UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA
FACULTAD DE INGENIERIA ECONÓMICA
Y CIENCIAS SOCIALES

Inversa Generalizada de una Matriz y su Aplicación en la Econometría.

INFORME DE SUFICIENCIA

PARA OPTAR EL TITULO PROFESIONAL DE:

INGENIERO ECONOMISTA

POR LA MODALIDAD DE ACTUALIZACIÓN DE CONOCIMIENTOS

ELABORADO POR:

Edwin Octavio Mejía Rodrigo

LIMA-PERU

2001

DEDICATORIA

A la memoria de mi padre y a mi madre por su cariño y comprensión, a mi esposa por su apoyo constante, a mis hijos por ser la razón de mi existencia, y a mis maestros, por enseñarme el camino de la verdad.

I.- CURRÍCULUM VITAE

II.- INFORME DE SUFICIENCIA

LA INVERSA GENERALIZADA DE UNA MATRIZ

INTRODUCCIÓN

Cuando trabajamos con matrices; hacemos uso frecuente de la inversa de una matriz no singular, pero frente a interrogantes como ¿qué hacer si la matriz es singular o no-cuadrada?, ¿qué utilidad tienen las inversas de las matrices de este tipo? en el presente trabajo deseamos responder a dichas inquietudes.

Para lo que inicialmente planteamos un contexto del desarrollo de la Econometría; en segundo lugar señalamos las definiciones básicas que harán uso; en tercer lugar a partir de las transformaciones lineales justificamos la existencia de la inversa; teniendo en cuenta que las transformaciones lineales se representan matemáticamente por medio de matrices y de existir la inversa de una transformación lineal, su representante desde luego sería la inversa de una matriz.

A continuación; analizamos el origen, las limitaciones, propiedades, los diferentes casos que presenta la inversa generalizada y algoritmos de cálculo; finalmente las aplicaciones en la solución de ecuaciones y en la Econometría.

CAPITULO I

UN CONTEXTO HISTÓRICO

Es preciso tener una visión histórica del desarrollo de la Econometría y el lugar que ocupa la inversa generalizada dicho proceso. Asimismo las posibilidades de desarrollo a partir de la introducción de la inversa generalizada en la Econometría.

La investigación econométrica y el análisis cuantitativo pertenecen a nuestro siglo: siendo Von Thünen como precursor de la Econometría; en cuanto al origen de la Econometría depende del punto de vista que se le analice; así Arrow manifiesta: "La Econometría, como movimiento organizado es todavía muy joven, lo cual nos concede el privilegio de poder saludar a nuestros fundadores cuando todavía están en la plenitud de su vigor y de sus facultades creadoras"; pero se puede considerar el origen, cuando ésta se manifiesta "como movimiento organizado".

La econometría se inició con el análisis de la demanda. Del impacto que Cournot (1838) y los famosos Principios de Marshall (1890) debieron causar entre los economistas de entonces, lo que motivó el interés del análisis estadístico de la demanda. Esto fue favorecido por:

i) La existencia de una teoría bien estructurada.

ii) La posibilidad de obtener fácilmente datos estadísticos sobre precios y cantidades.

Así continuó el desarrollo de la Econometría y cuya mayor dificultad, fue el limitado avance del instrumental estadístico y es reciente la elaboración de LA TEORÍA DE LA CORRELACIÓN y se tuvo que esperar algunos años hasta su aplicación a las relaciones existentes entre precios y cantidades. En este período Yule juega un lugar preponderante.

En sí: las fechas que marcan un hito en la historia de la Econometría son:

1930: En que se funda la Econometric Society cuyos alentadores fueron Roos, Fisher y Frisch.

1939: Tinbergen, incorpora los modelos macroeconómicos multiecuacionales y escribe uno de los dos primeros tratados de Econometría.

1943: Haavelmo, abre nuevos horizontes al plantear la interdependencia de las ecuaciones que integran los modelos multiecuacionales; así mismo se resuelve el problema de la identificación que anteriormente era inexistente; llegándose a la concepción estocástica de los modelos, gracias al perfeccionamiento del instrumental estadístico.

1950: Los tratados de Econometría contribuyen a su difusión, como el de Klein, de la Cowles Commissión, el de Tintner y otros. La aparición del Statistical inference in dynamic models como lo más destacable.

Tras el quinquenio 1950 – 1954, desde el punto de vista teórico y básico alcanzó un desarrollo extraordinario; se hacen los reajustes, se discute y condena lo anteriormente realizado.

Entre las publicaciones recientes destacables tenemos al texto de Foote, donde los problemas específicos de la Econometría en forma acabada; el de Klaassen que hace una sencilla exposición de la técnica econométrica; el de Stöwe que expone los problemas de la verificación estadística de las hipótesis económicas y el de Malinvaud que es calificado como el mejor que se ha publicado desde las monografías de la Cowles Commissión y el tratado de Klein.

La Econometría sigue evolucionando adquiriendo mayor perfeccionamiento; gracias al desarrollo del instrumental estadístico, al Álgebra lineal cuyos fundamentos teóricos sustentan los conceptos econométricos. Así mismo el desarrollo de la informática ha contribuido en la estimación, contraste y validación de los modelos.

Pero todo análisis de los modelos uniecuacionales y multiecuacionales se hacen con matrices de rango pleno, que es una limitación pues lo que sólo se tienen que trabajar con matrices no singulares.

Entonces: levantando el supuesto de la no-singularidad pasamos a una "Econometría" donde partiendo de una muestra conocida, encontramos muchas soluciones para los valores de muestra; lo que supondría que nos es la única posible muestra; lo que supondría que no es la única posible muestra elegir dentro de un universo determinado.

Visto desde otro punto de vista, para la determinación de ciertos parámetros, tenemos infinitas soluciones de la que elegimos alguna o algunas de ellas para la toma de decisiones y así mismo de esta manera las fronteras de la Econometría se ampliarían.

CAPITULO II

DEFINICIONES PRELIMINARES.

2.1 DEFINICION.- Un espacio vectorial V sobre un campo K es un conjunto no vacío de elementos llamados "vectores" provistos de dos operaciones:

i. $V \times V \longrightarrow V$

$(v_1, v_2) \longrightarrow v_1 + v_2$

ii. $K \times V \longrightarrow V$

$(\lambda, v) \longrightarrow \lambda v$

llamado suma de elementos V y producto de un elemento de V por un elemento de K, que satisface las siguientes propiedades:

$$\forall\ v, u, w \text{ de } V \text{ y } \lambda, \alpha, \beta \in K$$

1. $v + u \in V$
2. $v + (u + w) = (v + u) + w$

3. $v + u = u + v$

4, Existe un elemento denotado por 0; tal que $v + 0 = 0 + v = v$.

5. Para cada $v \in V$, existe en V un elemento denotado $-v$ tal que

$$v + (-v) = (-v) + v = 0.$$

6. $\lambda v \in v \qquad \forall \lambda \in K$

7, $\lambda (v + u) = \lambda v + \lambda u$

8, $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$

9. $\alpha (\beta v) = (\alpha \beta) v$

10. $ev = v$, e elemento neutro de K. y lo denotamos $e = 1$ llamado elemento unidad o uno.

2.2 COMBINACIÓN LINEAL.

2.2.1 Definición.- Sean $v_1, v_2 ....., v_n$ vectores en un espacio vectorial V. Decimos que $t_1v_1 + t_2v_2 + ... + t_nv_n = \sum_{i=1}^{n} t_iv_i$ es una combinación lineal de los vectores $v_1, v_2, .., v_n$ donde $t_1, t_2, ..., t_n \in K$.

2.2.2 Definición.- Si V es un espacio vectorial sobre K y si $v_1, v_2,..., v_n$ son vectores de V, decimos que tales vectores son linealmente dependientes sobre k si existen escalares, $t_1, t_2, ..., t_n$ no todos ceros tales que:

$$t_1v_1 + t_2v_2 + ... + t_nv_n = 0.$$

2.2.3 Definición.- Si los vectores no nulos $v_1, v_2, ..., v_n$ no son linealmente dependientes, decimos que son linealmente independientes sobre K o en forma equivalente:

$v_1, v_2, ..., v_n$ son linealmente independientes si y sólo si:

$$t_1v_1 + t_2v_2 + ... + t_nv_n = 0 \text{ implica } t_1 = t_2 = ... = t_n = 0.$$

2.2.4 Definición.- Sea $B = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ un conjunto vectores de V. decimos que B es una base si y sólo si.

i) B es un conjunto linealmente independiente.

ii) B genera todo V, es decir, para cada $x \in V$ puede ser expresado en forma única como una combinación lineal de B, $x = \alpha_1v_1 + ... + \alpha_nv_n$.

2.3 Definición.- Sea $B = \{x_1, x_2,..., x_n\}$ una base el espacio vectorial V.

EL VECTOR COORDENADO de un vector x de v referido a la base ordenada B, es el vector columna $x = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$, donde $a_1, a_2, ..., a_n$ son los escalares determinados en forma única y tales que $x = a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n$. Los escalares $a_1, a_2, ..., a_n$ se llaman coordenadas de x referidas a la base B. Se denotará $[x]_B$ al vector coordenado x referido a la base B.

2.4 TRANSFORMACIONES ELEMENTALES.- Son tres tipos de operaciones llamadas TRANSFORMACIONES ELEMENTALES DE UNA MATRIZ, y que pueden ser:

a) El intercambio de dos líneas paralelas cualesquiera de una matriz.

b) La multiplicación de todos los elementos de cualquier línea por la misma constante diferente de cero.

c) La suma a cualquier línea de un múltiplo arbitrario de cualquier otra línea paralela diferente.

2.5 MATRIZ EN LA FORMA NORMAL.- Cuando una matriz se ha reducido a una matriz de la forma:

$$\begin{bmatrix} I_r \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} I_r & \vdots & 0 \end{bmatrix} \quad \left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right] \text{ ó } I_r$$

donde su rango es r e Ir es una matriz identidad de orden r; obtenida por medio de transformaciones elementales, decimos que se ha reducido a la FORMA NORMAL.

2.6 MATRICES EQUIVALENTES.- Si A y B son dos matrices mxn; se dice que B es equivalente por filas a A, si B se obtiene de A por una sucesión finita de operaciones elementales de filas.

2.6.1 Teorema.- Si dos matrices A y B son equivalentes, entonces existen matrices no singulares C y D tales que CAD = B. Es de particular importancia el caso cuando B es la forma normal de A.

2.6.2 Teorema.- Cualquier matriz no singular puede factorizarse en un producto de matrices elementales.

2.6.3 Teorema.- Las matrices A, BA, AC y BAC, donde B y C son no singulares, tienen el mismo rango.

2.7 MATRIZ ELEMENTAL.- Es toda matriz que se obtiene a partir de la matriz identidad por medio de una sola operación elemental con renglones.

2.8 RANGO DE UNA MATRIZ.- Decimos que una matriz es de rango r si y solo si tiene r vectores (filas o columnas) linealmente independientes.

2.9 RANGO PLENO O COMPLETO.- Una matriz X de orden n x k con rango k; es de rango columna completo si las columnas de X son linealmente independientes y hay al menos k observaciones.

Usualmente el término rango completo describe una matriz cuyo rango es igual al número de columnas que contiene.

CAPITULO III

TRANSFORMACIONES LINEALES Y LA INVERSA DE UNA MATRIZ

En el presente capítulo; pretendemos dar una explicación de la existencia de las matrices como la representación de una transformación lineal y luego su inversa correspondiente.

3.1 TRANSFORMACIONES LINEALES.- Las transformaciones lineales son funciones de un espacio vectorial V con base B_1, en otro espacio vectorial W con base B_2. Estas transformaciones se pueden representar por medio de matrices.

3.1.1 Definición.- Sean V y W dos espacios vectoriales de dimensiones finita sobre el cuerpo F. Una transformación lineal de V en W es una función T de V en W tal que:

$$T(\lambda x + y) = \lambda T(x) + T(y)$$

para todos los vectores $x, y \in V$ y todos los escalares $\lambda \in F$.

A $T(x)$ se le da el nombre de imagen de x bajo la transformación lineal T.

3.1.2 Teorema.- Sea el espacio vectorial V, donde una de las bases es $B = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$. Sean $C = \{c_1, c_2, ..., c_n\}$ un conjunto de n vectores en V (no necesariamente linealmente independientes). Entonces existe una transformación lineal determinada en forma única de V en W tal que: $T(b_i) = c_i$, para $i = 1, 2, ..., n$.

Demostración.

Supongamos que existe una transformación lineal:

$$S : V \rightarrow W \,/\, S(b_i) = c_i$$

$$x \in V \rightarrow x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i$$

$$S(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i S(b_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i c_i = T(x); \forall x \, de \, V$$

Entonces: S = T

3.2 ÁLGEBRA DE TRANSFORMACIONES LINEALES.

3.2.1 Teorema.- Sean V, W espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo y S, T transformaciones lineales de V en W sobre el cuerpo F.

La función (S + T) definida por:

$$(S + T)(x) = S(x) + T(x)$$

es una transformación lineal de V en W

Si α es un elemento del cuerpo F, la función αT definida por:

$$(\alpha T)(x) = \alpha T(x)$$

es una transformación lineal de V en W.

El conjunto de todas las transformaciones lineales de V en W, junto con la adición y la multiplicación escalar ya definidas anteriormente, es un espacio vectorial al sobre F.

Demostración.

$L(V, W) = \{A : V \rightarrow W \,/\, A \text{ es t.l.}\}$ es un espacio vectorial

Suponiendo que S y T son transformaciones lineales de V en W, luego deben cumplir con la definición:

$$(S + T)(\alpha x + y) = S(\alpha x + y) + T(\alpha x + y)$$

$$= \alpha S(x) + S(y) + \alpha T(x) + T(y)$$

$$= \alpha\,(S(x) + T(x)) + (S(y) + T(y))$$

$$= \alpha\,(S + T)\,(x) + (S + T)\,(y)$$

Lo que nos confirma que $(S + T)$ es una transformación lineal.

Asimismo: $$(\alpha T)\,(\beta x + y) = \alpha[T\,(\beta x + y)]$$

$$(\alpha T)\,(\beta x + y) = \alpha[\beta T(x) + T(y)]$$

$$(\alpha T)\,(\beta x + y) = \alpha\beta T(x) + \alpha T(y)$$

$$(\alpha T)\,(\beta x + y) = \beta\,[(\alpha T)(x)] + (\alpha T)\,(y)$$

$$(\alpha T)\,(\beta x + y) = (\alpha\, T)(\beta x + y)$$

que nos indica que αT es una transformación lineal.

$$\alpha T \in L(V,W)$$

$L\,(V,W)$ es un espacio vectorial.

3.2.2 Teorema.- Sean los espacios vectoriales U, V, W sobre el cuerpo F. Sea T una transformación lineal de U en V y S una transformación lineal de V en W. Luego la transformación compuesta de SoT definida $SoT(x) = S(T(x))$ es una transformación lineal de U en W.

Demostración.

$$SoT\ (cx + y) = S[T(cx + y)]$$
$$= S[cT(x) + T(y)]$$
$$= c[S(T(x))] + S(T(y))$$
$$= c(SoT)\ (x) + (SoT)\ (y)$$

3.2.3 Definición. Si V es un espacio vectorial sobre el cuerpo F, una transformación lineal de V en V, se dice que es un operador lineal sobre V.

3.3 REPRESENTACIÓN DE TRANSFORMACIONES LINEALES POR MATRICES.

3.3.1 Teorema.- Sean V, W espacios vectoriales de dimensión n y m respectivamente sobre el cuerpo F. Sea B_1 una base de V y B_2 una base de W. Para cada transformación lineal T de V en W existe una matriz m x n, cuyos elementos pertenecen a F, tal que:

$$[T(x)]_{B_2} = A[x]_{B_1}$$

para cada vector x en V.

La matriz A, se llama matriz de la transformación de T respecto a las bases ordenadas B_1, B_2.

Demostración.

Sean $B_1 = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$ una base de V y $B_2 = \{c_1, c_2, ..., c_m\}$ una base de W.

Si existe una transformación lineal T de V en W, entonces T está determinada por su efecto sobre los vectores b_j. Como cada vector $T(b_j)$ se expresa de manera única como una combinación lineal de su base; se tiene:

$$T(b_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} c_i \qquad j = 1, 2, ..., n$$

donde los a_{ij} son las coordenadas de $T(b_j)$ en la base ordenada B_2.

Pero sabemos que para cualquier $x \in V$ se cumple que:

$$x = x_1 b_1 + ... + x_n b_n$$

$$T(x) = T\left(\sum_{j=1}^{n} x_j b_j\right)$$

$$T(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j \, T(bj)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} c_j$$

$$\sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right) c_j$$

$$=\qquad (1)$$

Entonces si A es cualquier matriz m x n sobre el cuerpo F;(1) define una transformación lineal T de V en W, cuya matriz que lo representa referido a las bases B_1, B_2 es la matriz A, es decir, la matriz A que esta asociada a T respecto a las bases B_1 , B_2 , es aquella cuyas columnas A_1, A_2, ...A_n , son dadas por:

$$A_j = \left[T(x_j)\right]_{B_2} \text{ , j = 1,2,3....,n}$$

De esta manera; queda justificado la existencia de las matrices por medio de las transformaciones lineales y como tales vienen a ser la representación de una transformación lineal; desde luego no requiere de ninguna condición especial para su existencia; si no de dos espacios vectoriales de dimensión finita en los que estén fijados las bases arbitrarias respectivas.

Así mismo podemos deducir cuando las transformaciones lineales se suman, las matrices representantes se suman. Cabe ahora preguntar que sucede cuando se componen transformaciones. En forma más precisa sean, U, V, W espacios vectoriales sobre el cuerpo F de dimensiones n, m y p, respectivamente. Sea T una transformación lineal de U en V y S una transformación lineal de V en W, supóngase que tienen las bases:

$B_1 = \{ u_1, u_2, u_3, ..., u_n\}$, $B_2 = \{ v_1, v_2, v_3, ..., v_n\}$, $B_3 = \{ w_1, w_2, w_3, ..., w_n\}$

Para los espacios U, V y W. Sea $A = [T]_{B_1B_2}$ y sea $B = [S]_{B_1B_2}$. Es fácil ver ahora que la matriz C de la transformación SoT respecto al par de bases B_1, B_3 es el producto de B y A, en efecto, si x es cualquier vector de V.

$$[T(x)]_{B_2} = A[x]_{B_1}$$

$$[S(T(x))]_{B_3} = B[T(x)]_{B_2}$$

$$[(S \circ T)(x)]_{B_3} = BA[x]_{B_1}$$

y luego, la definición de unicidad de la matriz representante, se debe tener que: C = BA

Hasta ahora no se ha dicho nada sobre la inversión de matrices; de lo que nos ocuparemos a continuación.

ILUSTRACIÓN

Sea $T : R^3 \rightarrow R^4$ la transformación lineal definida por:

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \\ x_3 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

Encuentre la matriz de T respecto a las bases $B_1 = \{ u_1, u_2, u_3\}$ y $B_2 = \{ v_1, v_2, v_3, v_4\}$ de R^3 y R^4, donde :

$$u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix},\quad u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix},\quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\quad v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Para calcular la matriz, partimos aplicando la regla de correspondencia a u_1, u_2, u_3 como sigue:

$$T(u_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad T(u_2) = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad T(u_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Luego, expresamos $T(u_1)$ como una combinación lineal de su base B_2:

$$T(u_1) = a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 + a_4v_4$$

Donde debemos encontrar los escalares a_1, a_2, a_3, a_4, o sea:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Resulta que:

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 2$$

$$a_2 + a_3 + a_4 = 2$$

$$a_3 + a_4 = 0$$

$$a_4 = 0$$

Resolviendo el sistema resulta:

$$a_1 = 0 \qquad a_2 = 2 \qquad a_3 = -2 \qquad a_4 = 2$$

Por lo que :

$$[T(u_1)]_{B_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

es la primera columna de A. Efectuando los mismos pasos se llega a que:

$$[T(u_2)]_{B_2} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad [T(u_3)]_{B_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 2 & -3 & -4 \\ -2 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3.4 EXISTENCIA DE LA INVERSA

3.4.1 Definición.- Una función T de V en W se dice que es invertible si existe una función U de W en V tal que UoT es la función identidad de V y ToU es la función identidad de W.

3.4.2 Teorema.- Sean V y W dos espacios vectoriales sobre el cuerpo F y sea T una transformación lineal de V en W. Si T es invertible, entonces la función recíproca T^{-1} es una transformación lineal de W sobre V.

Demostración.

Sean x_1, x_2 dos vectores de W y c un escalar.Deseamos demostrar que T^{-1} es lineal es decir:

$$T^{-1}(cx_1 + x_2) = cT^{-1}(x_1) + T^{-1}(x_2)$$

Sea $z_i = T^{-1}(x_i)$, $i = 1, 2$; sea z_i el único vector de V, tal que $T(z_i) = x_i$.

Pero como T es lineal,

$$T(cz_1 + z_2) = cT(z_1) + T(z_2)$$

$$= cx_1 + x_2$$

También, $cz_1 + z_2$ es el único vector de V que es aplicado por T en $cx_1 + x_2$ y de esta manera:

$$T^{-1}(cx_1 + x_2) = cz_1 + z_2$$

$$= c(T^{-1}(x_1)) + T^{-1}(x_2)$$

con lo cual queda demostrado que T^{-1} es lineal.

De tener una transformación lineal invertible T de V sobre W y una transformación lineal invertible U de W sobre Z. Entonces UoT es invertible y $(UoT)^{-1} = T^{-1}oU^{-1}$. Esta conclusión no exige linealidad, ni tampoco implica comprobar separadamente que UoT es inyectiva y sobreyectiva.

De esta manera: si A y B son representaciones de U y T se puede tener:

i. $AB = I \Rightarrow \quad AB\,B^{-1} = B^{-1}\,I$

$A = B^{-1}$

A : matriz inversa derecha de B.

ii. $AB = I \Rightarrow \quad A^{-1}\,AB = A^{-1}\,I$

$B = A^{-1}$

B : matriz inversa izquierda de A.

CAPITULO IV

INVERSAS GENERALIZADAS

En este capítulo trataremos las diferentes inversas generalizados que existen, pasando por los diferentes casos que se presentan hasta llegar al caso más general y a continuación con la misma metodología los algoritmos de cálculo.

4.1. DEFINICIÓN

La inversa generalizada de una matriz A de orden arbitrario, es cualquier matriz G que satisface la ecuación.:

$$AGA = A$$

es decir G es una inversa generalizada de A.

4.1.1 Observaciones.

1. La inversa generalizada G puede no ser única.

2. Si A es de orden m x n, G es de orden n x m.

3. Si A es no singular (es decir A^{-1} existe), entonces se verifica que $G = A^{-1}$

   Si $A_{m \times n}$ es tal que existe B con AB = I, entonces G = B.

   Si $A_{m \times n}$ es tal que existe C con CA = I entonces G = C.

   Si $A = 0_{m \times n}$, entonces G es cualquier matriz de orden n x m.

4.1.2 Teorema (de existencia).- Cualquier matriz A tiene una inversa generalizada.

Demostración.

1. Si $A = 0_{m \times n}$ entonces cualquier matriz G es inversa generalizada de A; pues:

$$AGA = OGO = 0 = A$$

2. Si A es una matriz de orden m x n cualquiera entonces el rango de A es al menos uno $r(A) \geq 1$.

3. Si A es una matriz no singular entonces $G = A^{-1}$ y se cumple:

$$AGA = A\,A^{-1}\,A = IA = A$$

Aplicando operaciones elementales; A puede ser representada como una matriz diagonal.

$$D = \begin{bmatrix} D_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (1)$$

$$D_r = \begin{cases} aij \neq 0, \forall i = j \\ aij = 0, \forall i \neq j \end{cases}$$

Es decir existen matrices no singulares P y Q, tal es que:

$$P_{mxm}\, A_{mxn}\, Q_{nxn} = D = \begin{bmatrix} D_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{m \times n}$$

Donde P es producto de matrices elementales filas y Q es producto de matrices elementales columnas.

De (1) calculamos:

$$D^{-} = \begin{bmatrix} D_r^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{n \times m}$$

Probaremos que la matriz $G = Q\, D^{-}\, P$ es una inversa generalizada de A.

Podemos ver que: $D\, D^{-}\, D = D$

Puesto que:

$$D_{mxn}\, D^{-}_{nxm}\, D_{mxn} = \begin{bmatrix} D_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_r^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = D$$

Si $D = PAQ$ entonces $A = P^{-1} DQ^{-1}$ luego:

$$\begin{aligned} AGA &= (P^{-1} DQ^{-1})(QD^{-}P)(P^{-1}DQ^{-1}) \\ &= P^{-1} DID^{-} PP^{-1} DQ^{-1} \\ &= P^{-1} DD^{-} IDQ^{-1} \\ &= P^{-1} DQ^{-1} = A \end{aligned}$$

Por lo tanto $G = Q D^{-} P$ es una inversa generalizada de A.

Como P y Q no son únicas, entonces G no es única (LIMITACIÓN).

4.2. LA INVERSA DE MOORE – PENROSE

Para cualquier matriz A hay una única matriz K; la cual satisface las siguientes condiciones:

i) $A K A = A$

ii) $K A K = K$

iii) $(K A)^t = K A$

iv) $(A K)^t = A K$

Este resultado es extendido a partir del trabajo de Moore (1920) por Penrose (1955).

La unicidad de la inversa de Moore – Penrose se basa en los siguientes lemas.

Lema 1. $X^t X = 0$ implica $X = 0$ (para matrices reales)

Lema 2. $P X^t X = Q X^t X$ implica $P X^t = Q X^t$

La primera es evidente puesto que $X^t X = 0$; implica que:

$$(x_1; x_2; ...; x_n). (x_1; x_2; ... ; x_n) = 0$$

$$x_1^2 + x_2^2 ...+ x_n^2 = 0$$

Entonces:

$$x_1 = x_2 = ...= x_n = 0$$

En el segundo caso; haciendo uso del lema 1 podemos afirmar:

$$(P X^t X - Q X^t X) (P - Q)^t = (P X^t - Q X^t) (P X^t - Q X^t) = 0$$

Para comprobar la existencia de que K es única de (i) y (iii) se tiene que $A A^t K^t = A$.

Conviniendo que $A\,A^t\,K^t = A$. Entonces, multiplicando por K resulta:

$$K\,A\,(K\,A)^t = K\,A$$

mostrando que KA es simétrico, lo que nos indica que (iii) es correcto; luego haciendo uso de esto en $A\,A^t\,K^t = A$ nos conduce a (i).

De esta manera (i) y (iii) son verdaderas si y sólo si $A\,A^t\,K^t = A$.; en forma equivalente:

$$K\,A\,A^t = A^t \quad (1)$$

Similarmente; (ii) y (iv) son verdaderas si y sólo si:

$$K\,K^t\,A^t = K \quad (2)$$

Por lo que cualquier K que satisface (1) y (2) satisface a las condiciones de Moore-Penrose.

Entonces de las condiciones (i) y (iv) expresando en términos de M tendríamos

$$A^t\,A\,M = A^t \quad (3)$$

luego (ii) y (iii) nos conduce a:

$$A^t\,M^t\,M = M \quad (4)$$

Sustituyendo (3) en (2) y usando (2) nuevamente tenemos:

$$K = K K^t A = K K^t A^t A M = K A M \qquad (5)$$

reemplazando (4) en (5) y usando (1) y (4) obtenemos:

$$K = K A M = K A A^t M^t M = A^t M^t M = M$$

Teniendo en cuenta que K satisface las condiciones de Penrose; derivaremos su forma asumiendo que:

$$K = T A^t$$

para alguna matriz T. Entonces (1) es satisfecha si:

$$T A^t A A^t = A^t \qquad (6)$$

y como satisface (1) también implica (i); si partimos de que:

$$A K A = A$$

$$A^t K^t A^t = A^t$$

$$T A^t K^t A^t = T A^t$$

$$K K^t A^t = K$$

Luego, queda probado que si $K = TA^t$, satisface (6) para una matriz como T; entonces K satisface (1) y (2); por lo tanto las condiciones de Penrose.

Esto nos conduce a la derivación de un T apropiado. Se parte considerando que A^tA es cuadrada y también lo es sus potencias. Además para un entero r; como consecuencia del teorema de Cayley – Hamilton; existirá una serie de escalares λ_1; λ_2; ...; λ_r no todos nulos tal que: $\lambda_1 A^t A + \lambda_2 (A^t A)^2 + ... + \lambda_r (A^t A)^r = 0$

Si λ_μ es el primer valor λ no nulo; en la igualdad anterior; entonces T es definido como:

$$T = (-1/\lambda_\mu) [\lambda_{\mu+1} I + \lambda_{\mu-2} (A^t A) + ... + \lambda_r (A^t A)^{r-\mu-1}] \qquad (7)$$

Para mostrar que satisface (5) notar que; por multiplicación directa:

$$T(A^t A)^{\mu+1} = (-1/\lambda_\mu) [\lambda_{\mu+1} (A^t A)^{\mu+1} + \lambda_{\mu+1} (A^t A)^{\mu+2} + ... + \lambda_r (A^t A)^r]$$

$$= (-1/\lambda_\mu) [-\lambda_1 A^t A - \lambda_2 (A^t A)^2 - ... - \lambda_\mu (A^t A)^\mu]$$

siendo λ_μ; el primer valor de λ no nulo de la serie λ_1; λ_2; ... luego la igualdad anterior se reduce a:

$$T (A^t A)^{\mu+1} = (A^t A)^\mu$$

Aplicando reiteradamente el lema 2; se reduce a:

$$T\,A^t A\,A^t = A^t$$

como $K = TA^t$ y siendo T definido en (7) satisface a (6) y por lo tanto es la única inversa generalizada que satisface las cuatro condiciones de Penrose.

ILUSTRACIÓN:

Para la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

tenemos:

$$A^t A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & -1 \\ 4 & -1 & 9 \end{bmatrix}$$

Luego:

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -2 & -4 \\ -2 & \lambda - 5 & 1 \\ -4 & 1 & \lambda - 9 \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^3 - 17\,\lambda^2 + 66\,\lambda = 0$$

Por el teorema de Cayley – Hamilton:

$$66\,(A^t A) - 17\,(A^t A)^2 + (A^t A)^3 = 0$$

si hacemos que T sea:

$$T = (-1/66)\,(-17\,I + A^t A) = \frac{1}{66}\begin{bmatrix} 14 & -2 & -4 \\ -2 & 12 & 1 \\ -4 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

$$K = T\,A^t = \frac{1}{66}\begin{bmatrix} 6 & -2 & -6 & 10 \\ 0 & -11 & 0 & 22 \\ 12 & 7 & -12 & -2 \end{bmatrix}$$

es la inversa Penrose de A; que satisface las cuatro condiciones.

Un método alternativo para calcular K; ha sido sugerido por Graybill (1966).

El método consiste en hallar X e Y tal que:

$$A\,A^t X = A \quad \text{y} \quad A^t A\,Y = A^t \qquad (8)$$

Entonces:

$$K = X\,A\,Y$$

Para comprobar que K satisface las cuatro condiciones de Penrose se hace uso de (8) y el lema 2 para poder demostrar que:

$$A\,X\,A = A = A\,Y\,A$$

4.3. INVERSA DE UNA MATRIZ SIMÉTRICA

El uso frecuente en la Econometría de la inversa generalizada de la matriz simétrica $X^t X$; nos induce a su tratamiento y estudio de sus propiedades.

4.3.1 Propiedades

Tenemos cuatro propiedades útiles de una inversa generalizada que se origina a partir de la matriz simétrica $X^t X$ que están contenidas en el siguiente teorema.

4.3.1.1 Teorema.- Cuando G es una inversa generalizada de $X^t X$ entonces:

(i) G^t es además una inversa generalizada de X^tX

(ii) $XGX^tX = X$ es decir GX^t es una inversa generalizada de X.

(iii) XGX^t es invariante a G

(iv) XGX^t es simétrica, siendo que G sea o no.

Comprobación.

Por definición, G satisface

$$X^t X G X^t X = X^t X$$

$$(X^t X G X^t X)^t = (X^t X)^t$$

$$X^t X G^t X^t X = X^t X$$

de esta manera (i) es establecida y aplicado el lema 2 admitimos (ii).

Para considerar (iii) supongamos que F es alguna otra inversa generalizada, diferente de G. Entonces (ii) da:

$$XG X^t X = X F X^t X$$

Haciendo uso del lema 2 admitimos que

$$X G X^t = X F X^t$$

Es decir XGX^t es el mismo para todos las inversas generalizadas X^tX.

Finalmente, para probar (iv) consideramos S como una inversa simétrica generalizada de $X^t X$. Entonces XSX^t es simétrica pero $XSX^t = XGX^t$ y además XGX^t es simétrica por lo tanto el teorema está probado.

4.3.1.2 Corolario. Aplicando la parte (i) del teorema a sus otras partes muestran que:

$$XG^t X^t X = X$$

$$X^t XG X^t = X^t$$

$$X^t X G^t X^t = X^t$$

$$XGX^t = XG^t X^t$$

$$XG^t X^t \text{es simétrica}$$

Cabe precisar que no todas las inversas generalizadas de una matriz simétrica, son simétricas.

4.4. INVERSA GENERALIZADA ARBITRARIA

Teniendo en cuenta, que existen muchas matrices inversas generalizadas G, que satisfacen AGA = A; pretendemos examinar la naturaleza arbitraria de G; para lo que partimos de algunos lemas relativos al rango.

Lema 3: Una matriz de rango de fila completo r, puede ser escrita como el producto de dos matrices, una de la forma $[I_r \;\; S]$ para alguna matriz S de r filas.

Prueba

Supongamos que la matriz B_{rxq} tiene rango de fila completo y un menor no singular M de orden rxr. Entonces para alguna matriz L y alguna matriz de permutación Q, se tienen BQ = [M L]; luego:

$$B = M\,[I \mid M^{-1}L]Q^{-1} = M\,[I \mid S]Q^{-1}$$

$$\text{Para } S = M^{-1} L$$

Lema 4: La matriz $(I + K K^t)$ tiene rango completo para alguna matriz no nula K.

Prueba

Asumimos que la matriz $(I + K K^t)$ no tiene rango completo. Entonces sus columnas no son linealmente dependientes; es decir existe un vector no nulo tal que:

$$(I + K K^t)\, u = 0$$

de donde:

$$u^t (I + K K^t)\, u = u^t u + u^t K\, (u^t K)^t = 0$$

Pero $u^t u$ y $u^t K(u^t K)^t$ son sumas de cuadrados de números reales. Su suma es cero si sus elementos son ceros; es decir si u = 0. lo que contradice el supuesto; así mismo $(I + K K^t)$ tiene rango completo.

Lema 5: Cuando B tiene rango de fila completo B^tB es no singular.

Prueba

Como en el lema (7); escribimos

$$B = M\,[I \;\mid\; S]\,Q^{-1} \text{ donde } M^{-1} \text{ existe.}$$

Entonces; siendo Q una matriz de permutación y ortogonal; $B\,B^t = M\,(I + S\,S^t)\,M^t$; por el

lema 4 y por que M^{-1} existe; es no singular.

Corolario: Cuando B tiene rango de columna completo B^tB es no singular.

4.4.1 Matrices Inversas Generalizadas

Si partimos de una matriz A_{pxq} de rango r, menor que p y q; dicha matriz por lo menos contiene un menor no singular de orden r; en este caso asumiendo la existencia de un menor principal; no hay pérdida de generalidad.

Nos limitaremos entonces a desarrollar la inversa generalizada; de matrices cuyas menores principales de orden r x r son no singulares.

Luego particionando la matriz A como:

$$A = \begin{bmatrix} (A_{11})_{rxr} & (A_{12})_{rx(q-r)} \\ (A_{21})_{(p-r)xr} & (A_{22})_{(p-r)x(q-r)} \end{bmatrix}$$

Entonces, existiendo A_{11}^{-1} la matriz A puede ser escrita:

$$A = \begin{bmatrix} I \\ A_{21}A_{11}^{-1} \end{bmatrix} A_{11} \begin{bmatrix} I & A_{11}^{-1}A_{12} \end{bmatrix}$$

$$A = L\, A_{11}\, M \qquad (9)$$

$$\text{Con } L = \begin{bmatrix} I \\ A_{21}A_{11}^{-1} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad M = \begin{bmatrix} I & A_{11}^{-1}A_{12} \end{bmatrix}$$

Teniendo en cuenta que; L tiene rango de columna completo y M tiene rango de fila completo; entonces se tiene que $(L^t L)^{-1}$ y $(M M^t)^{-1}$ existen.

La arbitrariedad de una inversa generalizada de A se obtiene a partir de la partición efectuada de A. reemplazando (9) en AGA = A obtenemos:

$$L\, A_{11}\, M\, G\, L\, A_{11} M = L\, A_{11}\, M$$

Pre-multiplicando por $A_{11}^{-1}(L^t L)^{-1} L^t$ y post-multiplicando por $M^t(M M^t)^{-1} A_{11}^{-1}$ resulta:

$$M\,G\,L = A_{11}^{-1} \qquad (10)$$

Lo que supone que la inversa está particionada como:

$$G = \begin{bmatrix} (G_{11})_{rxr} & (G_{12})_{rx(p-r)} \\ (G_{21})_{(q-r)xr} & (G_{22})_{(q-r)x(p-r)} \end{bmatrix} \qquad (11)$$

de orden q x p; conformable para multiplicación con A.

Luego sustituyendo (11) y (9) en (10) da:

$$G_{11} + A_{11}^{-1} A_{12} G_{21} + G_{12} A_{21} A_{11}^{-1} + A_{11}^{-1} A_{12} G_{22} A_{21} A_{11}^{-1} = A_{11}^{-1} \quad (12)$$

Lo que nos confirma que G puede ser la inversa generalizada. Además, para algunas matrices G_{11}; G_{12}; G_{21} y G_{22} satisfacen a (12); G tal como figura en (11) será una inversa generalizada de A.

Además sustituyendo G_{11} en (12) resulta:

$$G = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} - A_{11}^{-1}A_{12}G_{21} - G_{12}A_{21}A_{11}^{-1} - A_{11}^{-1}A_{12}G_{22}A_{21}A_{11}^{-1} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \qquad (13)$$

Una matriz generalizada de A para algunas matrices G_{12}, G_{21} y G_{22} de orden apropiado. Esa es la característica de una inversa generalizada arbitraria.

De (13) haciendo nulos a G_{12}; G_{21} y G_{22} resultan:

$$G = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La otra forma es cuando A es simétrico, G no es necesariamente simétrico. Pero si $G_{12} = G'_{21}$ y G_{22} es simétrico, G será simétrico y cuando $p \geq q$, G puede tener rango de fila completa q aún si $r < q$; por ejemplo; se $G_{12} = - A_{11}^{-1} A_{12} G_{22}$; $G_{21} = 0$ y G_{22} tiene rango de fila completo, entonces G tiene también rango de fila completo; en general entonces, el rango de G puede exceder al de A.

En particular, esto significa que las matrices singulares pueden tener inversas no singulares generalizadas.

La arbitrariedad evidente en (13) nos induce a partir de una primera inversa generalizada obtener otras. Así tenemos que si G_1 es una inversa generalizada de A entonces:

$$G = G_1 A G_1 + (I - G_1 A) X + Y (I - A G_1) \qquad (14)$$

Para cualquier X e Y pre y post-multiplicando (14) por A se cumple que AGA = A.

De esta manera se muestra la forma como se pueden obtener toda las inversas generalizadas de A deseadas.

4.5. ALGORITMOS DE CÁLCULO

4.5.1. Método de la Factorización

Este método se basa en las operaciones elementales en matrices y consiste en:

a) Dada una matriz A de orden m x n se determinan por medio de operaciones elementales las matrices B y C que permiten reducir la matriz A en una matriz diagonal.

b) Si denominamos D a la matriz equivalente a la matriz A; a partir de dicha matriz encontramos su inversa que la denotamos D^+.

c) Con las matrices B, D^+ y C conformamos la matriz G multiplicándolas entre sí; obteniéndose de esta manera la inversa generalizada de la matriz G.

Ilustración:

Sea la matriz A:

$$A=\begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

lo reducimos a su forma diagonal; usando operaciones elementales y en forma indirecta encontramos las matrices B y C; tal como sigue:

1. Por medio de operaciones elementales fila calcula B.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 3 \end{array}\right] \underset{\sim}{f_2 x f_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

$$\underset{\sim}{f_2+(-4)f_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 4 & 0 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & -4 & 0 & 0 & -3 & -18 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 3 \end{array}\right] \underset{\sim}{f_3+(-3)f_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & -4 & 0 & 0 & -3 & -18 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & -2 & -12 \end{array}\right]$$

$$\underset{\sim}{\left(-\frac{1}{2}\right)f_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 4 & 0 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & -4 & 0 & 0 & -3 & -18 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 6 \end{array}\right] \underset{\sim}{f_3+\frac{1}{3}f_2} \left[\begin{array}{cccc|cc} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & -4 & 0 & 0 & -3 & -18 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\underset{\sim}{(-2)f_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & -4 & 0 & 0 & -3 & -18 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

2. Ahora calculamos la matriz C por medio de operaciones elementales columna.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & -18 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{C_3+(-5)C_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -18 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\overset{C_3+(-6)C_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & -6 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{C_2+(-1)C_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & -6 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\overset{C_3+(-6)C_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Cálculo de D^+:

$$D^+ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4. Con las matrices B, D^+ y C calculadas, formamos la matriz G como sigue:

5.

$$G = C\,D^+\,B$$

$$G = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4.5.2. Métodos de la Diagonalización

Vamos a ver los siguientes casos; de acuerdo a la naturaleza de las matrices:

4.5.2.1 Caso Particular: Cuando la matriz A es simétrica; en este caso debemos tener en cuenta que cualquier menor principal de A es simétrico; por lo que el algoritmo se reduce a los siguientes pasos:

i) Calcule el rango r de A.

ii) Elija en A cualquier menor principal simétrico no singular de orden r; al que denotaremos M.

iii) Calcule M^{-1}.

iv) En A; cada elemento de M reemplace por el correspondiente elemento de M^{-1} y todos los demás elementos de A por cero.

v) El resultado de G, es una inversa generalizada de A.

En caso de elegir un menor no principal no simétrico, como M; debemos usar el algoritmo general.

ILUSTRACIÓN: Calcule una de las inversas generalizadas de la matriz A.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 2 & 3 & 8 \\ 6 & 8 & 22 \end{bmatrix}$$

i) Calculamos el rango de A:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 2 & 3 & 8 \\ 6 & 8 & 22 \end{bmatrix} \overset{f_1 . \frac{1}{2}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 8 \\ 6 & 8 & 22 \end{bmatrix} \overset{f_2 + (-2)f_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\overset{f_3 . \frac{1}{2}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \overset{f_3 + (-2)f_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$r(A) = 2$$

ii) Elija en A cualquier menor principal simétrico no singular de orden 2; al que demostraremos M.

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

iii) Calcule M^{-1}.

$$M^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

iv) En A; cada elemento de M reemplace por el correspondiente elemento de M^{-1} y todos los demás elementos de A por cero.

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

v) El resultado de G, una inversa generalizada de A.

$$G = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

que cumple:

$$AGA = A$$

$$AGA = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 2 & 3 & 8 \\ 6 & 8 & 22 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 2 & 3 & 8 \\ 6 & 8 & 22 \end{bmatrix}$$

$$AGA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 2 & 3 & 8 \\ 6 & 8 & 22 \end{bmatrix}$$

$$AGA = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 2 & 3 & 8 \\ 6 & 8 & 22 \end{bmatrix}$$

4.5.2.2 Caso General

a) Cuando la matriz A no es simétrica; seguiremos los siguientes pasos:

i) Calcule el rango r de A.

ii) Elija cualquier menor no singular de orden r; al que denotaremos M.

iii) Calcule la transpuesta de la inversa de la matriz M; es decir $(M^{-1})^{t}$.

iv) En la matriz A; reemplace cada elemento de M por el correspondiente de $(M^{-1})^{t}$ y los otros elementos por cero.

v) Halle la transpuesta de la matriz resultante.

vi) El resultado es a G; una inversa generalizada de A.

ILUSTRACIÓN: Dada la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 \\ 5 & 8 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Calcule una inversa generalizada.

i) Calcule el rango r de A.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 \\ 5 & 8 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 3 \end{bmatrix} \overset{f_1 \times f_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 5 & 8 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\underset{f_3 + (-2)f_1}{\overset{f_2 + (-5)f_1}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & -2 & 10 & -14 \\ 0 & -1 & 5 & -7 \end{bmatrix}$$

$$\overset{f_3\left(-\frac{1}{2}\right)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -5 & 7 \\ 0 & -1 & 5 & -7 \end{bmatrix} \overset{f_3 + (-2)f_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad r(A) = 2$$

ii) Elegimos una matriz no singular de orden 2; a partir de la matriz A; tal como M.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 1 & -1 \\ 5 & 8 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

iii) Calcule la transpuesta de la inversa de la matriz M; es decir $(M^{-1})^t$.

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & 0 \\ \frac{1}{8} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$(M^{-1})^t = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

iv) Reemplazamos en la matriz A cada elemento de M por el correspondiente de $(M^{-1})^t$ y los otros elementos por cero.

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}^t$$

v) Calculamos la transpuesta de la matriz resultante y obtenemos G; una inversa generalizada.

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}^t$$

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Se verifica que:

$$AGA = A$$

vi) El resultado es a G; una inversa generalizada de A.

CAPITULO V

APLICACIÓN

Si aceptamos; la existencia de la inversa de una matriz A singular o rectangular; que hace el papel de la matriz de coeficientes de ecuaciones de la forma:

$$AX = Y$$

Podría resolverse directamente.

En caso de los modelos lineales; cuando el modelo viene expresado como:

$$Y = Xb + e$$

haciendo uso del procedimiento de los mínimos cuadrados podemos estimar b a partir de la siguiente ecuación:

$$X^{t} X \hat{b} = X'Y$$

pero en algunos casos la solución no puede expresarse de la forma:

$$\hat{b} = (X^tX)^{-1}X^tY$$

porque la matriz X^tX es singular; esta dificultad se resuelve haciendo uso de una de las inversas generalizadas de X^tX y el método de los mínimos cuadrados.

5.1. ECUACIONES CONSISTENTES

Así tenemos:

$$x_1 + x_2 = 7$$

$$2x_1 + 2x_2 = 15$$

un sistema inconsistente; en caso contrario es consistente.

5.1.1 Prueba de consistencia.- La consistencia de una propiedad requerida; de ecuaciones lineales antes de empezar a resolverlas; de no ser consistentes no tienen solución.

Una de las pruebas más comunes de consistencia; es la que hace uso de la ampliada de la matriz de coeficientes A; que se forma incrementando el vector Y a la matriz de coeficientes A; resultando:

$$[A \;\; Y]$$

5.1.2 Teorema.- Las ecuaciones AX = Y son consistentes si y sólo si, el rango de la matriz aumentada [A Y] es igual al rango de A.

Prueba:

Sea A_0 para $A_{11}[I\ \ L]$. Entonces si las ecuaciones AX = Y son consistentes; $Y_2 = KY_1$; luego la matriz aumentada toma la forma:

$$[A\ Y] = \begin{bmatrix} A_0 & Y_1 \\ KA_0 & KY_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ K \end{bmatrix} [A_0 \quad Y_1];\ \text{donde}\ \ A = \begin{bmatrix} I \\ K \end{bmatrix} A_{11}\,[I \quad L]$$

El que tiene el mismo número de filas linealmente independientes que A y en consecuencia el mismo rango. Luego recíprocamente.

Si [A Y] y A tienen el mismo rango entonces queda:

$$\begin{bmatrix} A_0 & Y_1 \\ KA_0 & Y_2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} A_0 \\ KA_0 \end{bmatrix}$$

esto puede ser verdadero sólo si $Y_2 = KY_1$; es decir si AX = Y es consistente.

Teniendo en cuenta que algunos métodos para resolver las ecuaciones utilizan la forma diagonal de A, veamos una prueba alternativa para la consistencia que puede ser usada conjuntamente con ellos.

5.1.3 Teorema.- Si A es una matriz de p filas y rango $r \leq p$ PAQ es una forma diagonal de A, donde P y Q son invertibles, entonces las ecuaciones $AX = Y$ son consistentes si y sólo si los (p-r) últimos elementos de PY son cero.

Prueba:

Si PAQ es una forma diagonal A De manera que $PA = \begin{bmatrix} A_r \\ O \end{bmatrix}$ donde A_r es una matriz de r filas linealmente independientes, siendo P producto de operadores elementales.

Además si las ecuaciones $AX = Y$ son consistentes; luego $PAX = PY$ también lo son. Es decir:

$$\begin{bmatrix} A_r X \\ O \end{bmatrix} = PY$$

Donde los últimos (p-r) elementos de PY deben ser cero. Recíprocamente, si los últimos (p-r) elementos de PY son cero, las ecuaciones $\begin{bmatrix} A_r \\ O \end{bmatrix} X = PY$ son consistentes.

Como parte de los cálculos para obtener PAQ veamos la prueba de consistencia sobre la base de este teorema: r el rango de A, es obtenido como el número de elementos no nulos en PAQ, y si los últimos (p-r) elementos de PY son cero las ecuaciones son consistentes, de otro modo son inconsistentes.

ILUSTRACIÓN: Resuelva el sistema

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 6 \\ 22 \end{bmatrix}$$

Expresando en la forma diagonal PAQ

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

además el rango de A es 2, y para que las ecuaciones sean consistentes las últimas 3 – 2 filas de PY deben ser cero, resultando:

$$PY = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 14 \\ 6 \\ 22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para resolver las ecuaciones consistentes AX = Y; se ha seguido el proceso que describimos a continuación:

i) Averigüe el rango de A.

ii) Localice r filas linealmente independientes de A

iii) Intercambiar, si se necesitan, filas de A y filas de X e Y para recrear A en una forma particionada.

Usualmente no hay dificultad en realizar estos pasos; pero cuando el número de incógnitas difiere del número de ecuaciones; distinguiremos las ecuaciones que tienen sólo una solución de aquellas que tienen muchas soluciones.

5.1.4 Ecuaciones que tienen solución única.- Las ecuaciones consistentes AX = Y tienen sólo una solución; cuando A tiene rango de columna pleno. De otro modo, para A de rango no pleno, hay muchas soluciones.

Veamos con A de rango pleno; una solución fácilmente obtenida AX = Y cuando A tiene rango pleno; debemos tener en cuenta que:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{11}L \\ KA_{11} & KA_{11}L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ K \end{bmatrix} A_{11} \begin{bmatrix} I & L \end{bmatrix} \text{ y } \begin{bmatrix} I \\ K \end{bmatrix} A_{11} \begin{bmatrix} I & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

si L no existe, la solución general resultaría

$$X_1 = A_{11}^{-1} y_1 - LX_2 = A_{11}^{-1}(Y_1 - A_{11}LX_2)$$

Luego queda sólo reducida a:

$$X = A_{11}^{-1} Y_1$$

Otra derivación usa cualquier inversa izquierda de la matriz de rango pleno A. Para L siendo una inversa izquierda de A, con LA = I da como solución

$$X = LY$$

. Una tercera expresión usa $(A^tA)^{-1}A^t$ para una inversa izquierda de A así que

$$X = (A^tA)^{-1}A^tY$$

es la solución. Todas las soluciones indicadas dan la misma respuesta.

Así tenemos por la siguiente ilustración:

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 7 \\ 1 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 16 \\ 19 \end{bmatrix}$$

cuya solución resulta:

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 29 & -49 & 22 \\ -13 & 25 & -11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 13 \\ 16 \\ 19 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

usamos la inversa izquierda de A, donde LA = I

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 38 \\ 38 & 155 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 90 \\ 348 \end{bmatrix} = \frac{1}{726} \begin{bmatrix} 155 & -38 \\ -38 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 90 \\ 348 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

finalmente usamos la expresión $(A^tA)^{-1}A^t$ para calcular X; de esta manera queda comprobado empíricamente los diferentes métodos de solución.

Nótese que siendo A cuadrada y no singular es un caso particular de A que tienen rango pleno; reduciéndose a un caso único en que $X = A^{-1}Y$ como se suponía.

Lo que nos permite concluir que cuando A tiene rango pleno, las ecuaciones consistentes $AX = Y$ tienen sólo una solución; de otro modo ellas tienen infinitas soluciones. En caso que las ecuaciones son inconsistentes ellas no tienen solución.

5.1.5 Soluciones derivadas usando inversas generalizadas.- Cuando existen muchas soluciones a $AX = Y$ hacemos uso de las matrices inversas generalizadas. Esto ocurre cuando el rango es menor al número de columnas de la matriz A.

a. Obtención de una solución.- La relación existente entre una inversa generalizada de A y las ecuaciones consistentes $AX = Y$ es tratada en el siguiente teorema.

5.1.6 Teorema 1.-Las ecuaciones consistentes $AX = Y$ tienen una solución, si y sólo si $AGA = A$ (Adaptado de Rao, 1962)

Demostración

Si el sistema de ecuaciones $AX = Y$ es consistente y existe G tal que $X = GY$ es una solución. si denotamos a_j para las columnas j's de A y considerando las ecuaciones $AX = a_j$

Ellos tienen una solución: El vector nulo con sus elementos j's iguales a la unidad.

Por tanto las ecuaciones $AX = a_j$ tienen solución; luego son consistentes. Además, como las ecuaciones consistentes $AX = Y$ tienen una solución $X = GY$, esto nos indican que las ecuaciones consistentes $AX = a_j$ tiene una solución $X = Ga_j$.

Por tanto $Aga_j = a_j$; es verdadero para todos los valores j; es decir para todas las columnas de A. De aquí $AGA = A$.

Recíprocamente, si $AGA = A$, luego $AGAX = AX$, y cuando $AX = Y$, esta da como resultado $AGY = Y$; es decir $A(GY) = Y$. De donde $X = GY$, es una solución de $AX = Y$, de esta manera el teorema queda demostrado.

Este teorema nos indica como una solución para ecuaciones consistentes puede ser obtenida: encontrando cualquier matriz G que satisface $AGA = A$, es decir calculando G como cualquier inversa generalizada de A, luego GY es una solución.

Pero veamos a continuación que GY no es la única solución. Existe, en realidad muchas soluciones desde que A es una matriz no cuadrada y singular.

ILUSTRACIÓN: Dado el sistema

$$AX = Y$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 13 \\ 1 & 1 & 12 \\ 3 & 5 & 14 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 14 \\ 6 \\ 22 \end{bmatrix} \qquad (1)$$

una inversa generalizada de A es:

$$G = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (2)$$

$$\overline{X} = GY = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 14 \\ 6 \\ 22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Haciendo uso de otra G; tal como:

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\overline{X} = G\,Y$$

$$\overline{X} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 14 \\ 6 \\ 22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

X es otra solución usando otra inversa generalizada.

X es una solución usando la inversa generalizada, en lo que a aplicaciones se refieren es suficiente que si AGA = A; entonces X = GY es una solución. Así mismo nos indica como una solución de las ecuaciones consistentes AX = Y pueden ser obtenidas: halla una inversa generalizada G de A y X = GY es una solución. El símbolo $\overline{X}$ distingue una solución del vector de los desconocidos X.

Debemos tener muy en cuenta que si X = GY es una solución entonces AGA = A. Esto se entiende que si X = GY es una solución para todos los vectores Y para el cual AX = Y son consistentes, entonces AGA = A. Insistimos en “todos los vectores Y” porque en casos particulares habrá matrices K tal que una solución pueda ser escrita como X = KY pero sin que K sea una inversa generalizada de A.

Así tenemos por ejemplo:

$$I_3X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \text{ tiene solución}$$

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

no es una inversa generalizada de I_3

Tenga en cuenta del resultado útil:

$$AGY = Y$$

El que puede ser derivado por la pre-multiplicación de $AX = Y$ por AG.

Una clase similar del resultado para $\overline{X}$; siendo una solución a $AX = Y$ es

$$GA\overline{X} = GY$$

Lo que se obtiene directamente de la pre-multiplicación $A\overline{X} = Y$ por G

b. Obtención de muchas soluciones.- Cuando $AX = Y$ tiene muchas soluciones; el siguiente teorema prueba un método para el cálculo de las soluciones basándose en el teorema anterior.

5.1.7 Teorema.- Cuando A tiene q columnas y G es una inversa generalizada de A, las ecuaciones consistentes $AX = Y$ tienen soluciones:

$$\overline{X} = GY + (GA-I)Z$$

para un vector arbitrario Z de orden q.

Prueba:

$$\text{Para } \overline{X} = GY + (GA-I)Z \qquad (3)$$

$$A\overline{X} = AGY + A(GA-I)Z = Y + (AGA-A)Z$$

$$= Y \text{ porque } AGA = A$$

Así, veamos a continuación una aplicación a partir de (1) y (2):

$$H = GA = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Luego usando (3):

$$\overline{X} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ Z_4 \end{bmatrix}$$

$$\overline{X} = \begin{bmatrix} 4 & -\ 2Z_3 & +\ 3Z_4 \\ 2 & -\ Z_3 & -\ Z_4 \\ & -\ Z_3 & \\ & -\ Z_4 & \end{bmatrix}$$

para algunos valores de Z_3 y Z_4.

Es recomendable a veces usar la notación:

$$H \equiv GA \qquad y$$

$$\overline{X} = GY + (H\text{-}I)Z \qquad (4)$$

Propiedades de H:

i) H es idempotente

ii) $r_H = r_A$

iii) Para A que tiene q columnas, $r(H\text{-}I) = r(I\text{-}H) = q - r_A$.

c. Todas las soluciones posibles

Teniendo en cuenta (3) o su equivalente (4), genera muchas soluciones para un G específico; inmediatamente surge la pregunta si todas las soluciones pueden ser generadas para esa inversa G generalizada específica. El siguiente teorema responde formalmente.

5.1.8 Teorema.- Todas las posibles soluciones de las ecuaciones consistentes $AX = Y$ pueden ser generadas de $X = GY + (GA - I)Z$ para alguna G específica usando todos los posibles valores del vector arbitrario Z.

Prueba.

Supongamos que X es una solución para X a $AX = Y$.

Hacemos $Z = -\dot{X}$. Entonces:

$$\bar{X} = GY + (GA - I)Z = GY - (GA - I)\,\dot{X}$$

se reduce a $\dot{X}$.

Por lo tanto para la elección apropiada de Z, cualquier solución $\dot{X}$ puede ser puesta en la forma X es decir todas las soluciones pueden ser generadas por $\bar{X}$.

La importancia de este teorema es que uno necesita derivar sólo una inversa generalizada G de A para generar todas las soluciones a $AX = Y$. No hay otras soluciones.

La generación de todas las soluciones posibles que significan $\bar{X} = GY + (H - I)\,Z$ está sujeta a la arbitrariedad de Z. La arbitrariedad en G; puede además conducir a la generación de toda solución; como queda indicado en el siguiente teorema.

5.1.9 Teorema.-Todas las soluciones de $AX = Y$ para $Y \neq 0$ puede ser generada de $X = GY$ usando todas las inversas generalizadas posibles G de A.

La comprobación de este teorema está basándose en el siguiente lema.

5.1.10 Lema: Para Z_{qx1} arbitraria e Y_{px1} conocido y existiendo una matriz arbitraria X tal que $Z = XY$

Comprobación de lema.- Siendo $Y \neq 0$ un elemento Y_k no nulo. Demostramos $Z = \{ z_i \}$ y $X = \{ x_{ij} \}$ con $i = 1; q$ y $J = 1; p$; además $x_{ij} = z_i/y_k$ para $j = k$ y $x_{ij} \neq 0$. Entonces $Xy = z$; donde X es arbitrario.

Prueba del Teorema.- Para una inversa generalizada G de A, una solución a $AX = Y$ es $GY + (GA - I)Z$ para Z arbitraria.

Hagamos que $Z = -XY$ para X arbitraria, como en el lema, esta solución llega a ser:

$$GY + (GA - I)Z = [GAG + (I - GA)X + (-G)(AG - I)]Y = G^*Y$$

Haciendo uso de G^* podemos finalmente,expresar la solución como:

$$G^*Y.$$

5.2. PROPIEDADES DE LAS SOLUCIONES

Ahora debemos preguntarnos; si elegimos dos inversas generalizadas de la matriz A, tales como G y $\dot{G}$; dado un sistema consistente AX = Y ambas la satisfacen; la respuesta es sí; como se muestra seguidamente.

5.2.1 Teorema.

Para las ecuaciones consistentes AX = Y todas las soluciones son; para cualquier G específico, generado por $\tilde{X} = GY + (GA - I)\, Z$ para un Z arbitrario.

Demostración

Sea X* cualquier solución para AX = Y; si elegimos Z = (GA – I) X*; encontraremos que $\tilde{X}$ se reduce a X*.

De esta manera, con una elección apropiada de Z, cualquier solución para AX = Y puede ser expresado de la forma $\tilde{X}$.

Este teorema nos indica que se requiere derivar sólo una inversa generalizada de A a fin de generar todas las soluciones para AX = Y. No existen otras soluciones que aquellas que pueden ser generadas desde $\tilde{X}$.

Habiendo precisado un método para resolver ecuaciones lineales y aquellas pueden tener un número finito de soluciones; nos planteamos:

¿Qué relación existe entre las soluciones y qué alcance tienen las soluciones linealmente independientes (LIN)?

Estas inquietudes las responderemos a continuación.

5.2.2 Lema: Dado H = GA, desde que el rango de A, denotado r(A), es r, y la matriz A tiene q columnas. Luego H es idempotente de rango r y r (I - H) = q - r.

Demostración

Elevando al cuadrado H se tiene:

H^2 = GAGA = GA = H, con lo que queda demostrado que H es idempotente. Así mismo r(H) = r(GA) $\leq$ r(A). En forma similar AH = AGA = A, tenemos que r(H) $\geq$ r(A).

Además r(H) = r(A) = r. Y desde que H es idempotente entonces (I - H), es de orden q, por tanto:

$$r(I - H) = tr\,(I - H) = q - tr(H) = q - r(H) = q - r$$

6.2.3 Teorema

Cuando la matriz A es de q columnas y rango r y cuando y es un vector no nulo, el número de soluciones LIN para las ecuaciones consistentes $AX = Y$ es $q-r+1$.

Demostración

Hace $H = GA$, las soluciones del sistema consistente $AX = Y$ son $\tilde{X} = GY + (H - I)Z$ como $r(H - I) = q - r$, hay solo $(q - r)$ elementos arbitrarios en $(H - I)Z$ con Z arbitraria; los otros r elementos son combinaciones lineales de esos $(q - r)$.

Además, existe sólo $(q - r)$ vectores LIN $(H - I)Z$ y se usan en $\tilde{X}$ las $(q - r)$ soluciones LIN.

Para $i=1, 2, \ldots, q-r$ hacemos $\tilde{X}_i = GY + (H - I)Z_i$, sean estas las soluciones. $\tilde{X} = GY$ es también una solución. Asumiendo que este es linealmente dependiente en $\tilde{X}_i$, para escalares λ_i, $i=1,2,\ldots,q-r$ donde no todos sean iguales a cero.

$$GY = \Sigma \lambda_i \tilde{X}_i = \Sigma \lambda_i [GY + (H - I)Z_i] \qquad (\alpha)$$

Luego:

$$GY = GY \Sigma \lambda_i + \Sigma \lambda_i [(H - I)Z_i]$$

Como en la última igualdad en el primer miembro no contiene Z's. por lo tanto el segundo miembros debe ser nulo. Pero, desde que los $(H - I)Z_i$ son LIN puede ser verdad si y sólo si cada λ_i es cero. Entonces (α) no es verdad para algunos λ_i no nulos. Por lo tanto GY es independiente de $\tilde{X}_i$; de aquí GY y $\tilde{X}_i$, para i = 1, q - r forma un grupo de (q − r + 1) soluciones LIN. Cuando q = r se cumple, entonces hay una solución correspondiente a la existencia de A^{-1} y esta solución es $X = A^{-1}Y$.

Lo cual significa que $\tilde{X} = GY$ y $\tilde{X} = GY + (H - I)\,Z$ para (q - r) vectores Z LIN, son soluciones LIN de AX = Y. Todas las restantes soluciones serían combinaciones lineales de éstas soluciones formando un conjunto de soluciones LIN.

d. Combinaciones Lineales de las Soluciones.- Los teoremas ya mencionados indican como obtener las soluciones de Ax = Y usando Y y las inversas generalizadas de A. Las distintas soluciones pueden además ser obtenidas como una combinación lineal de aquellas ya derivadas, tal como son dadas en el teorema siguiente:

Teorema.

Cuando $\overline{X}_1, \overline{X}_2, \ldots, \overline{X}_t$ son algunos de las t soluciones a las ecuaciones consistentes Ax = Y para $Y \neq 0$, entonces $X* = \sum_{t=1}^{t} \lambda_t \overline{X}_t$ es una solución si y sólo si $\sum_{t=1}^{t} \lambda_t = 1$

Prueba:

Definimos $\overline{X} = \Sigma\, \lambda_t \overline{X}_t$, donde, para toda esta comprobación, la suma sobre t = 1, 2, ..., t y observar que:

$$A\overline{X} = A\Sigma\lambda_t\overline{X}_t = \Sigma\lambda_t A\overline{X}_t = \Sigma\lambda_t Y = Y_t\Sigma\lambda_t$$

Entonces si x es una solución.

$$Y = A\,\overline{X} = Y\,\Sigma\,X_t, \text{ así implica } \Sigma\,\lambda_t = 1 \text{ y sí } \Sigma\,\lambda_t = 1 \text{ entonces:}$$

AX = Y, implica que X es una solución.

Veamos la siguiente ilustración:

Las soluciones diferentes a:

$$AX = Y \equiv \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 1 & 4 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 14 \\ 6 \\ 22 \end{bmatrix}$$

Son:

$$\overline{X}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \overline{X}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ y } \overline{X}_3 = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

De donde obtenemos:

$$\overline{X}_4 = \frac{1}{2}\overline{X}_1 + \frac{1}{4}\overline{X}_2 + \frac{1}{4}\overline{X}_3 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \\ 3\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \\ 1\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$\overline{X}_5 = 4\overline{X}_1 - \overline{X}_2 - 2\overline{X}_3 = \begin{vmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{vmatrix}$$

que también son soluciones.

Del teorema se desprende, que una combinación de soluciones es su propia solución si y sólo sí los coeficientes en la combinación lineal suman la unidad.

5.3. SOLUCIÓN LINEALMENTE INDEPENDIENTE

Las soluciones a $Ax = Y$ para A de orden p x q son vectores de orden q. Por lo tanto no más que q de ellos pueden ser LIN.

Sin embargo en vista de las relaciones entre las soluciones derivadas, hay en efecto, usualmente algunas menos que las q soluciones linealmente independientes como se muestra en el siguiente teorema.

Teorema.- Para A que tienen q columnas, las ecuaciones consistentes $AX = Y$; para $Y \neq 0$ tienen $(q - r_A + 1)$ soluciones linealmente independientes.

Prueba:

Las soluciones son $X = GY + (H - I)Z$ para $H = GA$ y Z arbitrario.

Así mismo: $r\ (H - I) = q - r_A$ y teniendo en cuenta que el número máximo de vectores linealmente independientes de $(H - I)Z$ para Z arbitraria es $q - r_A$. Para representar tal conjunto de vectores, supongamos que: $(H - I)Z_i$ para $i = 1,2,..., q - r_A$ son linealmente independientes.

Lo anterior no servirá para demostrar que:

i) $\overline{X}_t = GY + (H - I)\ Z_t$, son $(q - r_A)$ soluciones linealmente independientes.

ii) G Y es linealmente independiente de X_t

iii) Cualquier otra solución es una combinación lineal de G Y y $\overline{X}_t$

Asumimos que X_t de (i) no son linealmente independientes, así que:

$$\Sigma\ \lambda_t\ [GY + (H - I)\ Z_t] = 0$$

es verdad que para algunos λ's no todos nulos, y por toda esta comprobación, la suma es sobre $t = 1,2,...\ q - r_A$ entonces:

$$GY = -\Sigma\ \lambda_t\ (H - I)\ Z_t\ /\ \Sigma\ \lambda_t$$

Pre-multiplicado esto por A y teniendo en cuenta $AGY = Y$ resulta que $Y = 0$, con lo cual es explícitamente excluida por el teorema. Por lo tanto el supuesto es falso y así (i) está probado de esta manera.

Para probar (ii) asumimos que GY no es linealmente independiente de X_t, así que:

$$GY = \sum k_t [GY + (H - I) Z_t] = \sum k_t GY + \sum k_t (H - I) Z_t$$

Para algunos k no todos nulos. Analizando la igualdad anterior se tiene que para ser verdadero, para todas los posibles conjuntos de Z_t ,el lado izquierdo de la igualdad GY no contiene a los Z_t, el lado derecho de la igualdad tampoco debe contenerlo.

Por lo tanto:

$$\Sigma \; K_t (H - I) Z_t = 0 \qquad (\beta)$$

Pero las $(H - I)Z_t$ son linealmente independientes y de esta manera el único camino para que(β) sea verdadero es que todos los K sean cero: lo cual contradice el postulado. Así (ii) queda probado.

Hacemos que $\dot{X} = GY + (H - I)\dot{Z}$ sea una solución diferente de $\overline{X}_t$ con GY de (i) y (ii); como ya quedo definido $(H - I)Z_t$, es una combinación lineal de vectores Z_t; es decir:

$$(H - I)\; \dot{Z} = \Sigma \; K_t (H - I)\, Z_t$$

para algunos k no todos nulos. Entonces:

$$\dot{X} = GY + (H - I)\; \dot{Z}$$

$$= GY + \Sigma\ K_t (H - I) Z_t$$

$$= \Sigma\ K_t [GY + (H - I) Z_t] + (I - \Sigma\ K_t) GY$$

en el cual es una combinación lineal de $\overline{X}_t$ y GY de (i) y (ii). Así (iii) está probado.

La consecuencia para (i), (ii), (iii) es que para $(H - I)\ Z_t$ con $t = 1,2,\dots,q - r_A$ siendo linealmente independientes, GY y $X_t = GY + (H - I)Z_t$ de una serie de $(q - r_A + 1)$ soluciones linealmente independientes tal que cada otra solución es una combinación lineal de ellos.

La comprobación del teorema no sólo muestra que hay sólo $q - r_A + 1$ soluciones linealmente independientes si no además un conjunto posible de soluciones es:

$$GY \text{ y } \overline{X}_t = GY + (H - I)Z_t$$

para Z_t, arbitrario elegido, así que $(H - I)\ Z_t$ para $t = 1,2,\dots,\ q - r_A$ son linealmente independientes.

5.4. MODELOS DE RANGO NO PLENO

Es común trabajar en términos de un modelo que tienen por ecuación $Y = X\ b + e$, donde X tiene columna de rango pleno, ahora veamos el caso donde no se cumple esta condición.

5.4.1 Las Ecuaciones Normales.- El modelo tratado es:

$$Y = X\,b + e$$

Donde $y_{(n,1)}$ vector de observaciones y_i, $b_{(p,1)}$ vector de parámetros o coeficientes, $X_{(n,p)}$ matriz de valores conocidos y **e** es un vector de errores aleatorio.

Como es usual **e** puede ser definida:

$$\mathbf{e} = y - E\,(y)$$

Cumpliéndose que $E(e) = 0$ y $E(y) = Xb$, también;

$$Var(e) = E(ee^t) = \sigma^2\, I_N$$

Por lo tanto $e \sim (O, \sigma^2 I)$ y

$$y \sim (Xb, \sigma^2 I)$$

Con normalidad siendo introducida en consecuencia , cuando es necesaria para el examen de la hipótesis y la derivación de los intervalos de confianza.

5.4.1.1 Las ecuaciones

Las ecuaciones normales correspondientes al modelo:

$$y = Xb + e$$

Para $var(e) = \sigma^2 I$ resultan ser:

$$X^t X \hat{b} = X^t y \qquad (*)$$

Luego; nos encontramos en el caso de que la matriz $X^t X$ no sea de rango pleno, luego las ecuaciones normales (*) no pueden ser resueltas con una solución única de la forma:

$$\hat{b} = (X^t X)^{-1} X^t y$$

Por lo que nos vemos en la necesidad de expresar la ecuación normal de la siguiente manera:

$$X^t X b^o = X^t y$$

Usando b^o para distinguirla de la solución solitaria que existe cuando $X^t X$ tiene rango pleno.

Luego; b^o es una solución; que en este caso toma la forma:

$$b^o = G X^t y$$

Donde G es una inversa generalizada de X^tX; de esta manera tendríamos resuelto el problema de la regresión en forma general para cualquier caso.

6.4.1.2 Soluciones

Teniendo en cuenta que X no tiene rango pleno, X^tX no tiene inversa y por lo tanto las ecuaciones normales no tienen solución única. Entonces tienen muchas soluciones.

Si deseamos obtener alguna de ellas; calculamos la inversa generalizada G de X^tX y la solución resultaría:

$$b^o = GX^ty$$

Debemos tener en cuenta que b^o es sólo una solución a las ecuaciones y no es un estimador de parámetros de **b** . En el caso de modelos de rango pleno, debemos tener presente que la solución obtenida para las ecuaciones normales es sólo una solución del sistema de ecuaciones. Lo que implica que la mayoría de los casos b^o sea nombrada como un estimador de b. Es verdad que b^o es, un estimador de algo, pero no necesariamente de b, y depende enteramente de la inversa generalizada de X^tX. Razón por la que b^o es siempre referida a tal solución y no un estimador

5.4.1.3 Algunas consecuencias de la solución

Como b^o es una función de las observaciones **y;** aunque esto es un estimador de b. El valor esperado y varianza no son idénticos a aquellos de $\hat{b}$.

a. Valores esperados

Para cuando hacemos uso de la inversa generalizada G ; se tiene que:

$$E(b^o) = GX^t E(y) = GX^t Xb = Hb$$

Es decir, b^o tiene el valor esperado Hb donde $H = GX^tX$.

Por tanto b^o es una estimador insegado de Hb, pero no de b.

b. Varianzas

Como $b^o = GX^t y$

$$\begin{aligned} Var(b^o) &= Var(GX^t y) \\ &= GX^t Var(y) XG^t \\ &= GX^tXG^t\sigma^2 \quad (**) \end{aligned}$$

A pesar de la diferencia con su contraparte $(X^tX)^{-1}\sigma^2$ del modelo de rango pleno, este resultado encontrado para la varianza no causa dificultad en las aplicaciones. Depende de la elección adecuada para G, luego (**) puede ser también expresado como $G\sigma^2$, teniendo en cuenta que X^tX es simétrico, luego existe una matriz de permutación P tal que:

$$P^tX^tXP = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix}$$

Donde A_{11} es cuadrada, de rango pleno y de igual rango que X^tX. Resulta entonces:

$$G = P \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^t$$

Es una inversa generalizada simétrica de X^tX con $GX^tXG^t = G$.

Por lo tanto, Var (b^o) = $G\sigma^2$ haciendo uso de la inversa generalizada G.

c. Estimado E(y)

Correspondiente al vector de las observaciones y, tenemos el vector de valores esperados estimados E(Y); como para el caso de los modelos de rango pleno:

$$E(y) \equiv \hat{Y} = Xb^o = XGX^ty$$

El que es invariante a la elección de cualquier inversa generalizada de X^tX que es usada para G.

Esto nos posibilita obtener una solución a las ecuaciones normales, en cualquier forma que nosotros pidamos.

d. Suma del error residual de cuadrados

La suma del error residual de los cuadrados es definida como:

$$SSE = (y - Xb^o)^t (Y - Xb^o)$$
$$= y^t (I - XGX^t) (I - XGX^t)y$$
$$= y^t (I - XGX^t)y$$

Puesto que I-XGX^t es idempotente, y simétrico. Asi mismo XGX^t es invariante a G, así SCR es invariante a cualquier solución de las ecuaciones normales usada para b^o.

Luego SCR puede ser derivada ordenadamente como:

$$SCR = y^t (I - XGX^t)y = y^ty - y^tXGX^ty$$
$$= y^ty - b^oX^ty$$

cuyo resultado es el mismo que para el caso de rango pleno; y^ty es la suma total de los cuadrados de los y's observados y b^oX^ty es la suma de los productos de las soluciones en b^o multiplicados por los elementos correspondientes del segundo miembro de la ecuación

$$X^tXb^o = X^ty \text{ del cual es derivado } b^o$$

Como podemos observar; el uso de la inversa generalizada de una matriz, tal como G en modelos de rango no pleno son muy útiles y dándoles el tratamiento adecuado nos permiten llegar a resultados similares que los modelos de rango pleno.

También podemos hacer usom de la inversa generalizada en modelos multiecuacionales, en el tratamiento de su forma reducida y en la optimización que seguiremos profundizando en el futuro.

Ilustración:

Tenemos un análisis de la producción de plantas que producen goma, llamado Guayule; para lo cual se disponían de 54 plantas de diferentes tipos, 27 normales, 15 de otros tipos y 12 anormales. Vamos a considerar 6 plantas para la ilustración, 3 normales, 2 de otros tipos y 1 anormal, como vemos en la tabla.

PESOS DE SEIS PLANTAS		
TIPO DE PLANTA		
NORMAL	OTROS TIPOS	ANORMAL
101 105 94	84 88	32
300	172	32

El problema es estimar el efecto del tipo de planta sobre el peso de este. Para ello asumimos:

$$y_{ij} = \mu + \alpha \; ; e_{ij}$$

Siendo μ la población media del peso de la planta, α_i el efecto tipo i sobre el peso y e_{ij}; el error correspondiente a cada observación y_{ij}

Para las 6 observaciones; en términos de las ecuaciones del modelo resulta:

$$
\begin{array}{lllllll}
101 & = & y_{11} = & \mu + \alpha_1 & & & + e_{11} \\
105 & = & y_{12} = & \mu + \alpha_1 & & & + e_{12} \\
94 & = & y_{13} = & \mu + \alpha_1 & & & + e_{13} \\
84 & = & y_{21} = & \mu + & + \alpha_2 & & + e_{21} \\
88 & = & y_{22} = & \mu + & + \alpha_2 & & + e_{22} \\
32 & = & y_{31} = & \mu + & & + \alpha_3 & + e_{31}
\end{array}
$$

Representado en la forma **y** = Xb+e resulta:

$$
\begin{bmatrix} 101 \\ 105 \\ 94 \\ 84 \\ 88 \\ 32 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{12} \\ y_{13} \\ y_{21} \\ y_{22} \\ y_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_{11} \\ e_{12} \\ e_{13} \\ e_{21} \\ e_{22} \\ e_{31} \end{bmatrix}
$$

Donde **y** es el vector de observaciones, **X** es el vector de ceros y unos, **b** es el vector de parámetros y **e** es el vector de errores.

En este caso resulta que **X** no tiene rango completo, siendo la matriz $X^t X$ simétrica y singular:

$$
X^t X = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

Por otro lado los elementos de X^ty resultan del producto:

$$X^ty = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 101 \\ 105 \\ 94 \\ 84 \\ 88 \\ 32 \end{bmatrix}$$

$$X^ty = \begin{bmatrix} 504 \\ 300 \\ 172 \\ 32 \end{bmatrix}$$

A partir de la ecuación normal:

$$X^t X b^0 = X^ty$$

Donde usamos b^0 para distinguirlo de $\hat{b}$; es decir denotamos b^0 a la solución:

$$b^0 = G X^ty$$

Donde G es una inversa generalizada de X^tX. En este caso, las ecuaciones resultan:

$$\begin{bmatrix} 6 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu^0 \\ \alpha_1^0 \\ \alpha_2^0 \\ \alpha_3^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 504 \\ 300 \\ 172 \\ 32 \end{bmatrix}$$

En este caso la solución no es única, existen muchas soluciones.
Necesitamos calcular G; una de las inversas generalizadas de X^tX; tal como sigue:

i) elegimos en menor de orden 3 x 3 en X^tX:

$$\begin{bmatrix} 6 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

puesto que el rango de X^tX es igual a 3

ii) calculamos la inversa de este menor:

$$M = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad y \quad M^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

iii) completamos con ceros los otros elementos y conformamos a partir de M^{-1} la matriz G

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Calculamos b^0:

$$b^0 = G\,X^t\,y$$

$$b^0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 01 \\ 0 & 0 & 0 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 504 \\ 300 \\ 172 \\ 32 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 100 \\ 86 \\ 32 \end{bmatrix}$$

Además a partir de este resultado y los obtenidos anteriormente tenemos Xb°
Que es igual a:

$$\hat{y} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 100 \\ 86 \\ 32 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 100 \\ 100 \\ 86 \\ 86 \\ 32 \end{bmatrix}$$

CONCLUSIONES

1. Cualquier matriz A de orden m x n; tiene inversa generalizada incluida la matriz cero.

2. La inversa generalizada G de una matriz; no es única, está en función de otras P y Q; que dependen de las operaciones elementales usadas.($G = QD^{-}P$)

3. Una de las limitaciones de la inversa generalizada de una matriz es de que no es única.

4. No todas las inversas generalizadas de una matriz simétrica son simétricas.

5. La inversa generalizada de una matriz; puede resultar una familia de matrices y la elección será arbitraria sujeta a la incertidumbre.

6. El producto XGX^t es invariante; es decir es el mismo para cualquier inversa generalizada G.

BIBLIOGRAFÍA.

1. Barbolla, Rosa y Sanz, Paloma

   1998 "Álgebra Lineal y Teoría de Matrices", Prentice Hall, Madrid.

2. Ben Noble, James W.

   1997 "Álgebra Lineal Aplicada", Prentice – Hall Hispanoamericano S.A., México D.F.

3. Brickellm, F.

   1990 "Matrices y Espacios Vectoriales", Limusa, México.

4. Burmeister, Edwin y Dobell Rondey, A.

   1973 "Teorías Matemáticas del Crecimiento Económico", Bosh, Barcelona.

5. De Burgos, Juan

   1997 "Álgegra Lineal", Mc Graw – Hill / Interamericana de España S.A., Madrid.

6. Gilbert, Strang

1990 "Álgebra Lineal y aplicaciones", Fondo Educativo Intermericano, México D.C.

7. Graybill, Franklin A.

1990 "Theory an Application of the Linear Model", Wadsworth Publishing Company, California.

8. Green, Williams

1998, "Análisis Econométrico", 3ra. Ed., Prentice Hall Hispanoamericana, México. D.F.

9. Grossman, Stanley I.

1998 "Álgebra Lineal y Aplicaciones", 5ta. Ed., Fondo Educativo Interamericano S.A., México D.F.

10. Herstein, J.N. y Winter, David J.

1997 "Álgebra Lineal y Teoría de Matrices", Grupo Editorial Iberoamericana, México D.F.

11. Lay C., David

1999 "Álgebra Lineal y sus Aplicaciones", 2da. Ed., Addison Wesley Longman de México S.A., México D.F.

12. Nakos, Jorge y Joyner, David

1999 "Álgebra Lineal con Aplicaciones", International Thomson Editores, México D.F.

13. Pollock, D.S.G.

1990 "The Álgebra of Econometrics", John Wiley an Sons, New York.

14. Pulido San Román, Antonio

1999 "Modelos econométricos", Ediciones Pirámide S.A., Madrid.

15. Radhkrishna, Raoc y Toutenburg, Helge

1997 "Linear Models", Springer, New York.

16. Rao, C.R. and Mitra, S.K.

1990 "Generalized Inverse of Matrices and its Application", New York.

17. Searle, S.R.

1990 "Linear Models", John Wiley and Sons, New York.