Universidad Nacional de Ingeniería

Facultad de Ingeniería Económica
y Ciencias Sociales

El Modelo Neoclásico, Crecimiento Endógeno y la Tecnología AK

INFORME DE SUFICIENCIA
PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE
INGENIERO ECONOMISTA

POR LA MODALIDAD DE ACTUALIZACION DE CONOCIMIENTOS

ELABORADO POR

LUIS RICARDO CÁRDENAS TORRES

LIMA PERÚ
2003

Dedicatoria

A mis padres, con mucho amor y agradecimiento

por haberme dado todo lo bueno que hay en mi.

Contenido

Introducción

La presente monografía estudia el modelo neoclásico de crecimiento económico, como primer intento de explicar los mecanismos que operan en las economías y determinan el crecimiento de estas. Se desarrolla el modelo en forma progresiva y atendiendo a mayores dificultades en la explicación; comenzamos con el enunciado de las características de un modelo de corte neoclásico. Se presentan simulaciones en las variaciones de las variables para examinar las implicancias económicas en el corto y largo plazo; determinando también la evolución de la dinámica del modelo para ver que lo que predice acerca del crecimiento de la economía en el largo plazo. Luego pasamos a estudiar el modelo de crecimiento con tecnología AK, el más sencillo de la familia de modelos endógenos, para buscar salir de la trampa a la que conduce el modelo neoclásico de Solow.

Teniendo en cuenta que la tecnología es una variable considerada como una de las más favorecedoras para el crecimiento económico, resulta de gran importancia conocer las teorías que se están usando para comprender el proceso de crecimiento económico.

La pregunta más importante que los economistas nos debemos hacer no es como evitar las pequeñas fluctuaciones de los ciclos de corto plazo, sino descubrir los factores que determinan la tasa de crecimiento de largo plazo que les pueden afectar.

El modelo neoclásico de crecimiento de Solow surgió como una crítica a los modelos de tipo keynesianos como los de Harrod-Domar que consideraban la función de producción como de proporciones fijas, no se podría dar entonces sustitución entre los factores, asumían la tecnología como dada; estas consideraciones eran las que determinaban que existiera un *equilibrio al filo de la navaja*, donde las diferencias entre la tasa de crecimiento natural y la tasa de crecimiento garantizada evidenciaban la inherente inestabilidad de las economías de mercado, manifestada a través de la amenaza del desempleo creciente debido a que la tasa natural o efectiva es menor que la tasa garantizada, o de la inflación prolongada como producto de que la tasa natural o efectiva supera a la garantizada[1]. Esta principal limitación en la estructura básica del modelo era la que debía modificarse principalmente, bastaría eso para salir del filo de la navaja y permitir a las economías encontrar una senda económica equilibrada y segura "[...] Si este supuesto se abandona [proporciones fijas], la delicada noción del equilibrio inestable parece perder significado [...]"[2]. Asimismo, Solow criticaba que se usaran instrumentos de análisis del corto plazo como el multiplicador, el acelerador, etc. para explicar los problemas del largo plazo[3].

El trabajo está estructurado de la siguiente manera: En el primer capítulo damos una rápida mirada al devenir del estudio del crecimiento económico, En el segundo capítulo desarrollamos el modelo de crecimiento neoclásico, el modelo de Solow-Swan, el tercer capítulo aborda el modelo de tecnología AK como primer intento de lograr un crecimiento endógeno, el cuarto capítulo está destinado a desarrollar algunos temas que peden resultar

---

[1] Fernandez-Baca, Jorge y Seinfeld, Janice "Capital Humano, Instituciones y Crecimiento" Cap.1 pp.40.

[2] Solow, Robert M. "Una Contribución a la Teoría del Crecimiento Económico" en "Lecturas sobre la Teoría Económica del Desarrollo" pp.134.

[3] Solow, Robert M. op. cit. pp. 134.

de interés o de complemento, el capítulo quinto expone las conclusiones así como las cuestiones derivadas del análisis de los dos modelos.

Es mi deseo que esta monografía sirva de alguna ayuda a quienes se sientan interesados por comprender algunas de las explicaciones que se han ensayado para responder a la antigua pregunta: ¿qué determina que un país sea próspero y otro no lo sea?

1. Preliminares

La teoría del crecimiento económico empezó en sí con el pensamiento económico; los clásicos como Adam Smith, David Ricardo y Thomas Malthus estudiaron el tema e introdujeron conceptos fundamentales como la *ley de los rendimientos decrecientes* y su relación con la acumulación del capital físico y humano, la relación entre el progreso tecnológico y la especialización del trabajo o el enfoque competitivo como instrumento de análisis del equilibrio dinámico (como clásicos su análisis se centraba en la oferta, que consideraban rígida, lo que hoy sabemos es una visión de largo plazo).

En términos estrictos, sin embargo comenzó con la dinámica del corto plazo de Keynes; la modelación se inició con Harrod (1939) y Domar (1946) quienes ampliaron la dinámica de Keynes (1936). y recién con Solow (1956) y Swan (1956) se empezó con la teoría del crecimiento propiamente dicha y de manera formal, iniciando así la teoría del crecimiento moderno. Aunque los clásicos como Adam Smith hablaban de la fuente de crecimiento en la división del trabajo, que surge del intercambio el cual se limita por las extensiones del mercado y este a su vez por las facilidades de comunicación al interior del territorio o fuera de este.

En las décadas siguientes se desarrolló la rama teórica de forma considerable, completando el análisis neoclásico con los trabajos de Cass (1965) y Koopmans (1965), a partir del enfoque de optimización intertemporal desarrollado por Ramsey inicialmente en 1928 (optimización racional) se enriqueció la dinámica de transición de un estado estacionario a otro, aunque las conclusiones no distaban de las alcanzadas por Solow.

Debido a que el modelo de Solow pronosticaba que en ausencia del progreso técnico, la existencia de rendimientos decrecientes de los factores y la ausencia de economías de escala daba lugar a una tasa de crecimiento nula en el largo plazo, lo que significaba que la teoría del crecimiento no explicaba el crecimiento. En los años 50' y 60' quisieron introducir el progreso tecnológico pero con poco éxito; los más relevantes son los que introdujeron posibles causas de rendimientos no decrecientes como el capital humano (Uzawa 1965) o el aprendizaje en el puesto de trabajo (Arrow 1962 y Sheshinsky 1967).

A principios de los años 70' la teoría del crecimiento económico decae debido principalmente a la ausencia de una teoría suficientemente desarrollada acerca de la creación y difusión de la tecnología y del capital humano; asimismo la ausencia del instrumental matemático adecuado para desarrollarlo fue otro limitante.

Fue en la segunda mitad de la década del 80' con la publicación de la tesis doctoral de Paul Romer (1986) que se hizo renacer la teoría del crecimiento económico; y los consiguientes trabajos de Lucas (1988) y Rebelo (1991) le devolvieron vigor; estos modelos estudiaron el crecimiento de largo plazo con tasas positivas sin considerar que algunas variables del modelo (como la tecnología) crecían de manera exógena, apareciendo entonces las llamadas *teorías de crecimiento endógeno*.

El primer grupo compuesto por Romer (1986), Lucas (1988) y Rebelo (1991) lograron tasas positivas eliminando los rendimientos decrecientes a escala a través de externalidades o con capital humano. El segundo grupo, compuesto por Romer (1987, 1990), Aghion y Howitt (1992, 1998) y Grossman y Helpman (1991) utilizaron el entorno de competencia imperfecta para construir modelos en los que la inversión en investigación y desarrollo *(I+D)* de las empresas generaban progreso tecnológico de manera endógena.

Recordemos a manera de reflexión lo manifestado por Lucas sobre el tema: "En las condiciones actuales, la "productividad marginal" de la política de estabilización es mucho menor que la promoción del crecimiento económico" (De la Fuente 1992)[4].

[4] Argandoña Ramiz, Antonio, "Macroeconomía Avanzada II". "Para formular ésta afirmación, Lucas se basa en un cálculo de las ganancias de bienestar que resultarían, por un lado, de la eliminación total del ciclo económico y, por otro, del aumento de un punto de la tasa de crecimiento. Según Lucas, en el primer caso las ganancias de bienestar serían equivalentes a un aumento permanente del consumo en 0.1%, mientras que en el segundo caso el aumento sería próximo a 20%".

2. El Modelo de Crecimiento Neoclásico: Solow y Swan

Un modelo es la representación matemática de la realidad; es la representación formal y sencilla de un sistema económico que resume a través de supuestos y relaciones los hechos que ocurren dentro de este sistema, logrando presentarlos finalmente de forma ordenada, lógica y estilizada, la cual contribuirá a explicar y finalmente tomar acciones sobre las variables para lograr objetivos específicos.

El modelo de crecimiento neoclásico, surge a partir de los trabajos que desarrollaron independientemente Robert Solow[5] (1956) y Trevor Swan[6] (1956), ambos estudios, llevados a cabo de manera particular logran llegar a conclusiones similares. Este modelo es utilizado como inicio para realizar el análisis sobre el crecimiento económico debido primeramente a que sus hipótesis son utilizadas como referencia en otros modelos, así por ejemplo, los modelos de crecimiento modernos tienen una estructura de equilibrio general, es decir todos los mercados se vacían, todas las ofertas y las demandas de la economía finalmente se igualan; segundo, muchas de las conclusiones que se obtienen a través de este modelo se

[5] Robert M. Solow publicó sus planteamientos en 1956 a través de un ensayo titulado "A Contribution to the Theory of Economic Growth".
[6] Trevor W. Swan expuso en 1956 su modelo en un trabajo titulado "Economic Growth and Capital Accumulation".

mantienen aún cuando se modifiquen o supriman los supuestos simplificadores de los cuales parte. Estas dos características son las que le confieren a este modelo una importancia particular.

La presentación del modelo que se hará a continuación corresponde a su versión más simple; y aunque difiere en algunos aspectos de la presentación original de Solow como la introducción explicita de la depreciación, pues no la utiliza directamente "El producto debe ser entendido como producto neto después de reponer la depreciación del capital"[7] o la consideración también explicita de la tecnología, corresponde a los planteamientos y la secuencia que él expuso.

2.1. Los Fundamentos del Modelo Neoclásico de Solow

Tratándose de un modelo con características neoclásicas, el ámbito dentro del cual se desarrolla nuestra idealizada economía supone que las transacciones de bienes y servicios se dan dentro de un ambiente donde no hay restricciones al intercambio, hay pleno empleo, existe información perfecta y derechos de propiedad privados bien definidos, por lo que el costo de realizar transacciones es nulo; estas condiciones aseguran que los recursos son utilizados siempre de manera eficiente. Se trata pues de "la cara neoclásica de la moneda"[8].

Una de las primeras consideraciones presentes es la ausencia del Gobierno, por lo que no se consideran las funciones de este a través del gasto público sobre la economía así como de la política impositiva. Se asume además que se trata de una economía totalmente

[7] Solow, Robert M. "Una Contribución a la Teoría del Crecimiento Económico" en "Lecturas sobre la Teoría Económica del Desarrollo" pp.134.

cerrada, es decir no se comercia bienes y/o servicios con el exterior, ni existe flujo de capitales; esto implica que toda la inversión que se realice en la economía está respaldada solamente por el ahorro interno.

La Función de Producción

Se considera que la economía produce un único bien homogéneo[9] (producto) el cual puede utilizarse tanto para consumo como para producción. La producción o producto que elabora la economía, denotada por Y, se obtiene a través de la utilización de tres factores fundamentales[10]: El capital (K), el trabajo (L) y la tecnología (A).

El capital está considerado como capital físico, es decir todo aquel elemento físico que sirva para el proceso de producción, considérese dentro de este rubro los edificios, las estructuras, las máquinas, las herramientas, los equipos, etc.

El factor trabajo viene expresado por la suma total de los trabajadores de la economía en un momento dado, el modelo asume que todos los trabajadores son idénticos.

La tecnología, es el conocimiento que se tiene de cómo realizar un proceso, qué, cómo y cuánto capital y/o trabajo utilizar; visto así está variable cambia dependiendo del tiempo y del lugar; se puede utilizar en la actualidad la misma tecnología de hace varias décadas. A diferencia del capital y del trabajo, una misma tecnología puede ser utilizada por

---

[8] Solow, Robert M. op cit. sección 7. Puntualizaciones pp.154.
[9] Los modelos bisectoriales de crecimiento son los que diferencian dos tipos de bienes en la economía.
[10] Algunos modelos utilizan un factor de oferta rígida como la tierra, sin embargo los resultados no varían; otros no consideran dentro del modelo inicial a la tecnología, sin embargo como nuestro objetivo es llegar en específico a tratar el problema tecnológico, lo consideramos dentro del modelo inicial.

varios usuarios a la vez; cada unidad de capital y de trabajo solo puede ser utilizada por un agente.

Estos factores se combinan de tal forma que se obtenga el producto final *Y*, las formas en que se pueden combinar se representan a través de la función de producción siguiente:

$$Y = F(K, L, A) \qquad [2.1]$$

Esta función de producción presenta las características de una típica función de producción neoclásica, cuya principal diferencia con las funciones que se utilizaban en los modelos anteriores al de Solow, es que no es de factores fijos[11], no se supone rigidez tecnológica , sino que por el contrario se admiten infinitas combinaciones de los factores, lo que tiene sentido para el largo plazo, pues para ese período las combinaciones y sustitución de factores es un supuesto plausible, por lo tanto cumple las siguientes propiedades[12]:

- La función de producción presenta rendimientos a escala constantes, es decir que la producción aumenta en la misma proporción que el aumento en cada uno de los factores. Matemáticamente se dice que la función de producción es homogénea de grado uno: $F(\lambda K, \lambda L, A) = \lambda F(K, L, A)$

  Como notarán se excluye el factor tecnología, debido a que se utilizará el mismo nivel tecnológico aún cuando se dupliquen o tripliquen los demás factores, esto es conocido como el *principio de réplica*.

[11] Solow, Robert M. op cit. sección 1. Introducción pp.134.
[12] Sala I Martin, Xavier, "Apuntes de Crecimiento Económico" Cap.1 pp.13, 14.

- La productividad marginal de los factores es positiva y decreciente; es decir que la producción aumenta si adicionamos una unidad de capital o una unidad de trabajo, pero este aumento es cada vez menor a medida que se adicionan más unidades de cada factor. Matemáticamente expresamos esto diciendo que las primeras derivadas parciales son positivas, y las segundas derivadas parciales son negativas: $\partial F/\partial K > 0$ y $\partial F/\partial L > 0$ además $\partial^2 F/\partial K^2 < 0$ y $\partial^2 F/\partial L^2 < 0$

  Lo que estamos buscando asegurar es que la función de producción sea cóncava.

- Toda función de producción neoclásica debe satisfacer un conjunto de requerimientos conocidos como *Condiciones de Inada*; estas condiciones exigen que la productividad marginal de cada factor se aproxime a cero a medida que dicho factor tienda al infinito y que tienda a infinito cuando el factor tienda a cero[13].

Supuestos Adicionales

El modelo considera que las familias ahorran una fracción constante "*s*" del producto a lo largo del tiempo, entonces $0 < s < 1$: esto viola el principio de optimización de los agentes económicos, pero ayuda a simplificar el análisis si consideramos que en el largo plazo la tasa de ahorro presenta una tendencia estacionaria, a diferencia de las fluctuaciones de corto plazo debido al ciclo económico. Por ser una economía cerrada la única fuente de inversión es el ahorro, por lo tanto:

$$S = I = sY \qquad [2.2]$$

[13] Argandoña Ramiz, Antonio op. cit. Capítulo 7 pp.275, principalmente se requiere $\lim_{K\to 0} \partial F/\partial K = \lim_{L\to 0} \partial F/\partial L = \infty$ y $\lim_{K\to \infty} \partial F/\partial K = \lim_{L\to \infty} \partial F/\partial L = 0$

La inversión se realiza para aumentar el stock de capital con nuevos equipos o para reponer aquellos que se han desgastado en el proceso productivo; este desgaste lo conocemos como depreciación y se considerará como una fracción "δ"del capital utilizado, el cual afecta por igual a cada unidad de capital, entonces la inversión será igual a la variación del capital (K')[14] más la depreciación:

$$I = K' + \delta K \qquad [2.3]$$

Se supone que el nivel de tecnología no varía durante el tiempo, por lo que A se considera una constante. Asimismo, el modelo supone que toda la población se encuentra dentro del mercado de trabajo, por lo tanto cada ciudadano es un trabajador; "[...]así el pleno empleo es continuamente mantenido"[15], entonces la tasa de crecimiento de los trabajadores coincidirá con la tasa de crecimiento de la población; esta tasa es exógena y constante; la que denotaremos con la letra "n" y definimos como:

$$L'/L = n \qquad [2.4]$$

La Ecuación Fundamental

Como el problema que nos interesa es el crecimiento económico, debemos estar interesados en la evolución del producto que se le asigna a cada persona, puesto que esta es la medición correcta del grado de satisfacción o bienestar de la población; deberemos considerar entonces definir las variable en términos *per cápita* más que en términos agregados. Identificaremos a las variables en términos per cápita usando letras minúsculas.

[14] La variación de una variable puede considerarse como la derivada de esta respecto al tiempo: $\Delta A = A' = \partial A/\partial t$.

Debido a que la función de producción presenta rendimientos a escala constantes, esta puede simplificarse rescribiéndola como función de la variable *stock de capital per cápita* "k" definida como "$k = K/L$", esta transformación recibe el nombre de *forma intensiva de la función de producción*[16].

$$y = Y/L = 1/L\ F(K, L, A) = F(1/L\ K, 1/L\ L, A) = F(k, 1, A) = f(k,1) \qquad [2.5]$$

Utilizando la definición de la variable *stock de capital per cápita* "k", obtenemos la variación de esta variable a través de la siguiente forma[17]:

$$k' = K'/L - nk \qquad [2.6]$$

Como el ahorro es igual a la inversión, de [2.2] y [2.3] se obtiene K':

$$K' = sY - \delta K \qquad [2.7]$$

En términos per cápita entonces:

$$K'/L = sY/L - \delta K/L = s\ f(k,1) - \delta k \qquad [2.8]$$

Finalmente reemplazando [2.8] en [2.6] se obtiene *la ecuación fundamental del modelo de Solow.*

---

[15] Solow, Robert M. op cit. sección 2. Un Modelo de Crecimiento a Largo Plazo pp.135.

[16] Recuérdese que con rendimientos a escala constantes $F(\lambda K, \lambda L, A) = \lambda F(K, L, A)$, y si consideramos la constante igual a $1/L$.

[17] Si: $k = (K/L)$ y $k' = \partial k/\partial t$, entonces $k' = (K'.L - L'.K)/L^2$, entonces $k' = K'/L - (L'K)/(L.L)$, entonces $k' = K'/L - (L'/L).(K/.L)$

$$k' = s\,f(k,1) - (n + \delta)k \qquad [2.9]$$

Esta relación nos muestra la variación del stock de capital per cápita en cada momento, dado un stock de capital inicial, podremos entonces determinar el stock para el siguiente período, pues conocemos la tasa de inversión que se repetirá continuamente y el desgaste del capital; que sería el siguiente stock inicial, y así sucesivamente[18], esta es la importancia del modelo desarrollado por Solow, que nos permite ver la evolución del stock del capital per cápita en el tiempo y estudiar después las variaciones del producto.

La interpretación económica de la ecuación fundamental de Solow es: El stock de capital varía en base a dos elementos; el ahorro bruto y la tasa de *depreciación efectiva*; formada ésta por la depreciación propia de las máquinas y por la adición en cada período de nuevos trabajadores a la tasa "*n*"; esto significa que para mantener constante el stock de capital per cápita al aumentar los trabajadores hay que poner a su disposición un nivel de capital "*k*" para que su productividad sea al menos igual a la de los demás trabajadores[19]. El término "depreciación" debe interpretarse en un sentido amplio, es decir, como la *reducción del capital por persona*, sea éste por desgaste o por aumento de trabajadores.

Otra forma de interpretar la *depreciación efectiva* es considerarla como la inversión necesaria para mantener constante la relación capital-trabajo cuando la fuerza de trabajo crece; se trata de una inversión de equilibrio.

---

[18] Solow, Robert M. op cit. sección 2. Un Modelo de Crecimiento a Largo Plazo pp.136.

[19] Lo que se busca es una ampliación del capital, inversión necesaria para mantener constante el stock de capital por trabajador cuando aumenta la población. Aumentar capital por encima de ese nivel constituye una profundización del capital.

2.2. Análisis del Estado Estacionario

El estado estacionario[20] es aquella situación en la cual las variables agregadas (*Y, C, K*) crecen a una misma tasa, y sus correspondientes variables per cápita (*y, c, k*) también, ambas exhiben un valor constantes en el largo plazo. Para el modelo de Solow la tasa de crecimiento de las variables agregadas en estado estacionario es igual a la tasa de crecimiento de la población "*n*". Las variables per cápita en el estado estacionario se igualan a cero, es decir que en el largo plazo ninguna variable per cápita crece.

La conclusión de este hecho es que la economía neoclásica está estructurada de tal manera que en el estado estacionario todas las variables crecen para respaldar el crecimiento de la población y nada más, aunque esto cumple con asegurar subsistencia a la comunidad conlleva un estado de estancamiento, pues per cápita solo se está continuando con los niveles que siempre se tenían; estaríamos entonces frente a una economía que perpetúa la situación buena o mala que tenga la economía.

Según la ecuación fundamental de Solow el aumento del stock de capital per cápita resulta de la diferencia de dos funciones, en adelante identificaremos a *la curva de producción* como la función $f(k,1)$, a *la curva de ahorro* como la función $s\,f(k,1)$, y a *la curva de depreciación* como $(\delta + n)k$. Graficando dichas curvas podemos analizar tres posibles escenarios:

[20] El estado estacionario es sólo una construcción teórica y no tiene por qué coincidir con una situación de la vida real.

- $k'=0$; el stock de capital per cápita permanece constante, no aumenta ni disminuye lo que ocurre cuando se interceptan las curvas de ahorro y depreciación, este es el estado estacionario y k es el *stock de capital del estado estacionario* k^*; En esta situación el ahorro genera un nivel de inversión que es el justo para reponer el capital depreciado.

- $k'>0$; el stock de capital per cápita aumenta, entonces el ahorro genera un nivel de inversión que permite reponer el capital depreciado y aumentar más capital; esto ocurre a la izquierda del stock de capital de estado estacionario. Cuando el stock de capital es menor al nivel de estado estacionario, el capital crece.

- $k'<0$; el stock de capital per cápita disminuye, entonces el ahorro genera un nivel de inversión que no alcanza ni siquiera para reponer el capital depreciado; éste se presenta a la derecha del stock de capital de estado estacionario. Cuando el stock de capital es mayor al nivel de estado estacionario, el capital disminuye.

Analizando gráficamente cada escenario se puede visualizar mejor como en el modelo de Solow *el estado estacionario es estable* "[...] Por lo tanto el valor de equilibrio de r^* [k^*] es estable [...]"[21]; porque sea que nos apartemos de él por encima o por debajo, automáticamente se compensará el desequilibrio disminuyendo capital o aumentando capital respectivamente, retornando al nivel del stock de capital del estado estacionario (véase Gráfico 2.1, página 17).

[21] Solow, Robert M. op cit. sección 3. Posibles Patrones de Crecimiento pp.138.

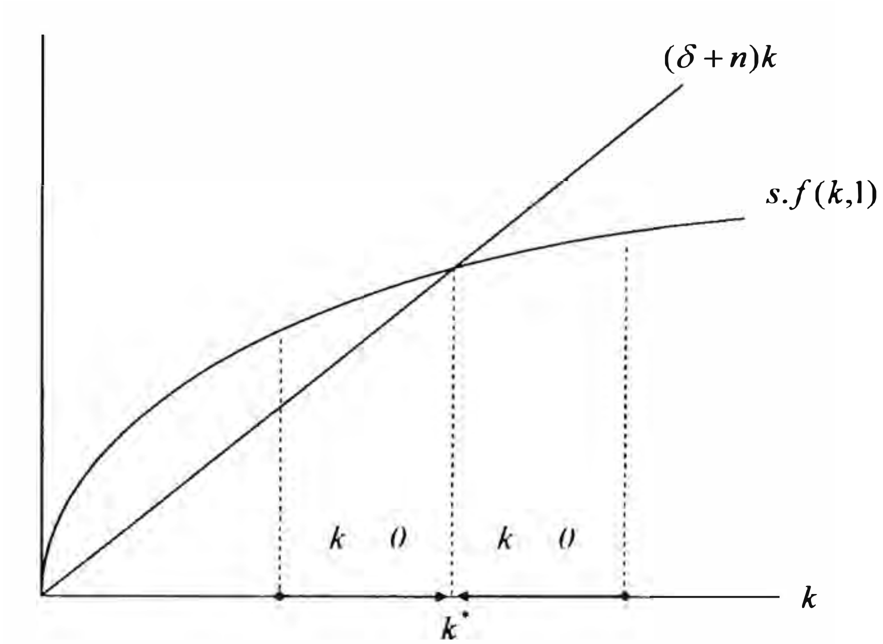

Gráfico 2.1. El modelo de Solow

Asimismo, podemos ver los efectos de las variaciones en ciertas variables. Por ejemplo (véase Gráfico 2.2, página 18) se aprecia que un aumento de la tasa de ahorro hace que la curva de ahorro se desplace hacia arriba interceptando a la curva de depreciación en un nivel de stock de capital mayor al inicial stock de capital de estado estacionario k^*; en el primer momento estaríamos por debajo del nuevo stock de capital de estado estacionario, éste entonces empezaría a subir hasta k^{**}. En conclusión, el stock de capital de estado estacionario de una tasa de ahorro más elevada es mayor.

De la misma forma si hay un aumento de la tasa de depreciación o del crecimiento de la población la curva de depreciación gira hacia la izquierda y pasa de un nivel de capital superior a uno inferior, por lo que el stock de estado estacionario inicial k^* se reduce hasta llegar al nuevo stock de capital k^{**} que es mucho menor; (véase Gráfico 2.3, página 19).

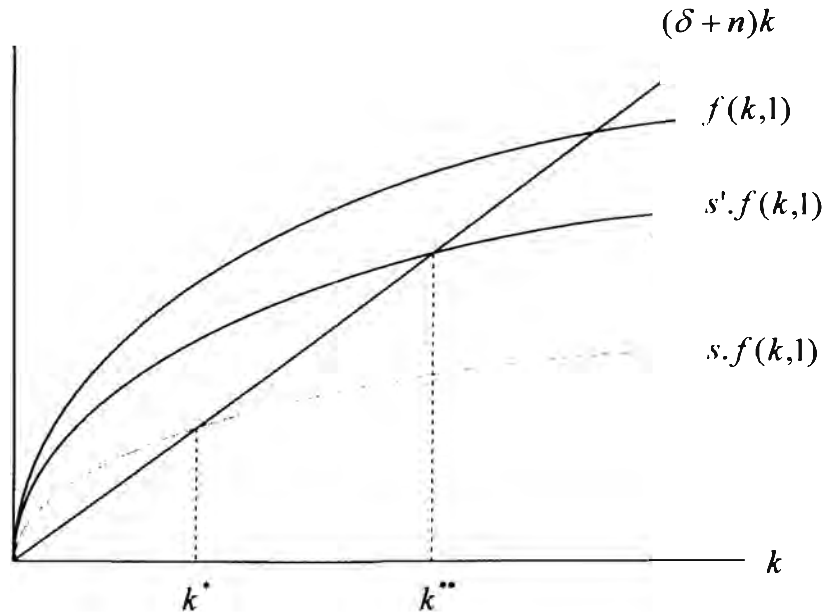

Gráfico 2.2. Aumento de la tasa de ahorro

2.3. La Regla de Oro de la Acumulación de Capital

Hemos visto que para cada nivel de tasa de ahorro existe un determinado nivel de stock de capital de estado estacionario; Debemos determinar pues la tasa de ahorro que más nos convenga. El bienestar de una población se mide a través del grado de satisfacción del que pueda disfrutar, y este depende del nivel de consumo que pueda tener cada individuo; deberá escogerse entonces dentro del modelo la tasa de ahorro que permita maximizar el consumo per cápita. "[...] El estado estacionario que conlleva el mayor nivel de consumo per cápita se llama *la Regla de Oro de la Acumulación de Capital* [...]"[22] y lo denotaremos por k_{oro}. Este nombre lo ideó Phelps (1961) y está basado en un pasaje del Nuevo Testamento (Mateo 22:33-40); la interpretación económica sería que no deberíamos pensar en aumentar

[22] Sala I Martin, Xavier op. cit. Cap.1 pp.27.

excesivamente nuestro consumo actual si esto perjudica a las futuras generaciones, ya que no nos agradaría que nos ocurriese lo mismo si se intercambiaran los papeles[23].

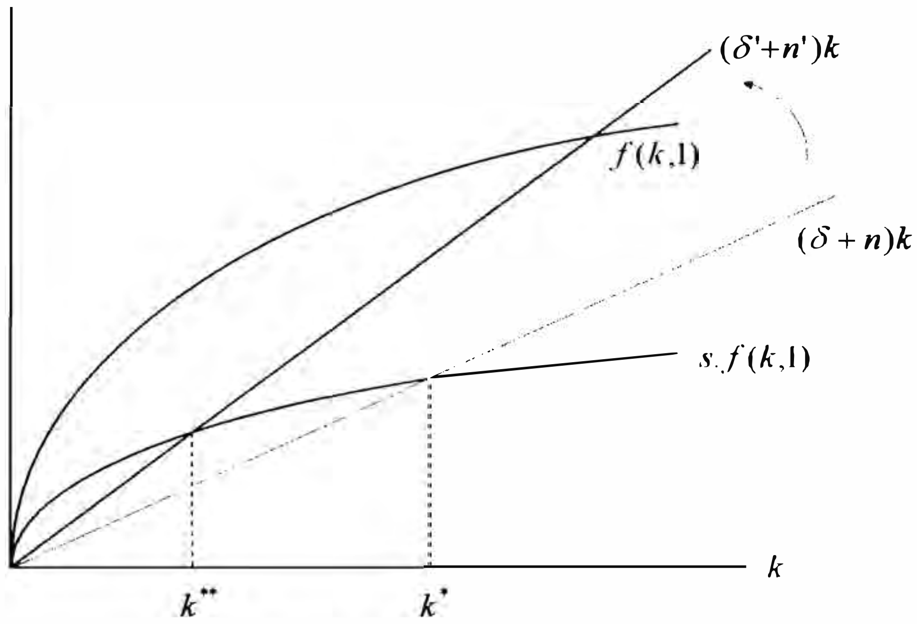

Gráfico 2.3. Aumento de la tasa de depreciación o de crecimiento poblacional

La Regla de Oro dice entonces que debe maximizarse el consumo del estado estacionario, de esta manera nuestro consumo será igual al de las futuras generaciones y el máximo posible, para todos y por igual.

Sabemos que: $Y = C + I$ pues el producto (de un solo tipo) se utiliza para consumir y para invertir, sabemos también que $S = I$ y que $S = sf(k,1)$. Si alcanzamos un nivel de consumo de estado estacionario, entonces:

$$k^* = 0 = f(k^*) - c^* (n + \delta)k^* \quad \rightarrow \quad c^* = f(k^*) - (n + \delta)k^* \qquad [2.10]$$

[23] Sala I Martin, op.cit. pp.27.

Si queremos maximizar el consumo eligiendo un nivel de capital per cápita, derivamos c^* respecto de k^*.

$$f'(k_{oro}) = (n + \delta) \qquad [2.11]$$

Para hallar el nivel de k^* gráficamente utilizando la relación hallada se traza una paralela a la curva de depreciación y se le hace coincidir tangencialmente con la función de producción, ese nivel de producción se obtiene con un stock de capital de k_{oro} que es el que nos asegura el máximo consumo en el estado estacionario. Para determinar unívocamente a este stock de capital k_{oro} como stock de estado estacionario se traslada la curva de ahorro de tal forma que al cruzarse con la curva de depreciación se replique el stock k^* para el estado estacionario, (véase Gráfico 2.4, página 21).

Para alcanzar el estado estacionario de la Regla de Oro debemos ubicar primero el stock de capital k^* que permite esa condición y a partir de este se calcula la magnitud de la tasa de ahorro "*s*" que permite alcanzar k^* como stock de capital de estado estacionario.

Es importante señalar que no hay nada en el modelo que nos asegure que la economía tenderá a ir hacia la Regla de Oro, para alcanzar ese estado se utilizarían las herramientas de la política económica para intervenir sobre la tasa de ahorro y modificarla hasta alcanzar el valor que haga que el stock de capital k_{oro} logre llegar al estado estacionario[24].

[24] Sala I Martin, Xavier op. cit. pp.28.

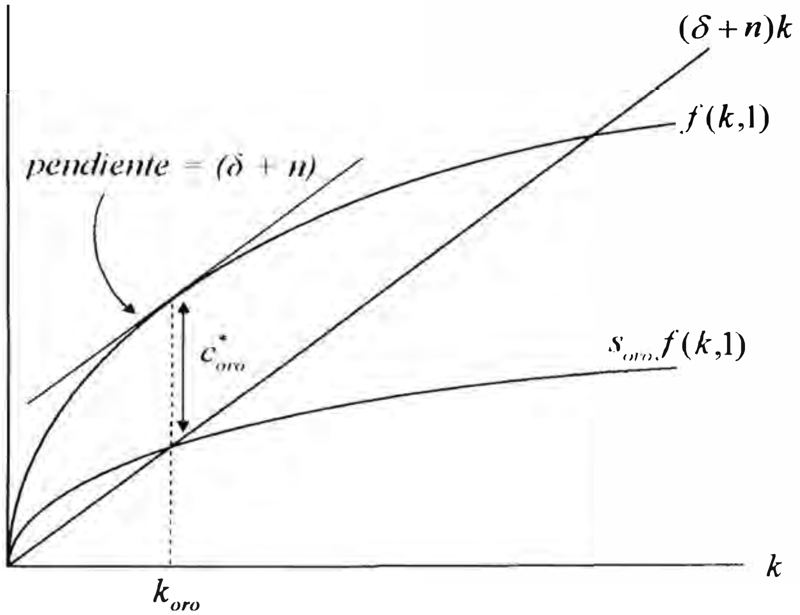

Gráfico 2.4. La Regla de oro de la Acumulación de Capital

Ineficiencia Dinámica

El stock de capital k_{oro} sirve también para determinar si la economía se encuentra en la región de ineficiencia; para ello supondremos niveles superiores e inferiores de s_{oro}. Si estamos en un nivel alto de ahorro y bajamos la tasa a un nivel de Regla de Oro el consumo crece en el largo plazo de c_1 a c_{oro}*, (véase Gráfico 2.5, página 22), nótese que inicialmente el consumo crece de manera notable para en el largo plazo ajustarse a c_{oro}* ; el hecho importante es que con la reducción de la tasa de ahorro se logra aumentar el consumo en cada momento del tiempo y como estamos suponiendo que a los ciudadanos les gusta el consumo, el ubicarse a la derecha de la Regla de Oro significa estar en una zona de ineficiencia dinámica.

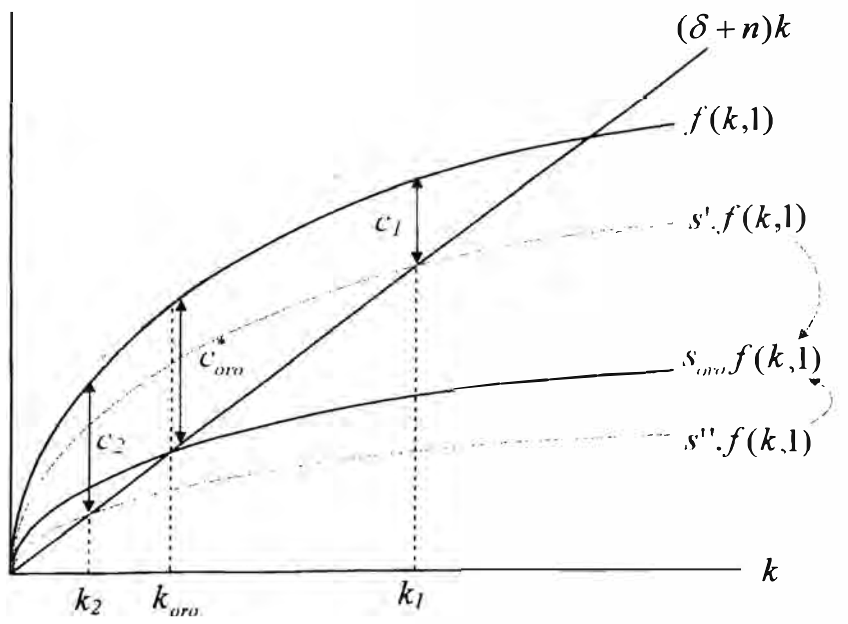

Gráfico 2.5. La Regla de oro e Ineficiencia Dinámica

Si estuviésemos es un nivel bajo de de ahorro y subimos la tasa de ahorro hasta un nivel de Regla de Oro, el consumo aumenta de c_2 a c_{oro}* , en el largo plazo hay un incremento del consumo, pero en el corto plazo debe haber una reducción; para decidir si es conveniente aumentar la tasa de ahorro es necesario saber si el aumento del consumo a largo plazo compensa la reducción inicial, se necesita entonces una función de utilidad que permita comparar la pérdida a corto plazo con la ganancia de largo plazo. Como no sabemos que tipo de preferencias tienen los ciudadanos no es posible asegurar que las economías situadas a la izquierda de k_{oro} sean ineficientes.

La conclusión fundamental es que el ahorrar e invertir demasiado es malo, pero no se puede decir lo mismo de ahorrar e invertir poco. El exceso de ahorro o inversión significaría perder la posibilidad de mayor consumo tanto en el corto como en el largo plazo;

definir lo mismo para el caso de un reducido nivel de ahorro e inversión requeriría de la utilización de ecuaciones intertemporales de preferencias o de consumo, las que el modelo neoclásico de Solow no posee. El modelo neoclásico utilizando ecuaciones con preferencias inertemporales y optimización dinámica fue abordado por Ramsey.

2.4. La Dinámica del Modelo de Solow

Hasta el momento se han estudiado las variaciones del capital, del consumo, del ahorro, de la inversión y del producto a lo largo del tiempo, sin embargo no hemos estudiado directamente las tasas de crecimiento. Si definimos la siguiente notación para cualquier variable: $\gamma_a = a'/a$[25], entonces si dividimos por "k" la ecuación fundamental del modelo de Solow obtenemos:

$$\gamma_k = k'/k = s\, f(k, 1)/k - (n + \delta) \qquad [2.12]$$

Que no es más que una transformación leve de la ecuación fundamental de Solow, en la que identificamos los elementos conocidos curva de ahorro y curva de depreciación solo que divididos por "*k*". Bajo esta forma la tasa de crecimiento del capital per cápita es igual a la diferencia entre el ahorro por unidad de capital y la tasa de depreciación efectiva (depreciación que incluye la tasa de crecimiento poblacional). Cuanto mayor sean la tasa de ahorro "*s*" y el nivel tecnológico "*A*", mayor será la tasa de crecimiento de la economía; cuanto mayor sean las tasas de depreciación y de crecimiento poblacional, menor será la

[25] Recuérdese que $a' = \partial a/\partial t$, entonces a'/a vendría a ser la tasa de crecimiento de la variable "a", y la notación "γ_a" hará referencia a dicha tasa de crecimiento de la variable "a".

tasa de crecimiento del capital por persona. Se dibuja cada curva denotándose a la curva de ahorro como *CA*[26] y a la curva de depreciación como *CD* (véase Gráfico 2.6).

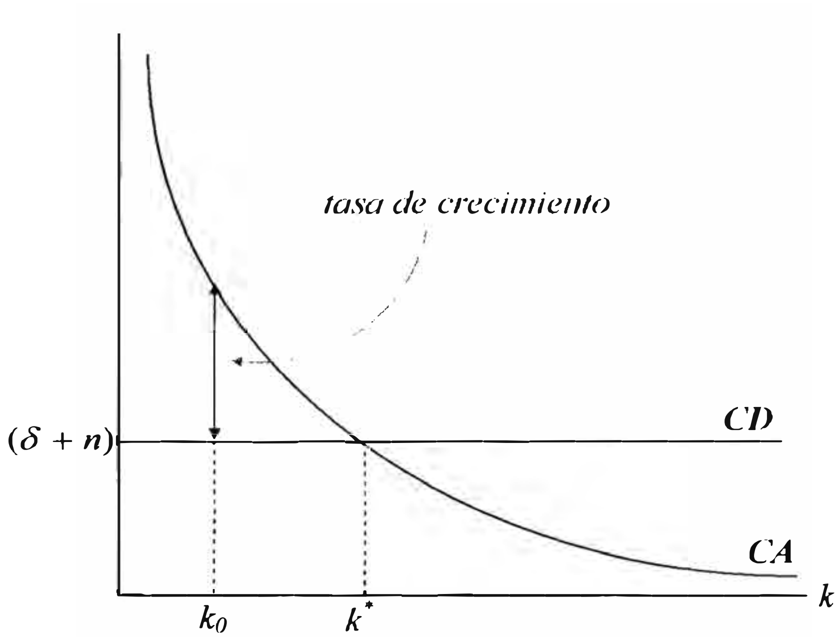

Gráfico 2.6. La Dinámica del Modelo de Solow

El stock de capital de estado estacionario que hemos estudiado se determina por la intersección de la *CA* y la *CD*, y la tasa de crecimiento se determina mediante la diferencia vertical entre las dos curvas.

Si nos ubicamos en u nivel inferior a k^* como k_0, la tasa de crecimiento es positiva, entonces el nivel de k aumenta en cada momento hasta llegar a ser igual a k* donde el crecimiento se detiene. Si estuviéramos en un nivel mayor a k* la tasa de crecimiento es negativa por lo que k empieza disminuir progresivamente hasta llegar a k*, donde la

[26] Sin entrar en detalles formales, para determinar la forma de la curva de ahorro *CA* nótese que cuando *k* tiende

reducción de detiene; entonces el estado estacionario es único y estable, pues cualquier perturbación que experimente será contrarrestada retornando nuevamente al equilibrio. La conclusión de esto es que: *Sin importar lo que suceda en el corto plazo, en el largo plazo la economía deja de crecer*.

La explicación de la caída de la tasa de crecimiento durante la transición hacia el estado estacionario se encuentra en el supuesto de que los rendimientos del capital son decrecientes; cuando el stock de capital es bajo el aumento del stock de capital genera un gran aumento en la producción, como se supone que los agentes ahorran una fracción constante del producto, el incremento del stock de capital será también elevado; como la productividad del capital es decreciente, cada nuevo incremento en la producción al aumentar el stock de capital será menor, pero al mantenerse constante la proporción destinada a la inversión los siguientes aumentos del stock de capital serán cada vez menores[27].

Los rendimientos decrecientes de los factores es uno de lo supuesto base para crear la función de producción neoclásica, es lo que hace que la función sea cóncava y que se permita la sustitución entre factores, logrando varias combinaciones entre ellos y superando los problemas derivados de la rigidez tecnológica de las funciones de producción tipo Leontief. Sin embargo genera otro problema, la imposibilidad de lograr tasas de crecimiento positivas en el largo plazo, pues es la responsable de que se vaya agotando gradualmente el impulso de los aumentos de capital provenientes de la inversión. Y como se verá, ninguna variación de los *elementos determinantes del estado estacionario* consigue modificar esta condición; en todo caso la solución contemplaría modificar la estructura de la función de

---

a cero γ_k tiende a infinito y cuando k tiende a infinito γ_k tiende a cero.

producción y considerar otro tipo de tecnología que permita suprimir los efectos nocivos de las productividades decrecientes de los factores de producción.

Aumentos en la Tasa de Ahorro

Si se desea salir del estancamiento permanente al que lleva el estado estacionario, se podría ensayar un aumento de la tasa de ahorro como una buena medida. Si la tasa de ahorro aumenta entonces la curva de ahorro se desplaza de CA_1 a CA_2 (véase Gráfico 2.7, página 30); en el corto plazo esto implica un aumento en la tasa de crecimiento, pues aún nos encontramos en k^*, lo que lleva a que el stock de capital per cápita aumente y se desplace hacia la derecha; a medida que esto ocurre la distancia entre las curvas de ahorro y depreciación se reduce debido a la existencia de rendimientos decrecientes del capital; finalmente la economía converge hacia un nuevo punto de estado estacionario con crecimiento nulo k^{**}.

En conclusión, una política de aumento de la tasa de inversión o ahorro no consigue aumentar la tasa de crecimiento a largo plazo, pese a que se logra aumentar la tasa de crecimiento en el corto plazo y se obtiene aumentos del nivel per cápita del capital y del producto.

[27] Sala I Martin, Xavier, op. cit. pp.35.

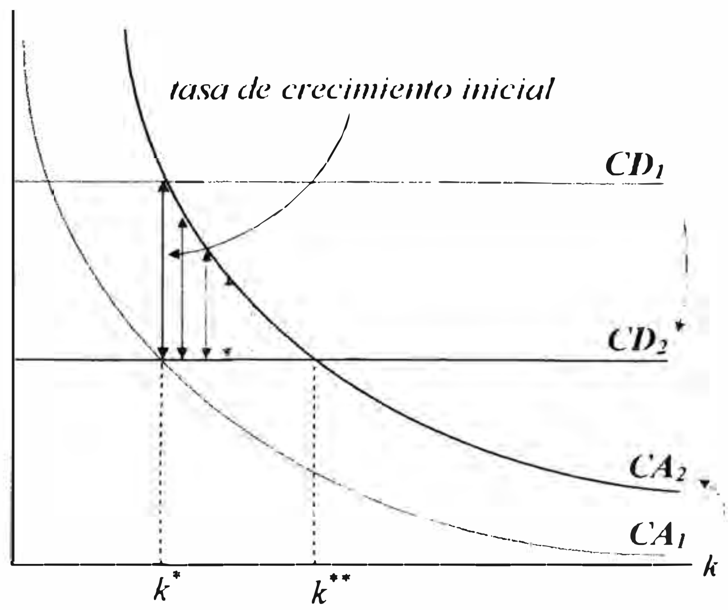

Gráfico 2.7. Aumento de la Tasa de Ahorro y Disminución de la Tasa de Crecimiento de la Población

Disminución en la Tasa de crecimiento de la Población

Si partimos de un estado estacionario arbitrario y ensayamos la política de reducir la tasa de crecimiento poblacional el primer impacto es el descenso de la curva de depreciación de CD_1 a CD_2, (véase Gráfico 2.7). Inicialmente en el corto plazo hay un aumento de la tasa de crecimiento, que al ir incrementándose el stock de capital se reducirá gradualmente hasta llegar en el largo plazo al nuevo estado estacionario k^{**} con tasa de crecimiento nula y un nivel de capital per cápita superior. Sin embargo el aumento del producto per cápita no justificaría este tipo de políticas pues probablemente a las familias les resulte más satisfactorio tener más hijos. Tampoco se puede generar crecimiento a largo plazo mediante la reducción del crecimiento de la población.

La Transición del Producto y del Consumo

Se debe analizar en este momento cómo será la transición dinámica del producto por trabajador hacia el estado estacionario; para ello debemos determinar la tasa de crecimiento del producto per cápita, el cual se expresa como[28]:

$$\gamma_y = y'/y = f'(k,1).k' / f(k,1) = [k.f'(k,1) / f(k,1)].\ \gamma_k \qquad [2.13]$$

Obsérvese que *k'.f'(k)* es la renta por trabajador ganada por los propietarios del capital, entonces *k.f'(k) / f(k)* es la participación de este tipo de renta en la renta total del trabajador; por lo tanto esta ecuación nos dice que la tasa de crecimiento del producto per cápita es proporcional a la tasa de crecimiento del capital per cápita, donde dicha proporción está expresada a través de la elasticidad del producto respecto al capital. En el modelo de Solow se considera constante la tasa de ahorro "*s*"; por lo que el consumo per cápita se determina por: $c = (1 - s).y$; por lo que la tasa de crecimiento del consumo per cápita es igual a la tasa de crecimiento del producto per cápita: $\gamma_c = \gamma_y$; esta igualdad se cumple en todo momento por lo que la dinámica del consumo per cápita será la misma que la del producto per cápita.[29]

[28] La expresión se obtiene tomando logaritmos neperianos a $y = f(k)$ y derivando respecto al tiempo utilizando la regla de la cadena.
[29] Argandoña Ramiz, Antonio op. cit. Cap.7 pp.292, 293.

2.5. El Progreso Tecnológico

La conclusión principal a la que podemos llegar es que la acumulación de capital no puede explicar el crecimiento a largo plazo en un modelo neoclásico. ¿Cómo explicar entonces las tasas de crecimiento positivas de algunos países durante los últimos 200 años? Esta dificultad se supera levantando algunos de los supuestos, en este caso observaremos la simplificación de tecnología constante. El desenvolvimiento de las variables económicas del modelo ante variaciones tecnológicas es similar a los resultados con aumentos de la tasa de ahorro.

Si aumenta el nivel tecnológico, la curva de ahorro *CA* se desplaza hacia arriba y a la derecha generando incremento en la tasa de crecimiento inmediatamente, por lo que también crece el capital, a medida que aumenta el capital el producto marginal del capital disminuye por lo que la tasa de crecimiento se reduce y vuelve a ser nula en el nuevo estado estacionario. A largo plazo si no vuelve a producirse un aumento de *A* la economía no volverá a crecer. Sin embargo en este caso no ocurre lo mismo que con la tasa de ahorro que estaba limitada por ser una fracción; al ser *A* el nivel tecnológico éste podría aumentar nuevamente y repetirse otra vez el aumento de la tasa de crecimiento; la tecnología depende del ingenio humano y como este no tiene límites podríamos pensar en aumentos recurrentes y sostenidos en el nivel tecnológico. Por lo tanto el modelo neoclásico si es compatible con el crecimiento continuado sólo si existe progreso tecnológico[30]. (véase Gráfico 2.8, página 30).

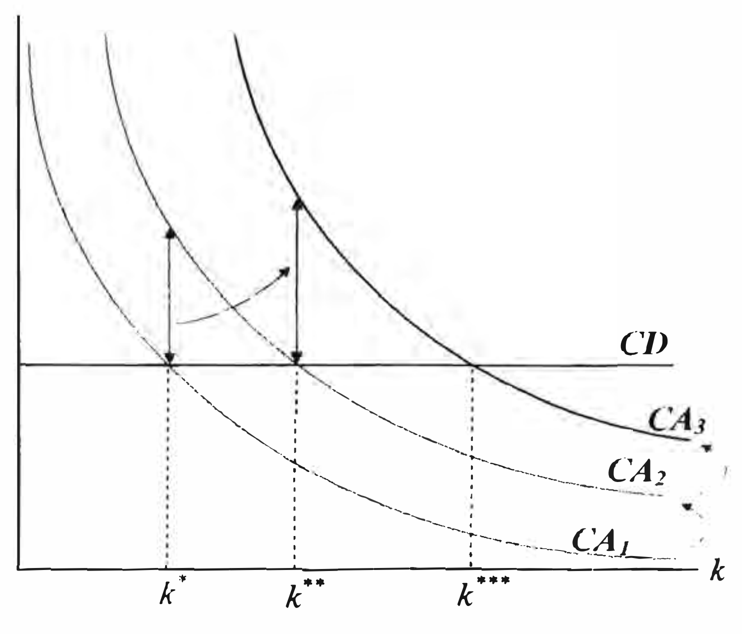

Gráfico 2.8. El Modelo Neoclásico con Progreso Tecnológico

Si estimamos que la tecnología crece a una tasa constante de "*x*", la curva de ahorro se desplaza continuamente hacia la derecha, por lo que el stock de capital del estado estacionario se desplaza también a una tasa constante "*x*"; así, "[...] la tasa de crecimiento de la economía en el estado estacionario en términos per cápita es positiva e igual a "*x*" [...]"[31].

Si consideramos que la tecnología afecta principalmente al factor trabajo haciendo que este sea más eficiente, entonces con la misma cantidad de trabajadores la producción aumenta. Phelps demostró (1962-1966) que una condición necesaria y suficiente para la existencia de estado estacionario en una economía con un progreso técnico exógeno

[30] Sala I Martin, Xavier op. cit. Cap.1 pp.40.
[31] Idem., pp.40

neutral, es que este progreso técnico sea neutral en el sentido de Harrod o potenciador del trabajo[32].

Al producto $L^\wedge = L.A$ se le suele denominar *unidades de eficiencia de trabajo*; con estas nuevas variables podemos rescribir la función de producción como:

$$Y = (K\,,\ L^\wedge) \qquad [2.14]$$

El análisis de una economía neoclásica con progreso tecnológico exógeno y constante es similar al análisis que hemos realizado hasta ahora, la diferencia es que en lugar de analizar el capital por persona, nuestro análisis se centrará ahora en el capital por unidad de trabajo eficiente, que vamos a definir como $k^\wedge = K/L^\wedge$

La deducción de la ecuación que utilizaremos es similar a la que se hizo anteriormente[33]; siguiendo la misma lógica se puede llegar a deducir la siguiente:

$$\partial k^\wedge/\partial t = s\, f(k^\wedge, 1) - (n + \delta + x)k^\wedge \qquad [2.15]$$

Esta ecuación es casi idéntica a la ecuación [2.9] y se puede construir a partir de ella un gráfico muy similar al que hemos estado utilizando (ver Gráfico 2.1, página16); asi, sabemos que: $k^\wedge = K/L.A = K/L\ .\ 1/A = k/A$,entonces $\gamma_{k^\wedge} = \gamma_k - \gamma_A$; pero como en el estado estacionario $\gamma_{y^\wedge}{*} = \gamma_{k^\wedge}{*} = 0$ y $\gamma_{y^\wedge}{*} = x$, entonces $\gamma_{y^\wedge}{*} = x$

---

[32] Sala I Martin, Xavier op. cit. Cap.4 pp. 118.

[33] Recordemos que: $\partial k^\wedge/\partial t = \partial(K/L.A)/\partial t = (K'.L.A - K.L'.A - K.L'A)/(L.A)^2 = (K'/L.A) - (L'.K/L.L.A) - (A'K/A.L.A) = K'/L^\wedge - (n + x)\, k^\wedge$.

Y como en el estado estacionario $\gamma_y* = \gamma_k* = x$, por lo tanto en el estado estacionario el capital y el producto per cápitas crecerán a la misma tasa que la tecnología, "x".

La conclusión a la que se llega es la siguiente: La economía neoclásica puede tener crecimiento positivo solo si la tecnología crece sostenidamente a una tasa determinada; la pregunta sería entonces ¿cómo crece la tecnología? Y más importante ¿cómo hacemos para manipular su crecimiento? De tal forma que aceleremos su desarrollo. El suponer que el desarrollo tecnológico es exógeno implica que no depende de ninguna variable dentro del modelo, y como bien sabemos las inversiones se dan también y fundamentalmente en desarrollo tecnológico. El modelo neoclásico entonces parece explicar muchas cosas menos el crecimiento económico.

2.6. La Convergencia: Absoluta y Condicional

Cuando se analizó la dinámica del modelo de Solow, se definió formalmente la tasa de crecimiento del stock de capital per cápita (Véase la ecuación 2.12, página 23) y se graficó esta ecuación (Veáse Gráfico 2.6, página 24); en ellos determinamos que existía una relación inversa entre la tasa de crecimiento del capital per cápita y el nivel del stock de capital per cápita; como la tasa de crecimiento de la renta per cápita γ_y es proporcional a la tasa de crecimiento del capital per cápita γ_k; el modelo predice también la existencia de una relación inversa entre la renta inicial y su tasa de crecimiento $\gamma_y = [k.f'(k,1)/f(k,1)]\ \gamma_k$, a esta relación inversa se le conoce como la *hipótesis de convergencia*.

Convergencia Absoluta

Bajo este planteamiento si las economías poseen idénticos elementos determinantes del estado estacionario (léase el nivel tecnológico, la tasa de ahorro, el crecimiento poblacional y la tasa de depreciación) y por lo tanto comparten el mismo estado estacionario, entonces aquellas que sean más pobres, es decir las que poseen un nivel de capital per cápita inicial pequeño, crecerán a tasas superiores que los países ricos (aquellas que poseen un nivel de capital per cápita inicial mayor); a esta dinámica se le conoce como *convergencia absoluta*.

Convergencia Condicional

Sin embargo, cuando las economías tienen diferentes elementos determinantes del estado estacionario y en consecuencia diferentes estados estacionarios, se habla de *convergencia condicional*; bajo estas condiciones cada economía tendrá su propia transición hacia su propio estado estacionario, asimismo, ya no será posible afirmar que aquel que tenga menor nivel inicial de stock de capital tendrá mayores tasas de crecimiento, en este caso solo se podrá afirmar que una economía crece más rápdo cuanto más alejada se encuentre de su propio estado estacionario.

2.7. Conclusiones sobre el Modelo de Solow

Después de haber revisado y analizado el modelo de crecimiento neoclásico, podemos enunciar las siguientes conclusiones:

1. El estado estacionario es único y estable, es decir cualquier perturbación positiva o negativa se ajusta en el largo plazo de tal manera que vuelve al estado estacionario. El estado estacionario en el modelo neoclásico coincide con una tasa de crecimiento de largo plazo igual a cero, es decir en el largo plazo la economía no crece.

2. Mayores tasas de ahorro e inversión contribuyen a generar crecimiento económico positivo, pero solo en el corto plazo; después se reduce al aproximarse al estado estacionario, aunque a un nivel de stock de capital per cápita mayor.

3. Menores tasas de crecimiento poblacional y de depreciación contribuyen a generar crecimiento económico positivo, pero solo en el corto plazo; luego esta se reduce al ir hacia el estado estacionario, aunque a un nivel de stock de capital per cápita mayor.

4. La razón por la que el modelo neoclásico presenta tasas de crecimiento decrecientes o de tendencia hacia el estado estacionario hasta llegar a ser cero, se encuentra en el supuesto de rendimientos decrecientes de los factores que período tras período merman el rendimientos de estos, generando incrementos cada vez menores del producto, y en la ausencia de rendimientos crecientes a escala.

5. Ahorrar demasiado es malo, pues hay un sacrifico alto del consumo; sin embargo el ahorrar poco no lo podemos determinar con seguridad, pues el modelo carece de ecuaciones intertemporales que nos permitan comparar consumo presente y futuro para evaluar la magnitud del sacrificio.

6. El modelo de crecimiento neoclásico admite tasas de crecimiento positiva de manera continuada en el largo plazo, si y sólo si, existe progreso tecnológico continuado que crece a una tasa constante, sin embargo no logra explicar como se forma o genera el progreso tecnológico.

7. El modelo de Solow da una respuesta a la pregunta normativa de cuál es la tasa de ahorro óptima; a través de la Regla de Oro de la acumulación.

8. El modelo no presenta ninguna referencia de la duración del proceso de acumulación y crecimiento, no está bien definida en la práctica que significa el largo plazo dentro del modelo, podrían tratarse de muchos años, lo que pondría en debate su aplicabilidad.

9. Solamente el progreso tecnológico potenciador del trabajo es consistente con la existencia del estado estacionario.

3. Crecimiento Endógeno: El Modelo AK

Hemos visto en el capítulo anterior que el modelo neoclásico no logra explicar satisfactoriamente el crecimiento económico a largo plazo, pues una de sus principales conclusiones es que el crecimiento depende del progreso tecnológico, variable que el modelo no logra explicar, quedando sujeto entonces a los caprichos de toda variable exógena. Lecaillon (1995) y Artus (1993) enunciaron tres motivos principales por los cuales los modelos neoclásicos no proporcionaban conclusiones satisfactorias:

1. "Resulta muy difícil admitir que el esfuerzo inversor, los procesos de investigación y el desarrollo (I+D), el gasto público, la fiscalidad, u otras variables o medidas de política económica no tengan ningún efecto a largo plazo sobre la tasa de crecimiento."

2. "Los modelos neoclásicos no permiten conocer las causas por las cuales las tasas de crecimiento son diferentes entre los países."

3. "No resulta explicado de una forma convincente por qué no se producen movimientos de capital de los países ricos hacia los pobres, en los que la productividad marginal del capital es mayor y, por tanto, de acuerdo con las hipótesis neoclásicas dichos flujos deberían ser mayores."[34]

Los modelos de crecimiento endógeno surgen para superar estos problemas, una forma es alejarse de los supuestos neoclásicos y dentro de ellos revisar las características de la función de producción, en particular dentro de este capítulo redefinir el tipo de tecnología.

El modelo AK es la presentación más sencilla dentro de los denominados *modelos de crecimiento endógeno*, en la que se recoge una función de producción lineal. Por supuesto que han sido muchos los que consideraron un tipo de tecnología de este tipo, "[...]Aunque algunos economistas utilizaron en un momento u otro algún tipo de tecnología lineal como Von Neuman (1937), Eaton (1981) o Cohen y Sachs(1986),la introducción del modelo lineal en la literatura del crecimiento endógeno se atribuye a Rebelo (1991) [...]"[35]. Precisamente el modelo que presentamos, en su versión más sencilla, es una síntesis del primer modelo que desarrolló Sergio Rebelo.

La presentación formal del modelo con tecnología AK parte de la construcción de una función de utilidad intertemporal que actualiza consumo per cápita en un horizonte infinito, a partir de esta se deducen relaciones y conclusiones dentro del modelo; como el fin fundamental de esta monografía es presentar el modelo neoclásico y las correcciones que sobre este hace el modelo con tecnología AK a fin de mejorar sus conclusiones y utilidad;

---

[34] Bahmani Oskooee, M., Galindo, Miguel Angel y Niroomand, Farthang. "Crecimiento Ahorro e Imposición", pp.64

[35] Sala I Martin, Xavier. op. cit. Cap.5 pp.127

prescindiremos de estos pasos y centraremos nuestro análisis principalmente sobre los cambios que el desarrollo del modelo introduce dentro del modelo de Solow[36].

3.1. Desarrollo del Modelo

Existen varias formas de incorporar la tecnología AK en las teorías del crecimiento económico; considerar al trabajo como un tipo de capital, examinar la relación del capital privado y los bienes públicos, considerar rendimientos crecientes de escala o aceptar la coexistencia de capital físico y humano[37].

El trabajo que desarrollo Sergio Rebelo considera que el trabajo es una forma de capital; así para que un ser humano pueda ser productivo y generar efectivamente trabajo, es necesario destinar a él una cantidad de recursos, como alimentos, educación, vestido; otorgados por sus padres, las empresas, etc., proporcionados en términos generales por la sociedad; en definitiva se le deben proporcionar una serie de recursos que permitan que las capacidades del hombre se desarrollen y sean útiles. Necesita el factor trabajo entonces que se le aplique un nivel de inversión; entiéndase entonces que dentro de nuestra economía debemos sacrificar consumo presente para "invertirlo" en los seres humanos para que aumenten su productividad presente y por sobre todo en el futuro; no resulta pues relevante el trabajo bruto, sino el trabajo de calidad[38]. Todo esto independientemente de las inversiones de capital.

---

[36] Si se desea hacer una revision minuciosa de las deducciones matemáticas, puede revisarse con mucho beneficio el libro "Apuntes de Crecimento Económico" de Sala-i-Martin, capítulo 5.
[37] Argandoña Ramiz, Antonio. op. cit. Cap.9 pp.360-363
[38] Sala I Martin, Xavier. op. cit. Cap.2 pp.52

Recuérdese que en el capítulo anterior supusimos que el trabajo crecía a la tasa "*n*" y que no requería de ninguna parte una asignación de recursos, se suponía que la fuerza laboral crecía y se desarrollaba de manera gratuita, sin consumir recursos. Por lo que se ha expuesto el factor trabajo crece en realidad de manera similar al capital, sacrificando recursos presentes con la intención de recuperarlos en el futuro. Entonces el capital y el trabajo son dos tipos diferentes de capital, llámense capital físico y capital humano. Podemos definir entonces una función de producción, donde A es una constante, de la forma:

$$Y = A.K \qquad [3.1]$$

Por el tipo de función que hemos construido, esta ya no es una función de producción neoclásica, pues no cumple con todas las condiciones enumeradas en el capítulo 2, así[39]:

- Presenta rendimientos constantes a escala $A(\lambda.K) = \lambda.A.K = \lambda.Y$; cumple entonces la primera condición de las funciones neoclásicas.

- Tiene rendimientos positivos pero no decrecientes del *capital*, la segunda condición requiere que la primera derivada sea mayor que cero, lo cual se cumple $\partial F/\partial K = A > 0$; pero la segunda derivada es igual a cero, cuando debería ser negativa; cumple parcialmente la segunda condición.

[39] Ibid., pp.52

- Debe cumplir las condiciones de Inada, como el producto marginal del capital es igual a A, no cumple con estas condiciones.

Se introduce ahora la función de producción AK en el modelo de Solow, considerando que el resto del modelo permanece inalterado. La ecuación fundamental del modelo es entonces la misma, solo que ahora podemos reemplazar directamente la función de producción puesto que conocemos su forma; como la ecuación fundamental está expresada en términos per cápita, utilizaremos el modelo AK en su forma intensiva, si:
$y = Y/L = A.K/L = A.k$; entonces:

$$k' = sA.k - (n + \delta)k \qquad [3.2]$$

Para evaluar el modelo en términos dinámicos dividimos por k cada miembro y obtenemos la tasa de crecimiento del capital per cápita:

$$\gamma_k = k'/k = sA - (n + \delta) \qquad [3.3]$$

Al analizar la ecuación, se observa que la tasa de crecimiento es constante, la forma que tiene la curva de ahorro *CA* en este modelo es la de una recta horizontal (a diferencia del modelo neoclásico que era una curva decreciente), la curva de depreciación CD tienen la forma habitual. Al ser ambas “curvas” rectas horizontales la diferencia se repetirá en cada momento, (véase Gráfico 3.1, página41).

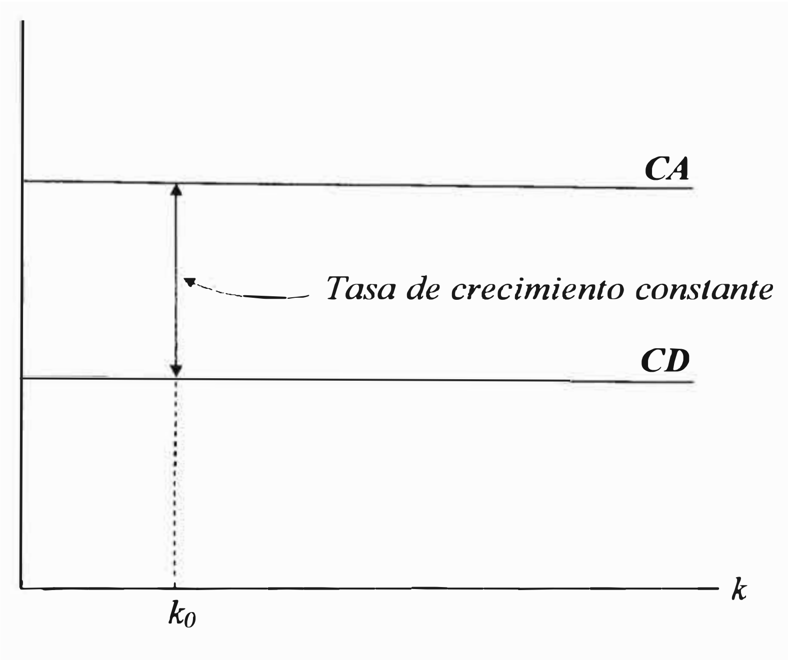

Gráfico 3.1. El Modelo AK

La tasa de crecimiento constante del stock de capital será $\gamma^*_k = sA - (n + \delta)$ y dado que $y = Ak$, entonces la tasa de crecimiento per cápita crecerá también a dicha tasa, el consumo crecerá también a esa tasa; en resumen las tasas de las variables per cápita crecerán según[40]:

$$\gamma_c = \gamma_y = \gamma_k = \gamma^* = sA - (n + \delta)$$

Del mismo modo las variables agregadas crecerán a la tasa[41]:

$$\gamma_C = \gamma_Y = \gamma_K = \gamma^* = sA - \delta$$

[40] Ibid., pp.53, 54
[41] Recordar que: $k = K/L$ entonces $K = k.L$ aplicando logaritmos y derivando respecto al tiempo: $\gamma_K = \gamma_k + \gamma_L$ *entonces* $\gamma_K = \gamma_k + n$ *entonces* $\gamma_K = sA - \delta$

Si suponemos que la economía es lo suficientemente productiva como para generar ahorro e inversión que supere a la depreciación efectiva, entonces la tasa de crecimiento será constante y positiva siempre; pero si la depreciación resulta superior a la inversión que realiza la economía entonces la tasa de crecimiento será negativa, y no saldrá de ese estado.

Variaciones en las Tasas de Ahorro, Crecimiento Poblacional y Depreciación y el Progreso Tecnológico

Tratándose de la diferencia de las curvas de ahorro y de depreciación lo que determina la tasa de crecimiento de largo plazo en el modelo AK un incremento de la tasa de ahorro eleva la curva de ahorro verticalmente, esto aumenta la tasa de crecimiento del stock de capital y a su vez la tasa de crecimiento de la economía, si la tasa de ahorro se reduce, también lo hace la tasa de crecimiento. Un aumento o reducción respectivamente del nivel de progreso tecnológico produce los mismos resultados.

Si se registra un aumento de la tasa de crecimiento poblacional la curva de depreciación se traslada hacia arriba, acercándose a la curva de ahorro, lo que disminuye la tasa de crecimiento del stock de capital y del producto; la implantación de políticas que busquen reducir la tasa de crecimiento poblacional resultará beneficioso para el mejoramiento de la tasa de crecimiento del stock de capital y del producto. Resultados similares se obtienen si se produce un aumento o disminución respectivamente de la tasa de depreciación. Estos resultados se pueden analizar gráficamente (véase Gráfico 3.1, página 41).

3.2. La Tecnología AK y la Transición Dinámica

Como se ha visto el modelo AK no presenta transición, de tal manera que se podría argumentar que las tasas de crecimiento per cápita serían independientes de los valores iniciales del stock de capital per cápita (*k*) y del producto per cápita (*y*) de cualquier economía; sin embargo se puede diseñar a partir de lo que se ha estudiado un modelo de crecimiento endógeno de tipo tecnología AK que nos muestre como evoluciona la tasa de crecimiento. Para poder analizar la transición dinámica es necesario introducir los rendimientos decrecientes respecto del capital, que recogía el modelo neoclásico de Solow. La función de producción que reúne las condiciones indicadas es del tipo:

$$Y = A.K + B.K^{a}.L^{1-a} \qquad [3.4]$$

Donde $B.K^{a}.L^{1-a}$ satisface las propiedades de la función de producción neoclásica y conlleva el proceso de convergencia, mientras que la parte AK generará crecimiento endógeno; en términos per cápita la función sería:

$$y = f(k,1) = A.k + B.k^{a} \qquad [3.5]$$

Recordando del capítulo 2 en la sección 2.4 se analizó la dinámica del modelo neoclásico; utilizando la ecuación de la tasa de crecimiento del stock de capital per cápita, enunciada en [2.12] y que se reproduce aquí.

$$k'/k = s.f(k,1)/k - (n + \delta) \qquad [3.6]$$

Atendiendo a la forma de nuestra nueva función de producción y conforme a la ecuación [3.6] la gráfica que recoge la transición dinámica del modelo de crecimiento endógeno que se ha construido se muestra en el Gráfico 3.2[42].

En el se observa como evoluciona la tasa de crecimiento del stock de capital en el largo plazo, cuando "*k*" tiende a infinito la curva de ahorro *CA* tiende a *sA*, entonces la tasa de crecimiento será *sA* - *(n + δ)*. La principal aportación o conclusión que resulta del análisis del Gráfico 3.2 es que si dos economías difieren únicamente en el nivel de stock de capital per cápita inicial, entonces aquella que tenga el menor nivel de dicho stock de capital crecerá más rápidamente en términos per cápita[43].

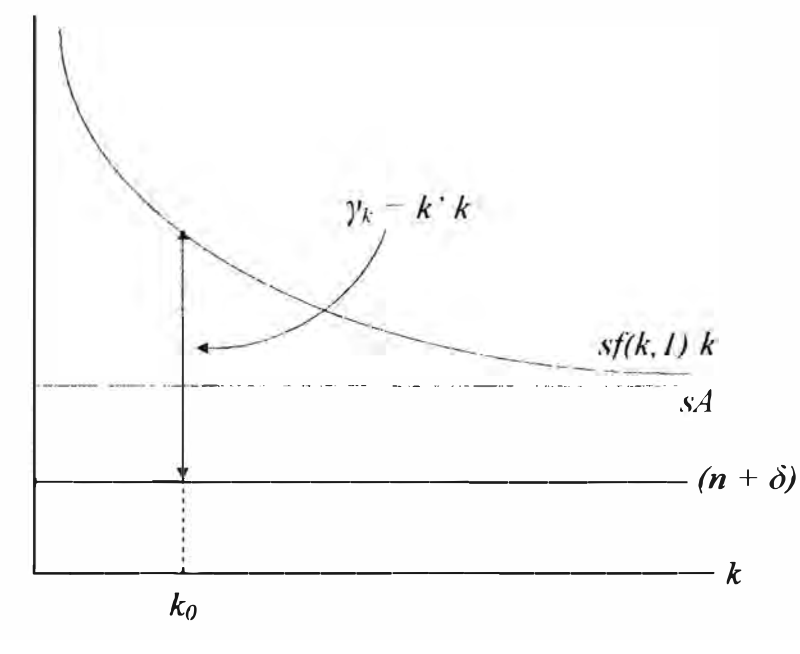

Gráfico 3.2. Transición Dinámica en un Modelo de Crecimiento Endógeno

[42] La función es asintótica en *sA*, esto puede demostrarse fácilmente tomando límites cuando k tiende a cero y utilizando la función de [3.5].

3.3. La Difusión Tecnológica: El Catch-Up

Si bien es cierto una de las conclusiones a las que se ha llegado con respecto al modelo AK, es la ausencia de convergencia; considerando el flujo de progreso tecnológico entre las economías es posible hablar de la existencia de convergencia.

El progreso tecnológico logrado por cualquier economía luego de un período de tiempo es difundido hacia las demás, este proceso de expansión es conocido como *proceso de difusión intemacional de tecnología* o *Catch-Up* tecnológico. Se supone que este es un proceso gradual, por lo que el proceso de convergencia del modelo neoclásico tradicional se retrasará; asimismo, este proceso introducirá la posibilidad de convergencia en los modelos de crecimiento endógeno, fundamentalmente en aquellos que recurran a la endogenización del progreso tecnológico[44].

La difusión internacional de la tecnología juega un papel fundamental en el crecimiento económico y en los procesos de convergencia entre países; bajo este planteamiento la diferencia tecnológica existente entre el *país líder*, que crea tecnología, y el *país seguidor*, que la capta e imita, se iría reduciendo; por lo tanto, cuanto mayor sea la diferencia tecnológica entre el líder y el seguidor, y gracias a la difusión de la tecnología internacionalmente disponible, mayores serán las mejoras potenciales que se podrán introducir en los procesos productivos del país seguidor, y por tanto mayor será también el crecimiento potencial de éste frente al del país líder.

[43] Argandoña Ramiz, Antonio. op. cit. Cap.9 pp.377-379
[44] Galindo Martín, Miguel y Escot Mangas Lorenzo. "Difusión Tecnológica y Modelos de Crecimiento", pp.3

"Así pues, y desde el punto de vista de la política económica, sería conveniente facilitar el proceso de difusión tecnológica eliminando cualquier traba o freno al proceso catch-up tecnológico efectivo entre líderes y seguidores, ya que de lo contrario se frenaría el progreso de los países más pobres y la convergencia entre las naciones."[45]

Si consideramos que inicialmente dos países poseen niveles tecnológicos distintos y además stocks de capital inicial diferentes, donde la mayor tecnología la posee el líder; a través de la difusión tecnológica o catch-up el país seguidor logrará obtener una tecnología similar y alcanzará niveles de crecimiento semejantes o próximos a los del líder, llegando entonces a experimentar un proceso de convergencia, y que dependiendo de la facilidad para transferir tecnología nos encontraremos con convergencia condicional o absoluta. A manera de resumen y considerando los escenarios mencionados:

Cuando Existe Difusión Tecnológica

- "[...], las tasas de progreso técnico en el estado estacionario para ambos países coinciden."

- "Debido a la transferencia internacional de tecnología se obtiene convergencia en tecnología y en términos de tasas de crecimiento de la renta per cápita."

- "Como inicialmente y hasta que se alcanza la convergencia tecnológica el país seguidor está creciendo a una tasa menor que la del país líder, el modelo predice una divergencia inicial en los niveles de renta per cápita. Una vez que

[45] Galindo Martín, Miguel, op. cit. pp.4

ambos países alcancen la misma tecnología crecerán a la misma tasa, con lo que la brecha en términos de renta per cápita existente en ese momento se mantendrá constante a largo plazo."

Cuando no existe difusión tecnológica

- "No existe convergencia tecnológica por lo que la tasa de crecimiento del líder es mayor que la tasa de crecimiento del seguidor y el proceso de divergencia en términos de renta per cápita se perpetúa a largo plazo (la renta del seguidor es cada vez menor en relación a la del líder)."[46]

3.4. Conclusiones sobre el Modelo *AK*

Después de haber revisado y analizado el modelo de crecimiento con tecnología AK exponemos las siguientes conclusiones:

1. La tasa de crecimiento de la economía puede ser positiva en el largo plazo sin necesidad de tener que recurrir a una variable exógena que crece continuamente.

2. La tasa de crecimiento puede verse afectada de manera definitiva en el largo plazo por variaciones en las tasas de ahorro e inversión; asimismo, también influyen en el crecimiento de largo plazo las modificaciones de la tasa de crecimiento poblacional, la tasa de depreciación y el progreso tecnológico.

---

[46] Galindo Martín, Miguel, op. cit. pp.15,16

3. No hay transición hacia el estado estacionario ya que siempre se crece a una tasa constante iguala a $\gamma^* = sA - (n + \delta)$ sin importar el valor que tome el stock de capital. La tasa de crecimiento de todas las variables es siempre constante, la razón es la ausencia de los rendimientos decrecientes del capital; la variación del producto que se obtiene al incrementar capital es siempre la misma, por lo que las inversiones mantienen también el mismo nivel, esto hace que la tasa de crecimiento permanezca constante. O sea "la tasa de crecimiento de la economía permanece constante a pesar de que el stock de capital aumente"[47].

4. El modelo AK predice que si el stock de capital disminuye por alguna causa exógena (guerra, desastres naturales, etc.) la economía no crecerá transitoriamente más rápido para volver a la trayectoria de acumulación anterior, sino que la tasa de crecimiento continuará siendo la misma, entonces la pérdida sufrida se hará permanente, "[...] los efectos de una recesión temporal serán permanentes"[48].

5. Es posible hablar de convergencia entre las economías si se considera el proceso de difusión internacional de la tecnología; a través del cual el progreso tecnológico es irradiado hacia otras economías, experimentando inicialmente un leve proceso de divergencia hasta que ambas alcancen la misma tecnología. Hay que considerar también la posibilidad de que esta difusión tecnológica no se presente con la fluidez necesaria, manifestándose entonces un proceso de divergencia que podría perpetuarse en el largo plazo.

---

[47] Sala I Martin, Xavier, op. cit. Cap.2 pp.54
[48] Argandoña Ramiz, Antonio, op. cit. Cap.9 pp.367

4. Extensiones, Apuntes y Notas

Las bases de los modelos de crecimiento que nos ocupa han sido expuestas en los capítulos precedentes, sin embargo siempre quedan temas que complementan lo analizado o permiten ahondar en aquel tema que nos cautivo de particular manera; este capítulo recoge algunos apuntes que pueden servir para lograr un mejor entendimiento del tema principal, satisfacer alguna caprichosa curiosidad o alentar a seguir buscando los determinantes del crecimiento económico.

4.1. Extensiones del Modelo de Solow

En su "Contribución a la Teoría del Crecimiento Económico" Solow no solo presentó sus ideas respecto al problema del crecimiento, sino que realizó varios ejercicios, consideró y expuso modificaciones al modelo originalmente planteado; estimó resultados ante el cambio a funciones de las variables exógenas entre otras, las más destacables son:

La Oferta de Trabajo como Función del Salario Real [49]

[49] Solow, Robert M., "Una Contribución a la Teoría del Crecimiento Económico" en "Lecturas Sobre la Teoría Económica del Desarrollo" sección 6.Extensiones del Modelo pp.150.

En el modelo original básico de Solow, la oferta de trabajo se determinaba por variables exógenas; donde la curva de oferta de trabajo era perfectamente inelástica con respecto al salario real, era de la forma $L = L_0\, e^{nt}$. En sus extensiones Solow consideró una función de tipo:

$$L = L_0\, e^{nt}\, (w/p)^h$$

Propensión al Ahorro Variable [50]

Solow consideró inicialmente la propensión al ahorro como una variable exógena, entonces la propensión media y marginal serían iguales y constantes, una concordancia con Keynes. Sin embargo como extensión del modelo Solow consideró que la propensión al ahorro podría ser una función del stock de capital per cápita, lo que modifica la forma de la función de ahorro y cuya formalización a través de la ecuación fundamental de Solow sería:

$$k'/k = s(k)\, f(k,1) - (n + \delta)k$$

De donde se pueden derivar diversas formas, pero el efecto neto tiende a estabilizarse: "[...] cuando la relación capital-trabajo es alta, el ahorro se frena, y cuando es baja, el ahorro se ve estimulado."[51].

Crecimiento Variable de la Población [52]

Inicialmente se presentó la tasa de crecimiento de la población como un dato exógeno y equivalente a "*n*"; pero si avanzamos un poco más y decimos que la tasa de crecimiento de

[50] Solow, Robert M. op. cit. pp.151, 152.

la población depende solamente del ingreso per cápita "*y*" y como $y = f(k)$, entonces $n = n(k)$; por lo que la ecuación fundamental de Solow será:

$$k'/k = s\,f(k,1) - (n(k) + \delta)k$$

La diferencia principal es que ahora la curva de depreciación deja de ser una recta que parte del origen para convertirse en una curva que parte del origen; cuya forma podría originar equilibrios estables e inestables.

4.2. El Financiamiento de la Tecnología en el Modelo de Solow

Es posible sacar otras conclusiones sobre el modelo de Solow si lo sometemos a otros criterios, por ejemplo si a la función de producción le aplicamos el teorema de Euler, resulta:

$$F(K,L) = K\,\partial F/\partial K + L\,\partial F/\partial L$$

Los postulados neoclásicos suponen competencia perfecta, y en este escenario la productividad marginal de cada factor es igual al precio de cada factor, por lo que $w = \partial F/\partial L$ y $r = \partial F/\partial K$, reemplazando en la ecuación anterior tenemos:

$$Y = F(K,L) = K\,r + L\,w$$

La interpretación de esta ecuación es que después de pagarles a los trabajadores por su trabajo y de pagar a los inversionistas por su inversión el producto se acaba;

[51] Solow, Robert M. op. cit. Parte 6. Extensiones del Modelo pp.153.

entonces ya no quedan más recursos para financiar la mejora tecnológica que enuncia el modelo como única forma para lograr crecimiento. El modelo entonces esta concebido para depender del crecimiento exógeno de la tecnología, pues él mismo vaticina la imposibilidad de lograr crecimiento a largo plazo, por la propia estructura del modelo y ahora comprobamos que además no hay un espacio para el financiamiento del progreso tecnológico; esto nos evidencia más la necesidad de abandonar algunos supuestos del modelo neoclásico y concretar una explicación más satisfactoria del crecimiento económico.[53]

4.3. Tipos de Progreso Tecnológico

Como se ha indicado sólo considerando progreso tecnológico exógeno es posible que se logren tasas de crecimiento sostenibles en el lago plazo; sin embargo habría que considerar que tipo de progreso tecnológico era el necesario. Algunas innovaciones permiten ahorrar capital, en el sentido de que se requiere menos capital en relación con el trabajo; otra son ahorradoras de trabajo, en la medida que se necesita menos trabajo en relación con el capital, y otras que no reducen el uso de ningún factor en relación con los demás, el progreso técnico neutral o insesgado. Hay principalmente dos tipos de progreso técnico neutral, definidas por Hicks y Harrod.

Hicks define que una innovación tecnológica es neutral con respecto al capital y al trabajo, si y sólo si, la relación entre las productividades marginales de los factores (F_K / F_L) se mantenía constante para una proporción dada de capital y trabajo; entonces una

[52] Ibid., pp.153, 154.
[53] Sala I Martin, Xavier, "Apuntes de Crecimiento Económico" Cap.1 pp.43.

innovación tecnológica es ahorradora del trabajo si el producto marginal del trabajo aumenta más que el producto marginal del capital cuando la relación entre capital y trabajo permanece constante; y de manera recíproca para una innovación ahorradora de capital. Este tipo de neutralidad afecta a la función de producción multiplicando desde fuera a las posibles combinaciones de los factores, es decir: $Y = A\ F(K, L)$[54].

Harrod define que una innovación tecnológica es neutral si las participaciones relativas del capital y del trabajo en la renta nacional ($K.F_K / L.F_L$) permanecen constantes para una determinada relación de capital y producto. Dentro de esta concepción a las innovaciones tecnológicas que definen funciones de producción de la forma $Y = F(K, A.L)$ se les conoce como progreso técnico *potenciador de trabajo*; recíprocamente a las funciones que se definen como $Y = F(A.K, L)$ se les conoce como progreso técnico *potenciador del capital*[55].

4.4. El Modelo de Solow-Swan Ampliado

El llamado modelo de Solow-Swan ampliado es una variación del modelo original neoclásico, presentado por Mankiw, Romer y Weil (1992), este modelo lo que hace es incluir un factor más dentro de la función de producción. Consideran como factores productivos el trabajo, el capital definidos de forma convencional y el capital humano (identificado como *H*), todas ellas combinadas según una función de producción de tipo Cobb-Douglas.

---

[54] Ibid. pp.117.
[55] Ibid. pp.118.

Suponen además que el capital físico y el humano se pueden acumular detrayéndolos de la producción. Esta variación del modelo de Solow-Swan se creó inicialmente para demostrar que la participación del capital era mayor de lo que arrojaban los datos en el modelo y se asemejen más a los datos estadísticos; una forma de lograr eso era ampliar el concepto de "capital" hacia lo que han denominado capital humano[56].

4.5. El Residuo de Solow

El modelo de Solow puede usarse también para medir la contribución de cada factor a la tasa de crecimiento de la economía; esta aplicación del modelo es conocida como *contabilidad del crecimiento*. Todo inicia con la función de producción convencional de la que se ha extraído la variable tecnológica solo para simplificar la deducción, su forma sería: $Y = A.F(K,L)$.

Tomando logaritmos, derivando respecto al tiempo y con manipulación algebraica se llega a la siguiente relación en términos agregados:

$$\gamma_Y = \gamma_A + (\alpha)\,\gamma_K + (1\text{-}\alpha)\,\gamma_L$$

Que indica que la tasa de crecimiento de la producción es igual a la suma de la tasa de crecimiento tecnológico o de la *productividad total de los factores*, que es la que resume todo aquello que contribuye al crecimiento pero no puede ser medido a través de las variables usuales, la acumulación de capital ponderada por la participación del capital en la

[56] Ibid. pp.48.

producción (α)[57] y la tasa de aumento de la cantidad de trabajo ponderada por la participación del trabajo en la producción (1-α); pero como no es observable entonces la tasa de crecimiento de la productividad total de los factores se obtienen como residuo; esta tasa de crecimiento es conocida como el Residuo de Solow.

$$\gamma_A = \gamma_Y - [(\alpha)\ \gamma_K + (1-\alpha)\ \gamma_L]$$

De modo similar, expresando las variables en términos per cápita y considerando la tasa de crecimiento de la población igual a "*n*", se puede escribir:

$$\gamma_y = \gamma_A + (\alpha)\ \gamma_k \qquad \text{entonces} \qquad \gamma_A = \gamma_y - (\alpha)\ \gamma_k$$

[57] En una función de producción de tipo Cobb-Douglas, estas ponderaciones son los exponentes asociados a cada factor, además vienen a ser también las elasticidades factor de la producción

5. Conclusiones, Comentarios y Cuestiones

Se presentó inicialmente el modelo neoclásico para analizar la problemática del crecimiento económico bajo su concepción; a partir de los supuestos que este planteaba se llegó a conclusiones sobre el comportamiento de la dinámica del crecimiento. A fin de superar las limitaciones inherentes a este modelo así como el pronóstico de la imposibilidad de lograr crecimiento económico sostenido en el largo plazo sin estar sujetos a variables exógenas, se presento el modelo de tecnología *AK* que cambia la forma de la función de producción; en base al funcionamiento y planteamientos de ambos modelos es que se exponen las siguientes conclusiones, se exponen algunos comentarios y se plantean ciertas cuestiones:

1. El modelo de crecimiento neoclásico presenta dentro de las grandes simplificaciones que hace un escenario donde las economías tienden hacia el estado estacionario sin crecimiento; sin importar lo desarrolladas o subdesarrolladas que se encuentren el modelo predice que en el largo plazo las desviaciones se corregirán por el modelo mismo; superando de esta manera la inestabilidad del modelo de Harrod-Domar y su equilibrio *al filo de la navaja*; debido a dejar de considerar una tecnología con proporciones fijas y pasar a la sustituibilidad de factores. Sin embargo también demuestra lo ineficaz de cualquier medida que intente lograr tasas de crecimiento sostenidas a largo plazo, salvo que se considere progreso tecnológico recurrente manifestado a través de una tasa de crecimiento *exógena* de la tecnología, pronosticando entonces un estado de estancamiento en el largo plazo.

Como se ha manifestado anteriormente, lo que permite superar el problema inicial, las consideraciones neoclásicas de la función de producción y con ellas los rendimientos decrecientes de los factores; es lo que termina explicando la imposibilidad del crecimiento en el largo plazo.

2. El considerar un modelo en el que el crecimiento dependa fundamentalmente de una variable exógena no resulta de mucha satisfacción, más aún si consideramos que aquella es el progreso tecnológico, asociado a las capacidades humanas, que es una variable de difícil medición. Un modelo con estas características no ayuda a resolver el problema fundamental de la teoría del crecimiento; en todo caso las respuestas que da no son alentadoras. El modelo de Solow resulta siendo básicamente un indicador de la tendencia temporal de las variables. Como lo señalo Arrow "[...] Ahora bien, por más necesaria que sea en la práctica, una tendencia temporal es una mera confesión de ignorancia y, lo que es peor desde un punto de vista práctico, no se trata de una variable de política económica."[58].

3. El modelo de crecimiento AK no pretende ser un modelo realista, sino simplemente, un instrumento pedagógico, puesto que se trata del modelo más sencillo de crecimiento endógeno, y que permite ir abandonando los supuestos restrictivos del modelo neoclásico, aunque sin apartarse mucho de ellos como por ejemplo considerar un escenario de competencia perfecta.

4. El principal aporte del modelo *AK* es la posibilidad de lograr crecimiento sostenido en el largo plazo sin necesidad de depender de alguna variable exógena como era la predicción del modelo neoclásico, de esta forma se le da independencia al crecimiento y ya no se le amarra a una variable que no es posible controlar. El modelo propone que el crecimiento positivo es sostenible indefinidamente, sin la necesidad de que alguna variable exógena como la tecnología crezca a una tasa determinada, en el límite de la especulación podría incluso no crecer y aún así darse el crecimiento. Sin embargo, también podría presentarse el caso de que el ahorro e inversión no sean los suficientes como para compensar la depreciación efectiva, estaríamos entonces frente a un *"decrecimiento"* sostenido, pues ya no existe la transición del modelo neoclásico que nos permitía salir de las tasas negativas hacia el estado estacionario con crecimiento nulo.

Resulta ser un escenario bastante gris para las economías que aún no logran remontar con firmeza el subdesarrollo; quedaría esperar entonces que la difusión internacional de la tecnología o *catch-up* nos permita repuntar nuestros actuales niveles de crecimiento, sin embargo, la rigideces y demoras en la transferencia tecnológica podrían hacer que la brecha tecnológica se mantenga o ensanche, condenándonos a un proceso de divergencia en nuestras rentas per cápita a largo plazo.

5. Ninguno de los dos modelos se ha ocupado explícitamente de dar alguna idea del tiempo que tomará realizar la transición de un estado a otro. Debe considerarse la cantidad de años que pueden estar involucrados en el proceso de crecimiento. La

[58] Sala I Martin, Xavier op. cit. Tercera parte pp.125.

duración de la transición de un nivel de capital hacia otro o la transición hacia el estado estacionario no esta resuelta aún de manera convincente; resulta importante e interesante pensar en las generaciones que podrían estar en juego; si dicho período resultase muy largo sería legitimo que las actuales generaciones muestren su disconformidad por lo lejano y no disfrutable de los objetivos, lo que da pie a pensar de la verdadera utilidad de estas teorías, si los resultados no se verán sino muchos años después. Recordemos lo que manifestaba Keynes respecto del largo plazo: "En el largo plazo todos estaremos muertos". Así también lo manifestado por Samuelson P. y Modigliani F. "queremos poner de relieve los siglos que pueden estar en juego, y subrayar que tanto aquí como anteriormente, nos estamos siempre refiriendo a hipotéticas situaciones de crecimiento proporcional que nunca serían alcanzadas plenamente a partir de otras situaciones, y a las que únicamente nos podemos aproximar después de períodos de tiempo tan largos que confieren a los modelos un realismo dudoso"[59].

[59] Galindo Martín, Miguel Angel y Malgesini, Graciela "Crecimiento Económico: Principales Teorías desde Keynes" Parte 3 pp.42.

Bibliografía

Argandoña, Antonio; Gómez, Consuelo y Mochón, Francisco. "Macroeconomía Avanzada I", 1ra.Edición, España, Mc Graw Hill, 1996, 460 pp.

Argandoña, Antonio; Gómez, Consuelo y Mochón, Francisco. "Macroeconomía Avanzada II", 1ra.Edición, España, Mc Graw Hill, 1997, 460 pp.

Bahmani Oskooee, M., Galindo, Miguel Angel y Niroomand, Farthang. "Crecimiento Ahorro e Imposición", 1998, documento obtenido por internet en la página web: www.minhac.es/Publicaciones/papelest/98/pt20_98.pdf

Barzola Flores, Mariela. Informe de Suficiencia:"Acerca de la Nueva Economía", Universidad Nacional de Ingeniería, 2002, 40 pp.

Bonifaz, José Luis y Winkelried, Diego. "Matemáticas para la Economía Dinámica", 1ra.Edición, Perú, Centro de Investigación de la Universidad del Pacífico (Apuntes de Estudio:44), 2001 357 pp.

Chiang, Alpha C. “Elements of Dynamic Optimization”, United States of America, McGraw Hill, 1992, 327pp.

Fernández Baca, Jorge y Seinfeld, Janice. “Capital Humano, Instituciones y Crecimiento”, Biblioteca Universitaria, 1ra.Edición, Lima, Centro de Investigaciones de la Universidad del Pacífico, 1995, 257 pp.

Galindo Martín, Miguel Ángel y Escot Mangas Lorenzo. “Difusión Tecnológica y Modelos de Crecimiento”, España, Universidad Complutense de Madrid, 1998, documento recogido de página web: www.ucm.es.

Galindo Martín, Miguel Angel y Malgesini Graciela. “Crecimiento Económico Principales Teorías desde Keynes”, 1ra.Edición, España, Mc Graw Hill, 1994, 145 pp.

Mankiw, Gregory N. “Macroeconomía”, Barcelona, España, Antoni Bosch Editor S.A., 1997, 654pp.

Rojo Duque, Luis A. “Lecturas sobre la Teoría Económica del Desarrollo”, Biblioteca de Ciencias Económicas. I. Teoría Económica, Madrid, Editorial Gredos S.A., 1966, 278 pp.

Sachs, Jeffrey D., Larrain Felipe B. “Macroeconomía en la Economía Global” Capítulo 18, 1ra.Edición, México, Prentice Hall Hispanoamericana S.A.

Sala - I - Martin, Xavier. “Apuntes de Crecimiento Económico”, 2da. Edición, España, Antoni Bosch Editor S.A., 2000, 250 pp.

Solow, R. M. “La Teoría del Crecimiento: Una Exposición”, 1ra.Edición, España, Fondo de Cultura Económica, 1976, 116 pp.