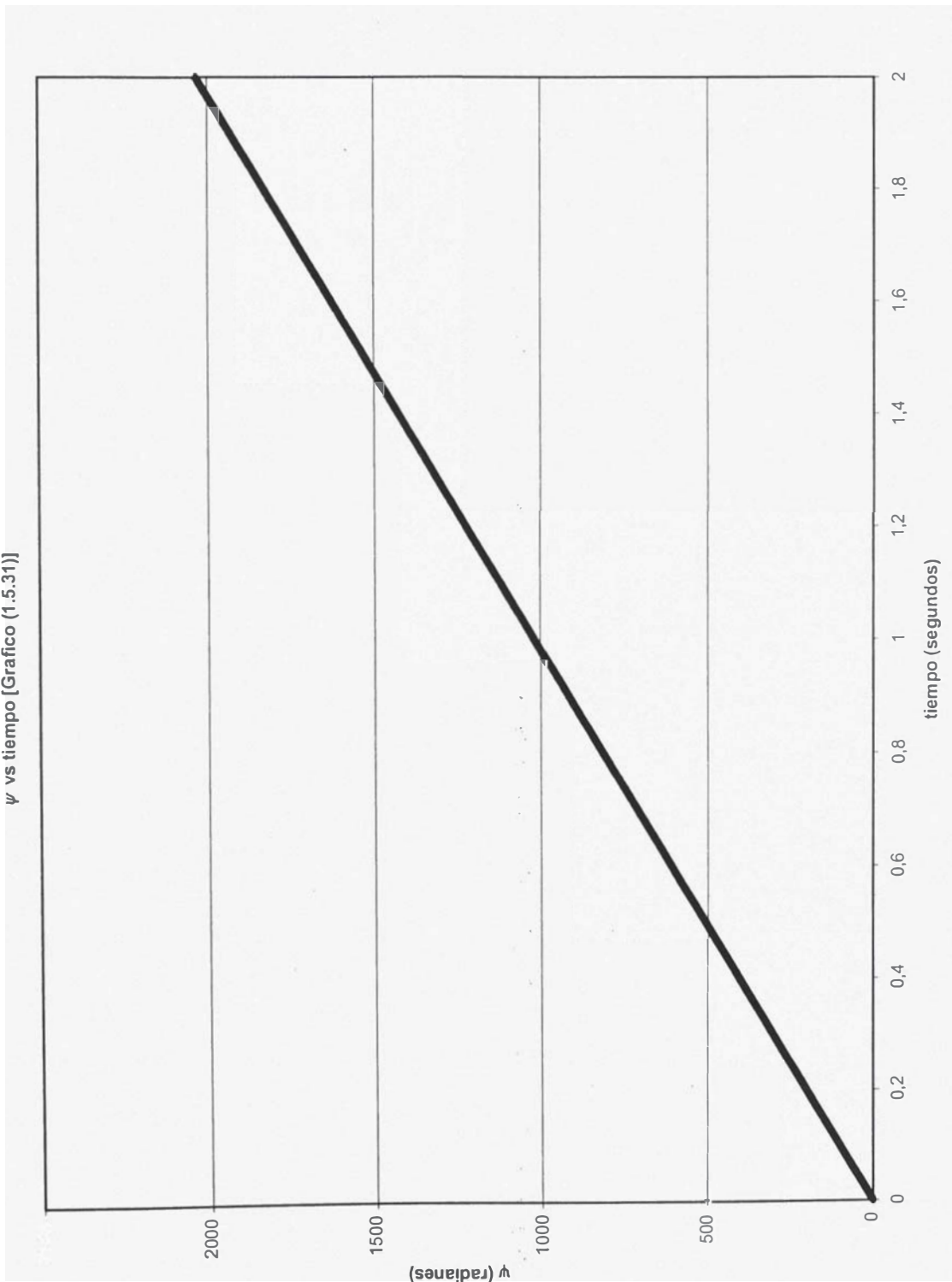


θ vs tiempo [Gráfico (1.5.29)]

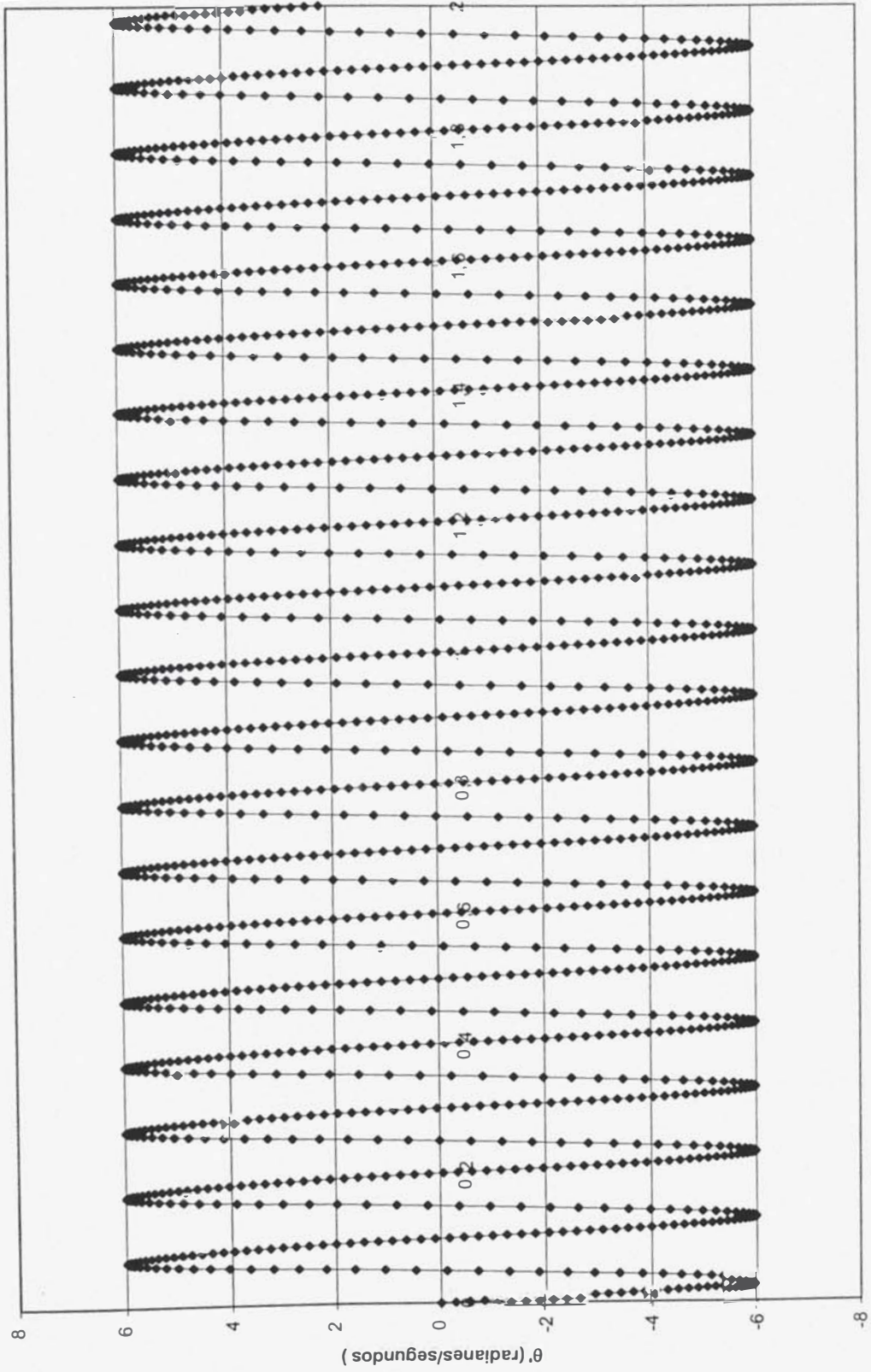




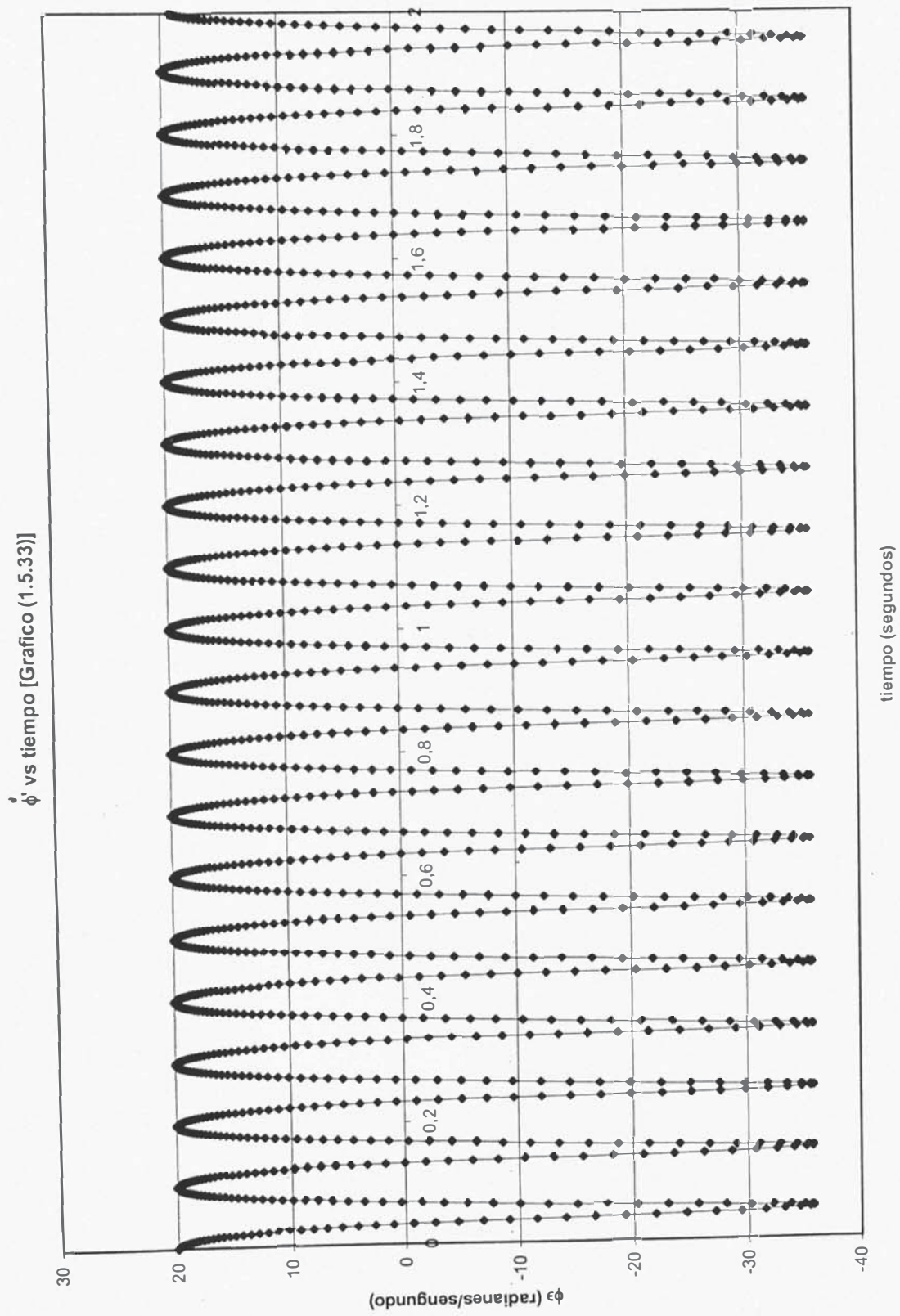
ψ vs tiempo [Gráfico (1.5.31)]

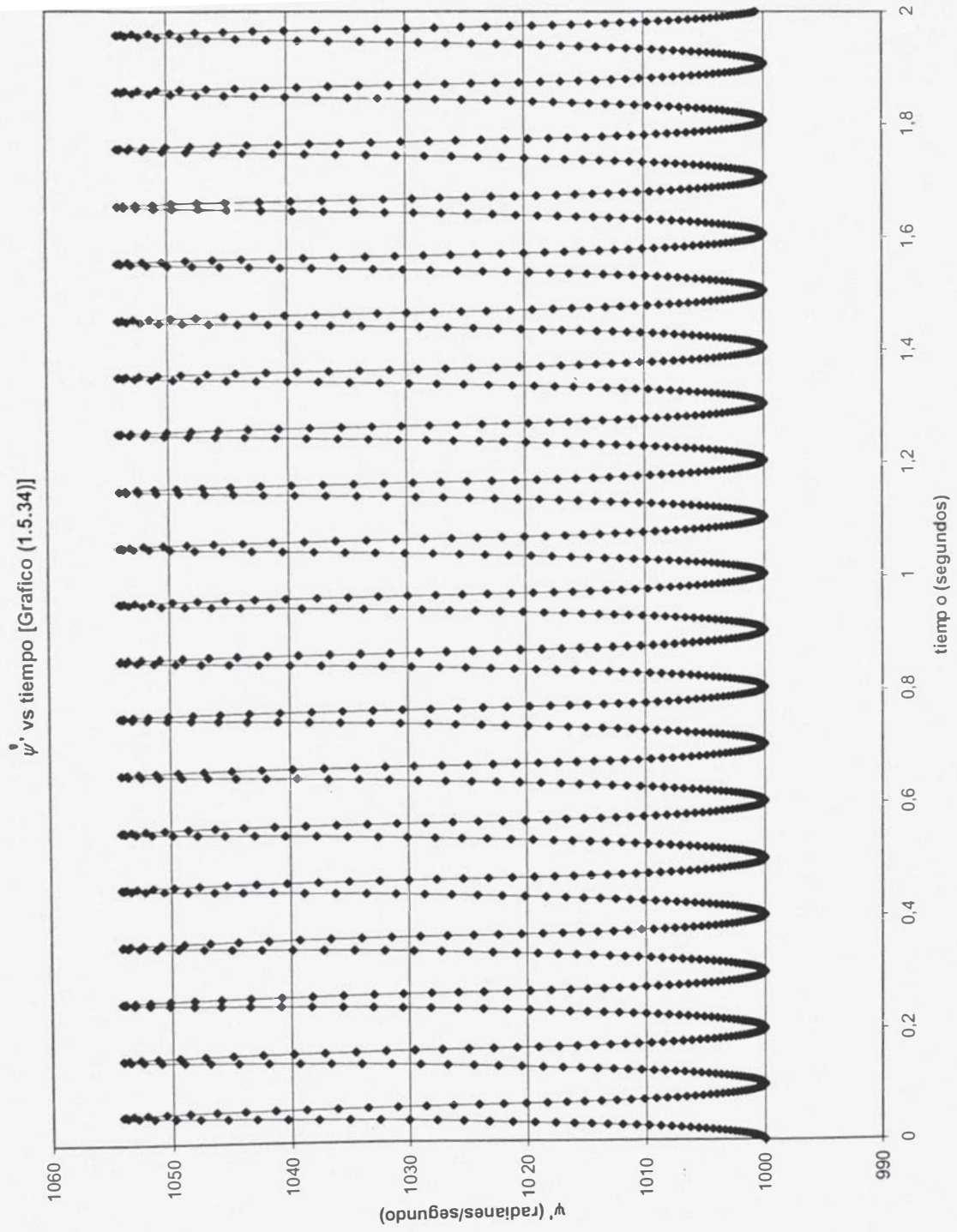


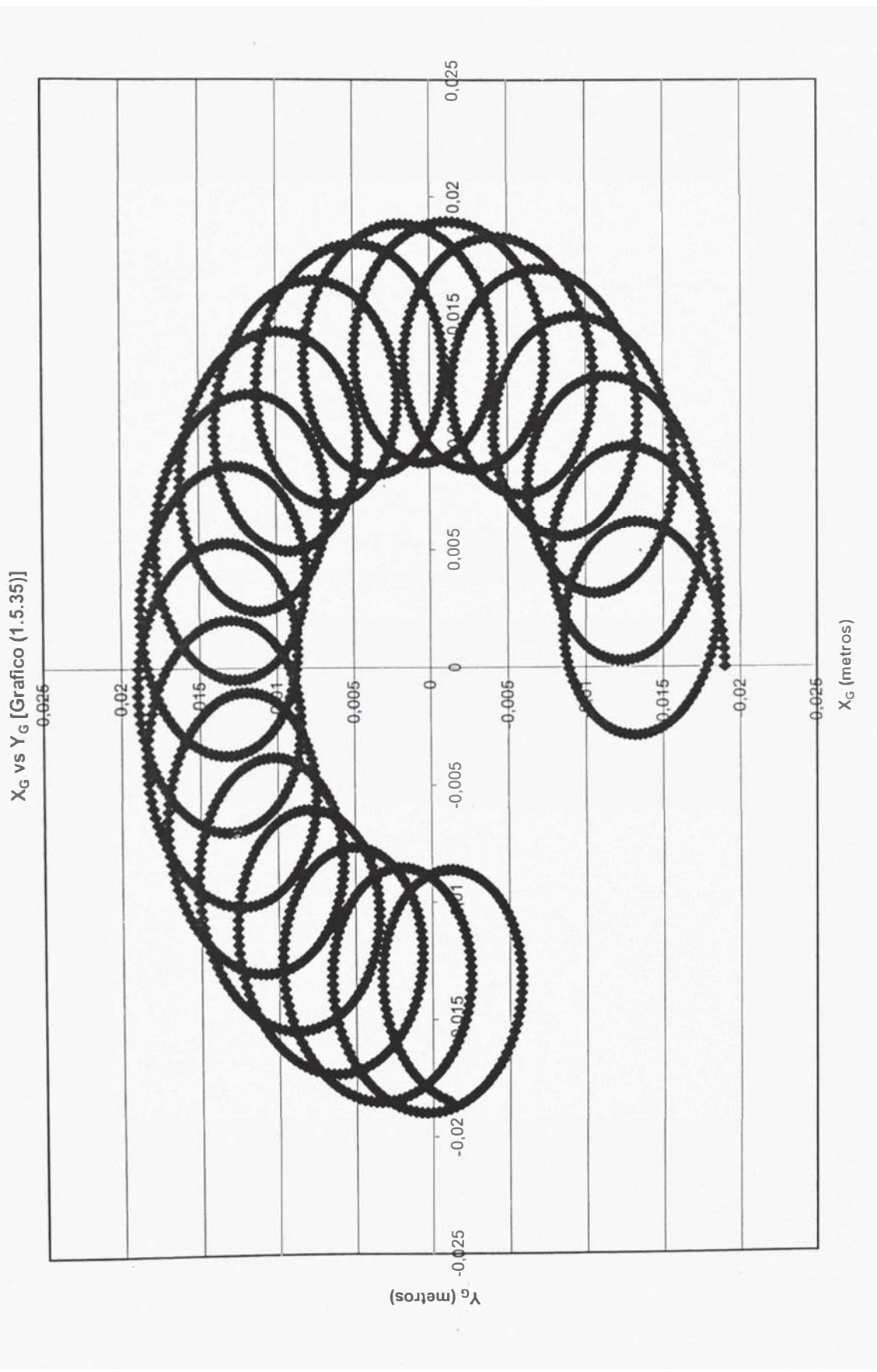
$\dot{\theta}$ vs tiempo [Grafico (1.5.32)]



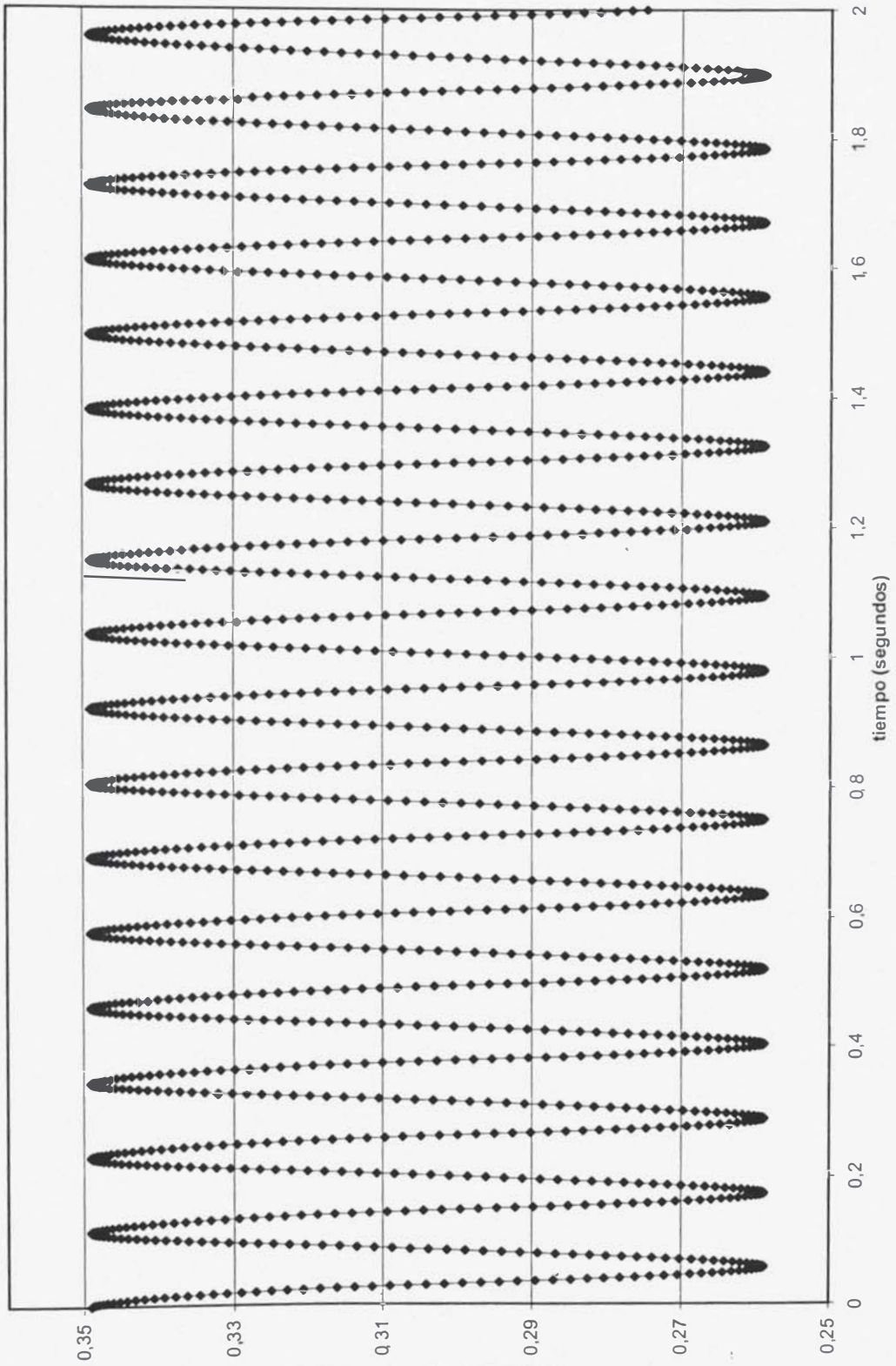
t tiempo (segundos)



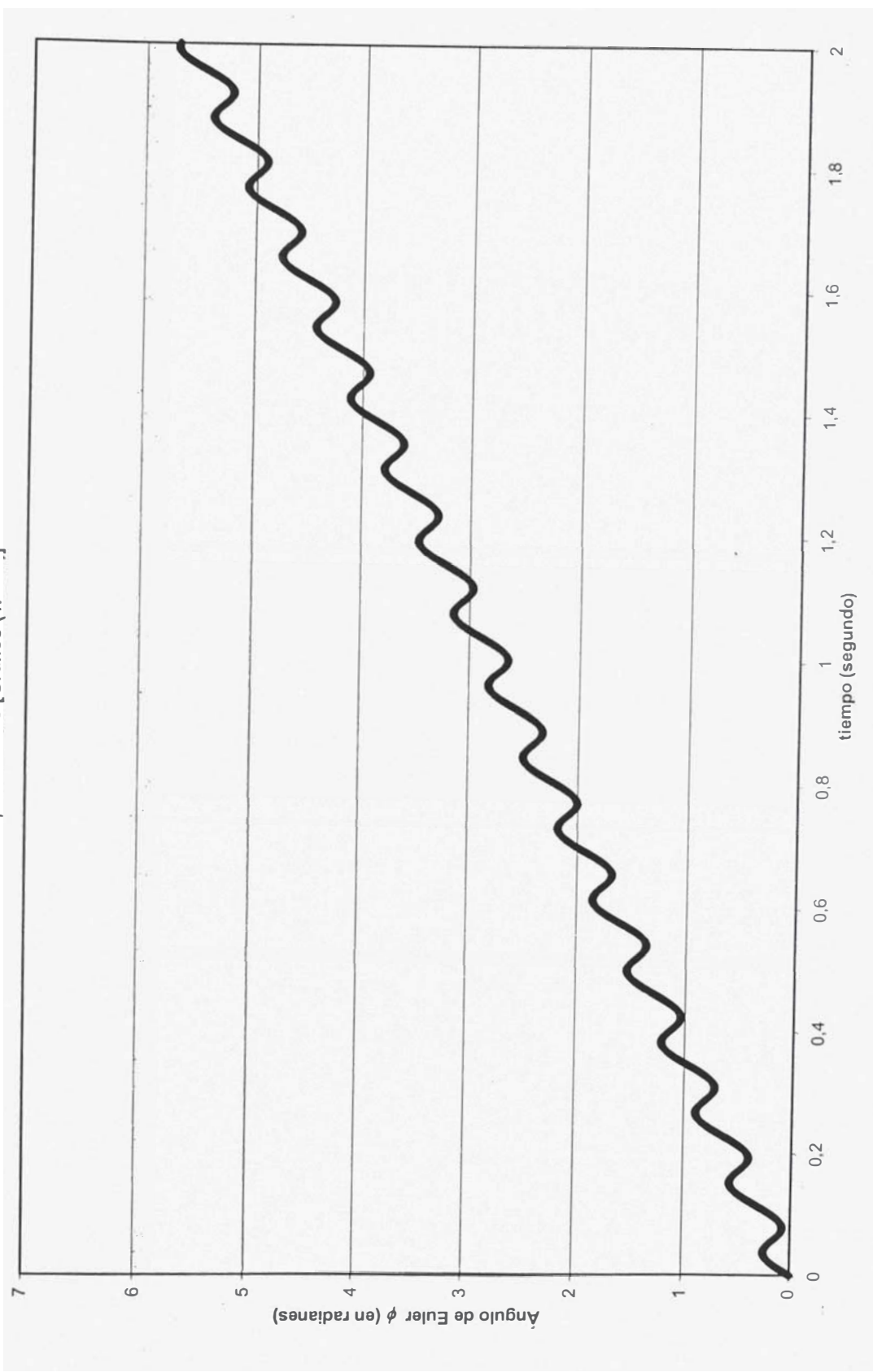




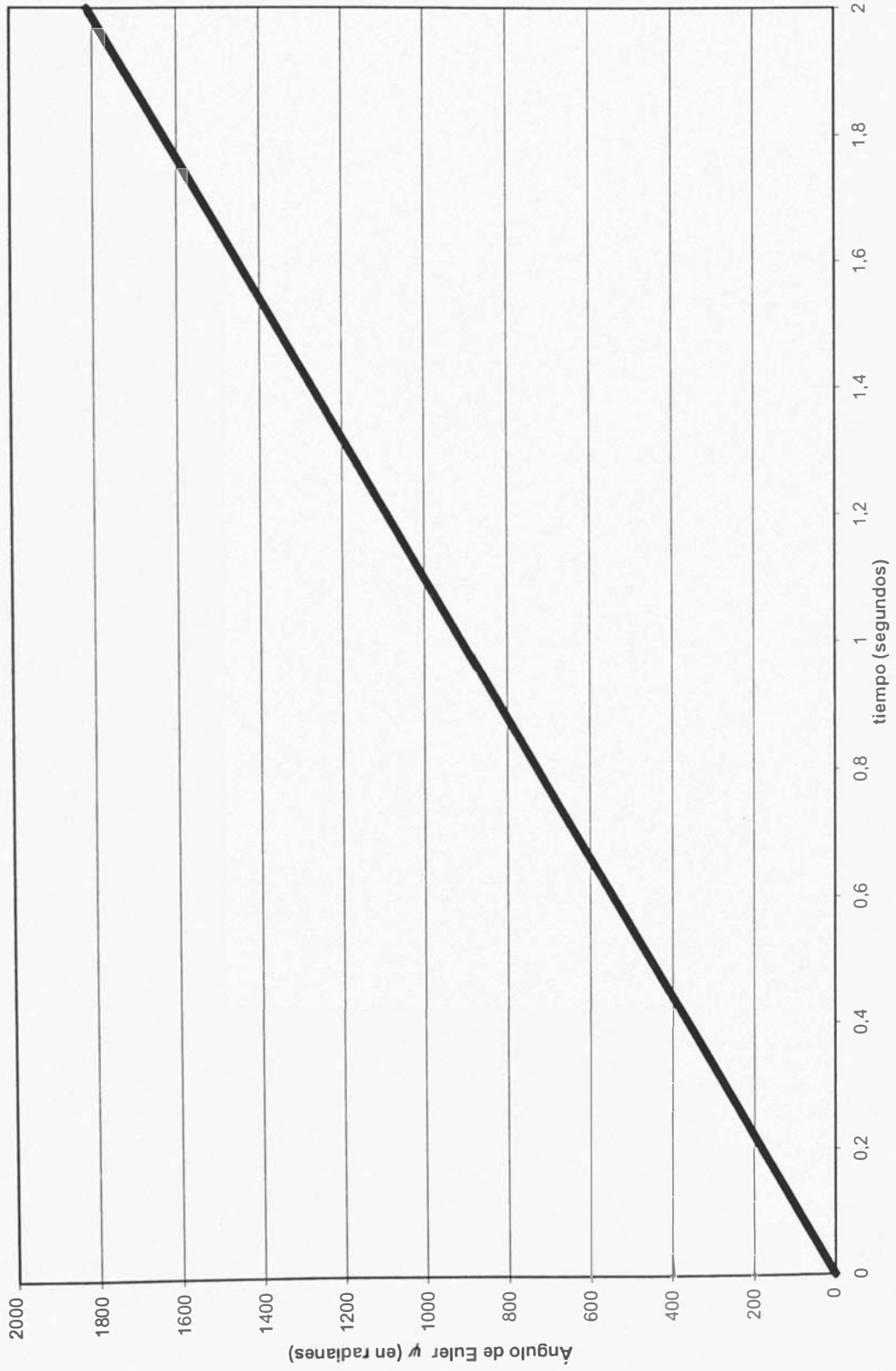
θ vs tiempo [Gráfico (1.5.36)]



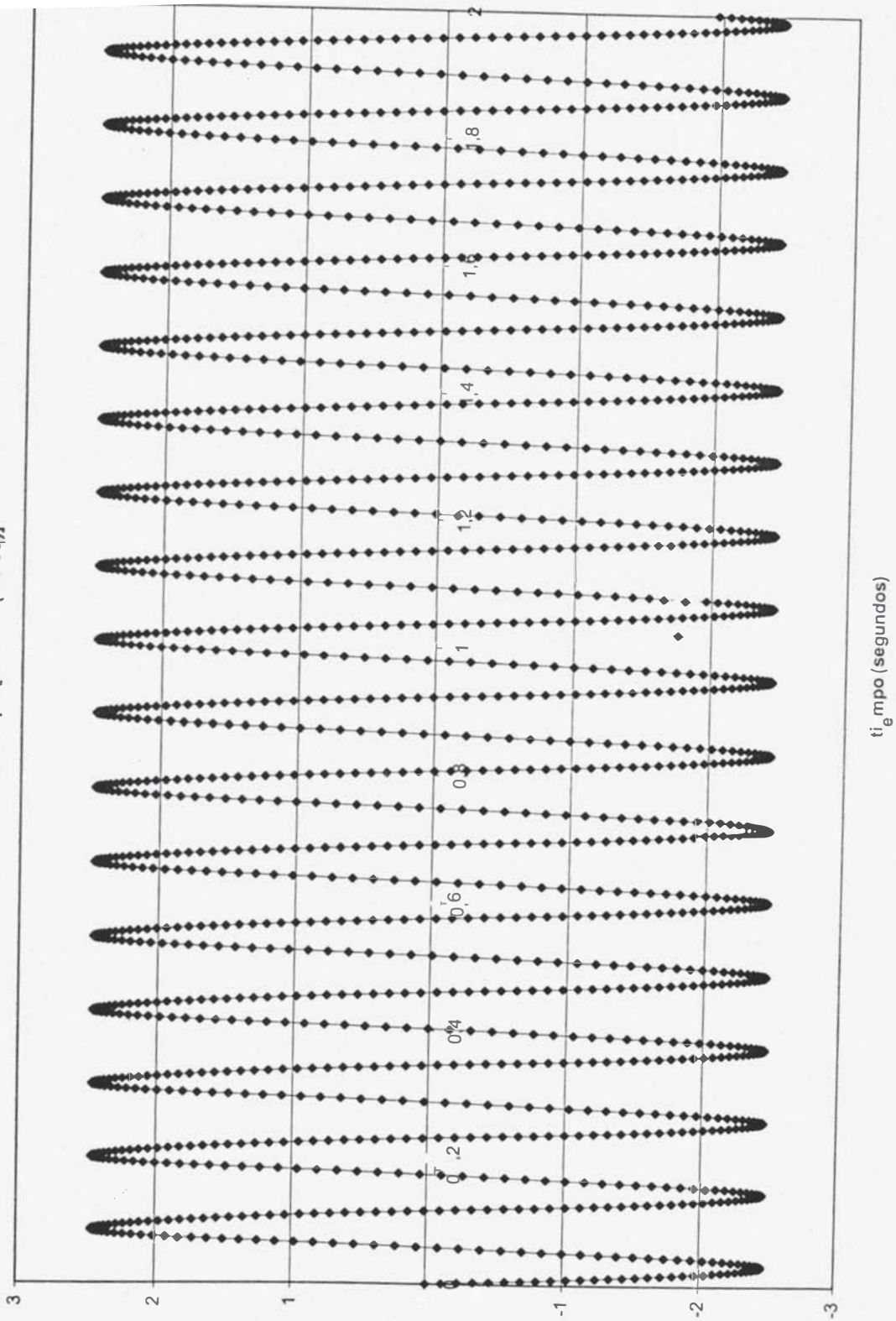
ϕ s em o [Grafico (1. .)]



ψ vs tiempo [Grafico (1.5.38)]

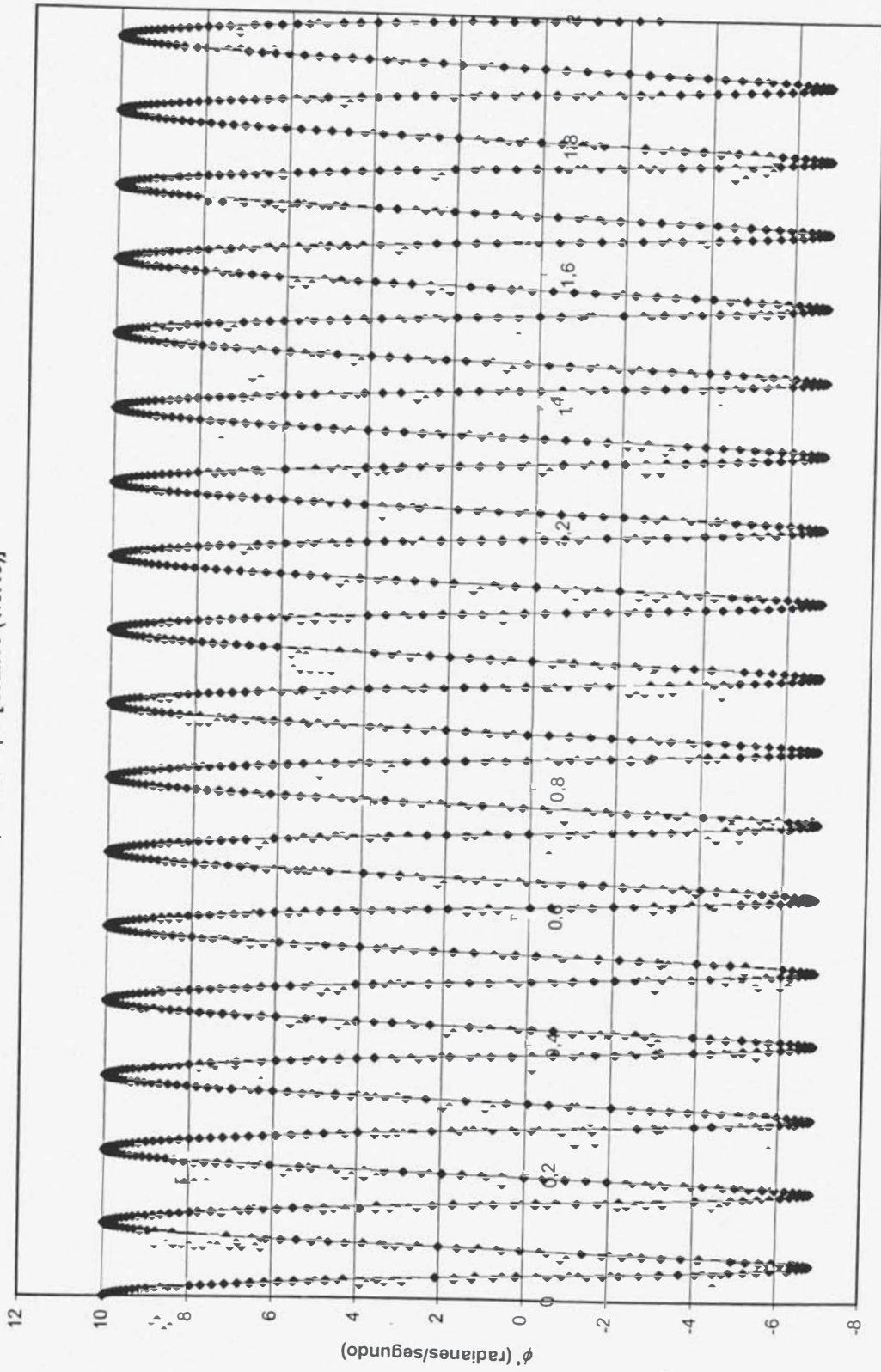


$\dot{\theta}$ vs tiempo [Gráfico (1.5.39)]



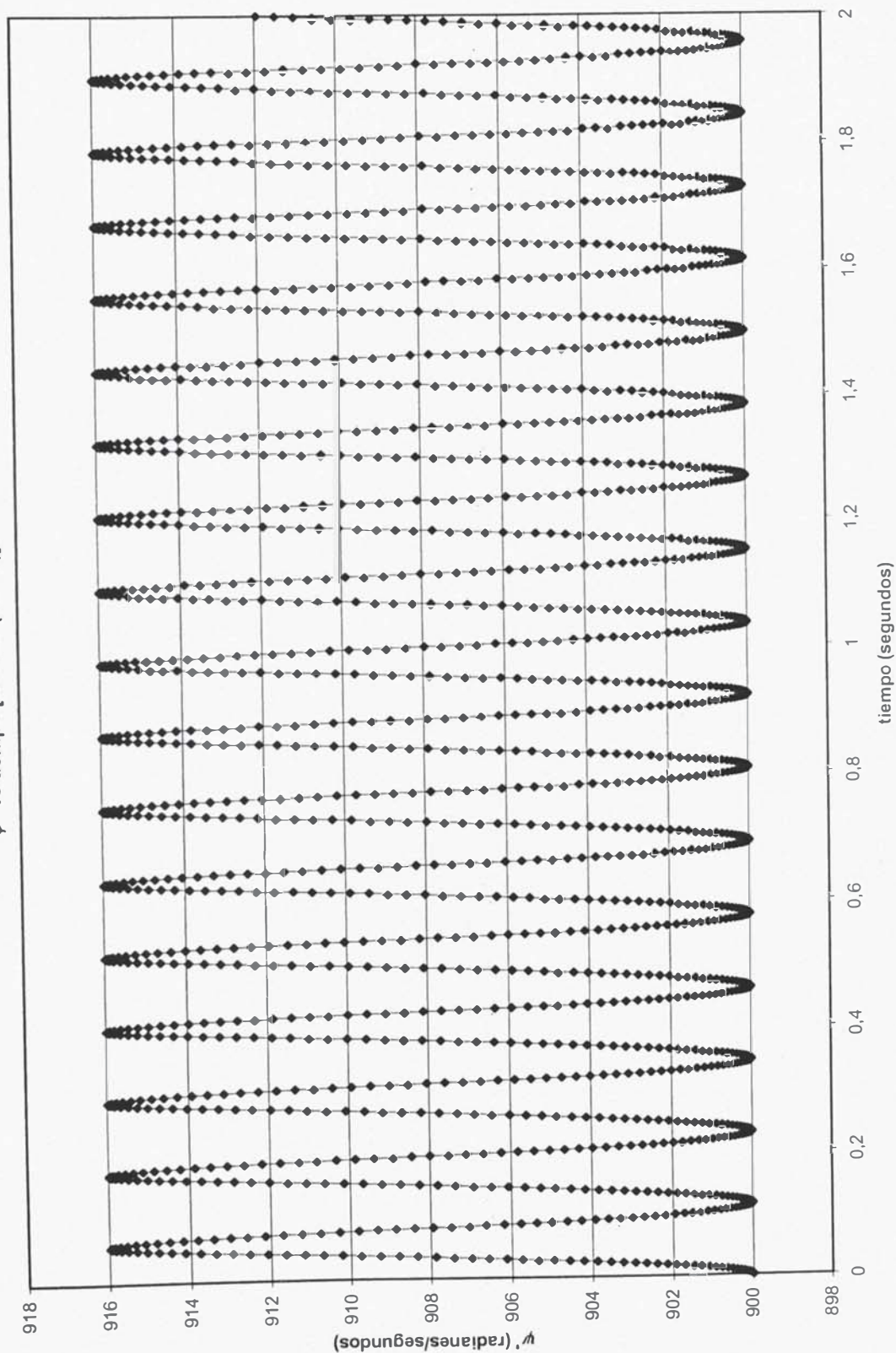
tiempo (segundos)

ϕ' vs tiempo [Grafico (1.5.40)]

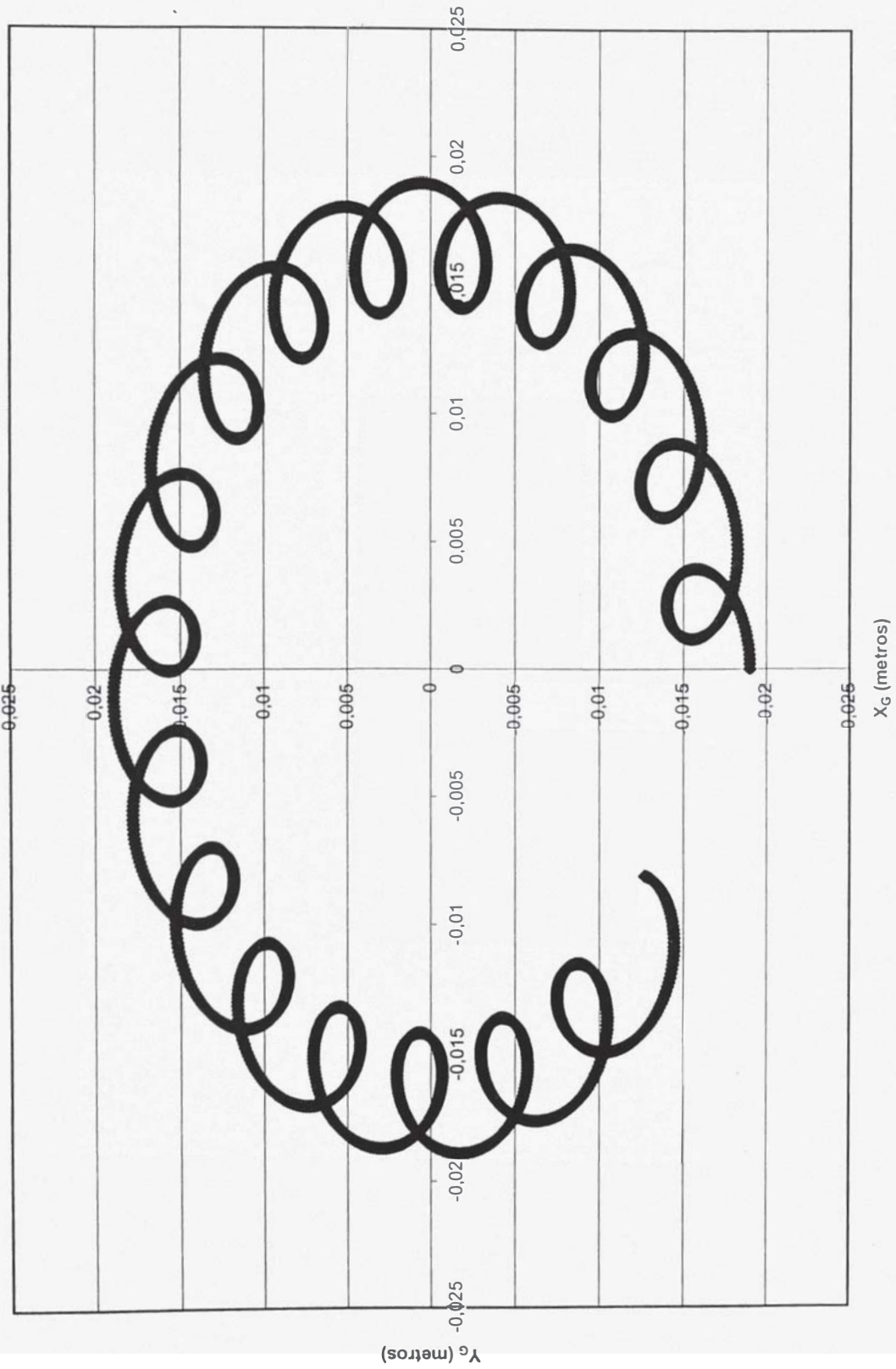


tiempo (segundos)

$\dot{\psi}$ vs tiempo [Grafico (1.5.41)]

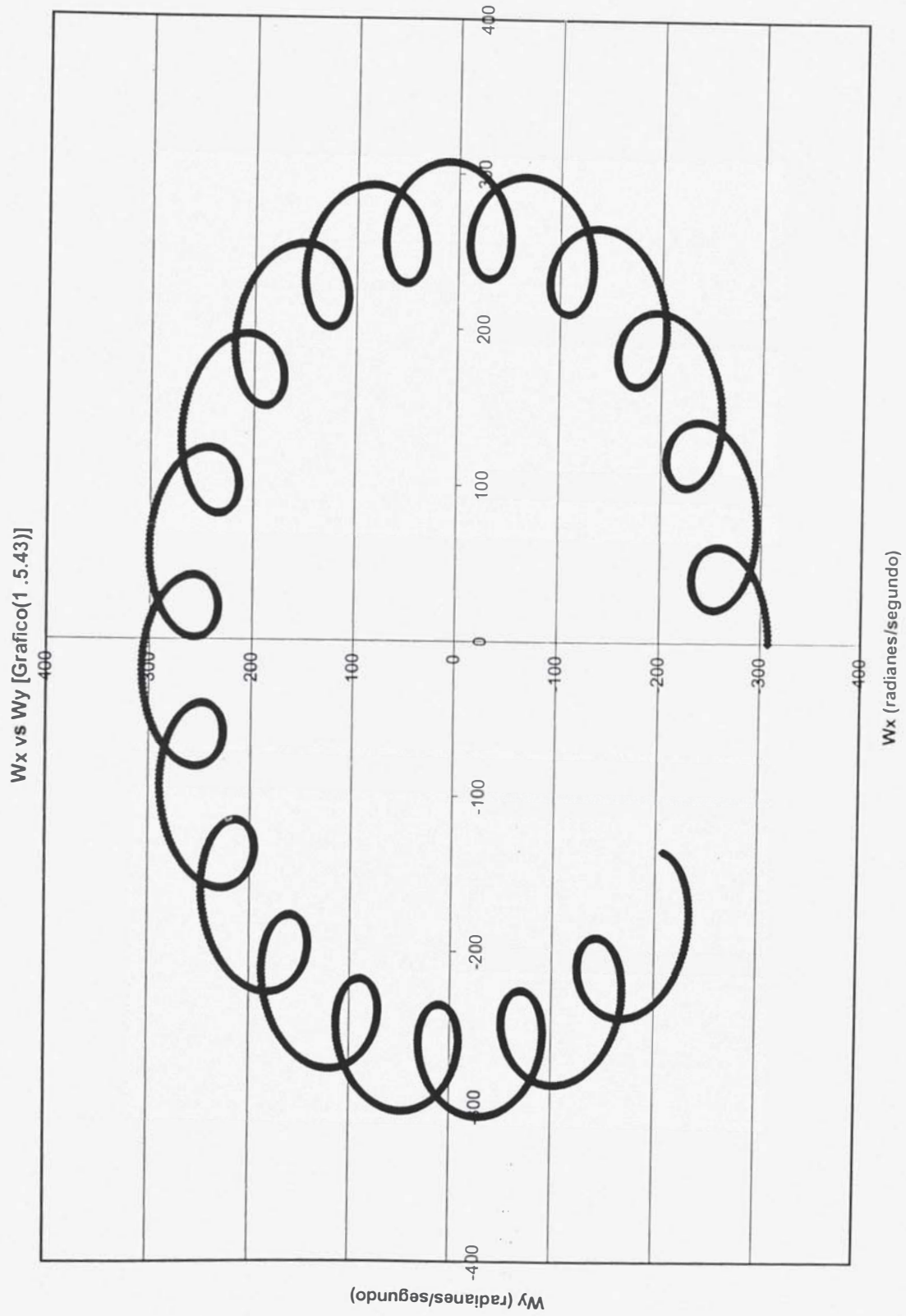


X_G vs Y_G [Grafico (1.5.42)]

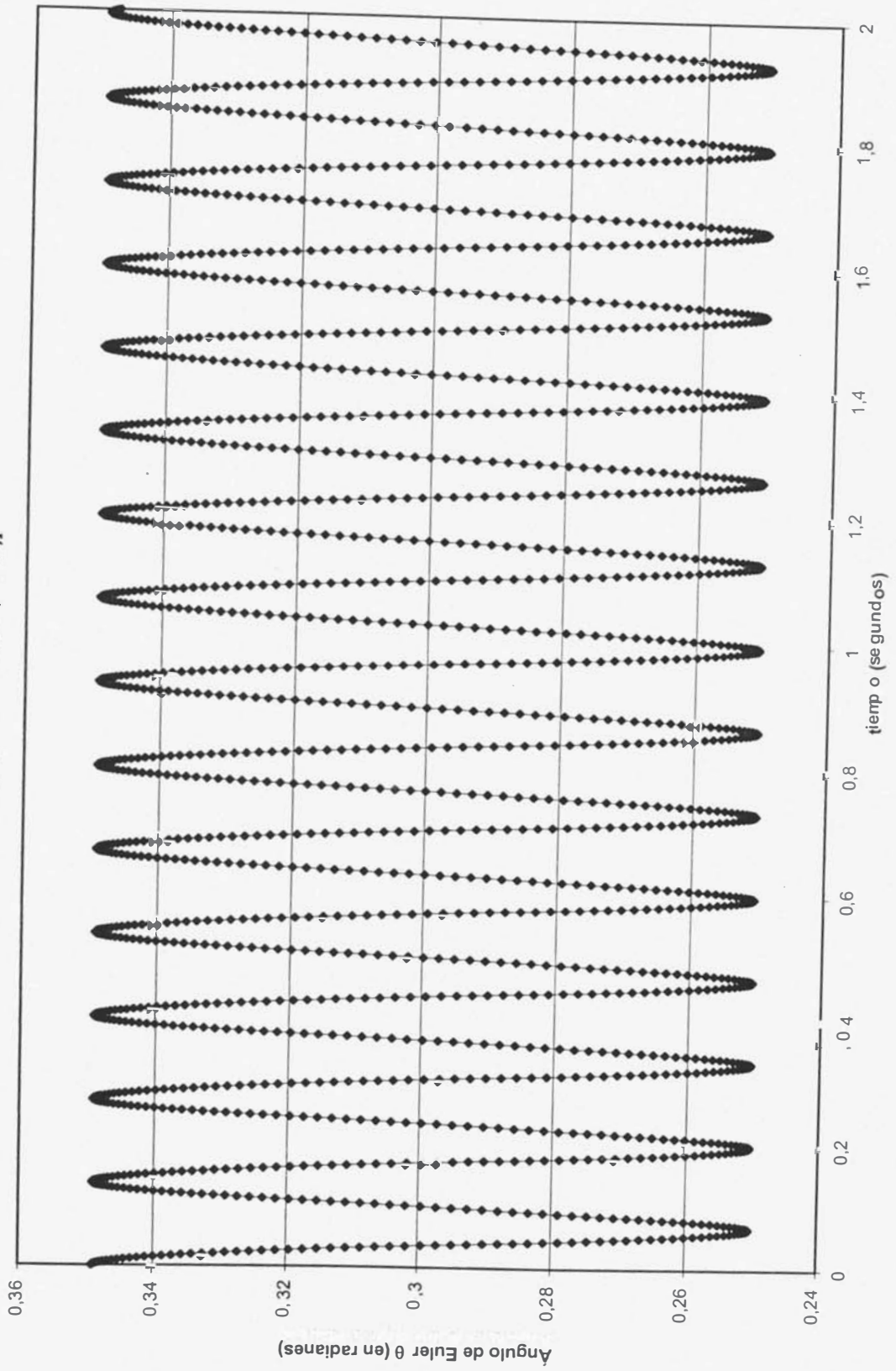


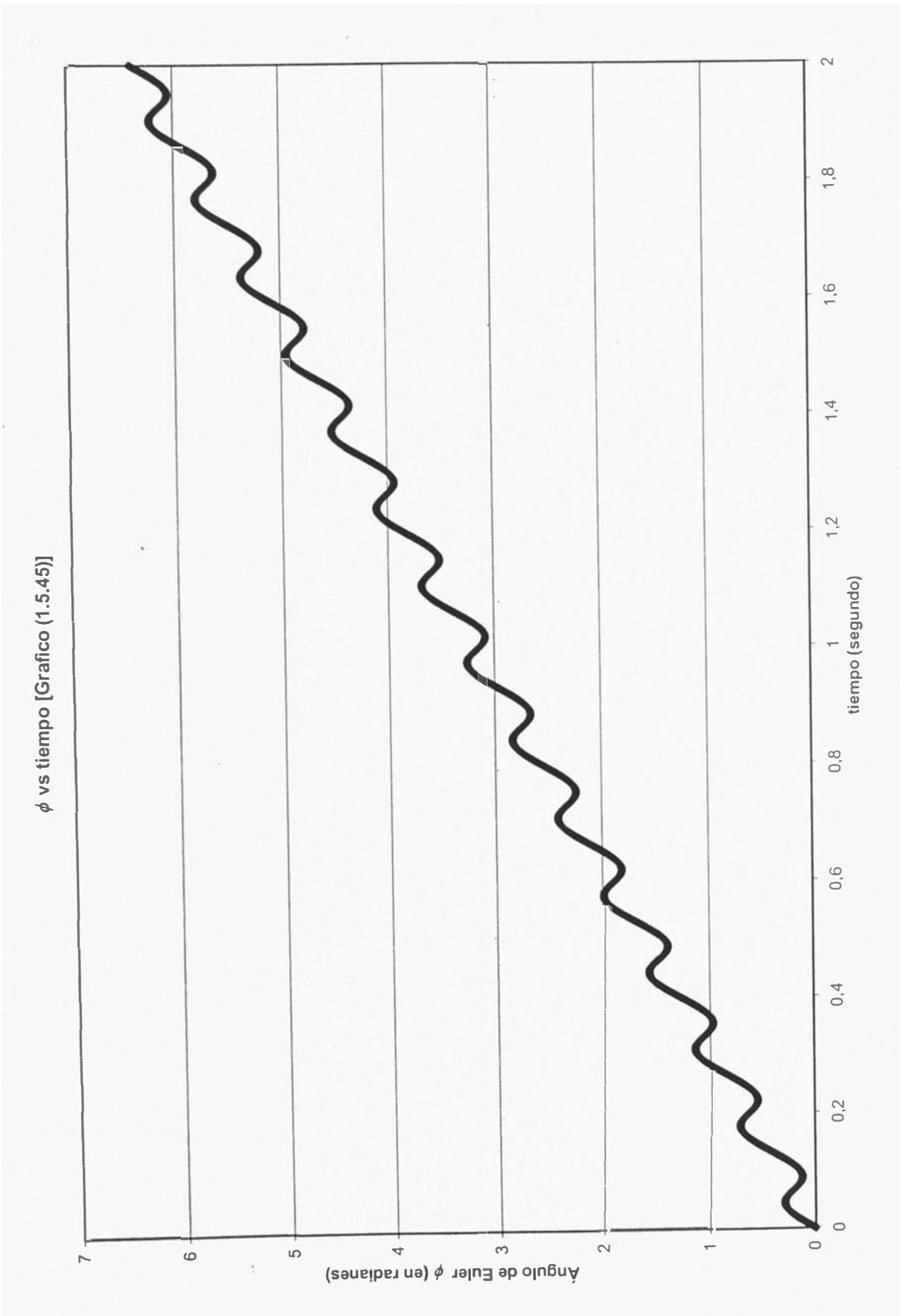
Y_G (metros)

X_G (metros)

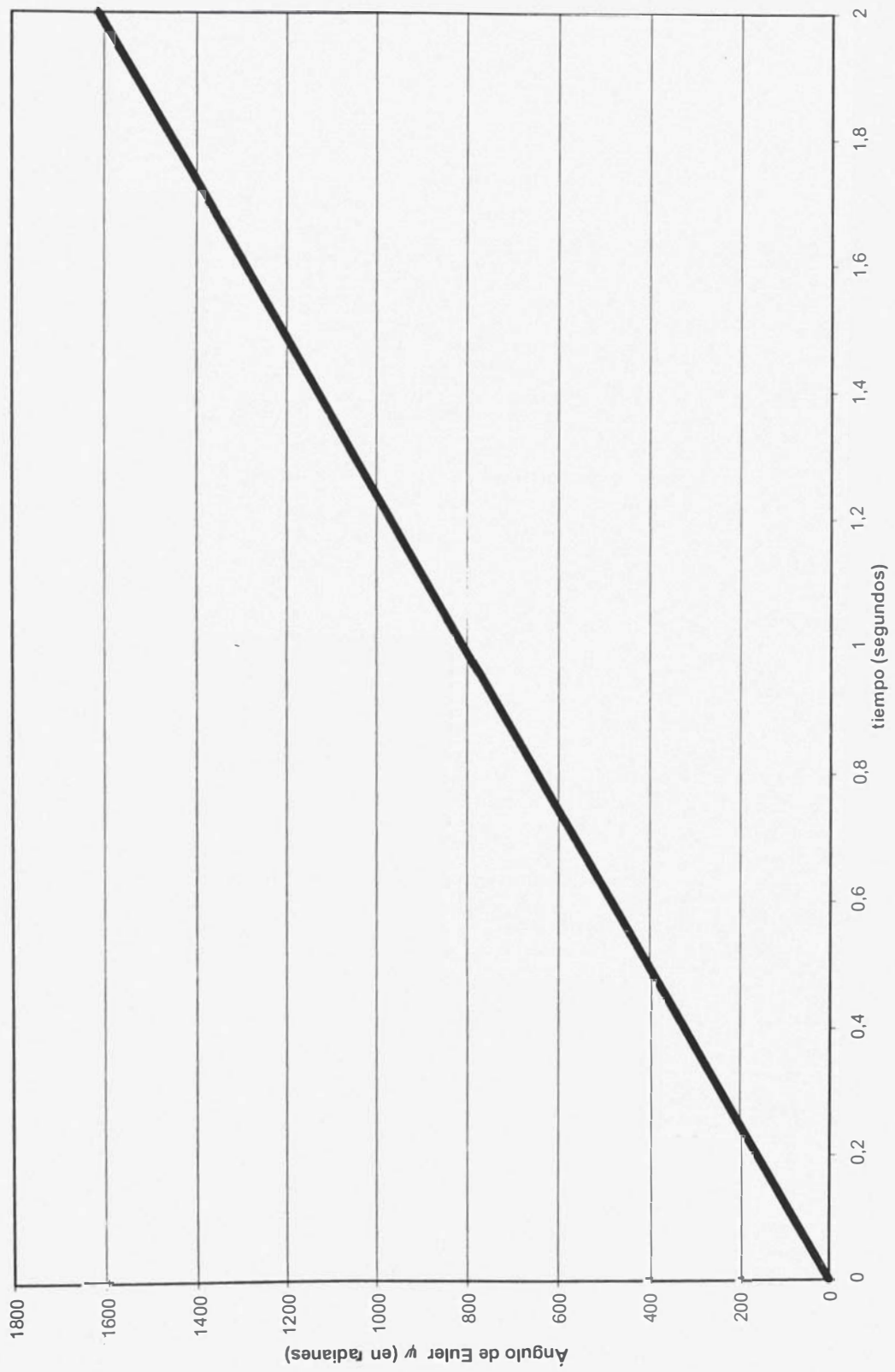


θ vs tiempo [Grafico (1.5.44)]

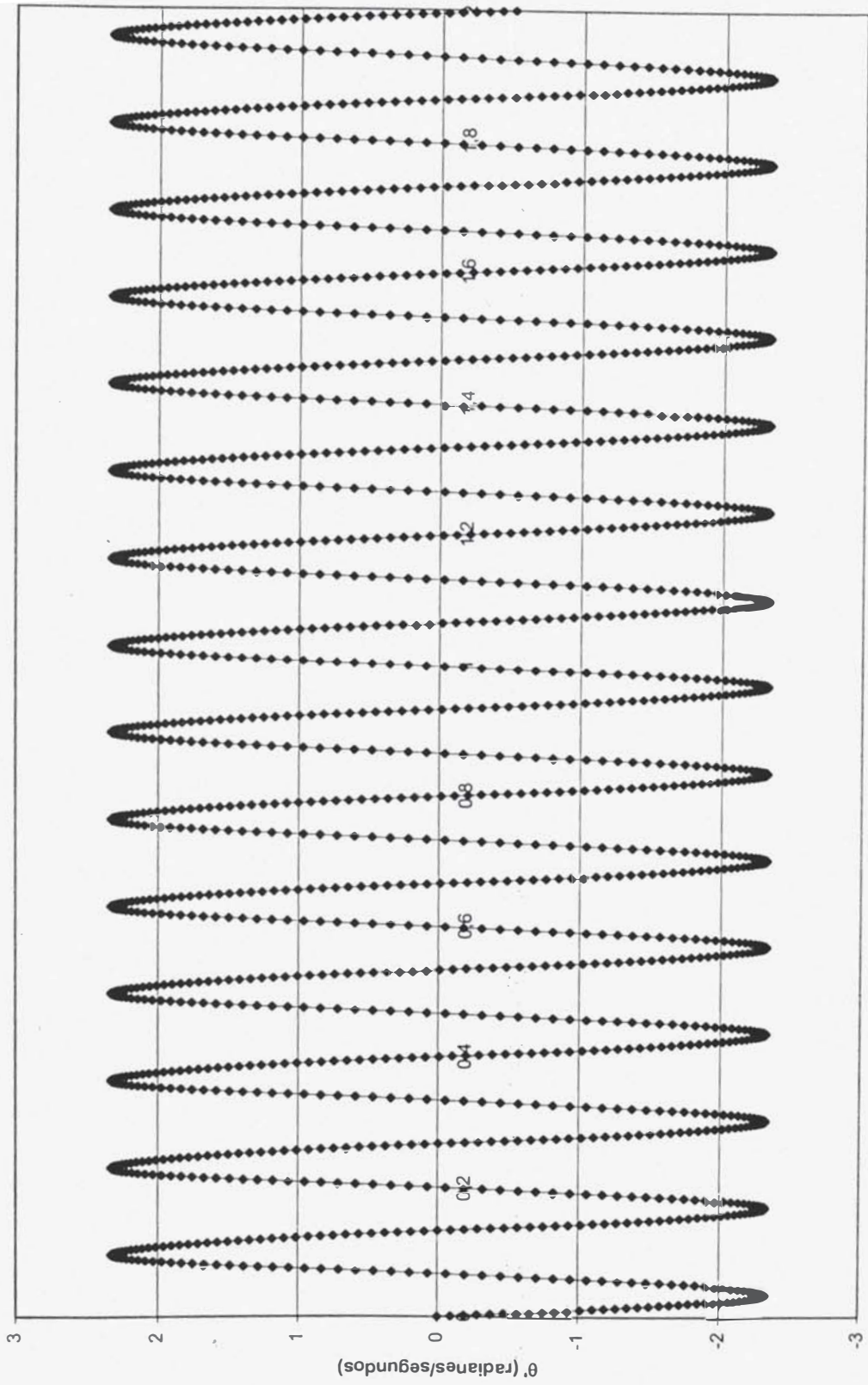




ψ vs tiempo [Grafico (1.5.46)].

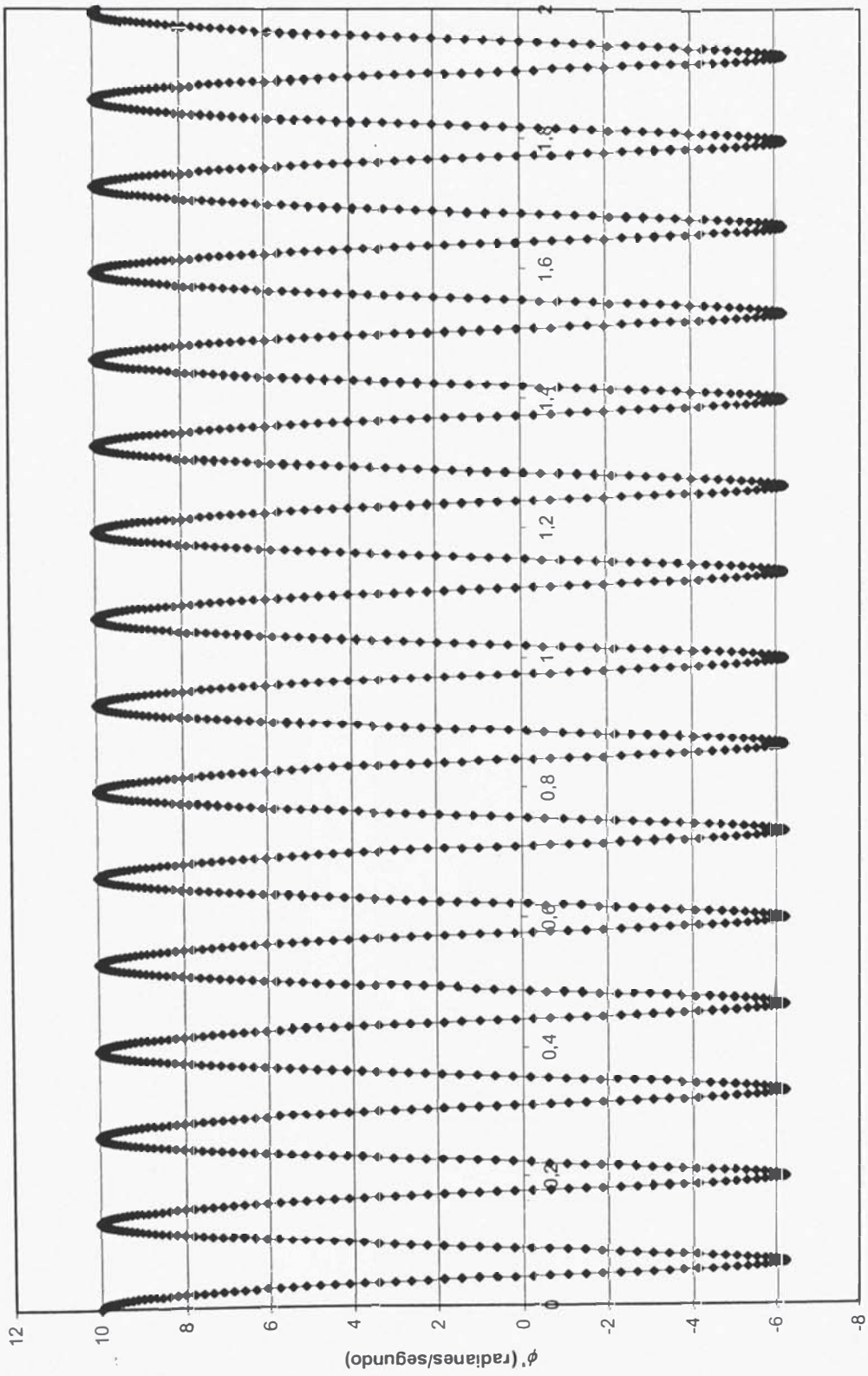


$\dot{\theta}$ vs tiempo [Grafico (1.5.47)]

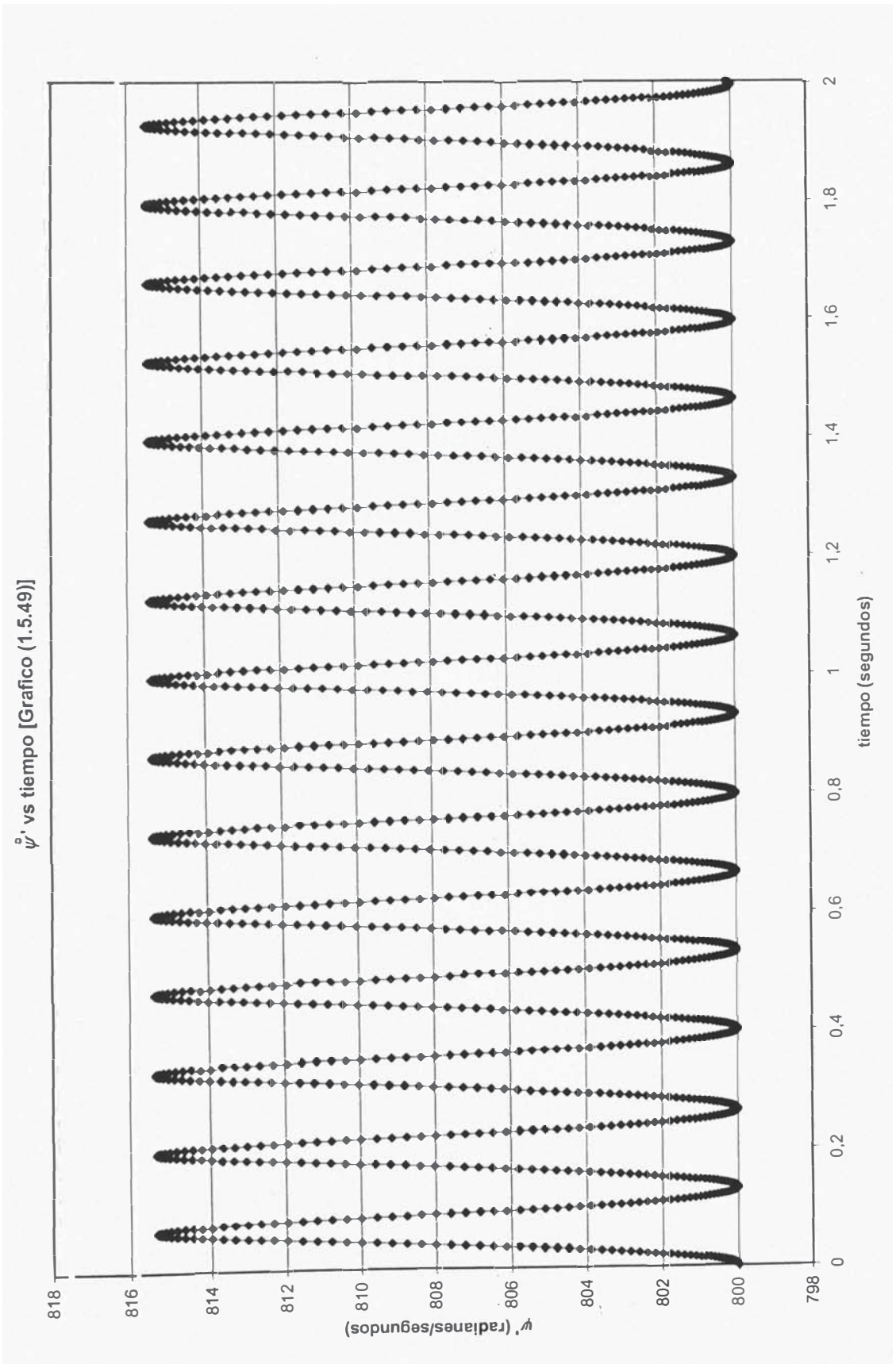


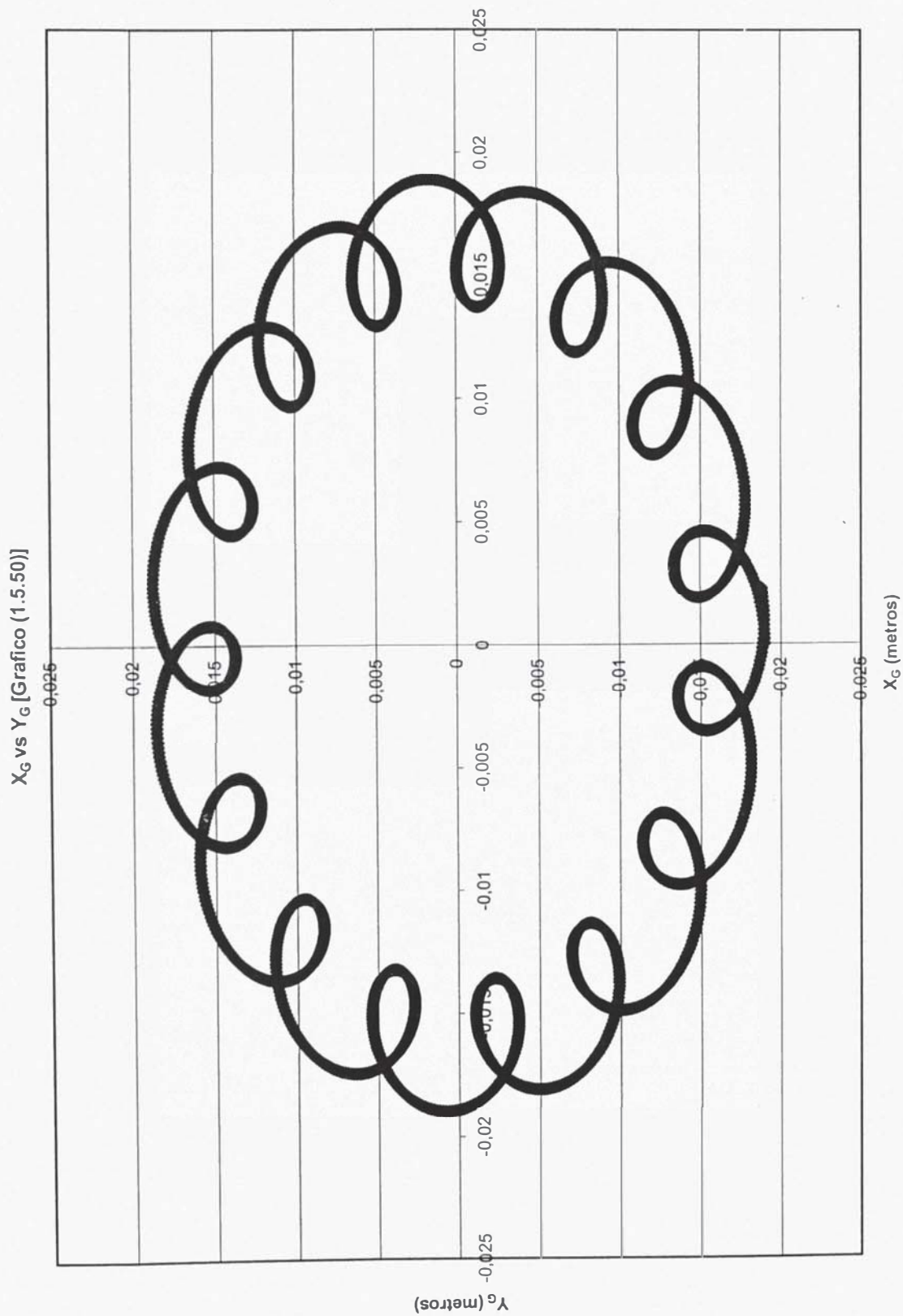
tiempo (segundos)

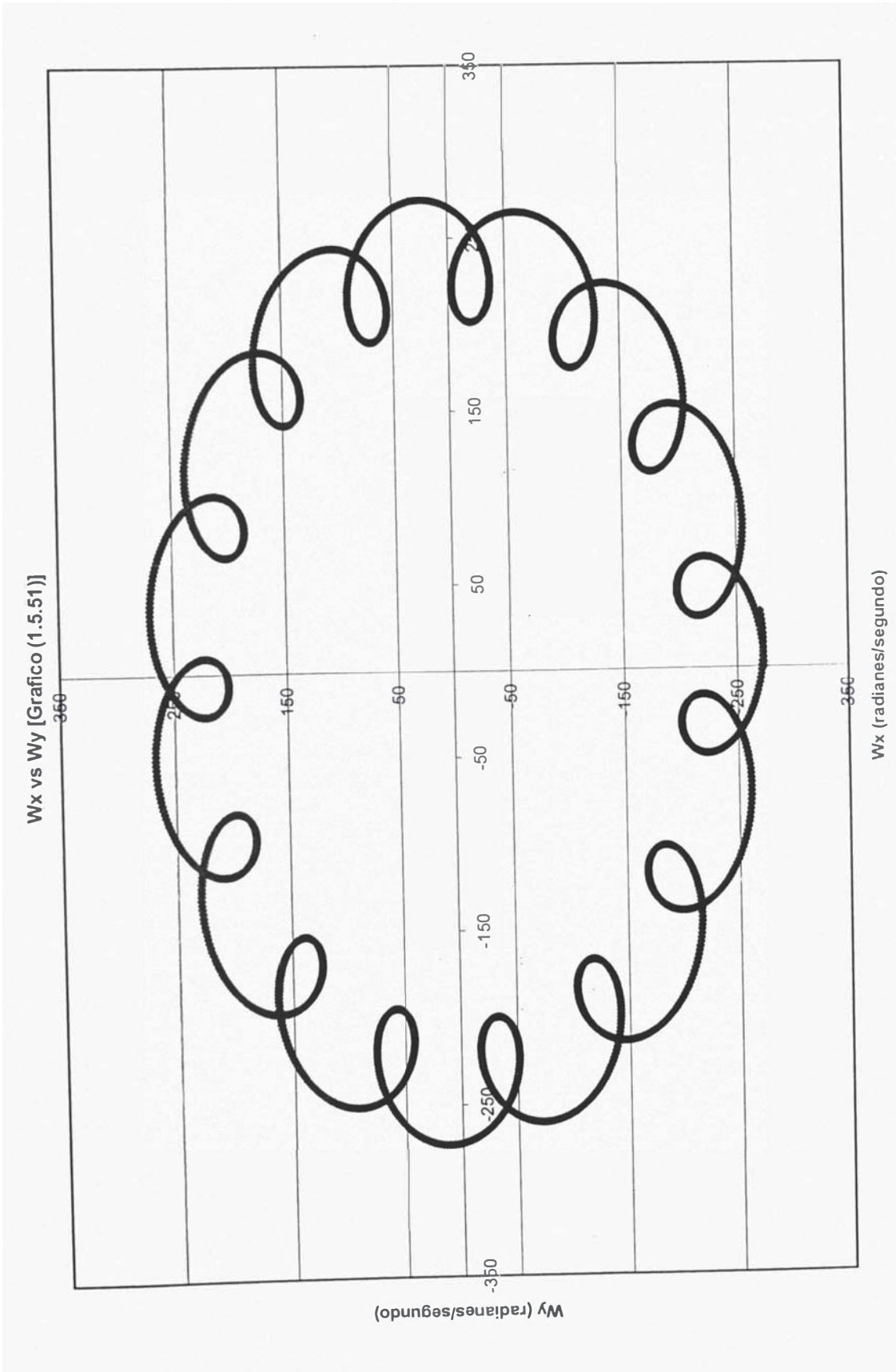
ϕ' vs tiempo [Gráfico (1.5.48)]



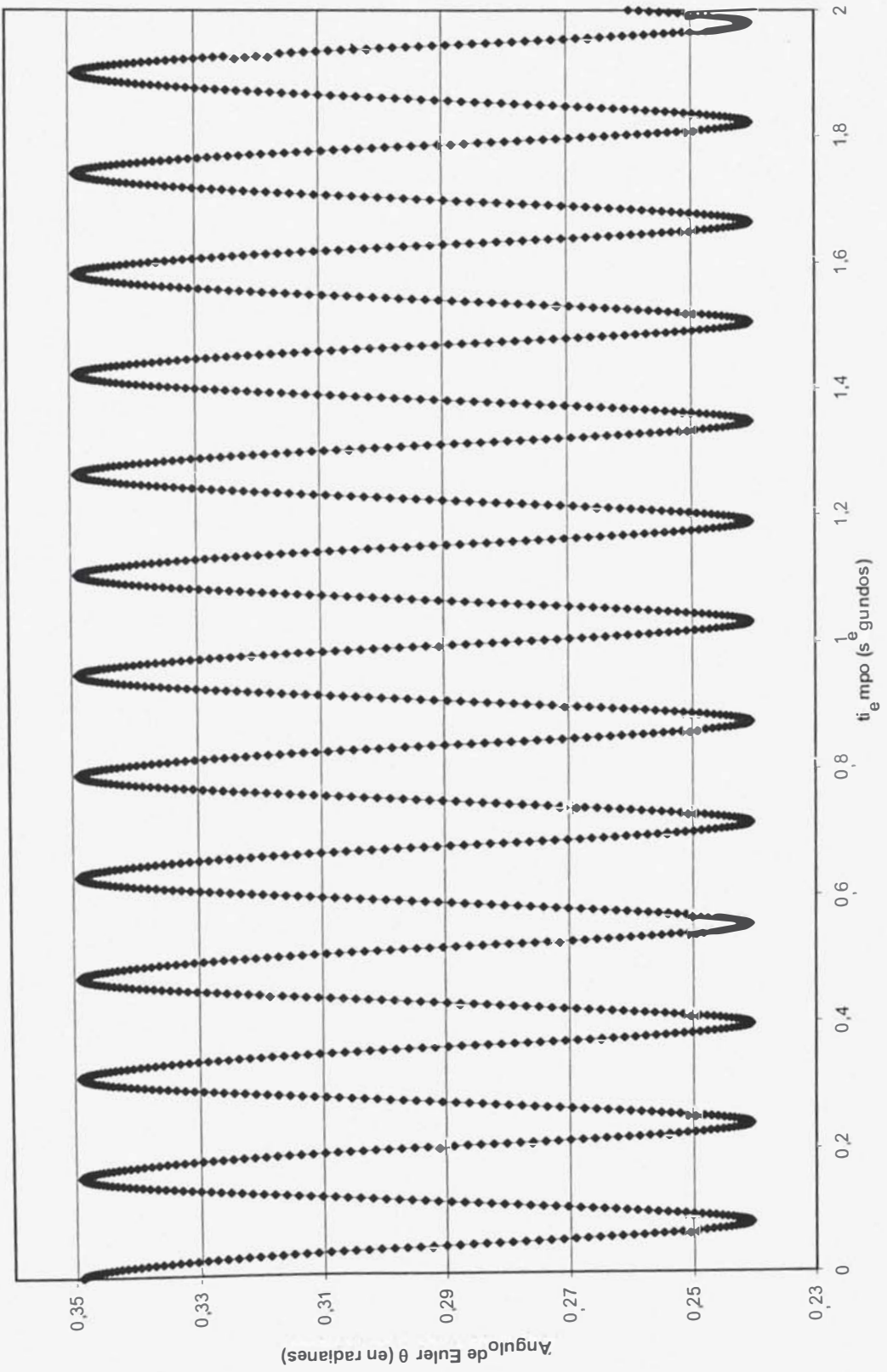
tiempo (segundos)

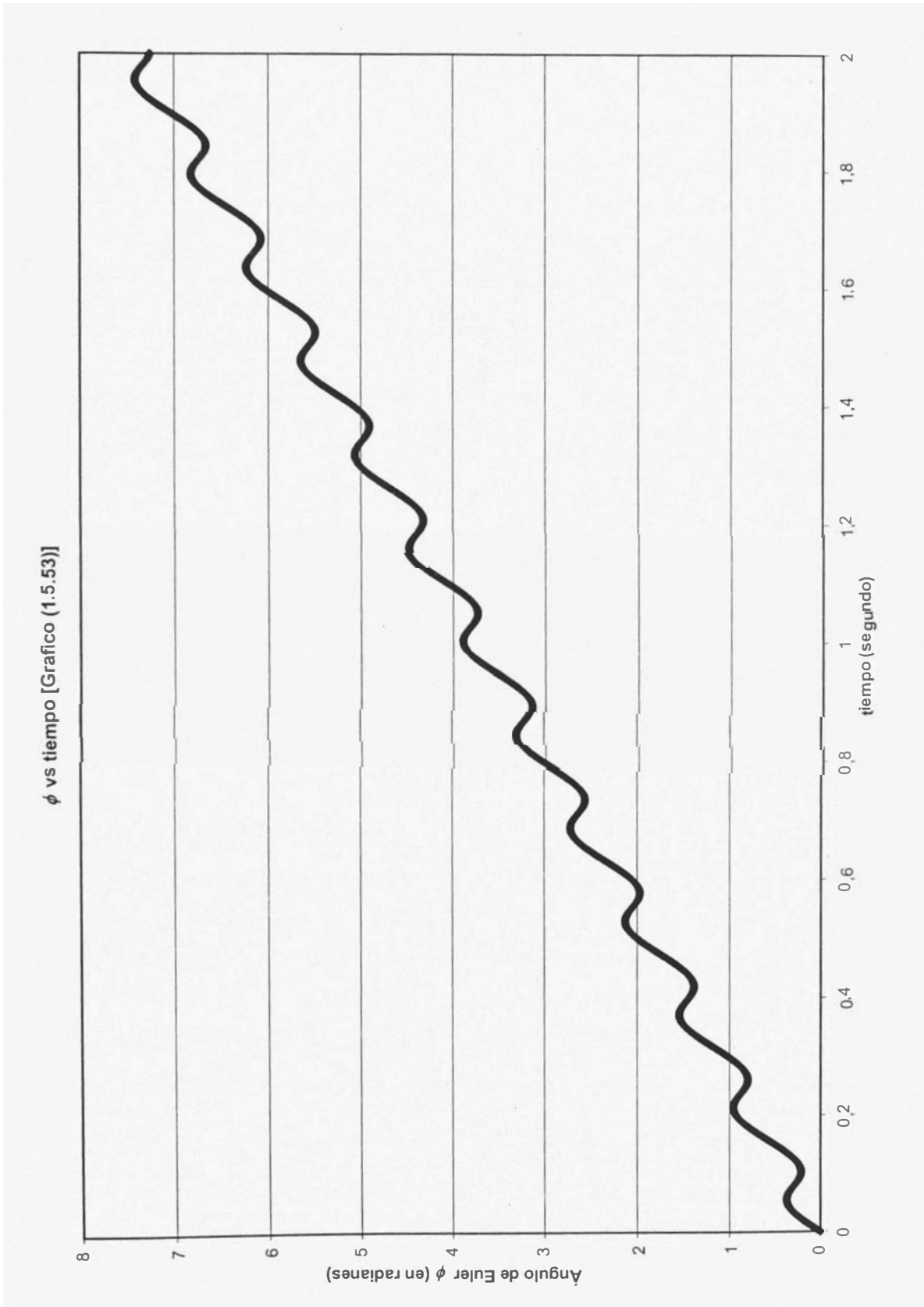




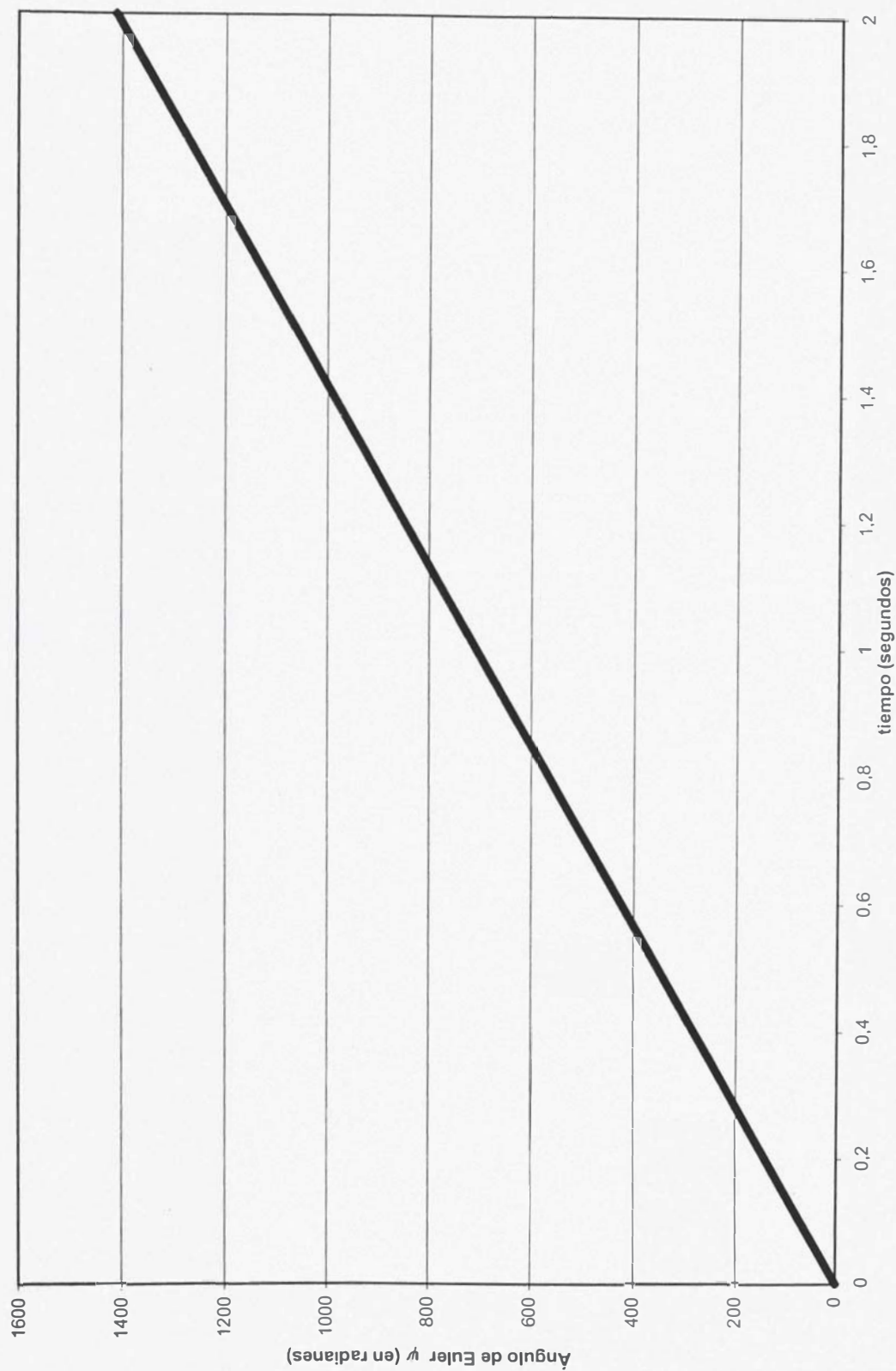


θ vs $t_{e\text{mpo}}$ [Grafico (1.5.52)]

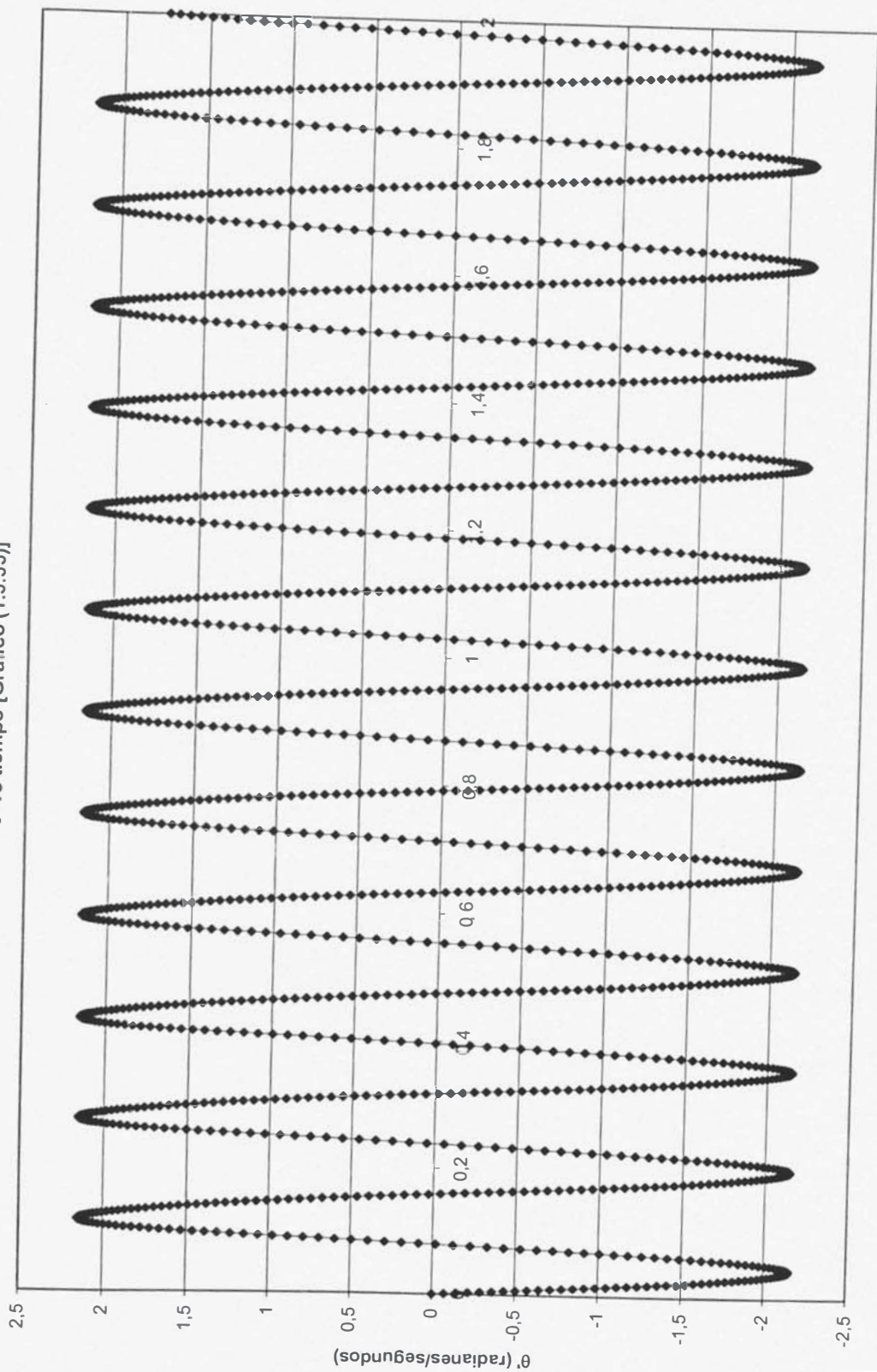




ψ vs tiempo [Gráfico (1.5.54)]

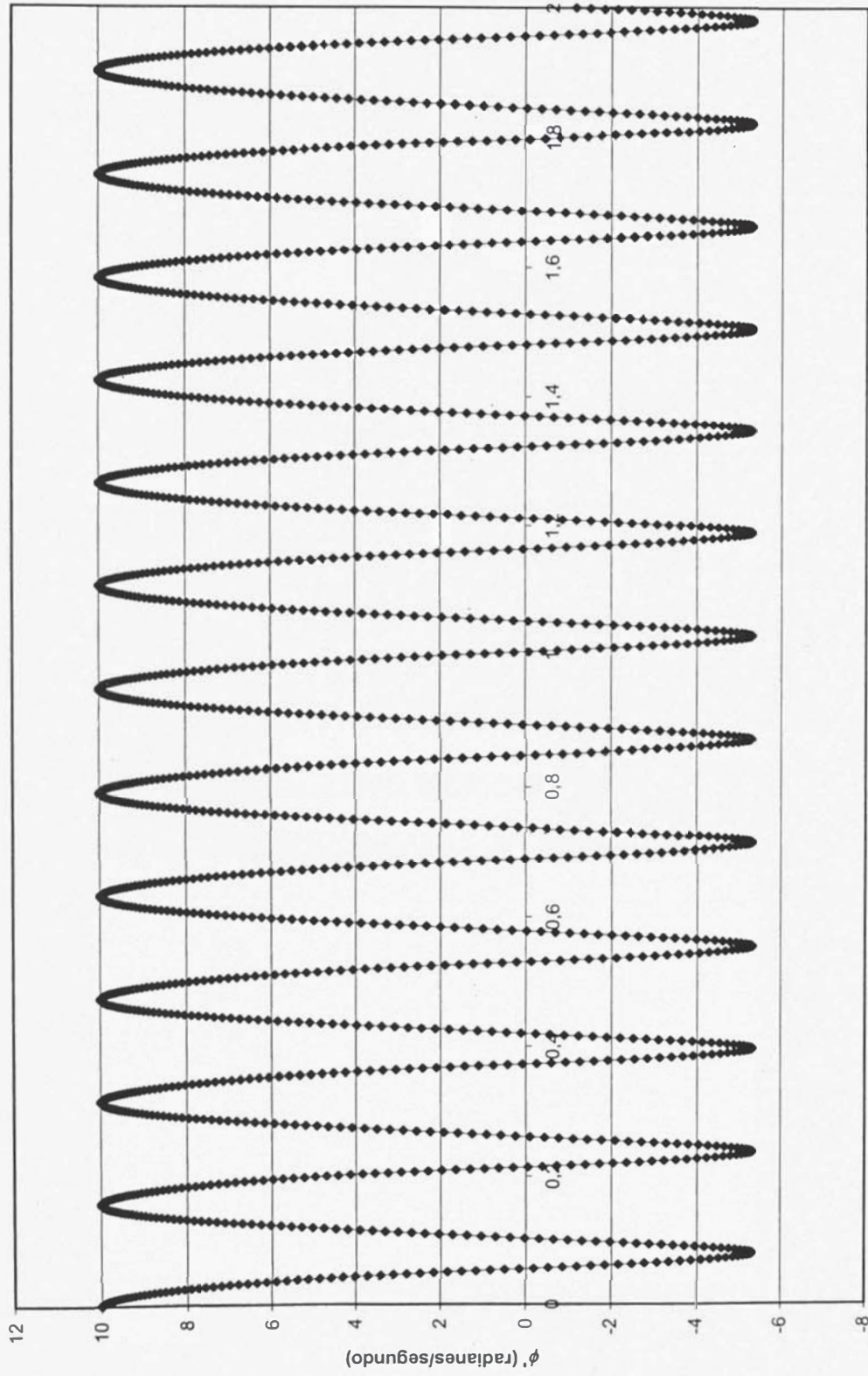


$\dot{\theta}'$ vs tiempo [Grafico (1.5.55)]

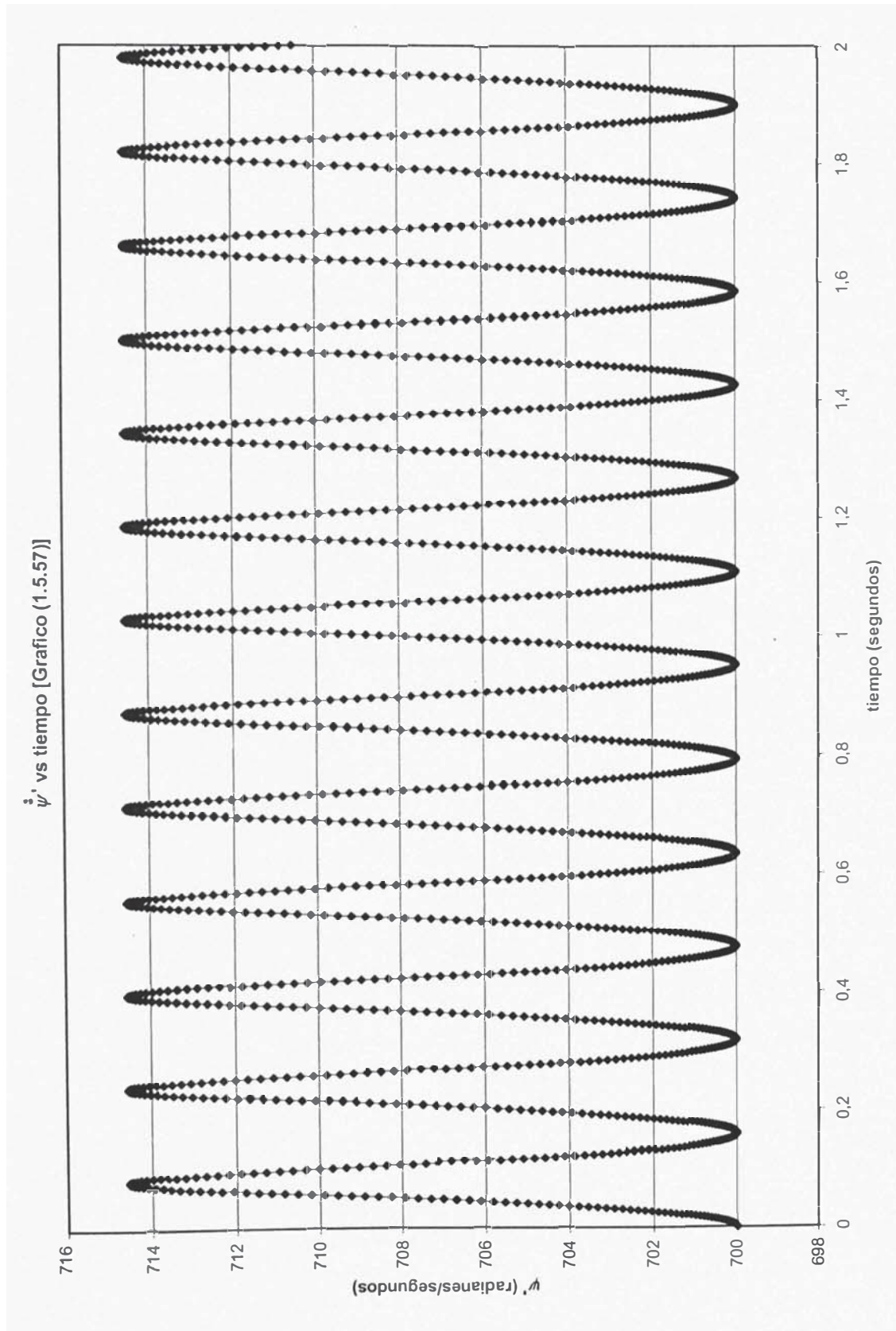


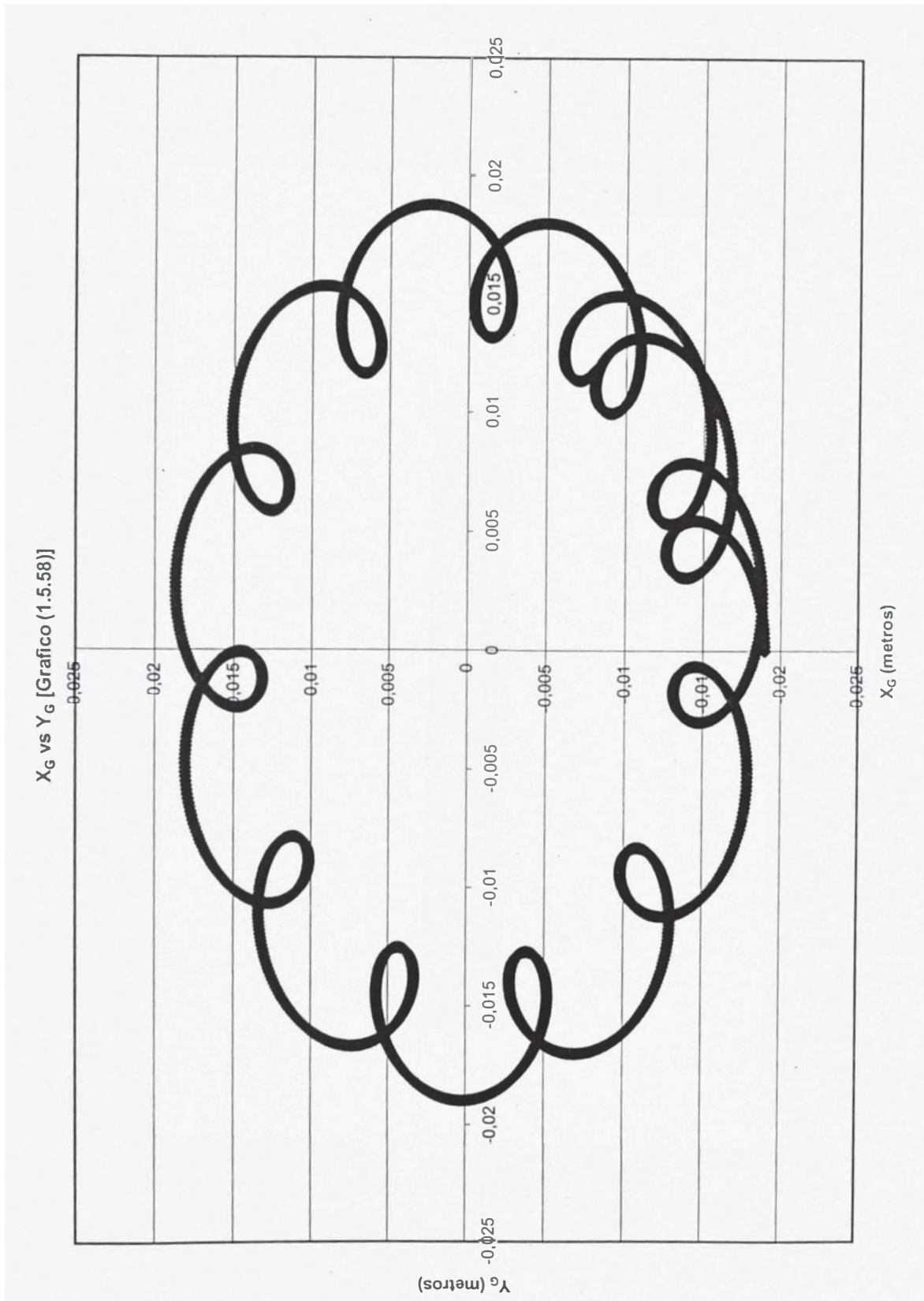
tiempo (segundos)

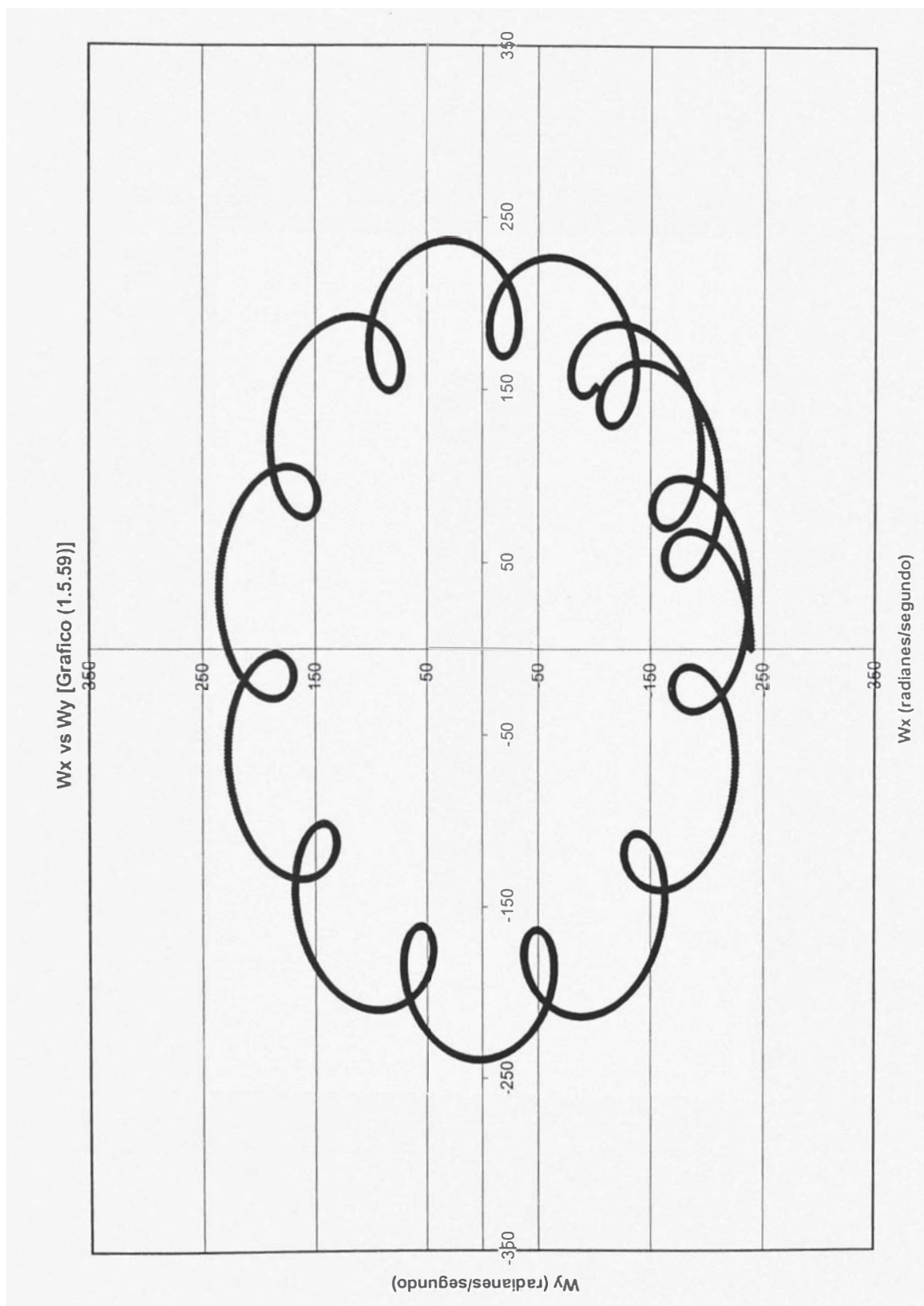
ϕ' vs tiempo [Gráfico (1.5.56)]



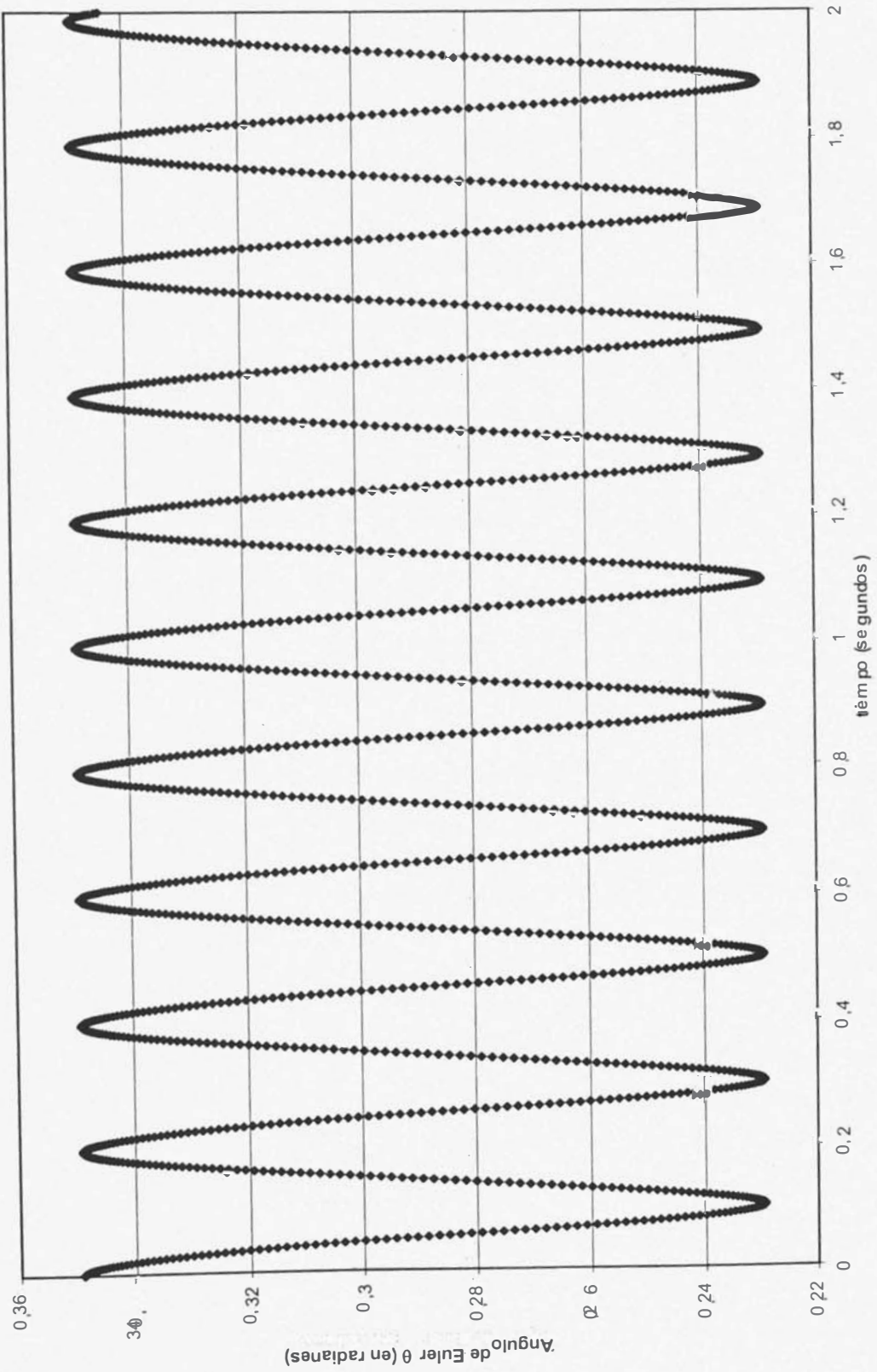
tiempo (segundos)

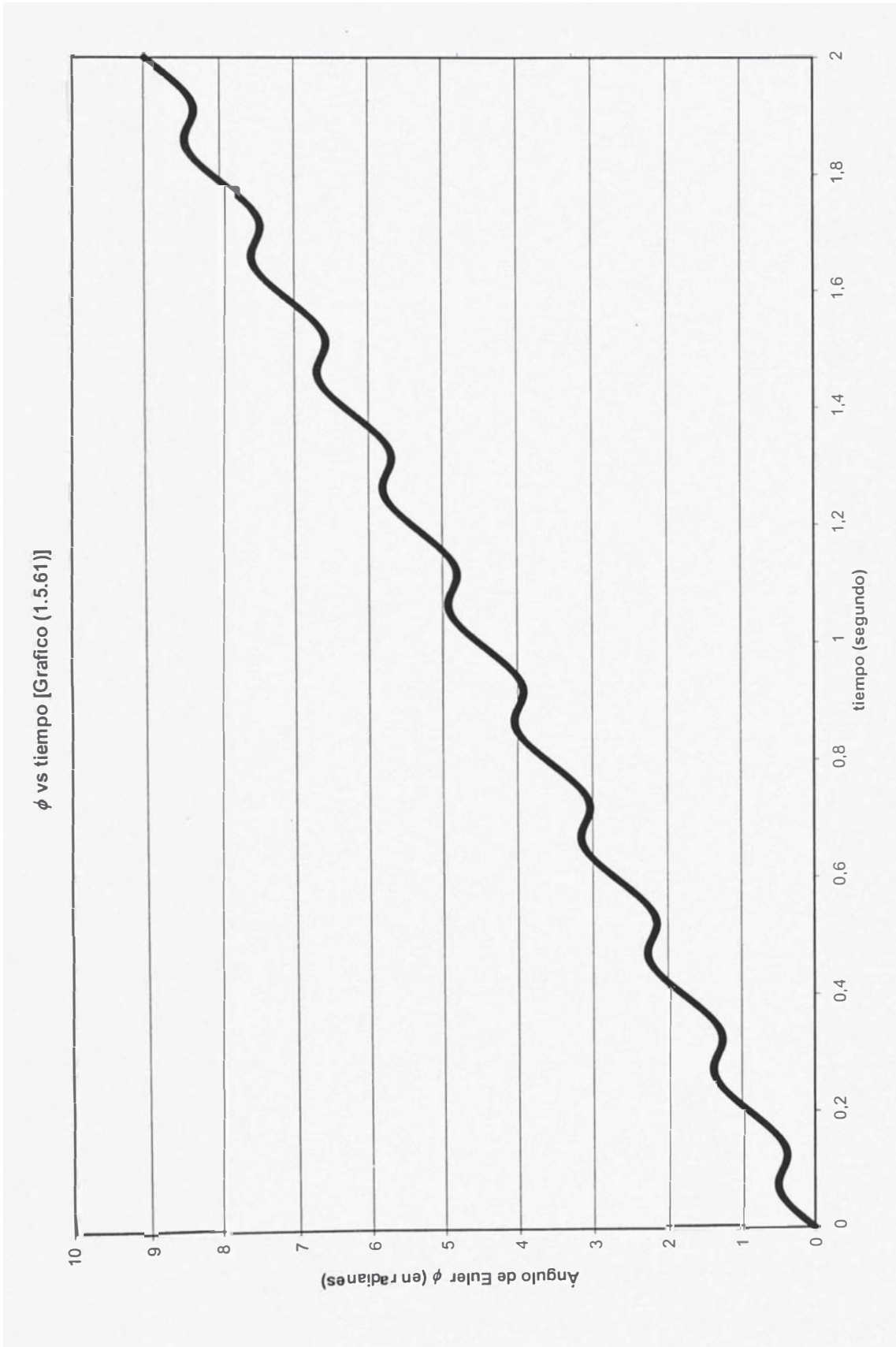


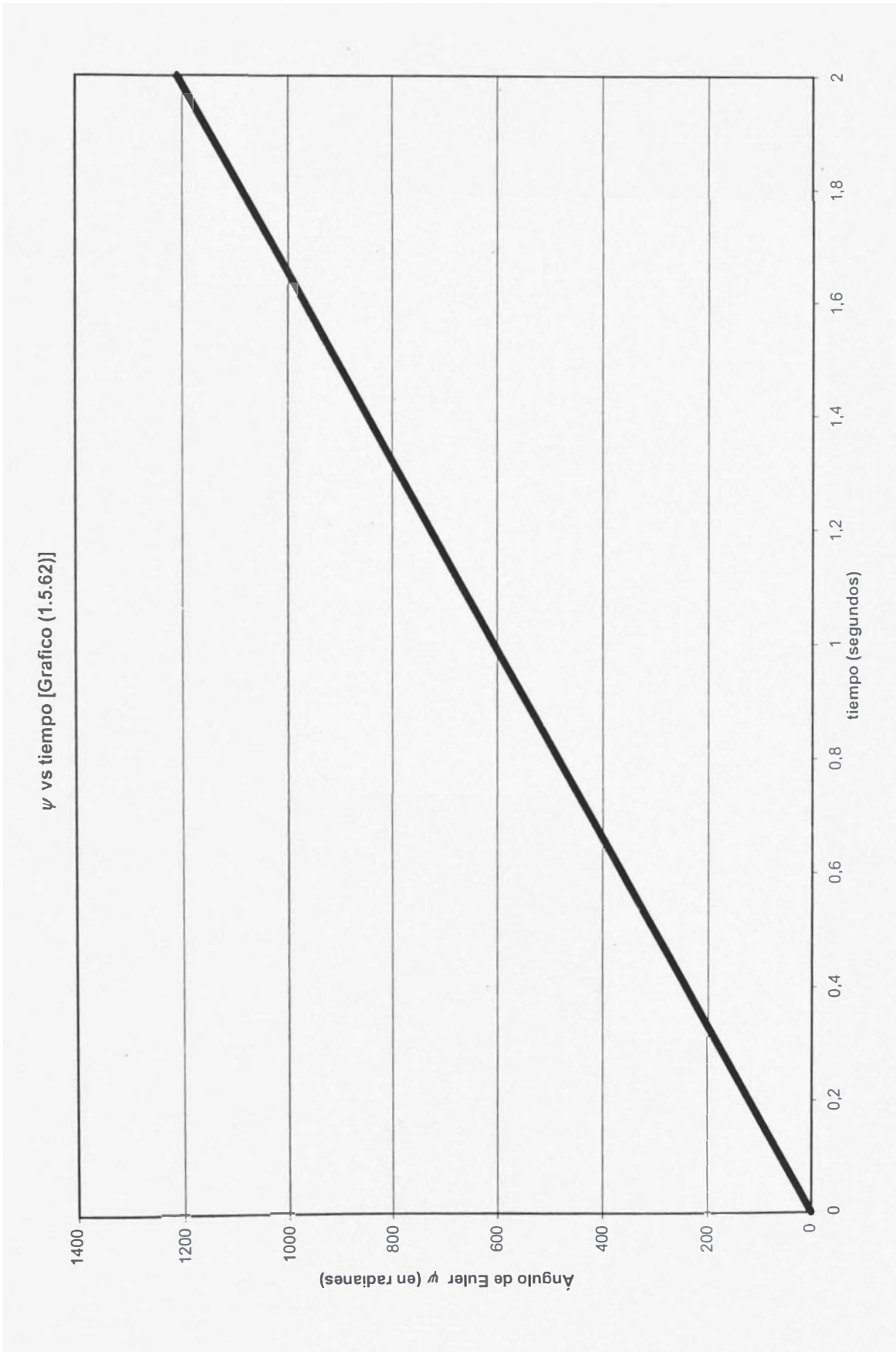


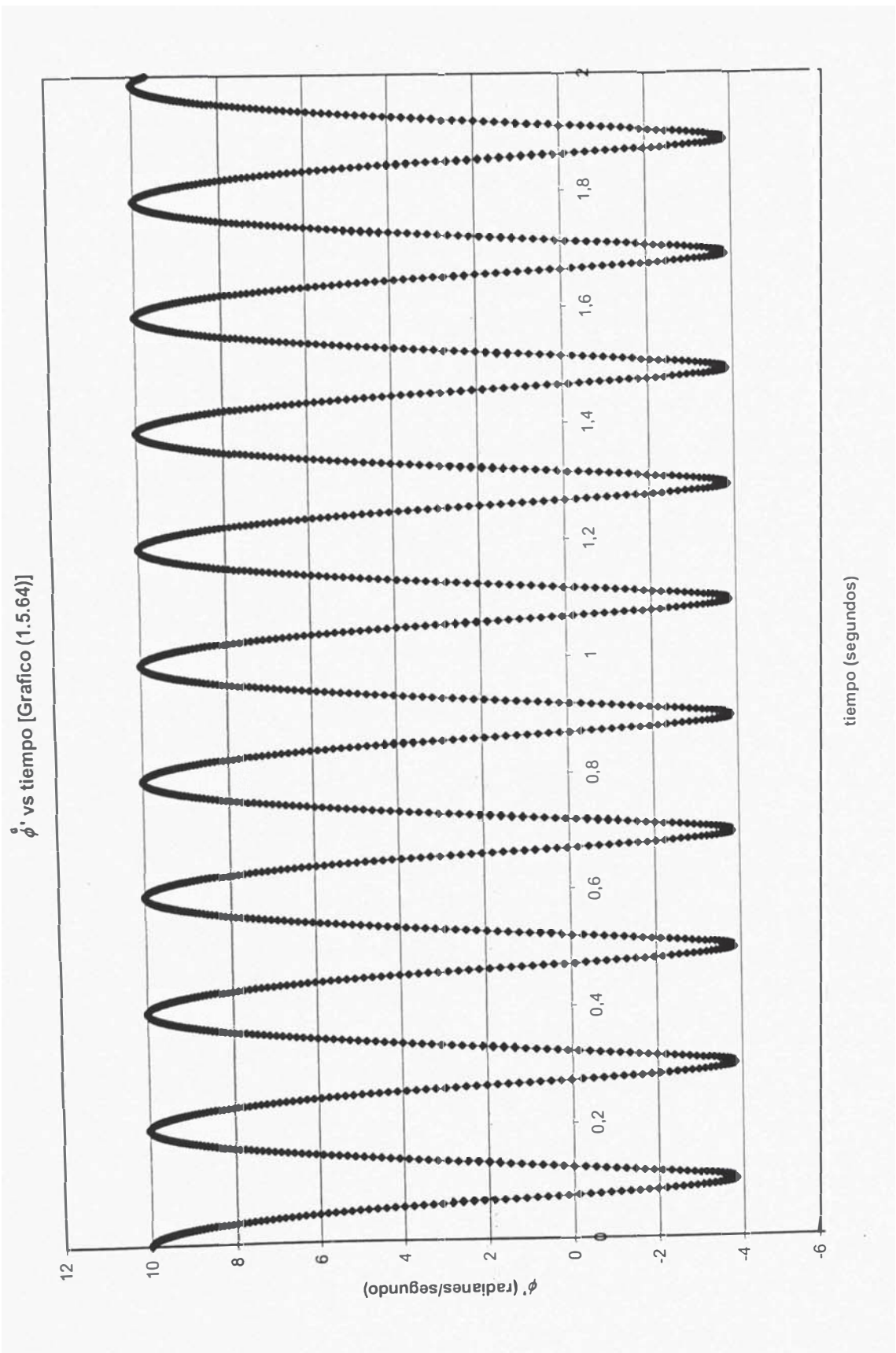


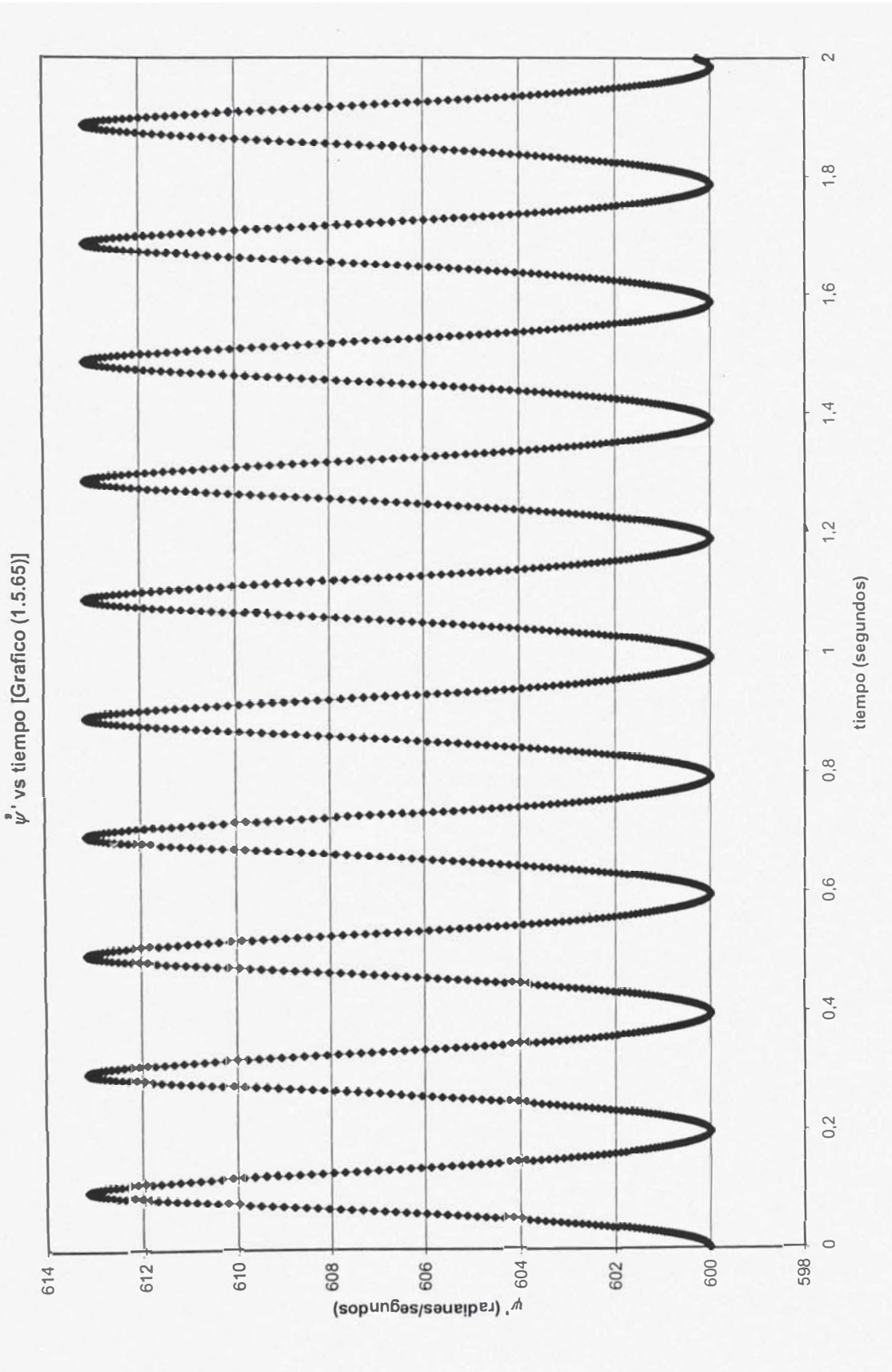
θ vs tiempo [Grafico (1.5.60)]



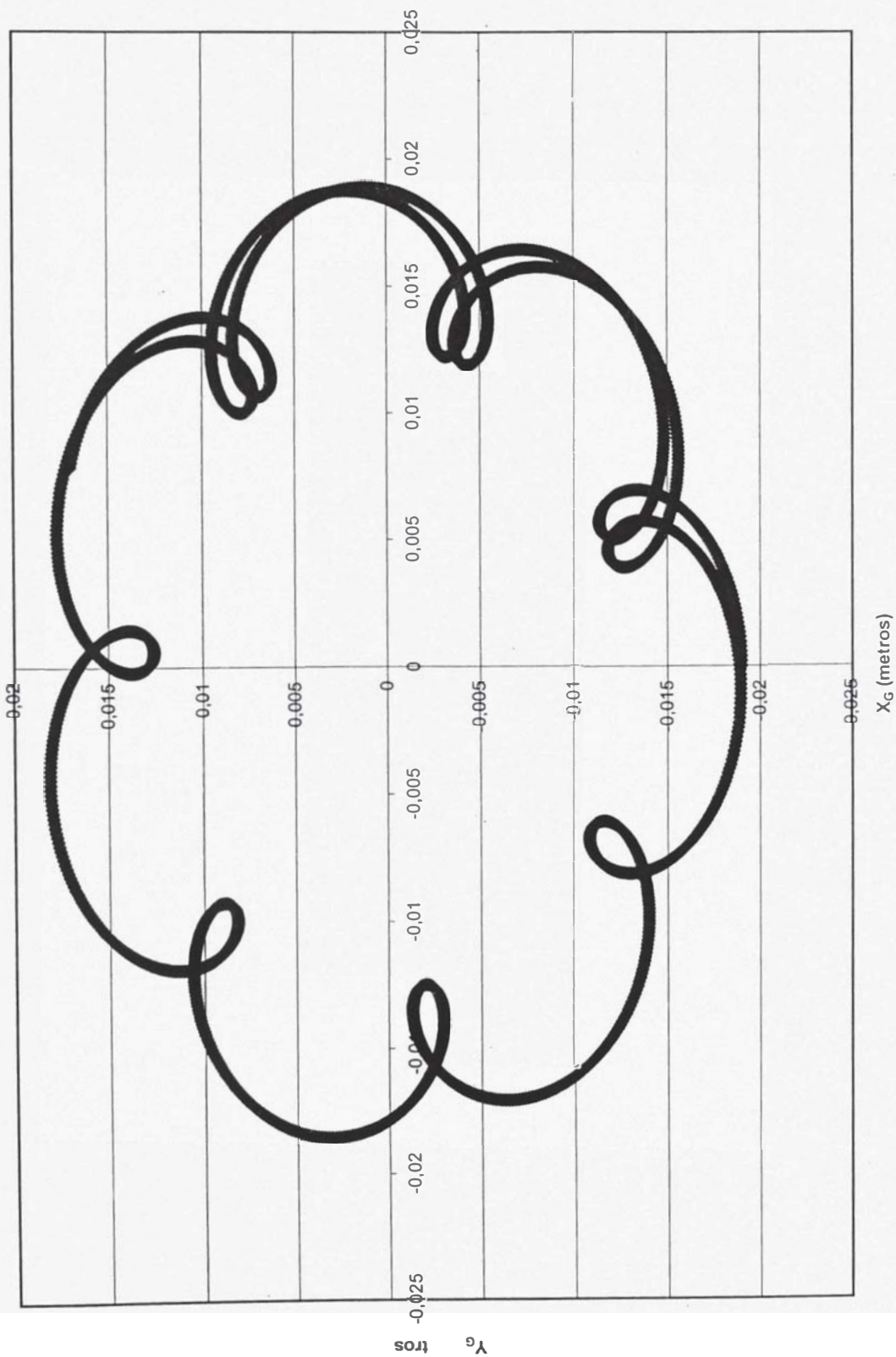


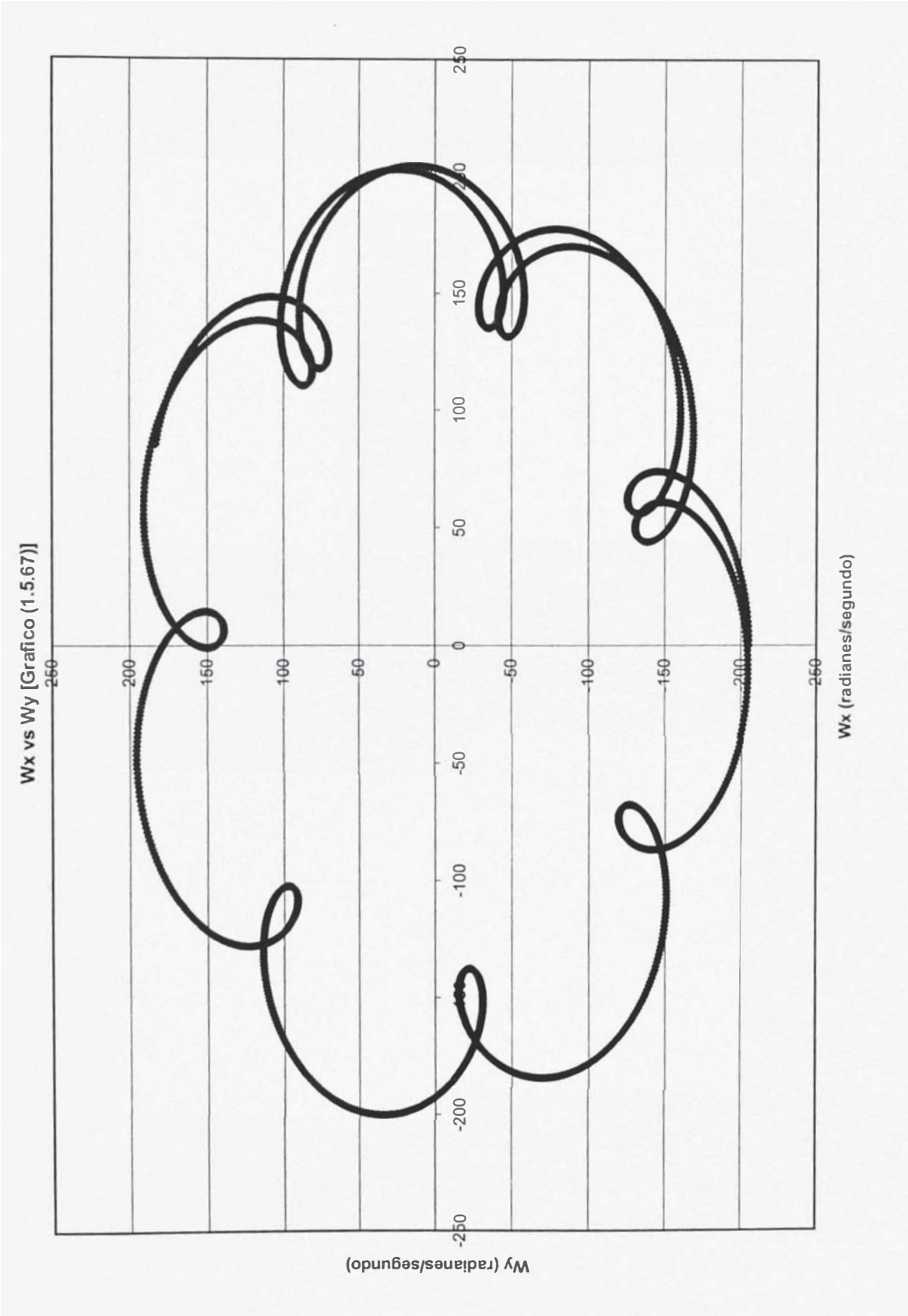




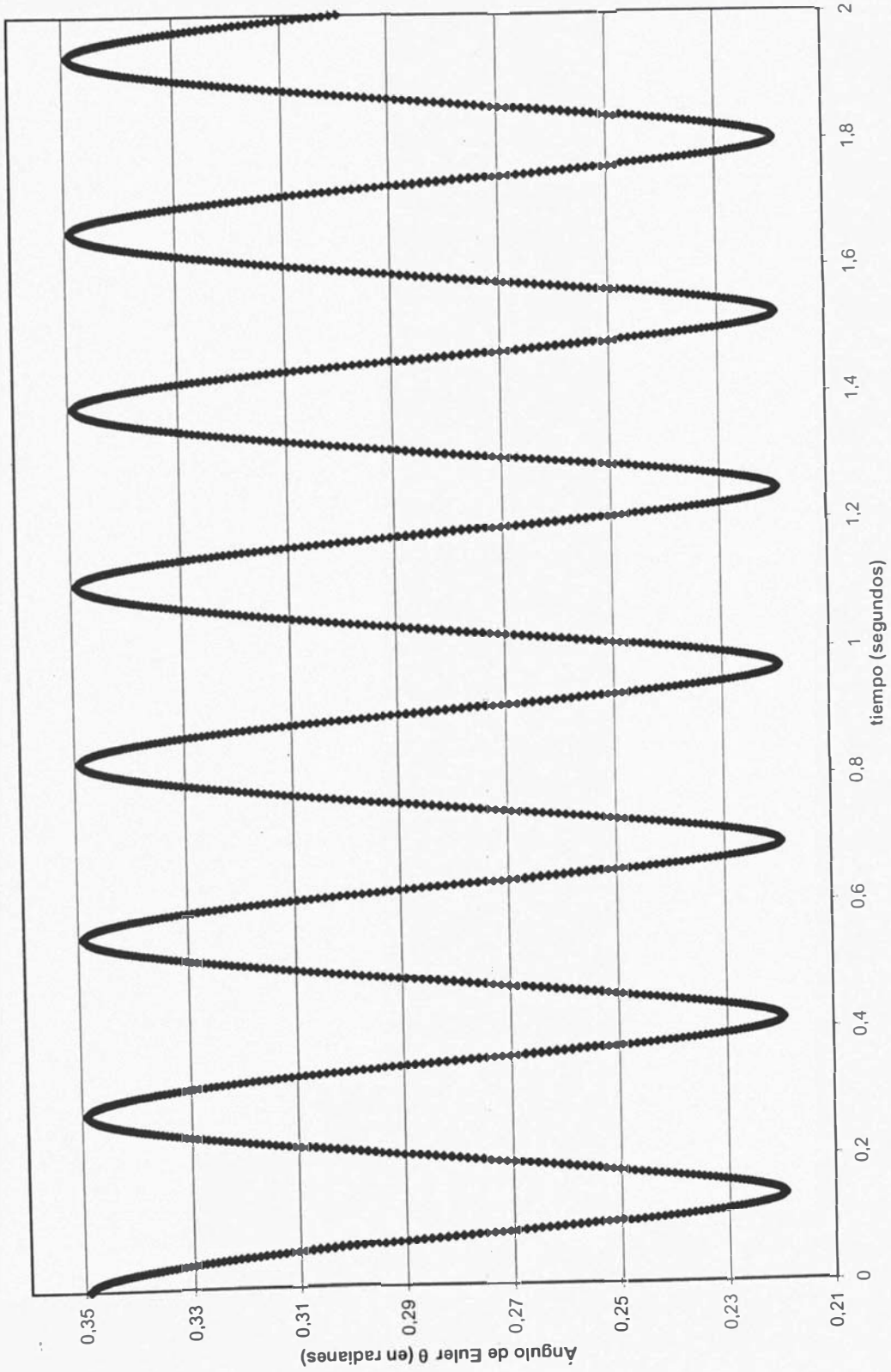


X_G vs Y_G [Grafico (1.5.66)]

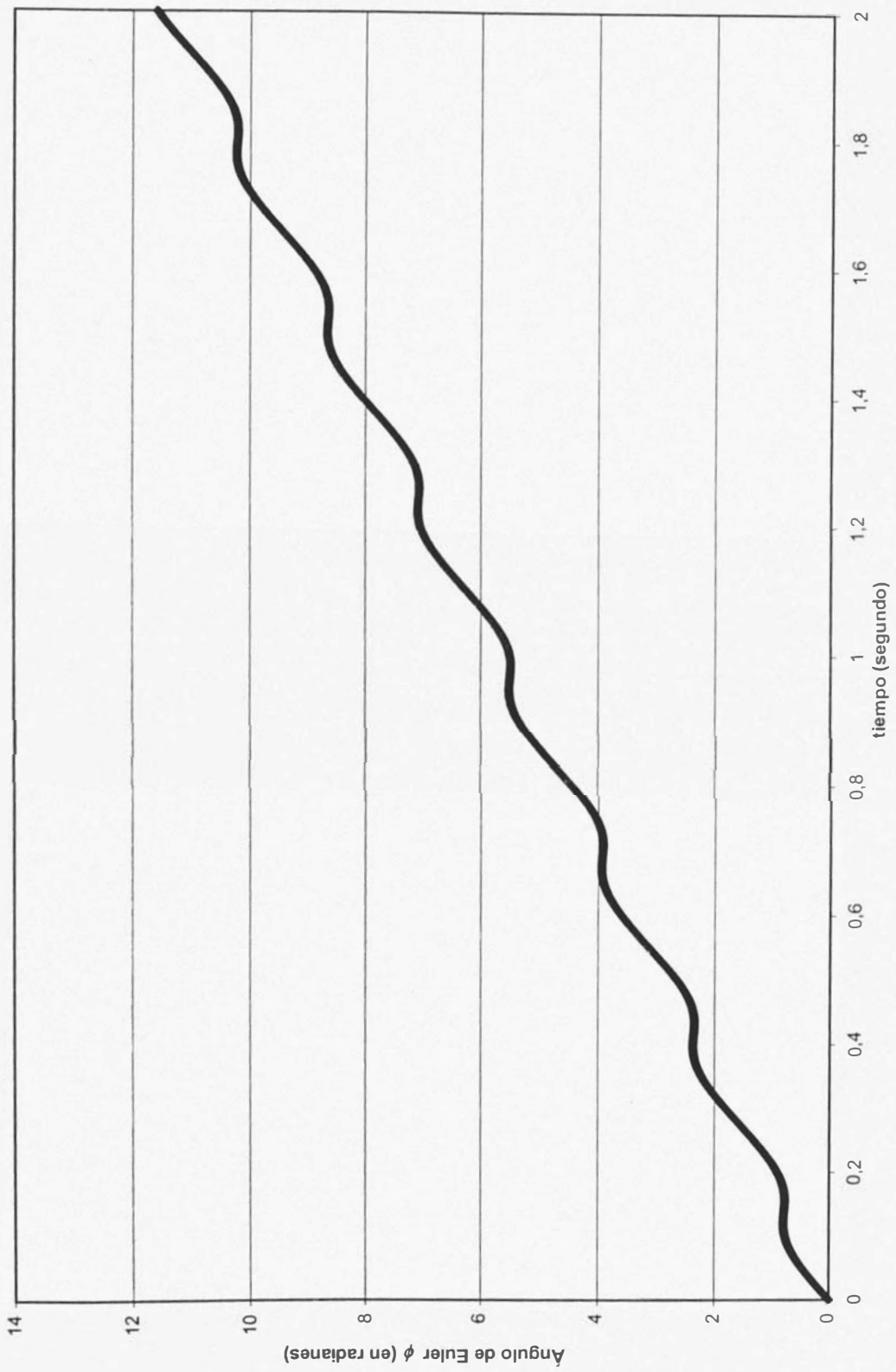




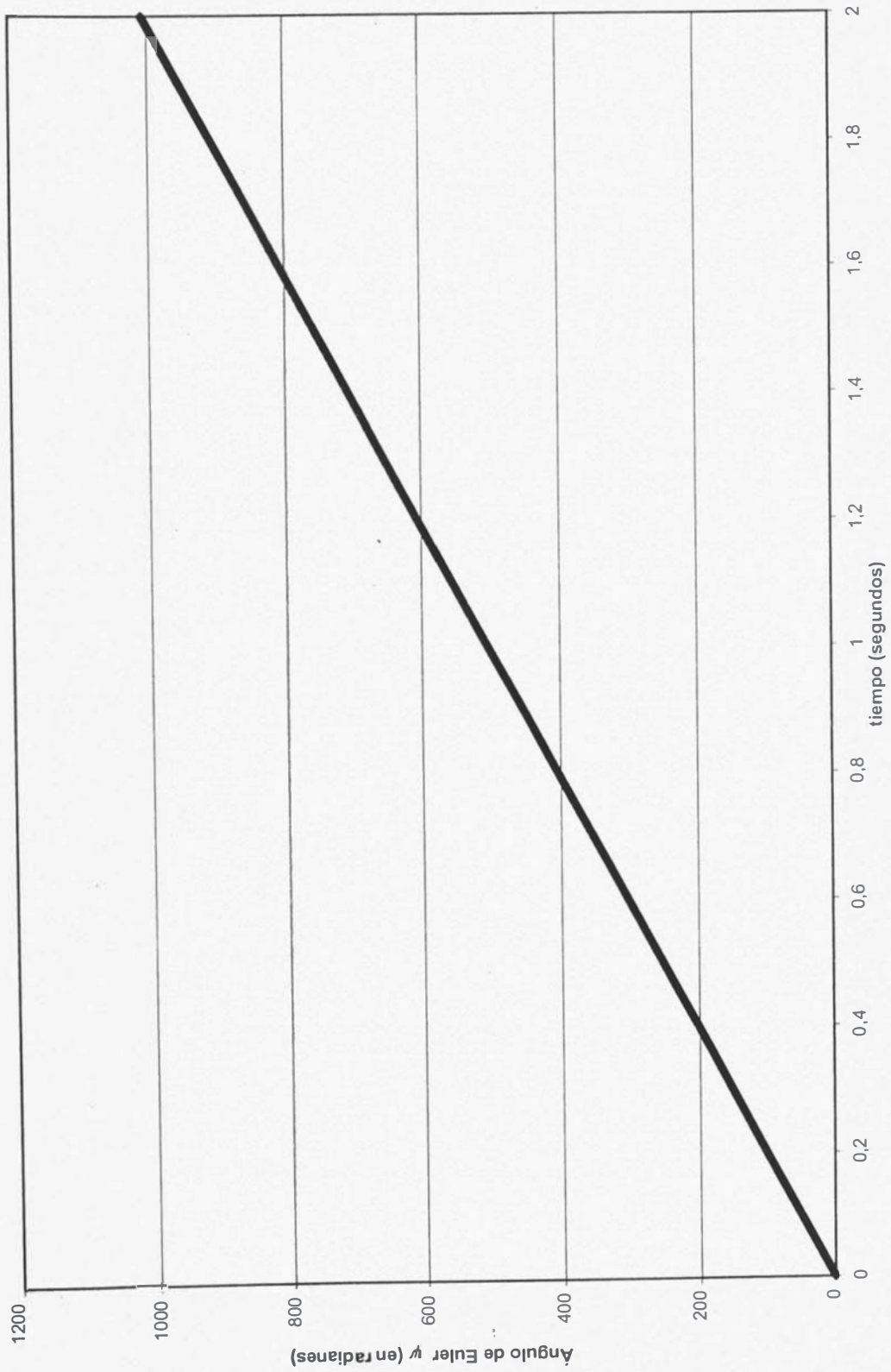
θ vs tiempo [Grafico (1.5.68)]



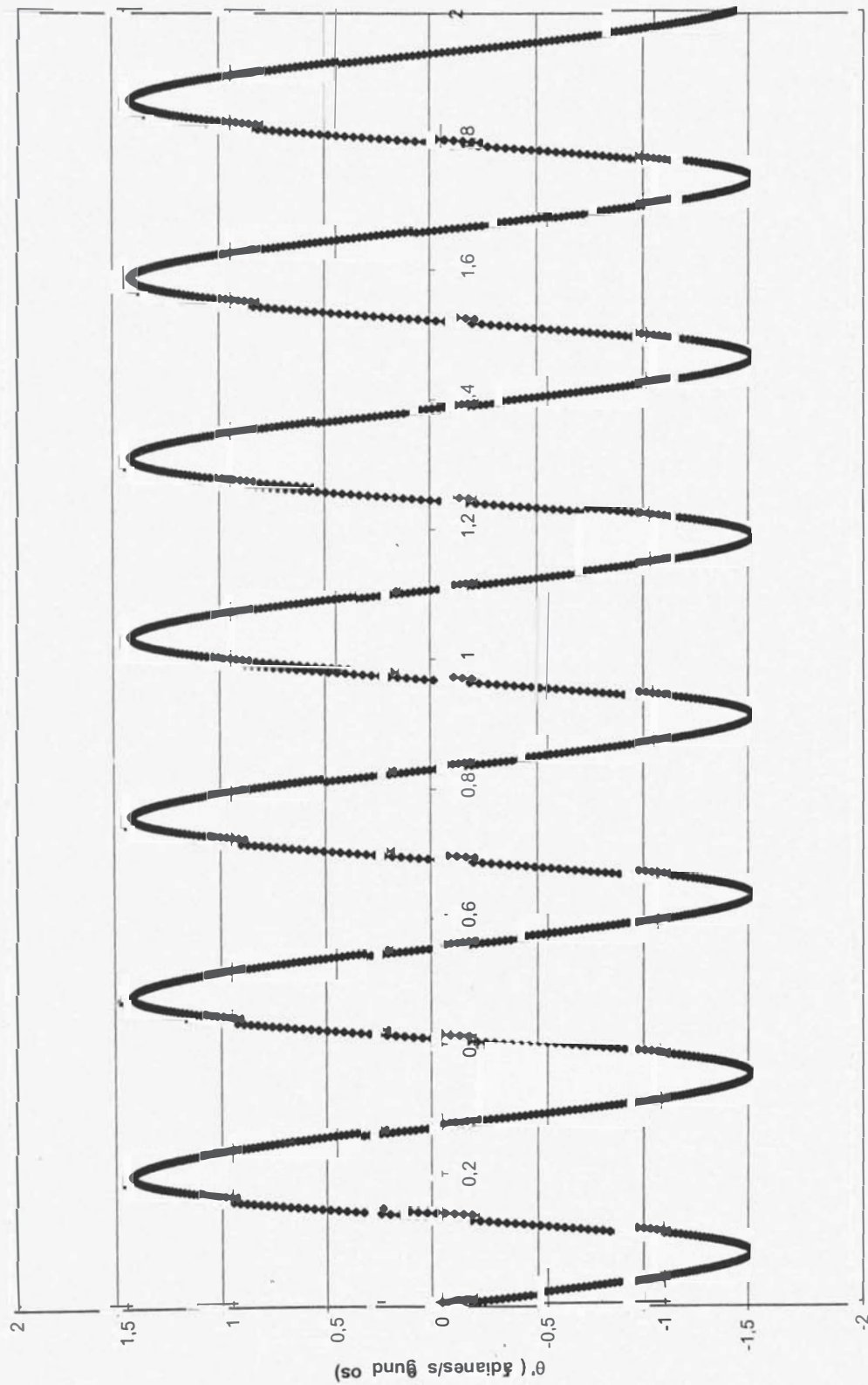
ϕ vs tiempo [Grafico (1.5.69)]



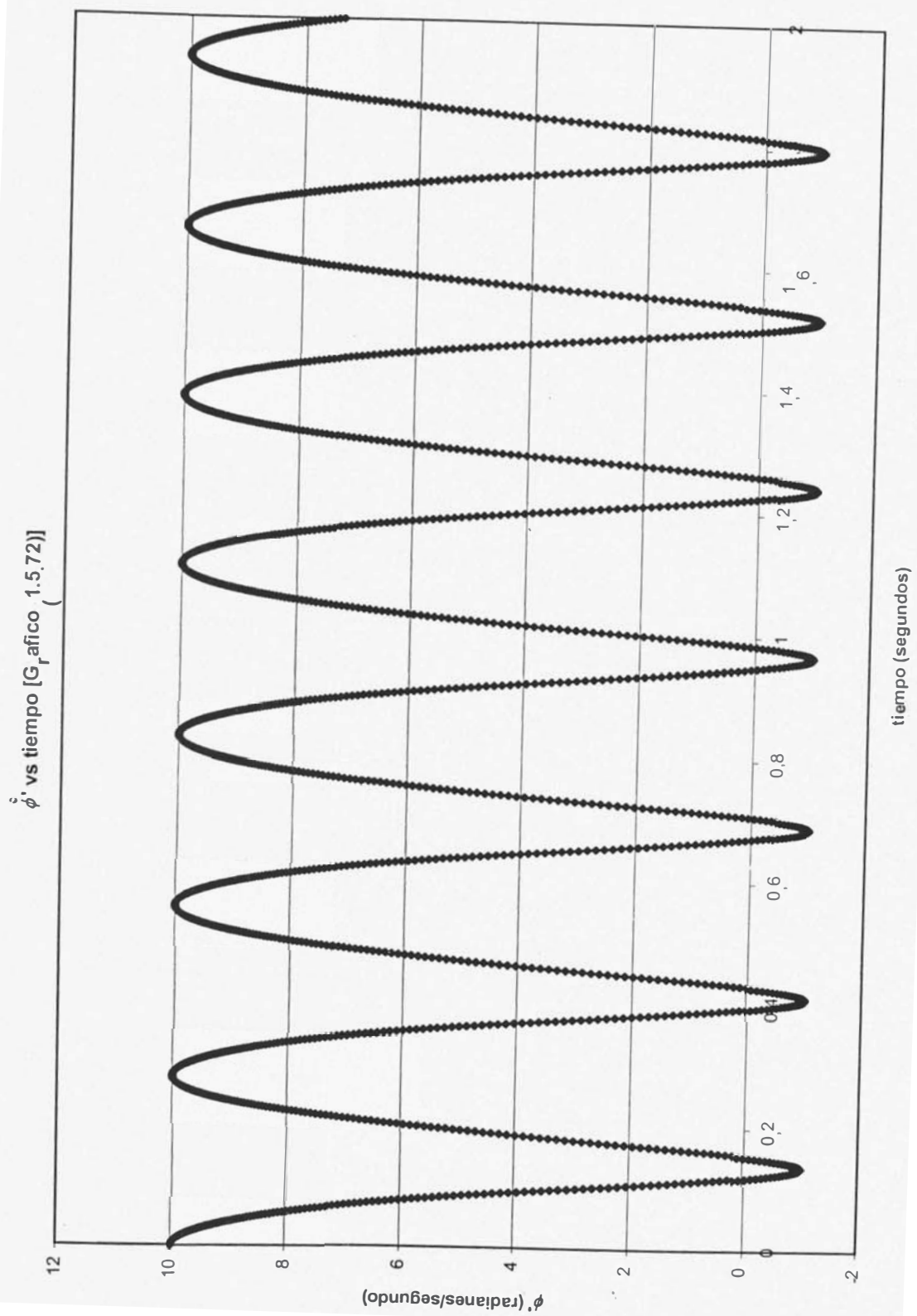
ψ vs tiempo [Grafico (1.5.70)]



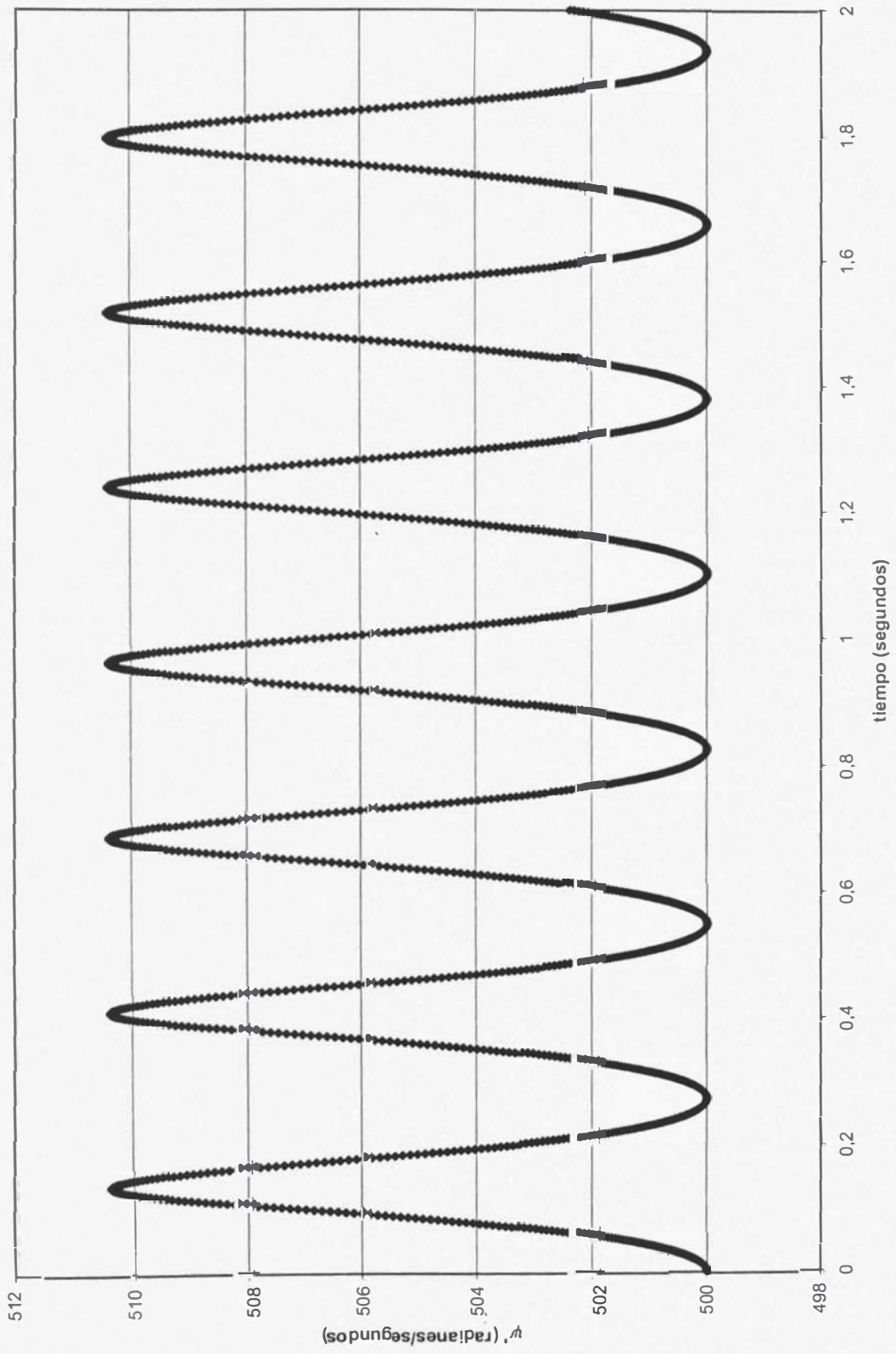
$\dot{\theta}$ vs tiempo [Grafico (1.5.71)]



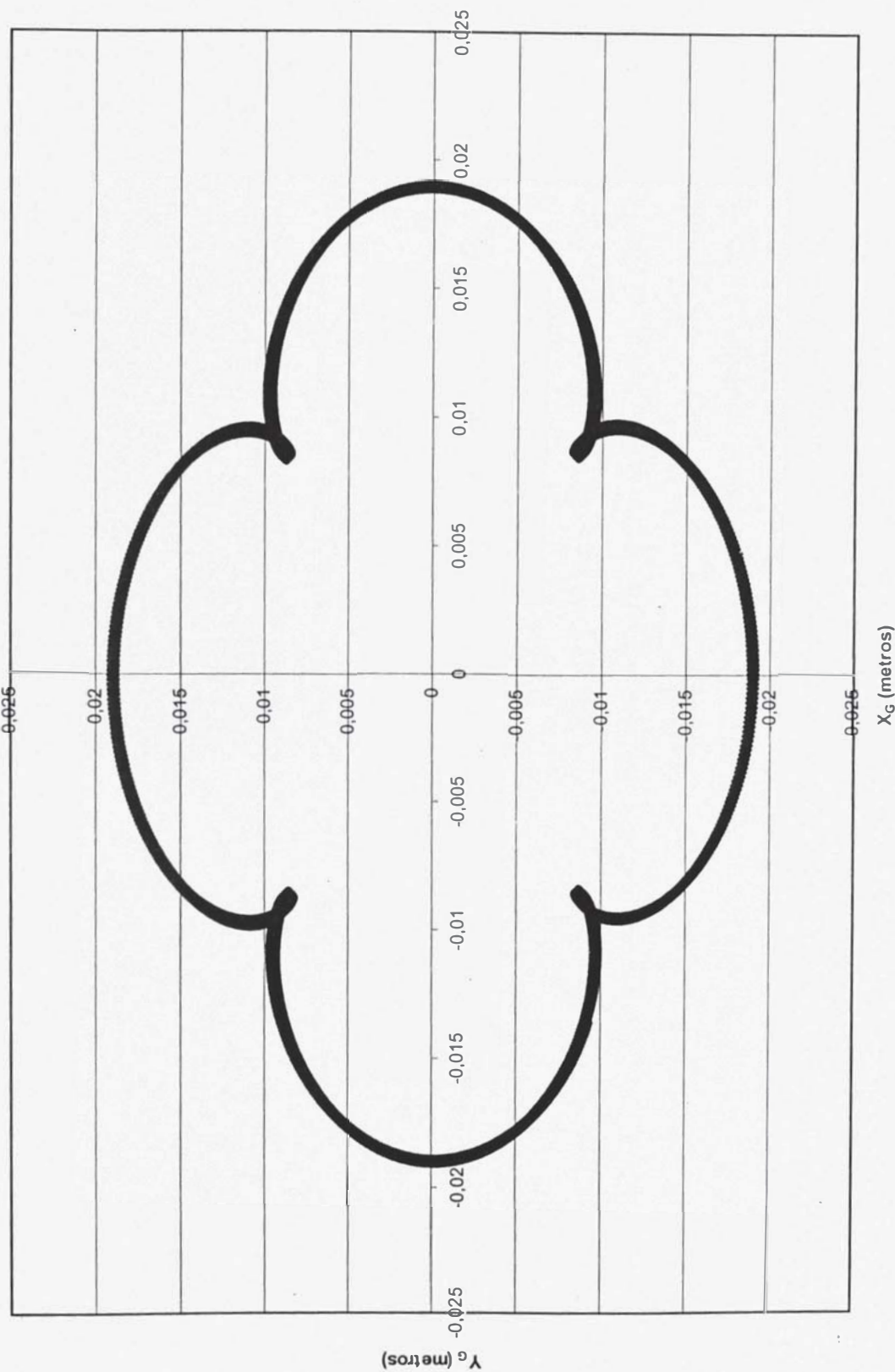
tiempo (segundos)

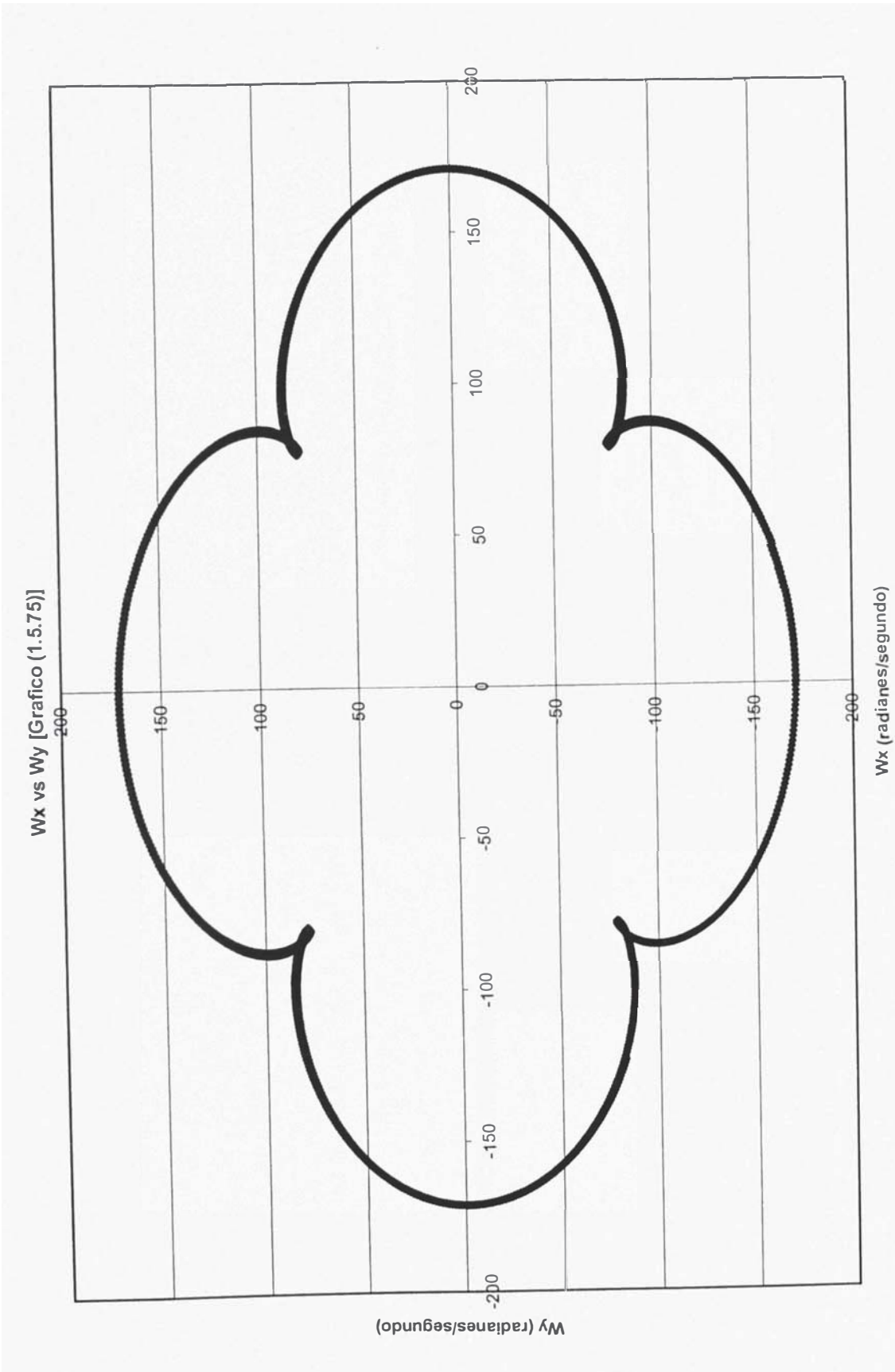


$\dot{\psi}'$ vs tiempo [Gráfico (1.5.73)]

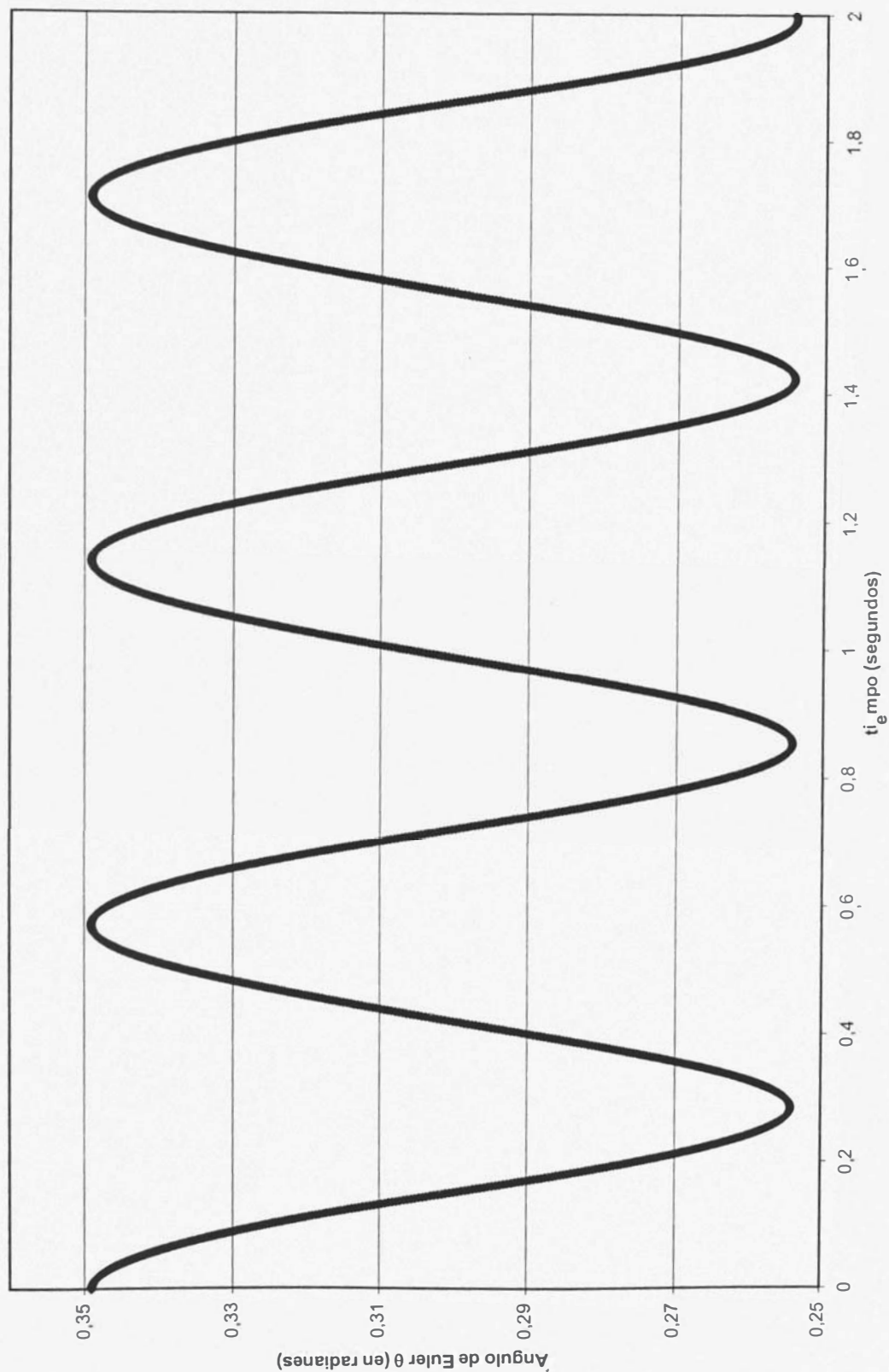


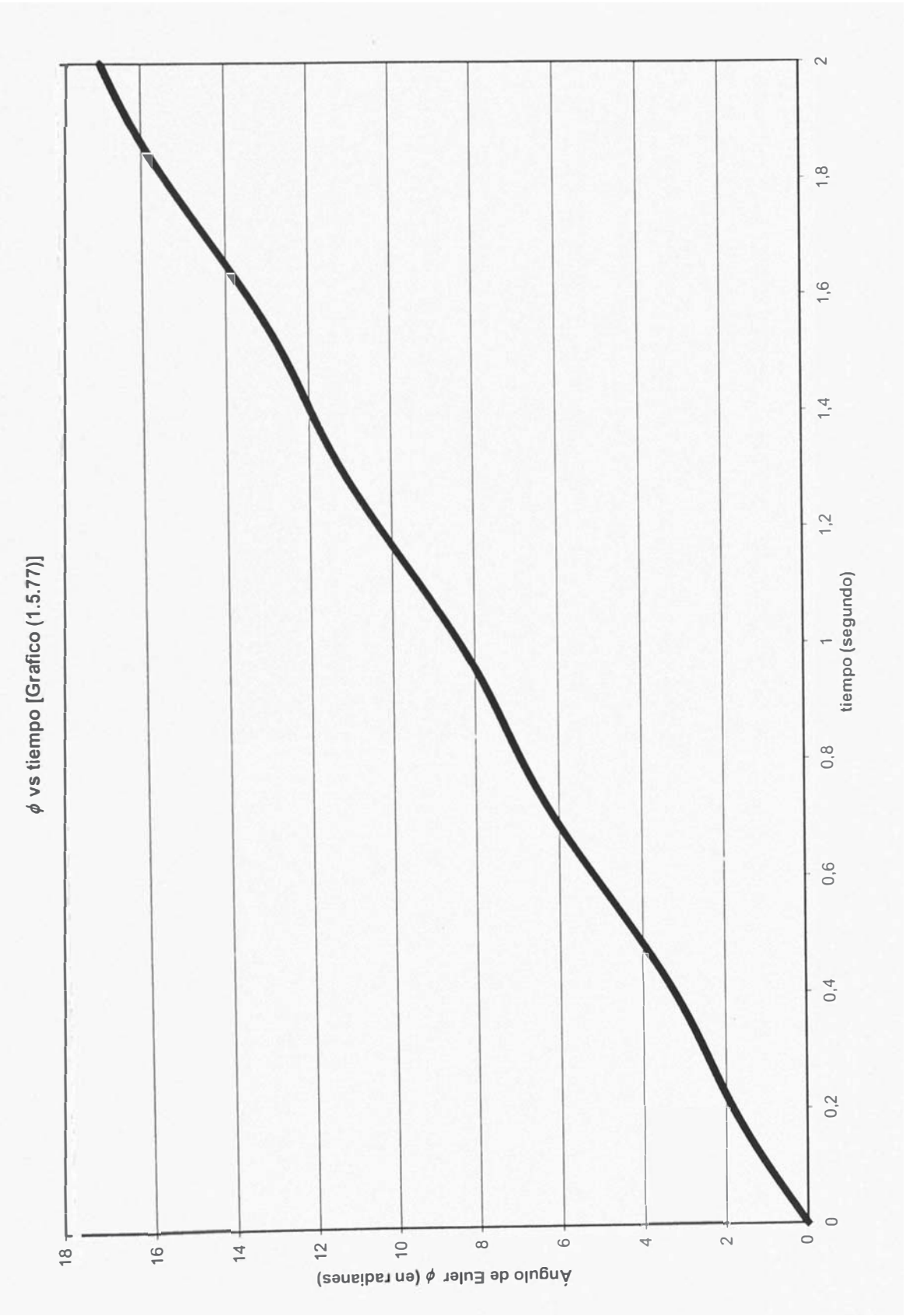
X_G vs Y_G [Gráfico (1.5.74)]



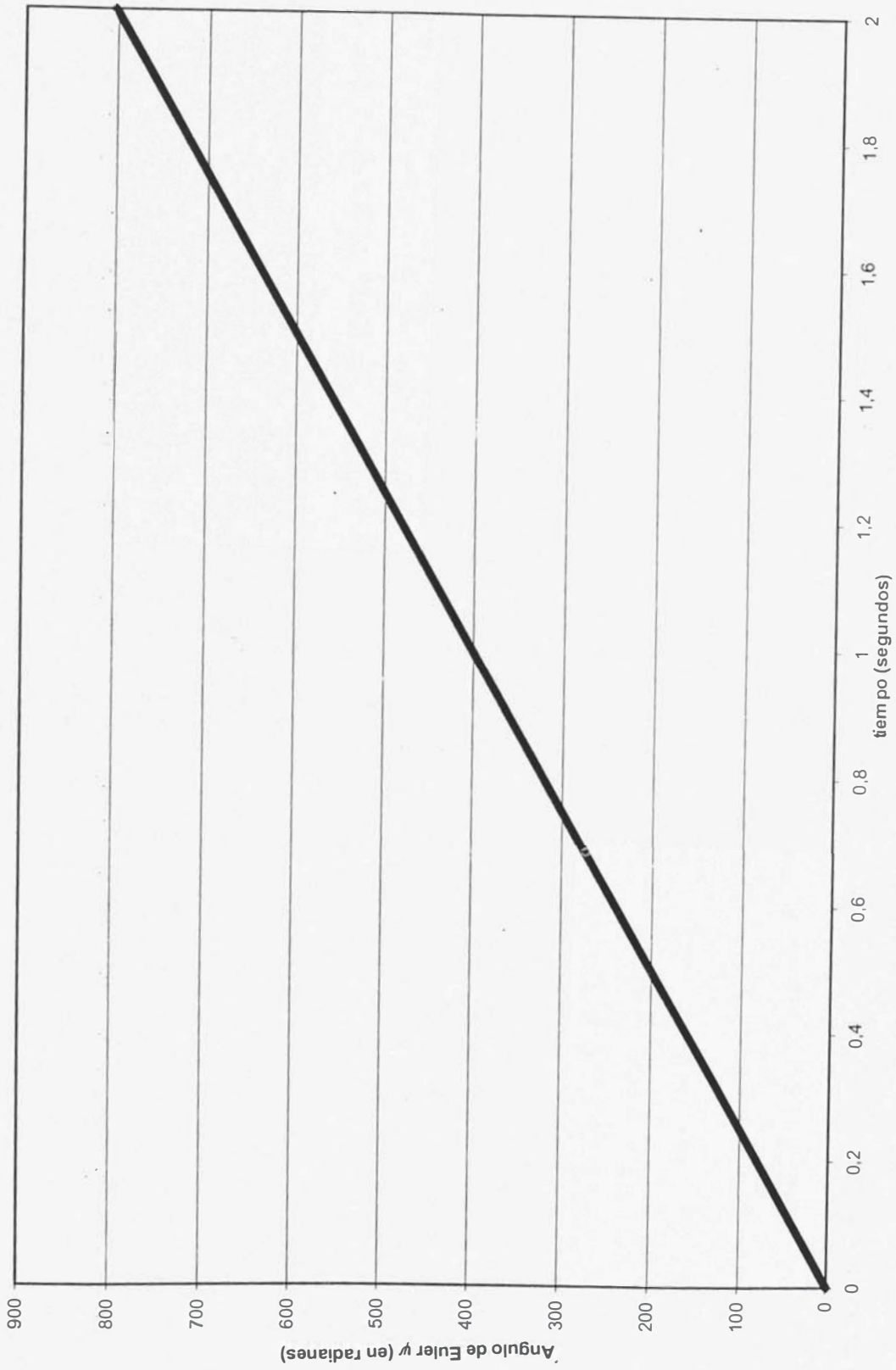


θ vs tiempo [Gráfico (1.576)]

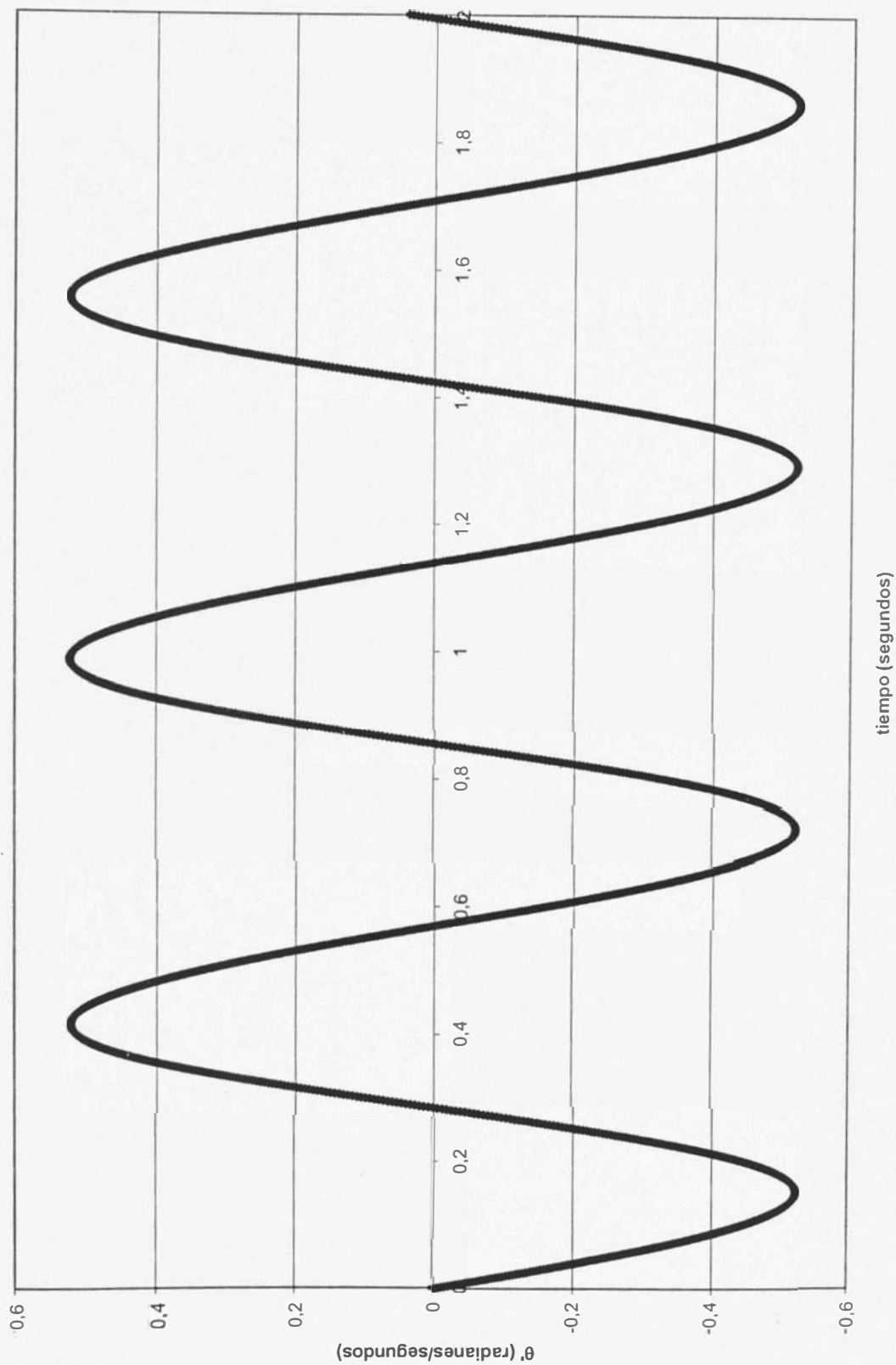




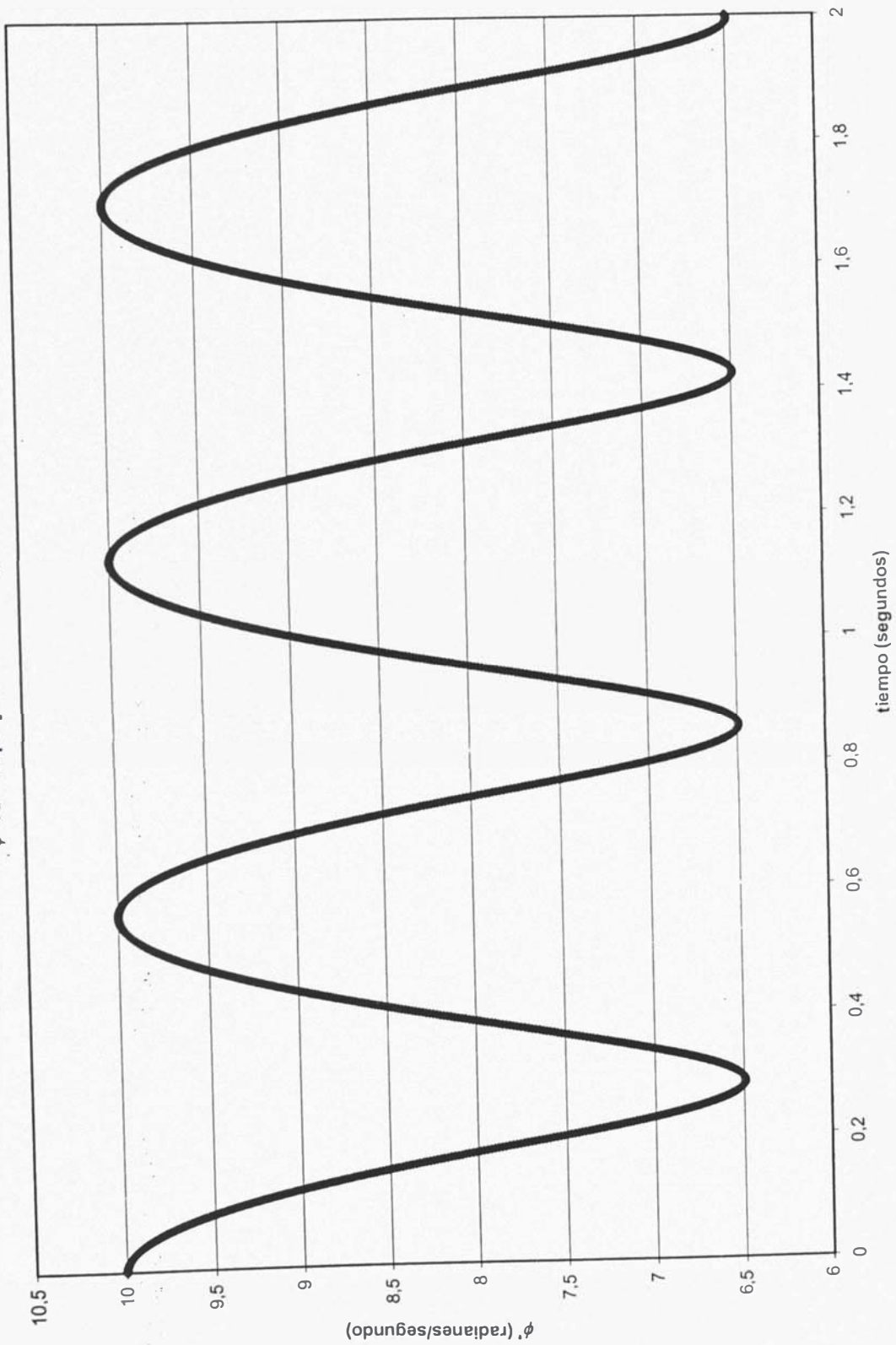
ψ vs tiempo [Grafico (1.5.78)]

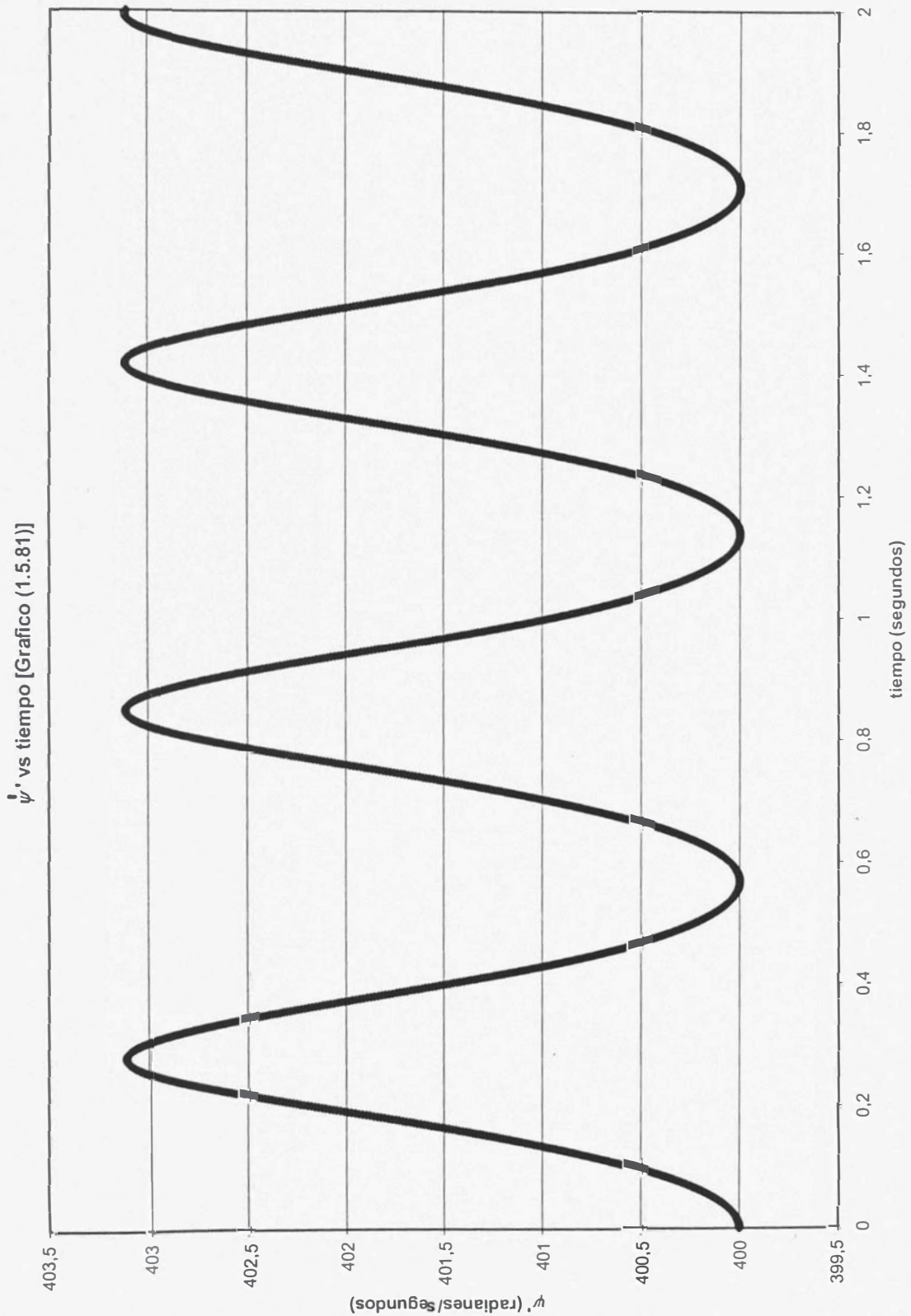


$\dot{\theta}'$ vs tiempo [Gráfico (1.5.79)]

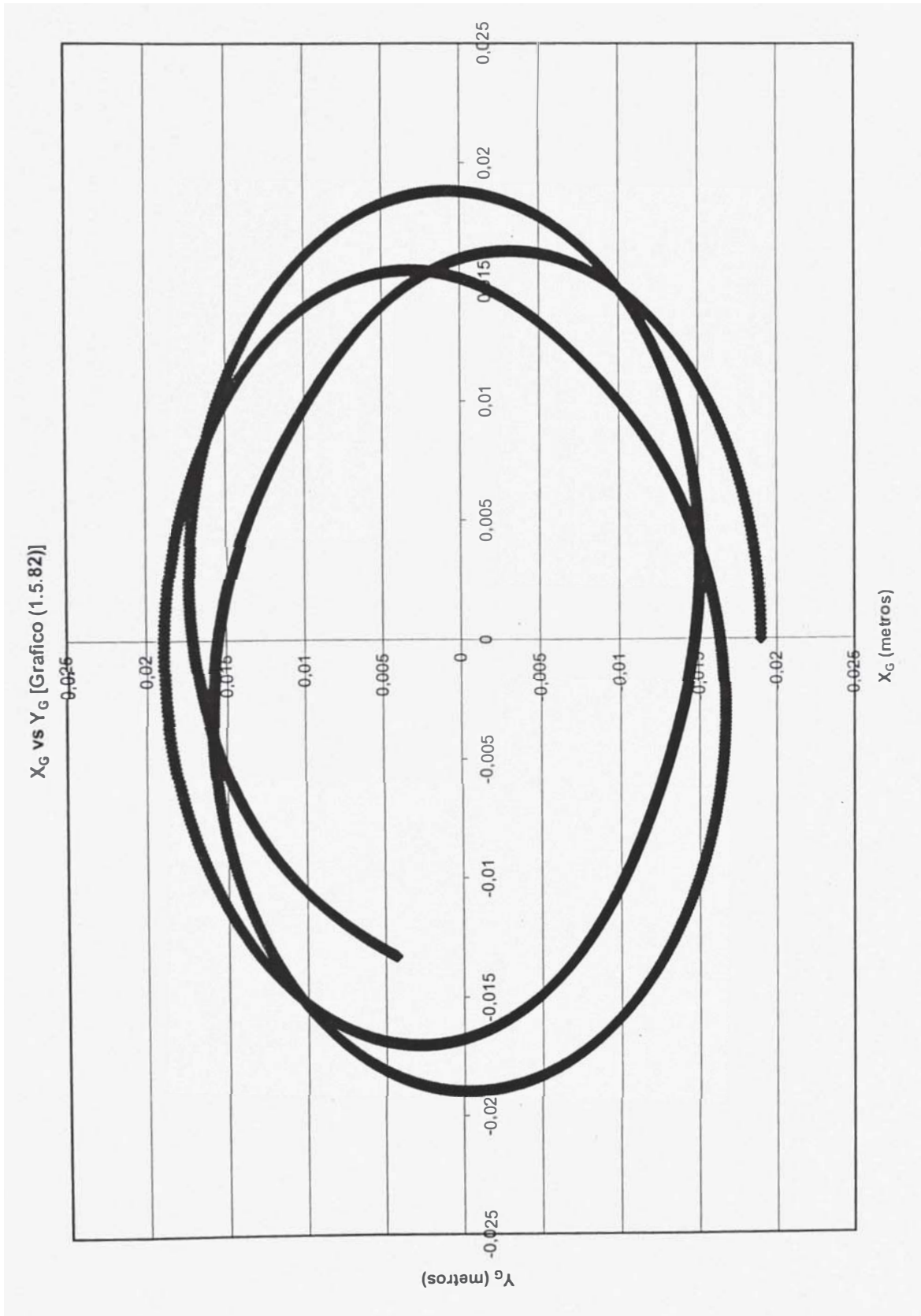


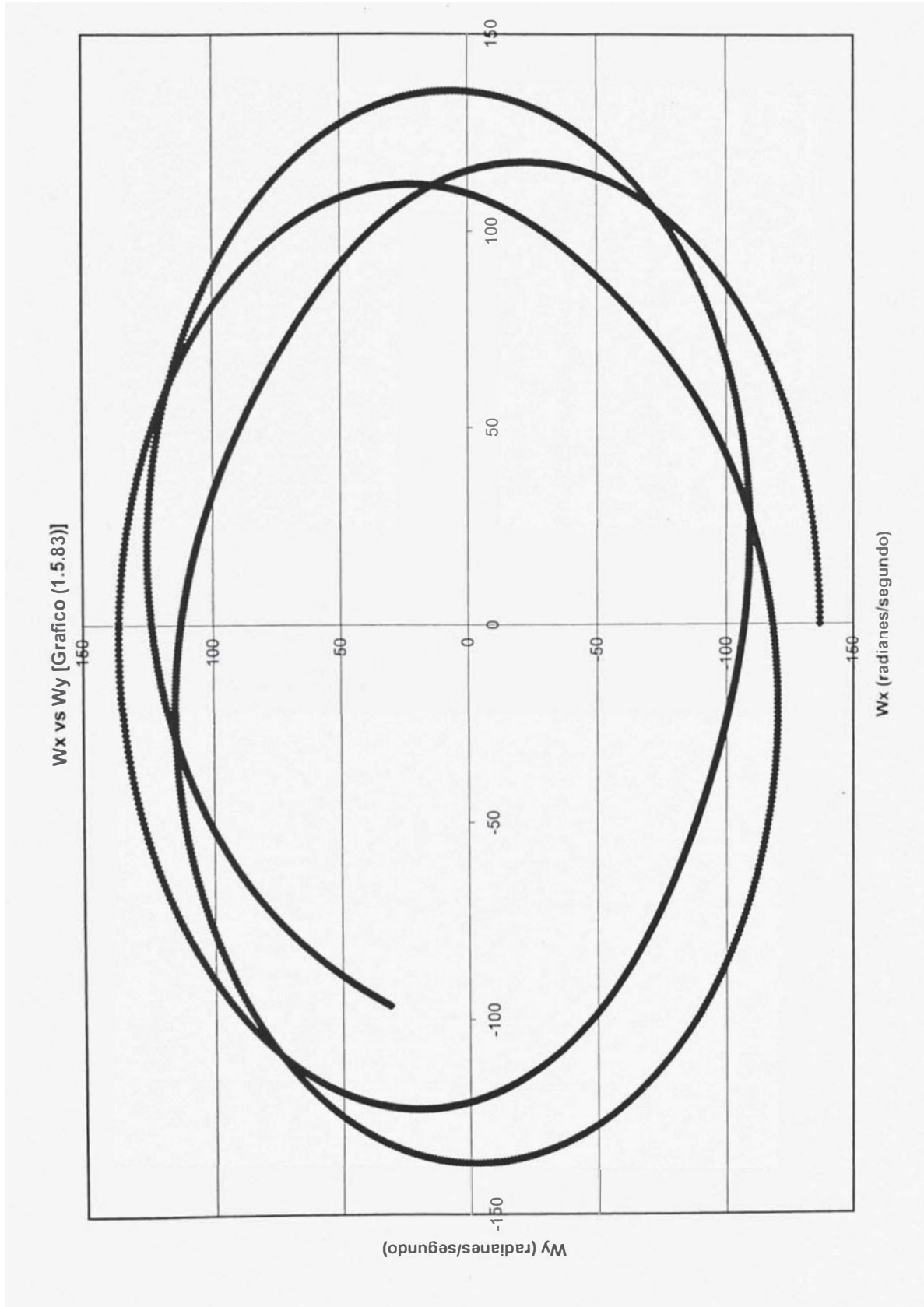
$\dot{\phi}$ vs tiempo [Gráfico (1.5.80)]



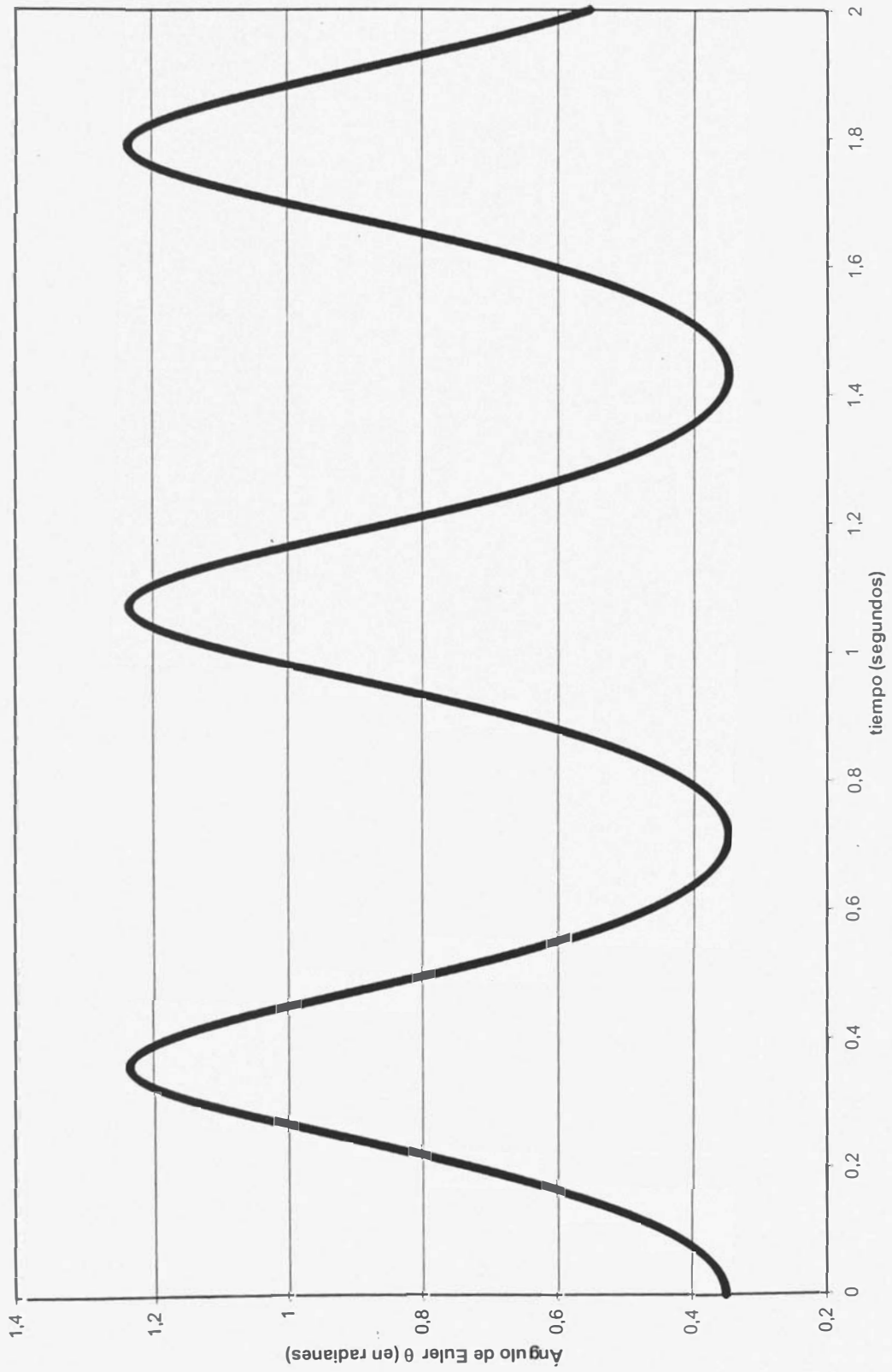


$\dot{\psi}$ vs tiempo [Grafico (1.5.81)]

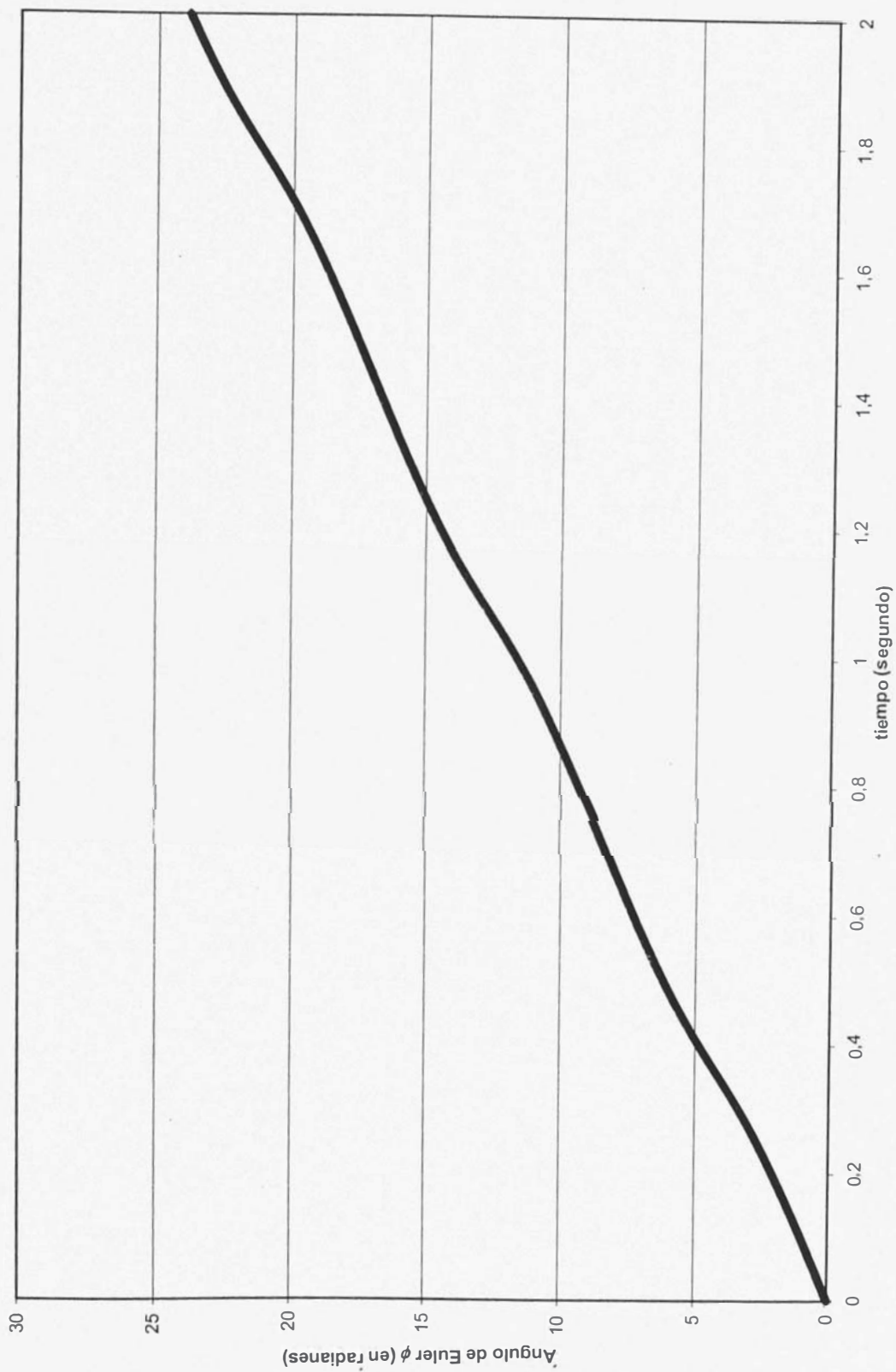




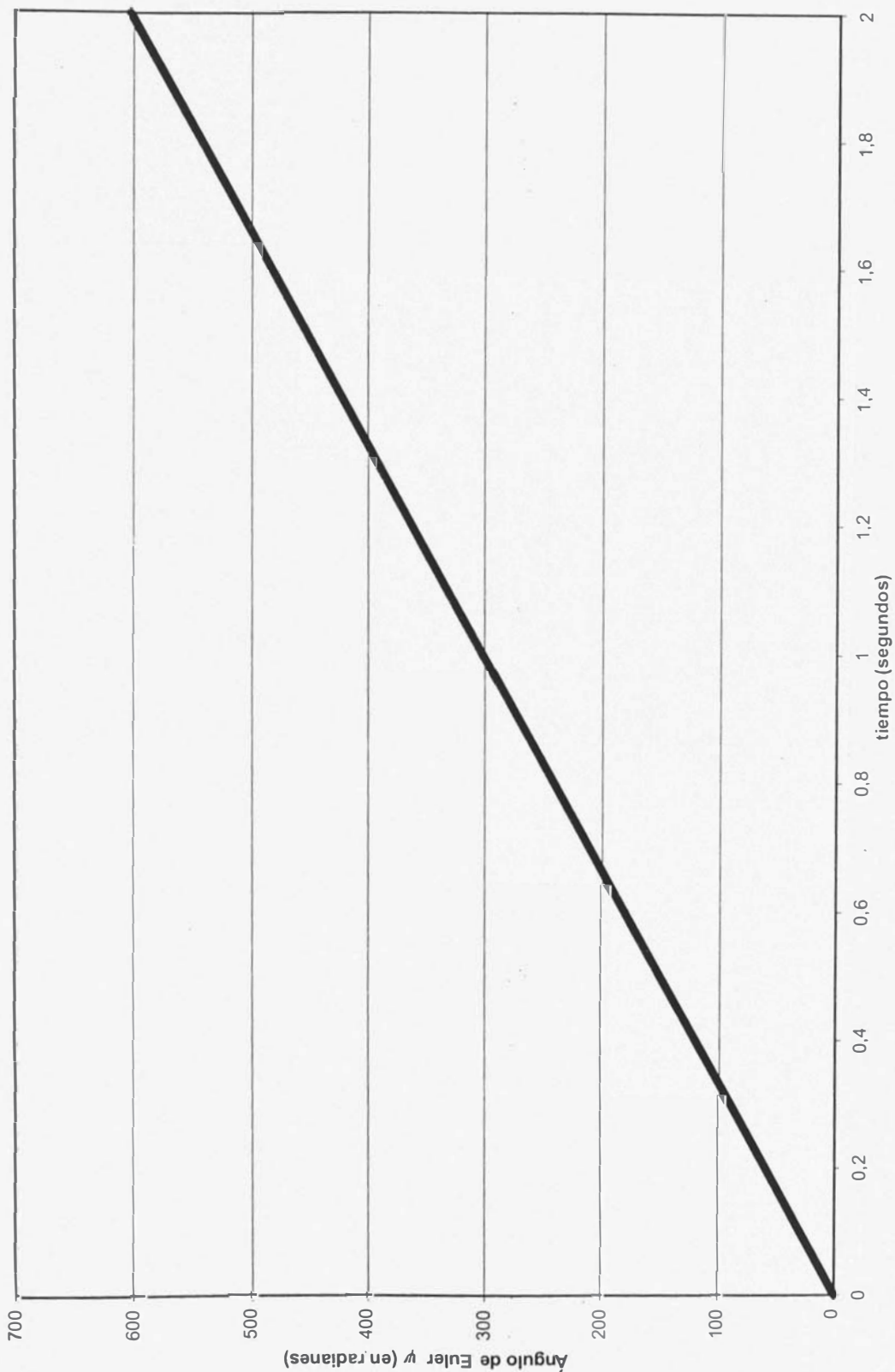
θ vs tiempo [Grafico (1.5.84)]



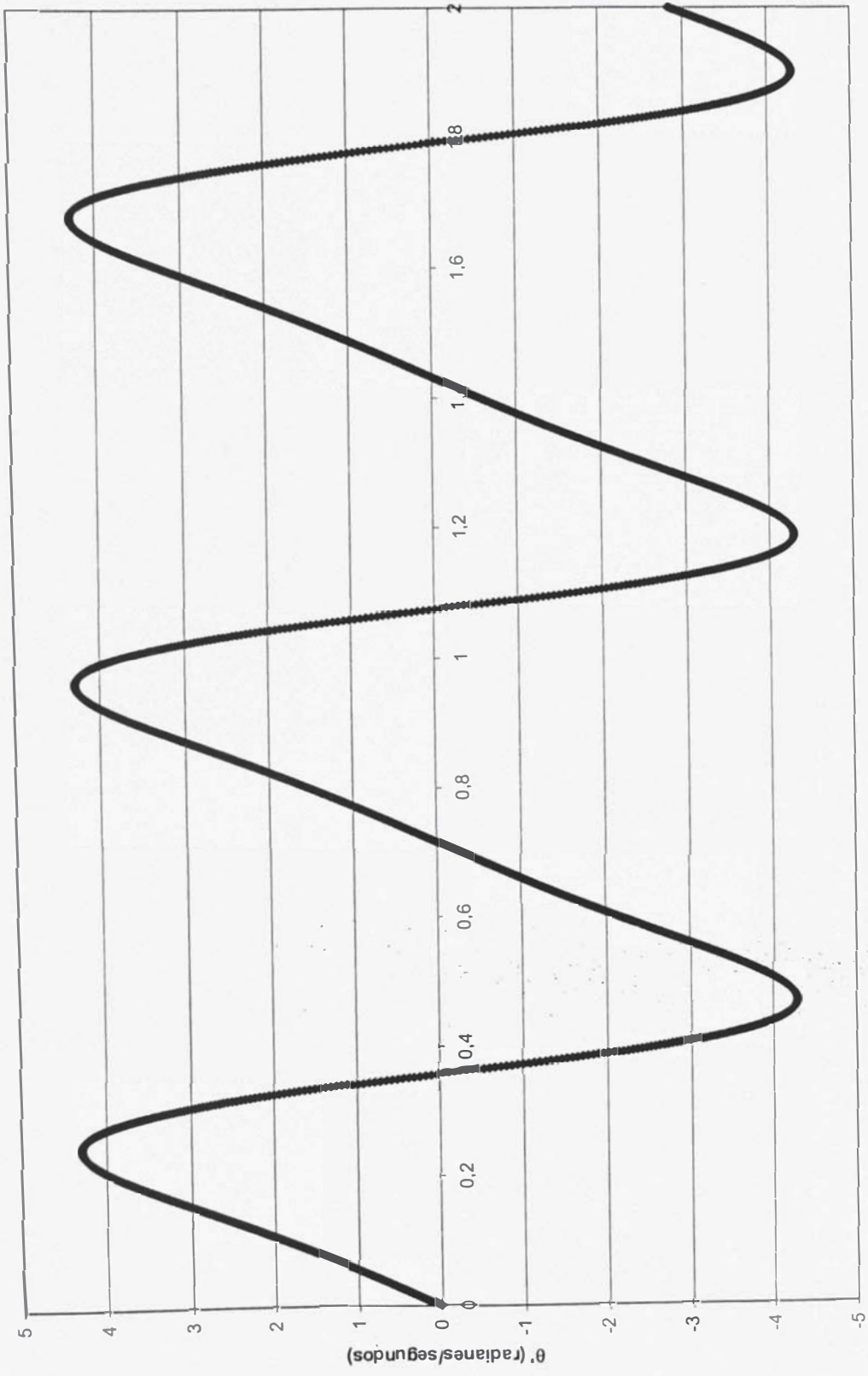
ϕ vs tiempo [Grafico (1.5.85)]



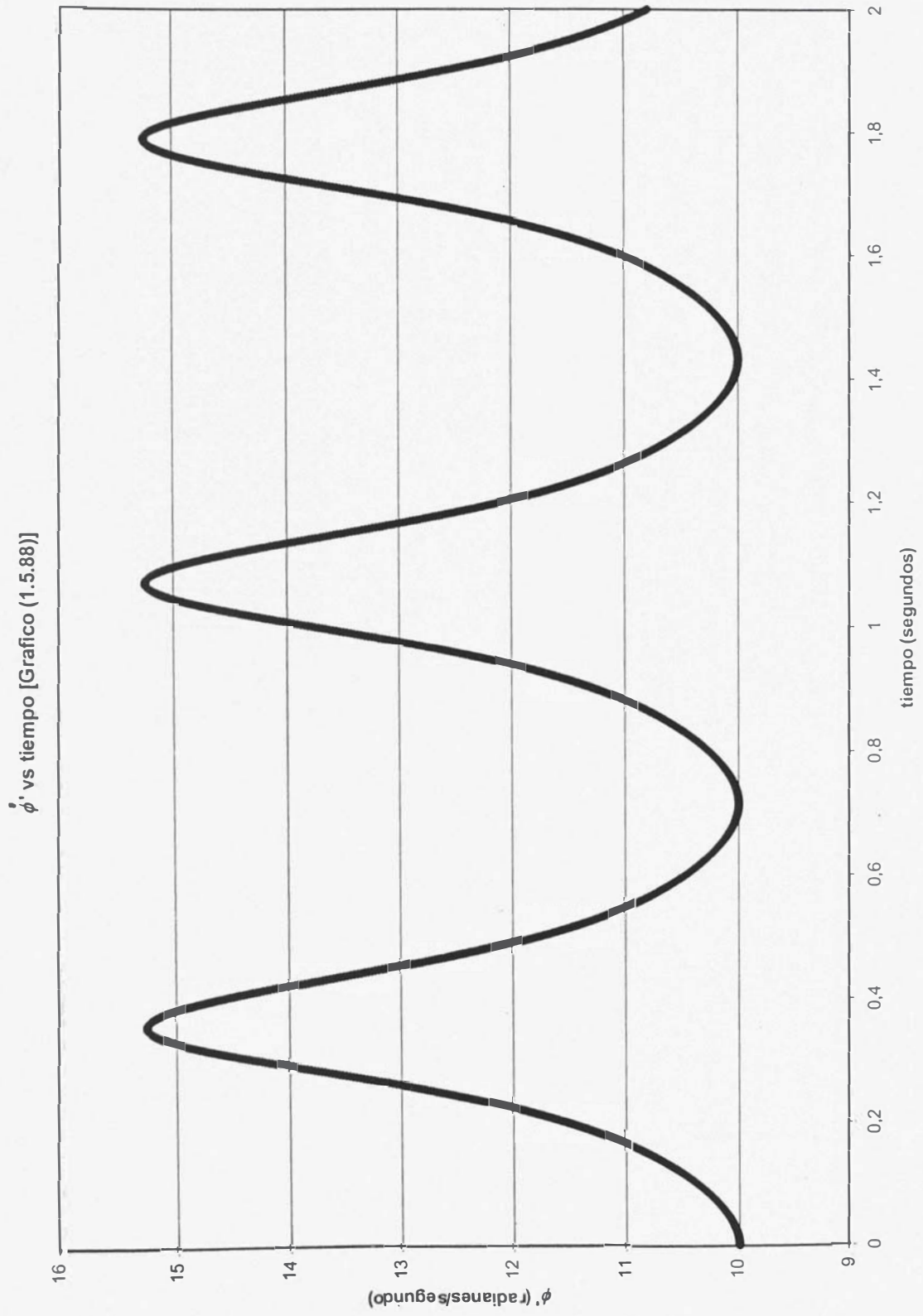
ψ vs tiempo [Grafico (1.5.86)]



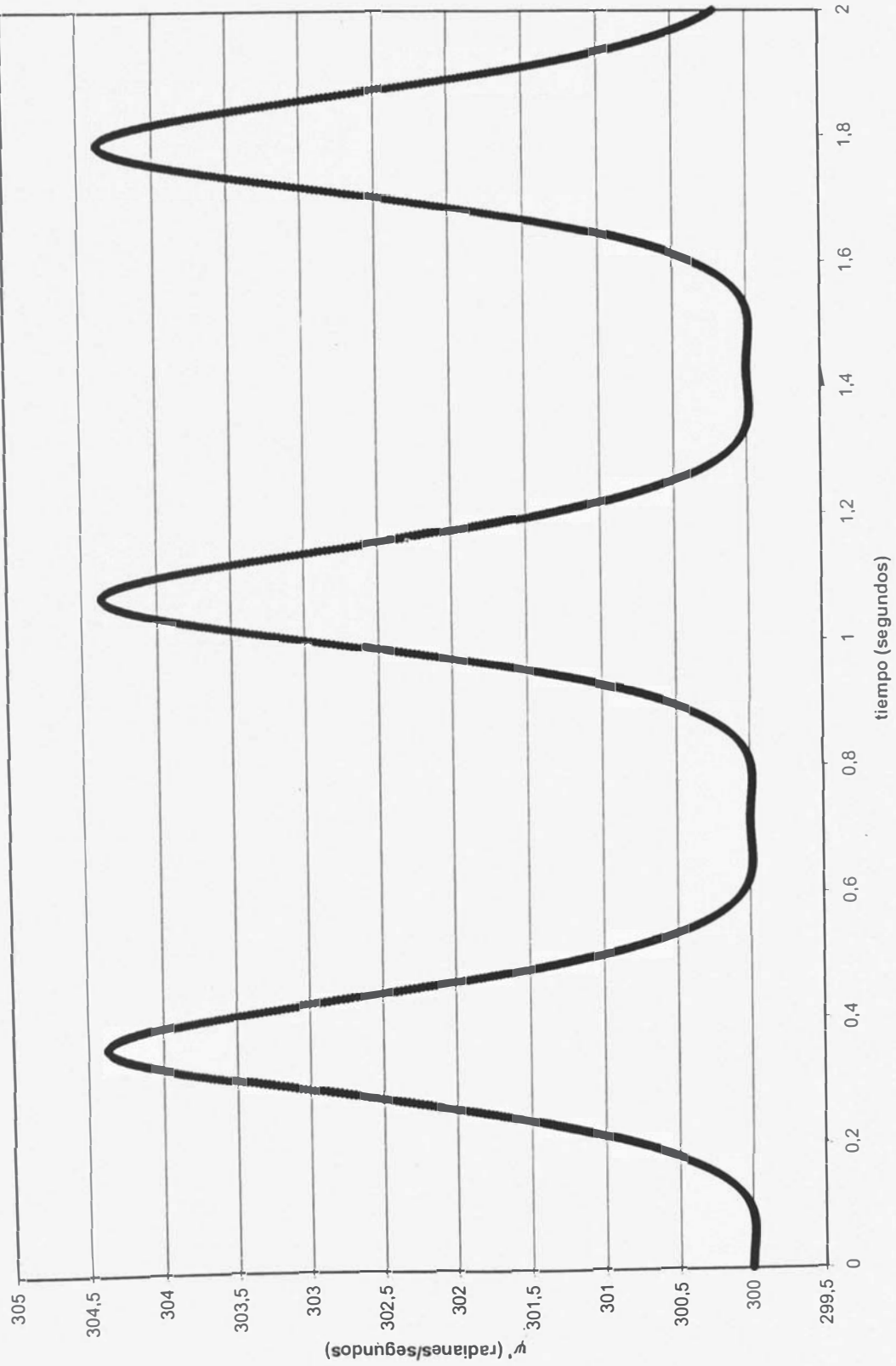
$\dot{\theta}$ ' vs tiempo [Gráfico (1.5.87)]

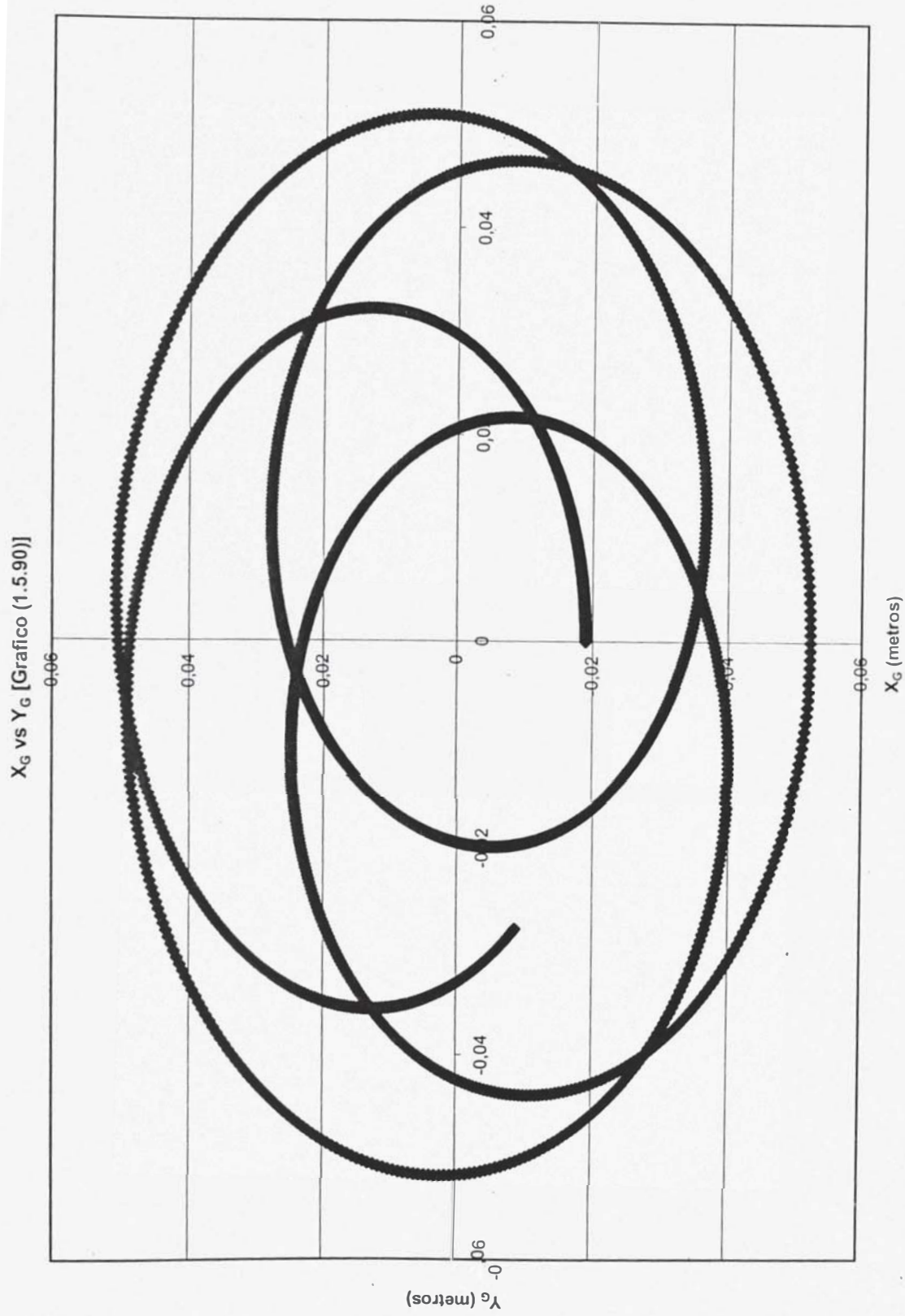


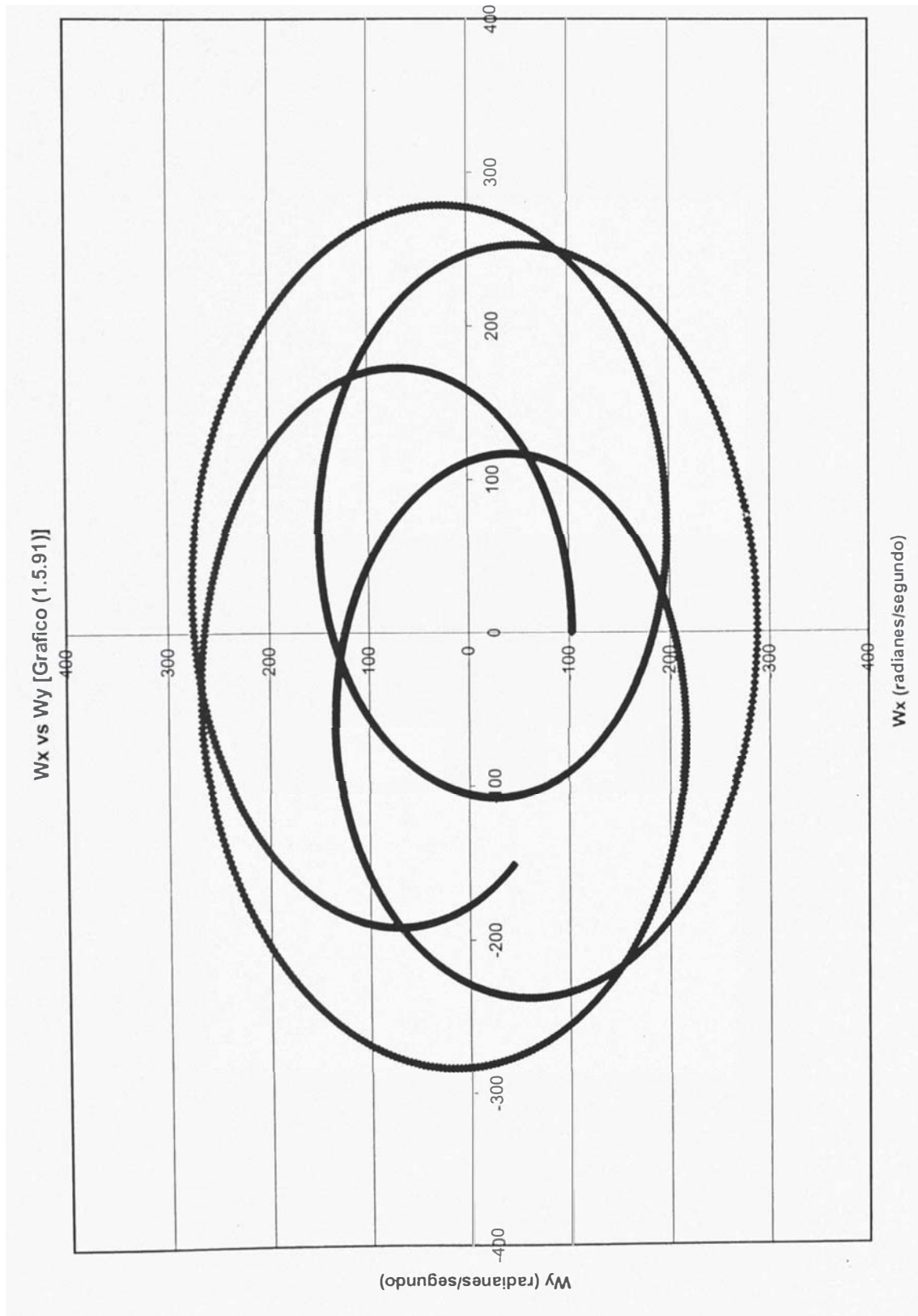
tiempo (segundos)



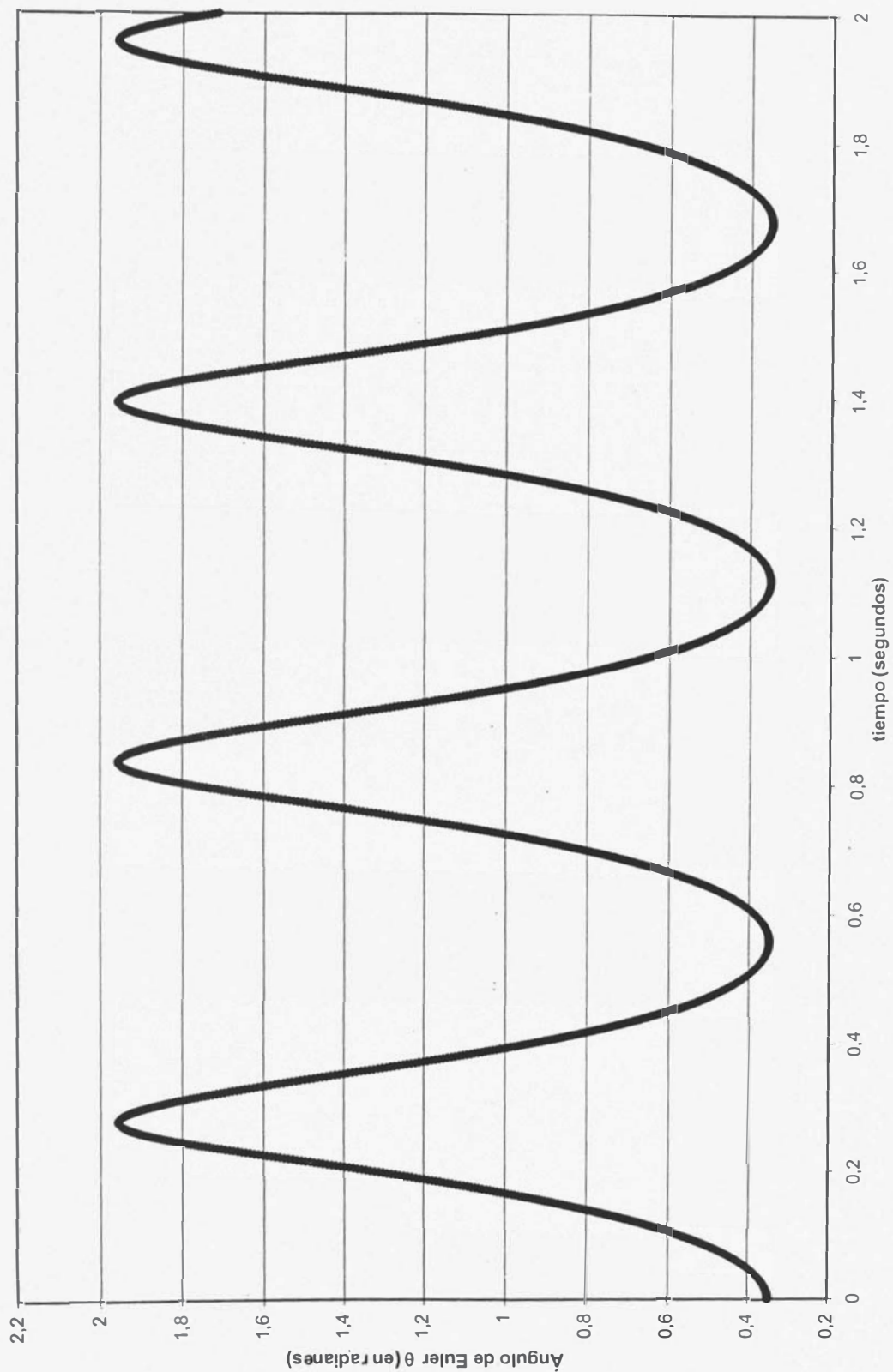
$\ddot{\psi}'$ vs tiempo [Grafico (1.5.89)]

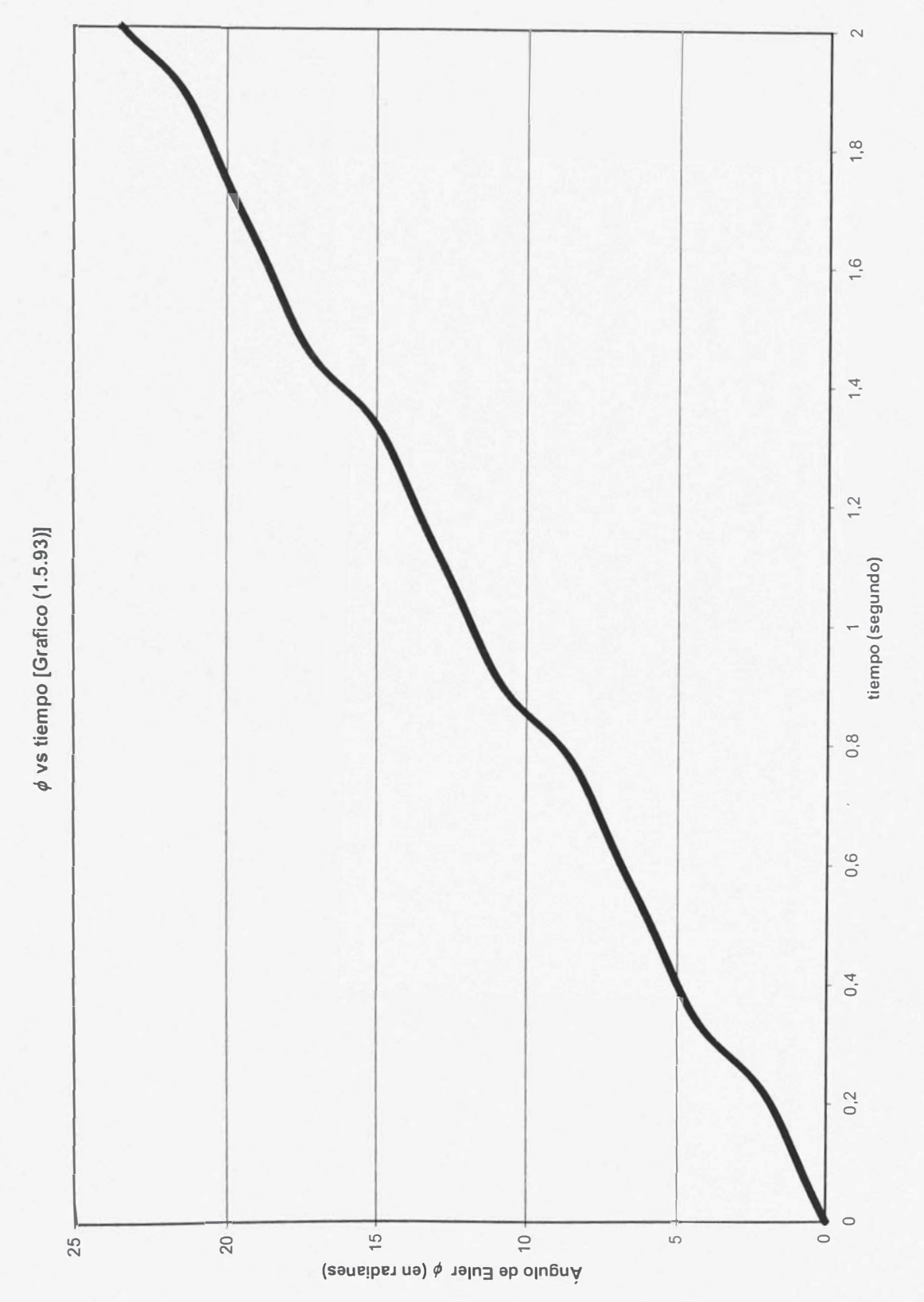




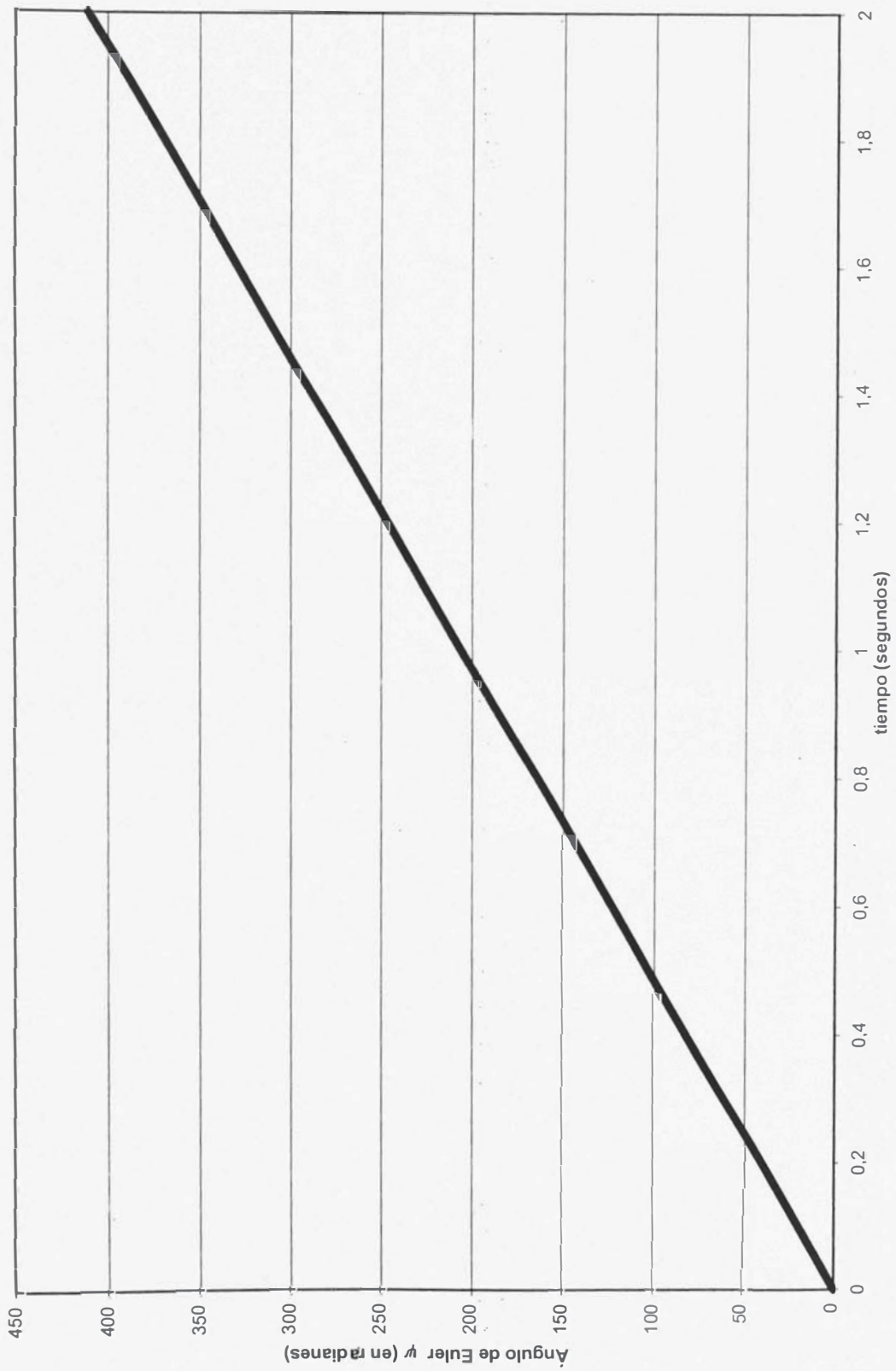


θ vs tiempo [Grafico (1.5.92)]

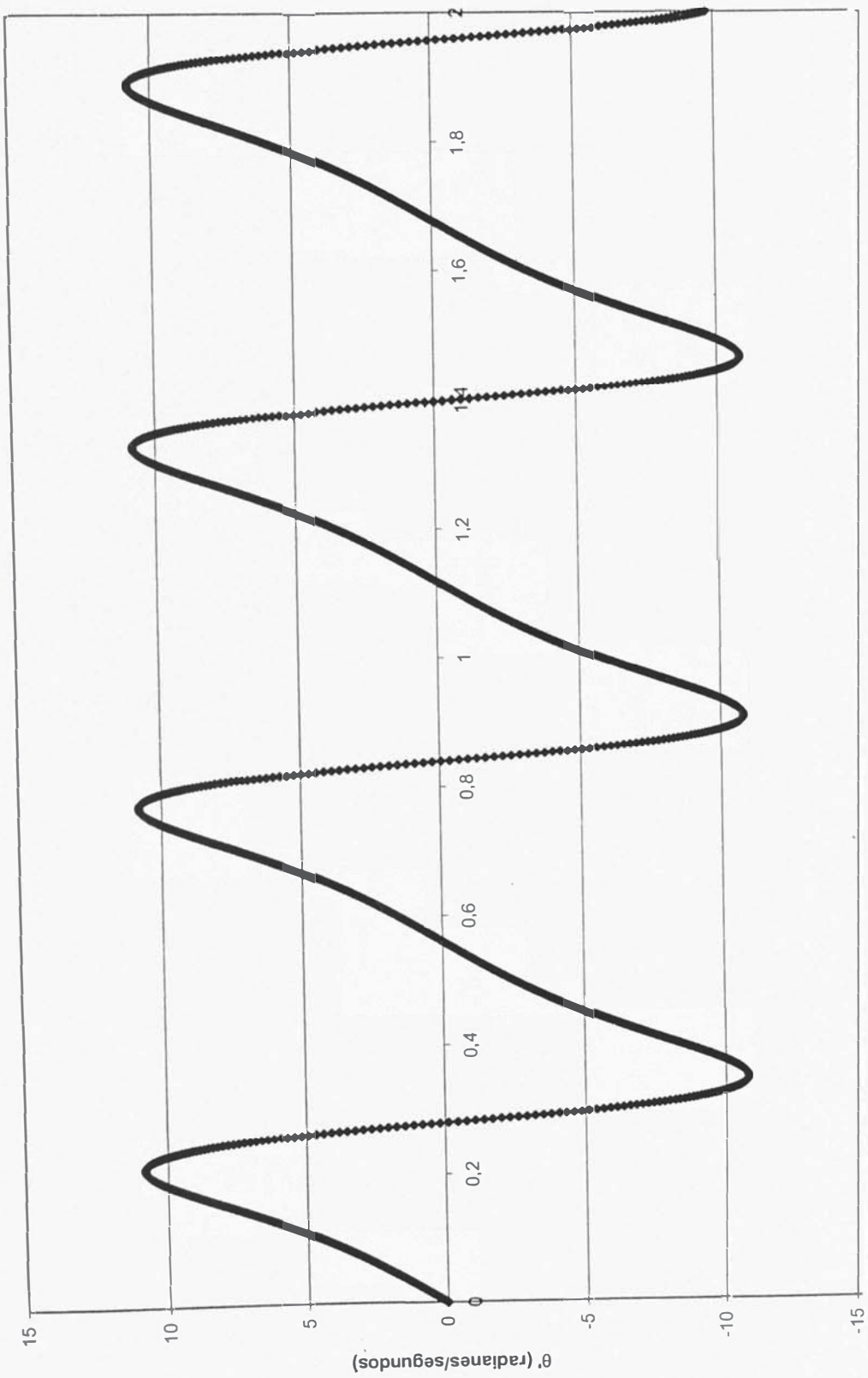




ψ vs tiempo [Grafico (1.5.94)]

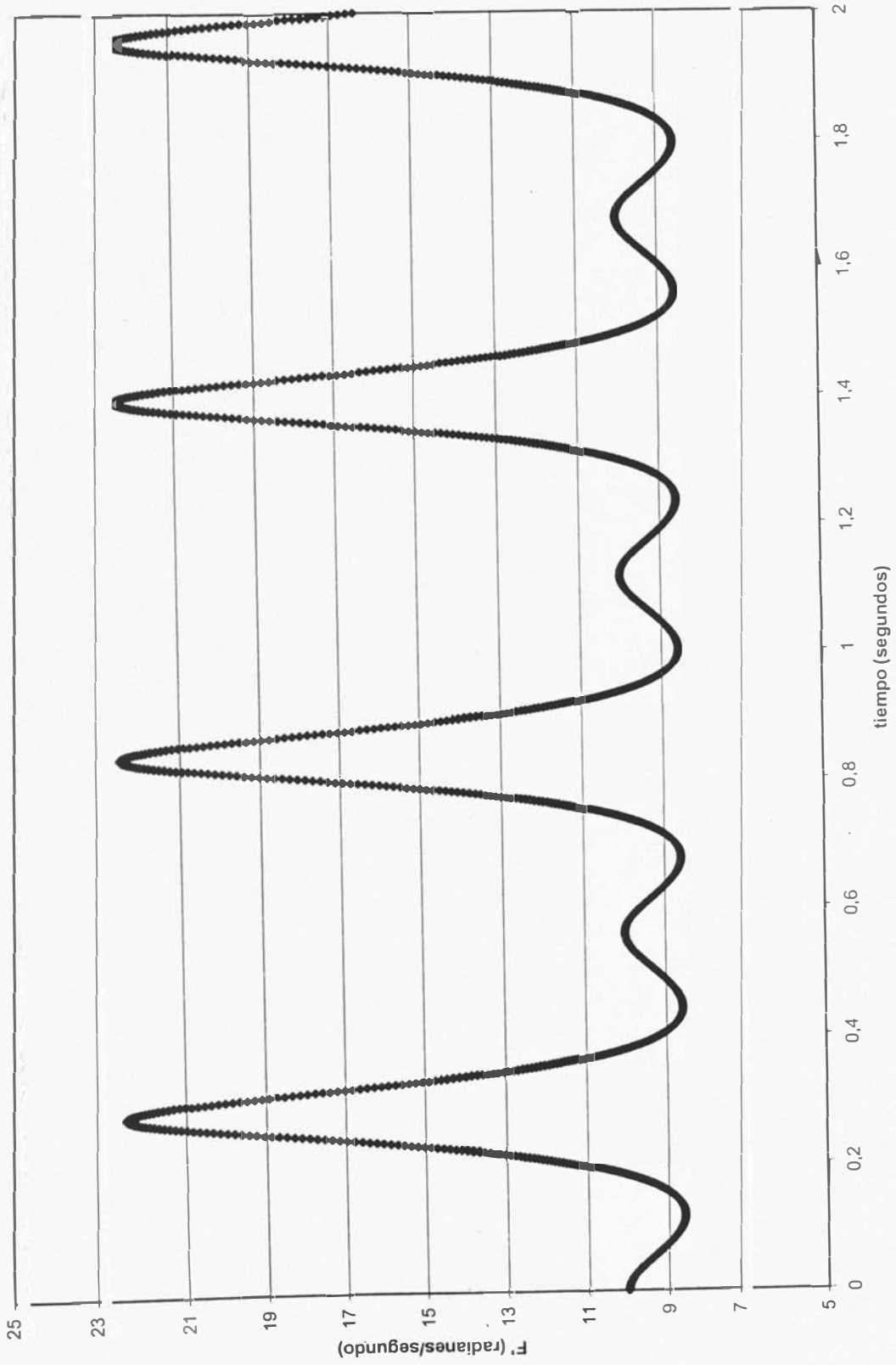


$\dot{\theta}'$ vs tiempo [Grafico (1.5.95)]

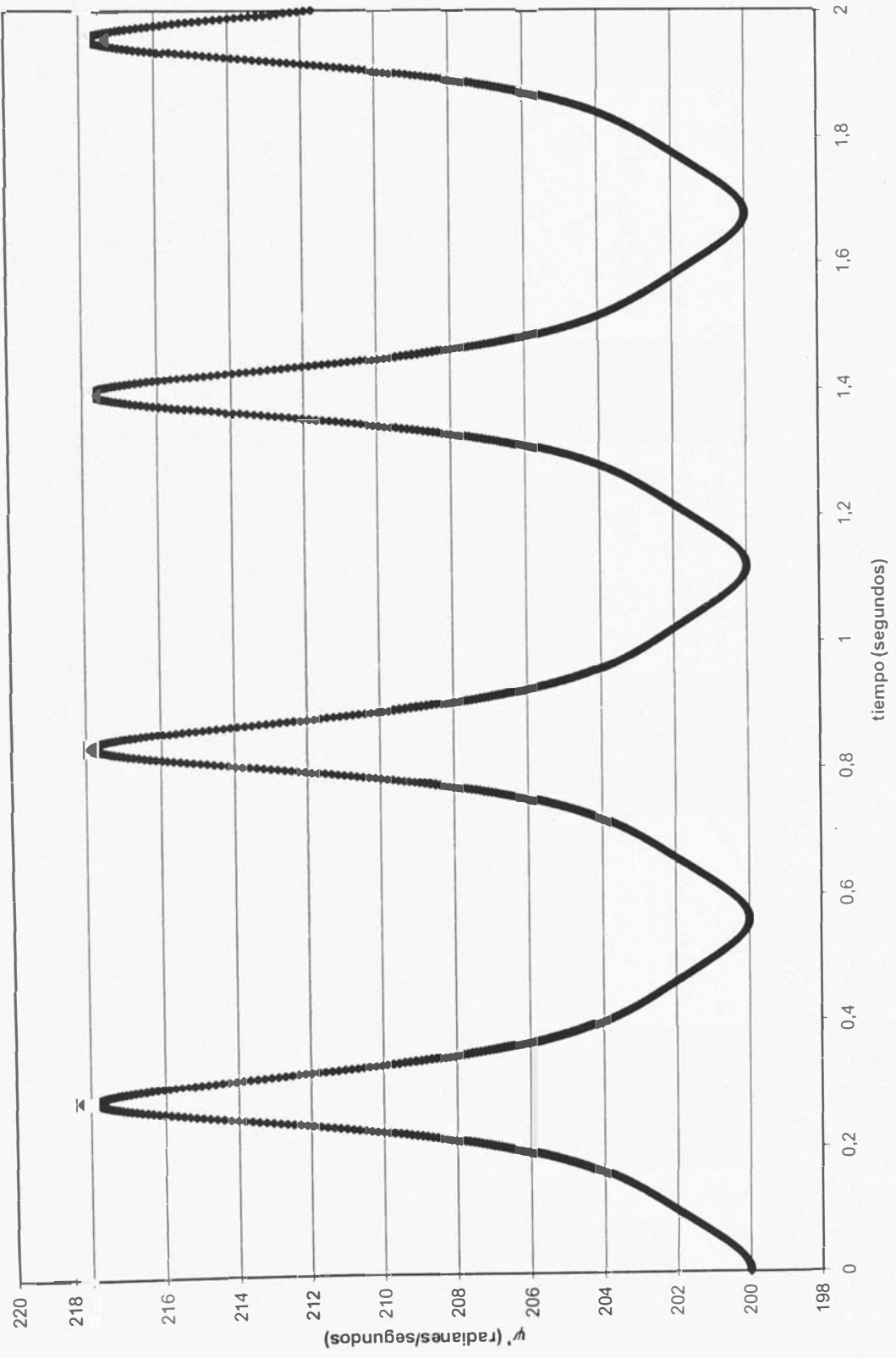


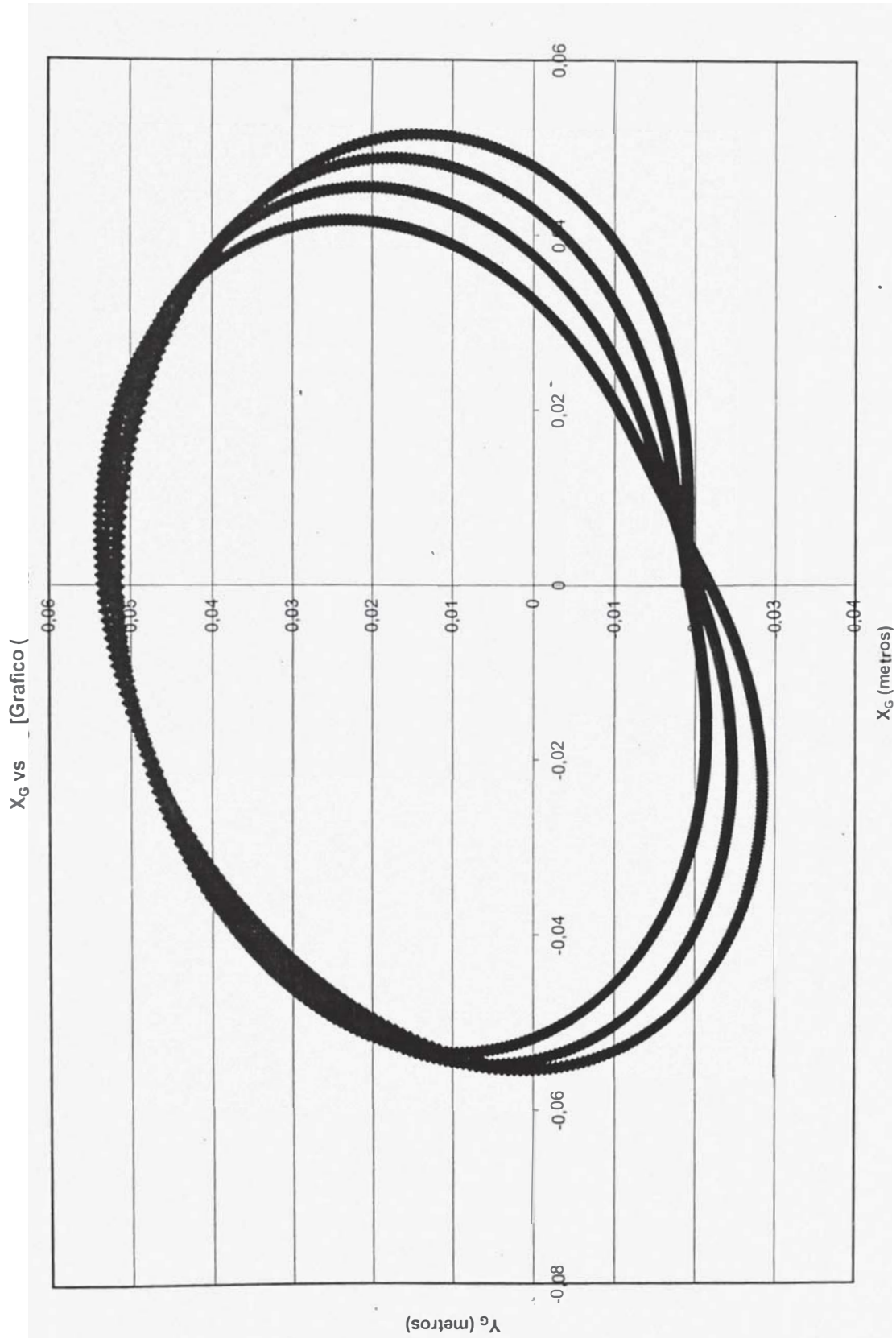
tiempo (segundos)

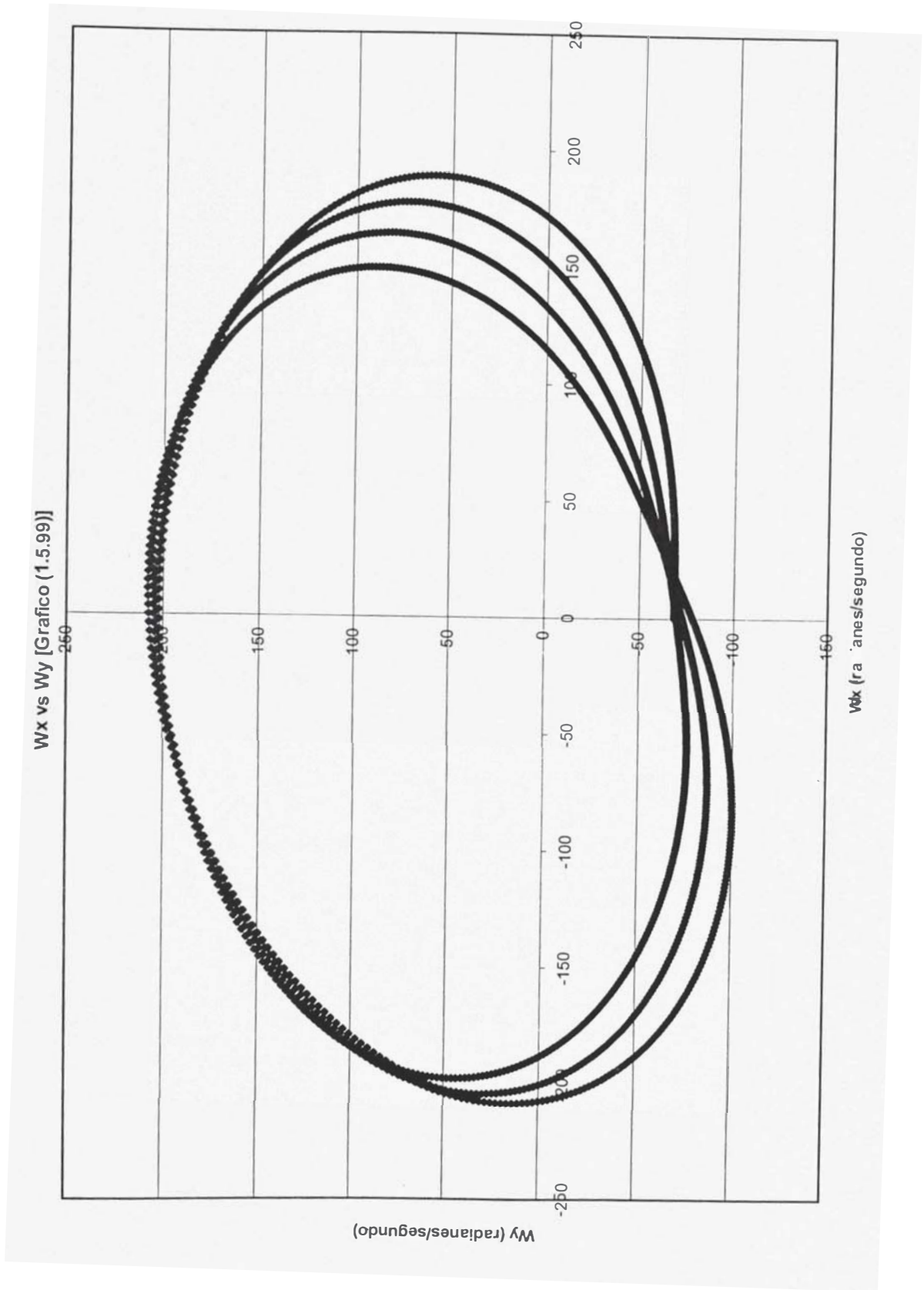
$\dot{\phi}^i$ vs tiempo [Grafico (1.5.96)]



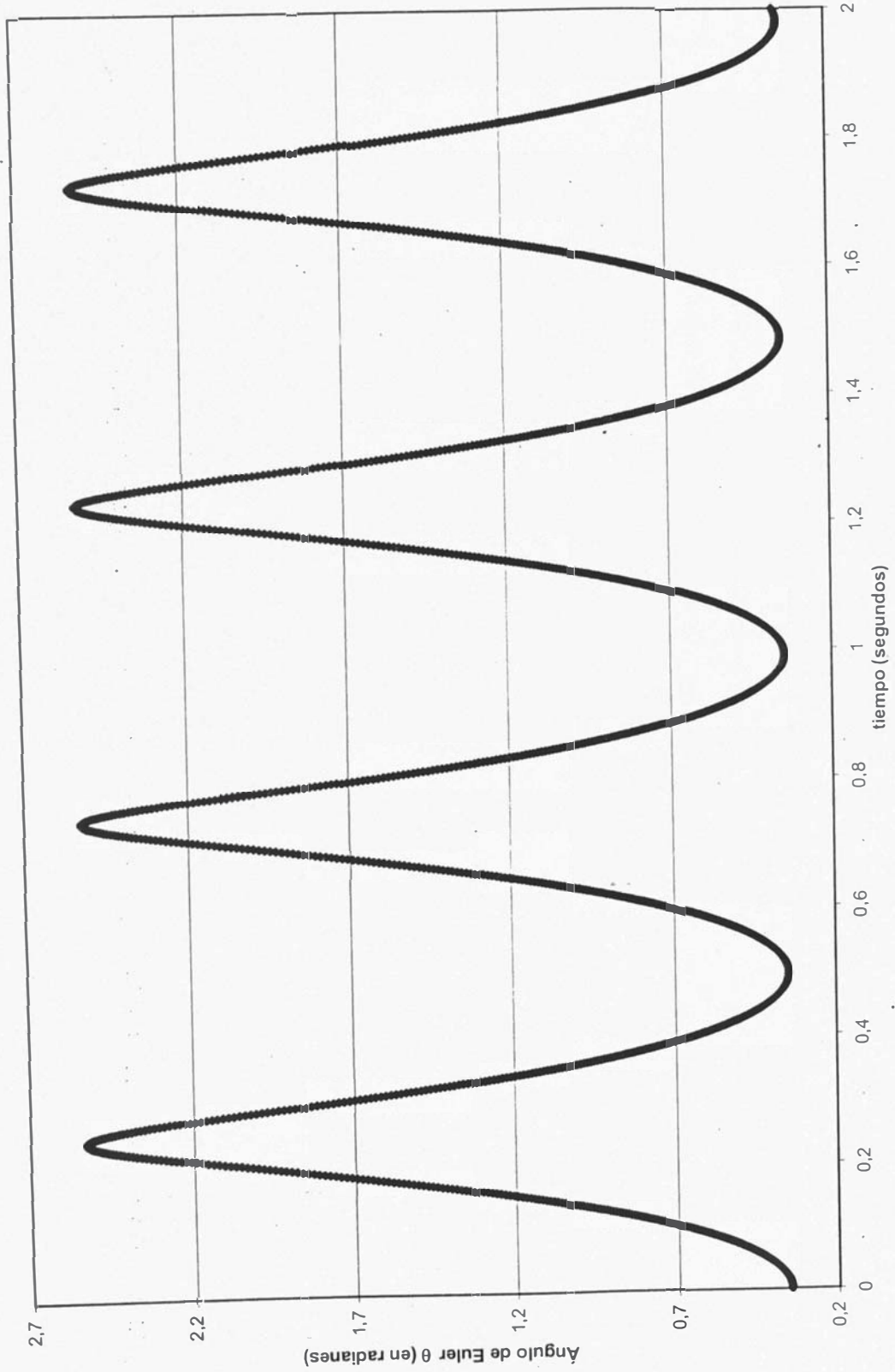
$\dot{\psi}$ vs tiempo [Grafico (1.5.97)]



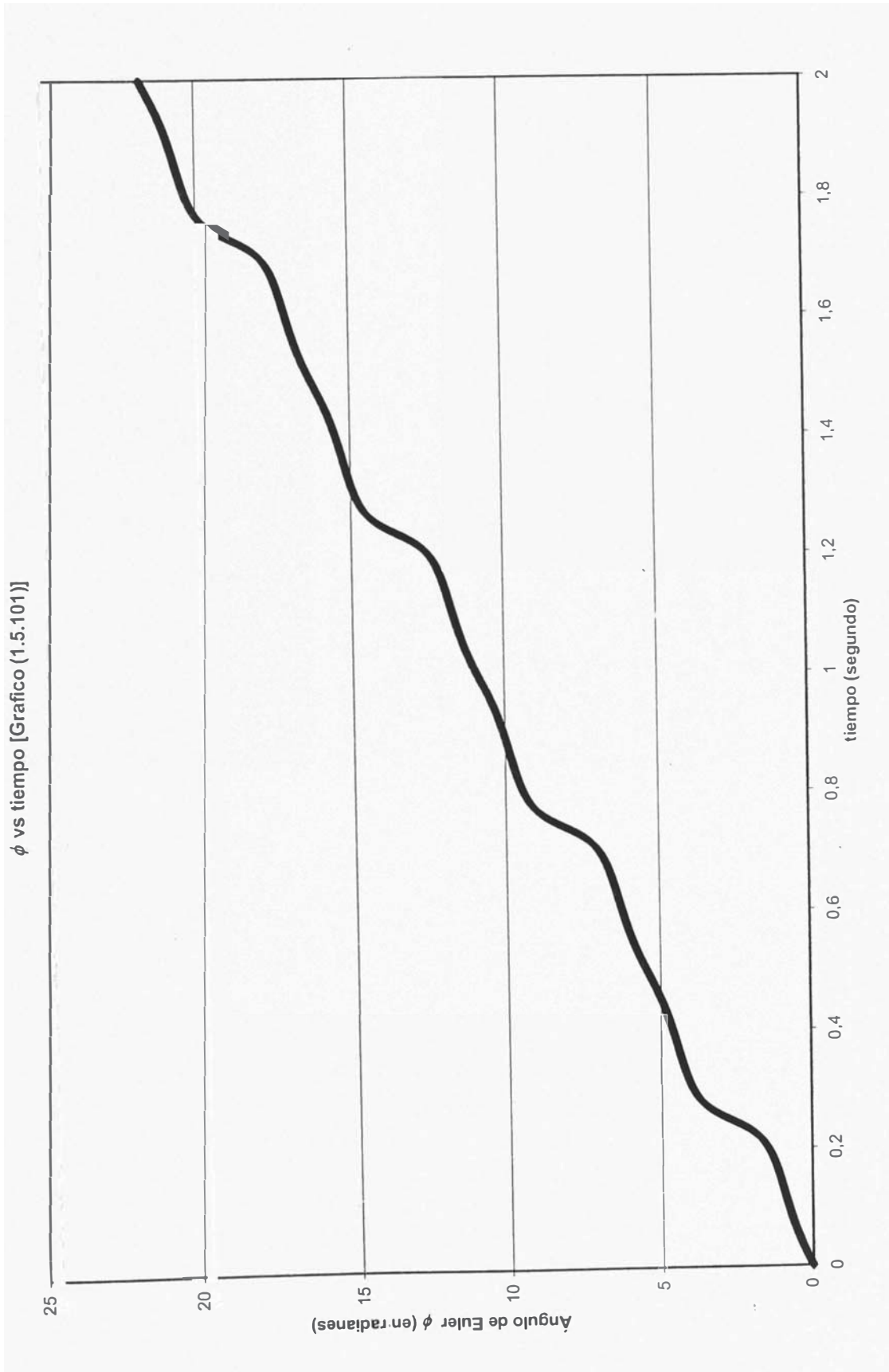


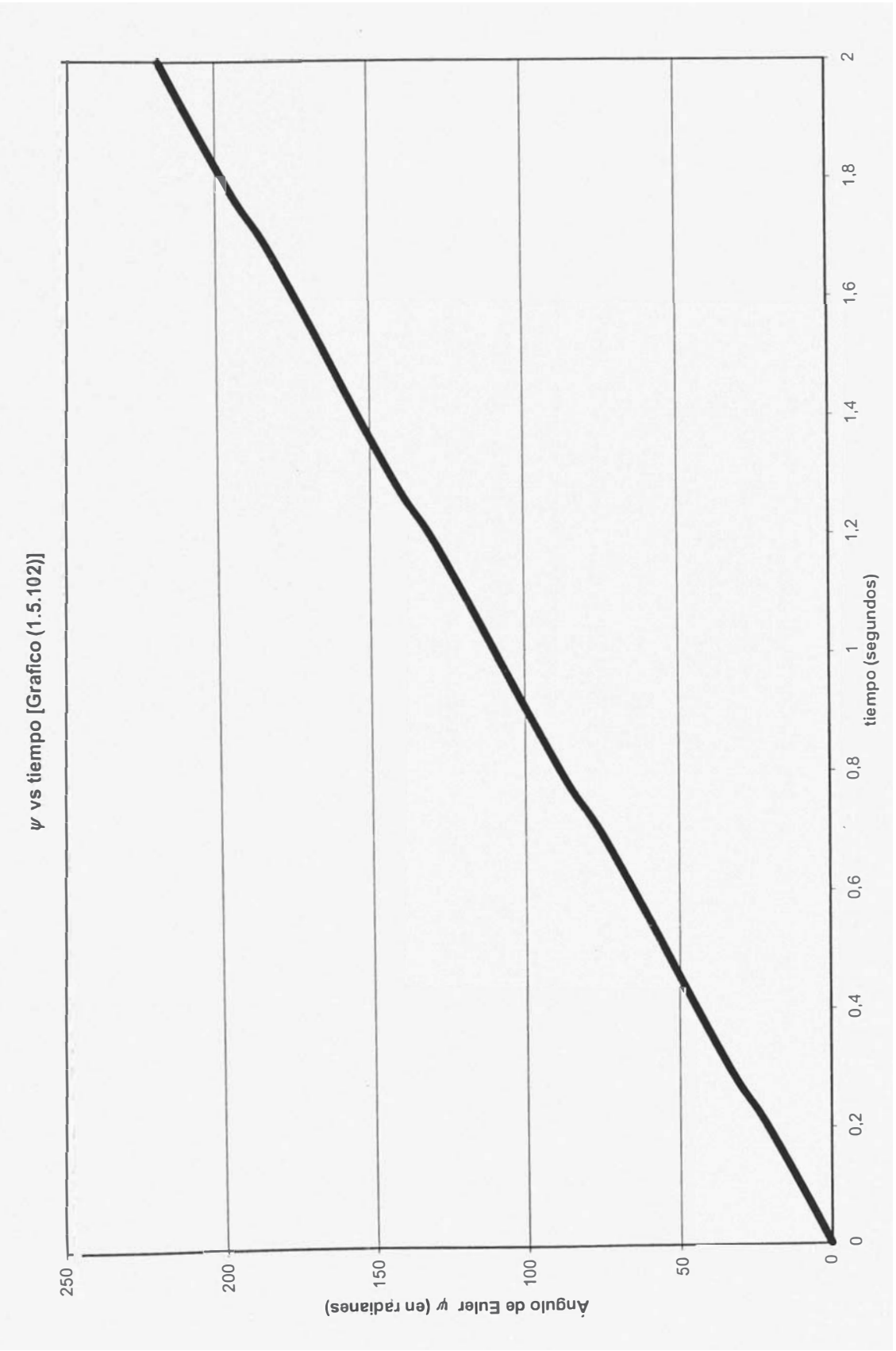


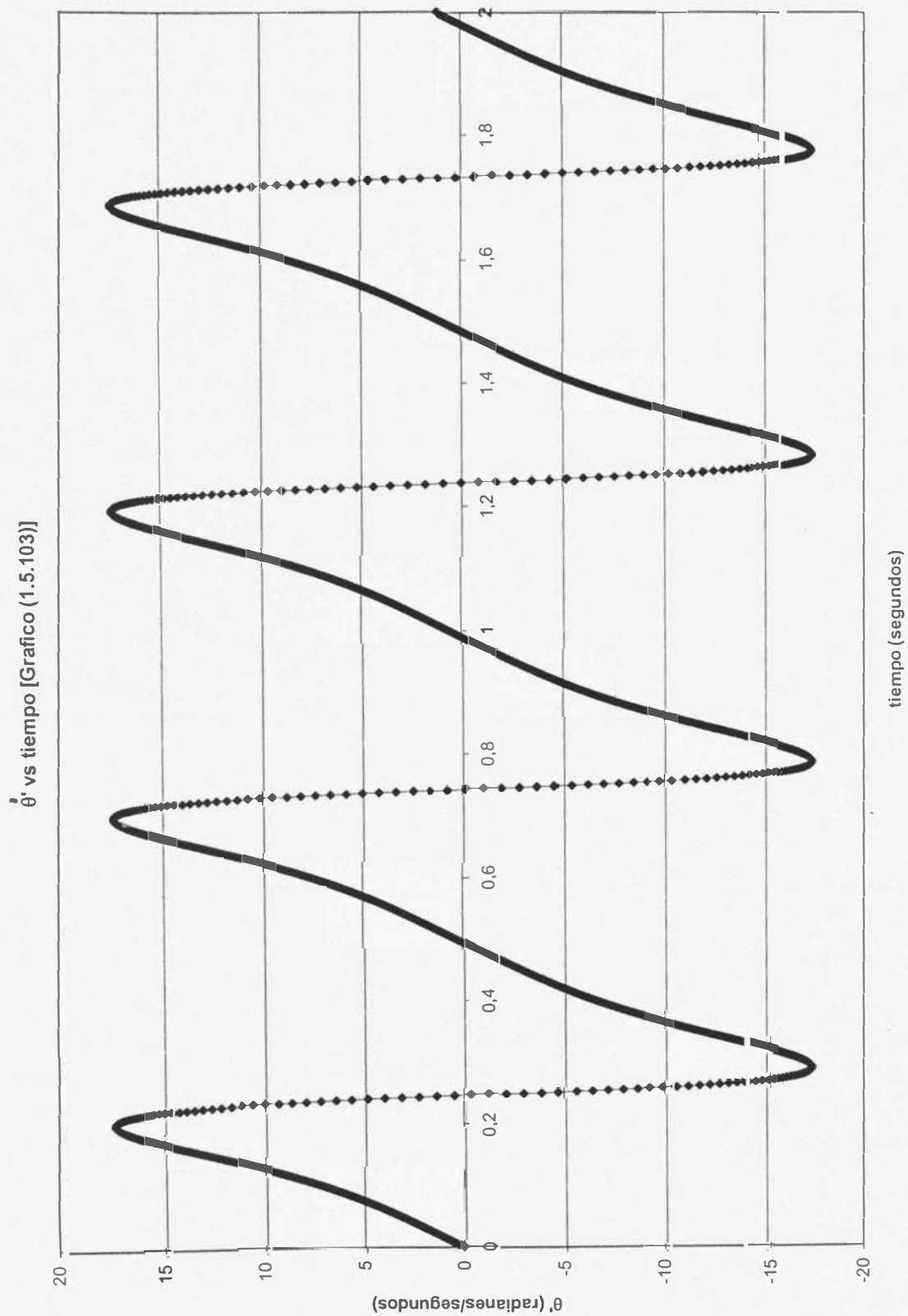
θ vs tiempo [Grafico (1.5.100)]



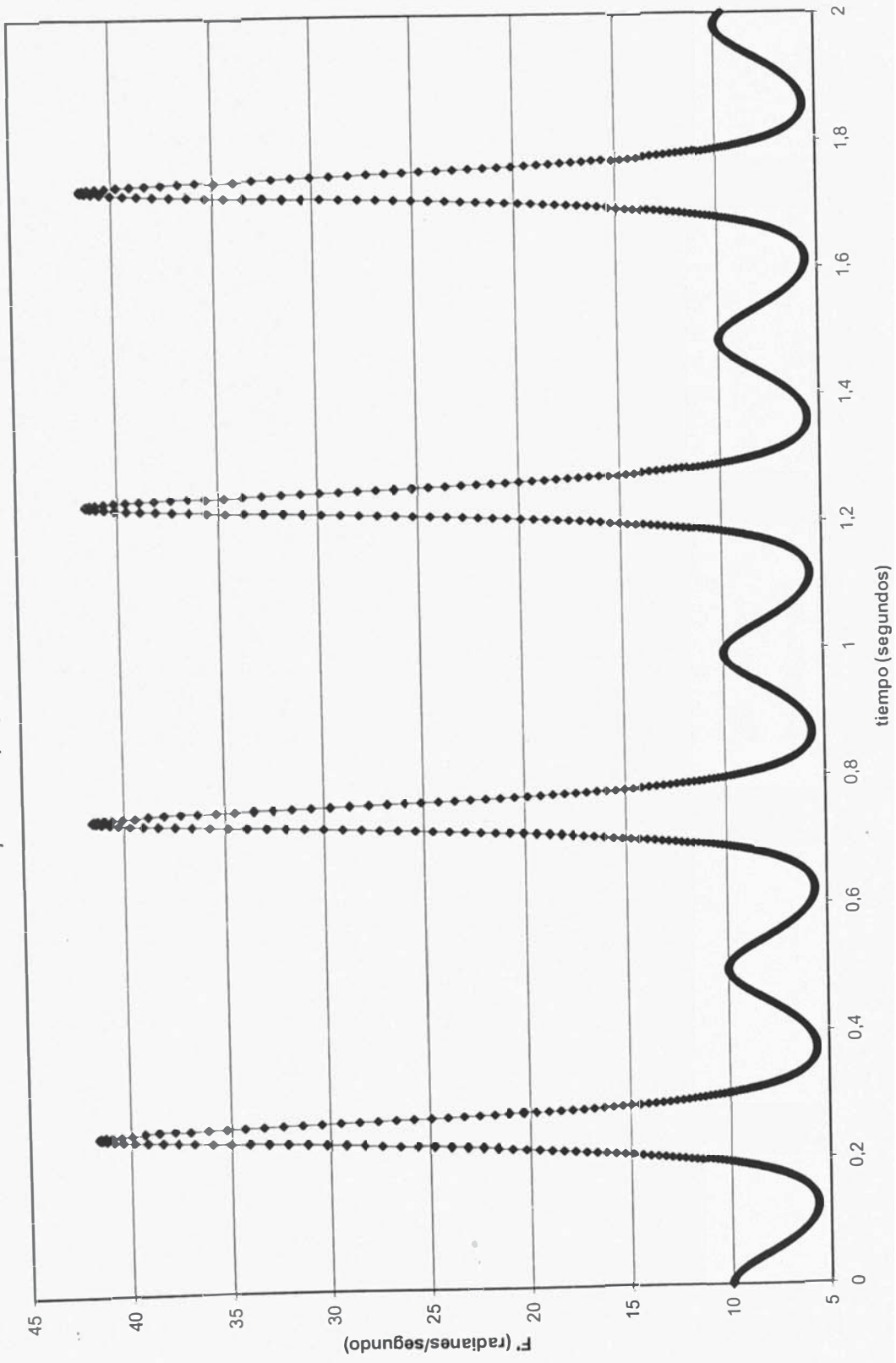
ϕ vs tiempo [Grafico (1.5.101)]

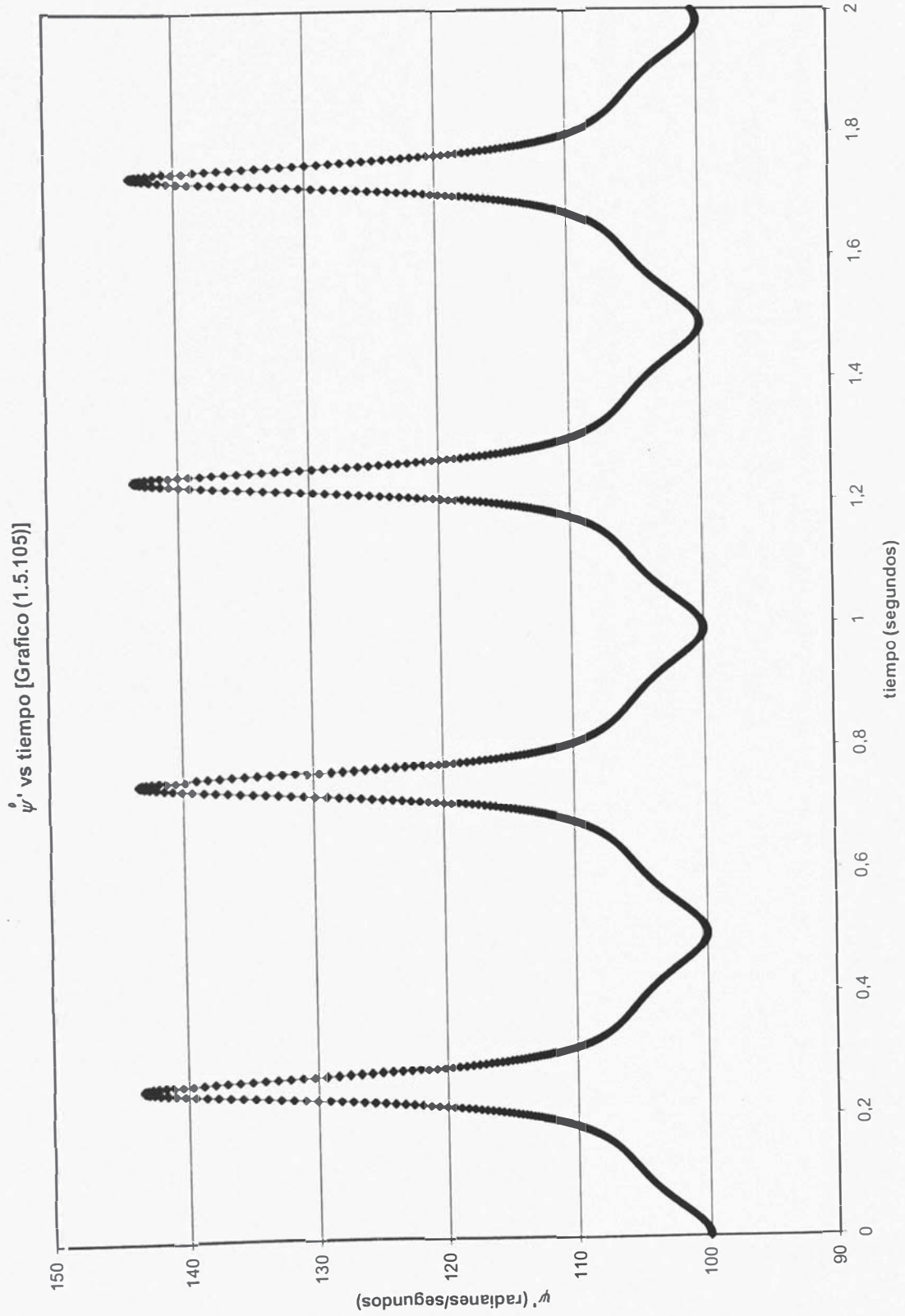




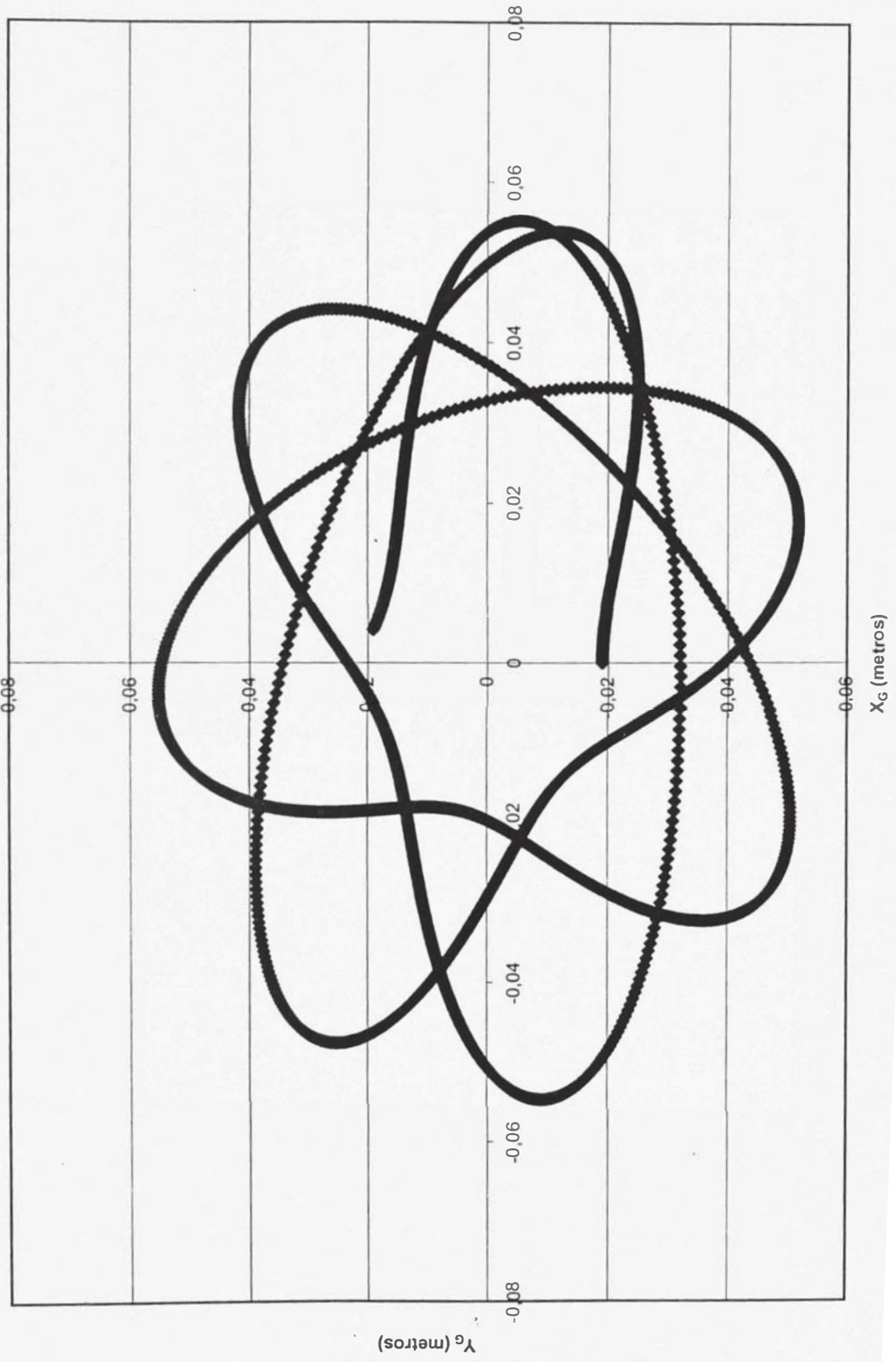


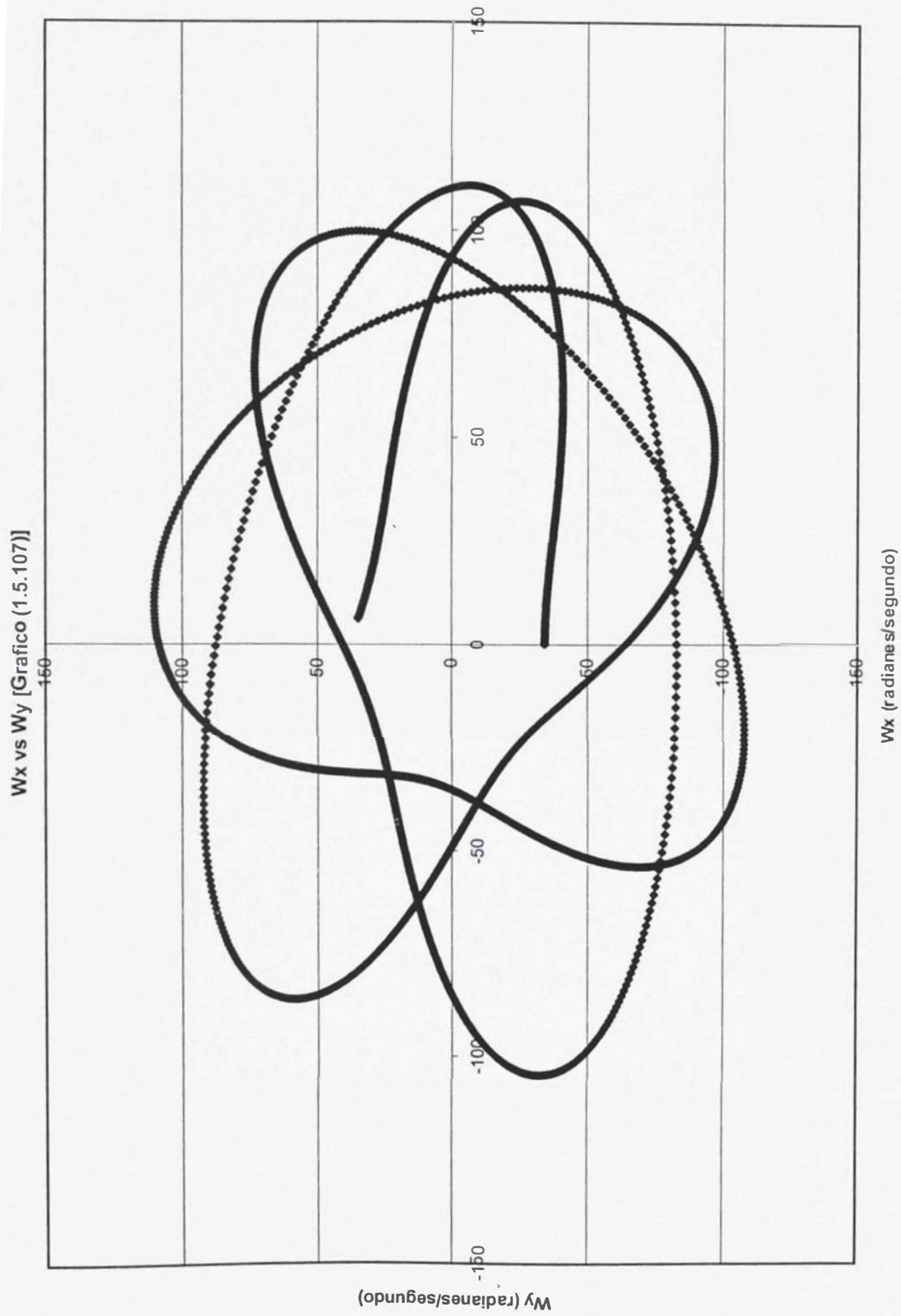
$\dot{\phi}'$ vs tiempo [Grafico (1.5.104)]



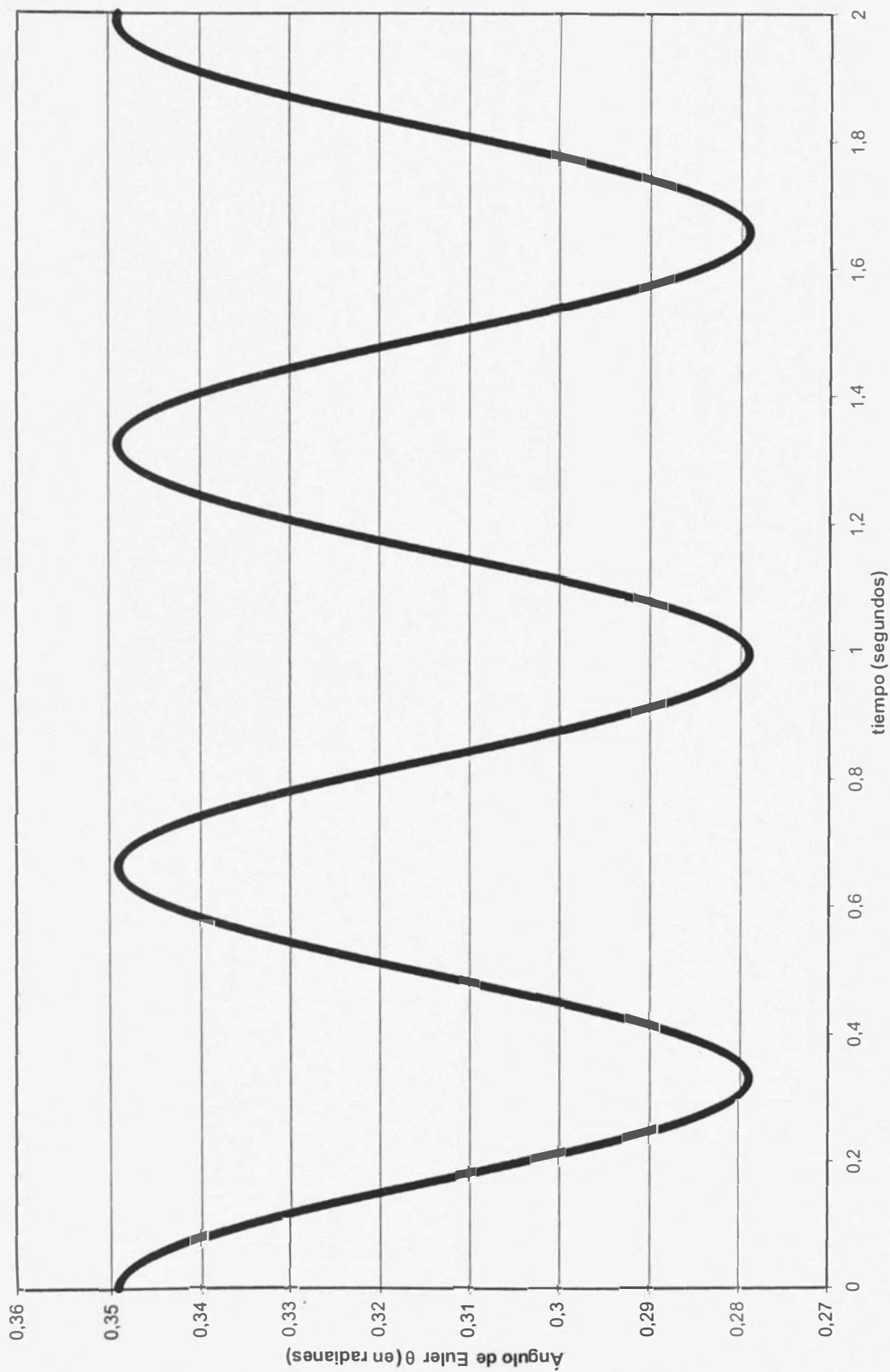


X_G vs Y_G [Graficq 1.5.106]

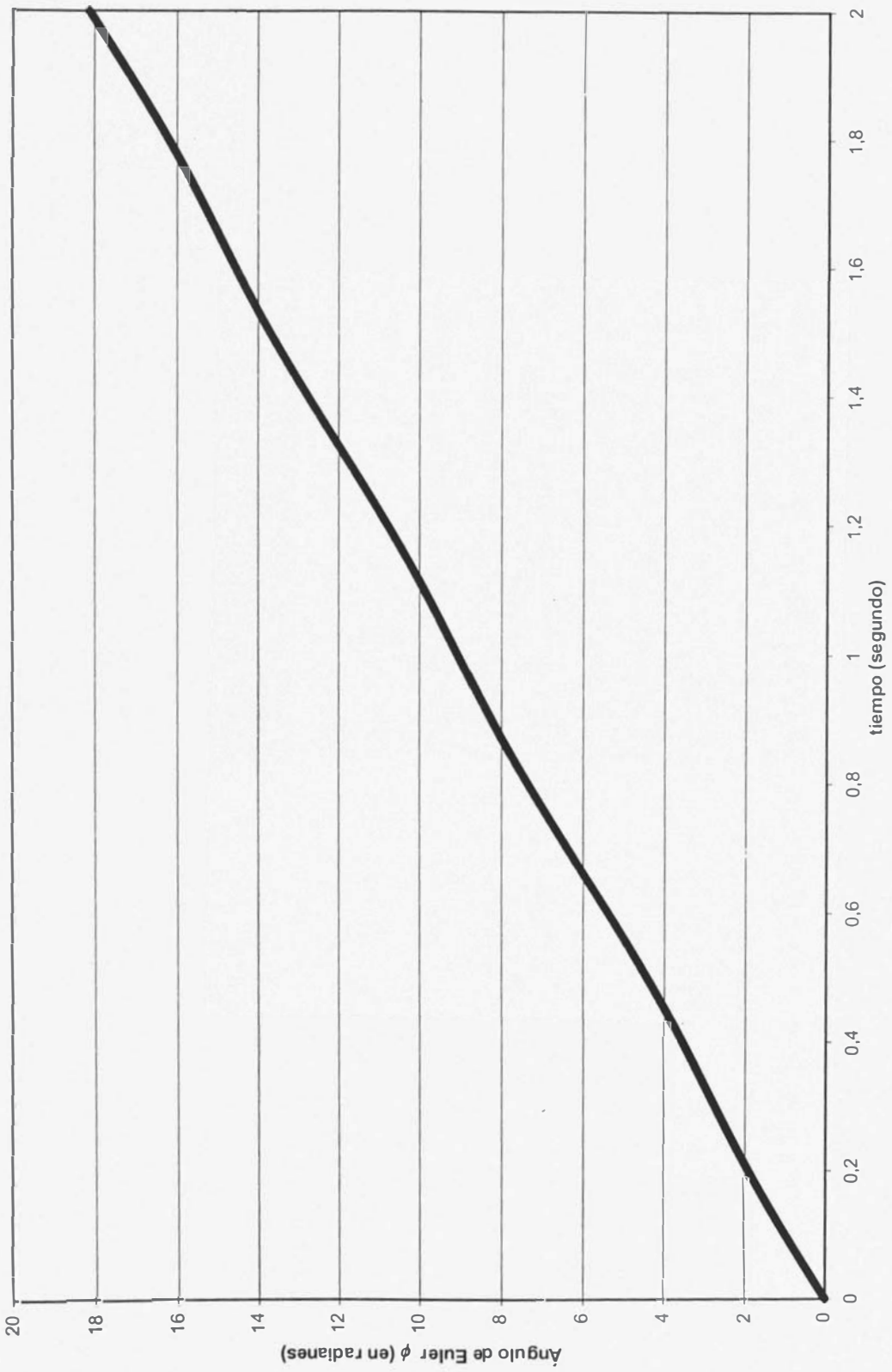




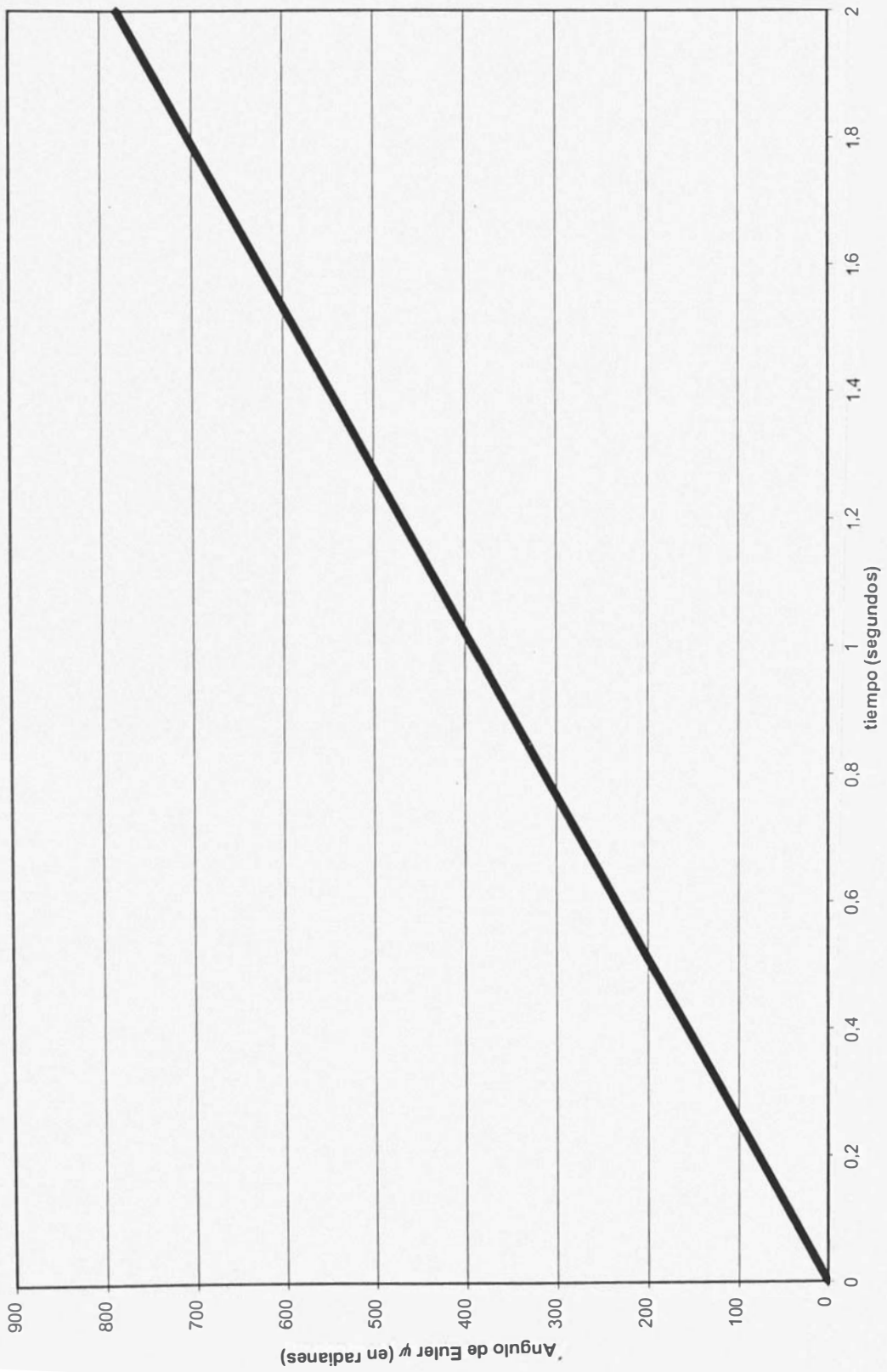
θ vs tiempo [Grafico (1.5.108)]



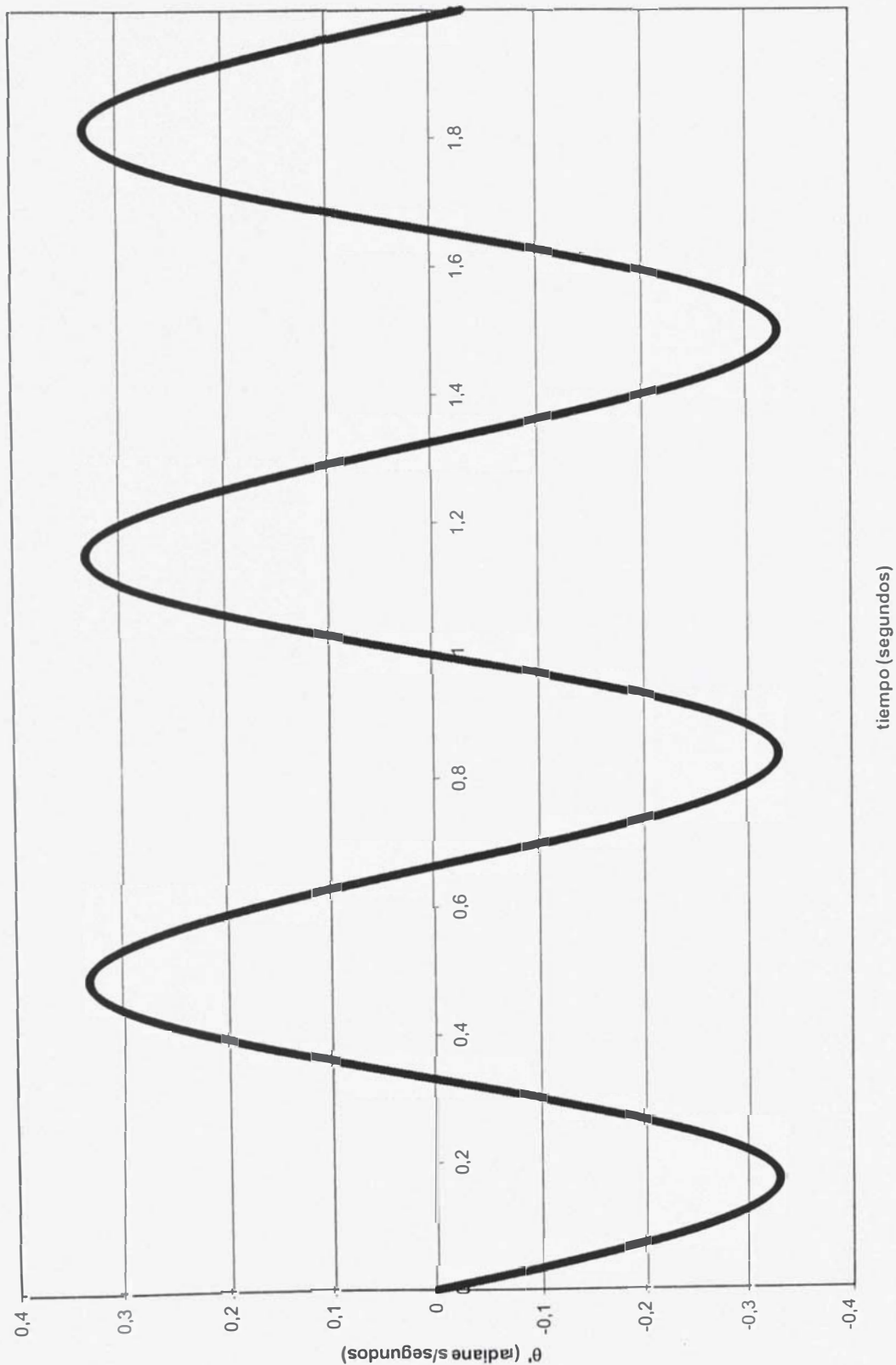
ϕ vs tiempo [Grafico (1.5.109)]



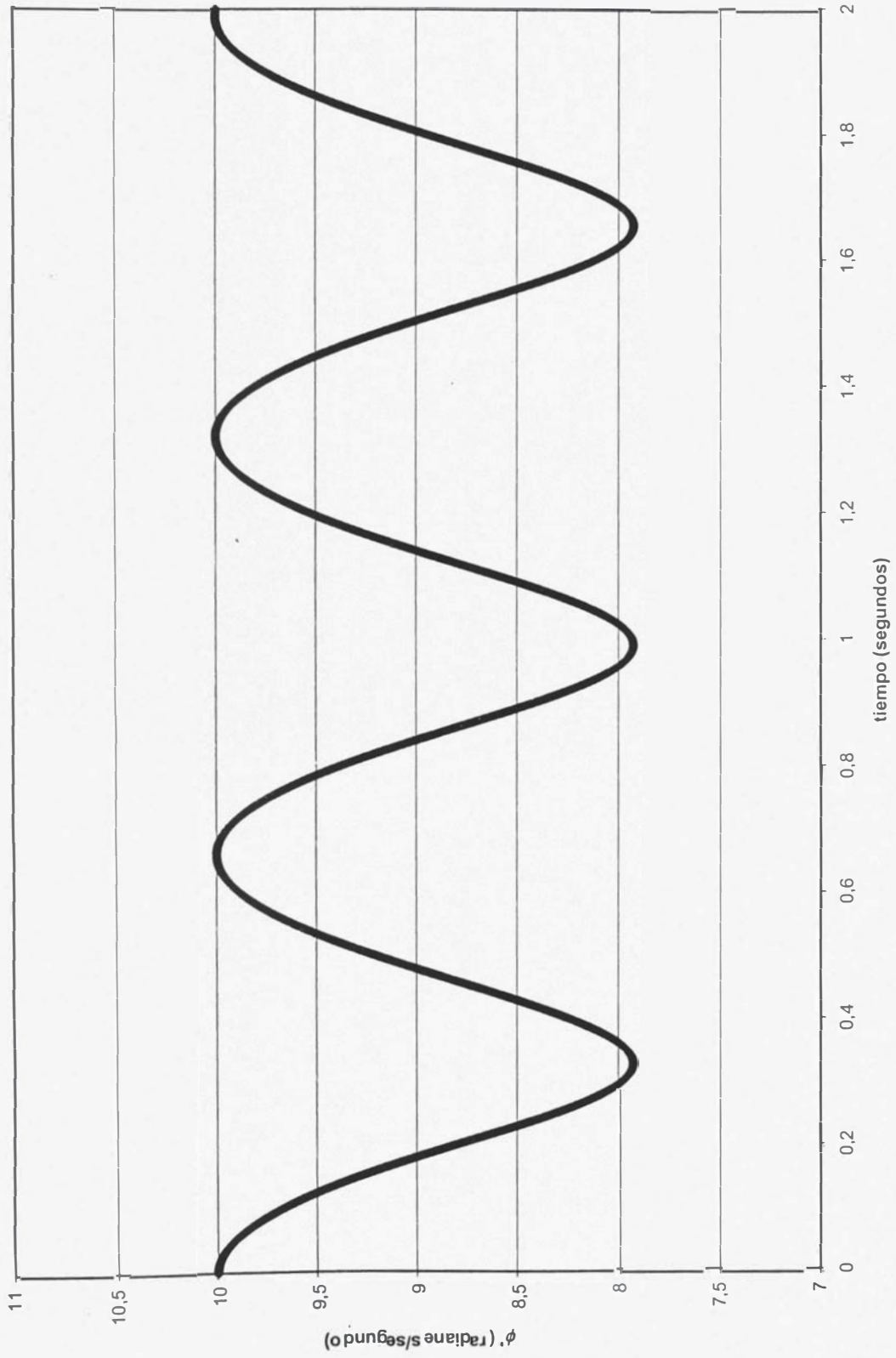
ψ vs tiempo [Grafico (.5.110)]



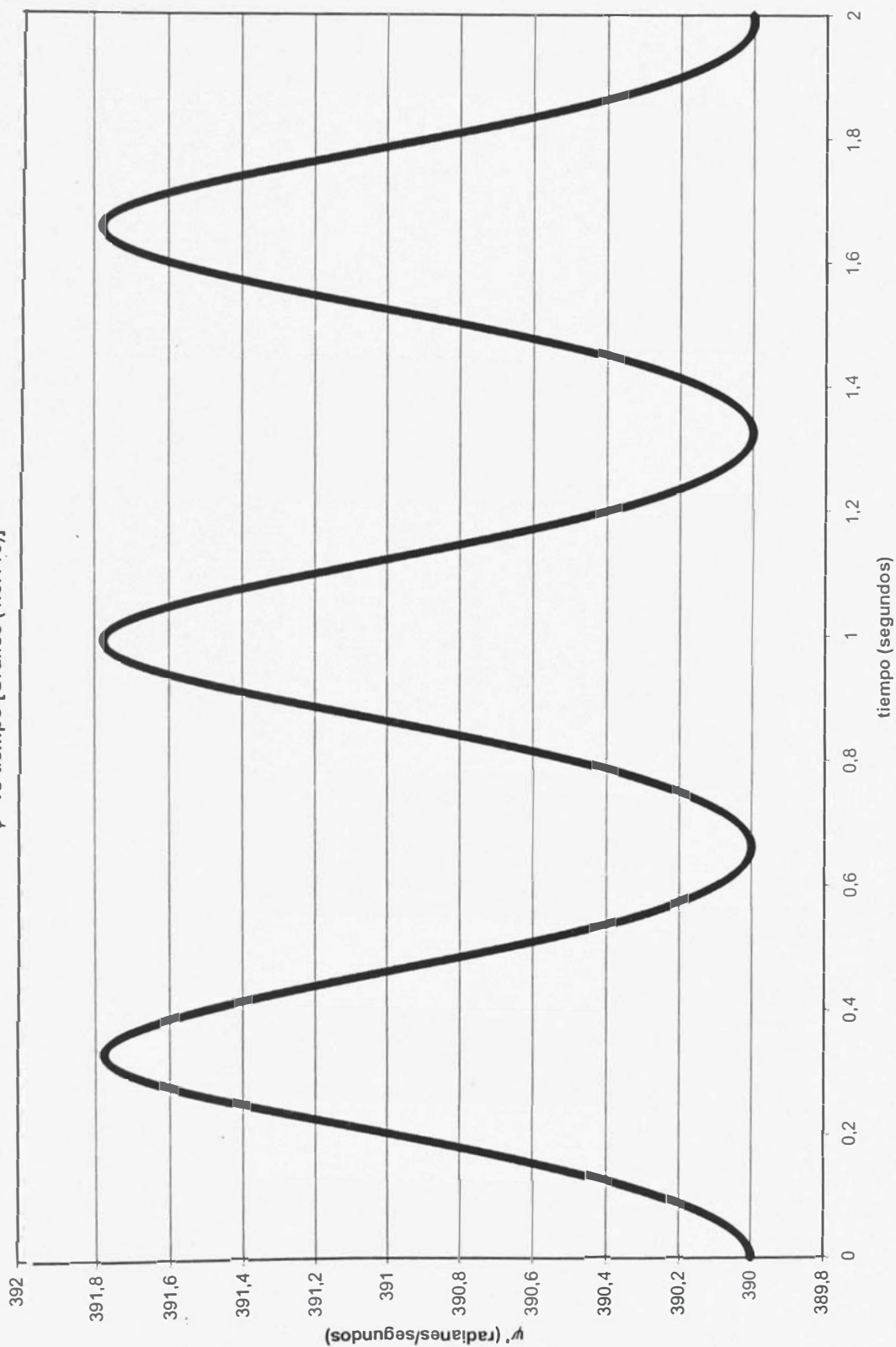
$\dot{\theta}'$ vs tiempo [Grafico (1.5.111)]



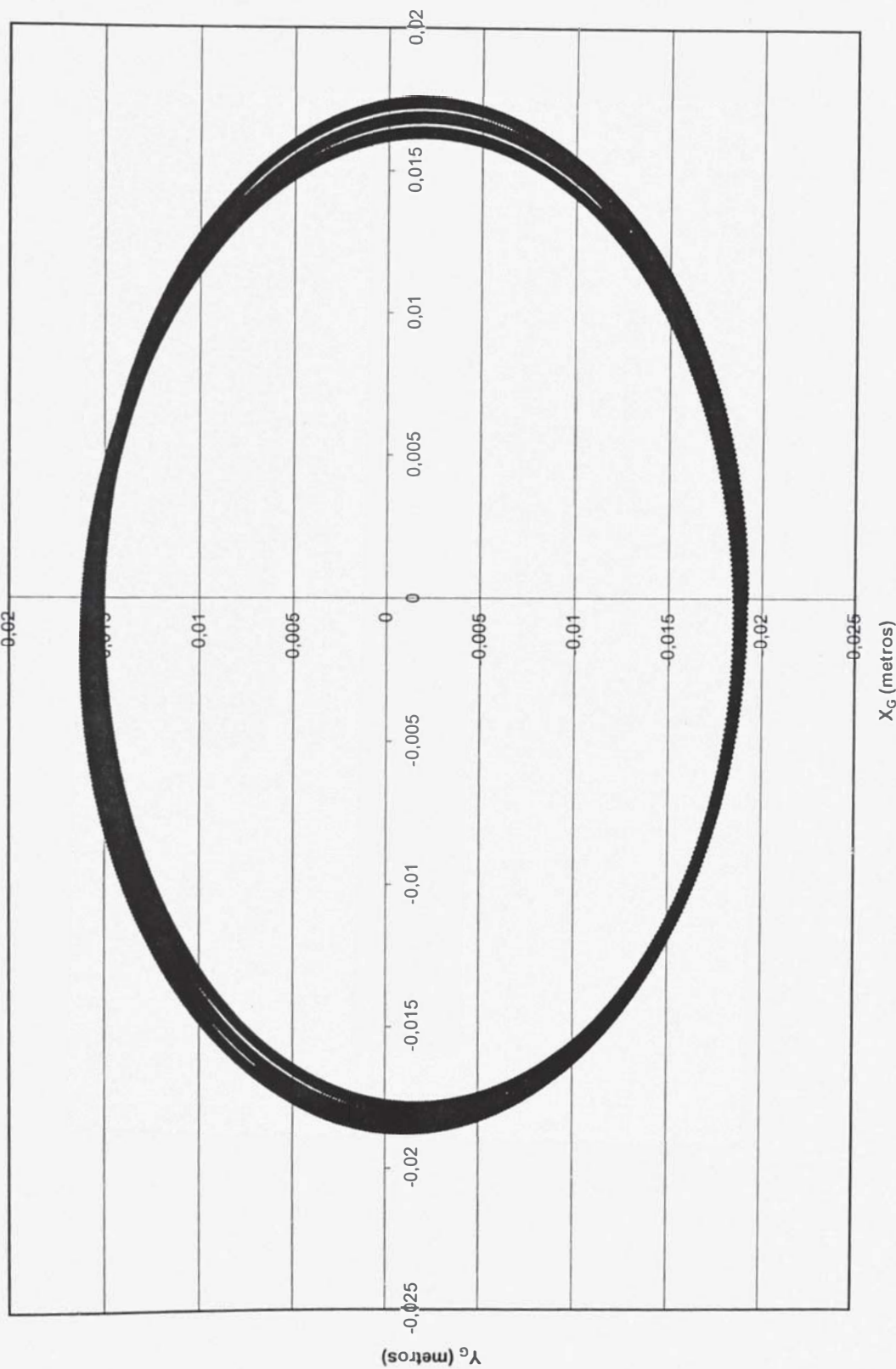
$\dot{\phi}$ ' vs tiempo [Gráfico (1.5.112)]

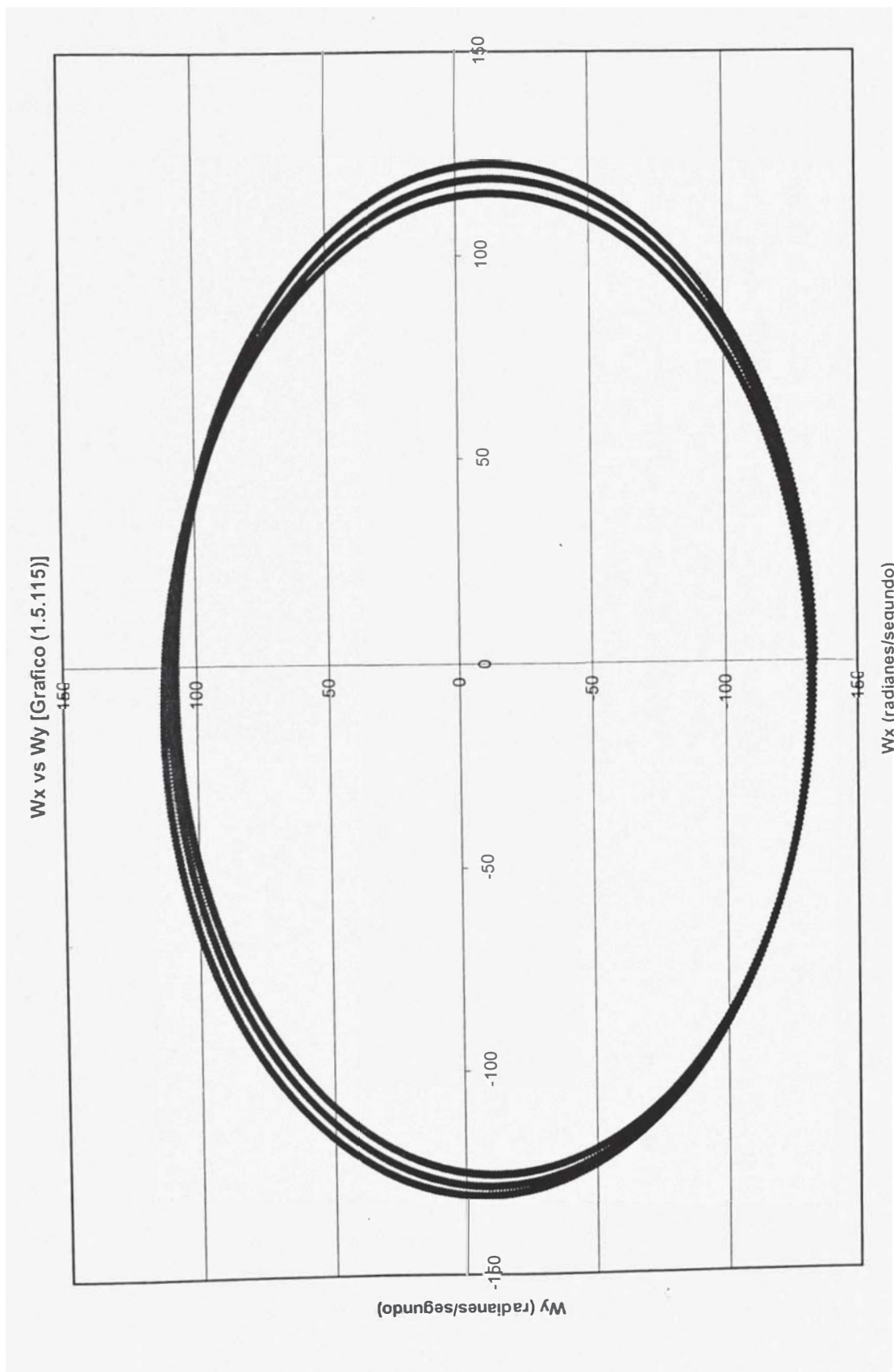


$\dot{\psi}'$ vs tiempo [Grafico (1.5.113)]

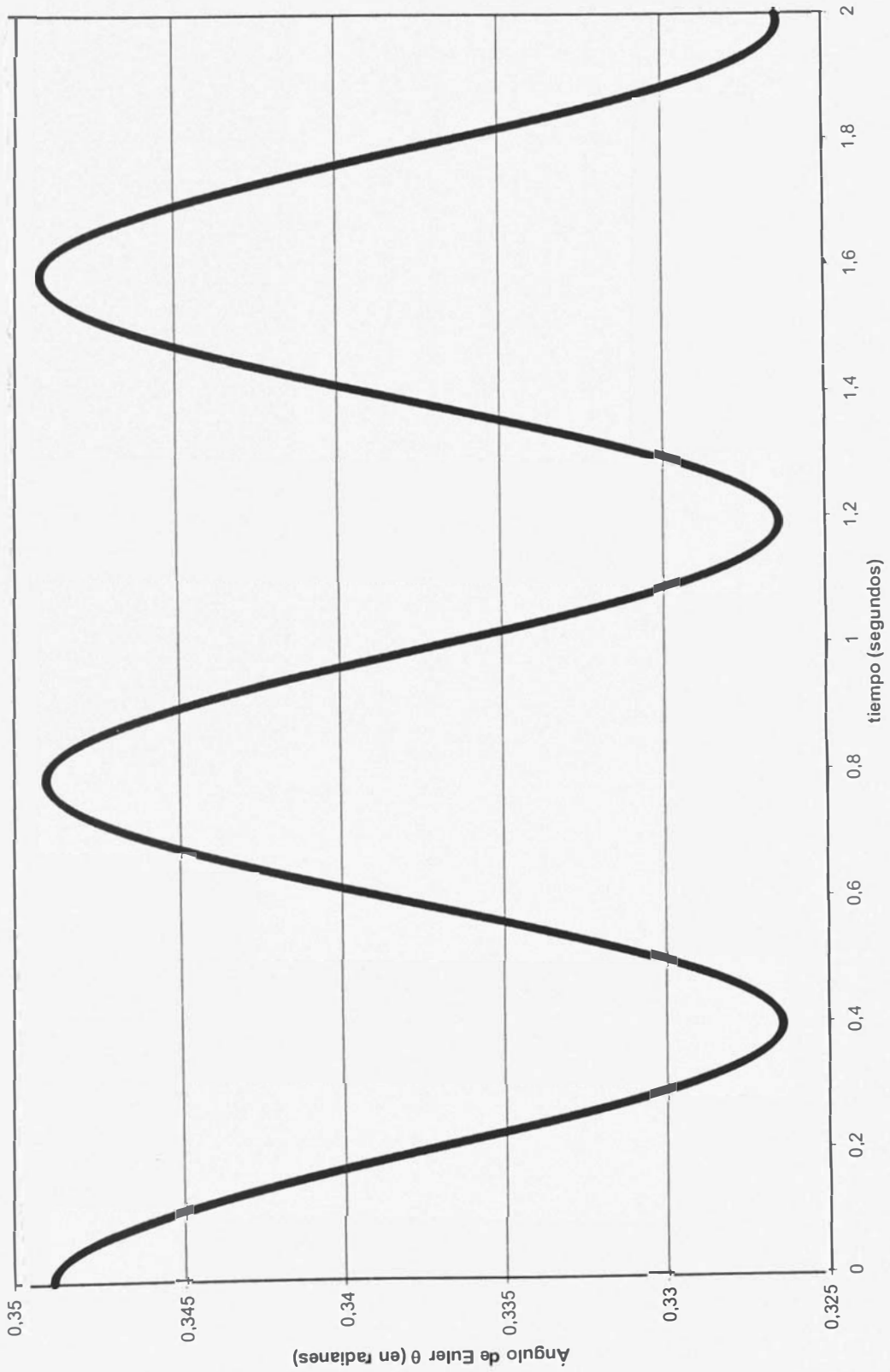


X_G vs Y_G [Gráfico (1.5.114)]

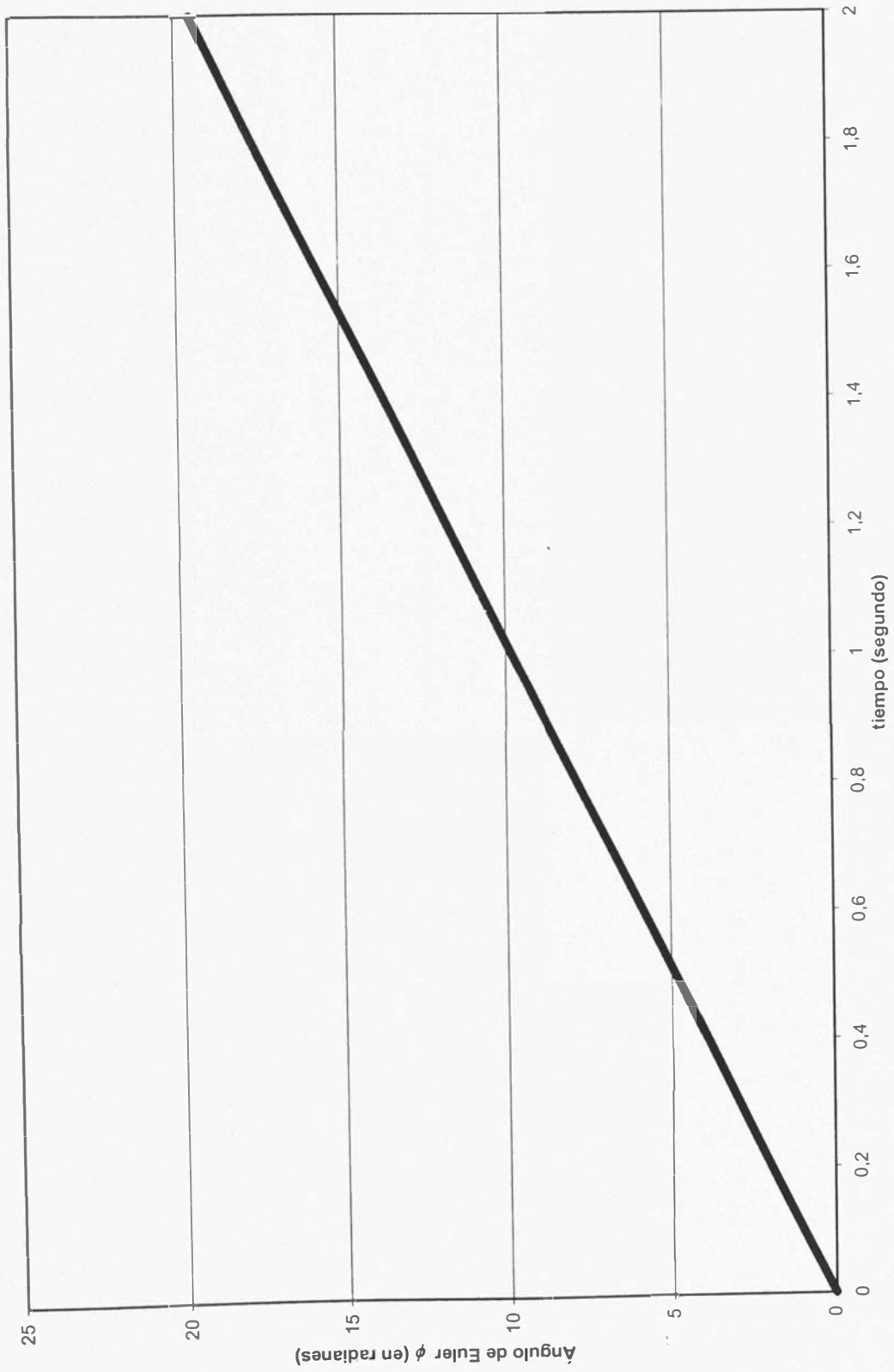




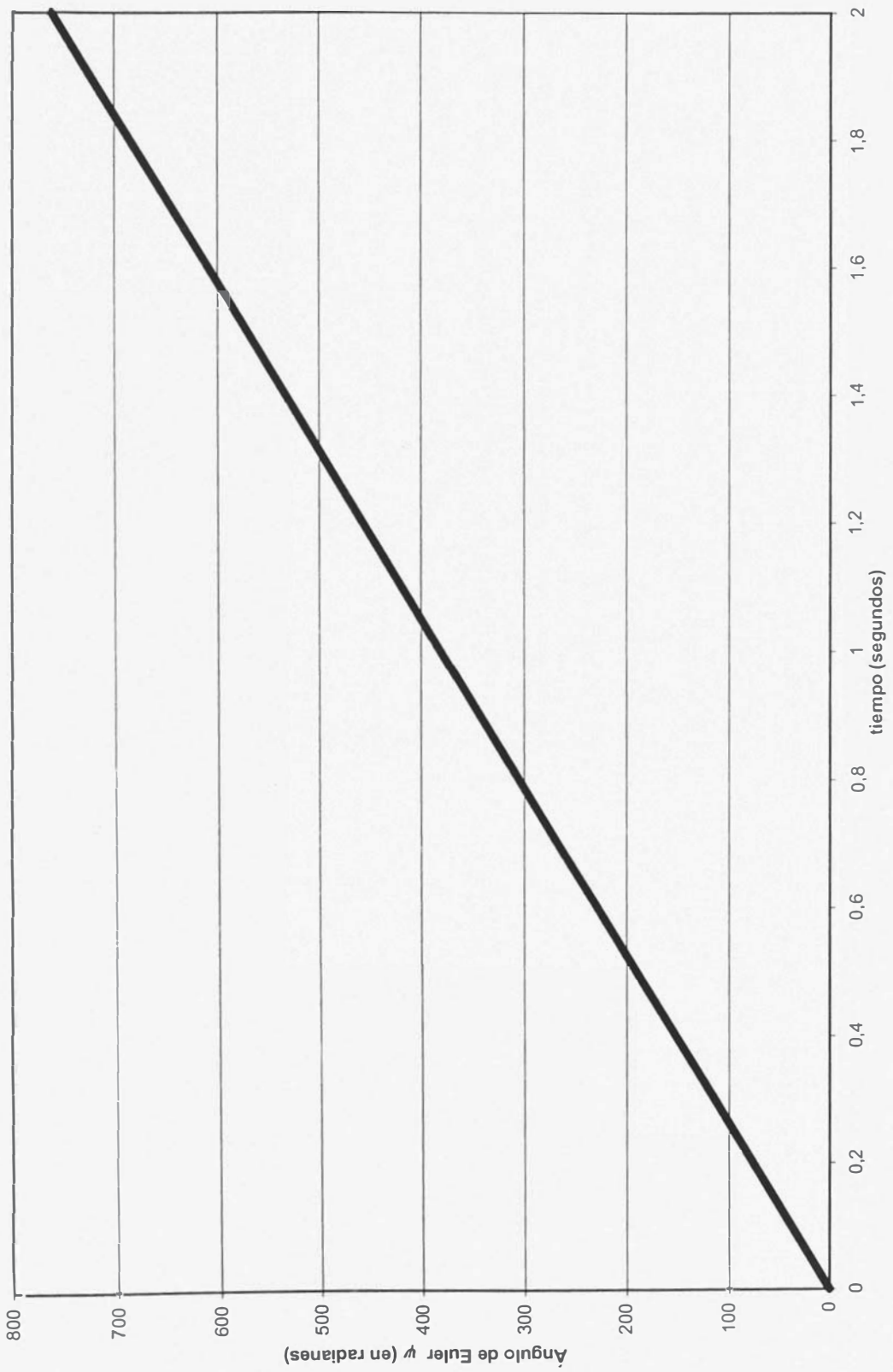
θ vs tiempo [Gráfico (1.5.116)]



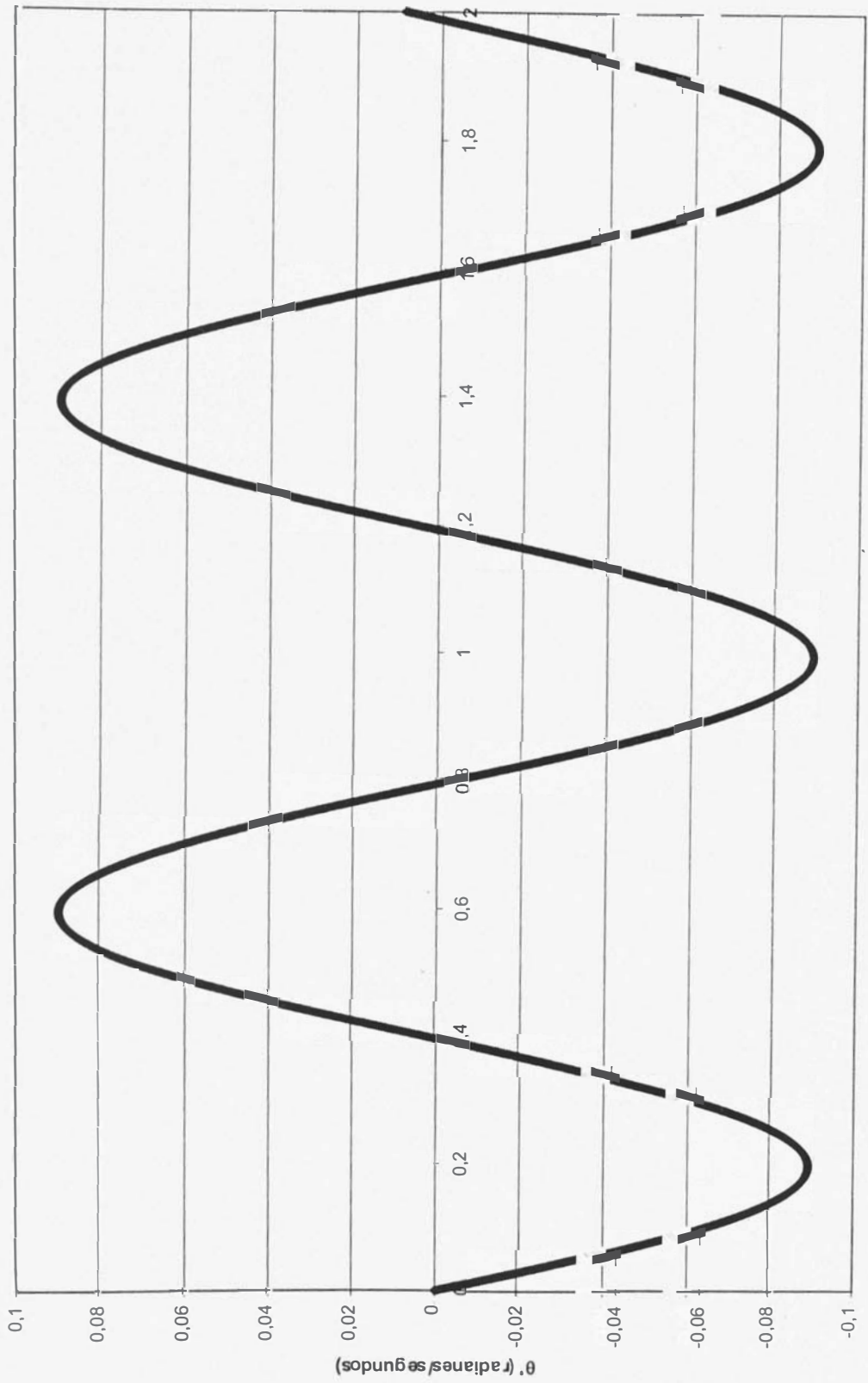
ϕ vs tiempo [Grafico (1.5.117)]



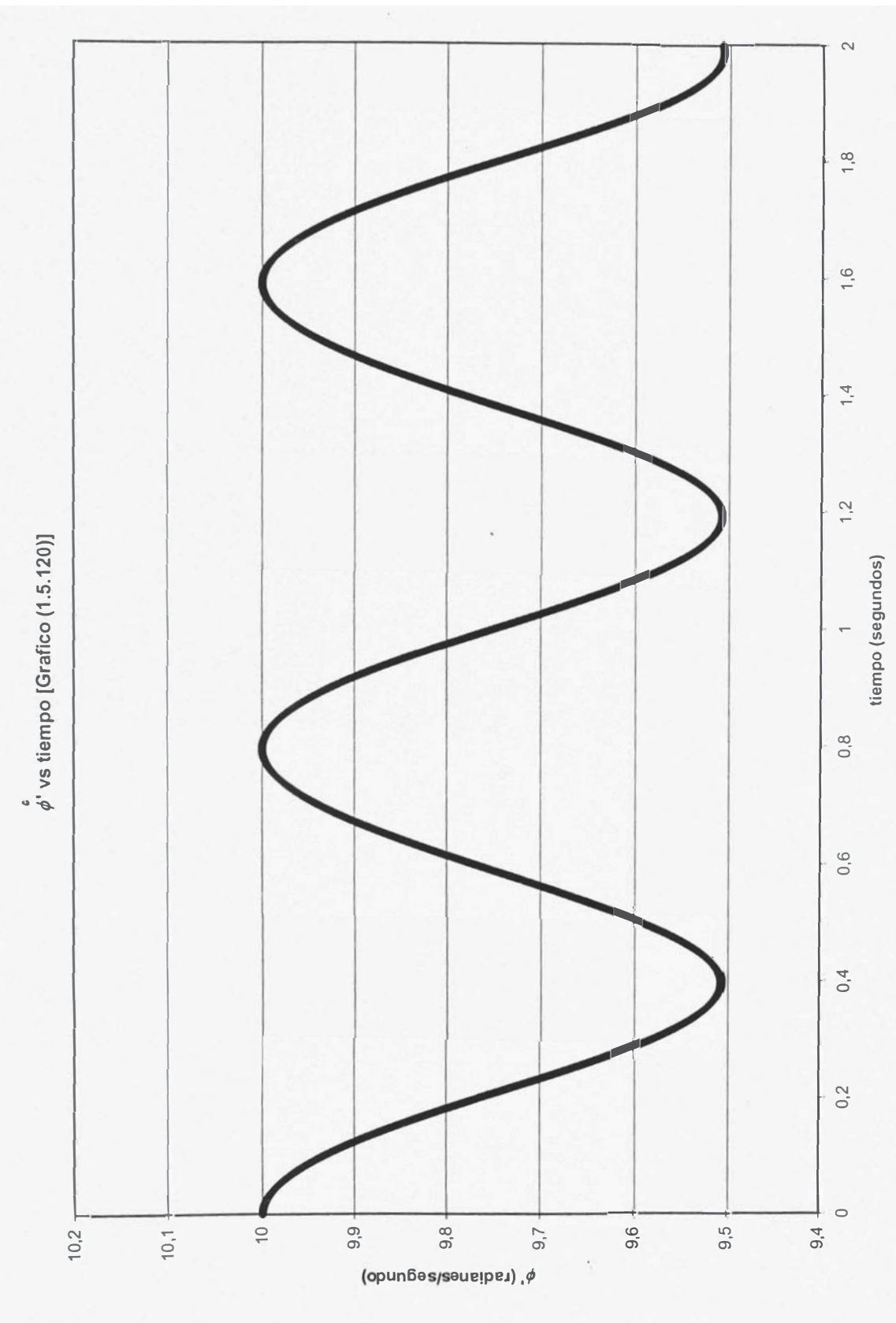
ψ vs tiempo [Grafico (1.5.118)]

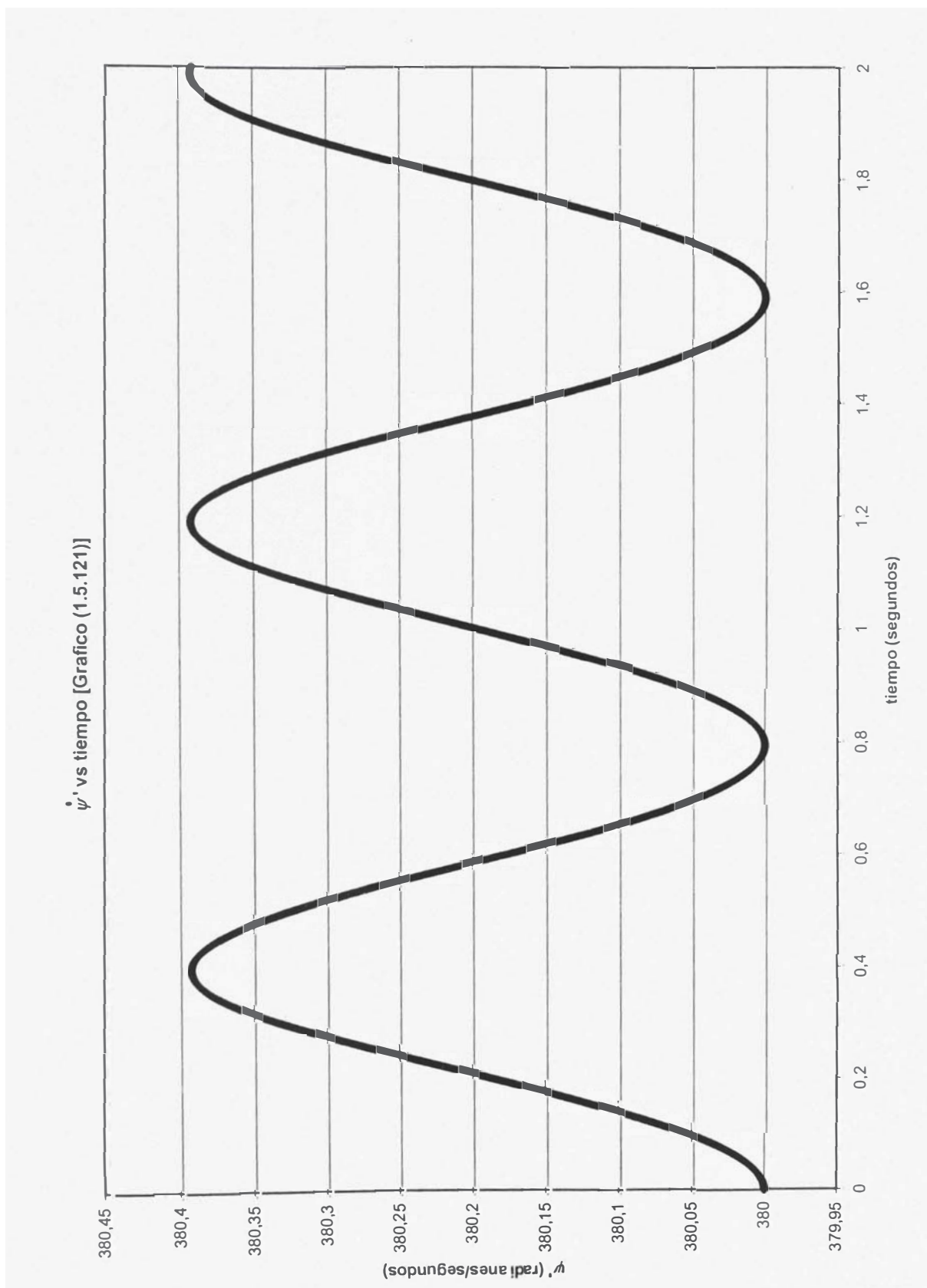


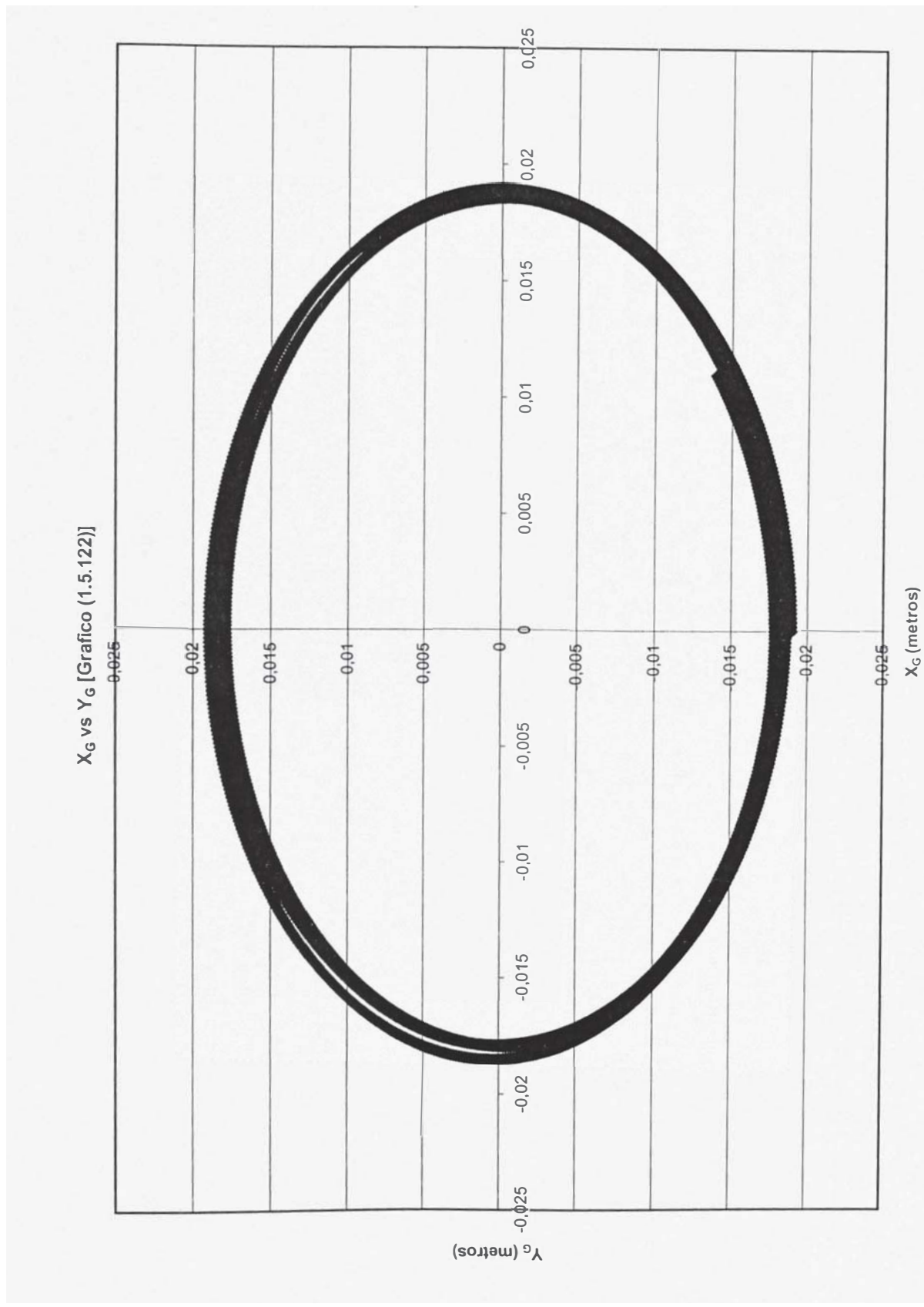
θ' vs tiempo [Grafico (1.5.119)]

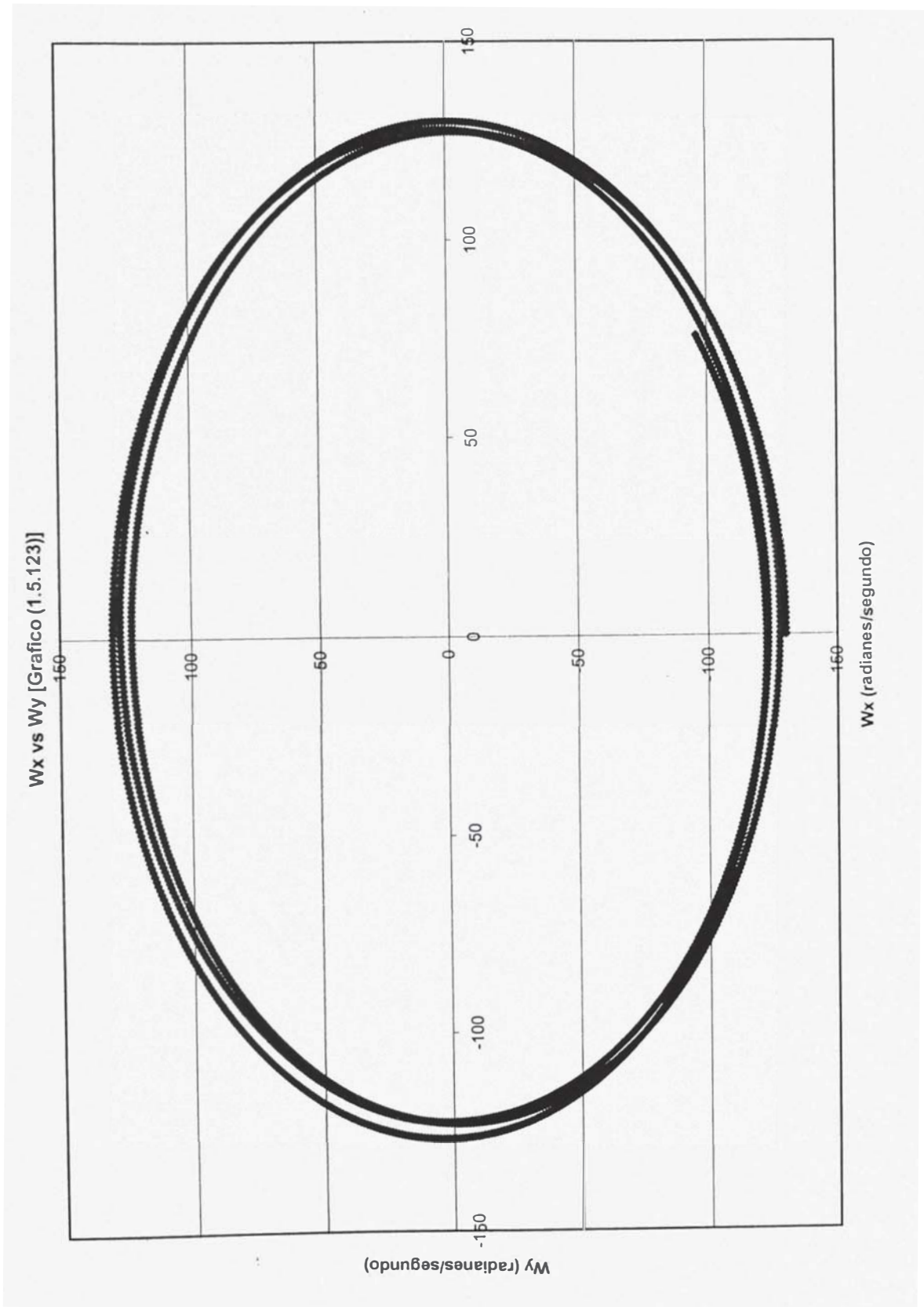


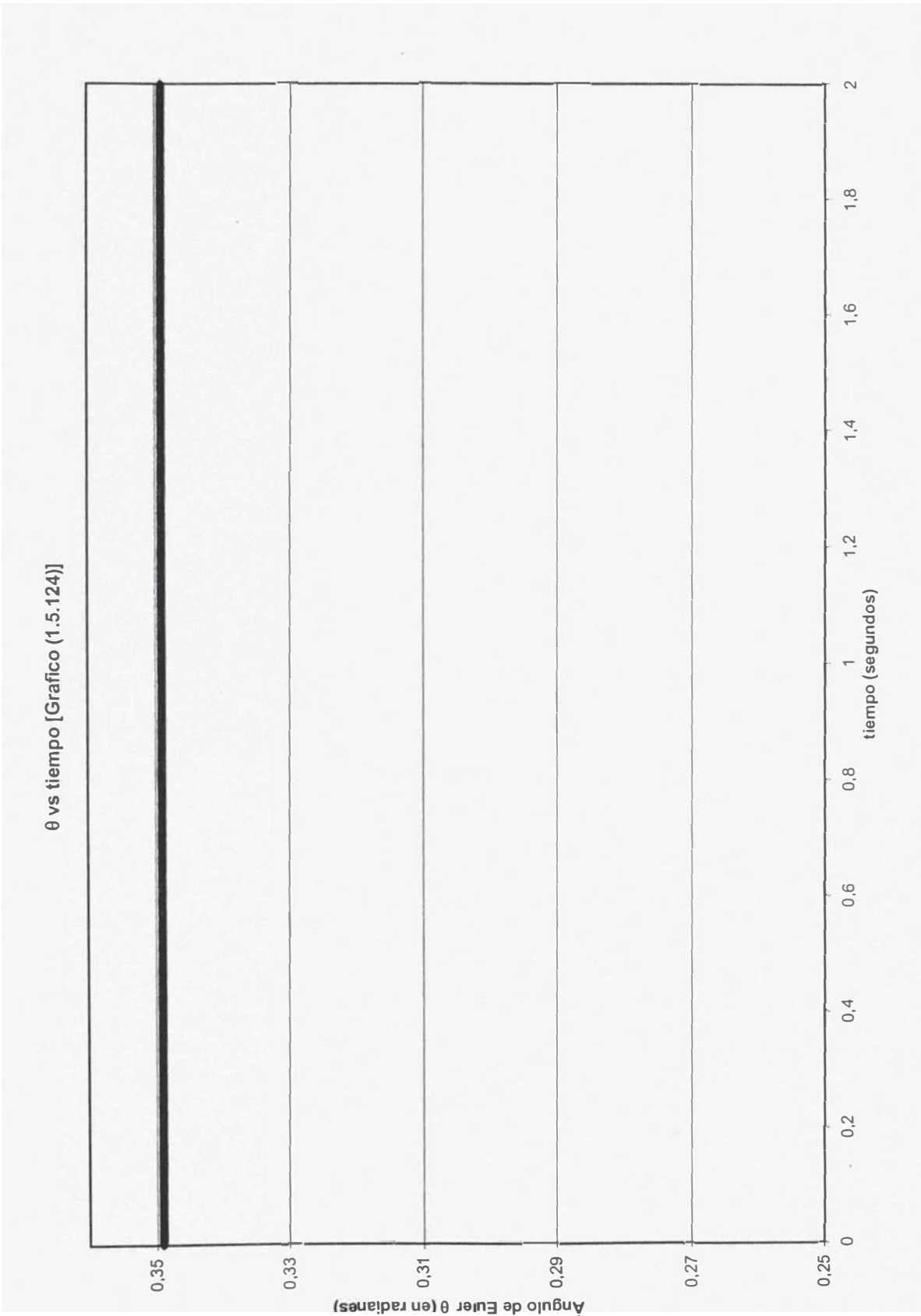
tiempo (segundos)

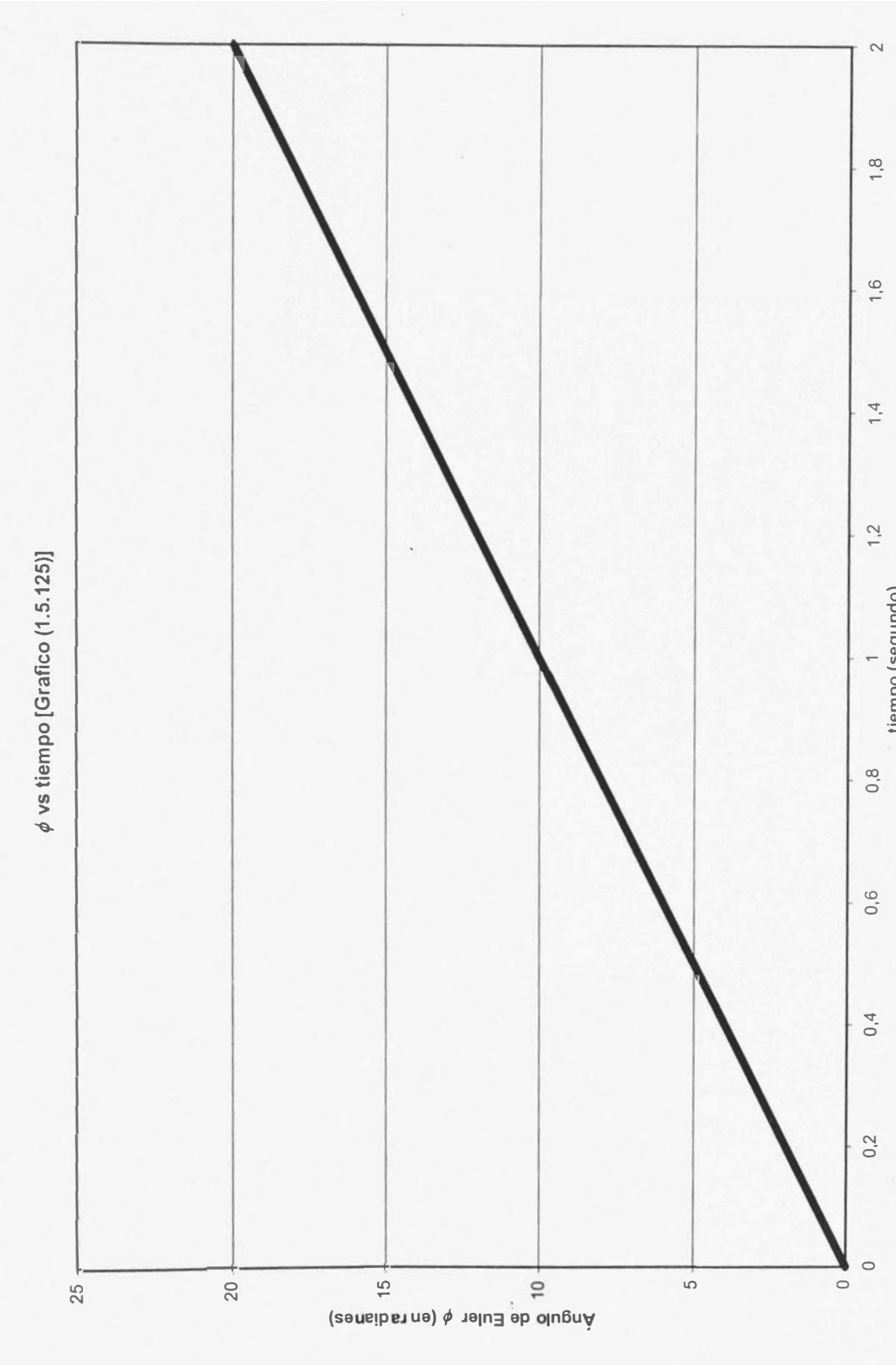




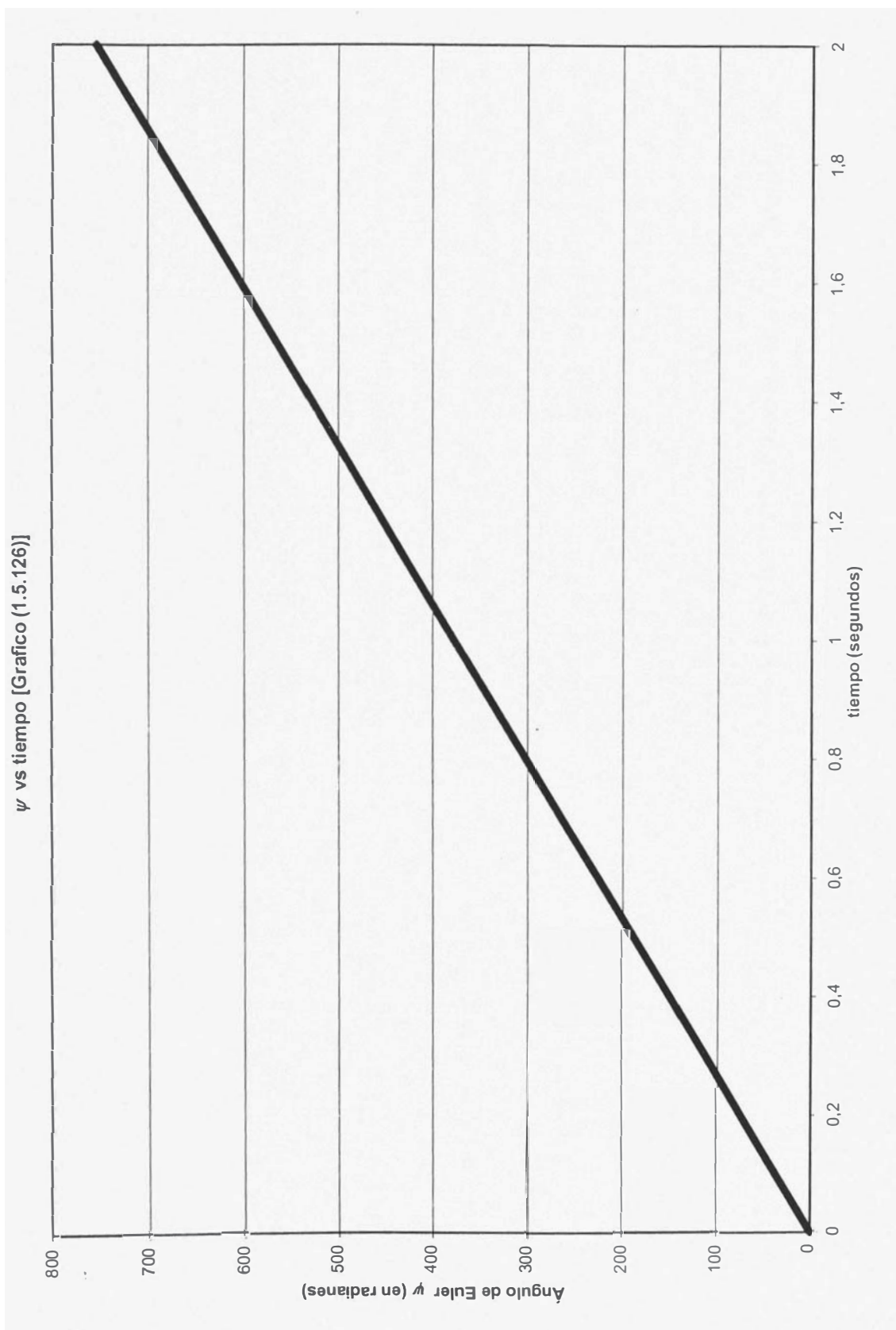


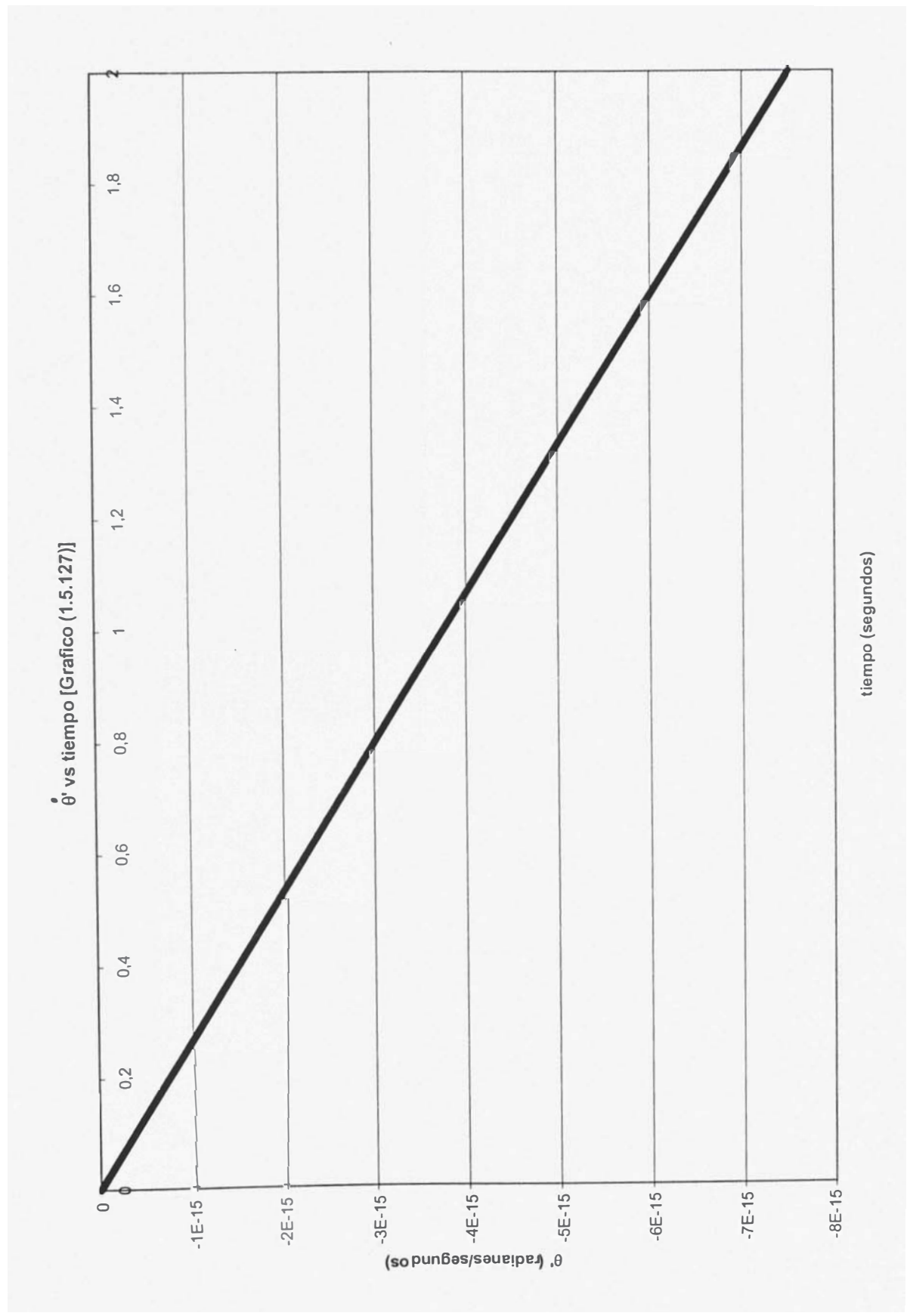




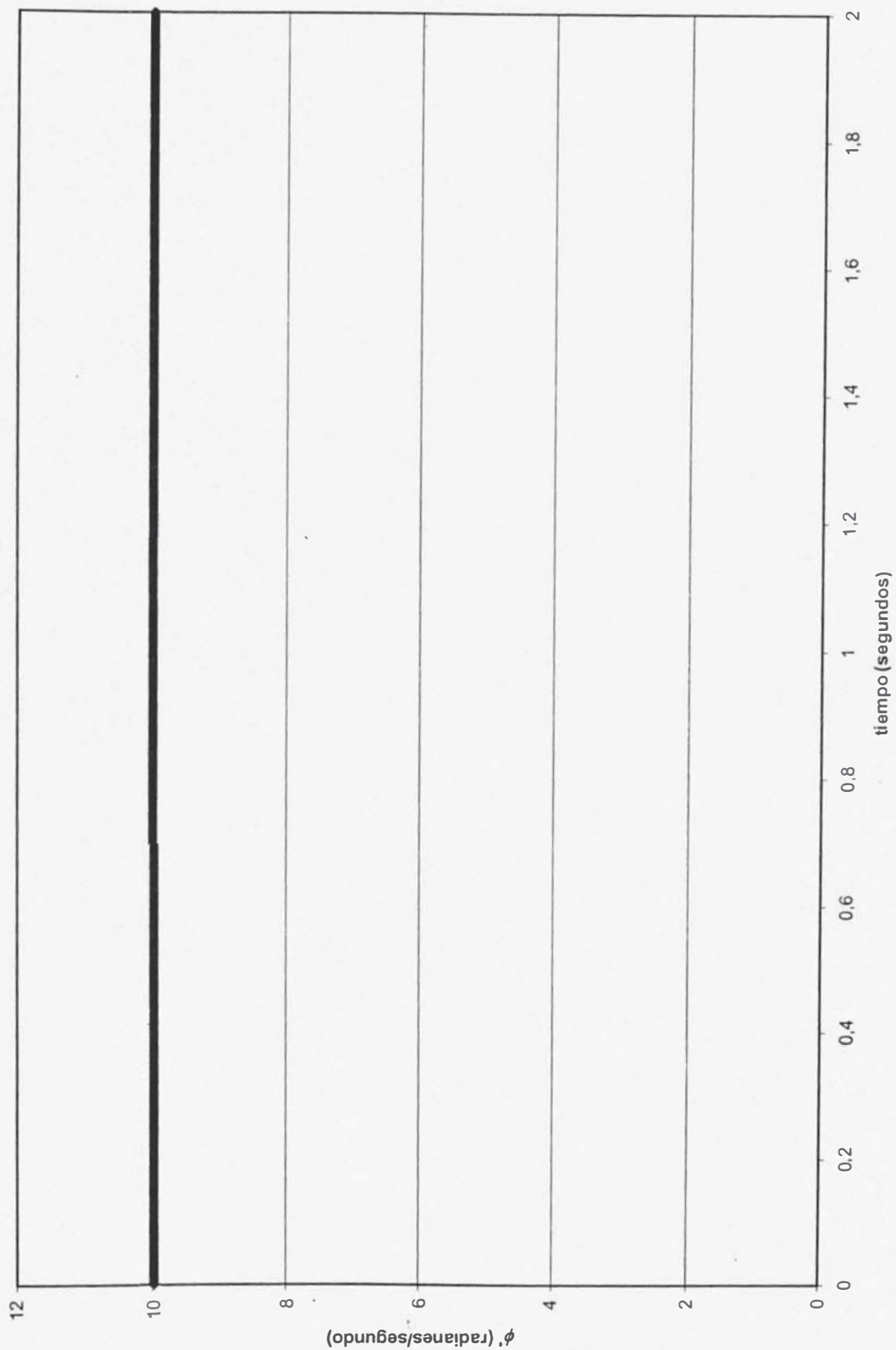


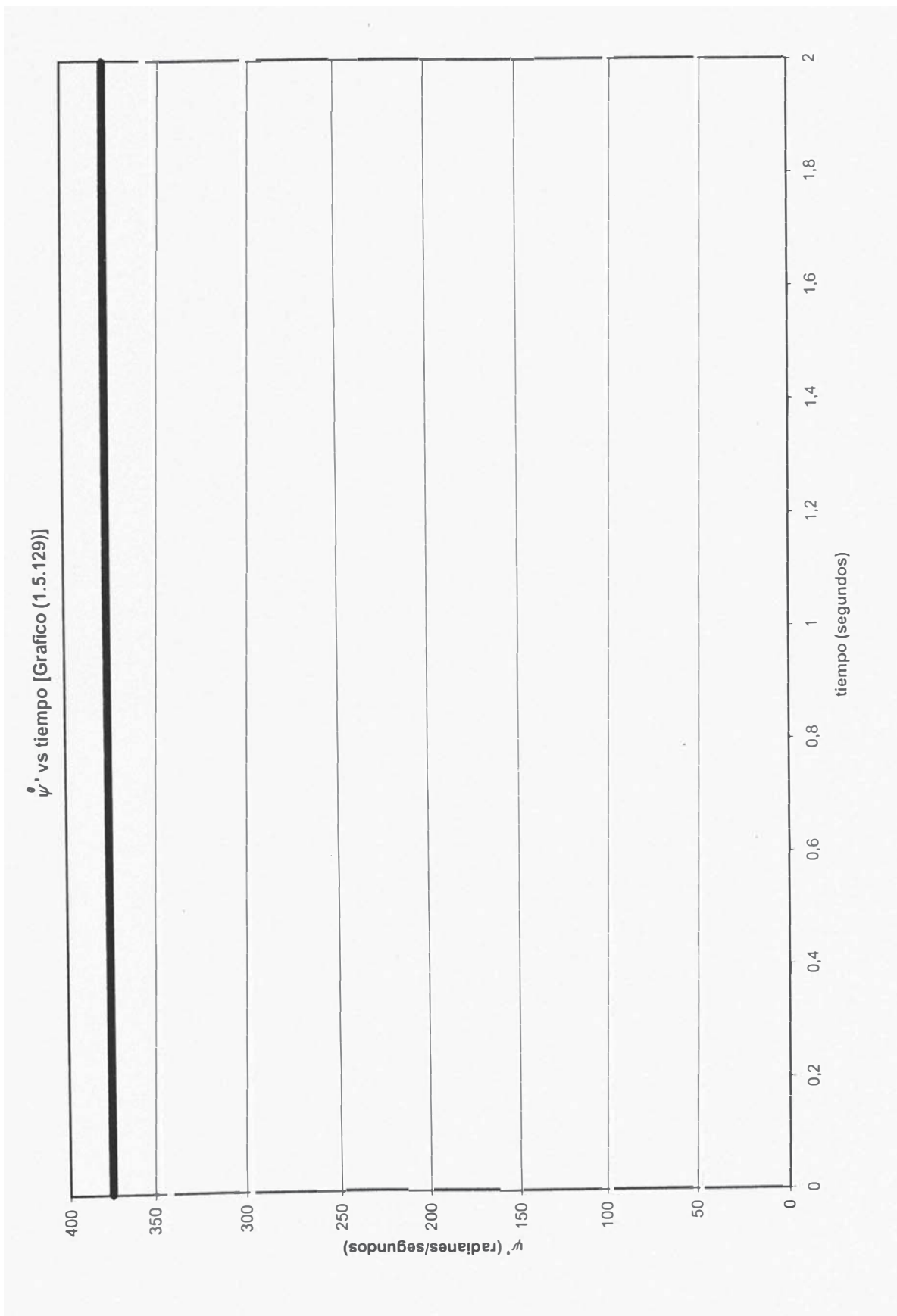
ψ vs tiempo [Grafico (1.5.126)]



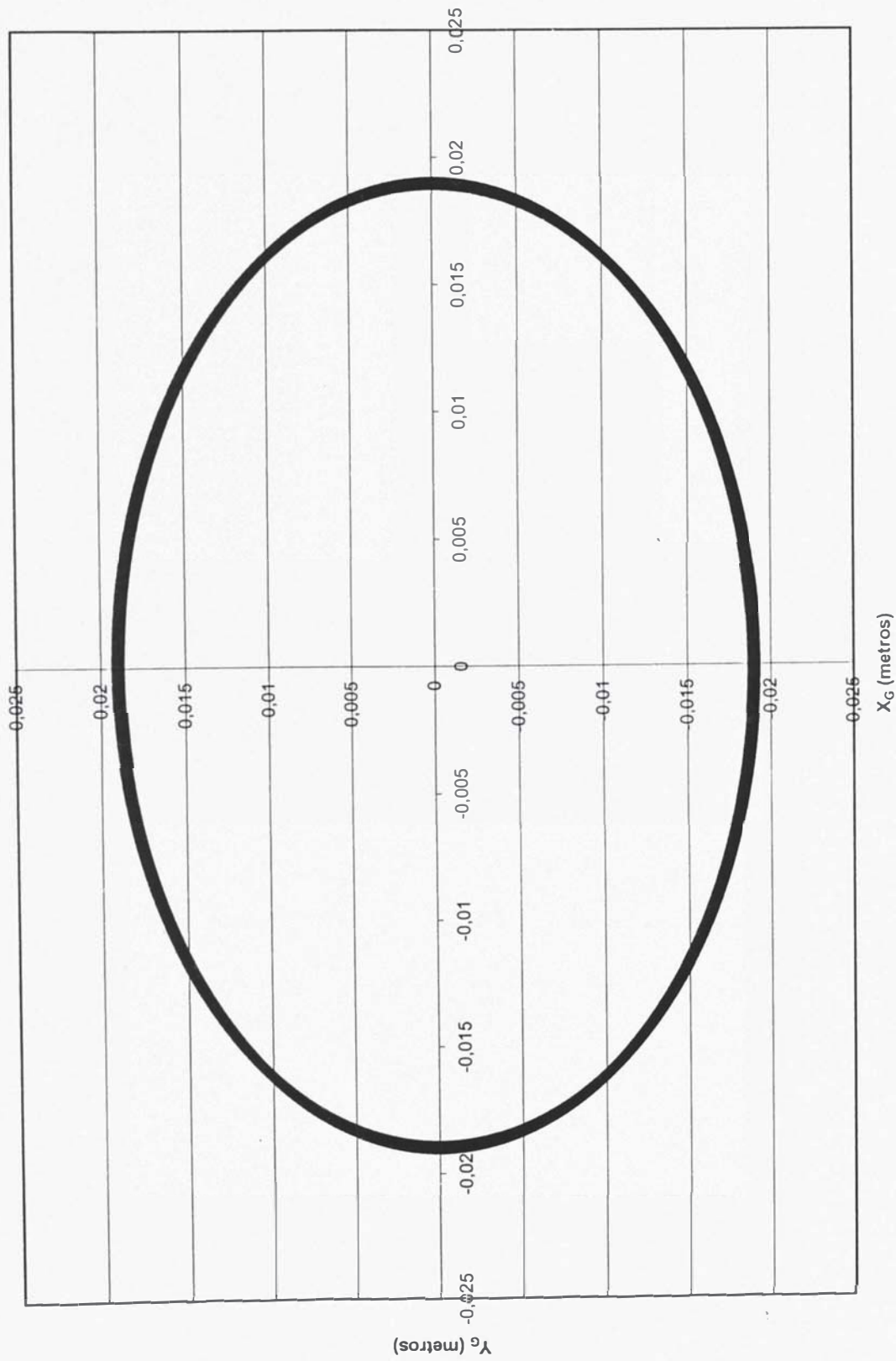


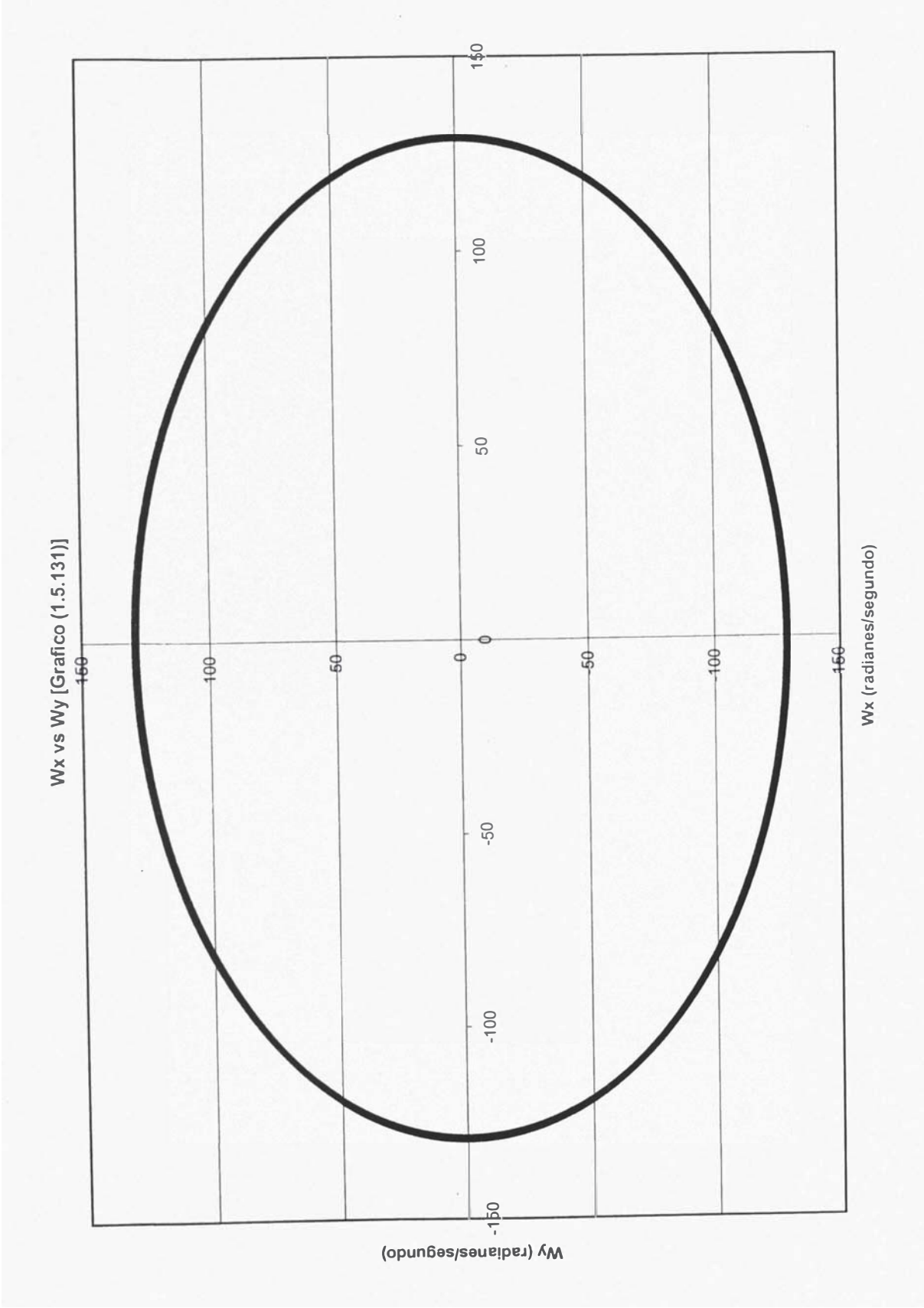
ϕ' vs tiempo [Grafico (1.5.128)]



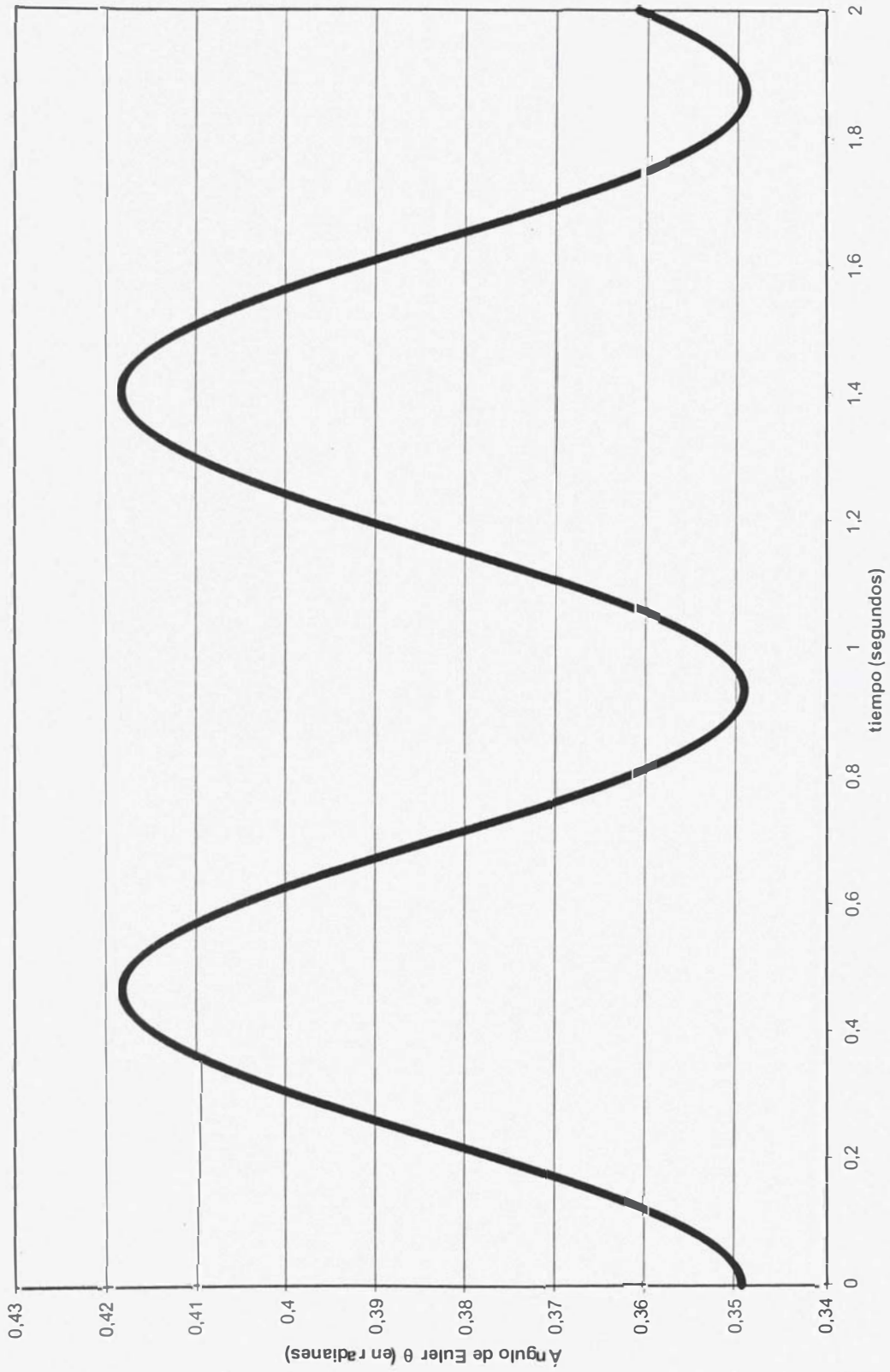


X_G vs Y_G [Gráfico (1.5.130)]

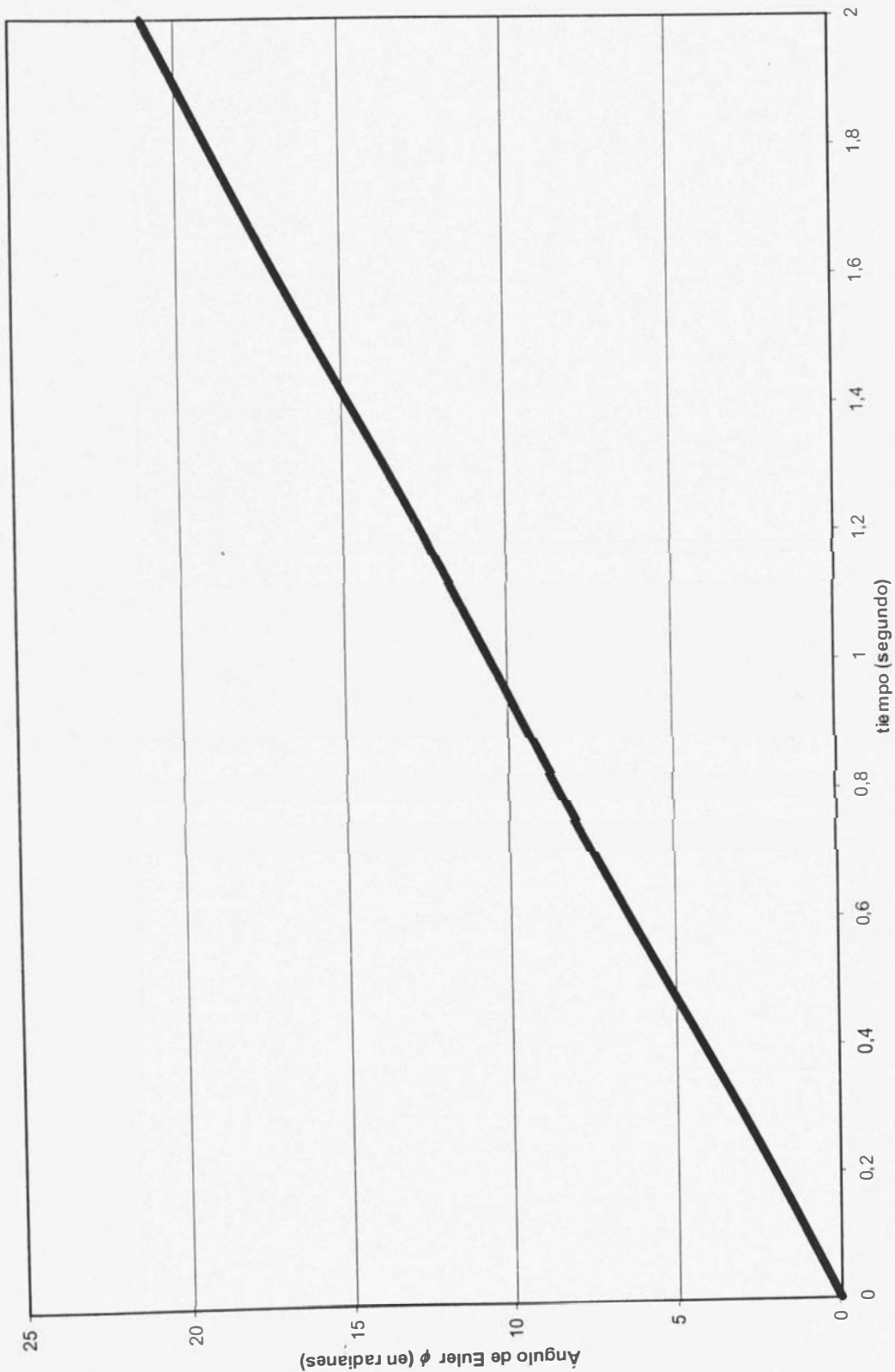




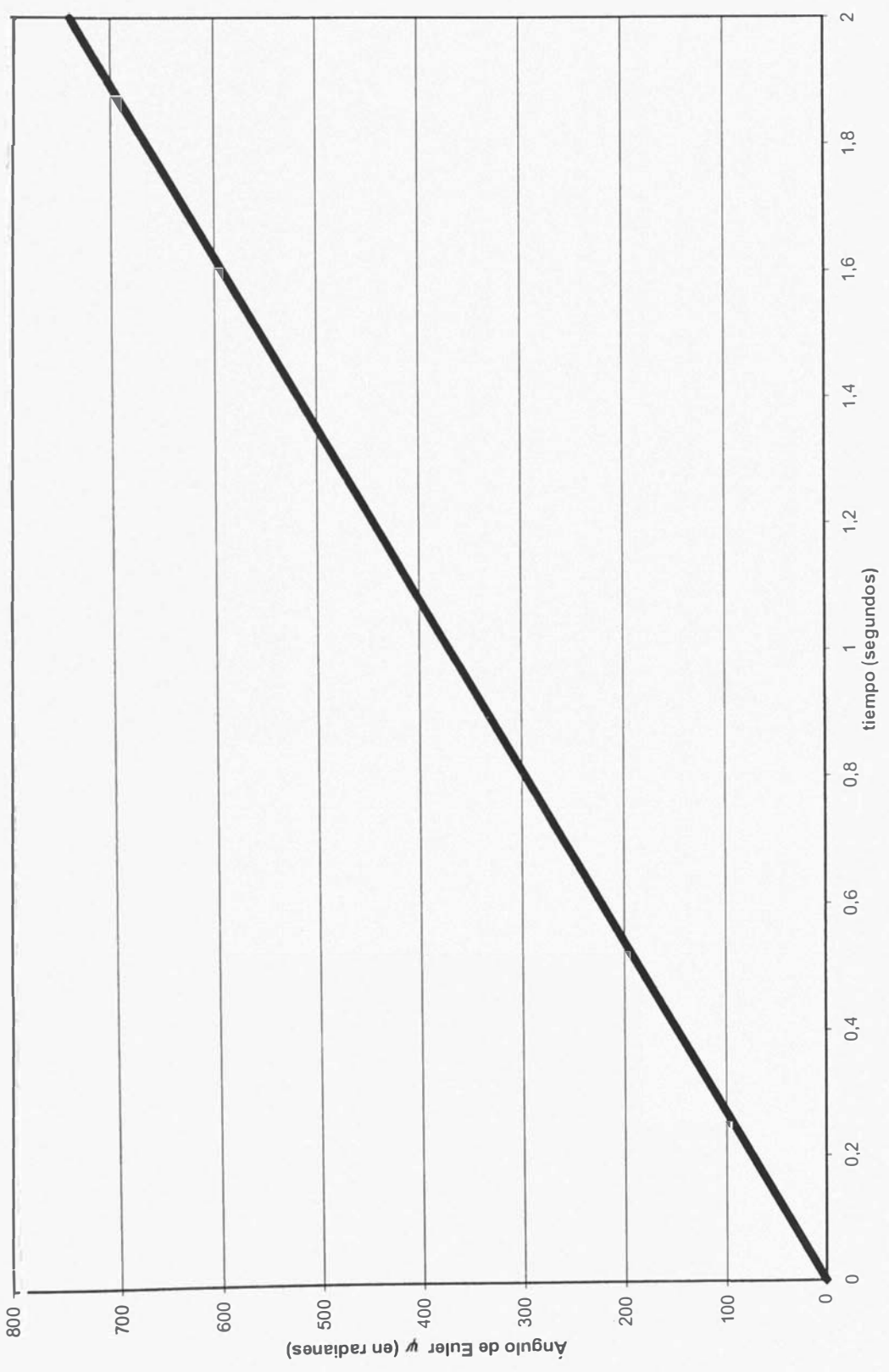
θ vs tiempo [Grafico (1.5.132)]

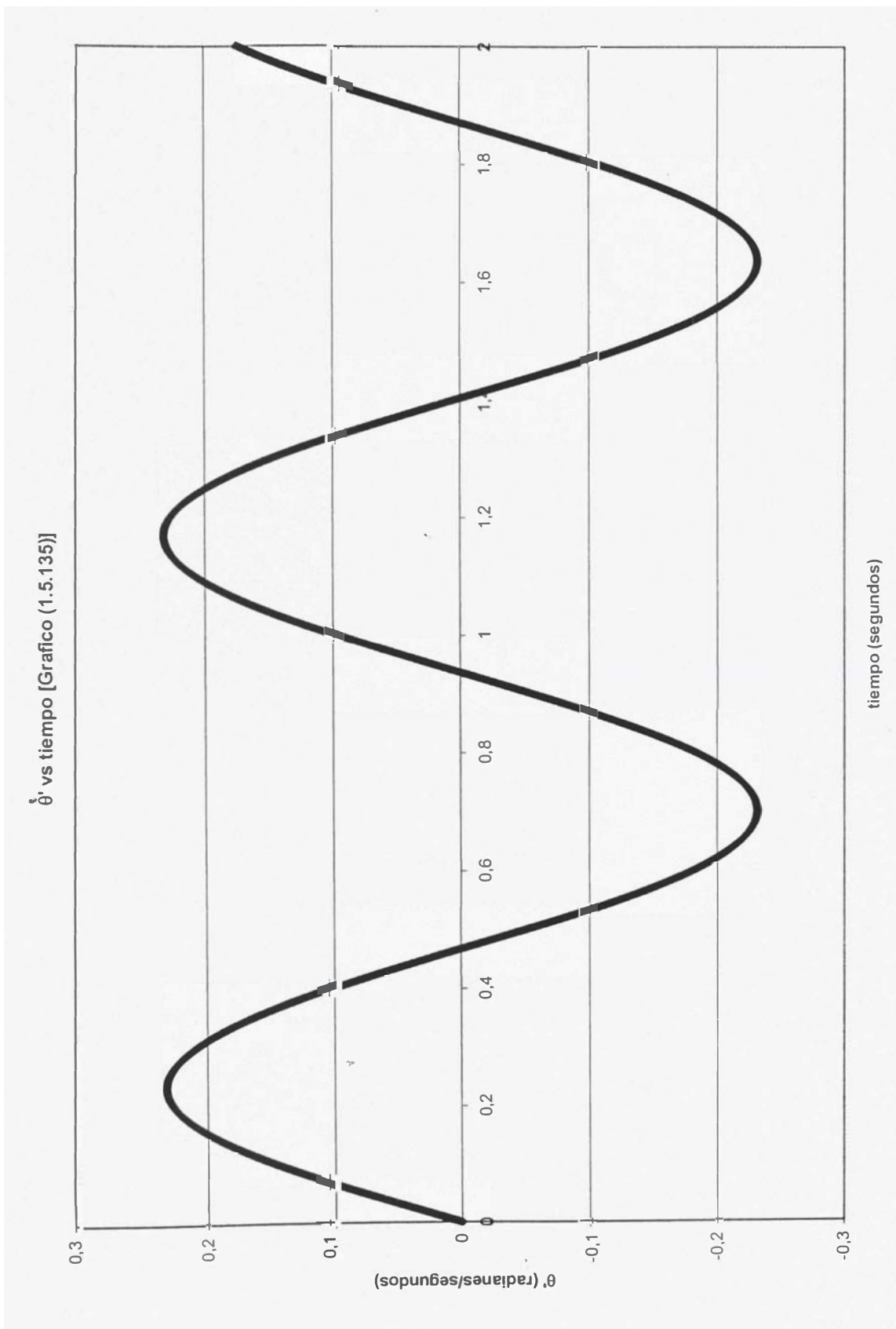


ϕ vs tiempo [Grafico (1.5.133)]

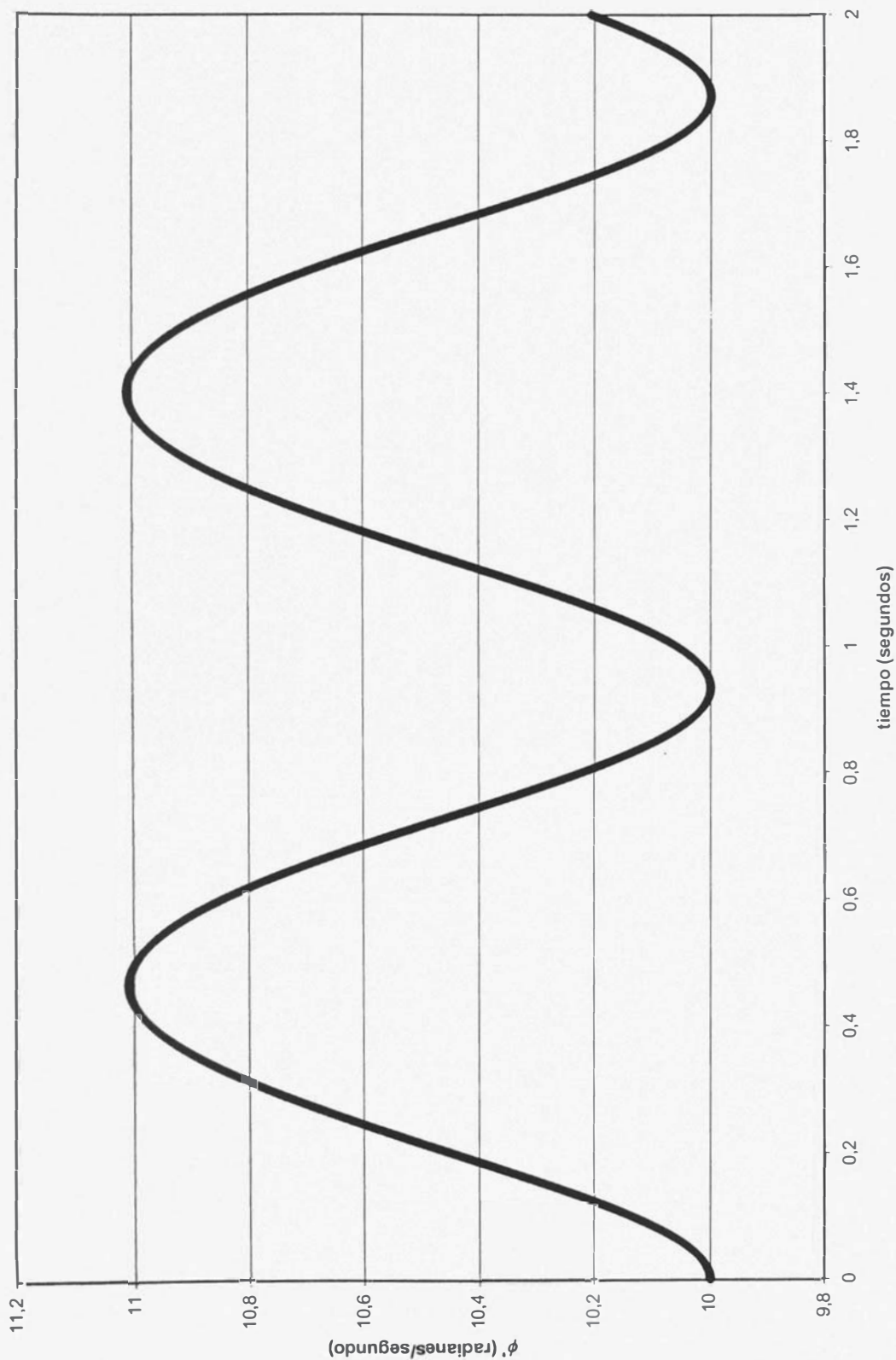


ψ vs tiempo [Grafico (1.5.134)]

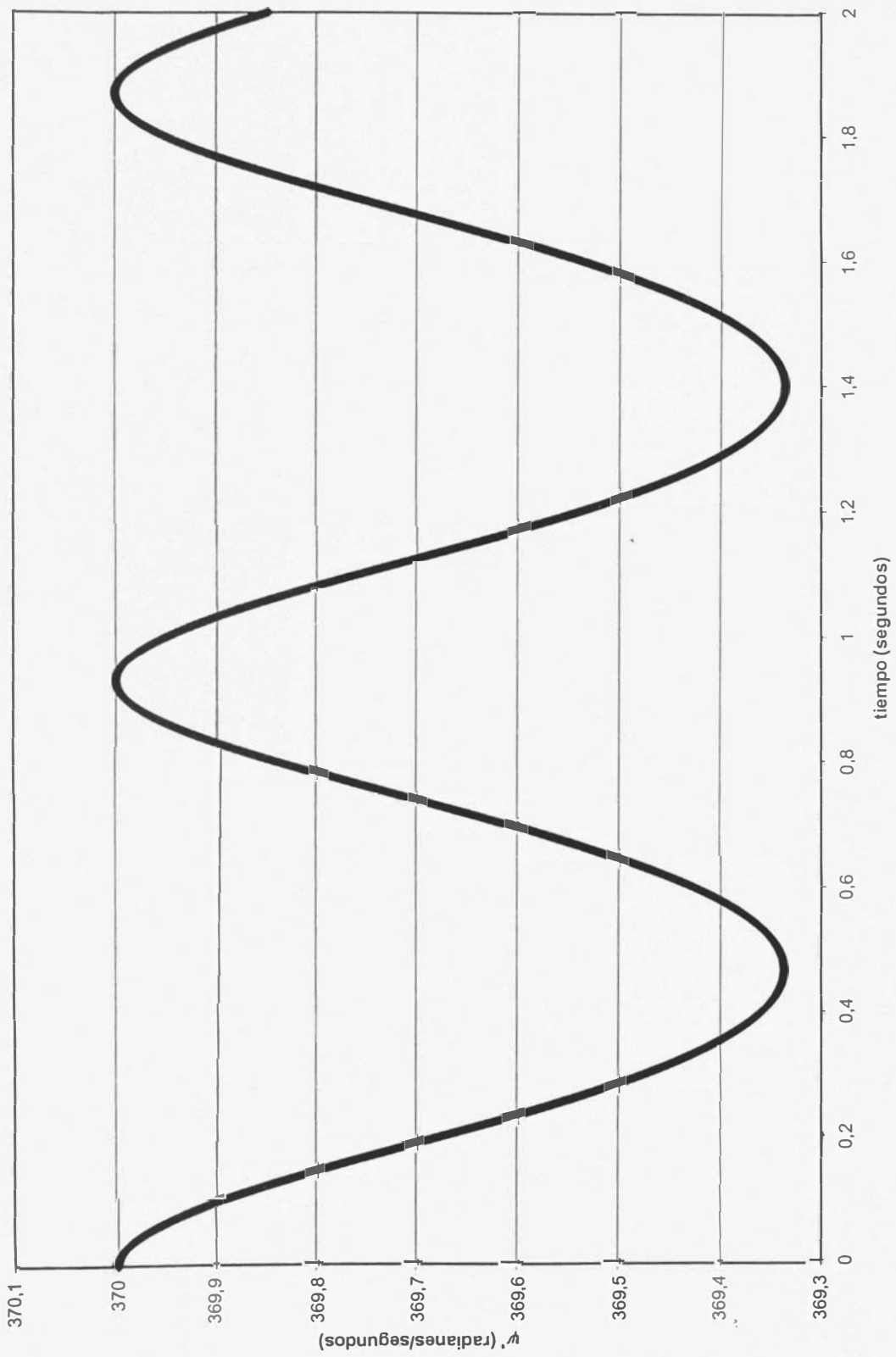


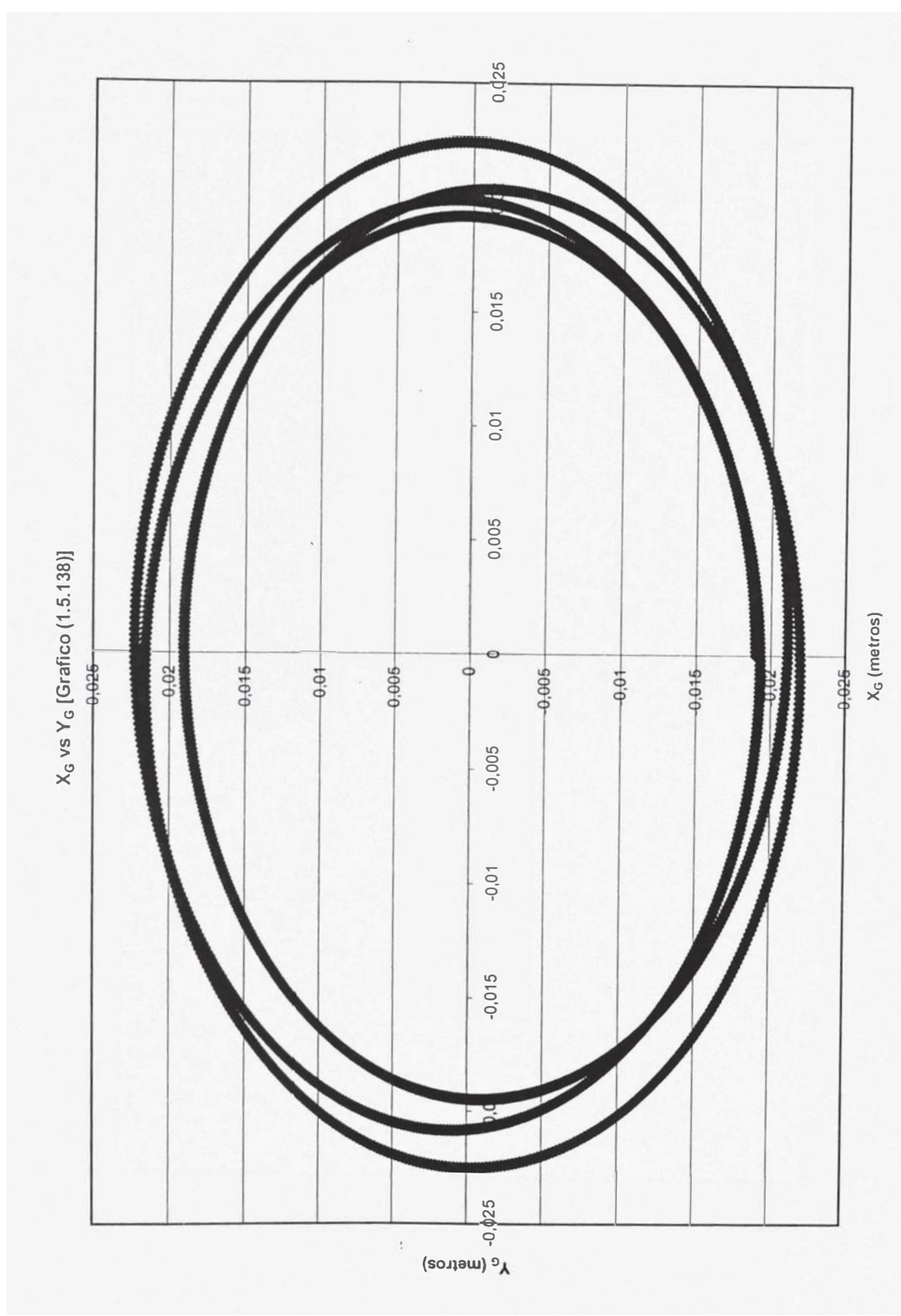


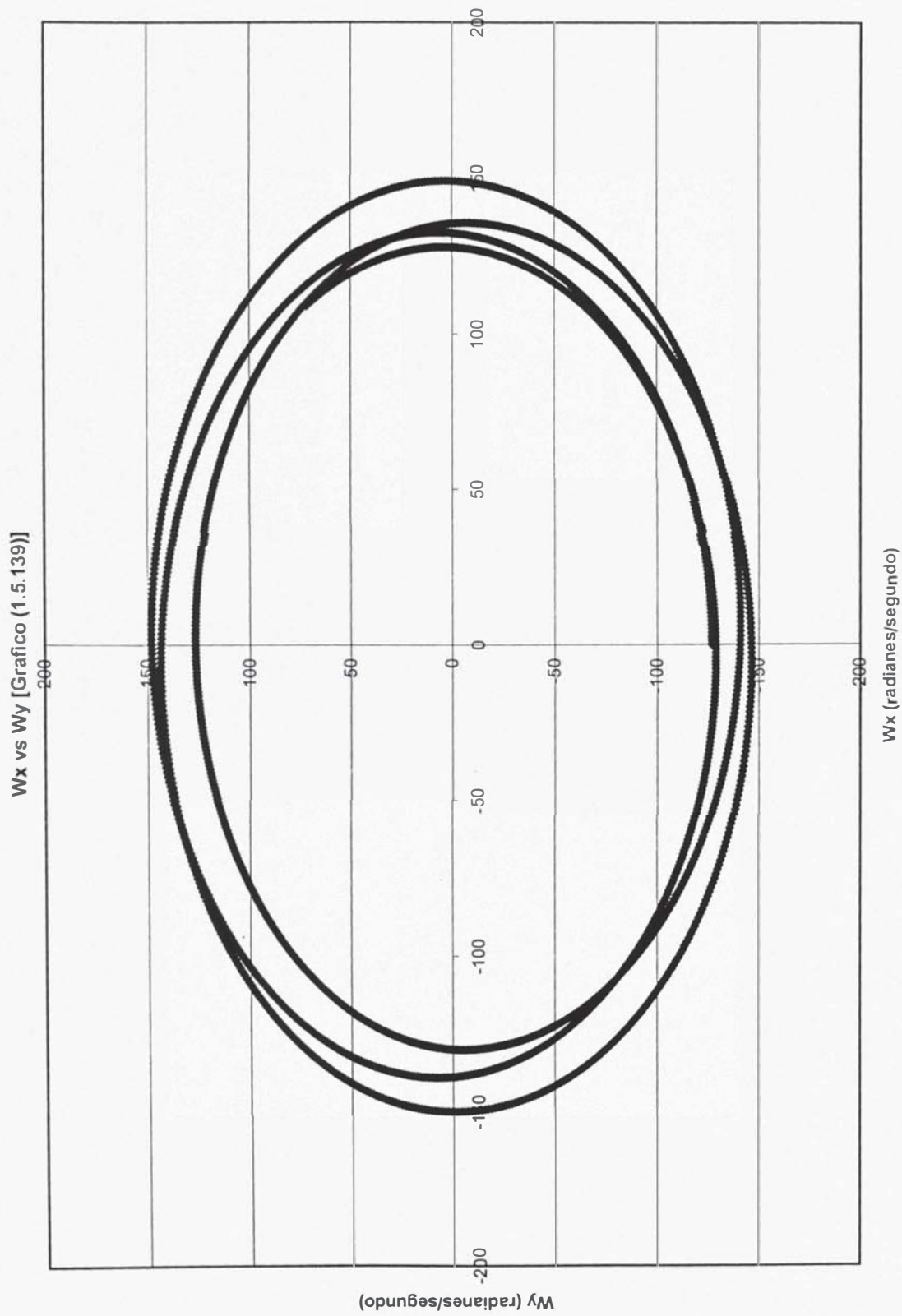
$\dot{\phi}$ vs tiempo [Gráfico (1.5.136)]



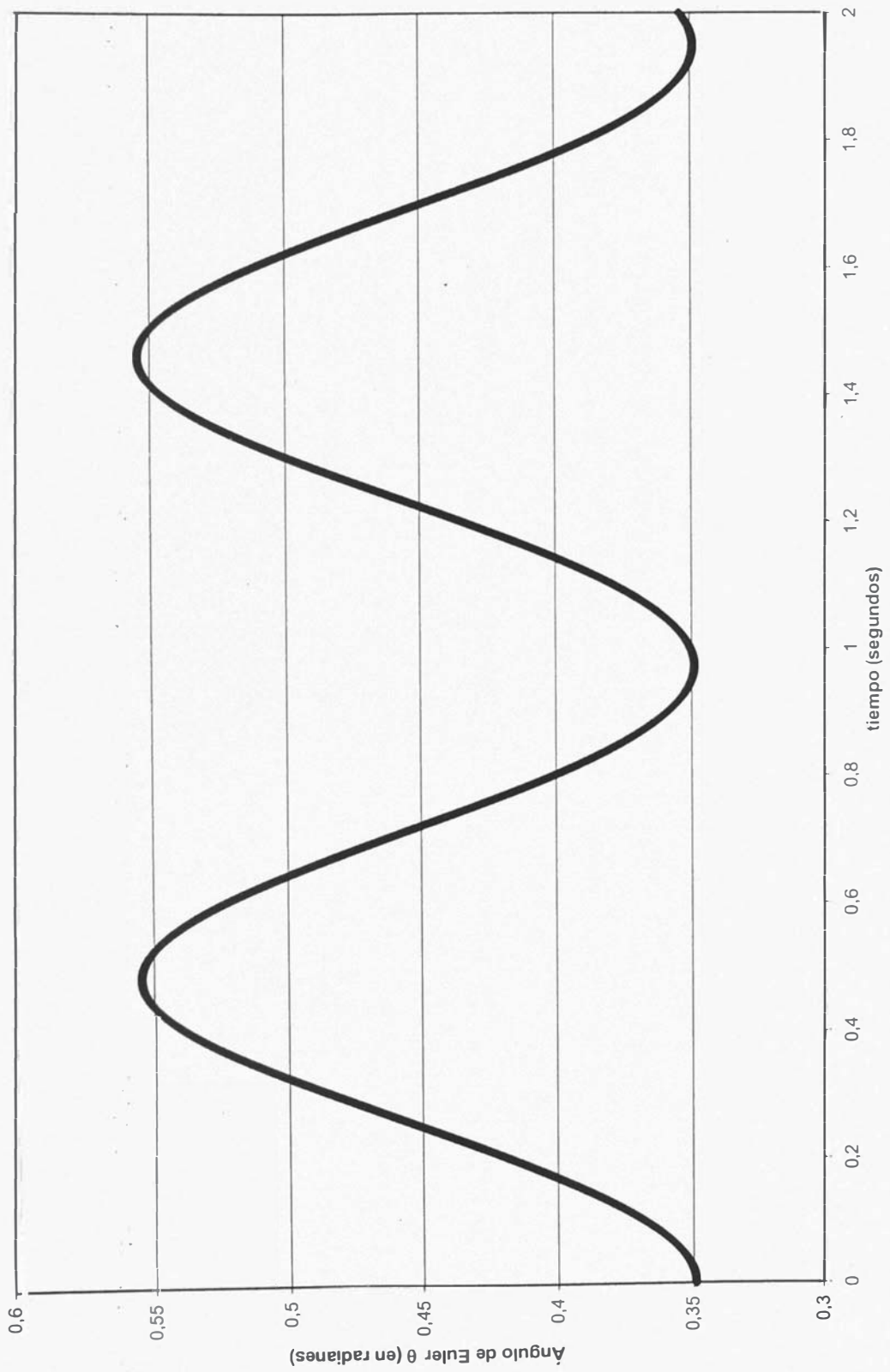
$\dot{\psi}'$ vs tiempo [Gráfico (1.5.137)]



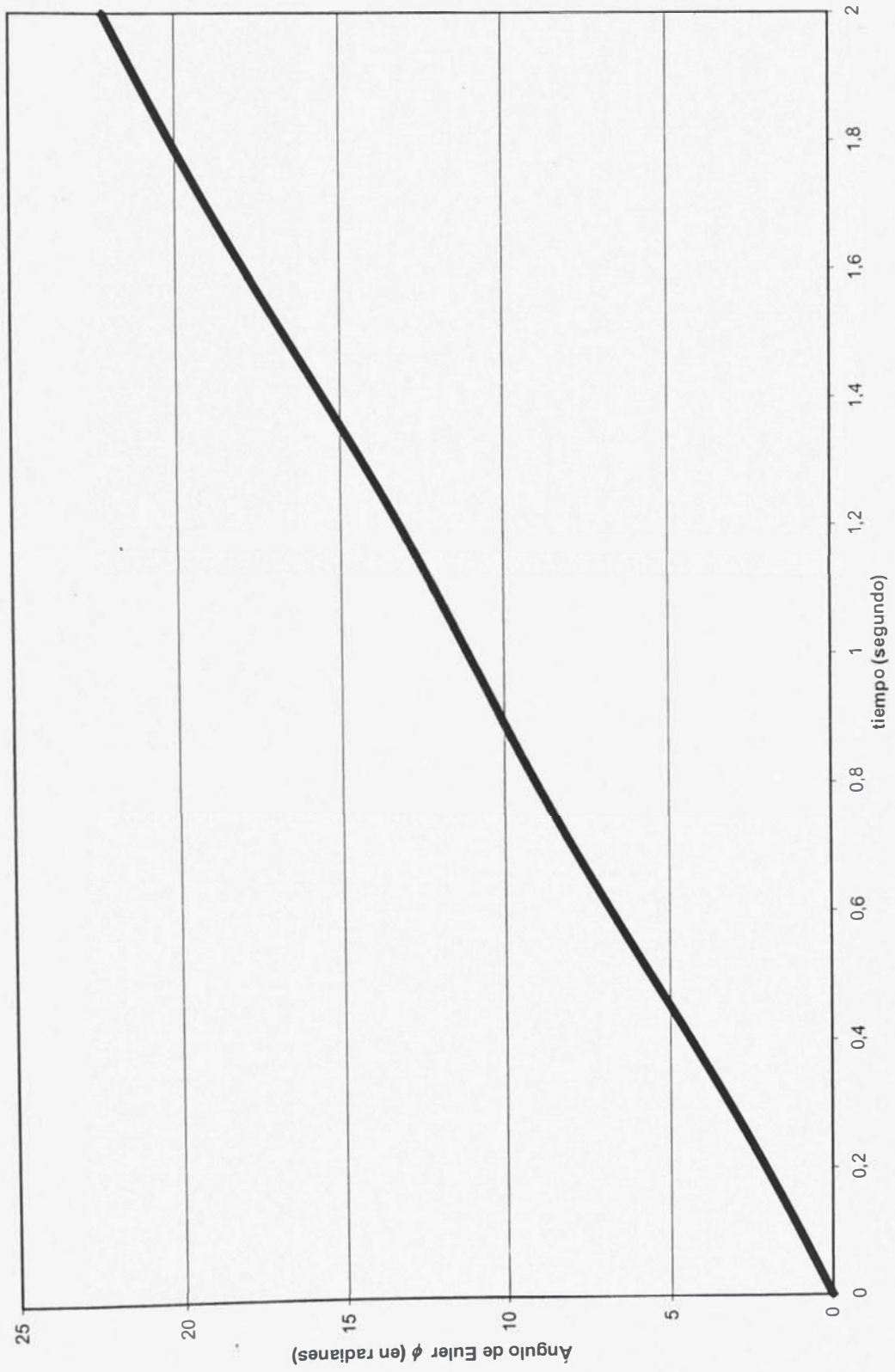




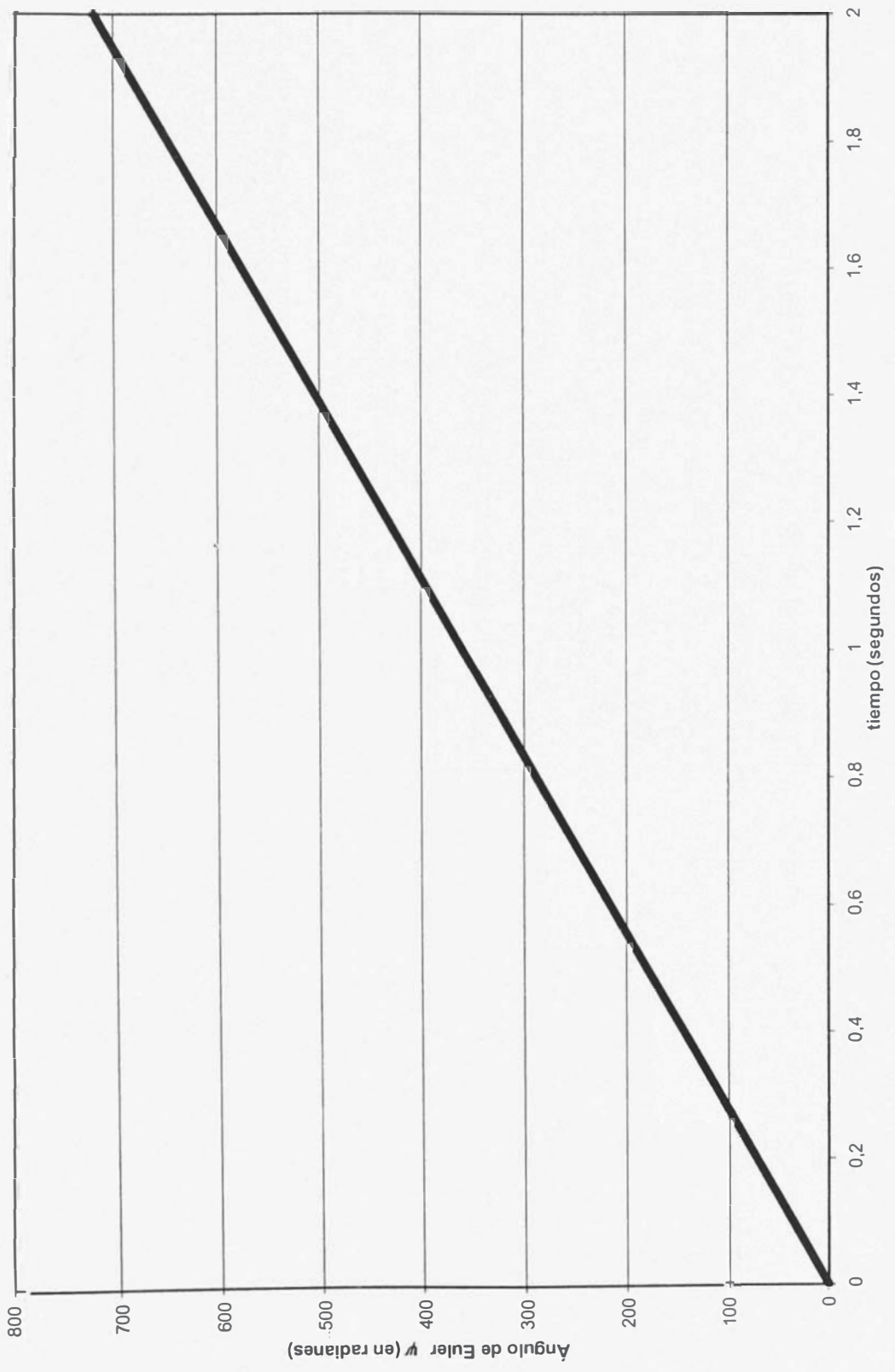
θ vs tiempo [Grafico (1.5.140)]



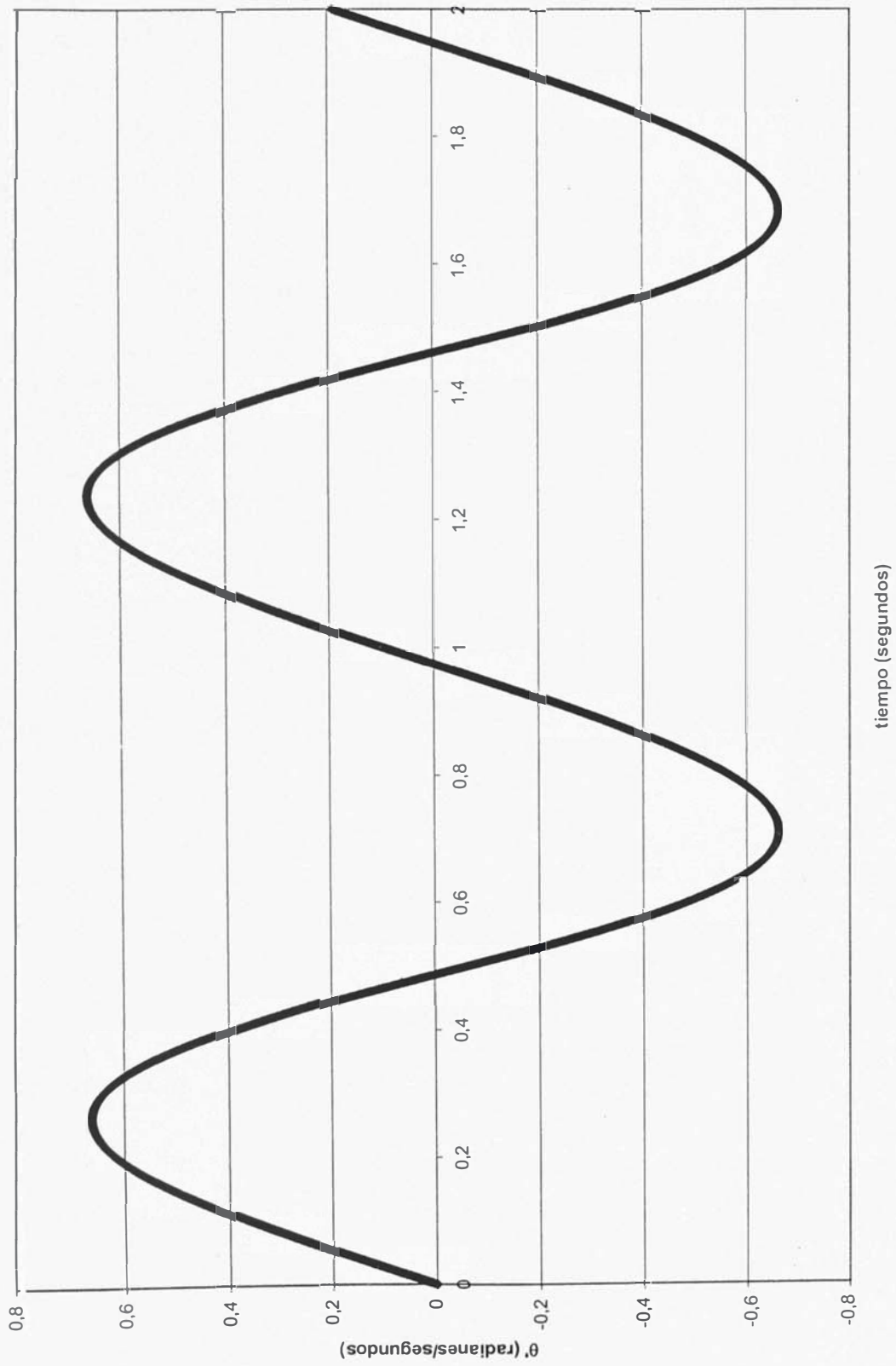
ϕ vs tiempo [Grafico (1.5.141)]



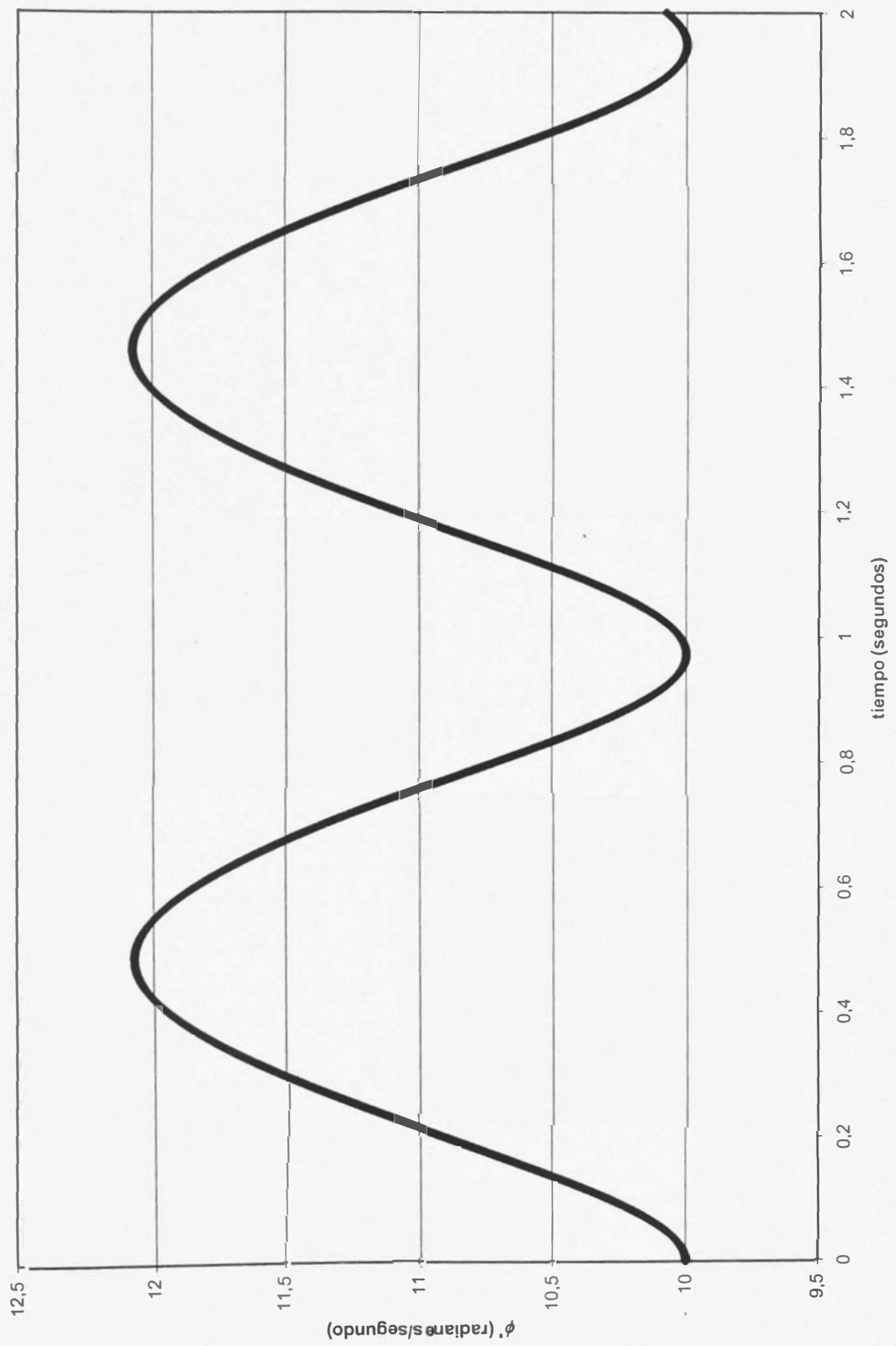
ψ vs tiempo [Grafico (1.5.142)]

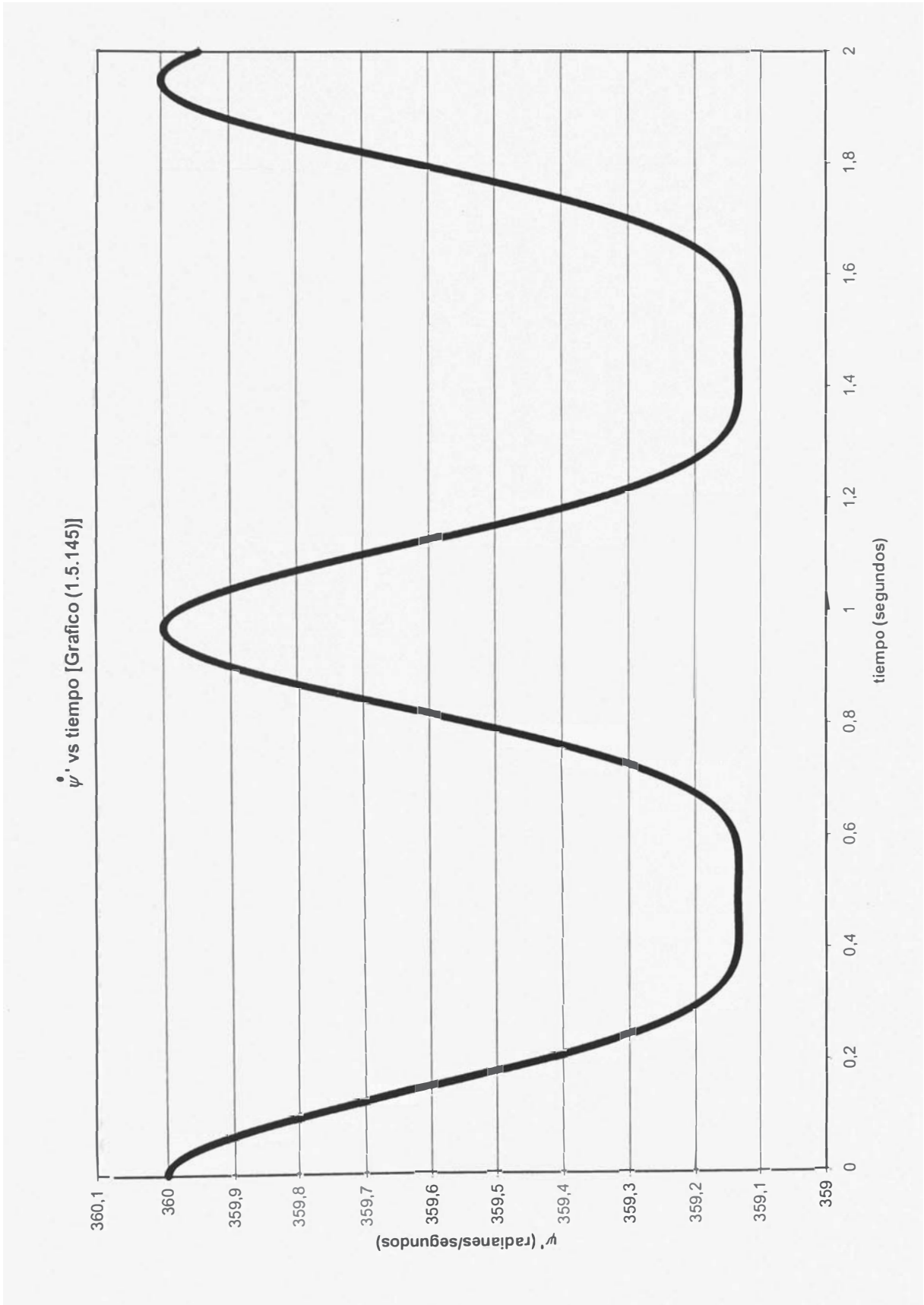


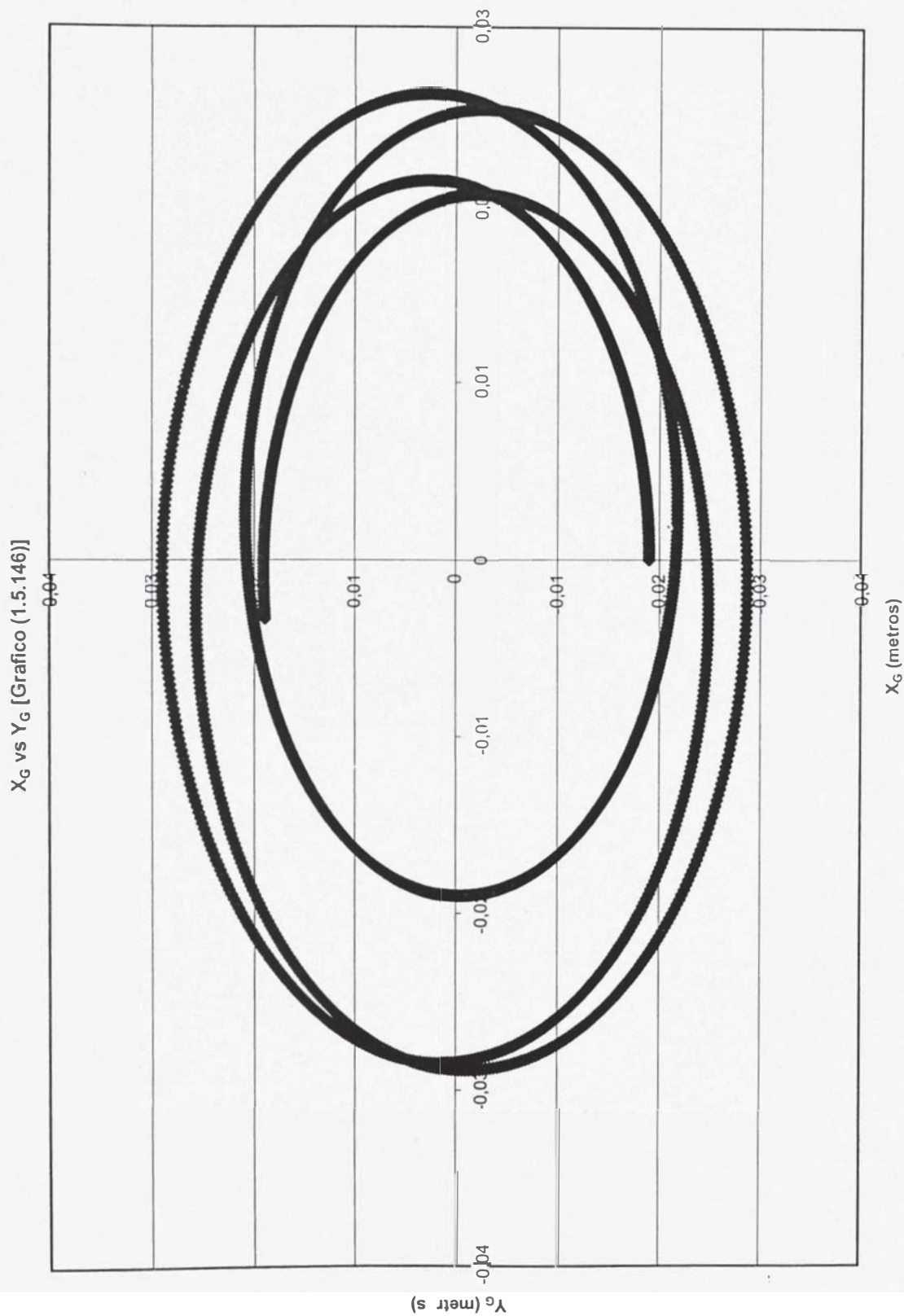
$\dot{\theta}'$ vs tiempo [Grafico (1.5.143)]

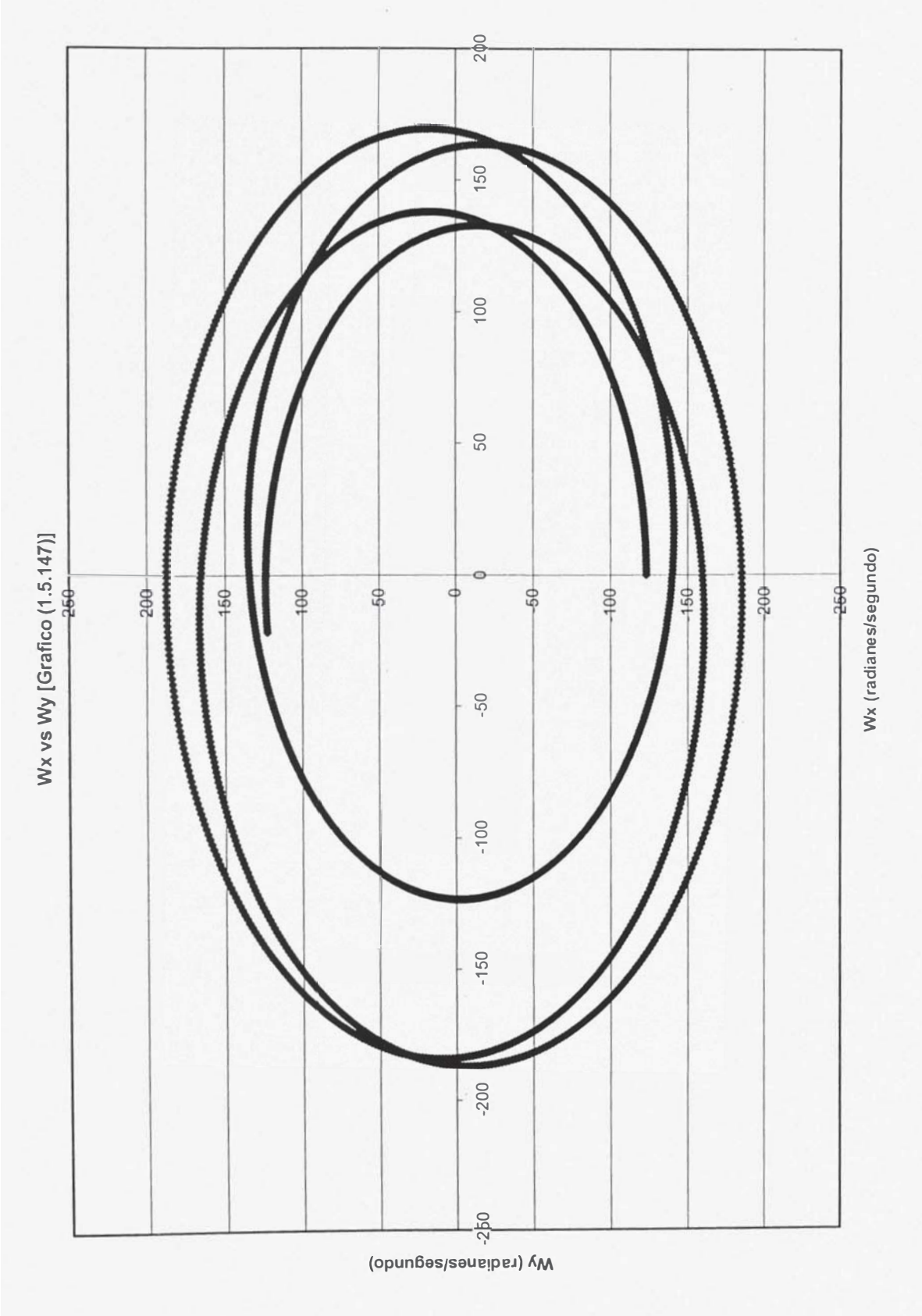


$\dot{\phi}$ vs tiempo [Gráfico (1.5.144)]









Observaciones y conclusiones

Caso a)

- De las gráficas (1.5.1), (1.5.8), (1.5.15), (1.5.22) y (1.5.29) se puede observar, en todos los casos, que la función $\theta(t)$ tiene un valor máximo y mínimo, y es periódica; esta propiedad de las gráficas de las funciones $\theta(t)$ comprueban las conclusiones que se obtuvieron al analizar la función del potencial efectivo $V'(\theta)$. Además notamos que el periodo del ángulo $\theta(t)$ permanece constante (0,1 segundo) a pesar de variar $\phi(0)$.
- Se observa de las gráficas (1.5.2), (1.5.9), (1.5.16), (1.5.23) y (1.5.30) que la función ϕ es creciente pero ondulante.
También cabe recordar que cuando ϕ toma el valor de 2π rad equivale a una vuelta completa del trompo alrededor del eje Z. Es decir que en el tiempo que se considero 2 segundos no logra dar una vuelta el eje del trompo. Pero como la gráfica es aproximadamente lineal podemos hallar aproximadamente T_{prec} .
- Analizando las gráficas (1.5.3), (1.5.10), (1.5.17), (1.5.24) y (1.5.31), que corresponden al ángulo de euler ψ , se concluye que para un tiempo de 2 segundos el ángulo ψ descrito por el trompo es de aproximadamente 2000 radianes. Es decir el trompo a girado 318 veces ($2000 / 2\pi$) alrededor de su eje de simetría en un tiempo de 2 segundos.
- También observamos de las figuras (1.5.4), (1.5.11), (1.5.18), (1.5.25) y (1.5.32); que $\dot{\theta}$ es igual a cero cuando el ángulo θ es mínimo o máximo, esto se puede apreciar para $t = 0$, en donde por la condición inicial $\theta = 0$ y $\dot{\theta} = 0$. Esto, también, se debe a que θ se puede describir como una función parecida al coseno, por lo tanto en su valor mínimo y máximo su velocidad de nutación es igual a cero.
- De los gráficos (1.5.5), (1.5.12), (1.5.19), (1.5.26) y (1.5.33) se puede apreciar que para algunos casos la velocidad de precesión de ϕ es negativa. Es decir para algunos casos el trompo experimenta un "retroceso". Ahora, para los casos donde la velocidad de ϕ es no negativo significa que el trompo no experimenta ningún retroceso.

Así mismo, observamos que para cada valor de $\dot{\phi}(0)$ las funciones $\theta(t)$, $\dot{\theta}(t)$, $\dot{\phi}(t)$ y $\dot{\psi}(t)$ tienen el mismo periodo ($T = 0,1$ s). Esta propiedad se puede justificar recordando que las funciones $\dot{\theta}(t)$, $\dot{\phi}(t)$ y $\dot{\psi}(t)$ dependen de $\theta(t)$, ver ecuaciones (1.1.11) y (1.1.12).

Además, se observa que a medida que la velocidad $\dot{\phi}(0)$ crece la amplitud de θ disminuye, y las amplitudes de $\dot{\theta}$, $\dot{\phi}$ y $\dot{\psi}$ aumentan.

- También, de las gráficas (1.5.6), (1.5.13), (1.5.20), (1.5.27) y (1.5.34) se puede decir que $\dot{\psi}(0)$ es periódica pero varía poco la amplitud.
- Las gráficas (1.5.7), (1.5.14), (1.5.21), (1.5.28) y (1.5.35) representan la proyección del movimiento de su centro de masas sobre el plano XY. La figura (1.5.7) corresponde al caso en donde el trompo realiza el movimiento "precesión de caída", esto es debido a las condiciones iniciales del movimiento. La figura (1.5.14) representa al movimiento de precesión monótona, esto se debe a que $\dot{\phi}$, ver figura (1.5.12), siempre es mayor que cero. Las figuras (1.5.21), (1.5.28) y (1.5.35) describen el movimiento rizado del trompo, lo cual es consecuencia del cambio de dirección del trompo, ver figuras (1.5.19), (1.5.26) y (1.5.33).

Caso b)

- De las gráficas (1.5.36), (1.5.44), (1.5.52), (1.5.60), (1.5.68), (1.5.76), (1.5.84), (1.5.92) y (1.5.100) se puede observar que el ángulo θ es una función periódica y su periodo depende de $\dot{\psi}(0)$. Esta conclusión se obtiene de los gráficos mencionados. Además notamos que cuando $\dot{\psi}(0)$ es igual a 900 rad/s, ... y 300 rad/s el periodo aumenta para luego disminuir.

Otra propiedad que podemos obtener de estos gráficos es que la amplitud del ángulo θ cambia si toma los diferentes $\dot{\psi}(0)$.

- Se observa de las gráficas (1.5.37), (1.5.45), (1.5.53), (1.5.61), (1.5.69), (1.5.77), (1.5.85), (1.5.93) y (1.5.101) que la función ϕ es creciente y ondulante, en todos los casos.
También observamos que, para el tiempo que se considera de 2 segundos, el ángulo ϕ no logra dar una vuelta completa cuando $\dot{\psi}(0)$ toma el valor de 900 rad/s, ver gráficas (1.5.37). Sin embargo cuando $\dot{\psi}(0)$ disminuye el ángulo ϕ crece mas rápidamente y el trompo logra dar mas de una vuelta, el caso mas representativo es para el caso en donde $\dot{\psi}(0)$ es de 100 rad/s el trompo gira aproximadamente 3 y media vueltas en un tiempo de 2 segundos.
- Para el caso de las gráficas (1.5.38), (1.5.46), (1.5.54), (1.5.62), (1.5.70), (1.5.78), (1.5.86), (1.5.94) y (1.5.102), se observa, como era previsible, que el ángulo ψ crece más cuando $\dot{\psi}(0)$ crece. En el caso particular cuando $\dot{\psi}(0)$ es 900 rad/s y para un tiempo de 2 segundos el ángulo ψ es aproximadamente de 180 rad, es decir el trompo a girado 286 veces alrededor de su eje de simetría. Para el caso en donde la velocidad de ψ es de aproximadamente de 100 rad/s y para un tiempo de 2 segundos el ángulo ψ es aproximadamente de 220 rad con lo cual el trompo a girado 35 veces alrededor de su eje de simetría.
- De las gráficas (1.5.39), (1.5.47), (1.5.55), (1.5.63), (1.5.71), (1.5.79), (1.5.87), (1.5.95) y (1.5.103), podemos decir que $\dot{\theta}(t)$ es periódico.
También observamos que es fácil contar con el número de nutaciones que describe el trompo en el tiempo que se considero de 2 segundos. Para el caso donde la velocidad de ψ es de 900 rad/s se puede contar 17 nutaciones completas. Para el caso donde la velocidad de ψ es de 100 rad/s el trompo describe 4 nutaciones completas.
- De los gráficos (1.5.40), (1.5.48), (1.5.56), (1.5.64), (1.5.72), (1.5.80), (1.5.88), (1.5.96) y (1.5.104), podemos decir que la velocidad de precesión $\dot{\phi}(t)$ tiene valores negativos y positivos, es decir el trompo durante su movimiento experimenta retrocesos. Pero para los casos donde $\dot{\phi}(t)$ es mayor que cero no hay retrocesos. También observamos que $\dot{\phi}(t)$ es periódico.

- De los gráficos (1.5.41), (1.5.49), (1.5.57), (1.5.65), (1.5.73), (1.5.81), (1.5.89), (1.5.97) y (1.5.105) podemos, también enunciar que $\psi(t)$ es periódico y positivo.
- Las proyecciones del movimiento del centro de masa se muestran en las gráficas (1.5.42), (1.5.50), (1.5.58), (1.5.66), (1.5.74), (1.5.82), (1.5.90), (1.5.98) y (1.5.106) que nos da el tipo de movimiento del eje de simetría. Se puede observar de las gráficas (1.5.42), (1.5.50), (1.5.58), (1.5.66) y (1.5.74) que el eje del trompo describe movimiento rizado. A partir de las gráficas (1.5.82), (1.5.90), (1.5.98) y (1.5.106) deducimos que el eje del trompo tiene el movimiento monótono de precesión.
- También notamos que las funciones $\theta(t)$, $\dot{\theta}(t)$, $\dot{\phi}(t)$ y $\dot{\psi}(t)$ tienen el mismo periodo

Caso c)

Cabe resaltar que este caso describe el caso de movimientos próximos a los movimientos estacionarios y movimientos de precesión pura (caso particular de movimiento estacionario).

- Los gráficos (1.5.108), (1.5.116), (1.5.124), (1.5.132) y (1.5.140) describen el comportamiento del movimiento de nutación del trompo a medida que nos acercamos al caso en donde el trompo solo realizara movimiento de precesión. Cabe recordar que las condiciones necesarias para exista el caso de precesión pura esta descrita en el capítulo 1.3, para esta condición como es obvio θ es constante.

Los gráficos (1.5.108) y (1.5.116) indican que a medida que $\psi(0)$ se aproxima al valor $\psi_{CR}(0)$, donde hay movimiento estacionario, la amplitud de θ disminuye. El gráfico (1.5.124) describe el caso de precesión pura. Y es obvio si nos alejamos del valor $\psi_{CR}(0)$ la amplitud de θ aumenta.

- Se puede observar, claramente, de los gráficos (1.5.109), (1.5.117), (1.5.125), (1.5.133) y (1.5.141) que la función $\phi(t)$ disminuye su ondulación a medida que nos acercamos al caso de precesión pura. Es decir que para el caso de la gráfica (1.5.125) la función $\phi(t)$ es una recta.

- Los gráficos (1.5.111), (1.5.119), (1.5.127), (1.5.135) y (1.5.143) muestran que $\dot{\theta}$, así como el número de nutaciones, en un intervalo de tiempo, disminuye a medida de que nos acercamos al caso de precesión pura hasta desaparecer.

Para el caso de movimiento estacionario, observamos que $\dot{\theta}$ no es igual a cero (valor teórico) pero tiene valores pequeños. Esto se debe a que en todo cálculo numérico se comenten errores.

- También observamos de los gráficos (1.5.112), (1.5.120), (1.5.128), (1.5.136) y (1.5.144) que al acercarnos al caso de precesión pura la función $\phi(t)$ se convierte en una función constante.
- De la misma manera los gráficos (1.5.113), (1.5.121), (1.5.129), (1.5.137) y (1.5.145) nos indican que la función $\psi(t)$ se convierte en una función constante, cuando $\dot{\psi}(0)$ se acerca a $\dot{\psi}_{CR}(0)$.
- Los gráficos de las proyecciones del movimiento del centro de masas del trompo (1.5.114), (1.5.122), (1.5.130), (1.5.138) y (1.5.146) nos muestran que a medida que nos acercamos al caso de precesión pura las nutaciones del trompo desaparecen y la proyección es una circunferencia, es decir el eje de rotación describe un cono.

Conclusiones generales:

- Las funciones $\theta(t)$, $\dot{\theta}(t)$, $\dot{\phi}(t)$ y $\dot{\psi}(t)$ son periódicas. Con el mismo periodo T
- No siempre al modificar una condición inicial varía el periodo T.
- La proyección del centro de masa en el plano XY esta acotada en una región anular, esta trayectoria es parecida al movimiento de una partícula sometida a fuerzas centrales. Este tipo de trayectoria se debe a que la energía mecánica es constante.
- Finalmente debemos mencionar que al resolver las ecuaciones diferenciales ordinarias de movimiento se calculo la energía mecánica y este se mantiene constante, ver Apéndice 2. Como es obvio no se calculó el momento angular del trompo porque este no es constante debido al torque del peso.

CAPITULO 2

MOVIMIENTO DE UN TROMPO SIMÉTRICO, HOMOGÉNEO Y PESADO CON UN PUNTO DE APOYO MOVIL

- 2.0 Introducción
- 2.1 Análisis cualitativo, mediante la energía mecánica, del movimiento de un trompo simétrico, homogéneo y pesado con un punto de apoyo móvil.
- 2.2 Ecuaciones diferenciales ordinarias de movimiento de un trompo simétrico, homogéneo y pesado con un punto de apoyo móvil.
- 2.3 Aplicación a un trompo simétrico y pesado de forma cónica.
- 2.4 Observaciones y conclusiones de la solución numérica de un trompo de forma cónica utilizando el método de Runge Kutta de orden 4.

2.0 INTRODUCCION

En el presente capítulo estudiaremos el movimiento del trompo más próximo a la realidad, que no se menciona en los textos y ni se desarrolla en los cursos de mecánica teórica. Se considera que el punto de contacto entre el trompo y la superficie, apoyo, esta en movimiento pero no hay rozamiento, luego, en forma semejante al caso anterior la energía mecánica se conserva.

Una diferencia con el caso anterior es que se considera que el eje de rotación pasa por el centro de masa (recordar que la velocidad angular es un concepto relativo).

En analogía con el capítulo anterior se aplicara las ecuaciones de la dinámica de cuerpo rígido, ecuaciones de Lagrange, y el método numérico de Runge Kutta de orden 4 para resolver las ecuaciones diferenciales de movimiento del trompo debido a que no son lineales.

Y también cabe resaltar que para facilitar los cálculos de los momentos de Inercia se considera al trompo en el presente trabajo de forma de un cono.

La fuerzas que actúan son la Normal y el Peso, esto hace que la aceleración a Z_G sea diferente de cero

.1 Análisis cualitativo, mediante la energía mecánica, del movimiento de un trompo simétrico, homogéneo y pesado con un punto de apoyo móvil

En este tipo de movimiento los vectores unitarios \vec{e}_1 , \vec{e}_2 y \vec{e}_3 , que siempre se mueven junto con el cuerpo rígido, tienen su origen en el centro de masas; es decir se va a suponer que el eje de rotación pasa por G. Debido a que no hay rozamiento las únicas fuerzas que actúan son el peso y la normal, y como la velocidad del punto de contacto es siempre perpendicular a la normal entonces la energía mecánica es constante.

Para definir los ángulos de Euler consideraremos un sistema de ejes móvil $X'Y'Z'$ con origen en G, pero siempre paralelos al sistema de ejes XYZ.

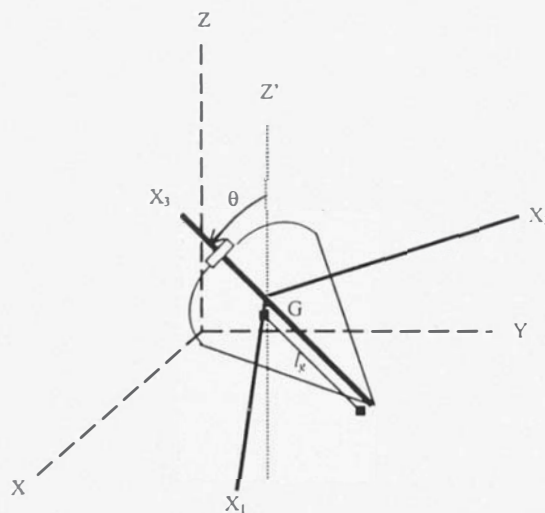


Figura (2.1.1)

De la teoría del movimiento de un cuerpo rígido, la energía cinética total T puede escribirse de la siguiente forma:

2.1 Análisis cualitativo, mediante la energía mecánica, del movimiento de un trompo simétrico, homogéneo y pesado con un punto de apoyo móvil

En este tipo de movimiento los vectores unitarios \vec{e}_1 , \vec{e}_2 y \vec{e}_3 , que siempre se mueven junto con el cuerpo rígido, tienen su origen en el centro de masas; es decir se va a suponer que el eje de rotación pasa por G. Debido a que no hay rozamiento las únicas fuerzas que actúan son el peso y la normal, y como la velocidad del punto de contacto es siempre perpendicular a la normal entonces la energía mecánica es constante.

Para definir los ángulos de Euler consideraremos un sistema de ejes móvil $X'Y'Z'$ con origen en G, pero siempre paralelos al sistema de ejes XYZ.

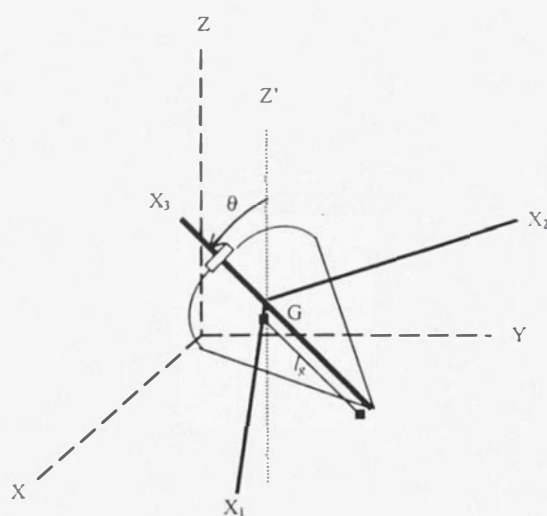


Figura (2.1.1)

De la teoría del movimiento de un cuerpo rígido, la energía cinética total T puede escribirse de la siguiente forma:

$$T = \frac{m V_Q^2}{2} + m \vec{V}_{QG} \cdot \vec{V}_Q + \sum_{i=1}^3 \frac{I_i W_i^2}{2}$$

Si $Q = G$ se tiene que

$$T = \frac{m V_G^2}{2} + \sum_{k=1}^3 \frac{I_k w_k^2}{2} \quad \dots \quad (2.1.1)$$

Donde V_G representa la velocidad del centro de masa del trompo y w_i representa las componentes de la velocidad angular referente medido en el sistema inercial, luego:

$$T = \frac{m}{2} \left(\dot{X}_G^2 + \dot{Y}_G^2 + \dot{Z}_G^2 \right) + \frac{1}{2} I_G (w_1^2 + w_2^2) + \frac{1}{2} I_3 w_3^2 \quad \dots \quad (2.1.2)$$

Además, \dot{X}_G , \dot{Y}_G y \dot{Z}_G representan las componentes de la velocidad del centro de masa con respecto al sistema fijo XYZ. Teniendo en cuenta que:

$$Z_G = l_g \cos \theta,$$

por lo tanto:

$$\dot{Z}_G = -l_g \dot{\theta} \operatorname{sen} \theta$$

Reemplazando las componentes w_i y la velocidad \dot{Z}_G en la expresión de la energía cinética:

$$T = \frac{m}{2} \left[\dot{X}_G^2 + \dot{Y}_G^2 + l_g^2 \left(\dot{\theta} \right)^2 \operatorname{sen}^2 \theta \right] + \frac{1}{2} I_G \left[\left(\dot{\phi} \operatorname{sen} \theta \right)^2 + \left(\dot{\theta} \right)^2 \right] + \frac{1}{2} I_3 \left(\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi} \right)^2 \quad \dots \quad (2.1.3)$$

Así mismo, la energía potencial del sistemas será:

$$V = m g l_g \cos \theta \quad \dots \quad (2.1.4)$$

Luego la energía mecánica queda de la forma:

$$E = \frac{m}{2} \left[\dot{X}_G^2 + \dot{Y}_G^2 + l_g^2 (\dot{\theta})^2 \operatorname{sen}^2 \theta \right] + \frac{1}{2} I_G \left[(\dot{\phi} \operatorname{sen} \theta)^2 + (\dot{\theta})^2 \right] + \frac{1}{2} I_3 \left(\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi} \right)^2 + m g l_g \cos \theta \quad \dots \quad (2.1.5)$$

Además la función de lagrange del cuerpo rígido es:

$$L = \frac{m}{2} \left[\dot{X}_G^2 + \dot{Y}_G^2 + l_g^2 (\dot{\theta})^2 \operatorname{sen}^2 \theta \right] + \frac{1}{2} I_G \left[(\dot{\phi} \operatorname{sen} \theta)^2 + (\dot{\theta})^2 \right] + \frac{1}{2} I_3 \left(\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi} \right)^2 - m g l_g \cos \theta \quad \dots \quad (2.1.6)$$

Tomando en cuenta las siguientes definiciones:

a) Fuerzas generalizadas F_i

$$F_{X_G} \equiv \frac{\partial L}{\partial X_G} = 0; \quad \dots \quad (2.1.7)$$

$$F_{Y_G} \equiv \frac{\partial L}{\partial Y_G} = 0; \quad \dots \quad (2.1.8)$$

$$F_{\phi} \equiv \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0; \quad \dots \quad (2.1.9)$$

$$F_{\psi} \equiv \frac{\partial L}{\partial \psi} = 0; \quad \dots \quad (2.1.10)$$

$$F_{\theta} \equiv \frac{\partial L}{\partial \theta} \neq 0$$

b) Momentos generalizados p_i

$$p_{X_G} \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{X}_G} = m \dot{X}_G; \quad \dots \quad (2.1.11)$$

$$p_{Y_G} \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{Y}_G} = m \dot{Y}_G; \quad \dots \quad (2.1.12)$$

$$p_\phi \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = (I_G \operatorname{sen}^2 \theta) \dot{\phi} + (I_3 \cos^2 \theta) \dot{\phi} + (I_3 \cos \theta \dot{\psi})$$

Que se puede expresar en la forma:

$$p_\phi = (I_G \operatorname{sen}^2 \theta + I_3 \cos^2 \theta) \dot{\phi} + (I_3 \cos \theta \dot{\psi}); \quad \dots \quad (2.1.13)$$

$$p_\psi \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}}, \text{ usando esta definición con el lagrangiano}$$

$$p_\psi = I_3 (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}); \quad \dots \quad (2.1.14)$$

y como $w_3 = (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi})$, luego

$$p_\psi = I_3 w_3 \quad \dots \quad (2.1.15)$$

c) De la relación entre la fuerza y el momento generalizado (ver Landau - Mecánica)

$$\dot{p}_i = F_i;$$

y debido a que

$$F_{X_G} = F_{Y_G} = F_\phi = F_\psi = 0$$

Se concluye que p_{X_G} , p_{Y_G} , p_ϕ y p_ψ son constantes. De esta conclusión demostramos, fácilmente, que \dot{X}_G , \dot{Y}_G y w_3 son constantes.

En forma análoga al capítulo 1, se demuestra que

$$\dot{\phi} = \frac{p_\phi - p_\psi \cos \theta}{I_G \operatorname{sen}^2 \theta} \quad \dots \quad (2.1.16)$$

y

$$\dot{\psi} = \frac{p_{\psi}}{I_3} - \frac{(p_{\phi} - p_{\psi} \cos \theta) \cos \theta}{I_G \operatorname{sen}^2 \theta} \quad \dots \quad (2.1.17)$$

Nuevamente, regresando a la ecuación de la energía (2.1.5) y teniendo en cuenta que w_3 es constante se tiene:

$$E = \frac{m}{2} \left[\dot{X}_G^2 + \dot{Y}_G^2 + l_g^2 (\dot{\theta})^2 \operatorname{sen}^2 \theta \right] + \frac{1}{2} I_G \left[(\dot{\phi} \operatorname{sen} \theta)^2 + (\dot{\theta})^2 \right] + \frac{1}{2} I_3 w_3^2 + m g l_g \cos \theta \quad \dots \quad (2.1.18)$$

Ordenando la ecuación:

$$E = \frac{m}{2} \left(\dot{X}_G^2 + \dot{Y}_G^2 \right) + \frac{1}{2} I_3 w_3^2 + \frac{m}{2} l_g^2 (\dot{\theta})^2 \operatorname{sen}^2 \theta + \frac{1}{2} I_G \left[(\dot{\phi} \operatorname{sen} \theta)^2 + (\dot{\theta})^2 \right] + m g l_g \cos \theta$$

Luego:

$$E - \frac{m}{2} \left(\dot{X}_G^2 + \dot{Y}_G^2 \right) - \frac{1}{2} I_3 w_3^2 = \frac{m}{2} l_g^2 (\dot{\theta})^2 \operatorname{sen}^2 \theta + \frac{1}{2} I_G \left[(\dot{\phi} \operatorname{sen} \theta)^2 + (\dot{\theta})^2 \right] + m g l_g \cos \theta$$

y debido a que \dot{X}_G , \dot{Y}_G y w_3 son constantes, entonces nosotros podremos decir que

$$E - \frac{m}{2} \left(\dot{X}_G^2 + \dot{Y}_G^2 \right) - \frac{1}{2} I_3 w_3^2, \text{ es una nueva constante de movimiento y a la cual la denominaremos } E'.$$

$$E' = \frac{m}{2} l_g^2 (\dot{\theta})^2 \operatorname{sen}^2 \theta + \frac{1}{2} I_G \left[(\dot{\phi} \operatorname{sen} \theta)^2 + (\dot{\theta})^2 \right] + m g l_g \cos \theta \quad \dots \quad (2.1.19)$$

Reagrupando y reemplazando (2.1.16) en (2.1.19) se obtiene

$$E' = \frac{1}{2} \left(m l_g^2 \operatorname{sen}^2 \theta + I_G \right) (\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2} \frac{(p_{\phi} - p_{\psi} \cos \theta)^2}{I_G \operatorname{sen}^2 \theta} + m g l_g \cos \theta$$

Como $\frac{1}{2} (m l_g^2 \text{sen}^2 \theta + I_G) (\dot{\theta})^2 \geq 0$ el movimiento del trompo es de tal modo que $V'(\theta) \leq E'$, donde:

$$V'(\theta) = \frac{1}{2} \frac{(p_\phi - p_\psi \cos \theta)^2}{I \text{sen}^2 \theta} + m g l_g \cos \theta, \quad \text{con } \theta \neq 0, \pi \quad \dots \quad (2.1.20)$$

Se observa que $V'(\theta)$ tiene la forma del potencial (1.1.14) del capítulo anterior. Entonces podemos concluir que el ángulo θ está acotado. Es decir que existe un $\theta_{\text{Mín}}$ y $\theta_{\text{Máx}}$ y además la función $\theta(t)$ es una función periódica.

Cabe recordar que el eje X_3 del trompo forma un ángulo θ con el eje móvil Z' y haciendo analogía con el capítulo anterior el trompo realizará un movimiento de nutación y un movimiento de precesión alrededor del eje Z' .

2.2 Ecuaciones diferenciales de movimiento sin fricción de un trompo simétrico, homogéneo y pesado con un punto de apoyo móvil.

Teniendo en cuenta que el lagrangiano, L (2.1.6), para el movimiento sin fricción de un trompo simétrico, homogéneo y pesado con un punto de apoyo móvil se expresa de la siguiente manera:

$$L = \frac{m}{2} \left[\dot{X}_G^2 + \dot{Y}_G^2 + l_g^2 (\dot{\theta})^2 \operatorname{sen}^2 \theta \right] + \frac{1}{2} I_G \left[(\dot{\phi} \operatorname{sen} \theta)^2 + (\dot{\theta})^2 \right] + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi})^2 - m g l_g \cos \theta$$

Aplicaremos las ecuaciones de Lagrange obtenemos lo siguiente:

a) Para X_G :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{X}_G} \right) - \frac{\partial L}{\partial X_G} = 0 \quad \dots \quad (2.2.1)$$

Hallando separadamente:

$$\bullet \quad \frac{\partial L}{\partial X_G} = 0 \quad \dots \quad (2.2.2)$$

$$\bullet \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{X}_G} = m \dot{X}_G \quad \dots \quad (2.2.3)$$

Además

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{X}_G} \right) = m \ddot{X}_G$$

- Reemplazando

$$m \ddot{X}_G = 0$$

Por consiguiente se tiene:

$$X_G = C_{1X} t + C_{2X} \quad \dots \quad (2.2.4)$$

b) Para Y_G :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Y}_G} \right) - \frac{\partial L}{\partial Y_G} = 0 \quad \dots \quad (2.2.5)$$

Hallando separadamente:

$$\bullet \quad \frac{\partial L}{\partial Y_G} = 0 \quad \dots \quad (2.2.6)$$

$$\bullet \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{Y}_G} = m \dot{Y}_G \quad \dots \quad (2.2.7)$$

Además

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Y}_G} \right) = m \ddot{Y}_G$$

- Reemplazando

$$m \ddot{Y}_G = 0$$

Por consiguiente se tiene:

$$Y_G = C_{1Y} t + C_{2Y} \quad \dots \quad (2.2.8)$$

c) Para θ :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \quad \dots \quad (2.2.7)$$

Hallando separadamente

$$\bullet \frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{m}{2} l_g^2 \left(\dot{\theta} \right)^2 \operatorname{sen} 2\theta + \frac{1}{2} I_G \left(\dot{\phi} \right)^2 \operatorname{sen} 2\theta - I_3 \left(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta \right) \dot{\phi} \operatorname{sen} \theta + m g l_g \operatorname{sen} \theta \quad \dots \quad (2.2.8)$$

$$\bullet \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m l_g^2 \dot{\theta} \operatorname{sen}^2 \theta + I_G \dot{\theta} \quad \dots \quad (2.2.9)$$

Además

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = m l_g^2 \ddot{\theta} \operatorname{sen}^2 \theta + m l_g^2 \left(\dot{\theta} \right)^2 \operatorname{sen} 2\theta + I_G \ddot{\theta} \quad \dots \quad (2.2.10)$$

- Reemplazando (2.2.8) y (2.2.10) en (2.2.7) se tiene lo siguiente:

$$m l_g^2 \ddot{\theta} \operatorname{sen}^2 \theta + m l_g^2 \left(\dot{\theta} \right)^2 \operatorname{sen} 2\theta + I_G \ddot{\theta} - \frac{m}{2} l_g^2 \left(\dot{\theta} \right)^2 \operatorname{sen} 2\theta - \frac{1}{2} I_G \left(\dot{\phi} \right)^2 \operatorname{sen} 2\theta + I_3 \left(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta \right) \dot{\phi} \operatorname{sen} \theta - m g l_g \operatorname{sen} \theta = 0$$

Ordenando la ecuación anterior obtenemos:

$$\left(m l_g^2 \operatorname{sen}^2 \theta + I_G \right) \ddot{\theta} + \frac{m}{2} l_g^2 \left(\dot{\theta} \right)^2 \operatorname{sen} 2\theta - \frac{(I_G - I_3)}{2} \left(\dot{\phi} \right)^2 \operatorname{sen} 2\theta + \left(\dot{\psi} I_3 \dot{\phi} - m g l_g \right) \operatorname{sen} \theta = 0 \quad \dots \quad (2.2.11)$$

d) Para ϕ :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0 \quad \dots \quad (2.2.12)$$

Hallando separadamente

$$\bullet \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0 \quad \dots \quad (2.2.13)$$

$$\bullet \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = I_G \dot{\phi} \operatorname{sen}^2 \theta + I_3 \left(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta \right) \cos \theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \left(I_G \operatorname{sen}^2 \theta + I_3 \cos^2 \theta \right) \dot{\phi} + I_3 \dot{\psi} \cos \theta \quad \dots \quad (2.2.14)$$

Luego

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) = \left(I_G \operatorname{sen} 2\theta - I_3 \operatorname{sen} 2\theta \right) \dot{\theta} \dot{\phi} + \left(I_G \operatorname{sen}^2 \theta + I_3 \cos^2 \theta \right) \ddot{\phi} + I_3 \ddot{\psi} \cos \theta - I_3 \dot{\psi} \dot{\theta} \operatorname{sen} \theta \quad \dots \quad (2.2.15)$$

- Reemplazando (2.2.13) y (2.2.15) en (2.2.12) se tiene lo siguiente:

$$\left(I_G \operatorname{sen} 2\theta - I_3 \operatorname{sen} 2\theta \right) \dot{\theta} \dot{\phi} + \left(I_G \operatorname{sen}^2 \theta + I_3 \cos^2 \theta \right) \ddot{\phi} + I_3 \ddot{\psi} \cos \theta - I_3 \dot{\psi} \dot{\theta} \operatorname{sen} \theta = 0$$

Ordenando la ecuación anterior obtenemos:

$$\left(I_G - I_3 \right) \dot{\theta} \dot{\phi} \operatorname{sen} 2\theta + \left(I_G \operatorname{sen}^2 \theta + I_3 \cos^2 \theta \right) \ddot{\phi} + I_3 \ddot{\psi} \cos \theta - I_3 \dot{\psi} \dot{\theta} \operatorname{sen} \theta = 0 \quad \dots \quad (2.2.16)$$

e) Para ψ :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \psi} = 0 \quad \dots \quad (2.2.17)$$

Hallando separadamente

$$\bullet \quad \frac{\partial L}{\partial \psi} = 0 \quad \dots \quad (2.2.18)$$

$$\bullet \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = I_3 \left(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta \right) \quad \dots \quad (2.2.19)$$

Derivando con respecto al tiempo

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} \right) = I_3 \left(\ddot{\psi} + \ddot{\phi} \cos \theta - \dot{\phi} \dot{\theta} \sin \theta \right) \quad \dots \quad (2.2.20)$$

- Reemplazando (2.2.18) y (2.2.20) en (2.2.17) se tiene lo siguiente:

$$I_3 \left(\ddot{\psi} + \ddot{\phi} \cos \theta - \dot{\phi} \dot{\theta} \sin \theta \right) = 0 \quad ,$$

Ordenando la ecuación anterior obtenemos:

$$\ddot{\psi} + \ddot{\phi} \cos \theta - \dot{\phi} \dot{\theta} \sin \theta = 0 \quad \dots \quad (2.2.21)$$

Agrupando las ecuaciones (2.2.4), (2.2.8), (2.2.11), (2.2.16) y (2.2.21)

$$a) \quad X_G = C_{1X} t + C_{2X} \quad \dots \quad (2.2.22)$$

$$b) \quad Y_G = C_{1Y} t + C_{2Y} \quad \dots \quad (2.2.23)$$

$$c) \quad \left(m l_g^2 \sin^2 \theta + I_G \right) \ddot{\theta} + \frac{m}{2} l_g^2 \left(\dot{\theta} \right)^2 \sin 2\theta - \frac{(I_G - I_3)}{2} \left(\dot{\phi} \right)^2 \sin 2\theta + \left(\dot{\psi} I_3 \dot{\phi} - m g l_g \right) \sin \theta = 0 \quad \dots \quad (2.2.24)$$

$$d) \quad (I_G - I_3) \dot{\theta} \dot{\phi} \sin 2\theta + (I_G \sin^2 \theta + I_3 \cos^2 \theta) \ddot{\phi} + I_3 \ddot{\psi} \cos \theta - I_3 \dot{\psi} \dot{\theta} \sin \theta = 0 \quad , \quad \dots \quad (2.2.25)$$

$$e) \quad \ddot{\psi} + \ddot{\phi} \cos \theta - \dot{\phi} \dot{\theta} \sin \theta = 0 \quad \dots \quad (2.2.26)$$

Observamos que las 3 últimas ecuaciones diferenciales ordinarias de movimiento del trompo son acopladas y no lineales, y aparecen solo los ángulos de Euler con sus derivadas. Por lo tanto resolveremos estas ecuaciones sin considerar (2.2.22) y (2.2.23).

Para resolver numéricamente las ecuaciones ordinarias de movimiento del trompo (2.2.24), (2.2.25) y (2.2.26) despejaremos las 2^{das} derivadas.

- Despejando $\ddot{\theta}$ de (2.2.24)

$$\ddot{\theta} = \frac{-m l_g^2 (\dot{\theta})^2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta + (I_G - I_3) (\dot{\phi})^2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta - (\dot{\psi} I_3 \dot{\phi} - m g l_g) \operatorname{sen} \theta}{m l_g^2 \operatorname{sen}^2 \theta + I_G} \quad \dots \quad (2.2.27)$$

- Despejaremos $\ddot{\phi}$ y para ello primero despejaremos $\ddot{\psi}$ de (2.2.26)

$$\ddot{\psi} = \dot{\phi} \dot{\theta} \operatorname{sen} \theta - \ddot{\phi} \cos \theta \quad \dots \quad (2.2.28)$$

Ahora, reemplazando $\ddot{\psi}$ en (2.2.25) obtenemos:

$$(I_G - I_3) \dot{\theta} \dot{\phi} \operatorname{sen} 2\theta + (I_G \operatorname{sen}^2 \theta + I_3 \cos^2 \theta) \ddot{\phi} + I_3 (\dot{\phi} \dot{\theta} \operatorname{sen} \theta - \ddot{\phi} \cos \theta) \cos \theta - I_3 \dot{\psi} \dot{\theta} \operatorname{sen} \theta = 0$$

simplificando

$$(2 I_G - I_3) \dot{\theta} \dot{\phi} \cos \theta + I_G \ddot{\phi} \operatorname{sen} \theta - I_3 \dot{\psi} \dot{\theta} = 0,$$

Despejando $\ddot{\phi}$

$$\ddot{\phi} = \frac{I_3 \dot{\psi} \dot{\theta} + (I_3 - 2 I_G) \dot{\theta} \dot{\phi} \cos \theta}{I_G \operatorname{sen} \theta} \quad \dots \quad (2.2.29)$$

- Despejando $\ddot{\psi}$, y para ello reemplazaremos (2.2.29) en (2.2.28)

$$\ddot{\psi} = \dot{\phi} \dot{\theta} \operatorname{sen} \theta - \left[\frac{I_3 \dot{\psi} \dot{\theta} + (I_3 - 2 I_G) \dot{\theta} \dot{\phi} \cos \theta}{I_G} \right] \cot \theta \quad \dots \quad (2.2.30)$$

Agrupando las ecuaciones de movimiento del trompo tenemos lo siguiente:

$$X_G = C_{1X} t + C_{2X}$$

$$Y_G = C_{1Y} t + C_{2Y} \quad \dots \quad (2.2.31)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{-m l_g^2 \left(\dot{\theta}\right)^2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta + (I_G - I_3) \left(\dot{\phi}\right)^2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta - \left(\dot{\psi} I_3 \dot{\phi} - m g l_g\right) \operatorname{sen} \theta}{m l_g^2 \operatorname{sen}^2 \theta + I_G},$$

$$\ddot{\phi} = \frac{I_3 \dot{\psi} \dot{\theta} + (I_3 - 2 I_G) \dot{\theta} \dot{\phi} \cos \theta}{I_G \operatorname{sen} \theta}, \text{ y}$$

$$\ddot{\psi} = \dot{\phi} \dot{\theta} \operatorname{sen} \theta - \left[\frac{I_3 \dot{\psi} \dot{\theta} + (I_3 - 2 I_G) \dot{\theta} \dot{\phi} \cos \theta}{I_G} \right] \cot \theta \quad \dots \quad (2.2.32)$$

Como es obvio $\theta \neq 0, \pi$.

Las ecuaciones (2.2.31) nos quieren decir que la proyección del centro de masas en una recta.

2.3 Aplicación a un trompo simétrico, homogéneo y pesado de forma cónica

Para poder resolver numéricamente las ecuaciones de movimiento del trompo para el caso del movimiento sin fricción de un trompo, ver las ecuaciones (2.2.32), necesitamos tener los valores de los momentos de inercia respecto a los ejes de coordenadas fijos al cuerpo del trompo y que se interceptan en su centro de gravedad. Por simplicidad asumiremos que el trompo es de forma cónica, como se hizo en el caso anterior.

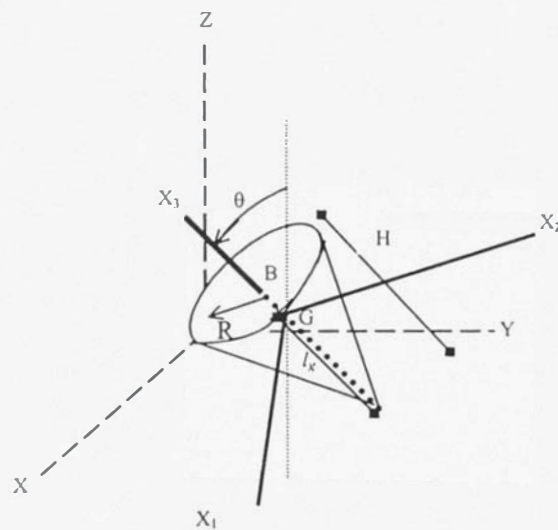


Figura (2.3.1)

Donde: R , es el radio de la base;
 H , es la altura del cono (trompo)
 l_g , es la distancia entre el vértice y el centro de gravedad del cono

Reemplazando, en las ecuaciones de movimiento del trompo (2.2.32), los momentos de inercia de un cono, ver las ecuaciones (A.1.14) del anexo 1, respecto a su eje de simetría y a los ejes que atraviesan el centro de gravedad del cono obtendremos las ecuaciones diferenciales ordinarias de movimiento del trompo cónico:

$$\ddot{\theta} = \frac{\left[-m l_x^2 (\dot{\theta})^2 + \left(\frac{3m}{20} (4R^2 + H^2) - \frac{3mR^2}{10} \right) (\dot{\phi})^2 \right] \text{sen}\theta \cos\theta - \left(\dot{\psi} \frac{3mR^2}{10} \dot{\phi} - m g l_x \right) \text{sen}\theta}{m l_x^2 \text{sen}^2\theta + \frac{3m}{20} (4R^2 + H^2)}$$

$$\ddot{\phi} = \frac{\frac{3mR^2}{10} \dot{\psi} \dot{\theta} + \left[\frac{3mR^2}{10} - 2 \frac{3m}{20} (4R^2 + H^2) \right] \dot{\theta} \dot{\phi} \cos\theta}{\frac{3m}{20} (4R^2 + H^2) \text{sen}\theta}, y$$

$$\ddot{\psi} = \dot{\phi} \dot{\theta} \text{sen}\theta - \left[\frac{\frac{3mR^2}{10} \dot{\psi} \dot{\theta} + \left[\frac{3mR^2}{10} - 2 \frac{3m}{20} (4R^2 + H^2) \right] \dot{\theta} \dot{\phi} \cos\theta}{\frac{3m}{20} (4R^2 + H^2)} \right] \cot\theta$$

... (2.3.1)

Simplificando las ecuaciones (2.3.1), obtenemos las ecuaciones diferenciales de movimiento

$$\ddot{\theta} = \frac{\left[-l_x^2 (\dot{\theta})^2 + \left(\frac{3}{20} (2R^2 + H^2) \right) (\dot{\phi})^2 \right] \text{sen}\theta \cos\theta - \left(\dot{\psi} \frac{3R^2}{10} \dot{\phi} - g l_x \right) \text{sen}\theta}{l_x^2 \text{sen}^2\theta + \frac{3}{20} (4R^2 + H^2)},$$

$$\ddot{\phi} = \frac{2R^2 \dot{\psi} \dot{\theta} - (6R^2 - 2H^2) \dot{\theta} \dot{\phi} \cos\theta}{(4R^2 + H^2) \text{sen}\theta} y$$

$$\ddot{\psi} = \dot{\phi} \dot{\theta} \text{sen}\theta - \left[\frac{2R^2 \dot{\psi} \dot{\theta} - (6R^2 - 2H^2) \dot{\theta} \dot{\phi} \cos\theta}{(4R^2 + H^2)} \right] \cot\theta$$

... (2.3.2)

En analogía con el capítulo anterior, también observamos que las ecuaciones de movimiento no dependen de la masa del trompo.

2.4 Observaciones y conclusiones de la solución numérica para un trompo de forma cónica utilizando el método de Runge Kutta de orden cuatro

Para poder resolver las ecuaciones de movimiento del trompo, ver (2.3.2), primero necesitamos conocer las dimensiones y la masa de un trompo cónico y luego reemplazarlas en las ecuaciones. Estos valores se muestran en la tabla (2.4.1)

Tabla (2.4.1)

Material	Madera
Masa	0,068 kg
Radio (R)	0,0273 m
Altura (H)	0,074 m
Centro de Gravedad (l_g)	0,0555 m

Luego las ecuaciones diferenciales de movimiento quedaran de la forma:

$$\ddot{\theta} = \frac{\left[-0,003080 \left(\dot{\theta} \right)^2 + 0,001045 \left(\dot{\phi} \right)^2 \right] \text{sen} \theta \cos \theta - \left(0,000224 \dot{\psi} \dot{\phi} - 0,544455 \right) \text{sen} \theta}{0,003080 \text{sen}^2 \theta + 0,001269},$$

$$\ddot{\phi} = \frac{0,001491 \dot{\psi} \dot{\theta} + 0,006480 \dot{\theta} \dot{\phi} \cos \theta}{0,008457 \text{sen} \theta} \text{ y}$$

$$\ddot{\psi} = \dot{\phi} \dot{\theta} \text{sen} \theta - \left[\frac{0,001491 \dot{\psi} \dot{\theta} + 0,006480 \dot{\theta} \dot{\phi} \cos \theta}{0,008457} \right] \cot \theta \quad \dots \quad (2.4.1)$$

Para poder resolver las ecuaciones de movimiento (2.4.1), aplicando el método numérico de Runge Kutta de orden 4, necesitamos convertirlas a ecuaciones de primer orden.

Definiendo $X_\theta \equiv \dot{\theta}$, $X_\phi \equiv \dot{\phi}$ y $X_\psi \equiv \dot{\psi}$ luego de las ecuaciones (2.4.1) se obtiene las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias de 1^{er} orden.

$$\dot{\theta} = X_{\theta}$$

$$\dot{\phi} = X_{\phi}$$

$$\dot{\psi} = X_{\psi}$$

$$\ddot{\theta} = \frac{[-0,003080 X_{\theta}^2 + 0,001045 X_{\phi}^2] \operatorname{sen} \theta \cos \theta - (0,000224 X_{\psi} X_{\phi} - 0,544455) \operatorname{sen} \theta}{0,003080 \operatorname{sen}^2 \theta + 0,001269}$$

$$\ddot{\phi} = \frac{0,001491 X_{\psi} X_{\theta} + 0,006480 X_{\theta} X_{\phi} \cos \theta}{0,008457 \operatorname{sen} \theta}$$

$$\ddot{\psi} = X_{\phi} X_{\theta} \operatorname{sen} \theta - \left[\frac{0,001491 X_{\psi} X_{\theta} + 0,006480 X_{\theta} X_{\phi} \cos \theta}{0,008457} \right] \cot \theta \quad \dots \quad (2.4.2)$$

Con el nuevo sistema de ecuaciones (2.4.2) y con las condiciones iniciales que se consideraran podremos resolverlo aplicando el método de Runge Kutta.

Los gráficos de la proyección del centro de masa (X_G vs Y_G), la proyección del centro de la base del cono (X_B vs Y_B), las funciones $\theta(t)$, $\phi(t)$, $\psi(t)$, $\dot{\theta}(t)$, $\dot{\phi}(t)$ y $\dot{\psi}(t)$ se muestran de la página 211 a la página 217. Las respectivas páginas y así como también sus características principales de los gráficos se muestran en la tabla (2.4.2).

Y a continuación resolveremos numéricamente, con un paso de 1/1000, las ecuaciones de movimiento (2.4.2) para las siguientes condiciones iniciales.

$$X_G(0) = 0 \text{ m}$$

$$Y_G(0) = 0 \text{ m}$$

$$\theta(0) = 20^\circ$$

$$\phi(0) = 0^\circ$$

$$\psi(0) = 0^\circ$$

$$\dot{X}_G(0) = 0,02 \text{ m/s}$$

$$\dot{Y}_G(0) = 0,02 \text{ m/s}$$

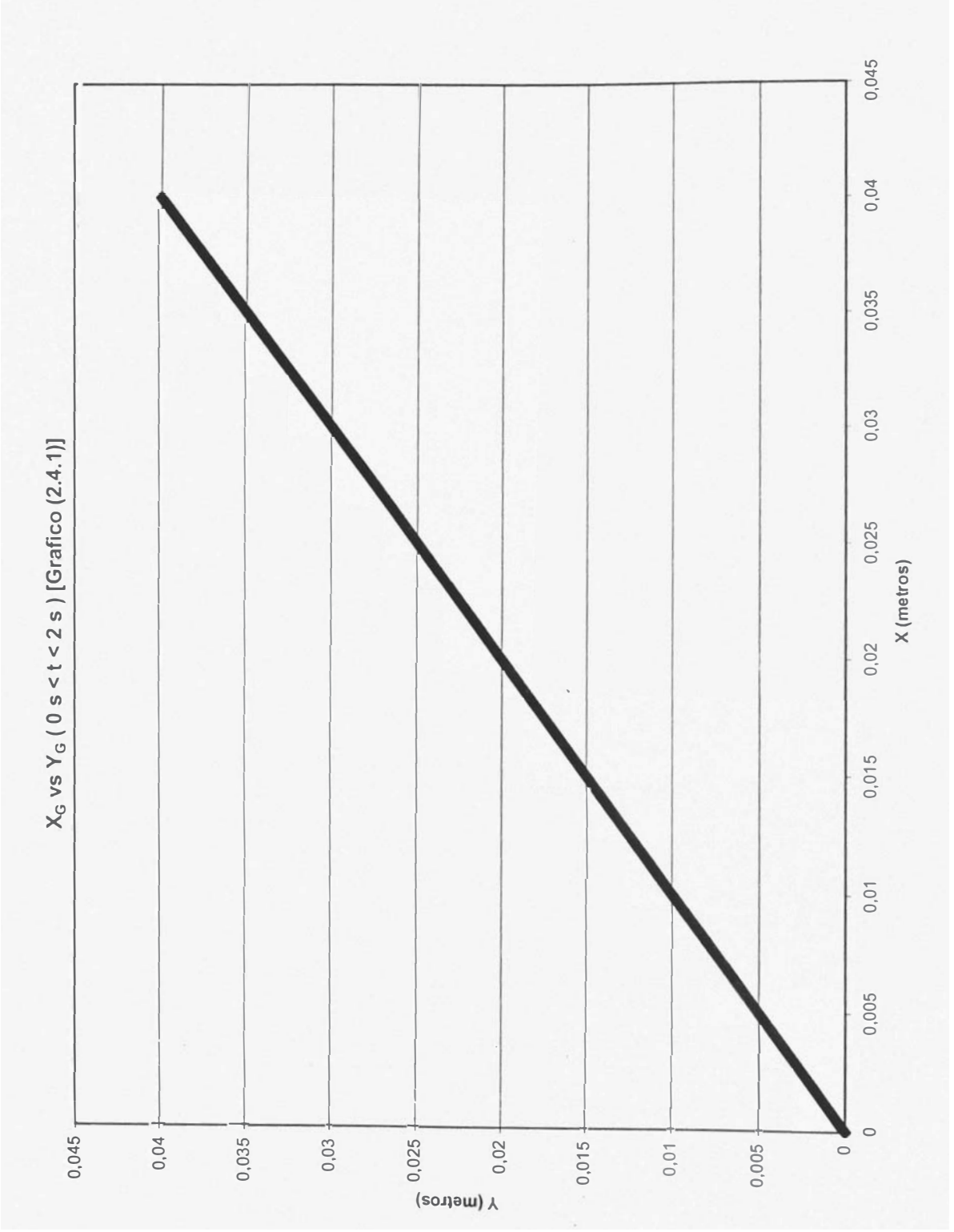
$$\dot{\theta}(0) = 0 \text{ rad/s}$$

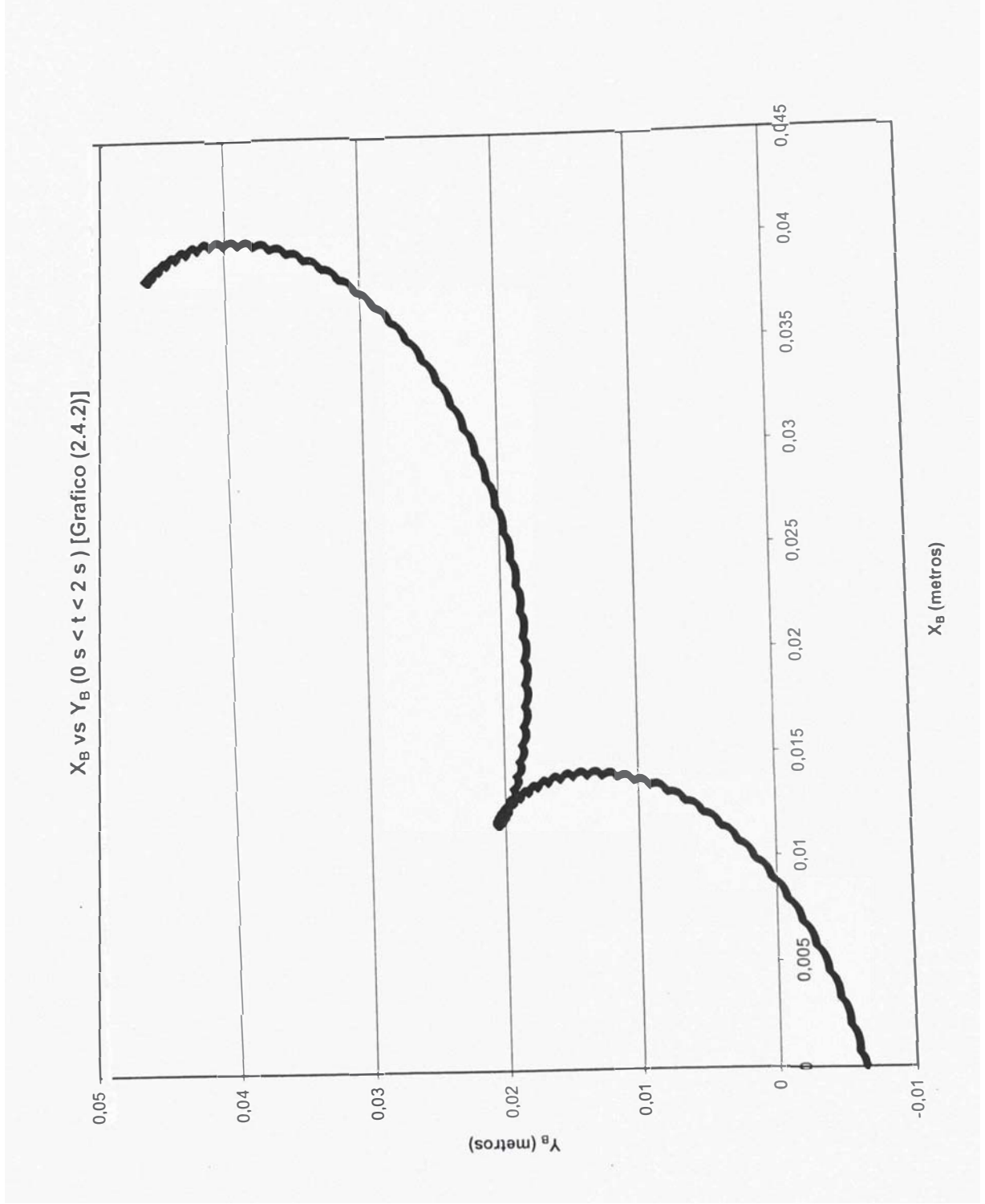
$$\dot{\phi}(0) = 10 \text{ rad/s}$$

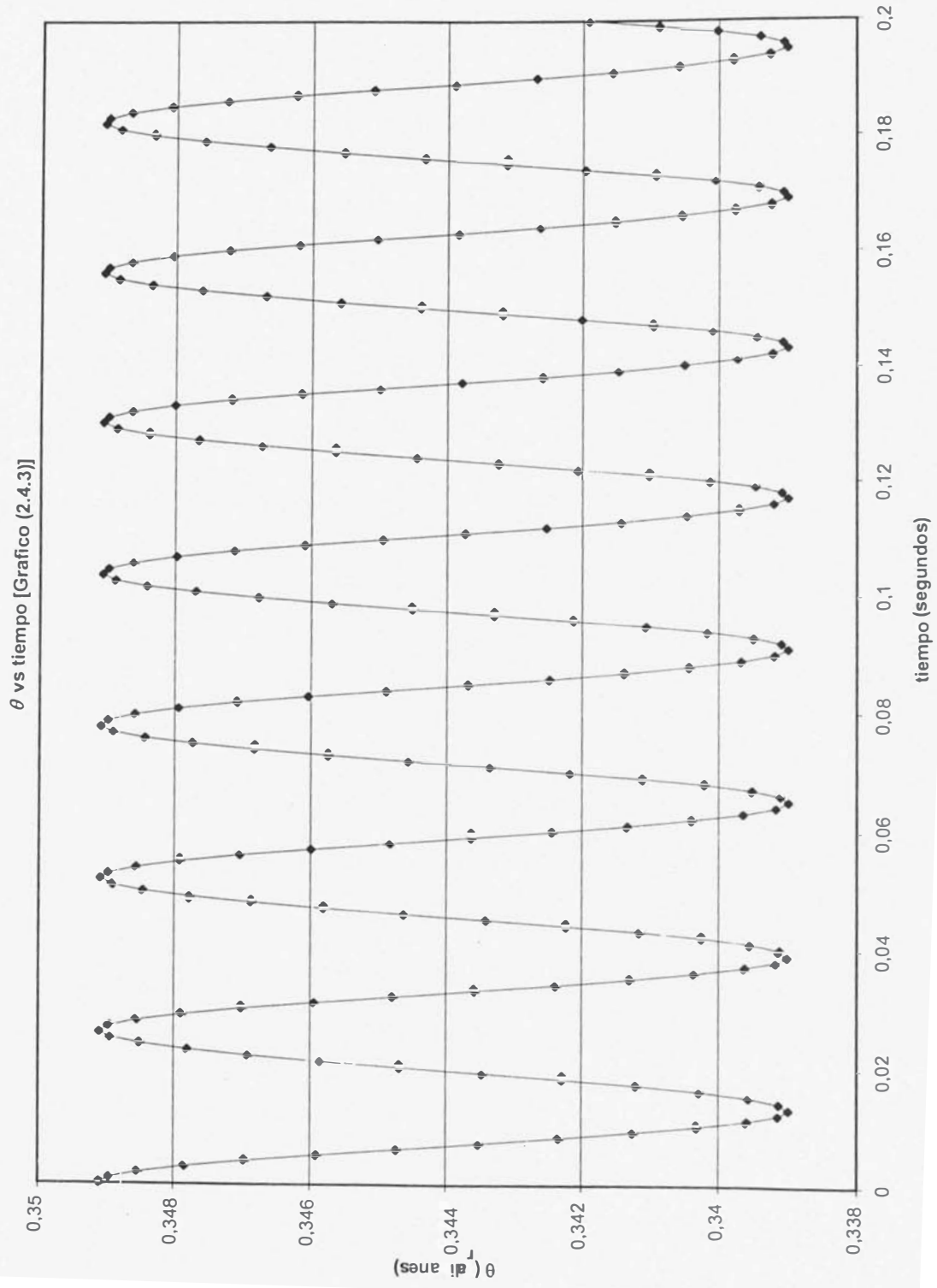
$$\dot{\psi}(0) = 500 \text{ rad/s}$$

Tabla (2.4.2)

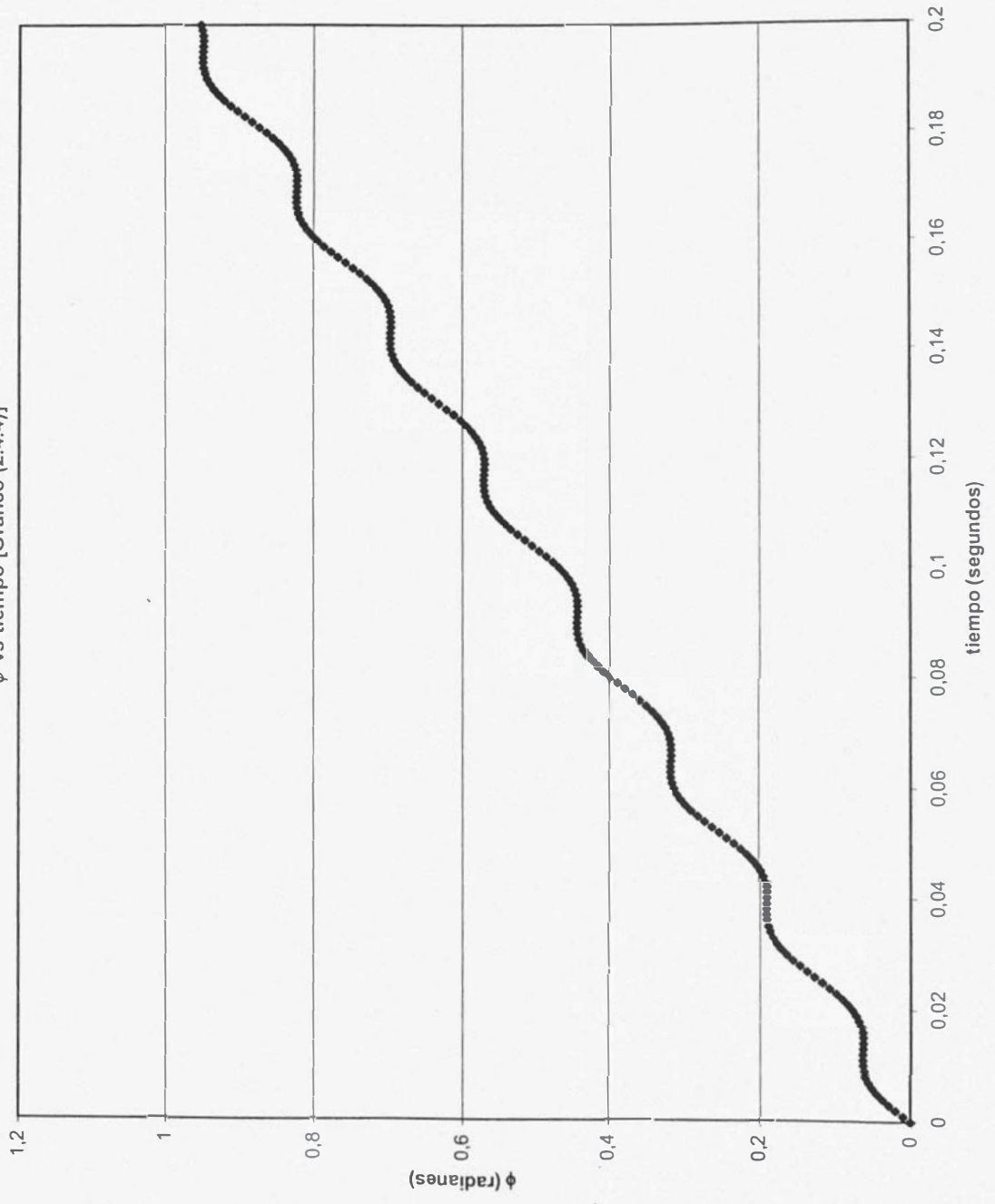
Función	Característica principal	Grafico	Página
$X_G \text{ vs } Y_G$	Continua	(2.4.1)	211
$X_b \text{ vs } Y_b$	Continua y Ondulante	(2.4.2)	212
$\theta(t)$	Periódica $T = 0,026 \text{ s}$	(2.4.3)	213
$\phi(t)$	Creciente $T_{\text{prec}} = 1,297 \text{ s}$	(2.4.4)	214
$\psi(t)$	Creciente	(2.4.4)	215
$\dot{\theta}(t)$	Periódica $T = 0,026 \text{ s}$	(2.4.6)	216
$\dot{\phi}(t)$	Periódica $T = 0,026 \text{ s}$	(2.4.7)	217

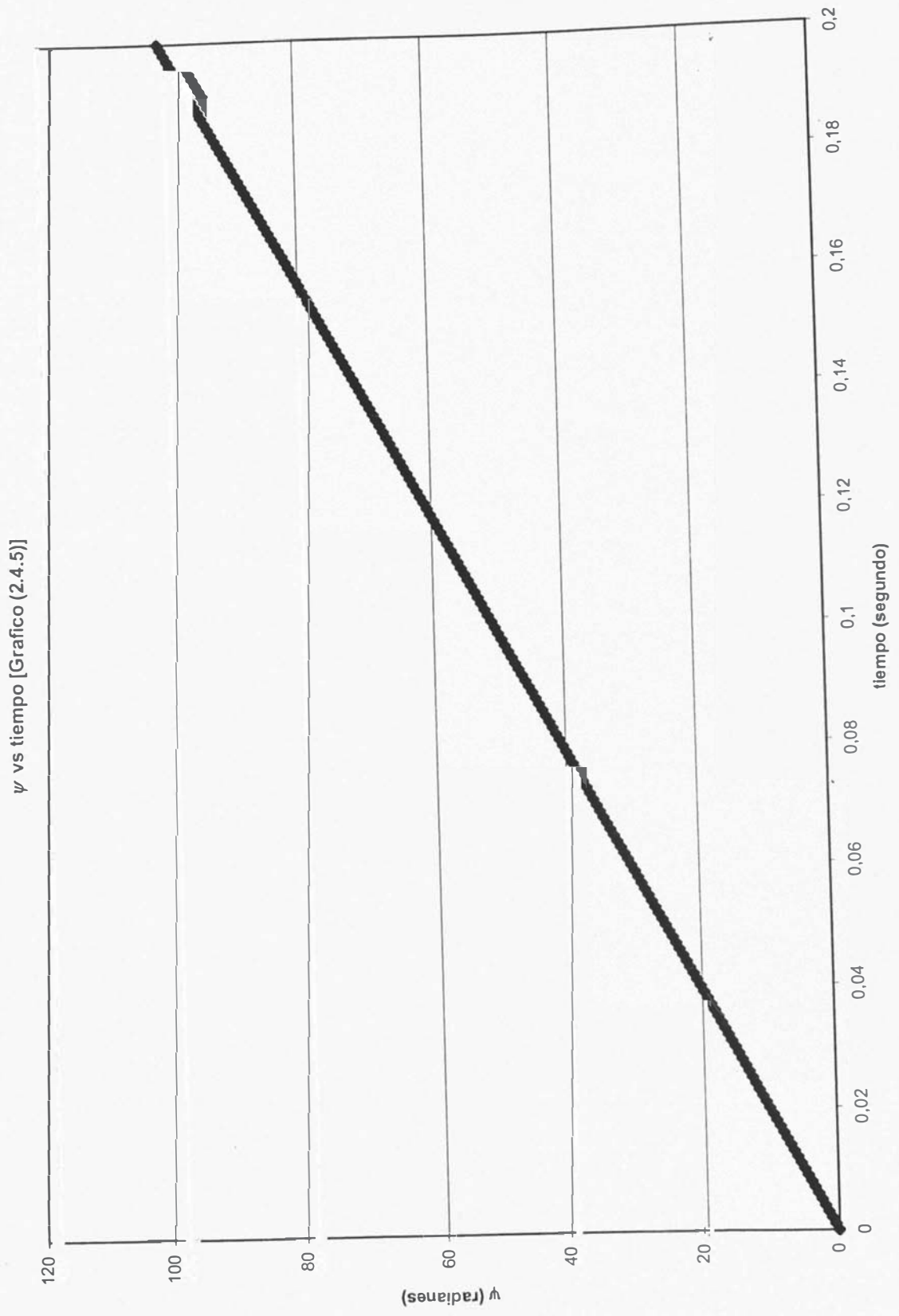


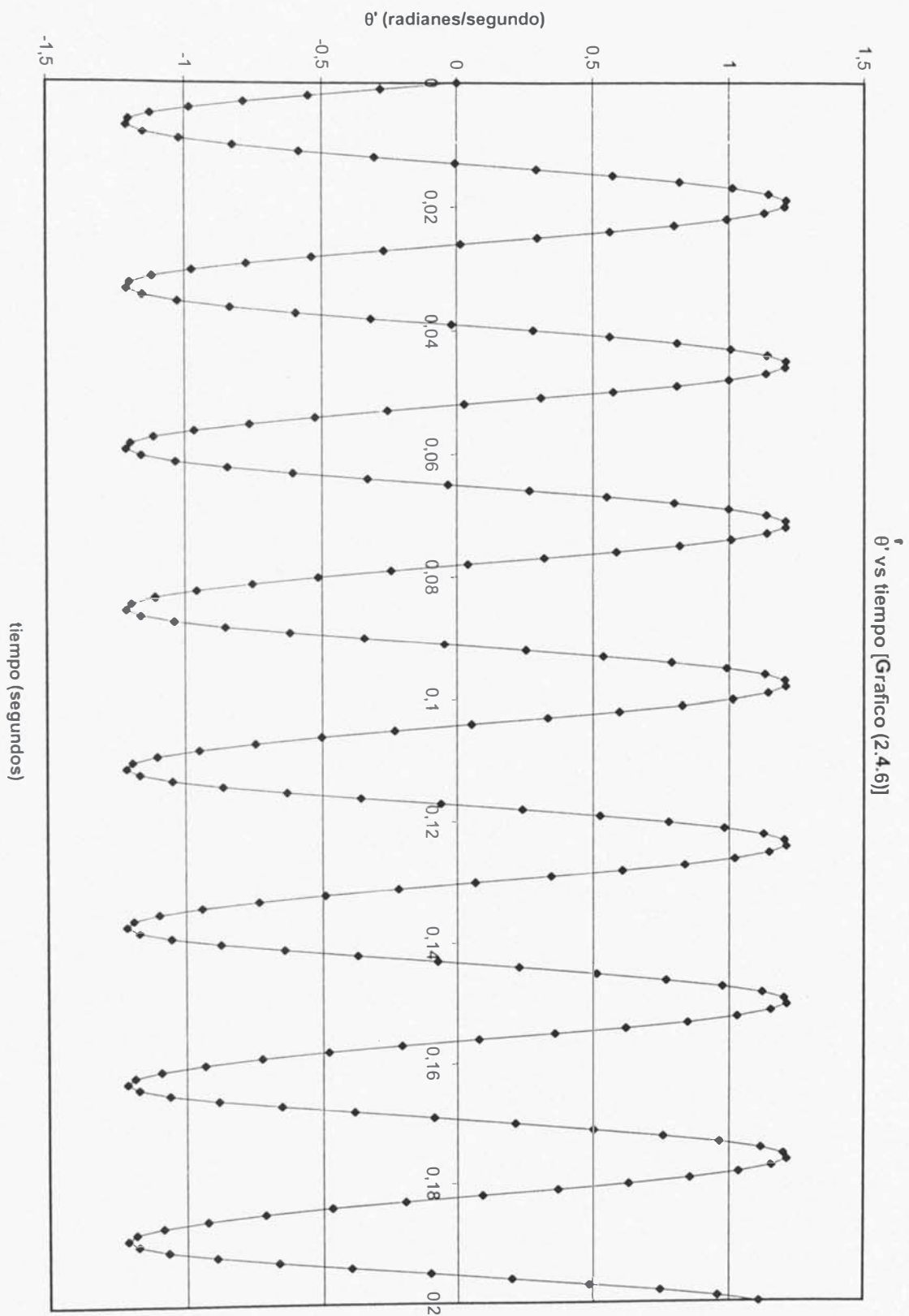


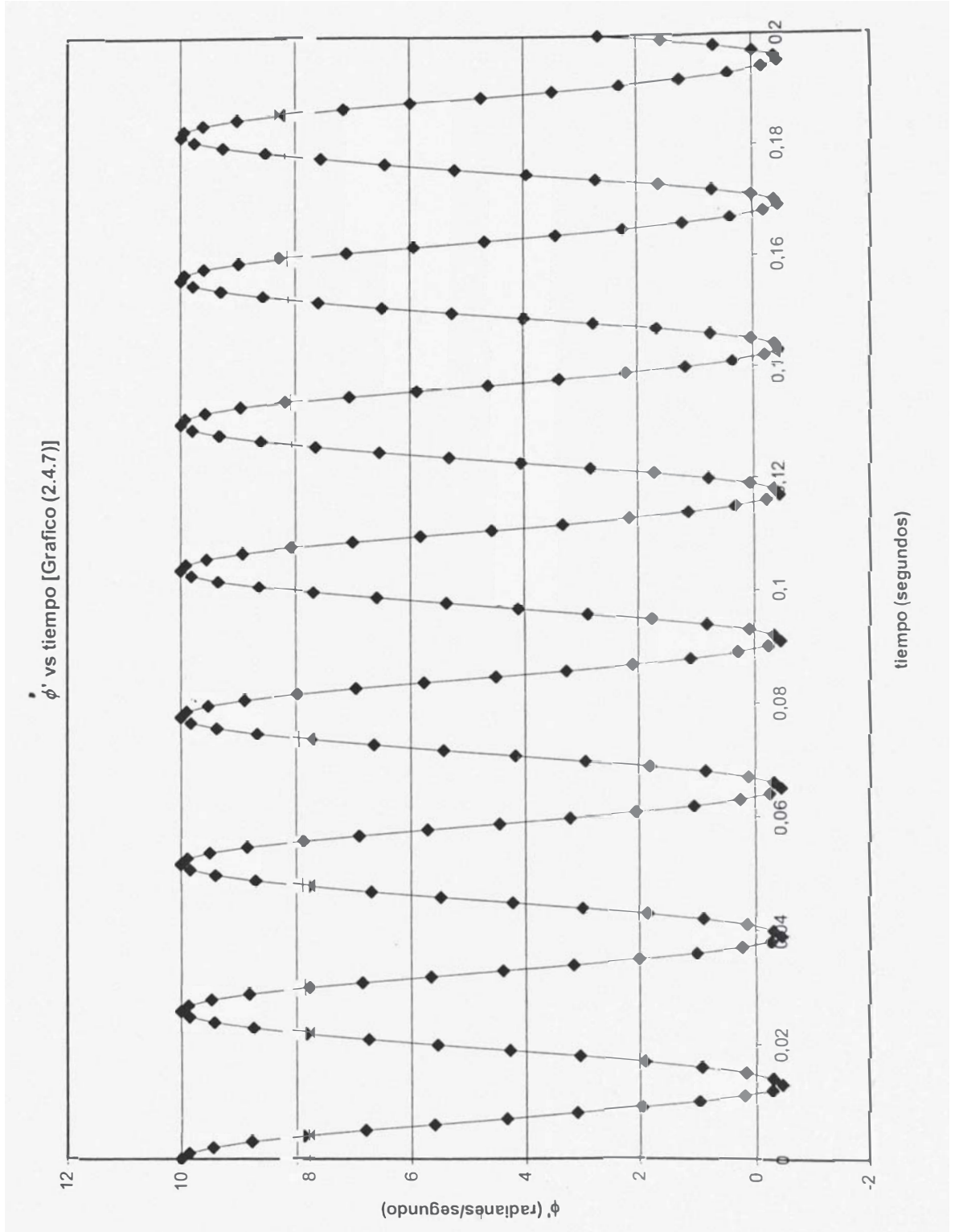


ϕ vs tiempo [Grafico (2.4.4)]









Observaciones y Conclusiones:

- Las funciones $\theta(t)$, $\dot{\theta}(t)$, $\dot{\phi}(t)$ y $\dot{\psi}(t)$ son periódicas y tienen el mismo periodo.
- La proyección del centro de masa en el plano XY es una recta y es consistente con la 2^{da} ley de Newton, aplicado al centro de masa.
- La proyección del centro de la base del cono en el plano XY es una curva con rizos.
- Podemos concluir que la dependencia de los ángulos de Euler así como sus derivadas con respecto al tiempo son semejantes al caso del movimiento del trompo con punto de apoyo fijo, es decir, el movimiento del cuerpo rígido es similar al caso del anterior capítulo a pesar que el lagrangiano de este último es “ligeramente” diferente.

BIBLIOGRAFIA

- H. Goldstein, Mecánica Clásica, Editorial Reverte, España, 2000, páginas 270 – 285.
- V. Starzhinski, Mecánica teórica, Editorial Mir, Moscú, 1985, páginas 427 – 432.
- L. Landau y E. Lifshitz, Mecánica y Electrodinámica, Editorial Mir, Moscú, 1971, páginas 11 – 29.
- J. Marion, Dinámica clásica de las partículas y sistemas, Editorial Reverte, Barcelona, 1975, páginas 448 – 455.
- N. Danílina, N. Dubróvskaya, O. Kvashá y G. Smirnov, Matemática de Cálculo, Editorial Mir, Moscú, 1990, páginas 399 – 406.
- A. Altamirano, Movimiento de un elipsoide de revolución no homogéneo, Tesis de licenciatura, Facultad de ciencias – UNI – 2005.