

**UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA**

**FACULTAD DE INGENIERÍA ELÉCTRICA Y ELECTRÓNICA**



**CONTROL DE POSICIÓN DE UN PÉNDULO INVERTIDO  
APLICANDO TÉCNICAS DE CONTROL ÓPTIMO Y  
CONTROL DIFUSO**

**INFORME DE SUFICIENCIA**

**PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE:**

**INGENIERO ELECTRÓNICO**

**PRESENTADO POR:**

**IVÁN VILLANUEVA CUEVA**

**PROMOCIÓN  
2001-II**

**LIMA – PERÚ  
2011**

**CONTROL DE POSICIÓN DE UN PÉNDULO INVERTIDO  
APLICANDO TÉCNICAS DE CONTROL ÓPTIMO Y  
CONTROL DIFUSO**

A mis padres y hermanos

## SUMARIO

El presente informe muestra el estudio y desarrollo de dos sistemas de control digital que permiten controlar la posición del péndulo invertido, siguiendo dos estrategias diferentes de control.

La primera estrategia se desarrolla a partir de un modelo matemático que describe la dinámica del sistema péndulo invertido y que es linealizado alrededor del punto de operación para elaborar un sistema de control digital que está conformado por un controlador digital y por un observador de estados de orden mínimo. El controlador digital se denomina Regulador Cuadrático Lineal (LQR) y es diseñado con la técnica avanzada de control: Control Óptimo y Ley Cuadrática. El observador de estados de orden mínimo es diseñado para la estimación de los valores de las variables no medidas. La segunda estrategia, en tanto, se desarrolla a partir de los datos provenientes de los sensores y del conocimiento experto del funcionamiento del péndulo invertido. Con esta estrategia no es necesario conocer el modelo matemático para la dinámica del péndulo invertido porque se utiliza la lógica difusa para el desarrollo de un algoritmo control al cual se le denomina controlador difuso.

El código de los programas y las simulaciones respectivas para ambas estrategias de control se desarrollan con el software Matlab. Además, para el diseño del controlador difuso se utilizan el entorno de simulación denominado Simulink y la herramienta gráfica denominada Fuzzy Logic Toolbox.

## ÍNDICE

### INTRODUCCIÓN

#### CAPÍTULO I

##### ENFOQUE DEL PROBLEMA

1.1	Sistema físico péndulo invertido	3
1.2	Objetivos	4
1.3	Alcances	5
1.4	Limitaciones	5

#### CAPÍTULO II

##### FORMULACIÓN DE LA DINÁMICA DEL PÉNDULO INVERTIDO

2.1	Modelo dinámico no lineal	6
2.1.1	Diagramas de cuerpo libre	6
2.2	Modelo en el espacio de estados	10
2.2.1	Asignación de estados	11
2.2.2	Modelo de la planta en tiempo continuo	12
2.2.3	Modelo matemático del actuador	13
2.2.4	Sensores de posición y de medida angular	16
2.2.5	Modelo del sistema péndulo invertido en tiempo continuo	16
2.2.6	Modelo del sistema péndulo invertido en tiempo discreto	19

#### CAPÍTULO III

##### SIMULACIÓN Y ANÁLISIS DE LA DINÁMICA DEL SISTEMA EN LAZO ABIERTO

3.1	Respuesta del sistema en lazo abierto	21
3.2	Controlabilidad y observabilidad	22

#### CAPÍTULO IV

##### DISEÑO Y SIMULACION DEL SISTEMA DE CONTROL ÓPTIMO DIGITAL

4.1	Fundamento teórico	23
4.1.1	Control óptimo cuadrático en tiempo discreto	23
4.1.2	Observador de estados de orden mínimo	26
4.1.3	Dinámica del sistema de control con entrada de referencia	30
4.2	Diseño del sistema de control	31
4.2.1	Diseño del controlador óptimo LQR	31
4.2.2	Diseño del observador de orden mínimo	31
4.3	Simulación de la dinámica del sistema de control	33

**CAPÍTULO V****DISEÑO Y SIMULACIÓN DEL SISTEMA DE CONTROL DIFUSO**

5.1	Fundamento teórico	38
5.1.1	La lógica y el control difuso	38
5.1.2	Conceptos básicos	39
5.1.3	Sistema de control difuso	40
5.1.4	Principales controladores difusos	41
5.1.5	Fuzzy Logic Toolbox	41
5.2	Diseño del sistema de control difuso	42
5.2.1	Funciones de pertenencia y reglas difusas	42
5.3	Simulación de la dinámica del sistema de control difuso	45

**CAPÍTULO VI****PRESENTACIÓN Y ANÁLISIS DE RESULTADOS**

6.1	Sistema de control óptimo digital	48
6.1.1	Regulador óptimo LQR	48
6.1.2	Observador de estados de orden mínimo	50
6.1.3	Simulaciones adicionales	52
6.2	Sistema de control difuso	54
6.2.1	Funciones de pertenencia y rangos de operación	54

**CAPÍTULO VII****PROGRAMA DESARROLLADO EN MATLAB**

7.1	Programa fuente: PenduloInvertido.m	56
-----	-------------------------------------	----

**CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES**

	CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	60
--	--------------------------------	----

	ANEXO A: Diseño de un observador de orden completo	62
--	----------------------------------------------------	----

	ANEXO B: Fuzzy Logic Toolbox	65
--	------------------------------	----

	ANEXO C: Hojas de datos del actuador y de los sensores	69
--	--------------------------------------------------------	----

	ANEXO D: Esquema en Simulink del sistema físico péndulo invertido	72
--	-------------------------------------------------------------------	----

	<b>BIBLIOGRAFÍA</b>	74
--	---------------------	----

## INTRODUCCIÓN

El péndulo invertido es un sistema bastante estudiado en el ámbito académico para probar diversas técnicas de control, tanto simples como avanzadas, aprovechando la característica no lineal de su dinámica. En el ámbito comercial y militar, además, el sistema péndulo invertido ha permitido aproximar la dinámica de sistemas físicos más complejos, facilitando así el estudio inicial y el posterior desarrollo de importantes aplicaciones, como los robots humanoides, la estabilización de cohetes, los sistemas de transporte de personal y las sillas de ruedas robóticas.

Así, a manera de ejemplos, se puede mencionar que las siguientes aplicaciones se desarrollaron a partir del modelo del péndulo invertido:

- La plataforma para el transporte de personal de la compañía Segway [1], que en años recientes ha permitido también el desarrollo de una aplicación militar, por parte de la compañía Marathon Targets [2], la cual se utiliza para el entrenamiento de francotiradores con objetivos móviles.
- El robot humanoide denominado Asimo desarrollado por la empresa Honda [3].

### **Metodología de investigación**

La metodología de investigación seguida para la realización del presente informe se resume a continuación:

1. Revisión de la literatura para comprender el concepto del sistema físico péndulo invertido.
2. Búsqueda de proyectos realizados sobre sistemas de péndulos invertidos para identificar los problemas presentados durante el desarrollo de dichos proyectos.
3. Definición de modelos matemáticos para el péndulo invertido y para el actuador del sistema.
4. Definición de las dimensiones físicas del péndulo invertido y de las especificaciones técnicas del actuador.
5. Estudio de la programación en Matlab, el diseño en Simulink y el uso de la herramienta gráfica (toolbox) Fuzzy Logic.
6. Diseño y escritura del programa en Matlab que permita realizar las simulaciones respectivas.
7. Análisis de los resultados obtenidos en las simulaciones y conclusiones.

## **Estructura del informe**

El informe presente se ha dividido en siete capítulos: El capítulo I presenta el enfoque del problema a resolver, los objetivos y alcances del presente estudio. En el capítulo II se determina un modelo matemático no lineal que describe la dinámica del péndulo invertido y un modelo matemático para el actuador. Estos modelos permiten obtener el modelo de la planta a controlar, el cual es representado en el espacio de estados en tiempo continuo y en tiempo discreto. El capítulo III presenta la simulación de la respuesta de la planta en lazo abierto y se determina la observabilidad y controlabilidad de la planta. El capítulo IV se ocupa del diseño y de la simulación del sistema de control LQR. La base de dicho sistema es el regulador óptimo digital conformado por un controlador LQR y un observador de estados de orden mínimo. El capítulo V se ocupa del diseño y de la simulación del sistema de control difuso mediante el desarrollo de un algoritmo de control en base a la lógica difusa. En el capítulo VI se analizan las respuestas del sistema péndulo invertido con los sistemas de control óptimo digital y de control difuso mediante modificaciones de algunos parámetros de diseño y las simulaciones respectivas. El capítulo VII contiene el código del programa fuente escrito en Matlab.



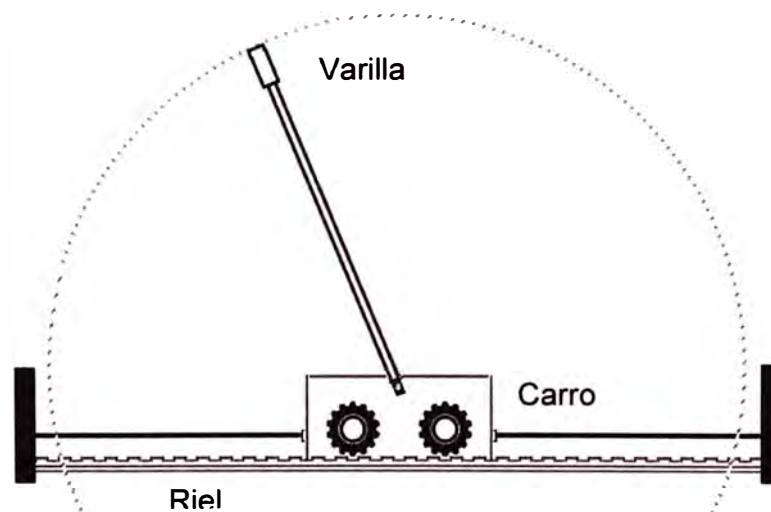
## CAPÍTULO I

### ENFOQUE DEL PROBLEMA

En el presente capítulo se describe al sistema físico péndulo invertido, se definen las estrategias de control a seguir para el diseño de los sistemas de control que permitan controlar la posición de dicho sistema físico y se especifican los objetivos, alcances y limitaciones del presente estudio.

#### 1.1 Sistema físico péndulo invertido

El péndulo invertido es un sistema físico que consiste de una varilla unida por uno de sus extremos a un carro mediante una articulación fija. El carro puede moverse en forma horizontal por acción de un motor DC sobre una cremallera o riel y la varilla puede girar libremente en un plano perpendicular al plano horizontal. En la Figura 1.1 se muestran los principales elementos del péndulo invertido.



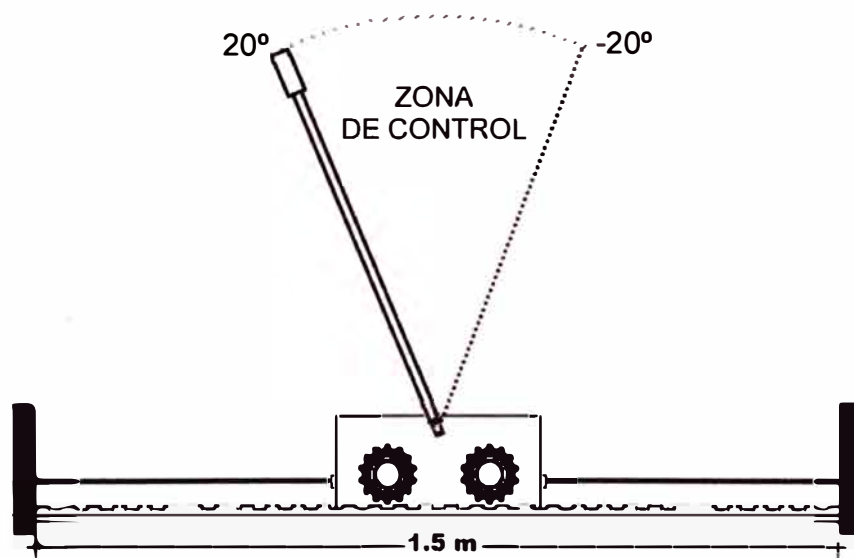
**Figura 1.1:** Elementos del sistema físico péndulo invertido.

El péndulo invertido debe funcionar de manera que la varilla se mantenga en forma vertical cuando su extremo libre esté en la posición más alta. Como es evidente, esto no sucede en forma natural porque cuando su extremo libre se encuentra en la parte más alta, el centro de gravedad de la varilla está más arriba de su punto de suspensión. Por tanto, cualquier perturbación externa hará que la varilla caiga rápidamente.

Para lograr el funcionamiento del sistema, es necesario diseñar un sistema de control que contrarreste los efectos de las perturbaciones externas mediante el control del desplazamiento del carro.

Así, en el presente informe se plantean dos estrategias diferentes de control. Con la primera estrategia se diseña un sistema de control óptimo digital a partir de un modelo matemático que describe la dinámica del sistema péndulo invertido y que es linealizado alrededor del punto de operación. La base de dicho sistema de control óptimo es el Regulador Cuadrático Lineal y el observador de estados de orden mínimo. En tanto que, con la segunda estrategia se diseña un sistema de control difuso a partir de los datos provenientes de los sensores y del conocimiento experto del funcionamiento del sistema péndulo invertido. Con esta última estrategia no es necesario obtener un modelo matemático para el péndulo invertido porque se utiliza la lógica difusa o imprecisa para el desarrollo del algoritmo control.

Ambos sistemas deben controlar la posición del péndulo invertido para variaciones angulares en el rango de  $[-20^\circ, 20^\circ]$  y dentro de la longitud del riel de 1.5 m, como se muestra en la Figura 1.2. El tiempo de establecimiento de la respuesta debe de aproximadamente 3 s con el sistema de control óptimo y menor a 4 s con el sistema de control difuso.



**Figura 1.2:** Elementos del sistema físico péndulo invertido.

## 1.2 Objetivos

El presente informe tiene tres objetivos que se detallan a continuación:

- Diseñar y simular un sistema de control óptimo digital en base a un modelo matemático linealizado del sistema péndulo invertido, utilizando la técnica de control LQR y el diseño de un observador de estados de orden mínimo.
- Diseñar y simular un sistema de control difuso en base solo a los datos de los sensores y al conocimiento experto del funcionamiento del sistema péndulo invertido, sin la necesidad de obtener un modelo matemático para dicho sistema.
- Analizar los resultados obtenidos en las simulaciones respectivas.

### **1.3 Alcances**

Los alcances del presente informe son los siguientes:

- Obtener los modelos matemáticos para las dinámicas del péndulo invertido y del actuador; y linealizar el modelo del péndulo invertido alrededor del punto de operación.
- Determinar el modelo del sistema péndulo invertido a controlar y representarlo en el espacio de estados en tiempo discreto.
- Simular la dinámica del sistema péndulo invertido sin el controlador.
- Diseñar un sistema de control óptimo digital en base a un controlador LQR y a un observador de estados de orden mínimo.
- Simular la dinámica del sistema péndulo invertido con el sistema de control óptimo digital.
- Diseñar un sistema de control digital en base a lógica difusa.
- Simular la dinámica del sistema péndulo invertido con el sistema de control difuso.

### **1.4 Limitaciones**

El sistema de control difuso a diseñar se basa en un algoritmo de control básico puesto que el presente estudio trata de mostrar la utilidad de la lógica difusa para controlar un sistema o proceso sin la necesidad modelarlo matemáticamente.

## CAPÍTULO II

### FORMULACIÓN DE LA DINÁMICA DEL PÉNDULO INVERTIDO

En el presente capítulo se analiza la dinámica del péndulo invertido y se determina un modelo matemático no lineal que describe a dicha dinámica en conjunto con el actuador. Luego, el modelo es linealizado alrededor del punto de operación y se establecen las dimensiones físicas del péndulo invertido y las especificaciones técnicas del actuador. Finalmente, se representa el modelo linealizado de la dinámica del sistema péndulo invertido en el espacio de estados en tiempo continuo y en tiempo discreto.

#### 2.1 Modelo dinámico no lineal

El péndulo invertido propuesto en el presente informe consiste de una varilla unida a un carro mediante una articulación fija. El carro puede moverse en forma horizontal sobre un riel o carril de determinada longitud y la varilla puede girar libremente en un plano perpendicular al plano horizontal.

Las variables físicas a considerar para el estudio de la dinámica del péndulo invertido son las siguientes:

- La variación de la medida del ángulo  $\theta$  que hace la varilla con la línea vertical.
- El desplazamiento lineal  $x$  del carro a fin de contrarrestar los efectos de las perturbaciones externas.
- La fuerza  $F$  que provoca el desplazamiento del carro y que es producida por el torque generado por el actuador.

Así, la dinámica del péndulo invertido queda determinada encontrando un conjunto de ecuaciones diferenciales que describan el comportamiento de las variables físicas involucradas.

En la Tabla 2.1 se describen los elementos a considerar para el análisis de la dinámica del péndulo invertido.

##### 2.1.1 Diagramas de cuerpo libre

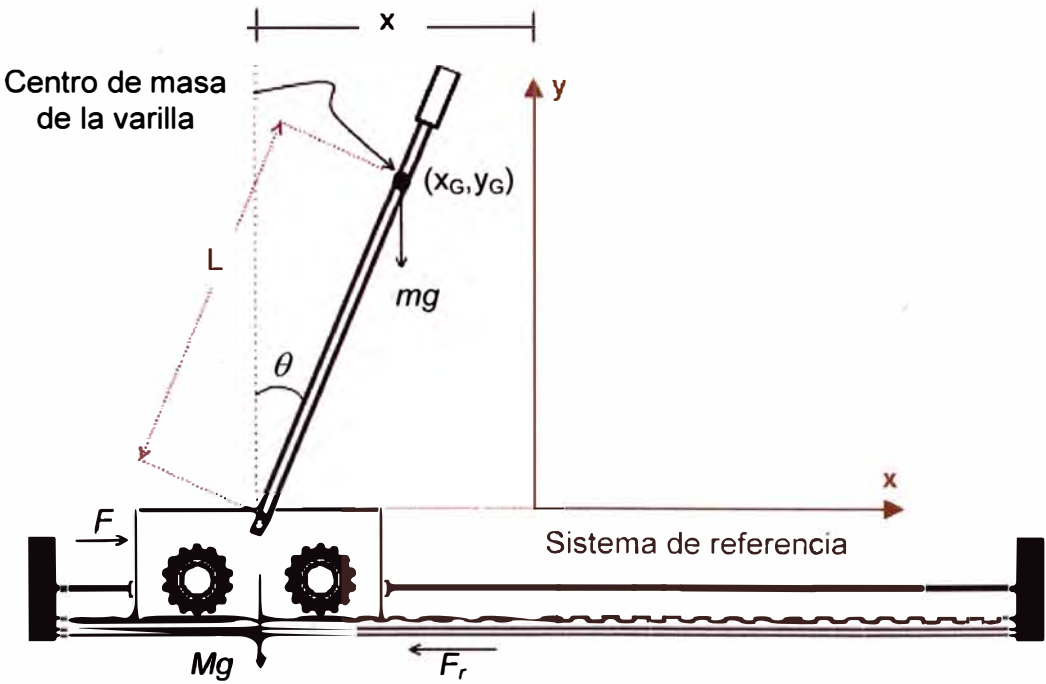
En la Figura 2.1 se muestra el diagrama de cuerpo libre (DCL) del péndulo invertido *analizado* como un cuerpo rígido moviéndose en dos dimensiones [4]. Las fuerzas externas a considerar son los pesos de la varilla y del carro, la fuerza  $F$  aplicada al carro y las fuerzas de fricción viscosas en el riel y en la articulación. No obstante, el péndulo

invertido puede verse también como la unión de dos cuerpos: un carro y una varilla<sup>1</sup>. Por tanto, es más conveniente analizar cada cuerpo por separado como se muestra en Figura 2.2.

**Tabla 2.1:** Descripción de los elementos del péndulo invertido.

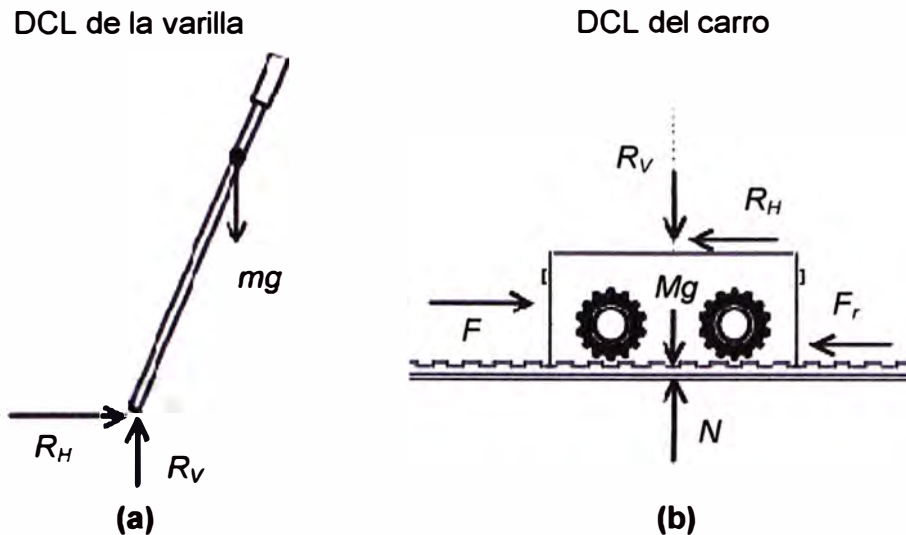
Elementos	Símbolo
Masa del carro	$M$
Masa de la varilla	$m$
Ángulo de la varilla con la línea vertical	$\theta$
Longitud total de la varilla	$L_r$
Longitud de la articulación al centro de masa de la varilla	$L$
Momento de inercia de la varilla	$I$
Fuerza aplicada al carro	$F$
Constante de fricción viscosa en el carril	$K_1$
Constante de fricción viscosa en la articulación	$K_2$

En la Figura 2.2, las fuerzas  $R_v$  y  $R_H$  representan a las componentes vertical y horizontal de las fuerzas de acción y reacción entre el carro y la articulación. Las direcciones de dichas componentes dependen del cuerpo sobre el cual actúan y son como se muestran en dicha figura.



**Figura 2.1:** Diagrama de cuerpo libre del péndulo invertido.

<sup>1</sup> En el presente estudio al péndulo invertido conformado por el carro y la varilla también se le denomina planta



**Figura 2.2:** Diagramas de cuerpo libre: (a) de la varilla (b) del carro.

### a. Análisis del DCL de la varilla

Considerando el sistema de referencia de la Figura 2.1 y el DCL de la varilla mostrado en la Figura 2.2 (a), la coordenada  $(x_G, y_G)$  del centro de masa de la varilla queda definida como:

$$x_G = x - L \sin \theta$$

$$y_G = L \cos \theta$$

De acuerdo con la *segunda ley de Newton*, las fuerzas horizontales y verticales que actúan sobre la varilla provocan en ella una aceleración. Las componentes vertical  $a_y$  y horizontal  $a_x$  de dicha aceleración cumplen lo siguiente:

En la dirección del eje  $x$ :

$$\sum F_x = m \cdot a_x = m \frac{d^2}{dt^2}(x_G)$$

$$\Rightarrow R_H = m \frac{d^2}{dt^2}(x - L \sin \theta) \quad (2.1)$$

En la dirección del eje  $y$ :

$$\sum F_y = m \cdot a_y = m \frac{d^2}{dt^2}(y_G)$$

$$\Rightarrow R_V - mg = m \frac{d^2}{dt^2}(L \cos \theta) \quad (2.2)$$

Además:

$$\frac{d}{dt}(\sin \theta) = \cos \theta (\dot{\theta}) \Rightarrow \frac{d^2}{dt^2}(\sin \theta) = -\sin \theta (\dot{\theta})^2 + \ddot{\theta} \cos \theta \quad (2.3)$$

$$\frac{d}{dt}(\cos \theta) = -\sin \theta (\dot{\theta}) \Rightarrow \frac{d^2}{dt^2}(\cos \theta) = -\cos \theta (\dot{\theta})^2 - \ddot{\theta} \sin \theta \quad (2.4)$$

Reemplazando las ecuaciones (2.3) y (2.4) en las ecuaciones (2.1) y (2.2), estas últimas quedan en la forma siguiente:

$$R_H = m\ddot{x} - mL \left[ -\text{sen}\theta (\dot{\theta})^2 + \ddot{\theta} \cos\theta \right] \quad (2.5)$$

$$R_V = mg + mL \left[ -\text{cos}\theta (\dot{\theta})^2 - \ddot{\theta} \text{sen}\theta \right] \quad (2.6)$$

Como las fuerzas  $R_H$  y  $R_V$  pueden hacer girar a la varilla alrededor de la articulación, la varilla presenta una inercia a la rotación determinada por su *momento de inercia*. Dicho momento es el grado de resistencia que la varilla opone al cambio de su velocidad angular durante su rotación. Por consiguiente, las fuerzas  $R_H$ ,  $R_V$  y la fuerza de fricción en la articulación provocarán momentos alrededor de dicha articulación.

Si se considera que el momento provocado por la fuerza de fricción es proporcional a la velocidad angular de giro  $\dot{\theta}$  y que el momento de inercia de la varilla respecto a su centro de masa es  $I_S$ , entonces, por la segunda ley de Newton, se cumple que:

$$\begin{aligned} \sum \text{Momentos} &= I_S \frac{d^2}{dt^2}(\theta) = I_S \cdot \ddot{\theta} \\ \Rightarrow R_H L \cos\theta + R_V L \text{sen}\theta - K_2 \dot{\theta} &= I_S \cdot \ddot{\theta} \end{aligned} \quad (2.7)$$

donde  $K_2 \dot{\theta}$  es el momento provocado por la fuerza de fricción en la articulación.

Sustituyendo las ecuaciones (2.5) y (2.6) en la ecuación (2.7) se obtiene:

$$(I_S + mL^2) \cdot \ddot{\theta} = mL \cos\theta \cdot \ddot{x} + mgL \text{sen}\theta - K_2 \dot{\theta} \quad (2.8)$$

La ecuación (2.8) relaciona las variables de interés  $\theta$  y  $x$ . Por tanto, es necesario encontrar otra ecuación que relacione ambas variables para completar el sistema de ecuaciones que describa la dinámica del péndulo invertido. Para ello, se analiza el DCL del carro.

#### b. Análisis del DCL del carro

Considerando el sistema de referencia de la Figura 2.1, el DCL del carro mostrado en la Figura 2.2 (b) y aplicando la segunda ley de Newton en la dirección del eje  $x$ , se obtiene:

$$\begin{aligned} \sum F_x = m \cdot a_x &= M \frac{d^2}{dt^2}(x) \\ \Rightarrow F - F_r - R_H &= M \cdot \ddot{x} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Sustituyendo la ecuación (2.5) en la ecuación (2.9) y ordenando se obtiene que:

$$F = (M + m) \ddot{x} - mL \cos\theta \cdot \ddot{\theta} + mL \text{sen}\theta (\dot{\theta})^2 + K_1 \dot{x} \quad (2.10)$$

La ecuación (2.10) es la segunda ecuación que relaciona las variables de interés  $\theta$  y  $x$ .

### c. Modelo matemático no lineal

Reordenando las ecuaciones diferenciales (2.8) y (2.10) se obtiene un modelo matemático para la dinámica del péndulo invertido.

$$\begin{cases} (I_s + mL^2) \cdot \ddot{\theta} + K_2 \dot{\theta} - mL \cos \theta \cdot \ddot{x} - mgL \sin \theta = 0 \\ (M + m) \ddot{x} + K_1 \dot{x} - mL \cos \theta \cdot \ddot{\theta} + mL \sin \theta (\dot{\theta})^2 = F \end{cases} \quad (2.11)$$

Como puede observarse, las ecuaciones dinámicas (2.11) de la planta son no lineales y el problema de control es más difícil de resolver que en el caso lineal puesto que no hay un método estándar de resolución. Además, se debe tener en cuenta que existe una restricción en el sistema debido a que el carro está limitado a moverse dentro de la longitud del riel.

Por ello, en el presente estudio se propone el diseño de un sistema de control digital en el *espacio de estados*, puesto que allí se puede analizar al péndulo invertido como un sistema MIMO y se pueden establecer esquemas de control con restricciones como el *control óptimo cuadrático*.

## 2.2 Modelo en el espacio de estados

Para trabajar en el espacio de estados es necesario tener un modelo lineal de la dinámica de la planta obtenido alrededor del punto de operación o de funcionamiento y, por lo general, en el caso no lineal se emplea la técnica denominada *linealización exacta entrada-salida*. Sin embargo, dicha técnica no es aplicable en el caso del péndulo invertido, como se ha demostrado en [5], porque el grado relativo del sistema es menor que la dimensión del espacio de estados.

Considerando esto, el estudio presente enfoca el problema de control en forma práctica teniendo en cuenta que la varilla debe permanecer en posición vertical alrededor del punto de operación. Es decir, el objetivo principal de control es que la variación angular de la varilla  $\theta$  sea lo más pequeña posible. Así, durante el funcionamiento del péndulo invertido se puede considerar que  $\theta \approx 0^\circ$  y se pueden hacer las siguientes aproximaciones:

$$\left\{ \sin \theta \approx \theta; \quad \cos \theta \approx 1; \quad \dot{\theta}^2 \approx 0 \right\} \quad (2.12)$$

que son válidas aún para variaciones angulares entre  $[-20^\circ; 20^\circ]$  y que permiten hacer una aproximación lineal práctica de la dinámica del péndulo invertido.

De este modo, si se reemplazan las aproximaciones (2.12) en las ecuaciones (2.11) se obtiene una dinámica linealizada del péndulo invertido:



$$\left. \begin{aligned} (I_s + mL^2) \cdot \ddot{\theta} + K_2 \dot{\theta} - mL\ddot{x} - mgL\theta &= 0 \\ (M + m)\ddot{x} + K_1 \dot{x} - mL\ddot{\theta} &= F \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

Para el caso de sistemas invariantes en el tiempo, como el caso del péndulo invertido, la representación en el espacio de estados tiene la siguiente forma [6]:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{aligned}$$

donde,  $\mathbf{x}$  se denomina *vector de estados*,  $\mathbf{y}$  se denomina *vector de salida* y  $\mathbf{u}$  se denomina *vector de entrada*<sup>2</sup>. Los estados son las salidas de integradores (dispositivos de memoria) que almacenan los valores de entrada y se obtienen a partir de las ecuaciones diferenciales que definen la dinámica en tiempo continuo. Si el sistema tiene  $r$  entradas,  $m$  salidas y  $n$  variables de estados, se dice que es un sistema de orden  $n$  y los elementos de las ecuaciones de estado se definen como:

- $\mathbf{x}$ : vector de estados de orden  $n \times 1$
- $\mathbf{y}$ : vector de salida de orden  $m \times 1$
- $\mathbf{u}$ : vector de entrada de orden  $r \times 1$
- $\mathbf{A}$ : matriz de estado de orden  $n \times n$
- $\mathbf{B}$ : matriz de entrada de orden  $n \times r$
- $\mathbf{C}$ : matriz de salida de orden  $m \times n$
- $\mathbf{D}$ : matriz de transmisión directa de orden  $m \times r$

### 2.2.1 Asignación de estados

El péndulo invertido propuesto es un sistema de orden 4, con una entrada, dos salidas y cuatro variables de estado como se describe en la Tabla 2.2. Por consiguiente, los vectores de entrada, de estados y de salida son definidos respectivamente como:

Vector de entrada:

$$\mathbf{u} = F \quad (2.14)$$

Vector de estados:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ \theta \\ \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

Vector de salida:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

<sup>2</sup> En el presente estudio, los vectores y matrices se escriben en negrita y los valores escalares en cursiva.

**Tabla 2.2:** Variables para la asignación de estados.

Variables	Descripción	Símbolo
Entrada:		
$F$	Fuerza lineal externa aplicada al carro	$u(t)$
Salidas <sup>3</sup> :		
$x$	Posición del carro con respecto al eje horizontal	$x_1(t)$
$\theta$	Ángulo de la varilla con respecto al eje vertical	$x_2(t)$
Estados:		
$x$	Posición del carro con respecto al eje horizontal	$x_1(t)$
$\theta$	Ángulo de la varilla con respecto al eje vertical	$x_2(t)$
$\dot{x}$	Velocidad del carro	$x_3(t)$
$\dot{\theta}$	Velocidad angular de la varilla	$x_4(t)$

### 2.2.2 Modelo de la planta en tiempo continuo

Del sistema descrito en las ecuaciones (2.13) y con los vectores asignados en las ecuaciones (2.14), (2.15) y (2.16); se obtienen las siguientes ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\left. \begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= \dot{x} = x_3 \\
 \dot{x}_2 &= \dot{\theta} = x_4 \\
 \dot{x}_3 &= \ddot{x} = \left( \frac{m^2 g L^2}{I} \right) x_2 - \left( \frac{(I_s + mL^2) K_1}{I} \right) x_3 - \left( \frac{m L K_2}{I} \right) x_4 + \left( \frac{I_s + mL^2}{I} \right) u \\
 \dot{x}_4 &= \ddot{\theta} = \left( \frac{mgL(M+m)}{I} \right) x_2 - \left( \frac{m L K_1}{I} \right) x_3 - \left( \frac{(M+m) K_2}{I} \right) x_4 + \left( \frac{mL}{I} \right) u
 \end{aligned} \right\} \quad (2.17)$$

Donde  $I = I_s (M + m) + MmL^2$ .

Finalmente, a partir de las ecuaciones (2.17), la dinámica del péndulo invertido queda determinada por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{m^2 g L^2}{I} & -\frac{(I_s + mL^2) K_1}{I} & -\frac{m L K_2}{I} \\ 0 & \frac{mgL(M+m)}{I} & -\frac{m L K_1}{I} & -\frac{(M+m) K_2}{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{I_s + mL^2}{I} \\ \frac{mL}{I} \end{bmatrix} u$$

<sup>3</sup> Las salidas corresponden a las medidas de los sensores de posición del carro  $x$  y de la medida del ángulo  $\theta$ .

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

En este punto cabe mencionar que, como la fuerza lineal  $F$  aplicada al carro es obtenida a partir del torque de un motor DC controlado por voltaje de armadura, es conveniente tener directamente como señal de entrada  $u(t)$  a dicho voltaje de control en vez que a la fuerza. Esto conlleva a establecer un modelo matemático para la dinámica del motor DC que permita relacionar la fuerza y el voltaje aplicado al motor.

### 2.2.3 Modelo matemático del actuador

El actuador del sistema está conformado por un motor DC controlado por voltaje de armadura unido a una caja reductora de engranajes, cuya finalidad es la de aumentar el torque producido por el motor. El esquema eléctrico del motor DC es mostrado en la Figura 2.3 y sus principales parámetros son descritos en la Tabla 2.3 [7].

De acuerdo con las leyes de Kirchhoff se obtiene las siguientes ecuaciones:

$$V_m = I_m \cdot R_m + L_m \cdot \frac{dI_m}{dt} + E_{emf} \quad (2.18)$$

$$E_{emf} = K_m \cdot \dot{\theta}_m \quad (2.19)$$

Reemplazando la ecuación (2.19) en la ecuación (2.18) y considerando que  $L_m \ll R_m$ , la ecuación de voltajes queda expresada en la forma:

$$V_m = I_m \cdot R_m + K_m \cdot \dot{\theta}_m \quad (2.20)$$

y la corriente de armadura  $I_m$  es proporcional al torque  $T_m$  generado por el motor:

$$I_m = \frac{T_m}{\eta_m \cdot K_t} \quad (2.21)$$

así que al reemplazar la ecuación (2.21) en la ecuación (2.20) se obtiene:

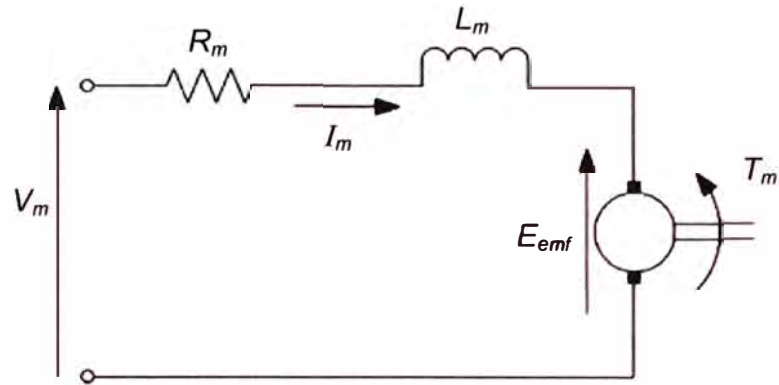
$$V_m = \left( \frac{R_m}{\eta_m \cdot K_t} \right) T_m + K_m \cdot \dot{\theta}_m \quad (2.22)$$

De acuerdo con la segunda ley de Newton el torque debe cumplir con la siguiente ecuación:

$$T_m = b_m \cdot \dot{\theta}_m + J_m \cdot \ddot{\theta}_m \quad (2.23)$$

por tanto, despejando  $\dot{\theta}_m$  de (2.22) y reemplazando en la ecuación (2.23) se tiene:

$$T_m = \left( \frac{\eta_m \cdot b_m \cdot K_t}{\eta_m \cdot K_m \cdot K_t + R_m \cdot b_m} \right) V_m + \left( \frac{\eta_m \cdot K_m \cdot K_t \cdot J_m}{\eta_m \cdot K_m \cdot K_t + R_m \cdot b_m} \right) \ddot{\theta}_m \quad (2.24)$$

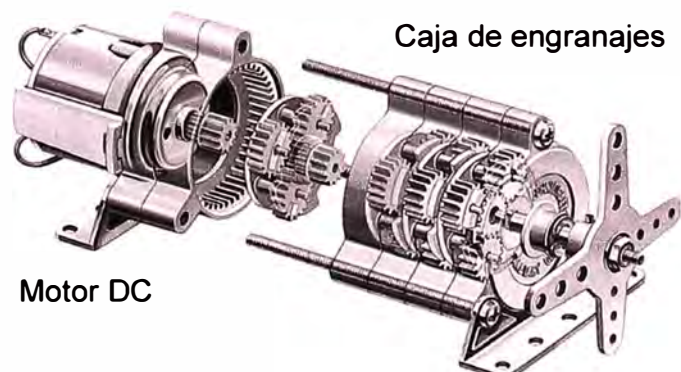


**Figura 2.3:** Esquema eléctrico de un motor DC.

**Tabla 2.3:** Parámetros del Motor DC.

Parámetros	Variables
Voltaje aplicado al motor	$V_m$
Resistencia de la armadura	$R_m$
Inductancia de la armadura	$L_m$
Corriente eléctrica por la armadura	$I_m$
Fuerza contra electromotriz	$E_{emf}$
Constante contra electromotriz	$K_m$
Torque generado por el motor	$T_m$
Constante de torque	$K_t$
Momento de inercia en el eje	$J_m$
Coefficiente de fricción viscosa del eje	$b_m$
Ángulo de giro del eje del motor	$\theta_m$
Eficiencia del motor	$\eta_m$
Radio del piñón	$r_{mp}$

Para aumentar la fuerza generada por el torque  $T_m$  del motor DC, se une al eje del motor una caja reductora de engranajes como se muestra en la Figura 2.4. Los principales parámetros de una caja reductora se describen en la Tabla 2.4.



**Figura 2.4:** Motor DC y caja reductora de engranajes.

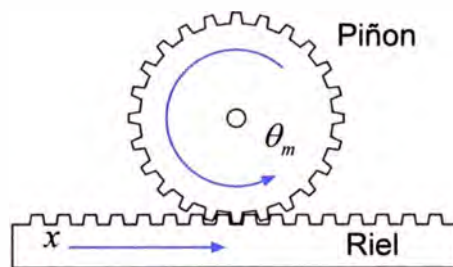
**Tabla 2.4:** Parámetros de la caja reductora de engranajes.

Parámetros	Variables
Razón de aumento del sistema de engranajes	$K_g$
Eficiencia del sistema de engranajes	$\eta_g$

Por tanto, con la caja reductora la fuerza  $F$  generada por el actuador queda definida como:

$$F = \left( \frac{\eta_g \cdot K_g}{r_{mp}} \right) T_m \quad (2.25)$$

De acuerdo con este mecanismo piñón - riel propuesto para el desplazamiento del carro, que es mostrado en la Figura 2.5:

**Figura 2.5:** Mecanismo piñón – riel.

de la relación entre el ángulo de giro  $\theta_m$  del eje del motor DC y la posición lineal  $x$  del carro, la aceleración del eje del motor es:

$$\ddot{\theta}_m = \left( \frac{K_g}{r_{mp}} \right) \ddot{x} \quad (2.26)$$

Por consiguiente, a partir de las ecuaciones (2.24), (2.25) y (2.26) se obtiene la siguiente ecuación para la fuerza  $F$  generada por el actuador del sistema:

$$F = \left( \frac{\eta_m \cdot b_m \cdot \eta_g \cdot K_g \cdot K_t}{r_{mp} (\eta_m \cdot K_m \cdot K_t + R_m \cdot b_m)} \right) V_m + \left( \frac{\eta_m \cdot K_m \cdot K_t \cdot \eta_g \cdot K_g^2 \cdot J_m}{r_{mp}^2 (\eta_m \cdot K_m \cdot K_t + R_m \cdot b_m)} \right) \ddot{x} \quad (2.27)$$

La ecuación (2.27) muestra que la fuerza  $F$ , que se debe aplicar al carro para contrarrestar los efectos de las perturbaciones externas que afectan a la varilla, es proporcional al voltaje  $V_m$  aplicado al motor DC y a la aceleración lineal  $\ddot{x}$  que presenta el carro. Por tanto, si se hacen las siguientes definiciones:

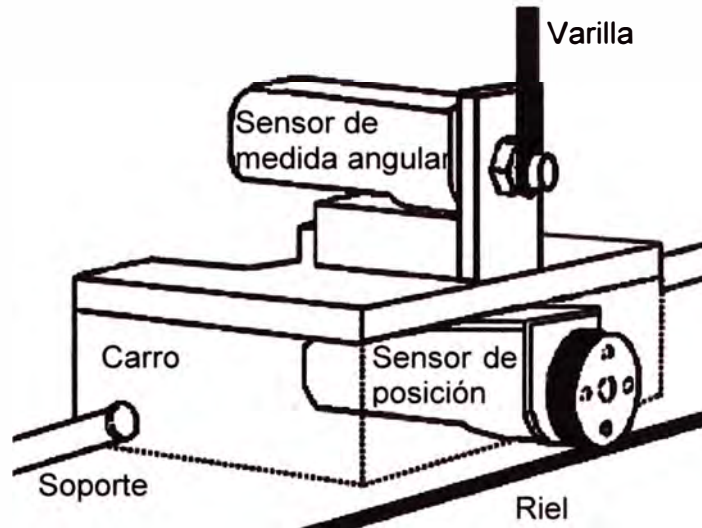
$$a = \frac{\eta_m \cdot b_m \cdot \eta_g \cdot K_g \cdot K_t}{r_{mp} (\eta_m \cdot K_m \cdot K_t + R_m \cdot b_m)} \quad b = \frac{\eta_m \cdot K_m \cdot K_t \cdot \eta_g \cdot K_g^2 \cdot J_m}{r_{mp}^2 (\eta_m \cdot K_m \cdot K_t + R_m \cdot b_m)}$$

y se reemplazan en la ecuación (2.27) la ecuación para la fuerza queda expresada en la siguiente forma:

$$F = a \cdot V_m + b \cdot \ddot{x} \quad (2.28)$$

### 2.2.4 Sensores de posición y de medida angular

Para el sistema propuesto, los sensores usados, tanto para la medida angular de la varilla como para la posición del carro, son codificadores ópticos de alta resolución. Estos codificadores permiten minimizar los errores de medición y sus especificaciones técnicas pueden verse en el Anexo C. En la Figura 2.6 se muestra su ubicación dentro del sistema mecánico.



**Figura 2.6:** Ubicación de los sensores de posición y de medida angular.

### 2.2.5 Modelo del sistema péndulo invertido en tiempo continuo

La ecuación (2.28), al relacionar la fuerza y el voltaje aplicado al motor, permite obtener un modelo de la planta en conjunto con el actuador<sup>4</sup>. Así, si se reemplaza dicha ecuación en la ecuación (2.13) se obtienen las ecuaciones que definen la dinámica del sistema péndulo invertido:

$$\begin{cases} (I_s + mL^2) \cdot \dot{x}_4 + K_2 \cdot x_4 - m \cdot L \cdot \dot{x}_3 - m \cdot g \cdot L \cdot x_2 = 0 \\ (M + m - b) \cdot \dot{x}_3 + K_1 \cdot x_3 = a \cdot V_m + m \cdot L \cdot \dot{x}_4 \end{cases}$$

Si las ecuaciones anteriores se reordenan tomando como señal de control a  $u = V_m$ , las variables de estado para el sistema motor-péndulo invertido son las siguientes:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= \dot{x} = x_3 \\ \dot{x}_2 &= \dot{\theta} = x_4 \\ \dot{x}_3 &= \ddot{x} = \left( \frac{m^2 g L^2}{I} \right) x_2 - \left( \frac{(I_s + mL^2) K_1}{I} \right) x_3 - \left( \frac{m L K_2}{I} \right) x_4 + \left( \frac{(I_s + mL^2) a}{I} \right) u \\ \dot{x}_4 &= \ddot{\theta} = \left( \frac{m g L (M + m - b)}{I} \right) x_2 + \left( \frac{m L K_1}{I} \right) x_3 - \left( \frac{(M + m - b) K_2}{I} \right) x_4 + \left( \frac{a m L}{I} \right) u \end{aligned} \right\} (2.29)$$

<sup>4</sup> En el estudio presente se denomina sistema péndulo invertido al conjunto planta y actuador.

donde:  $I = I_s(M + m - b) + (M - b)mL^2$ .

Las ecuaciones (2.29) describen la dinámica del sistema péndulo invertido, las cuales, expresándolas en el espacio de estados, toman la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{m^2 g L^2}{I} & \frac{(I_s + mL^2)K_1}{I} & -\frac{mLK_2}{I} \\ 0 & \frac{mgL(M + m - b)}{I} & \frac{mLK_1}{I} & -\frac{(M + m - b)K_2}{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{(I_s + mL^2)a}{I} \\ \frac{amL}{I} \end{bmatrix} u \quad (2.30)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (2.31)$$

Por consiguiente, de las ecuaciones (2.30) y (2.31) se obtienen las siguientes matrices del sistema:

Matriz de estados:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{m^2 g L^2}{I} & \frac{(I_s + mL^2)K_1}{I} & -\frac{mLK_2}{I} \\ 0 & \frac{mgL(M + m - b)}{I} & \frac{mLK_1}{I} & -\frac{(M + m - b)K_2}{I} \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

Matriz de entrada:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ (I_s + mL^2)aI^{-1} \\ amLI^{-1} \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

Matriz de salida:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

Matriz de transmisión directa:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

**a. Valores numéricos propuestos para el sistema péndulo invertido**

El motor DC a utilizar opera en el rango de [-12, 12] voltios. En la Tabla 2.5 se muestran los valores numéricos escogidos para los parámetros del motor DC y de la caja de reducción definidos en las Tablas 2.3 y 2.4, respectivamente. Dichos valores fueron tomados de las especificaciones técnicas mostradas en el Anexo C.

En la Tabla 2.6 se muestran las dimensiones los valores escogidos para los parámetros del péndulo invertido descritos en la Tabla 2.1.

Las matrices del sistema definidas en las ecuaciones (2.32), (2.33), (2.34) y (2.35) junto con los valores numéricos de las Tablas 2.4 y 2.5, permiten comenzar con el desarrollo del programa *PenduloInvertido.m* que permitirá el diseño y simulación del sistema de control de posición del péndulo invertido. El detalle de dicho programa se presenta en el Capítulo VIII.

**Tabla 2.5:** Valores numéricos para el motor DC y la caja de reducción.

Parámetros del motor DC	Valor	Símbolo/Unidad
$R_m$	10	$\Omega$
$L_m$	(no considerado)	-----
$K_m$	0,00147	V.s/rad
$K_t$	0,0147	N.m/A
$J_m$	$3,4 \times 10^{-7}$	kg.m <sup>2</sup>
$b_m$	$7 \times 10^{-3}$	N.m.s/rad
$\eta_m$	66%	-----
$r_{mp}$	$6,35 \times 10^{-3}$	m
Parámetros de la caja de engranajes	Valor	Símbolo/Unidad
$K_g$	66	-----
$\eta_g$	70%	-----

**Tabla 2.6:** Valores de los parámetros del péndulo invertido.

Parámetros del péndulo invertido	Valor	Símbolo/Unidad
$M$	2	kg
$m$	0,4	kg
$L_T$	0,8	m
$L$	0,4	m
$I_s$	0,0853	kg.m <sup>2</sup>
$K_1$	7,5	N.s/m
$K_2$	0.0024	N.m.s/rad

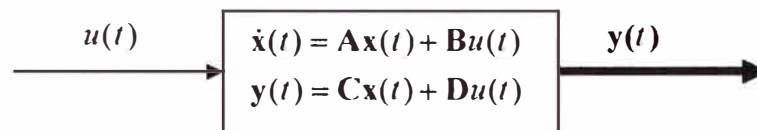


De esta forma, las matrices del sistema quedan determinadas como:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1.0000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0000 \\ 0 & 0.7563 & -3.3730 & -0.0012 \\ 0 & 11.3211 & 3.6139 & -0.0173 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3.0444 \\ 3.2618 \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

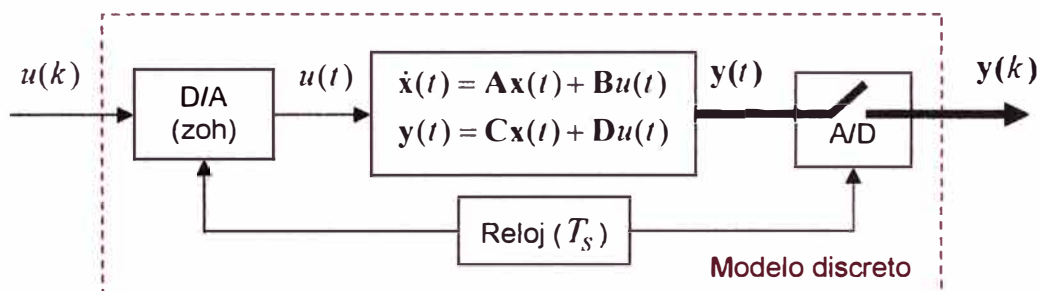
las cuales definen la dinámica del sistema péndulo invertido en tiempo continuo y cuyo esquema es mostrado en la Figura 2.7.



**Figura 2.7:** Modelo del sistema péndulo invertido en tiempo continuo.

### 2.2.6 Modelo del sistema péndulo invertido en tiempo discreto

Para diseñar un sistema de control digital es necesario discretizar del modelo en tiempo continuo. En la Figura 2.8 se muestra el proceso de discretización.



**Figura 2.8:** Modelo del sistema péndulo invertido en tiempo discreto.

Es necesario establecer el *periodo de muestreo*  $T_s$  para la conversión de las señales de tiempo continuo a tiempo discreto y viceversa. En forma práctica y considerando a ([8], capítulo 11) se establece en el presente estudio lo siguiente:

$$20 < \frac{\omega_s}{\omega_b} < 60$$

donde  $\omega_s$  es la frecuencia de muestreo y  $\omega_b$  es el ancho de banda del sistema en lazo cerrado. Sin embargo, como aún no se ha diseñado el sistema de control no es posible conocer el valor de  $\omega_b$  y una forma práctica para escoger su valor es considerar que dicha frecuencia sea mucho mayor que la frecuencia del polo más rápido del sistema en lazo abierto. Los polos del sistema en lazo abierto son los *valores propios* de la matriz  $A$  definida en (2.36) y se determinan mediante el comando:

$$\begin{aligned}
 \text{eig}(\mathbf{A}) &= \\
 &= 0 \\
 &= 3.415 \\
 &= -3.4027 + 0.6355i \\
 &= -3.4027 - 0.6355i
 \end{aligned} \tag{2.38}$$

De los valores propios en (2.38) se observa que la frecuencia del polo más rápido corresponde al módulo de los polos complejos que es 3.46 rad/s. Por tanto, si se asume que la frecuencia de muestreo es 50 veces mayor que la de dicho polo, entonces:

$$\omega_s = 50\omega_p = 50 \times 3.46 = 173 \text{ rad/s}$$

y el periodo de muestreo es:

$$T_s = 2\pi / \omega_s = 0.0363 \text{ s}$$

Por tanto, con  $T_s = 0.03 \text{ s}$  se comienza el proceso de digitalización y la dinámica obtenida en tiempo discreto es representada mediante las siguientes matrices:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}u(k) \tag{2.39}$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}u(k) \tag{2.40}$$

donde las matrices  $\mathbf{G}$  y  $\mathbf{H}$  tienen los mismos ordenes que las matrices  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  definidas en (2.36) y se obtienen con el comando *c2dm* en la forma siguiente:

$$[\mathbf{G} \ \mathbf{H} \ \mathbf{C}_d \ \mathbf{D}_d] = \text{c2dm}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}, T_s, 'zoh')$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 3.293 \times 10^{-4} & 0.0285 & 2.816 \times 10^{-6} \\ 0 & 1.0051 & 0.0015 & 0.0300 \\ 0 & 0.0216 & 0.9037 & 2.963 \times 10^{-4} \\ 0 & 0.3413 & 0.1032 & 1.0045 \end{bmatrix} \tag{2.41}$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0.0013 \\ 0.0015 \\ 0.0868 \\ 0.1027 \end{bmatrix} \tag{2.42}$$

Las matrices  $\mathbf{C}_d$  y  $\mathbf{D}_d$ , en tiempo discreto, son numéricamente iguales a las matrices  $\mathbf{C}$  y  $\mathbf{D}$  definidas en (2.37). Por tanto, en el presente estudio se considera que  $\mathbf{C}_d = \mathbf{C}$  y  $\mathbf{D}_d = \mathbf{D}$ .

En el siguiente capítulo se realiza la simulación del sistema en lazo abierto para mostrar la inestabilidad del sistema físico.

### CAPÍTULO III

## SIMULACIÓN Y ANALISIS DE LA DINÁMICA DEL SISTEMA EN LAZO ABIERTO

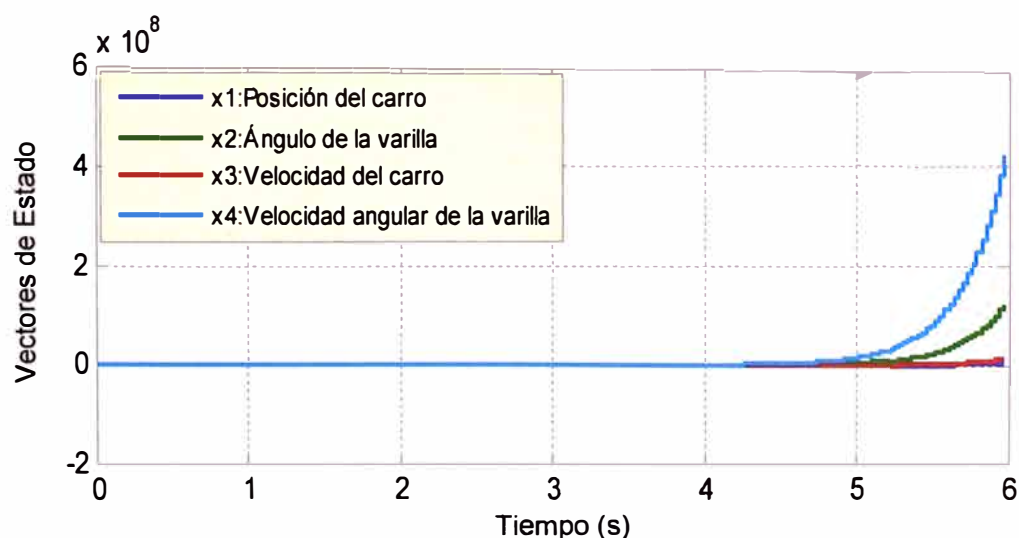
En el presente capítulo se analiza la respuesta del sistema péndulo invertido sin un sistema de control para comprobar la inestabilidad del sistema en lazo abierto.

### 3.1 Respuesta del sistema en lazo abierto

De los valores propios de la matriz de estado  $\mathbf{G}$ , definida en (2.41), que se muestran a continuación:

$$\begin{aligned} \text{eig}(\mathbf{G}) &= \\ &= 1 \\ &= 1.1079 \\ &= 0.9028 + 0.0172i \\ &= 0.9028 - 0.0172i \end{aligned}$$

se puede deducir que la respuesta del sistema, para cualquier condición inicial del vector de estados, es creciente en forma ilimitada debido a que  $\mathbf{G}$  tiene un valor propio fuera del círculo unitario del plano  $z$ . Esto se comprueba con la simulación mostrada en la Figura 3.1 para las condiciones iniciales  $\mathbf{x}(0) = [-0.45 \ 0.35 \ 0 \ 0]^T$  y para una entrada de referencia nula.



**Figura 3.1:** Respuesta del sistema péndulo invertido en lazo abierto.

Como es evidente de la Figura 3.1 el sistema en lazo abierto es inestable y es necesario diseñar un sistema de control realimentado o de lazo cerrado con estimación

de variables. Para ello, es necesario comprobar previamente que el sistema sea completamente controlable y observable.

### 3.2 Controlabilidad y observabilidad

Un sistema de orden  $n$  es completamente controlable, si la *matriz de controlabilidad* definida como:

$$\mathbf{M} = [\mathbf{H} \quad \mathbf{GH} \quad \mathbf{G}^2\mathbf{H} \quad \dots \quad \mathbf{G}^{n-1}\mathbf{H}]$$

tiene un rango completo igual al orden  $n$  del sistema [6].

Un sistema de orden  $n$  es completamente observable, si la *matriz de observabilidad* definida como:

$$\mathbf{N} = [\mathbf{C} \quad \mathbf{CG} \quad \mathbf{CG}^2 \quad \dots \quad \mathbf{CG}^{n-1}]^T$$

tiene un rango completo igual al orden  $n$  del sistema [6].

El sistema péndulo invertido propuesto es un sistema de orden 4 cuyas matrices  $\mathbf{M}$  y  $\mathbf{N}$  son las siguientes:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0.0013 & 0.0038 & 0.0060 & 0.0081 \\ 0.0015 & 0.0047 & 0.0083 & 0.0121 \\ 0.0869 & 0.0786 & 0.0712 & 0.0645 \\ 0.1028 & 0.1127 & 0.1230 & 0.1337 \end{bmatrix} \quad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0.0003 & 0.0285 & 0 \\ 0 & 1.0051 & 0.0016 & 0.0300 \\ 1 & 0.0013 & 0.0543 & 0 \\ 0 & 1.0205 & 0.0061 & 0.0604 \\ 1 & 0.0028 & 0.0776 & 0.0001 \\ 0 & 1.0465 & 0.0134 & 0.0913 \end{bmatrix}$$

y, mediante el comando *rank* de Matlab se comprueba que sus rangos son:

$$\text{rank}(\mathbf{M}) = 4 \quad \text{rank}(\mathbf{N}) = 4$$

Por tanto, el sistema es completamente controlable y completamente observable.

## CAPÍTULO IV

### DISEÑO Y SIMULACION DEL SISTEMA DE CONTROL ÓPTIMO DIGITAL

En el presente capítulo se muestra el diseño y la simulación de sistema de control óptimo digital que permite controlar la posición del péndulo invertido a partir de la dinámica en tiempo discreto obtenida en el Capítulo II. El sistema de control está conformado por un controlador digital, que es denominado Regulador Óptimo Cuadrático porque es diseñado con la técnica denominada Control Óptimo mediante la minimización de un índice cuadrático; y por un observador de estados de orden mínimo que permite la estimación de las velocidades del carro  $\dot{x}$  y de la varilla  $\dot{\theta}$  que son variables no medidas.

#### 4.1 Fundamento teórico

##### 4.1.1 Control óptimo cuadrático en tiempo discreto

La teoría de control óptimo permite diseñar controladores para plantas que tengan alguna restricción para su funcionamiento. El propósito del control óptimo es encontrar una ley de control que haga óptima la respuesta de la planta bajo la restricción impuesta. Para ello, se define una función, denominada *índice de desempeño*, que dependa de las variables del sistema a controlar, de modo que al minimizar el valor de dicha función se encuentre la ley de control. El control óptimo se puede aplicar a plantas cuyas dinámicas estén en tiempo continuo o en tiempo discreto. A continuación se presenta una breve descripción del control óptimo en tiempo discreto y para mayores detalles es recomendable leer [9].

Para una planta o sistema cuya dinámica en tiempo discreto sea definida según:

$$\mathbf{x}(k+1) = f(\mathbf{x}(k), u(k), k) \quad (4.1)$$

una forma general del índice de desempeño es la siguiente:

$$J = \sum_{k=k_0}^{k_f-1} L(\mathbf{x}(k), u(k), k) \quad (4.2)$$

siendo  $f$  y  $L$  funciones definidas en tiempo discreto.

El objetivo es encontrar una ley de control óptima  $u(k)$  resolviendo la ecuación (4.2) bajo la restricción impuesta por la ecuación (4.1). El método de resolución a usar depende de la linealidad o no del sistema y del índice de rendimiento escogido, y, por lo general, ello conlleva a minimizar dicho índice.

### a. Minimización del índice de rendimiento y ley de control LQR

La elección del índice  $J$  depende de la restricción impuesta a la planta. Por ejemplo, en el presente estudio se impone como restricción que el péndulo invertido funcione con un consumo mínimo de energía a fin de cumplir con la limitación de movimiento del carro. En estos casos, el índice  $J$  escogido se denomina *índice de rendimiento cuadrático* porque representa a la energía consumida por el sistema.

Así, para un sistema cuya dinámica se rige por la ecuación (2.39):

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}u(k) \quad (4.3)$$

su índice de rendimiento cuadrático tiene la forma:

$$J = \sum_{k=0}^{N-1} \left[ \mathbf{x}^T(k) \mathbf{Q} \mathbf{x}(k) + u^T(k) \mathbf{R} u(k) \right]^T \quad (4.4)$$

donde,  $\mathbf{x}$  es el vector de estados,  $u$  es la señal de control o entrada al sistema,  $\mathbf{x}^T$  y  $u^T$  los vectores transpuestos respectivos. La matrices  $\mathbf{Q}$  y  $\mathbf{R}$  se denominan *matrices de ponderación* y se escogen convenientemente durante el diseño del controlador.

Al minimizar el índice definido en la ecuación (4.4) se obtiene la siguiente ley de control:

$$u(k) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(k) \quad (4.5)$$

donde,  $\mathbf{K}$  se denomina *matriz de ganancias de realimentación* y permite establecer un control en lazo cerrado mediante la realimentación de las variables de estados.

Dada la linealidad del sistema y la forma del índice de rendimiento en la ecuación (4.4), la minimización de dicho índice se realiza con el método denominado *programación dinámica*, el cual se basa en la posibilidad de obtener, a partir de las ecuaciones (4.3) y (4.4), una ecuación alternativa denominada *ecuación algebraica de Riccati discreta*, cuya resolución permite obtener directamente la matriz  $\mathbf{K}$  mediante un procedimiento iterativo.

Así, la ecuación de Riccati obtenida tiene la forma:

$$\mathbf{P}(k) = \mathbf{G}^T \left[ \mathbf{P}(k+1) - \mathbf{P}(k+1) \mathbf{H} \left( \mathbf{H}^T \mathbf{P}(k+1) \mathbf{H} + \mathbf{R} \right)^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{P}(k+1) \right] \mathbf{G} + \mathbf{Q} \quad (4.6)$$

y su solución permite obtener la matriz  $\mathbf{K}$  en la forma:

$$\mathbf{K}(k) = \left( \mathbf{H}^T \mathbf{P}(k+1) \mathbf{H} + \mathbf{R} \right)^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{P}(k+1) \mathbf{G}$$

La solución se da en tiempo inverso con  $k$  variando desde 0 hasta  $N-1$  y, cuando el número de muestras  $N$  se aproxima al infinito, la solución converge a valores constantes de  $\mathbf{P}$  y  $\mathbf{K}$  bajo ciertas condiciones de frontera.

Por tanto, para realizar el procedimiento iterativo de resolución se definen las siguientes matrices [10]:

$$\mathbf{K}(N-(k+1)) = \left[ T_s \mathbf{R} + \mathbf{H}^T \mathbf{P}(N-k) \mathbf{H} \right]^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{P}(N-k) \mathbf{G}$$

$$\mathbf{P}(N-(k+1)) = [T_s \mathbf{Q} + \mathbf{K}^T (N-(k+1)) T_s \mathbf{R} \mathbf{K}(N-(k+1))] + [\mathbf{G} - \mathbf{B} \mathbf{K}(N-(k+1))]^T \mathbf{P}(N-k) [\mathbf{G} - \mathbf{H} \mathbf{K}(N-(k+1))]$$

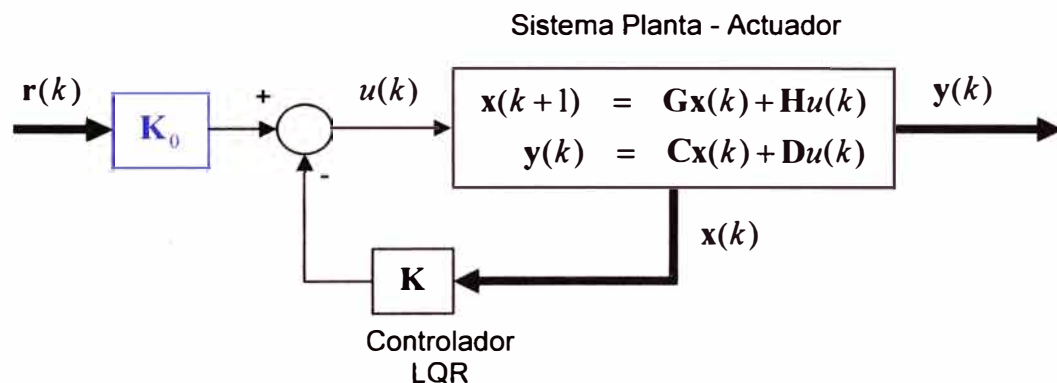
siendo  $T_s$  es el tiempo de muestreo. La condición de frontera se da en el tiempo final  $k = N$  :

$$\mathbf{x}^T(N) \mathbf{P}(N) \mathbf{x}(N) = 0$$

y el procedimiento iterativo puede comenzar con  $\mathbf{P}(N) = 0$  o alternativamente con  $\mathbf{P}(N-1) = T_s \mathbf{Q}$ .

Una vez obtenida la matriz  $\mathbf{K}$  se termina con el diseño del controlador al cual se le denomina también *Regulador Cuadrático Lineal* o LQR por sus siglas en inglés.

En la Figura 4.1 se muestra el esquema de conexión entre el controlador LQR y la planta. En dicho esquema se ha agregado el bloque  $\mathbf{K}_0$ , denominado *ganancia de prealimentación*, para mantener un determinado estado del sistema una vez alcanzado el régimen estacionario, mediante una entrada de referencia  $\mathbf{r}(k)$ .



**Figura 4.1:** Esquema del sistema con el controlador LQR.

Con la inclusión de la matriz  $\mathbf{K}_0$  la dinámica completa del sistema en lazo cerrado, mostrado en la Figura 4.1, queda definida según:

$$\mathbf{x}(k+1) = (\mathbf{G} - \mathbf{H} \mathbf{K}) \mathbf{x}(k) + \mathbf{H} \mathbf{K}_0 \mathbf{r}(k) \quad (4.7)$$

$$\mathbf{y}(k) = (\mathbf{C} - \mathbf{D} \mathbf{K}) \mathbf{x}(k) + \mathbf{D} \mathbf{K}_0 \mathbf{r}(k) \quad (4.8)$$

siendo la señal de control:

$$u(k) = -\mathbf{K} \mathbf{x}(k) + \mathbf{K}_0 \mathbf{r}(k) \quad (4.9)$$

La expresión que relaciona a  $\mathbf{K}_0$  se obtiene del análisis del sistema en estado estacionario cuando  $k \rightarrow \infty$  y  $\mathbf{r}(\infty) = \mathbf{y}(\infty)$ . Considerando esto, de las ecuaciones (4.7) y (4.8) se obtiene la siguiente expresión:

$$\mathbf{r}(\infty) = \left[ (\mathbf{C} - \mathbf{DK})(\mathbf{I} - \mathbf{G} - \mathbf{HK})^{-1} \mathbf{H} + \mathbf{D} \right] \mathbf{K}_0 \mathbf{r}(\infty) \quad (4.10)$$

En un caso general, debido al orden de las matrices, no es posible continuar simplificando la expresión (4.10) con matrices inversas. Sin embargo, si se utiliza el concepto de *matriz pseudoinversa* es posible proseguir [11].

Así, si se define la matriz:

$$\mathbf{F} = (\mathbf{C} - \mathbf{DK})(\mathbf{I} - \mathbf{G} - \mathbf{HK})^{-1} \mathbf{H} + \mathbf{D}$$

la expresión para la ecuación (4.10) toma la forma:

$$\mathbf{r}(\infty) = \mathbf{F} \mathbf{K}_0 \mathbf{r}(\infty)$$

siendo  $\mathbf{K}_0$  la matriz pseudoinversa de  $\mathbf{F}$  definida como:

$$\mathbf{K}_0 = \mathbf{F}^T (\mathbf{F}^T \mathbf{F})^{-1} \quad (4.11)$$

#### 4.1.2 Observador de estados de orden mínimo

El diseño de un observador de estados es necesario cuando no se cuenta con sensores para medir todas las variables de una planta o cuando las mediciones de los sensores no son confiables. Un observador de estados se puede denominar:

- Observador de *orden completo* si estima todas las variables de estados.
- Observador de *orden reducido* si estima algunas de las variables de estados.
- Observador de *orden mínimo* si estima las variables de estado que no se miden.

En el presente estudio es necesario diseñar un observador de orden mínimo para las estimaciones de las velocidades del carro y de la varilla. Por ello, a continuación se presenta un estudio detallado del diseño de dicho observador. Es recomendable referirse al Anexo A para una mejor comprensión de la idea de diseño, puesto que este se realiza por comparación con uno de orden completo.

Para comenzar con el diseño de un observador de orden mínimo se debe separar al vector de estados  $\mathbf{x}$  en dos partes: una parte medible  $\mathbf{x}_m$  y otra estimada  $\mathbf{x}_e$  ([6], [10])<sup>5</sup>.

$$\mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_m(k) \\ \mathbf{x}_e(k) \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

de tal forma que la dinámica, definida por las ecuaciones (2.39) y (2.40), quede representada como:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_m(k+1) \\ \mathbf{x}_e(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{mm} & \mathbf{G}_{me} \\ \mathbf{G}_{em} & \mathbf{G}_{ee} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_m(k) \\ \mathbf{x}_e(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{H}_m \\ \mathbf{H}_e \end{bmatrix} u(k) \quad (4.13)$$

<sup>5</sup> En las citas se explican diseños particulares de observadores en tiempo continuo. En el presente estudio se desarrolla un diseño general en tiempo discreto.



$$y(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_m(k) \\ \mathbf{x}_e(k) \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

En la ecuación (4.14), el vector de salida  $y$  es igual a la parte medible  $\mathbf{x}_m$  porque corresponde a la medida directa de los sensores. De la ecuación (4.13) se obtienen las ecuaciones que describen la dinámica de los elementos estimados y medibles:

$$\mathbf{x}_e(k+1) = \mathbf{G}_{em} \mathbf{x}_m(k) + \mathbf{G}_{ee} \mathbf{x}_e(k) + \mathbf{H}_e u(k) \quad (4.15)$$

$$\mathbf{x}_m(k+1) = \mathbf{G}_{mm} \mathbf{x}_m(k) + \mathbf{G}_{me} \mathbf{x}_e(k) + \mathbf{H}_m u(k) \quad (4.16)$$

Si se reordenan las ecuaciones (4.15) y (4.16) de la siguiente manera:

$$\mathbf{x}_e(k+1) = \mathbf{G}_{ee} \mathbf{x}_e(k) + \underbrace{\mathbf{G}_{em} \mathbf{x}_m(k) + \mathbf{H}_e u(k)}_{\text{ELEMENTOS CONOCIDOS}} \quad (4.17)$$

$$\underbrace{\mathbf{x}_m(k+1) - \mathbf{G}_{mm} \mathbf{x}_m(k) - \mathbf{H}_m u(k)}_{\text{PARTE MEDIBLE}} = \mathbf{G}_{me} \mathbf{x}_e(k) \quad (4.18)$$

es posible establecer analogías entre las ecuaciones (4.17), (4.18) y la dinámica del observador de orden completo (ver Anexo A) según se muestra en la Tabla 4.1.

**Tabla 4.1:** Analogías entre observadores.

Observador de Orden Completo	Observador de Orden Mínimo
$\tilde{\mathbf{x}}(k)$	$\mathbf{x}_e(k)$
$\mathbf{G}$	$\mathbf{G}_{ee}$
$\mathbf{H}u(k)$	$\mathbf{G}_{em} \mathbf{x}_m + \mathbf{H}_e u(k)$
$y(k)$	$\mathbf{x}_m(k+1) - \mathbf{G}_{mm} \mathbf{x}_m(k) - \mathbf{H}_m u(k)$
$\mathbf{C}$	$\mathbf{G}_{me}$

Si se reordena la ecuación (A.3) de  $\tilde{\mathbf{x}}(k+1)$  en la siguiente forma:

$$\tilde{\mathbf{x}}(k+1) = (\mathbf{G} - \mathbf{K}_e \mathbf{C}) \tilde{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{H}u(k) + \mathbf{K}_e y(k)$$

y se reemplazan las analogías de la Tabla 4.1, la dinámica del vector estimado es:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}_e(k+1) &= (\mathbf{G}_{ee} - \mathbf{K}_e \mathbf{G}_{me}) \tilde{\mathbf{x}}_e(k) + \mathbf{G}_{em} \mathbf{x}_m(k) + \mathbf{H}_e u(k) \\ &\quad + \mathbf{K}_e (\mathbf{x}_m(k+1) - \mathbf{G}_{mm} \mathbf{x}_m(k) - \mathbf{H}_m u(k)) \end{aligned} \quad (4.19)$$

donde, en este caso, el orden de  $\mathbf{K}_e$  debe ser tal que permita la operación con  $\mathbf{G}_{me}$ . Si se agrega  $\mathbf{K}_e \mathbf{x}_m(k+1)$  a ambos lados de la ecuación (4.19), esta ecuación se reordena en la forma siguiente:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}_e(k+1) - \mathbf{K}_e \mathbf{x}_m(k+1) &= (\mathbf{G}_{ee} - \mathbf{K}_e \mathbf{G}_{me}) (\tilde{\mathbf{x}}_e(k) - \mathbf{K}_e \mathbf{x}_m(k)) \\ &\quad + [(\mathbf{G}_{ee} - \mathbf{K}_e \mathbf{G}_{me}) \mathbf{K}_e + \mathbf{G}_{em} - \mathbf{K}_e \mathbf{G}_{mm}] \mathbf{x}_m(k) \\ &\quad + (\mathbf{H}_e - \mathbf{K}_e \mathbf{H}_m) u(k) \end{aligned} \quad (4.20)$$

y si se define el vector  $\boldsymbol{\eta}(k)$  en la forma:

$$\boldsymbol{\eta}(k) = \mathbf{x}_e(k) - \mathbf{K}_e \mathbf{x}_m(k)$$

el vector estimado para dicho vector es:

$$\tilde{\boldsymbol{\eta}}(k) = \tilde{\mathbf{x}}_e(k) - \mathbf{K}_e \mathbf{x}_m(k) \quad (4.21)$$

la ecuación (4.20) queda expresada en la forma:

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{\eta}}(k+1) &= (\mathbf{G}_{ee} - \mathbf{K}_e \mathbf{G}_{me}) \boldsymbol{\eta}(k) \\ &+ [(\mathbf{G}_{ee} - \mathbf{K}_e \mathbf{G}_{me}) \mathbf{K}_e + \mathbf{G}_{em} - \mathbf{K}_e \mathbf{G}_{mm}] \mathbf{x}_m(k) \\ &+ (\mathbf{H}_e - \mathbf{K}_e \mathbf{H}_m) u(k) \end{aligned} \quad (4.22)$$

De esta manera, las ecuaciones (4.21) y (4.22) definen la dinámica del observador de orden mínimo.

Si se define el vector de error de estimación  $\boldsymbol{\xi}_e$  como:

$$\boldsymbol{\xi}_e(k) = \mathbf{x}_e(k) - \tilde{\mathbf{x}}_e(k) = \boldsymbol{\eta}(k) - \tilde{\boldsymbol{\eta}}(k) \quad (4.23)$$

la dinámica de dicho error se obtiene restando las ecuaciones (4.17) y (4.19), lo cual da como resultado:

$$\boldsymbol{\xi}_e(k+1) = (\mathbf{G}_{ee} - \mathbf{K}_e \mathbf{G}_{me}) \boldsymbol{\xi}_e(k) \quad (4.24)$$

Así, de la ecuación (4.24) se puede notar que el problema de diseño del observador se reduce a encontrar la *matriz ganancia del observador*  $\mathbf{K}_e$  y para esto pueden emplearse los conceptos de *ubicación arbitraria de polos* y de *sistema dual*.

Para analizar el efecto del observador de orden reducido en conjunto con el controlador LQR, se debe considerar que ahora la ley de control tiene la forma:

$$u(k) = -\mathbf{K} \tilde{\mathbf{x}}(k) \quad (4.25)$$

siendo el vector de estado estimados:

$$\tilde{\mathbf{x}}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_m(k) \\ \tilde{\mathbf{x}}_e(k) \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

Entonces, de las ecuaciones (4.23), (4.25) y (4.26) la dinámica del vector de estados queda definida por la ecuación siguiente:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x} - \mathbf{H}\mathbf{K} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_m(k) \\ \mathbf{x}_e(k) - \boldsymbol{\xi}_e(k) \end{bmatrix}$$

la cual puede ser reordenada de la siguiente manera:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x} - \mathbf{H}\mathbf{K}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}\mathbf{K} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\xi}_e(k) \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

Si la matriz  $\mathbf{K}$  es dividida en dos partes, de modo que una de ellas se denomine parte medible  $\mathbf{K}_{med}$  y la otra parte estimada  $\mathbf{K}_{est}$ , en la forma siguiente:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{med} & \vdots & \mathbf{K}_{est} \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

y se consideran las ecuaciones (4.24) y (4.27), se obtiene la ecuación matricial que describe la dinámica del sistema de control realimentado y estimado con un observador de orden mínimo:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(k+1) \\ \xi_e(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G} - \mathbf{H}\mathbf{K} & \mathbf{H}\mathbf{K}_{ce} \\ 0 & \mathbf{G}_{ee} - \mathbf{K}_e\mathbf{G}_{me} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \xi_e(k) \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

Así, de la ecuación (4.29) se observa que la ecuación característica del sistema de control tiene la siguiente forma:

$$|z\mathbf{I} - \mathbf{G} + \mathbf{H}\mathbf{K}| |z\mathbf{I} - \mathbf{G}_{ee} + \mathbf{K}_e\mathbf{G}_{me}| = 0 \quad (4.30)$$

y, por tanto, los polos escogidos para el observador de orden mínimo no afectan a los polos del controlador y la recomendación de diseño para el observador es que su respuesta sea más rápida que la del sistema de control.

Para graficar el esquema del observador de orden reducido es necesario definir las matrices:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{G}_{OB} &= \mathbf{G}_{ee} - \mathbf{K}_e\mathbf{G}_{me} \\ \mathbf{H}_{OB} &= \mathbf{G}_{OB}\mathbf{K}_e + \mathbf{G}_{em} - \mathbf{K}_e\mathbf{G}_{mm} \\ \mathbf{F}_{OB} &= \mathbf{H}_e - \mathbf{K}_e\mathbf{H}_m \end{aligned} \right\} \quad (4.31)$$

de modo que al reemplazar las matrices (4.31) en la ecuación (4.22), dicha ecuación quede expresada en la forma siguiente:

$$\tilde{\boldsymbol{\eta}}(k+1) = \mathbf{G}_{OB}\tilde{\boldsymbol{\eta}}(k) + \mathbf{H}_{OB}\mathbf{x}_m(k) + \mathbf{F}_{OB}\mathbf{u}(k)$$

Además de la definición en la ecuación (4.21), se puede definir al vector de estados estimados  $\tilde{\mathbf{x}}$  en la forma:

$$\tilde{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{\eta}} + \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{K}_e \end{bmatrix} \mathbf{x}_m$$

donde, las matrices  $\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}$  y  $\begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{K}_e \end{bmatrix}$  permiten realizar la transformación de  $\tilde{\boldsymbol{\eta}}$  a  $\tilde{\mathbf{x}}$ .

En la Figura 4.2 se muestra el esquema completo del sistema de control en donde, además, se muestra el bloque  $\mathbf{K}_0$  o ganancia de pre-alimentación definido por la matriz en (4.11).

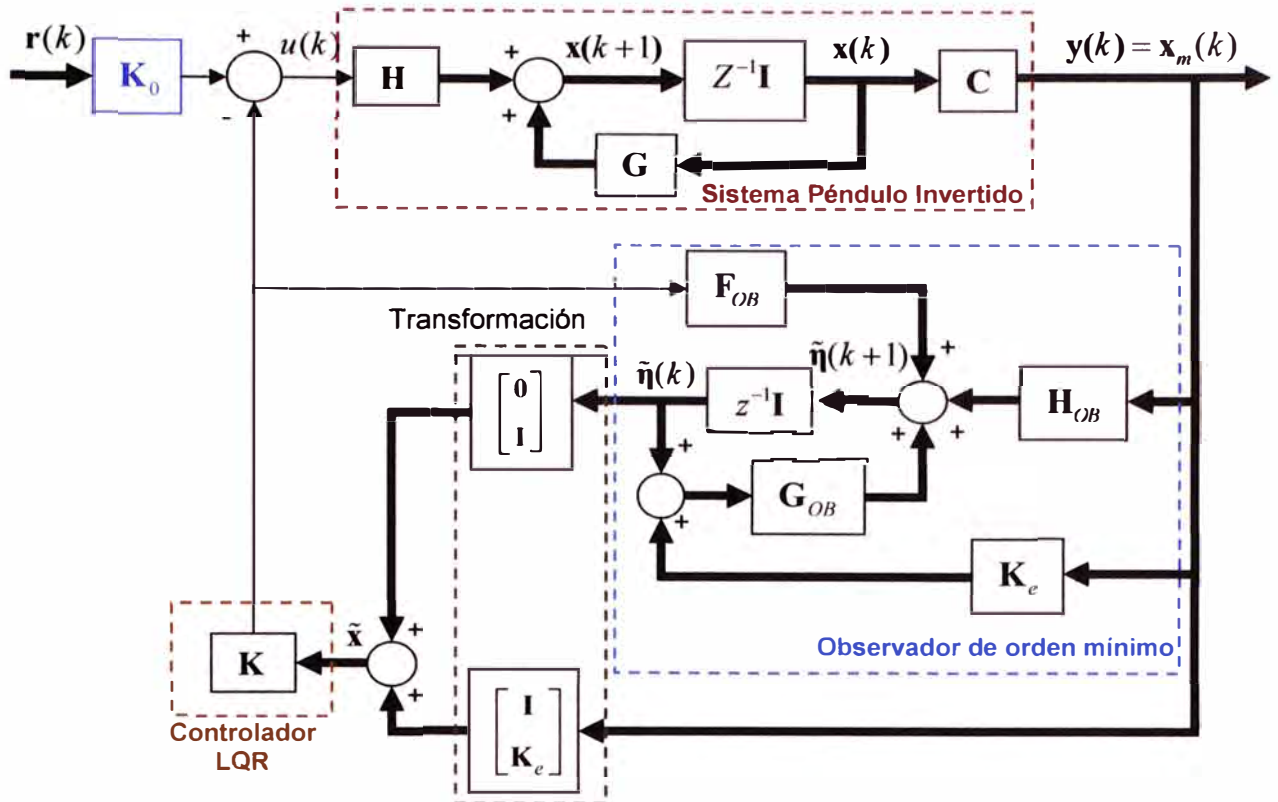


Figura 4.2: Esquema completo del sistema de control.

#### 4.1.3 Dinámica del sistema de control con entrada de referencia

La dinámica del sistema de control con una entrada de referencia se determina a partir de la ecuación de estado:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}u(k)$$

y considerando como señal de control a:

$$u(k) = -\mathbf{K}\tilde{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{K}_0\mathbf{r}(k)$$

Así, de las definiciones de  $\mathbf{K}_0$ ,  $\mathbf{x}(k)$ ,  $\xi_e(k)$ ,  $\tilde{\mathbf{x}}(k)$  y  $\mathbf{K}$ , definidas en las ecuaciones (4.11) (4.12), (4.23), (4.26) y (4.28) respectivamente, la ecuación del vector de estados queda definida según:

$$\mathbf{x}(k+1) = (\mathbf{G} - \mathbf{H}\mathbf{K})\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}\mathbf{K}_{est}\xi_e(k) + \mathbf{H}\mathbf{K}_0\mathbf{r}(k)$$

y considerando, además, la dinámica del vector error  $\xi_e(k)$  definida en la ecuación (4.24) se define un sistema de control ampliado cuya dinámica es descrita por la siguiente ecuación matricial:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(k+1) \\ \xi_e(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G} - \mathbf{H}\mathbf{K} & \mathbf{H}\mathbf{K}_{est} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}_{ee} - \mathbf{K}_e\mathbf{G}_{me} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \xi_e(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{H}\mathbf{K}_0 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{r}(k)$$

donde,  $\mathbf{0}$  son matrices nulas que permiten completar los órdenes de las matrices de estado ampliado.

## 4.2 Diseño del sistema de control

El diseño del sistema de control óptimo digital para el control de posición del péndulo invertido, que consiste de un controlador óptimo LQR y de un observador de estados de orden mínimo, se realiza con el programa *PenduloInvertido.m* desarrollado a partir de la dinámica definida por las matrices en las ecuaciones (2.41) y (2.42) de la sección 2.2.6.

### 4.2.1 Diseño del controlador óptimo LQR

De acuerdo con lo mencionado en la sección 4.1.2, la matriz ganancia de realimentación  $\mathbf{K}$  se obtiene resolviendo la ecuación de Riccati, definida en la ecuación (4.6), con un procedimiento iterativo, el cual necesita que se determinen previamente las matrices de ponderación  $\mathbf{Q}$  y  $\mathbf{R}$  cuyos valores se escogen arbitrariamente pero teniendo presente que dicha elección significa un compromiso entre el rendimiento del sistema y los esfuerzos por controlarlo.

Así, las matrices  $\mathbf{Q}$  y  $\mathbf{R}$  escogidas son las siguientes:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 300 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

$$\mathbf{R} = [10]$$

y la matriz ganancia calculada es la siguiente:

$$\mathbf{K} = [-4.7054 \quad 9.3000 \quad 0.0980 \quad 2.7882] \quad (4.33)$$

La matriz de pre-alimentación  $\mathbf{K}_0$ , definida por la ecuación (4.11), es calculada como:

$$\mathbf{K}_0 = [-4.7054 \quad 0]$$

Por tanto, la señal de control  $u(k)$  definida por la ecuación (4.9) queda determinada como:

$$u(k) = -[-4.7054 \quad 9.3000 \quad 0.0980 \quad 2.7882]\mathbf{x}(k) + [-4.7054 \quad 0]\mathbf{r}(k)$$

En el caso del péndulo invertido, La matriz  $\mathbf{K}_0$  permite que, en estado estacionario, el carro siempre vaya a una posición determinada mediante la entrada de referencia  $\mathbf{r}(k)$ . Esto es importante debido a la limitada longitud del riel.

### 4.2.2 Diseño del observador de orden mínimo

El péndulo invertido propuesto es un sistema de orden 4 que solo cuenta con sensores para las medidas de la posición del carro y del ángulo de la varilla. Por tanto, se requiere diseñar un observador de estados de orden mínimo, e igual a 2, que estime los valores no medibles de las velocidades del carro y de la varilla.

A partir de la forma de la dinámica definida en la ecuación (4.13) y de las matrices  $\mathbf{G}$  y  $\mathbf{H}$  definidas en las ecuaciones (2.41) y (2.42), se determina el siguiente conjunto de matrices medibles y estimables:

$$\mathbf{G}_{mm} = \begin{bmatrix} 1 & 3.293 \times 10^{-4} \\ 0 & 1.0051 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G}_{me} = \begin{bmatrix} 0.0285 & 2.816 \times 10^{-6} \\ 0.0015 & 0.0300 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G}_{em} = \begin{bmatrix} 0 & 0.0216 \\ 0 & 0.3413 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G}_{ee} = \begin{bmatrix} 0.9037 & 2.963 \times 10^{-4} \\ 0.1032 & 1.0045 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}_m = \begin{bmatrix} 0.0013 \\ 0.0015 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}_e = \begin{bmatrix} 0.0869 \\ 0.1028 \end{bmatrix}$$

El diseño del observador se realiza mediante la ubicación arbitraria de polos, considerando que su respuesta debe ser más rápida que la del sistema controlado a fin que la estimación de valores suceda rápidamente.

Por tanto, es necesario determinar los polos del sistema controlado, los cuales se obtienen a partir de la matriz  $\mathbf{G} - \mathbf{H}\mathbf{K}$  y con ayuda el comando *eig* de Matlab, en la forma siguiente:

$$\begin{aligned} \text{eig}(\mathbf{G} - \mathbf{H}\mathbf{K}) &= \\ &= 0.8931 + 0.0604i \\ &= 0.8931 - 0.0604i \\ &= 0.9171 \\ &= 0.9071 \end{aligned} \tag{4.34}$$

A partir de los polos del sistema controlado determinados en (4.34), se pueden escoger como polos del observador a  $z_1 = 0.2$  y  $z_2 = 0.3$  a fin que la respuesta del observador sea más rápida que el sistema controlado. Así, se forma la siguiente matriz de polos:

$$\mathbf{P} = [0.2 \quad 0.3] \tag{4.35}$$

de modo que la matriz  $\mathbf{K}_e$  se pueda determinar usando el concepto de sistema dual y el comando *place*, en la forma  $\mathbf{K}_e = \text{place}(\mathbf{G}_{ee}^T, \mathbf{G}_{me}^T, \mathbf{P})^T$  (ver [11]), cuyo resultado es:

$$\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} 24.665 & 0.0076 \\ 2.3256 & 23.4522 \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

Por tanto, las matrices  $\mathbf{G}_{OB}$ ,  $\mathbf{C}_{OB}$  y  $\mathbf{H}_{OB}$  definidas en (4.31) se calculan como:

$$\mathbf{G}_{OB} = \begin{bmatrix} 0.2 & -5.83 \times 10^{-17} \\ -4.16 \times 10^{-17} & 0.3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}_{OB} = \begin{bmatrix} -19.7324 & 0.0074 \\ -1.6279 & -16.1959 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}_{OB} = \begin{bmatrix} 0.0542 \\ 0.0641 \end{bmatrix}$$

Todos estos resultados permiten terminar el diseño del observador de orden mínimo cuyo esquema se muestra en la Figura 4.2.

Es importante recordar que la matriz  $\mathbf{G}_{OB} = \mathbf{G}_{ee} - \mathbf{K}_e \mathbf{G}_{me}$  define la dinámica del error de estimación y los elementos de su diagonal principal corresponden a los polos escogidos  $z_1 = 0.2$  y  $z_2 = 0.3$ , cuyos valores deben hacer que los errores en las estimaciones de las velocidades del carro y de la varilla decaigan rápidamente a cero.

### 4.3 Simulación de la dinámica del sistema de control

Para la simulación de la dinámica del sistema de control óptimo se definen las siguientes matrices:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{GOB}_{\min} &= \begin{bmatrix} \mathbf{G} - \mathbf{HK} & \mathbf{HK}_{est} \\ 0 & \mathbf{G}_{ee} - \mathbf{K}_e \mathbf{G}_{me} \end{bmatrix} \\ \mathbf{HOB}_{\min} &= \begin{bmatrix} \mathbf{HK}_0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (4.37)$$

y para analizar la respuesta del sistema, mediante la visualización de los vectores de estados, las matrices de la ecuación de salida se redefinen de la siguiente forma:

$$\mathbf{COB}_{\min} = \mathbf{I}_{6 \times 6}$$

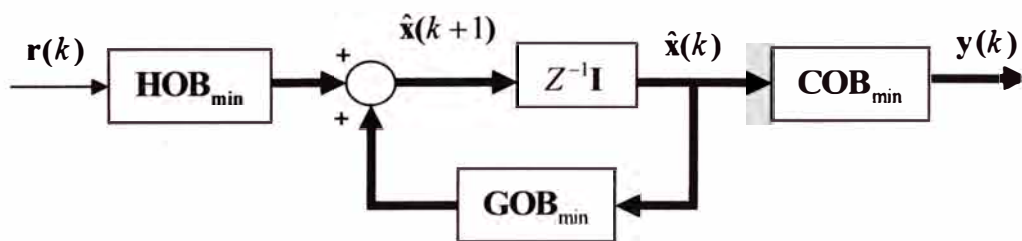
$$\mathbf{DOB}_{\min} = \mathbf{0}_{6 \times 2}$$

Así, las matrices expresadas en (4.37) son calculadas como:

$$\mathbf{GOB}_{\min} = \begin{bmatrix} 1.0062 & -0.0120 & 0.0284 & -0.0037 & -0.0001 & 0.0037 \\ 0.0071 & 0.9910 & 0.0014 & 0.0258 & -0.0001 & 0.0042 \\ 0.4088 & -0.7863 & 0.8953 & -0.2419 & -0.0085 & 0.2422 \\ 0.4837 & -0.6146 & 0.0932 & 0.7180 & -0.0101 & 0.2866 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & -5.83 \times 10^{-17} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4.16 \times 10^{-17} & 0.3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{HOB}_{\min} = \begin{bmatrix} -0.0062 & 1.52 \times 10^{-18} \\ -0.0071 & 1.75 \times 10^{-18} \\ -0.4088 & 100 \times 10^{-18} \\ -0.4837 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

En la Figura 4.3 se muestra el esquema del sistema controlado y observado para la simulación, en donde el vector de estados que ahora se considera, es un vector ampliado en la forma  $\hat{\mathbf{x}}(k) = [\mathbf{x}(k) \quad \xi_e(k)]^T$  a fin de incluir al error de estimación. La entrada de referencia  $\mathbf{r}(k)$  es un vector nulo  $\mathbf{0}_{2 \times 6}$  que permite mantener en estado estacionario los estados  $x = 0$  m y  $\theta = 0^\circ$ .



**Figura 4.3:** Esquema del sistema péndulo invertido controlado y observado.

En la Figura 4.4 se muestra la simulación de la respuesta del sistema de control óptimo diseñado cuando el carro se encuentra al lado izquierdo del riel con la varilla inclinada hacia la izquierda y cayendo con cierta velocidad. Dicha situación se especifica con las condiciones iniciales  $x = -0.45$  m,  $\theta = 20^\circ$  (0.35 rad),  $\dot{x} = 0$  m/s, y  $\dot{\theta} = 0$  rad/s, las cuales se representa con el vector de estados real  $\mathbf{x} = [-0.45 \quad 0.35 \quad 0 \quad 0]^T$ .

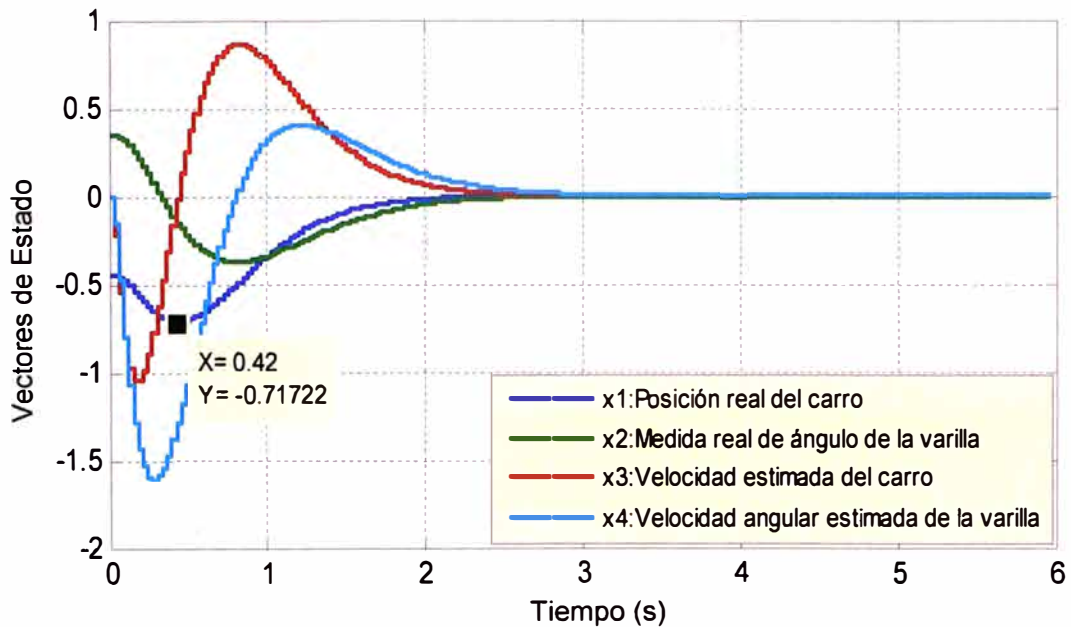
Las condiciones iniciales para las variables estimadas son nulas y se considera un error de estimación inicial  $\xi_e(0) = [-1 \quad 1]^T$ . Así, las condiciones iniciales del vector de estados ampliado son  $\hat{\mathbf{x}}(k) = [-0.45 \quad 0.35 \quad 0 \quad 0 \quad -1 \quad 1]^T$  y la gráfica de posición indica que el carro llega a  $x = -0.717$  m; es decir, casi hasta el extremo izquierdo en  $x = 0.75$  m. Dichas condiciones iniciales plantean una situación extrema de funcionamiento.



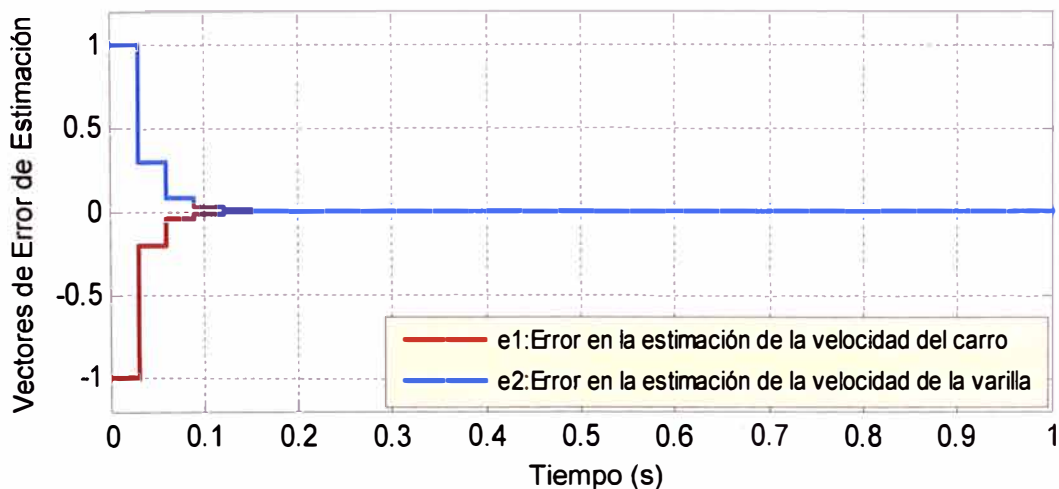
En la Figura 4.5 se muestra la gráfica del vector error de estimación, cuyos componentes son  $e_1$  y  $e_2$  que corresponden a los errores en las estimaciones de las velocidades del carro y de la varilla respectivamente. De las gráficas puede notarse que el error de estimación decae rápidamente a cero en aproximadamente en 0.2 s., lo cual demuestra la rápida respuesta del observador de orden mínimo.

En las Figuras 4.6 y 4.7 se comparan las gráficas de la velocidad real y estimada del carro y de la varilla respectivamente, para las condiciones iniciales establecidas por  $\hat{x}(0)$ . Las gráficas reales se obtienen simulando un sistema de control basado solamente en el controlador LQR asumiendo que todas las variables del sistema son medidas.

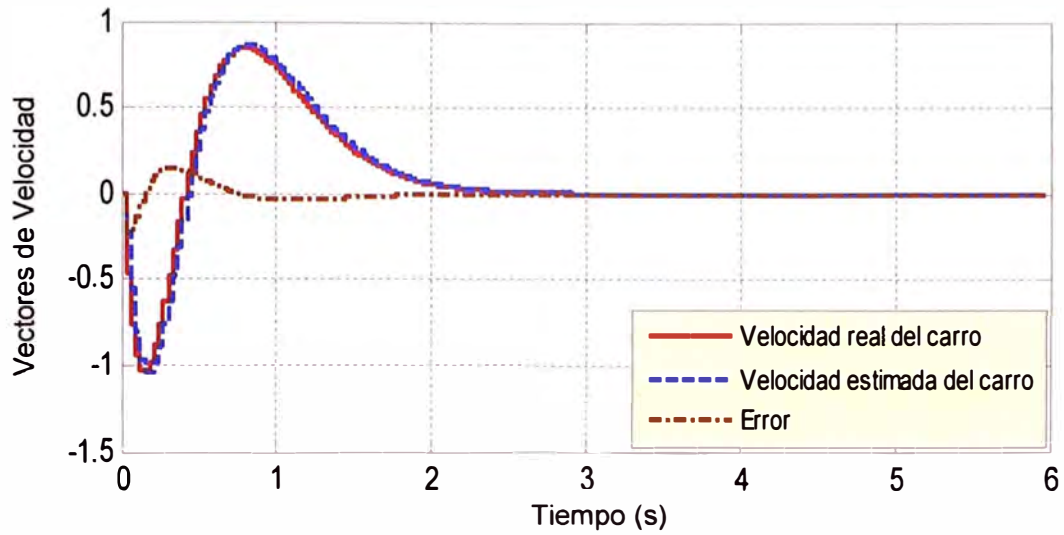
En la Figura 4.8 se muestra la señal de control  $u(k)$  obtenida con el vector de estados estimado y en la Figura 4.9 se la compara con la señal de control real.



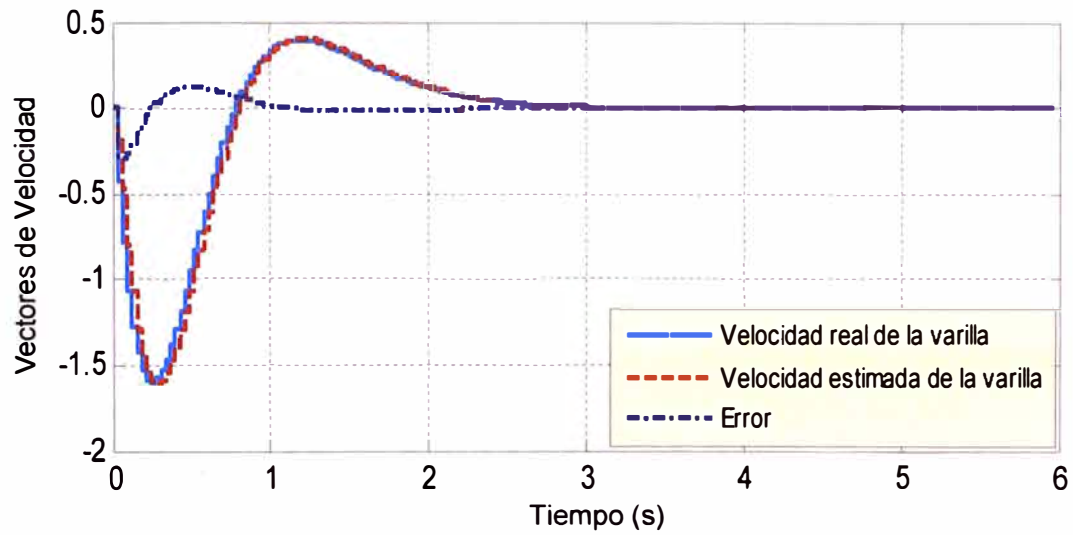
**Figura 4.4:** Simulación de la respuesta del sistema de control óptimo.



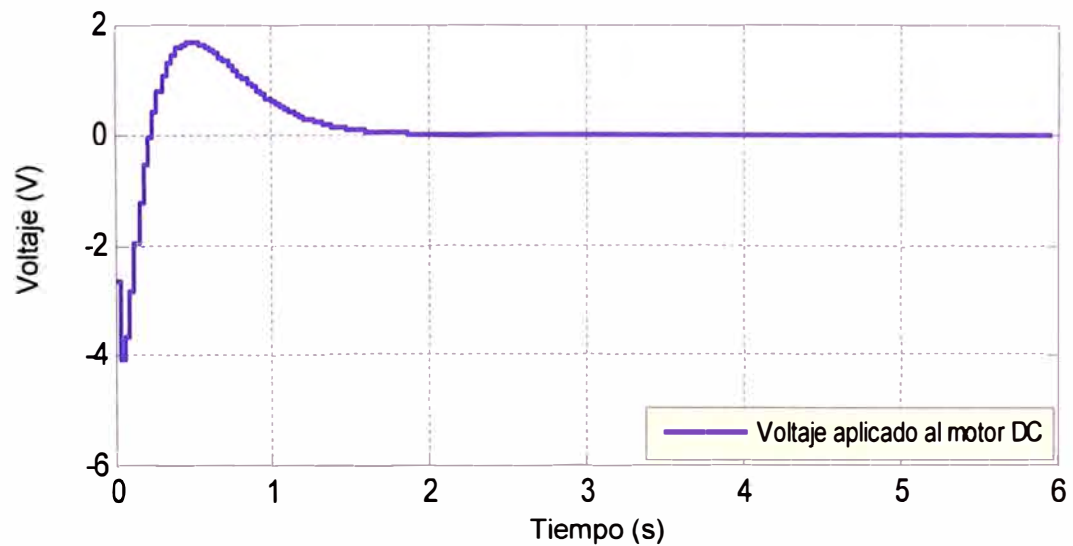
**Figura 4.5:** Simulación de la dinámica del vector error de estimación.



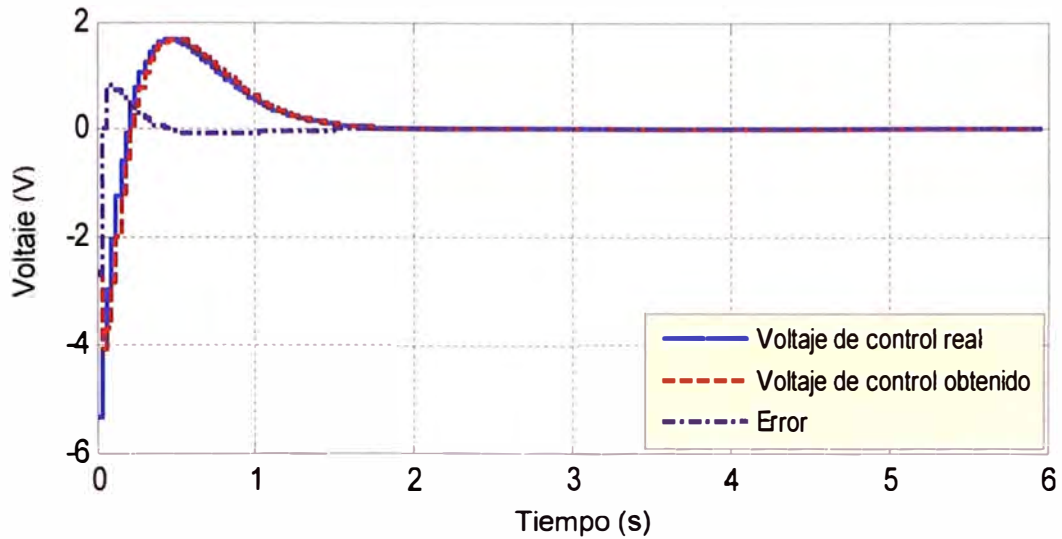
**Figura 4.6:** Comparación entre la velocidad real y estimada del carro.



**Figura 4.7:** Comparación entre la velocidad real y estimada de la varilla.



**Figura 4.8:** Voltaje de control obtenido.



**Figura 4.9:** Comparación del voltaje de control obtenido con el real.

De esta manera, la simulación realizada muestra que el control de posición del péndulo invertido se establece en menos de 3 s. con sobre-picos normales en las variables del sistema y con un voltaje de control dentro del rango de  $[-12; 12]$ .

En el capítulo VI se analizan otras respuestas del sistema de control óptimo al hacer variaciones de algunos de los parámetros de diseño.

## CAPÍTULO V

### DISEÑO Y SIMULACIÓN DEL SISTEMA DE CONTROL DIFUSO

En el presente capítulo se muestra el diseño y la simulación del sistema de control difuso que permite controlar la posición del péndulo invertido. Dicho sistema de control se desarrolla a partir de los datos provenientes de los sensores de posición y de medida angular; y del conocimiento experto del funcionamiento del péndulo invertido. Con esta información y usando lógica difusa se elabora un algoritmo de control al cual se le denomina controlador difuso.

#### 5.1 Fundamento teórico

##### 5.1.1 La lógica y el control difuso

La lógica difusa fue desarrollada como una forma de procesar información imprecisa o incompleta en base al concepto de *conjunto difuso* propuesto por el profesor Lotfi Zadeh de la Universidad de California en Berkley en 1965.

La lógica difusa permite realizar un razonamiento o inferencia en forma similar a como las personas manejan las informaciones en su vida cotidiana. Por ejemplo, cuando se dice: “hace mucho calor” o “el autobús va muy rápido”, las palabras “mucho” o “muy rápido” no dan valores exactos sobre la temperatura o la velocidad. Incluso dichos valores pueden ser diferentes de persona a persona. Sin embargo, dichas informaciones son suficientes para que las personas evalúen y decidan algo dentro de un contexto.

Por ejemplo, **si** se sabe que:

- “hace mucho calor” **entonces** “no usamos un abrigo”.
- “hace mucho frío” **entonces** “usamos un abrigo”.

Es así, que en base al concepto de lógica difusa, el profesor Ebrahim Mamdani de la universidad de Londres desarrolla entre los años de 1972 y 1974 el primer sistema de *control difuso* para el control de una pequeña máquina de vapor que consistía de una caldera y un motor. El objetivo de control consistía en mantener constante la presión en la caldera y la velocidad del motor mediante la asignación de calor a través del cierre o apertura de una válvula.

El algoritmo de control desarrollado por el profesor Mamdani se basaba en un conjunto de *reglas heurísticas o difusas* sintetizadas a partir de la experiencia de los operadores de la planta en el manejo del sistema caldera-motor.

### 5.1.2 Conceptos básicos

A continuación se presenta una breve descripción de los conceptos fundamentales para establecer un proceso de inferencia difusa. Para mayores detalles referirse a [12].

#### a. Conjunto difuso

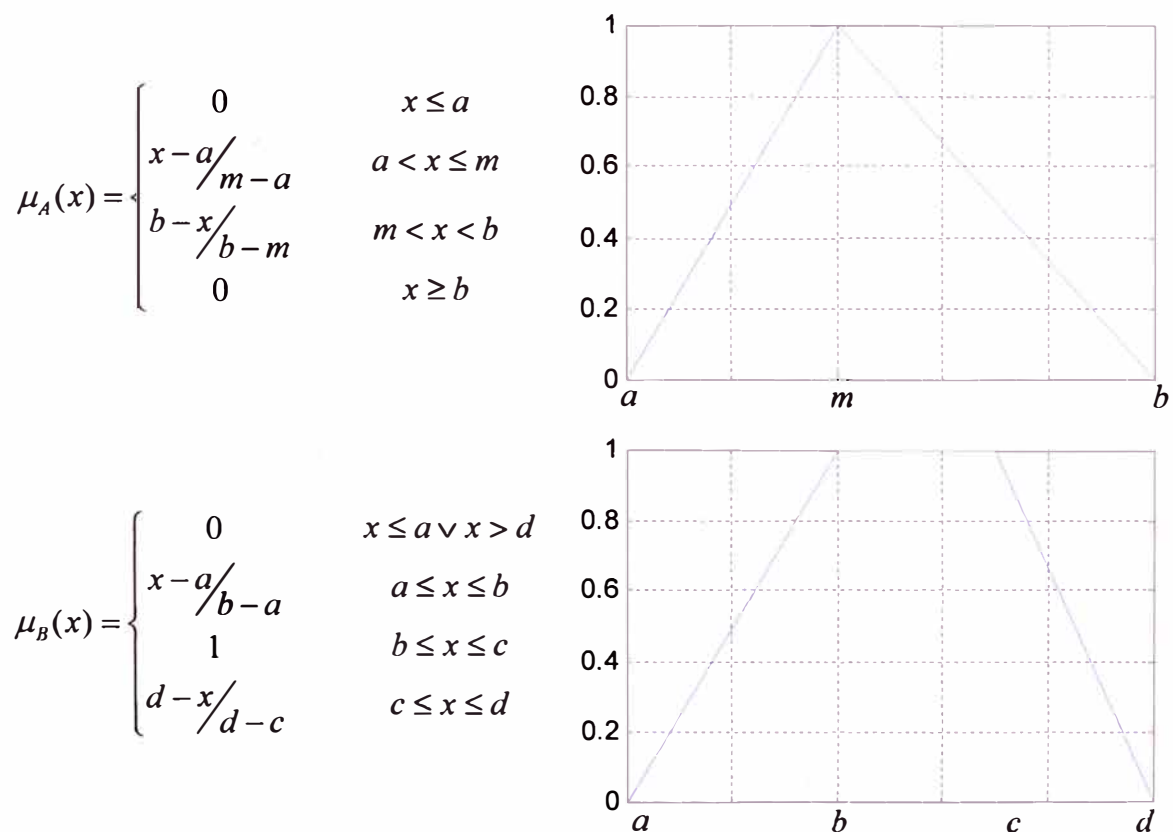
Un conjunto difuso se define como un conjunto de pares ordenados en la forma:

$$A = \{(x, \mu_A(x)) / x \in U\}$$

donde,  $\mu_A(x): U \rightarrow [0,1]$  se denomina *función de pertenencia* y asigna un valor entre 0 y 1 a cada elemento  $x$  y con ello se determina el grado de pertenencia de dicho elemento al conjunto  $A$ .  $U$  es el conjunto universo y se denomina *universo de discurso* porque está conformado por variables lingüísticas o palabras. Así, un conjunto difuso permite describir matemáticamente conceptos imprecisos como: mucho calor, muy rápido, etc; asignándoles ciertos valores de pertenencia.

#### b. Función de pertenencia

Una función de pertenencia  $\mu_A(x)$  puede ser cualquier tipo de función matemática. Sin embargo, para el cálculo computacional, es conveniente usar funciones simples como formas triangulares o trapezoidales como se muestra en la Figura 5.1.



**Figura 5.1:** Tipos de funciones de pertenencia.

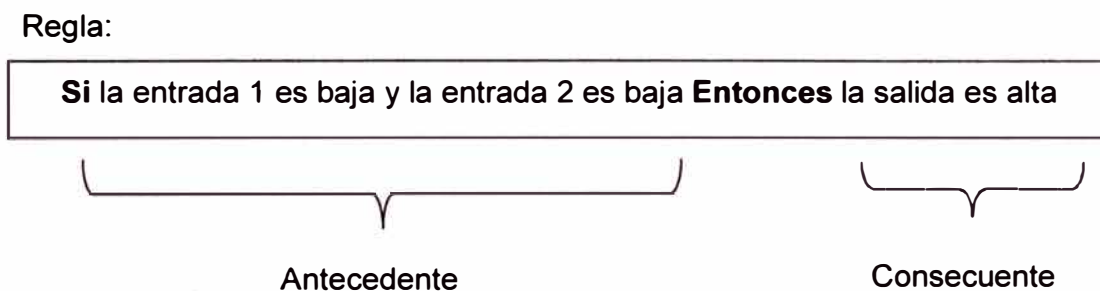
### c. Operaciones con conjuntos difusos

Las tres operaciones básicas con conjuntos difusos son la unión, la intersección y el complemento.

- Unión:  $A \cup B \Rightarrow \mu_{A \cup B} = \max \{ \mu_A(x), \mu_B(x) \}$
- Intersección:  $A \cap B \Rightarrow \mu_{A \cap B} = \min \{ \mu_A(x), \mu_B(x) \}$
- Complemento:  $A' \Rightarrow \mu_{A'} = 1 - \mu_A$

### d. Regla difusa Si-Entonces

Una regla difusa es una proposición lógica de la forma *Si – Entonces*. La estructura más simple de una regla difusa tiene una sola variable de entrada y una sola variable de salida. Sin embargo, y por lo general, la estructura tiene varias entradas conectadas a través de *conectivos lógicos* (and, or y not) y puede tener varias salidas; denominándose *antecedente* al conjunto de variables de entrada y *consecuente* al conjunto de variables de salidas. Este tipo de estructura conforma una regla del tipo *Mamdani* y un ejemplo de ella se muestra en la Figura 5.2.



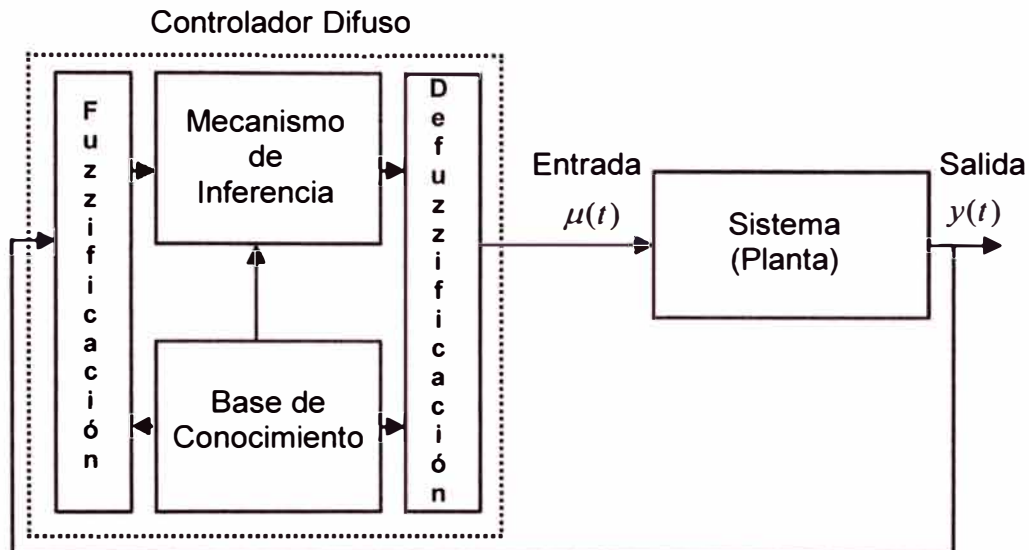
**Figura 5.2:** Regla difusa del tipo Mamdani.

#### 5.1.3 Sistema de control difuso

Un sistema de control difuso realiza inferencias a partir de una base de conocimientos. Dichas inferencias permiten tomas de decisiones durante el funcionamiento de un sistema o planta. Es decir, un sistema de control difuso debe generar acciones de control sobre un proceso a partir de un conjunto de reglas de inferencia. La estructura general para el diseño de un controlador difuso se muestra en la Figura 5.3. A continuación se describe brevemente cada etapa de diseño.

- **Base de conocimiento:** que está compuesta por un conjunto de reglas difusas sintetizadas a partir de una base de datos que contiene la información relativa del sistema. Dicha base de datos permite definir las funciones de pertenencia a utilizar.
- **Interface de fuzzificación:** proceso que utiliza las funciones de pertenencia para asignar valores de pertenencia, entre cero y uno, a los valores reales de una variable de entrada proveniente de algún sensor.

- **Mecanismo de inferencia:** calcula los diferentes niveles de pertenencia proporcionados por la interface de fuzzificación y en base al conjunto de reglas ya definidas se generan valores difusos (conjunto difuso).
- **Interface de defuzzificación:** proceso que convierte al conjunto difuso proporcionado por el mecanismo de inferencia, en un único valor de salida real que pueda ser utilizado por los actuadores del sistema.



**Figura 5.3:** Estructura general de un controlador difuso.

#### 5.1.4 Principales controladores difusos

Los principales controladores difusos que se diseñan son del tipo Mamdani o del tipo Takagi–Sugeno. Por lo general, se diseña un controlador difuso del tipo Mamdani cuando no se tiene un modelo matemático que describa la dinámica de la planta o sistema a controlar. En cambio, si se cuenta con el modelo matemático de la planta se puede diseñar un controlador difuso del tipo Takagi–Sugeno.

En la Figura 5.4 se muestra el esquema de operación de los controladores en donde, por ejemplo, el tipo Mamdani hace la defuzzificación usando los principios de mínimo, máximo o centroide del área; y el tipo Takagi–Sugeno hace la defuzzificación usando un método de ponderación de unas funciones establecidas a partir del modelo matemático de la planta.

#### 5.1.5 Fuzzy Logic Toolbox

Una vez definidas las funciones de pertenencia y las reglas difusas, la tarea de diseño, edición y observación del sistema de control difuso se puede hacer con herramientas gráficas. De esta manera, en el presente estudio se utiliza el *Fuzzy Logic Toolbox* de Matlab. Por tanto, es recomendable referirse al Anexo B para una rápida introducción en el uso de dicha herramienta. Para mayores detalles revisar la ayuda online [13] o la ayuda interna del programa.

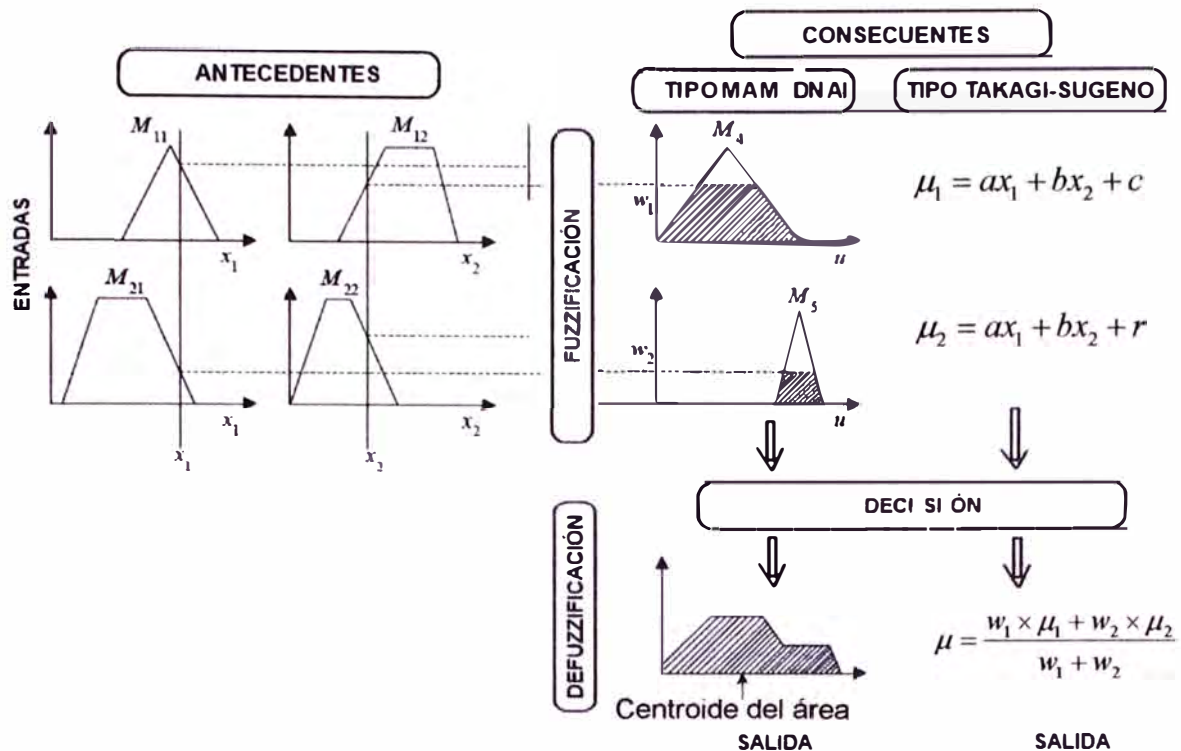


Figura 5.4: Algoritmos difusos Mamdani y Takagi-Sugeno.

## 5.2 Diseño del sistema de control difuso

En el presente estudio se diseña un controlador difuso del tipo Mamdani basándose únicamente en la forma de operación o *conocimiento experto* del sistema péndulo invertido y en los datos proporcionados por los sensores, sin la necesidad de tener un modelo matemático del sistema. Así, las entradas al sistema de control son los datos de los sensores de posición y de la medida angular; siendo la salida del sistema el voltaje de control del motor DC.

### 5.2.1 Funciones de pertenencia y reglas difusas

En la Figura 2.1 se estableció un sistema de referencia con respecto al cual una variable puede ser positiva, negativa o cero. Así, se consideran 5 funciones de pertenencia: Positiva Grande (PG), Positiva Pequeña (PP), Cero (Z), Negativa pequeña (NP) y Negativa Grande (NG); con las cuales se establecen situaciones de funcionamiento del péndulo invertido, teniendo en cuenta que el movimiento del carro debe ser opuesto a las condiciones de las variables que hagan caer la varilla.

Así por ejemplo, supóngase la situación mostrada en la Figura 5.5 donde se considera que  $x$  es PP y  $\theta$  es NG. Esta situación debe provocar que el voltaje de control aplicado al motor DC permita mover al carro rápidamente aun más a la derecha para evitar la caída de la varilla, entonces  $V_m$  debe ser PG.

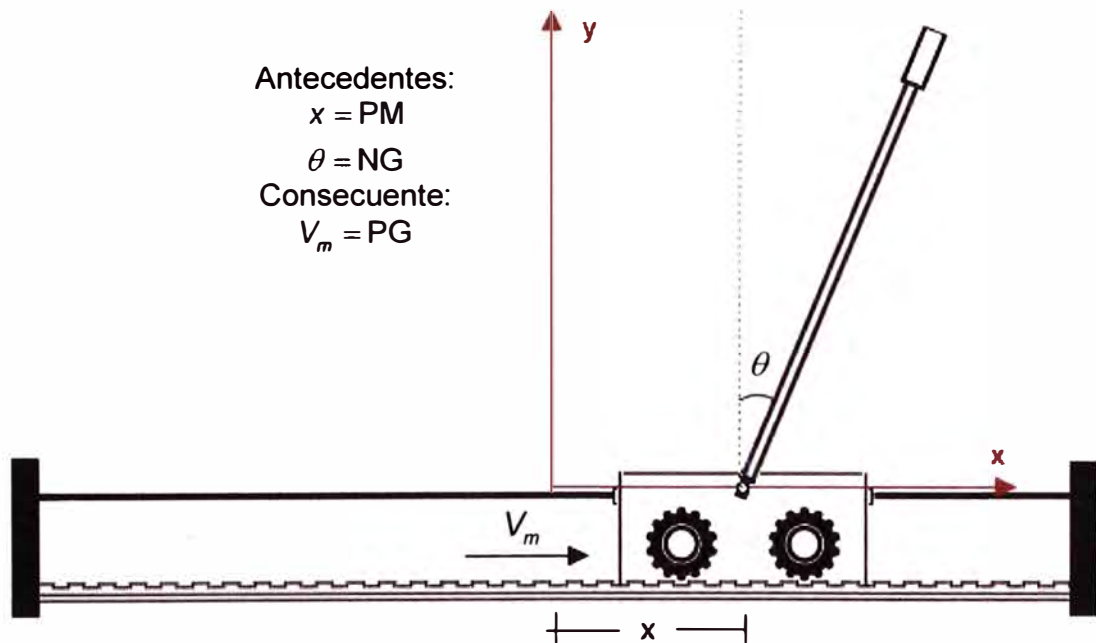
De esta manera, considerando que cada variable tiene 5 funciones de pertenencia, el conocimiento experto del sistema se sintetiza en  $5 \times 5 = 25$  reglas difusas. Cada una de



las reglas tiene por antecedentes a las variables de entrada  $x$  y  $\theta$ ; y por consecuente a la variable de salida  $V_m$ . El conjunto de las 25 reglas difusas es resumido en la Tabla 5.1.

Las funciones de pertenencia consideradas son del tipo triangular y sus rangos de operación dependen de la variable del sistema a la que estén asociadas. Así, dichos rangos de operación se establecen teniendo en cuenta los rangos de las variables del sistema, los cuales se muestran en la Tabla 5.2.

Para la implementación de la reglas y de las funciones de pertenencia se hace uso de *Fuzzy Logic Toolbox*, siguiendo el procedimiento descrito en el Anexo B. En las Figuras 5.6, 5.7 y 5.8 se muestran las variables del sistema y sus respectivas funciones de pertenencia. Con todo esto se termina el diseño del controlador difuso cuyo programa se denomina *ControladorDifuso.fis*.



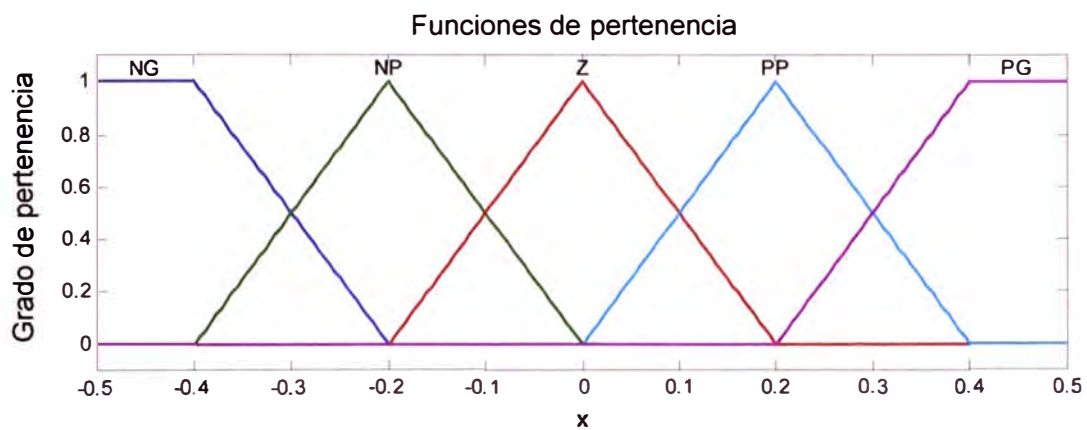
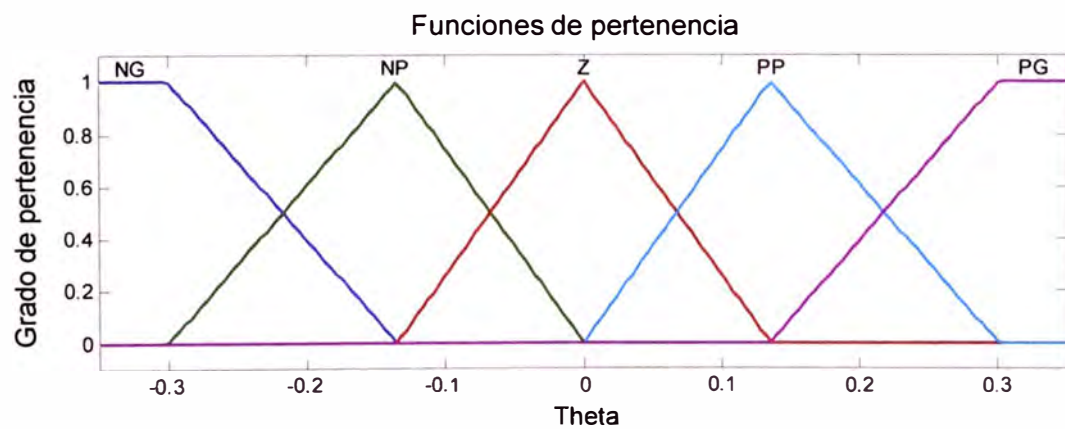
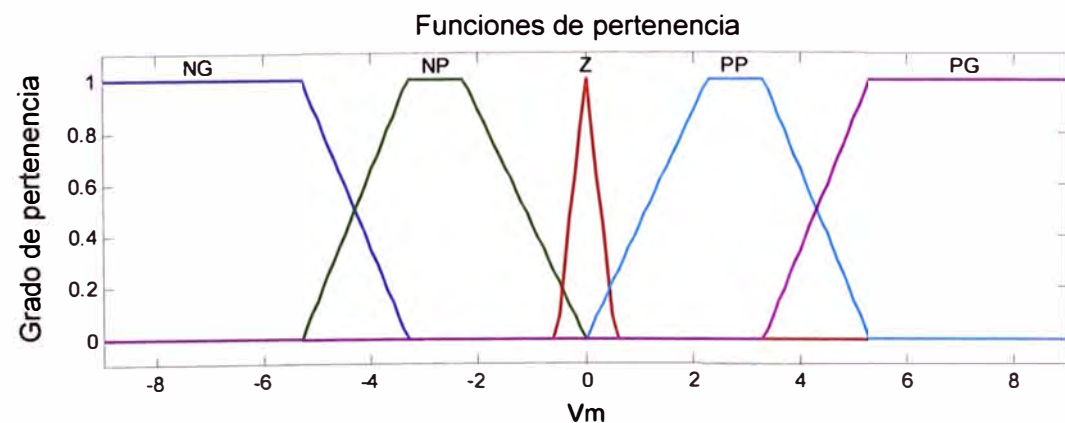
**Figura 5.5:** Análisis del funcionamiento del sistema péndulo invertido en una situación particular de movimiento.

**Tabla 5.1:** Conjunto de reglas difusas.

		Variable $\theta$					
		NG	NP	Z	PP	PG	
Variable $x$	NG	PG	PP	Z	NP	NG	
	NP	PG	PP	Z	NP	NG	
	Z	PG	PP	Z	NP	NG	
	PP	PG	PP	Z	NP	NG	
	PG	PG	PP	Z	NP	NG	

**Tabla 5.2:** Rangos de las variables del sistema.

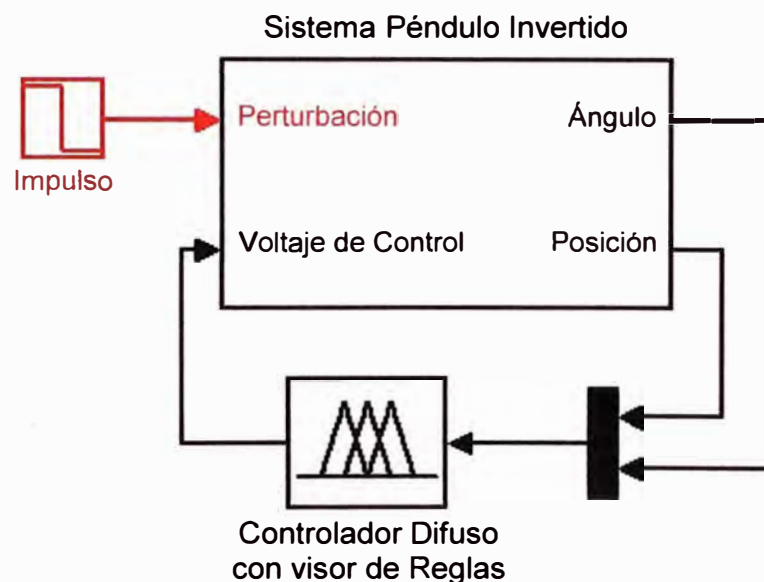
Variables	Descripción	Rango
Entradas:		
$x$	Posición del carro con respecto al eje horizontal	$[-0.5; 0.5]$ m.
$\theta$	Ángulo de la varilla con respecto al eje vertical	$[-0.35; 0.35]$ rad
Salida:		
$V_m$	Voltaje de control aplicado al motor DC	$[-9; 9]$ V.

**Figura 5.6:** Funciones de pertenencia para la variable de entrada – Posición  $x$ .**Figura 5.7:** Funciones de pertenencia para la variable de entrada - Medida angular  $\theta$ .**Figura 5.8:** Funciones de pertenencia para la variable de salida - Voltaje de control  $V_m$ .

### 5.3 Simulación de la dinámica del sistema de control difuso

La simulación del sistema de control difuso se realiza con el programa *PenduloControlDifuso.mdl*, elaborado en Simulink, cuyo esquema es mostrado en la Figura 5.9 y en donde se consideran como entradas al voltaje de control y a una perturbación tipo impulso aplicada a la varilla, y como salidas a las medidas de los sensores de posición y de medida angular.

Así, en el esquema del programa mostrado, el controlador se representa mediante un bloque de función llamado *Controlador difuso con visor de reglas*, el cual permite la carga del programa *ControladorDifuso.fis* y la visualización de las reglas durante la simulación. En tanto que el bloque denominado Sistema Péndulo Invertido consiste de dos sub-bloques internos que emulan al sistema físico péndulo-actuador y que fueron desarrollados con las ecuaciones no lineales (2.11) y (2.27). El esquema del sub-bloque referente al péndulo se muestra en el Anexo D.



**Figura 5.9:** Esquema en Simulink del sistema de control difuso.

En la Figura 5.10 se muestra el algoritmo de control que permite realizar el proceso de inferencia, de fuzzificación y defuzzificación, mediante la base de conocimientos y el uso de las 25 reglas difusas definidas en la Tabla 5.1.

Así, en la figura 5.10, cada bloque denominado *Regla* tiene un esquema interno que usa el método *and-min*, para combinar los valores de pertenencia en la parte antecedente y generar la *fuerza de disparo* de cada regla; y el método *implicación-min* para generar los consecuentes difusos respectivos. Una vez que se han determinado todos los consecuentes difusos, se emplea el método de *agregación max* para generar un único conjunto difuso de salida, sobre el cual se realiza el proceso de defuzzificación basado en el método *área del centroide* o COA por ser siglas de *Center Of Area*.

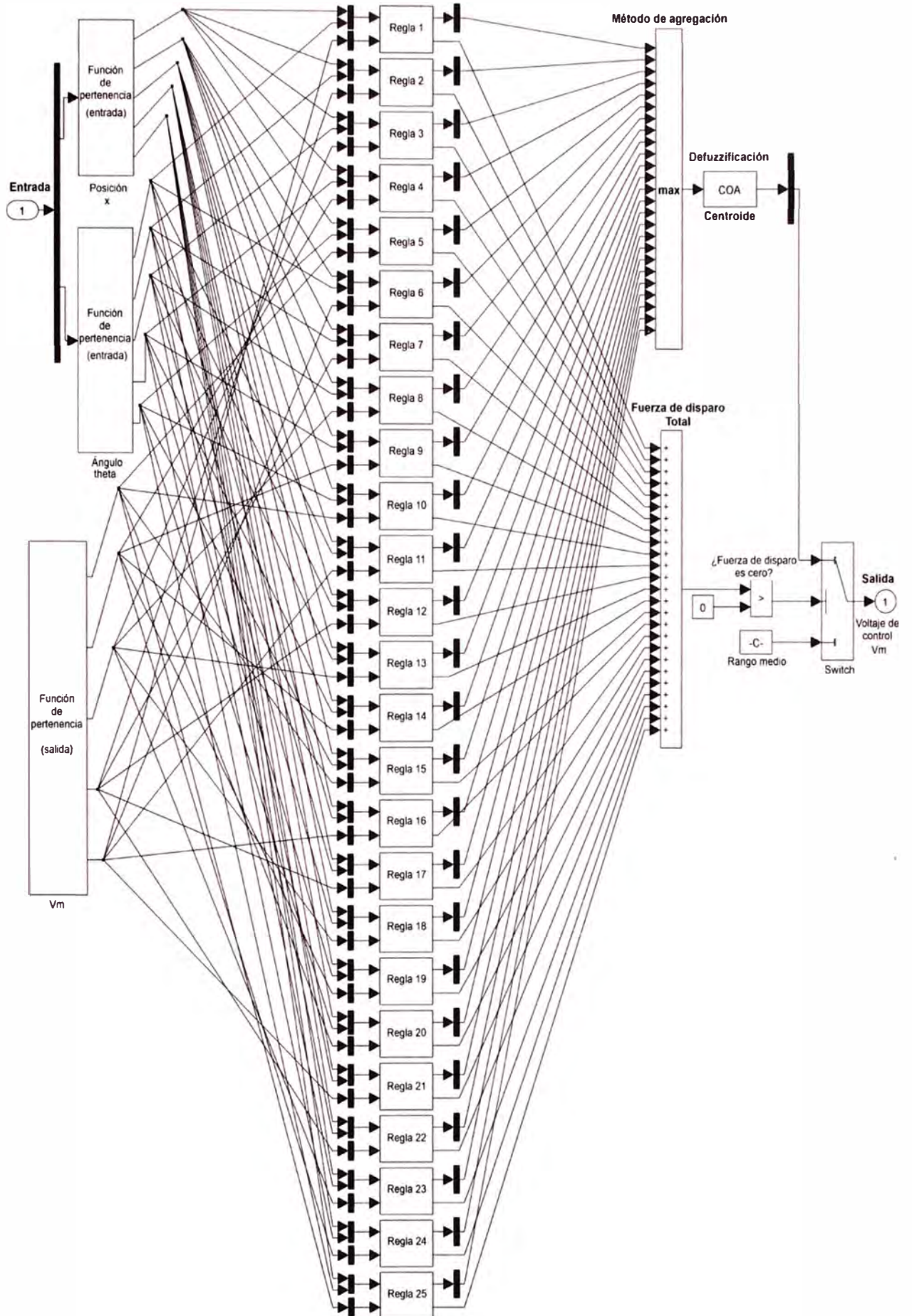
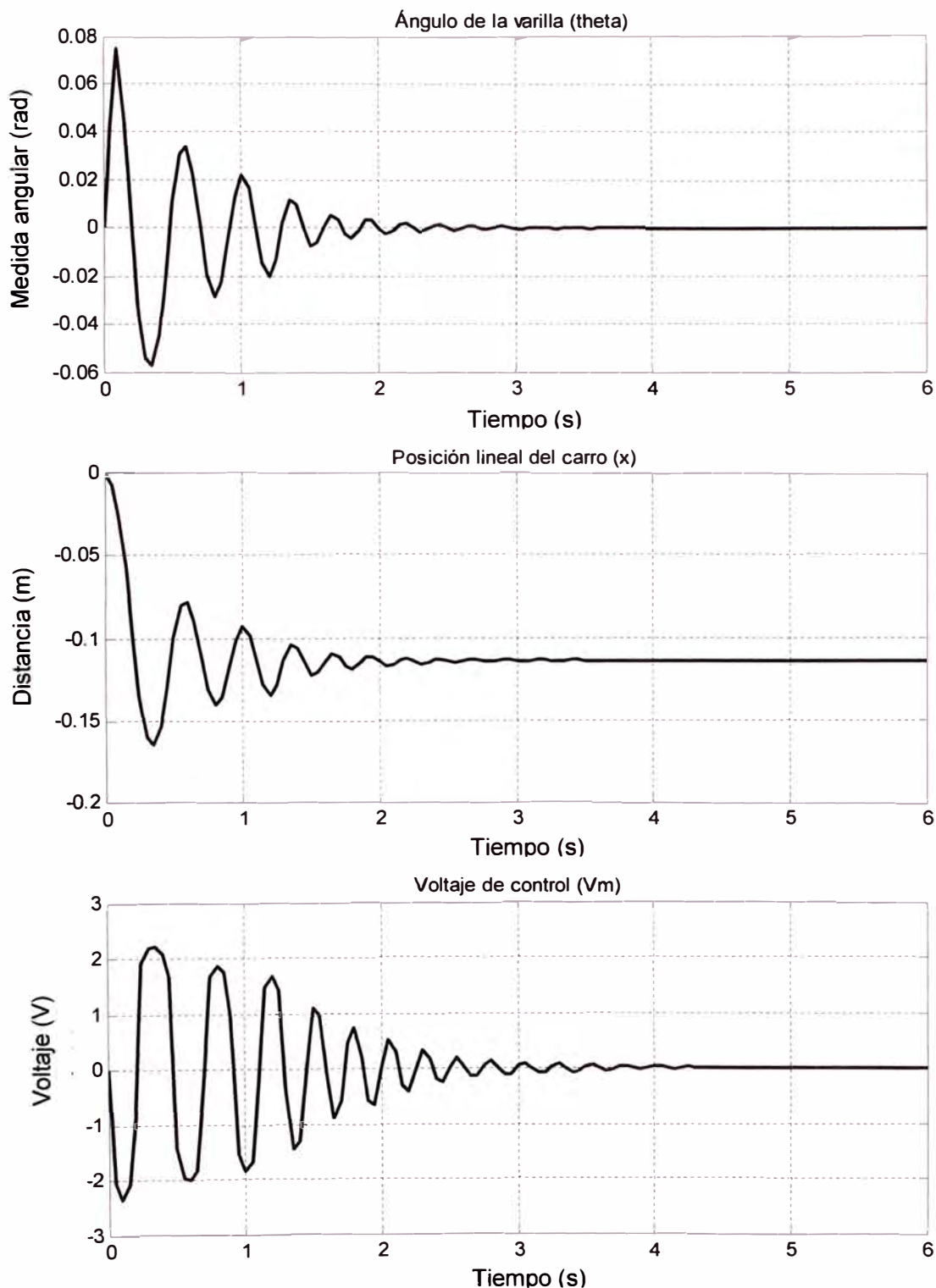


Figura 5.10: Algoritmo de control y proceso de inferencia difuso.

En la Figura 5.11 se muestra la simulación de la respuesta del sistema de control difuso ante una perturbación tipo impulso. Puede notarse que el control de posición del péndulo se establece en menos de 4s, con un voltaje de control dentro del rango de  $[-9;9]$  y dentro de la longitud del riel en el rango  $[-0,75;0,75]$ .



**Figura 5.11:** Respuesta del sistema de control difuso ante una perturbación tipo impulso.

En el capítulo VI se analizan otras respuestas del sistema de control óptimo al hacer variaciones en los rangos de las funciones de pertenencia.

## CAPÍTULO VI

### PRESENTACIÓN Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

En el presente capítulo se analizan las respuestas del sistema péndulo invertido con los sistemas de control óptimo digital y de control difuso diseñados en los capítulos IV y V, respectivamente. En las simulaciones realizadas se modifican algunos parámetros de diseño para observar como varía la respuesta del sistema de control.

#### 6.1 Sistema de control óptimo digital

El sistema de control óptimo digital diseñado consiste de un controlador óptimo LQR y de un observador de estados de orden mínimo cuyos principales parámetros de diseño son sus matrices ganancias  $\mathbf{K}$  y  $\mathbf{K}_e$ , respectivamente. En la sección 4.2.1 se definió la matriz  $\mathbf{K}$  en la ecuación (4.33) y  $\mathbf{K}_e$  en la ecuación (4.36). En esta sección se modificaran dichos parámetros a fin de analizar diferentes respuestas del sistema de control.

##### 6.1.1 Regulador óptimo LQR

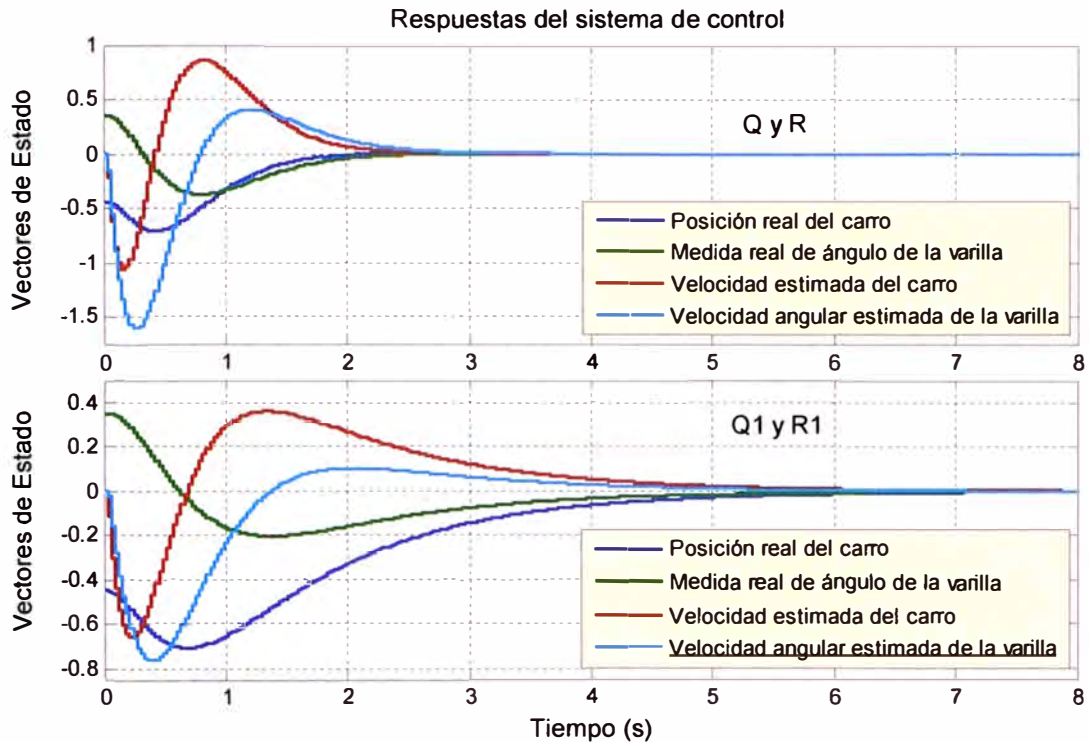
En la sección 4.1.2 se mencionó que la elección de los valores de las matrices de ponderación es arbitraria, pero teniendo presente que dicha elección significa un compromiso entre el rendimiento del sistema y los esfuerzos por controlarlo puesto que la matriz  $\mathbf{Q}$  tiene una influencia directa en el tiempo de establecimiento y la matriz  $\mathbf{R}$  en el voltaje consumido. Esto resulta evidente si se realiza una simulación con las siguientes matrices:

$$\mathbf{Q}_1 = \begin{bmatrix} 20 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_1 = [15]$$

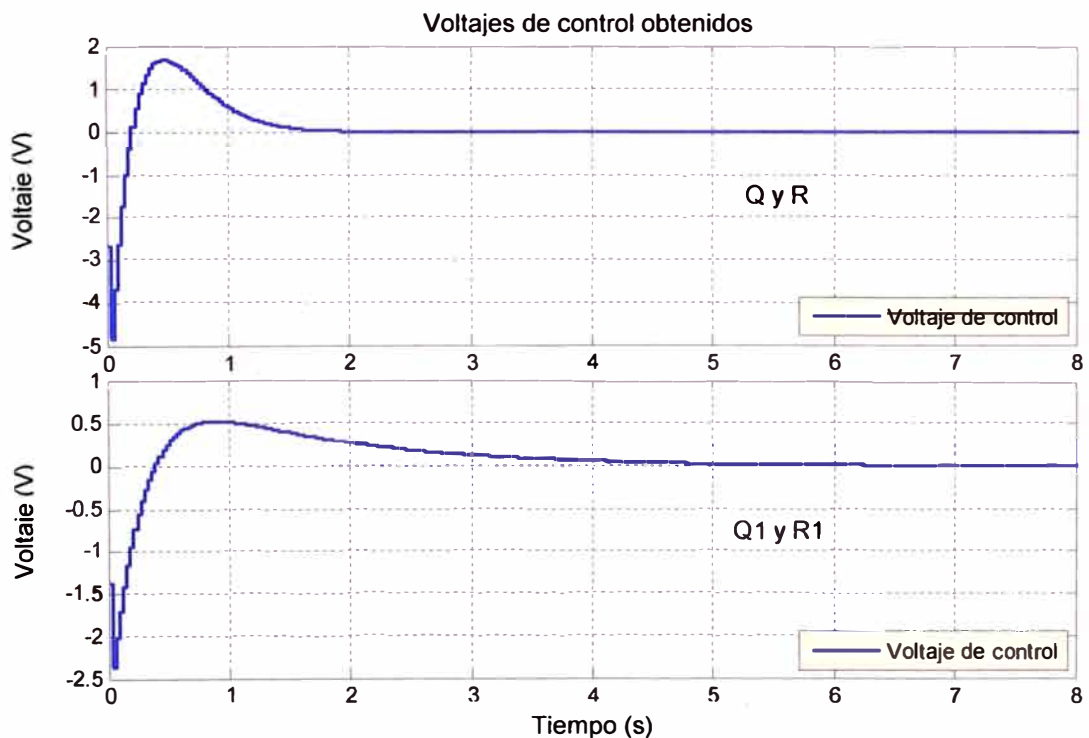
y con las mismas condiciones iniciales para  $\mathbf{x}(0)$  y  $\hat{\mathbf{x}}(0)$  utilizadas en la sección 4.2.4.

Los resultados de dicha simulación se muestran en las Figuras 6.1 y 6.2, en donde se comparan con los resultados obtenidos en la simulación de la Figura 4.7. Dicha comparación permite observar que el voltaje de control es más pequeño cuando se usan las matrices  $\mathbf{Q}_1$  y  $\mathbf{R}_1$  pero el sistema se estabiliza en más del doble de tiempo, en aproximadamente 7s. Esto sucede porque los bajos pesos escogidos para los sensores de posición y de medida del ángulo hacen que los estados correspondientes sean menos

sensibles dentro del sistema. Es importante notar que la sensibilidad del sensor de posición debe ser mucho mayor por la limitación de la longitud del riel, por ello se escogió el valor de la matriz  $Q$  como se indica en (4.32). En cuanto a  $R$ , un mayor valor permite también reducir el voltaje de control pero incrementa el tiempo de establecimiento.



**Figura 6.1:** Comparación de la respuesta del sistema de control óptimo para diferentes valores de las matrices de ponderación  $Q$  y  $R$ .



**Figura 6.2:** Comparación del voltaje de control obtenido para diferentes valores de las matrices de ponderación  $Q$  y  $R$ .

### 6.1.2 Observador de estados de orden mínimo

En la sección 4.2.3 se determinó un valor adecuado para la ganancia  $\mathbf{K}_e$  del observador de orden mínimo en base a polos definidos en (4.36). Dichos polos permiten que la respuesta del observador sea más rápida que la del sistema controlado, lo cual es fundamental para que las estimaciones sean realizadas rápidamente y para que el error de estimación decaiga a cero en el menor tiempo posible.

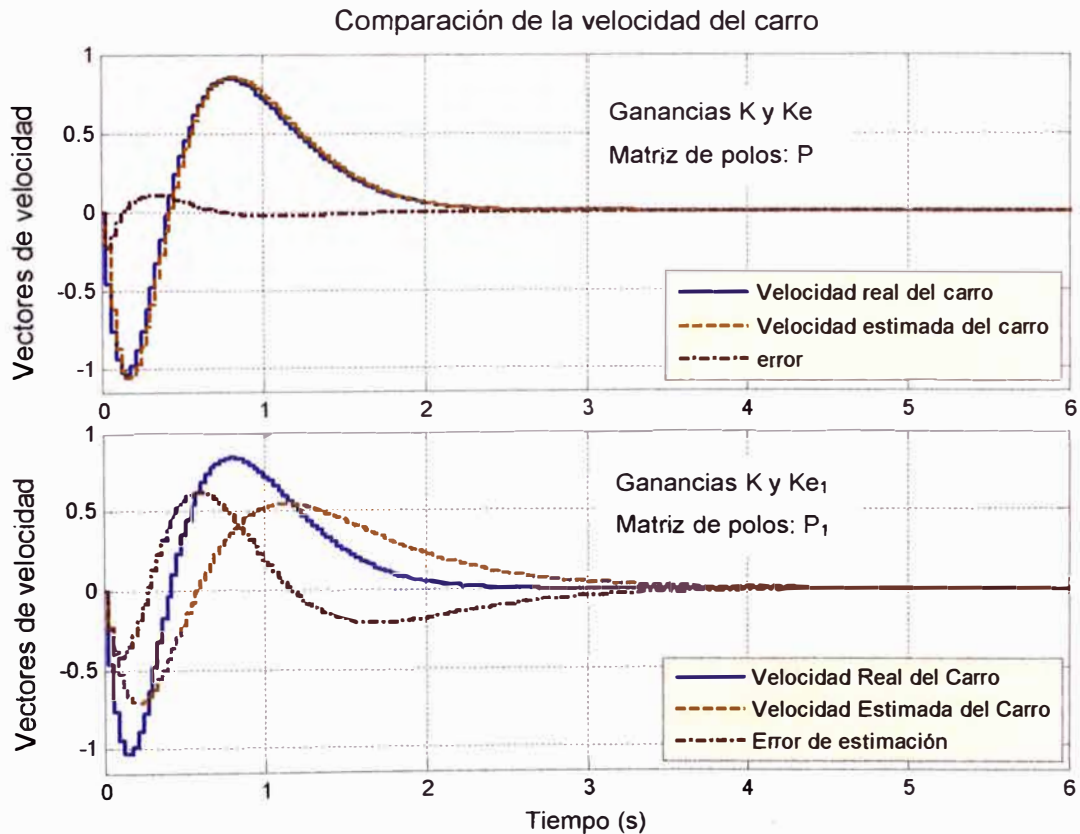
Para comprobar ello, ahora se escogen unos polos que estén próximos a los polos del sistema controlado, de manera que la respuesta del observador sea lenta. Así, se define la siguiente matriz de polos:

$$\mathbf{P}_1 = [0.85 \quad 0.95] \quad (6.1)$$

la cual permite obtener la siguiente matriz ganancia:

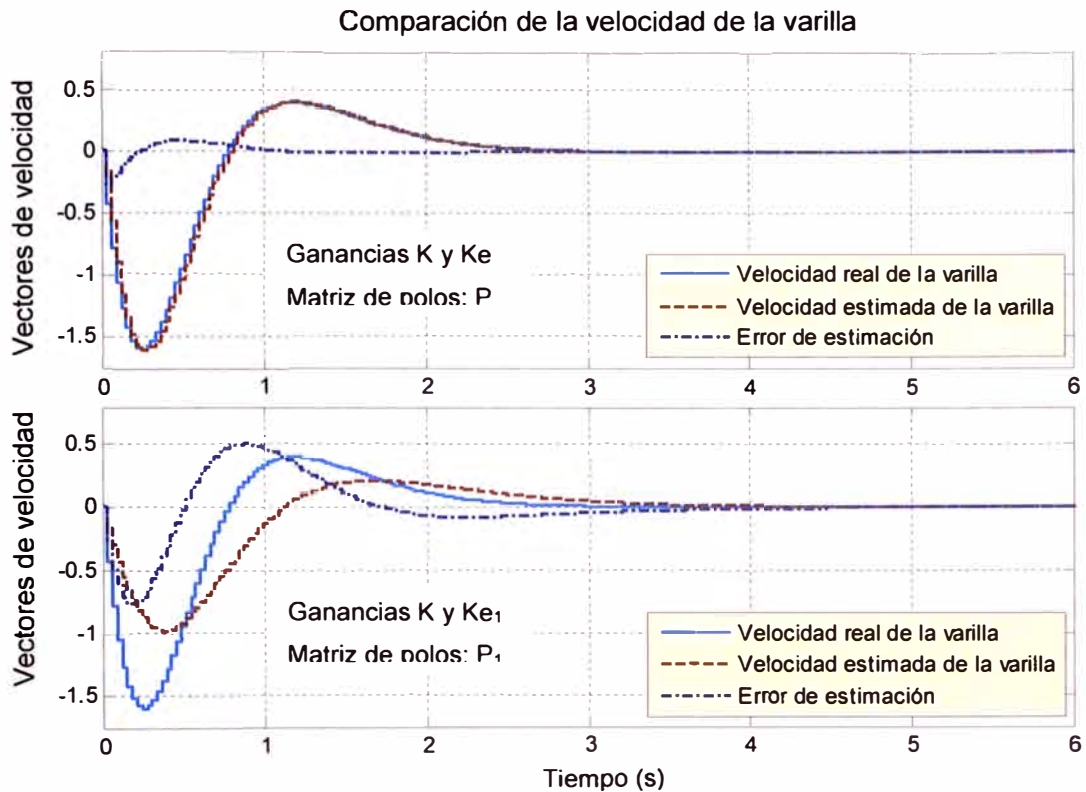
$$\mathbf{K}_{e1} = \begin{bmatrix} 1.8841 & 0.0097 \\ 3.5190 & 1.8167 \end{bmatrix} \quad (6.2)$$

y los resultados de la simulación realizada con los valores de las matrices (6.1) y (6.2), bajo las mismas condiciones iniciales para  $\mathbf{x}(0)$  y  $\hat{\mathbf{x}}(0)$  utilizadas en la sección 4.2.4, se muestran en las Figura 6.3 y 6.4, en donde se comparan con los resultados obtenidos en la simulación de la Figura 4.7.

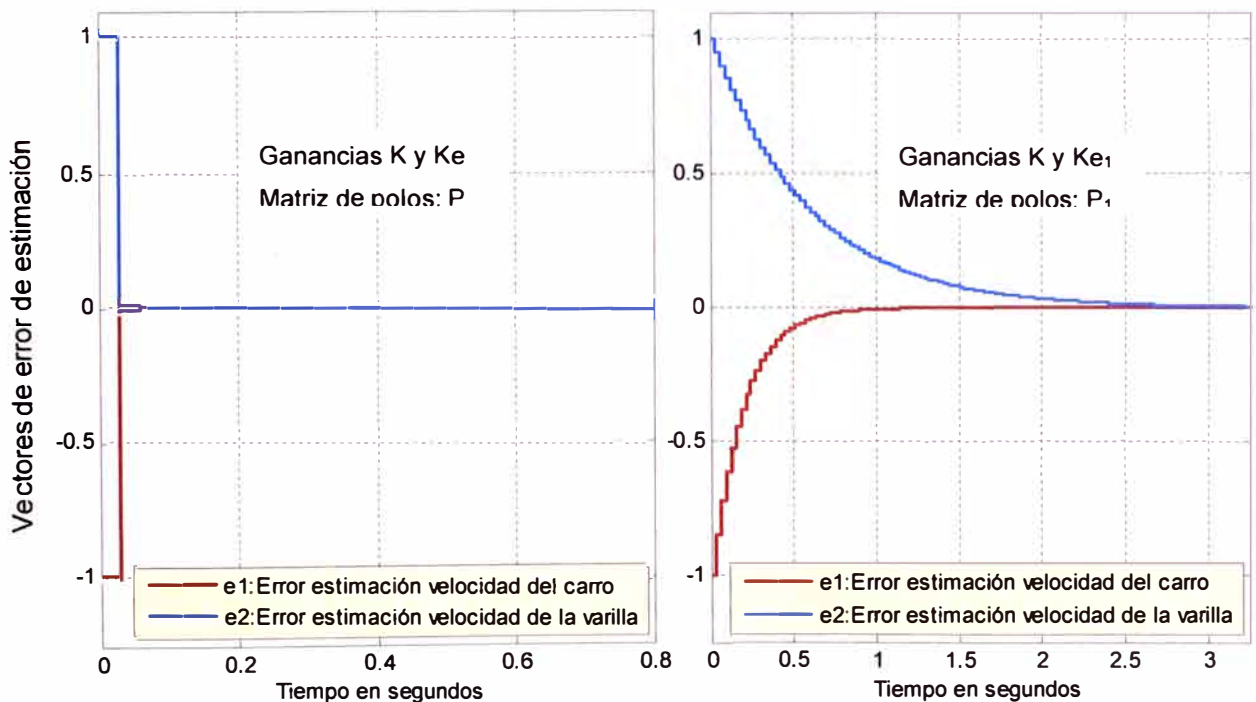


**Figura 6.3:** Comparación de las velocidades estimadas del carro para diferentes valores de la ganancia y de los polos del observador de orden mínimo.





**Figura 6.4:** Comparación de las velocidades estimadas de la varilla para diferentes valores de la ganancia y de los polos del observador de orden mínimo.



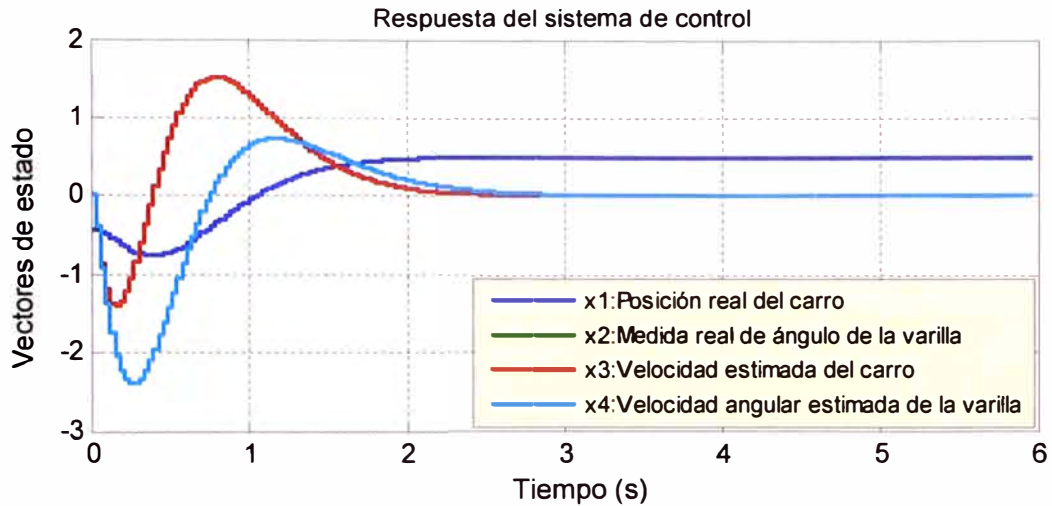
**Figura 6.5:** Comparación de la dinámica del error de estimación para diferentes valores de la ganancia y de los polos del observador de orden mínimo.

De las comparaciones en las Figura 6.3 y 6.4, se puede observar que una respuesta lenta del observador provoca grandes errores en las velocidades estimadas. Esto se debe a que el error de estimación no decae a cero rápidamente y recién lo hace después de 3 s, como se observa en la Figura 6.5.

### 6.1.3 Simulaciones adicionales

#### a. Con entrada de referencia no nula

En la Figura 6.6 se muestra una simulación con las mismas condiciones iniciales para  $\mathbf{x}(0)$  y  $\hat{\mathbf{x}}(0)$  utilizadas en la sección 4.2.4, pero ahora con una entrada de referencia que sitúa al carro en la posición de 0.5 m.



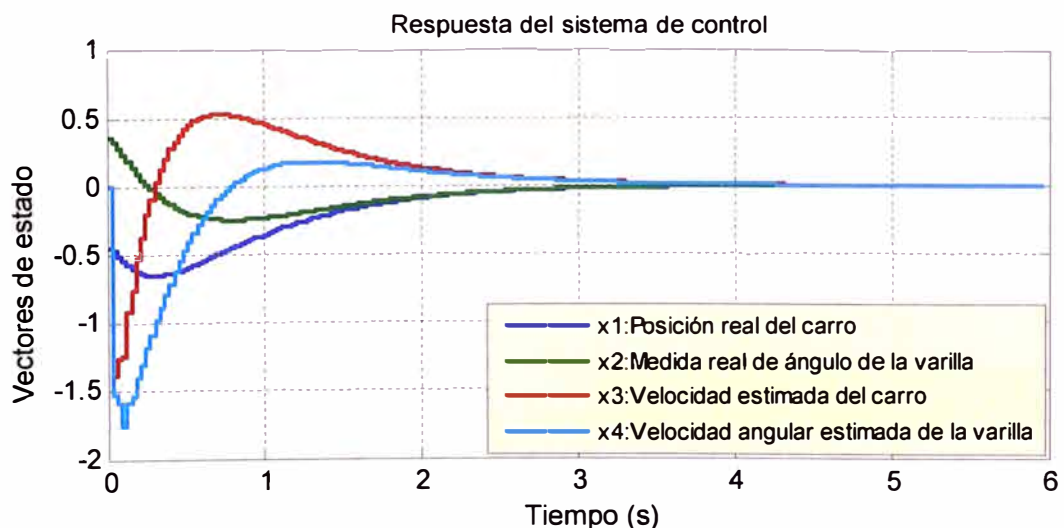
**Figura 6.6:** Respuesta del sistema con entrada de referencia no nula.

#### b. Con entrada escalón de 6 voltios

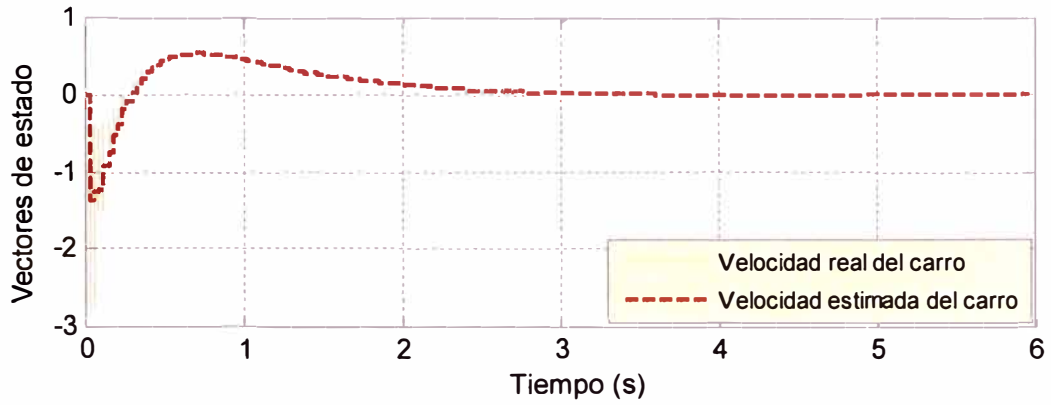
En la Figura 6.7 se muestra la respuesta ante una entrada escalón de 6 voltios y se observa que el sistema de control óptimo aún responde pero con errores de estimación considerablemente grandes en tiempo transitorio lo cual vuelve inestable al sistema de control. Ante una perturbación más fuerte el sistema ya no es controlable.

En la Figura 6.9 se muestra el error entre la velocidad real y la estimada del carro, ante la entrada escalón, y dichas velocidades se comparan en la Figura 6.8.

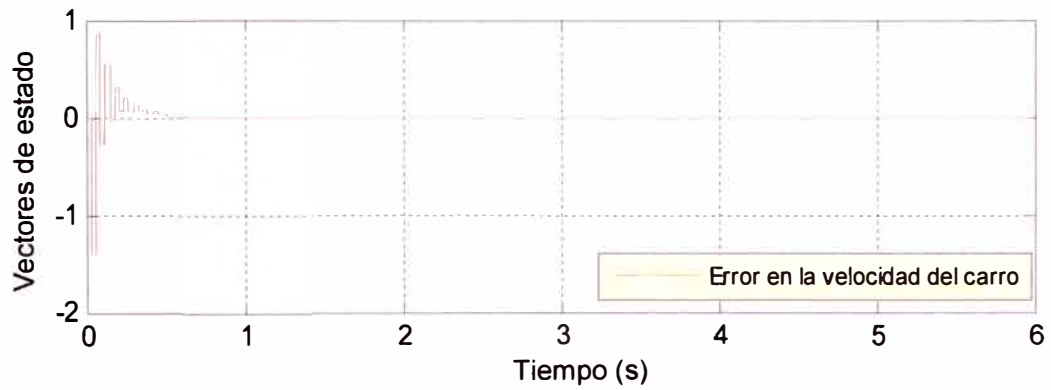
En la Figura 6.11 se muestra el error entre la velocidad real y la estimada del carro, las cuales se comparan en la Figura 6.10.



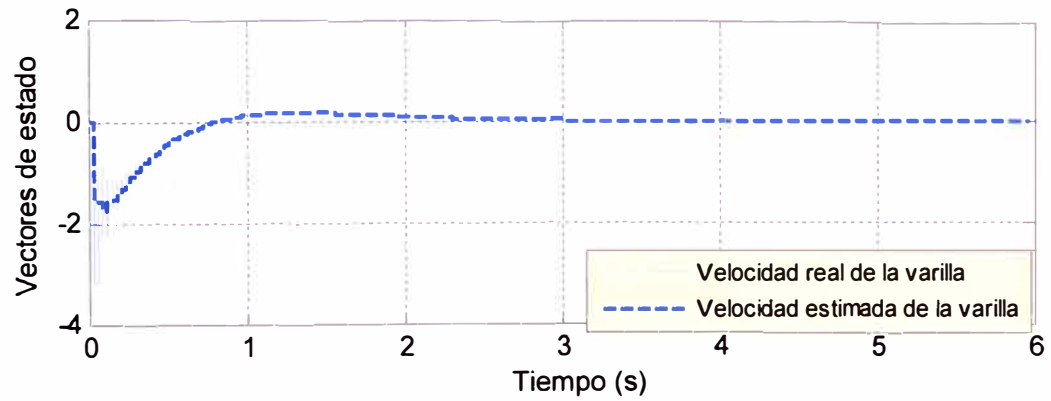
**Figura 6.7:** Respuesta del sistema de control óptimo ante escalón de 6v.



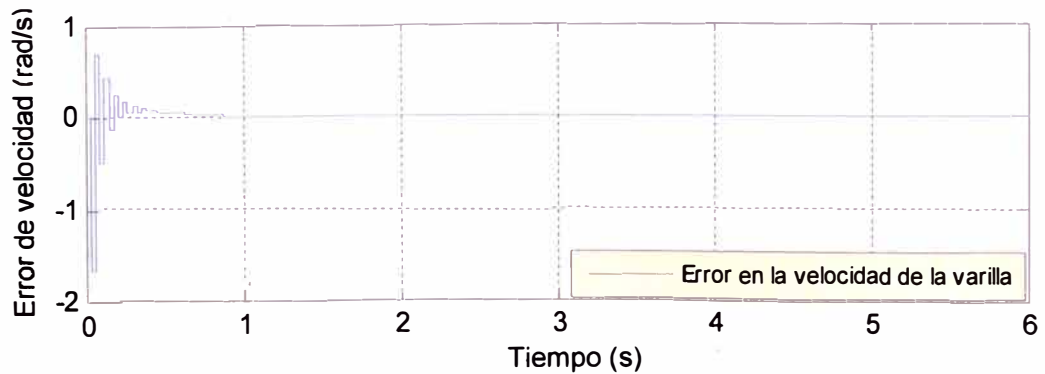
**Figura 6.8:** Velocidad real y estimada del carro ante una entrada escalón de 6v.



**Figura 6.9:** Error entre la velocidad real y estimada del carro ante una entrada escalón de 6v.



**Figura 6.10:** Velocidad real y estimada de la varilla ante una entrada escalón de 6v.



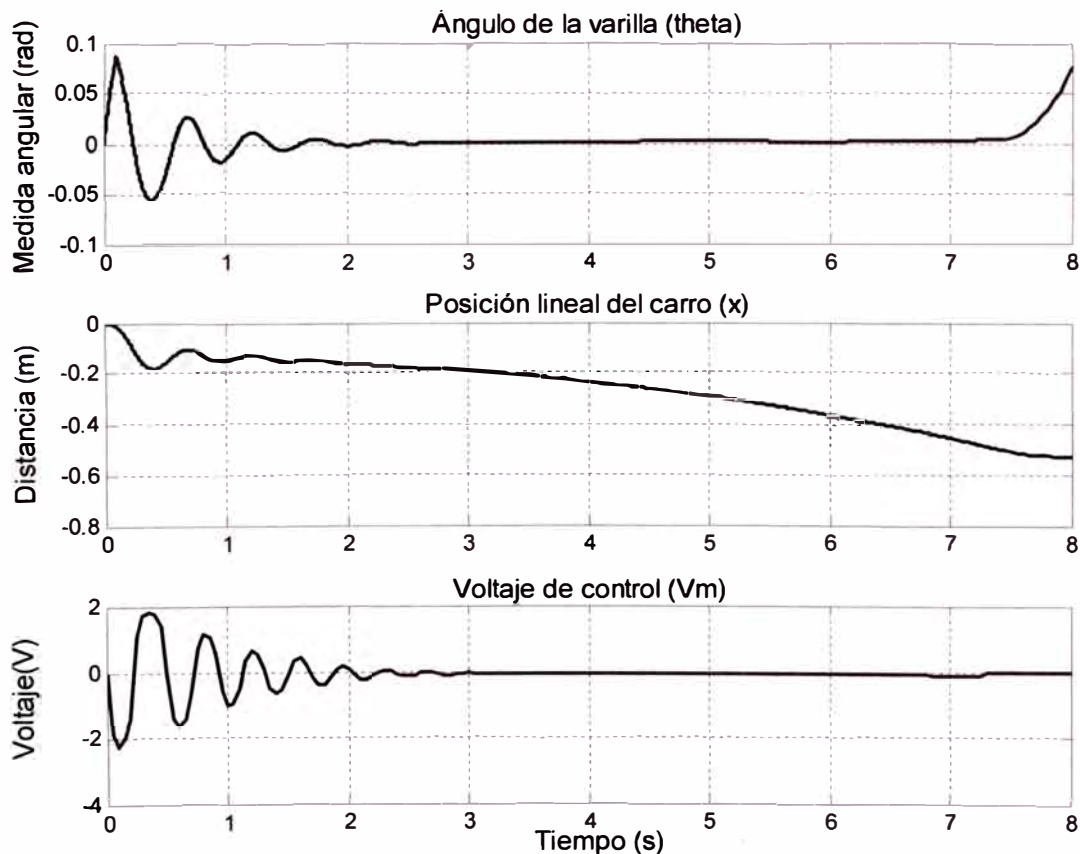
**Figura 6.11:** Error entre la velocidad real y estimada de la varilla ante una entrada escalón de 6v.

## 6.2 Sistema de control difuso

El sistema de control difuso diseñado se basa en un algoritmo difuso básico elaborado con 25 reglas difusas y con 5 funciones de pertenencia: NG, NP, Z, PP y PG. El desempeño del sistema de control depende, sobre todo, de una adecuada definición de los rangos de las funciones de pertenencia en cada variable. En esta sección se modifica uno de los rangos a fin de analizar la respuesta del sistema de control.

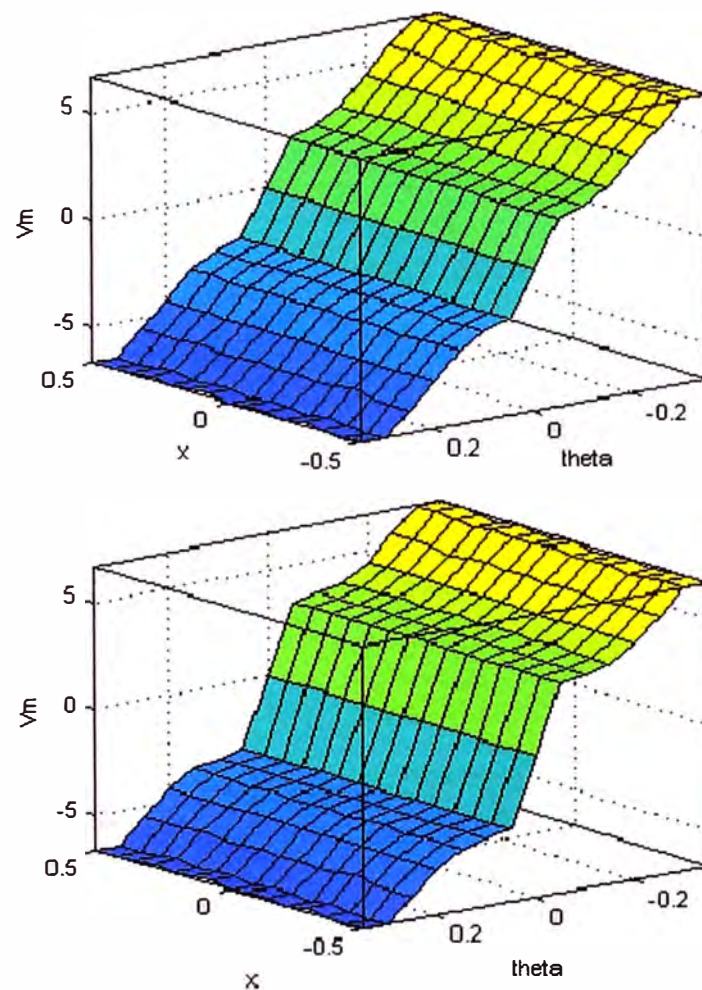
### 6.2.1 Funciones de pertenencia y rangos de operación

En la sección 5.2.1 se definieron las funciones de pertenencia y sus rangos respectivos para cada variable del sistema péndulo invertido. Si dichos rangos no son adecuadamente definidos el sistema de control se desestabiliza rápidamente. En particular resulta interesante el resultado obtenido si se amplía el rango de la función de pertenencia Z asociada al voltaje. Así, durante el diseño del controlador el rango de dicha función Z se estableció como  $[-0,5475; 0,5475]$ . Ahora se amplía hasta  $[-0,93; 0,93]$  y se realiza la simulación respectiva cuyo resultado se muestra en la Figura 6.12. Dicho resultado se explica porque, al considerarse como cero un rango más amplio, el sistema de control constantemente aplica un pequeño voltaje al motor que hace que el carro no se detenga y con el tiempo salga del riel, volviéndose el sistema incontrolable luego de cierto tiempo.



**Figura 6.12:** Respuesta del sistema de control difuso ampliando el rango de la función de pertenencia Z asociada al voltaje de control.

En la Figura 6.13 se observan gráficas de superficie, las cuales muestran las dependencias entre las variables del sistema. Dichas gráficas son útiles en la etapa de diseño porque permiten observar si ocurren cambios bruscos entre las variables durante el proceso de control. Así, la gráfica superior (a) muestra las dependencias entre las variables de entrada,  $x$  y  $\theta$ , y la variable de salida  $V_m$  cuando el sistema de control funciona normalmente según el diseño de la sección 5.2. Mientras que la gráfica inferior (b) muestra las dependencias de las variables en la etapa inicial de diseño antes del afinamiento de rangos. El objetivo es conseguir superficies suaves, como la gráfica superior, puesto que ellas indican que ocurren cambios suaves entre los valores de las variables del sistema.



**Figura 6.13:** Gráficas de superficies (a) cuando el sistema funciona según el diseño de la sección 5.2 (b) cuando inicialmente no se establecen adecuadamente los rangos de las funciones de pertenencia.

## CAPÍTULO VII

### PROGRAMA DESARROLLADO EN MATLAB

#### 7.1 Programa fuente: PenduloInvertido.m

```
clear all
close all
clc
%DEFINICIÓN DE CONSTANTES
g=9.81;           %Aceleración de la gravedad
Ts=0.03;         %Tiempo de muestreo
%PARÁMETROS DEL MOTOR DC DE 12 VOLTIOS
Rm=10;           %Resistencia de armadura
Km=0.00147;     %Constante contra electromotriz
Kt=0.0141;     %Constante de torque
Jm=3.4*10^(-7); %Inercia del rotor del motor
bm=7*10^(-3);  %Coeficiente de fricción viscosa
nm=0.66;       %Eficiencia del motor
rmp=6.35*10^(-3); %Radio del piñón
%PARÁMETROS DE LA CAJA DE ENGRANAJES
Kg=66;          %Razón de aumento
ng=0.70;       %Eficiencia
%RELACION ENTRE EL VOLTAJE Vm Y LA FUERZA: F = a*Vm + b*x''
a=(nm*bm*ng*Kg*Kt)/(rmp*nm*Km*Kt+rmp*Rm*bm);
b=(nm*Km*Kt*ng*(Kg^2)*Jm)/((rmp^2)*(nm*Km*Kt+Rm*bm));
%DIMENSIONES DEL PÉNDULO INVERTIDO
M=2;           %Masa del carro (kg)
m=0.4;        %Masa de la varilla (kg)
LT=0.8;       %Longitud total de la varilla (m)
L=0.4;        %Longitud al centro de masa de la varilla (m)
Is=(m*LT^2)/3; %Momento de Inercia de la varilla
K1=7.5;       %Constante de fricción viscosa en el riel
```

```

K2=0.0024;           %Constante de fricción viscosa en la articulación
I=Is*(M+m-b)+(M-b)*m*L^2;
%ELEMENTOS DE LAS MATRICES A y B
a32=(m^2*g*L^2)/I;a33=-((Is+m*L^2)*K1)/I;a34=-(m*L*K2)/I;
a42=(m*g*L*(M+m-b))/I;a43=(m*L*K1)/I;a44=-((M+m-b)*K2)/I;
b31=((Is+m*L^2)*a)/I;b41=(m*L*a)/I;
%MATRICES DE ESTADO EN TIEMPO CONTINUO: A B C D
A=[0 0 1 0;0 0 0 1;0 a32 a33 a34;0 a42 a43 a44]
B=[0;0;b31;b41]
C=[1 0 0 0;0 1 0 0]
D=[0; 0]
%MATRICES DE ESTADO EN TIEMPO DISCRETO: G H C D
[G H C D]=c2dm(A,B,C,D,Ts,'zoh')
%CONDICIONES INICIALES
theta=20;           %Ángulo Inicial: -20°<theta<20°
thetainicial=(theta*pi)/180;   %Ángulo Inicial en radianes
xinicial=-0.45;     %Posición Inicial
x0ini=[xinicial thetainicial 0 0];
%NÚMERO DE MUESTRAS Y TIEMPO PARA LA SIMULACIÓN
N=200;k=0:N-1;t=k*Ts;
%ENTRADA DE REFERENCIA
ref=zeros(2,N); %Estados finales x=0 y theta=0
%SIMULACIÓN DE LA DINÁMICA EN LAZO ABIERTO
ref1=zeros(1,N);
[Y,X]=dlsim(G,H,C,D,ref1,x0ini);
%FIGURA
stairs(t,X); grid;
title ('Respuesta del sistema en lazo abierto')
%CONTROLABILIDAD Y OBSERVABILIDAD
MCont=[H G*H G^2*H G^3*H];rank(MCont)
NObs=[C;C*G;C*G^2;C*G^3];rank(NObs)
% DISEÑO DEL OBSERVADOR DE ORDEN MÍNIMO
%Matrices de ponderación:
Q=[300 0 0 0;0 10 0 0;0 0 1 0;0 0 0 1];R=10;
%RESOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DISCRETA DE RICCATI
P=[0 0 0 0;0 0 0 0;0 0 0 0;0 0 0 0]; %Condición de frontera

```

```

%Matrices auxiliares
Hi=H'*P;Xi=Ts*R+(Hi)*H;Yi=Hi*G;
K=Xi\Yi;
for i=1:500
E=Ts*Q+K'*Ts*R*K;F=G-H*K;Pit=E+F'*P*F;P=Pit;
Hi=H'*P;Xi=Ts*R+(Hi)*H;Yi=Hi*G;
K=Xi\Yi;
end
%GANANCIA DEL CONTROLADOR ÓPTIMO LQR
K
%GANANCIA DE PREALIMENTACIÓN K0
F=(C-D*K)*((eye(4)-G+H*K)\H)+D; %Matriz pseudoinversa
K0=F'/(F'*F)
%DINÁMICA DEL SISTEMA DE CONTROL
G1=G-H*K;H1=H*K0;C1=C-D*K;D1=D*K0;
[Y1,X1]=dlsim(G1,H1,C1,D1,ref,x0ini);
%FIGURA
stairs(t,X1);grid;
title ('Respuesta del sistema controlado')
% DISEÑO DEL OBSERVADOR DE ORDEN MÍNIMO
Polobs=[0.2 0.3] %Elección arbitraria de polos
%Matrices medibles y estimadas
Gmm=[G(1,1) G(1,2);G(2,1) G(2,2)];
Gme=[G(1,3) G(1,4); G(2,3) G(2,4)];
Gem=[G(3,1) G(3,2); G(4,1) G(4,2)];
Gee=[G(3,3) G(3,4); G(4,3) G(4,4)];
Hm=[H(1,1);H(2,1)];
He=[H(3,1);H(4,1)];
Cm=[1 0;0 1];
Kcm=[K(1,1) K(1,2)];
Kce=[K(1,3) K(1,4)];
%GANANCIA DEL OBSERVADOR DE ORDEN MÍNIMO
Kemin=place(Gee',Gme',Polobs)'
%DINÁMICA DEL SISTEMA DE CONTROL ESTIMADO CON EL OBSERVADOR
GOBmin=[G-H*K H*Kest;zeros(2,4) Gee-Kemin*Gme];
HOBmin=[H*K0;zeros(2,2)];
COBmin=eye(6);

```



```

DOBmin=zeros(size(HOBmin));
x0min=[xinicial thetainicial 0 0 -1 1];
[Ysistema,Xsistema]=dlsim(GOBmin,HOBmin,COBmin,DOBmin,ref,x0min);
%FIGURAS
stairs(t,Xsistema(:,1:4));grid;
title ('Respuesta del sistema de controlado y estimado')
stairs(t,Xsistema(:,5:6));grid;
title ('Dinámica de los vectores de error de estimación')
stairs(t,Xl(:,3),'r');grid;
hold on;
stairs(t,Xsistema(:,3),'--')
stairs(t,Xl(:,3)-Xsistema(:,3),'-.')
title ('Velocidad del carro')
hold off;
stairs(t,Xl(:,4));grid;
hold on;
stairs(t,Xsistema(:,4),'--')
stairs(t,Xl(:,4)-Xsistema(:,4),'-.')
title ('Velocidad de la varilla')
hold off;
%VECTOR DE ESTADOS ESTIMADOS
X_estimado=[Xsistema(:,1:2) Xsistema(:,3:4)-Xsistema(:,5:6)];
%VOLTAJE DE CONTROL
U2=-K*X_estimado'+K0*ref;
%FIGURAS
stairs(t,U2);grid;
title ('Voltaje de control aplicado al motor DC')

```

## CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

### Conclusiones

1. Como puede observarse del desarrollo de los capítulos II y IV, el diseño del sistema de control óptimo digital, basado en el modelo matemático del péndulo invertido es una tarea complicada de realizar en sistemas complejos. Sin embargo, esta estrategia permite utilizar técnicas avanzadas de control, como el control óptimo y la estimación de estados, que garantizan en cierta forma un control robusto como se comprueba en las simulaciones realizadas en el capítulo VI.
2. De acuerdo con el capítulo IV, el sistema de control óptimo asegura el control de la posición del péndulo invertido para variaciones angulares en el rango  $[-20^\circ, 20^\circ]$ , con un tiempo de establecimiento de aproximadamente 3 segundos y dentro de la longitud del riel de 1.5 m.
3. El sistema de control difuso se desarrolló en base al conocimiento experto del funcionamiento del péndulo invertido y a los datos provenientes de los sensores de posición y de medida angular, con lo cual se elaboró un algoritmo difuso básico que permite controlar la posición del péndulo invertido para variaciones angulares en el rango de  $[-20^\circ; 20^\circ]$ , con un tiempo de establecimiento menor a 4 segundos y dentro de la longitud del riel de 1.5 m; como se comprueba de las simulaciones realizadas en el capítulo VI.

### Recomendaciones

1. Una consideración a tener en cuenta es que, en el diseño del sistema de control óptimo, solo se consideró a la fricción viscosa y no la fricción seca o de Coulomb en el riel porque dicha fricción es difícil de modelarla matemáticamente. Sin embargo, de ser necesaria la consideración de dicha fricción, es posible añadir su componente cinética como un estado adicional y obtener una nueva dinámica ampliada que disminuya el error en la respuesta del sistema.
2. En cuanto al diseño del observador de estados de orden mínimo, su estudio puede ser útil como introducción al diseño de un filtro Kalman, el cual permite reducir el impacto del ruido en los valores estimados mediante una ubicación óptima de los polos del observador.

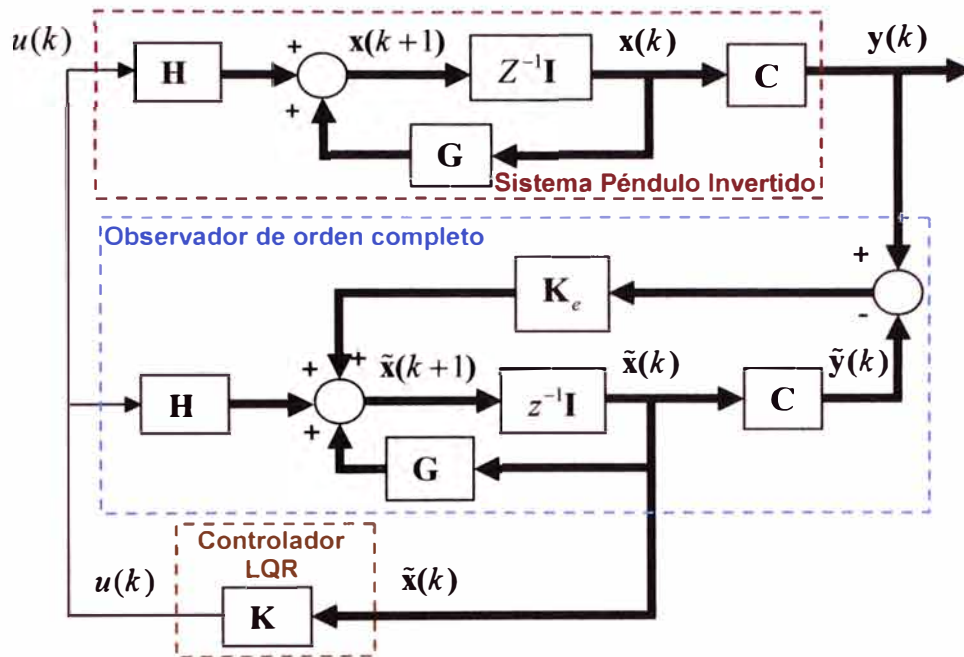
3. El estudio del diseño del controlador difuso puede ser útil para mostrar la utilidad de la lógica difusa en el tratamiento de sistemas no lineales que no cuenten con un modelo matemático que los describan, como sucede en algunas aplicaciones industriales. También puede ser útil como una guía inicial para el desarrollo de algoritmos difusos en el entorno de Matlab. En el caso que se requiera implementar el controlador difuso en un procesador o microprocesador, es necesario elaborar todo el algoritmo de control mediante una secuencia de comandos en texto llano; es decir, se debe desarrollar el algoritmo en lenguaje Assembler o en lenguaje C. Esta tarea puede ser simplificada con el uso del codificador de Simulink (Simulink Coder) que viene incluido por defecto en la versión más reciente de Matlab, a saber la versión R2011a. Dicho codificador permite generar el código del bloque *controlador difuso con visor de reglas*, en lenguaje C, usando los compiladores de los programas Microsoft visual C++ y Microsoft SDK.

**ANEXO A**  
**DISEÑO DE UN OBSERVADOR DE ORDEN COMPLETO**

El esquema de diseño de un observador de orden completo se basa en el esquema de la dinámica de una planta. Así, una planta cuya dinámica en el espacio de estados en tiempo discreto es definida por las ecuaciones:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}u(k) \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(k) \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

puede representarse mediante un diagrama de bloques como se muestra en la Figura A.1. En dicha figura, se muestran también los esquemas del observador y del controlador.



**Figura A.1:** Sistema de control incluyendo un observador de orden completo.

La idea de diseño es minimizar la señal error de salida definida como  $y(k) - \tilde{y}(k)$ , la cual queda definida como:

$$\mathbf{y}(k) - \tilde{\mathbf{y}}(k) = \mathbf{C}[\mathbf{x}(k) - \tilde{\mathbf{x}}(k)] \quad (\text{A.2})$$

Dicha minimización se realiza con el bloque  $\mathbf{K}_e$  denominado *matriz ganancia del observador*, el cual debe asegurar que el vector estimado  $\tilde{\mathbf{x}}$  converja al vector  $\mathbf{x}$  a una velocidad suficientemente grande. Por tanto, el problema de diseño se reduce a encontrar dicha ganancia y ello se logra partiendo de la ecuación que describe la dinámica del vector estimado  $\tilde{\mathbf{x}}$ :

$$\tilde{\mathbf{x}}(k+1) = \mathbf{G}\tilde{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{H}u(k) + \mathbf{K}_e(\mathbf{y}(k) - \tilde{\mathbf{y}}(k)) \quad (\text{A.3})$$

Si se define un vector de error de estimación como  $\xi(k) = \mathbf{x}(k) - \tilde{\mathbf{x}}(k)$ , su dinámica queda definida a partir de las ecuaciones (A.1) y (A.3) como:

$$\tilde{\xi}(k+1) = (\mathbf{G} - \mathbf{K}_e\mathbf{C})\xi(k) \quad (\text{A.4})$$

De la ecuación (A.4), se observa que la dinámica del vector error de estimación depende de los valores característicos de la matriz  $\mathbf{G} - \mathbf{K}_e \mathbf{C}$  obtenidos de la ecuación:

$$|z\mathbf{I} - \mathbf{G} + \mathbf{K}_e \mathbf{C}| = 0 \quad (\text{A.5})$$

Así, para un sistema completamente observable, la matriz  $\mathbf{K}_e$  puede obtenerse mediante una ubicación arbitraria de polos y usando el concepto de sistema dual.

Para analizar el efecto del observador en el sistema, se debe considerar que ahora la ley de control tiene la forma:

$$u(k) = -\mathbf{K}\tilde{\mathbf{x}}(k) = -\mathbf{K}(\mathbf{x}(k) - \xi(k)) \quad (\text{A.6})$$

Si se reemplaza la ecuación (A.6) en la primera ecuación de (A.1), se obtiene que:

$$\mathbf{x}(k+1) = (\mathbf{G} - \mathbf{H}\mathbf{K})\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}\mathbf{K}\xi(k) \quad (\text{A.8})$$

Por tanto, de las ecuaciones (A.4) y (A.8) se obtiene la ecuación matricial que determina la dinámica del sistema de control estimado con un observador de orden completo:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(k+1) \\ \tilde{\xi}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G} - \mathbf{H}\mathbf{K} & \mathbf{H}\mathbf{K} \\ 0 & \mathbf{G} - \mathbf{K}_e \mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \xi(k) \end{bmatrix} \quad (\text{A.9})$$

Obsérvese que de la ecuación (A.9), la ecuación característica del sistema es:

$$|z\mathbf{I} - \mathbf{G} + \mathbf{H}\mathbf{K}| |z\mathbf{I} - \mathbf{G} + \mathbf{K}_e \mathbf{C}| = 0 \quad (\text{A.10})$$

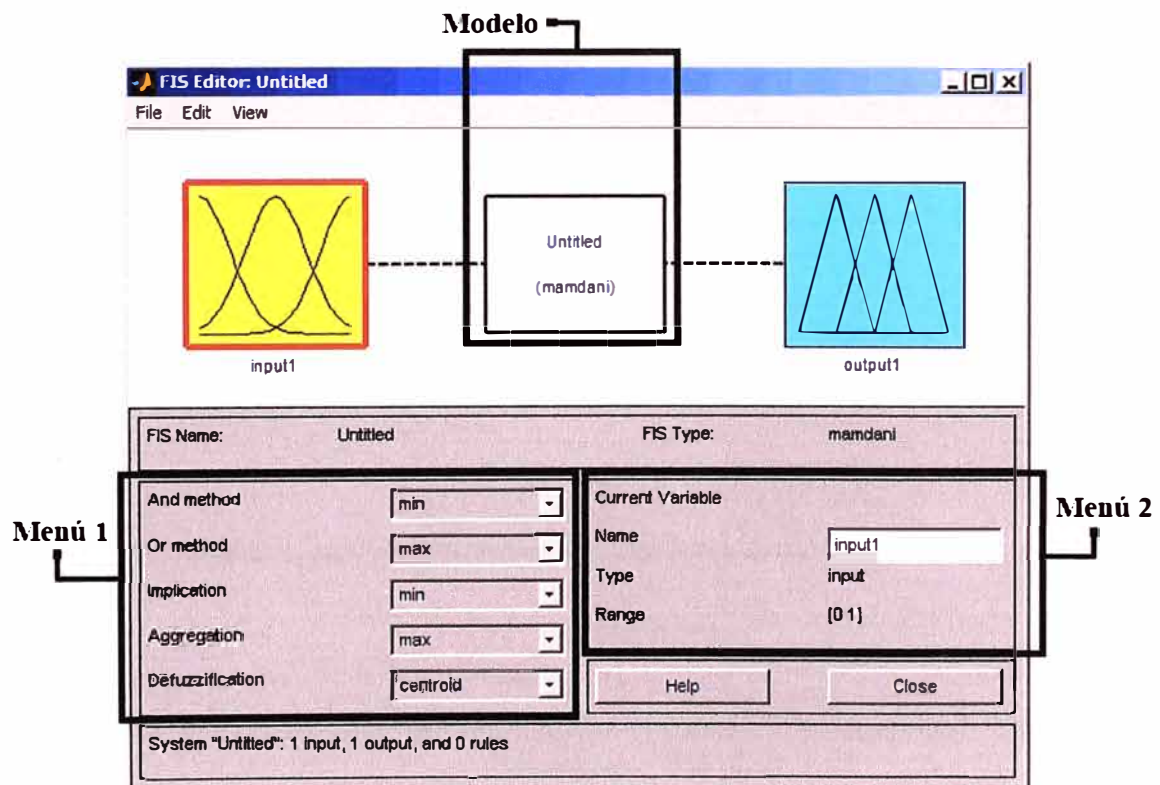
la cual indica que los polos del observador no afectan a los polos del controlador y la recomendación de diseño es que la respuesta del observador sea más rápida que la del sistema de control [6].

**ANEXO B**  
**FUZZY LOGIC TOOLBOX**

El toolbox de Matlab denominado Fuzzy Logic permite simplificar la tarea de diseño, edición y observación de un sistema de control difuso mediante el uso de 5 herramientas visuales:

- El editor del sistema de inferencia (*FIS Editor*) que es la ventana principal,
- El editor de funciones de pertenencia (*Membership unction Editor*),
- El editor de reglas difusas (Rule Editor),
- El visor de reglas difusas (Rule Viewer), y
- El visor de superficies (Surface Viewer).

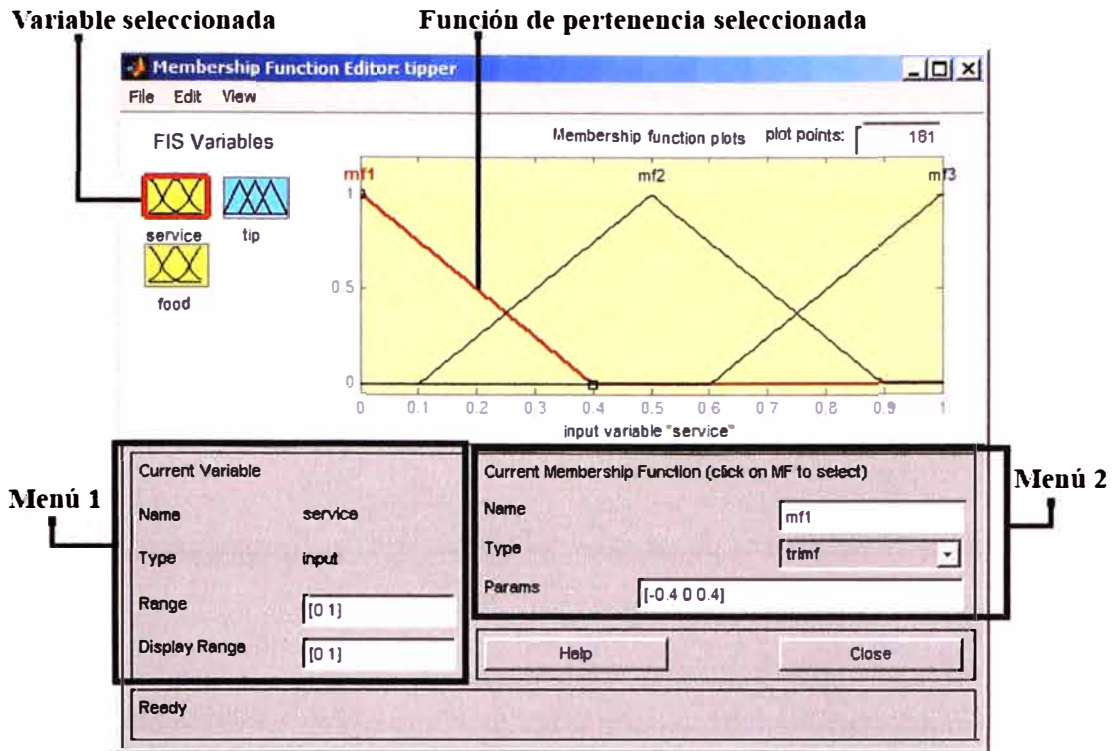
Para acceder a la ventana principal del toolbox se escribe *fuzzy* en la ventana de comandos de Matlab. En la ventana principal se abre por defecto un modelo de una entrada y una salida que usa el método de inferencia Mamdani. Dicha ventana presenta dos menús para cada variable seleccionada como se observa en la Figura B.1. El menú 1 permite modificar los métodos de los operadores lógicos y escoger el método de defuzzificación. Mientras que el Menú 2, permite asignar un nombre a la variable seleccionada. Para agregar más entradas o salidas se debe ir al menú *edit*.



**Figura B.1:** Ventana principal FIS Editor.

En la Figura B.2 se muestra la ventana para la edición de las funciones de pertenencia, la cual se abre haciendo doble clic en la variable de entrada o de salida de interés. Dicha ventana permite agregar más funciones de pertenencia así como definir el rango de la variable seleccionada.





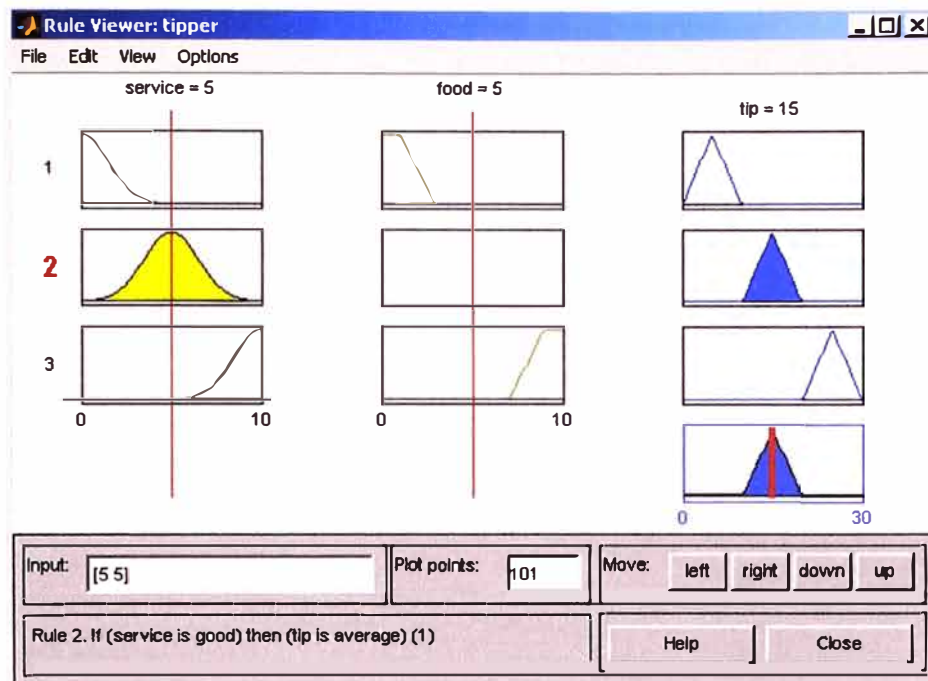
**Figura B.2:** Ventana para la edición de funciones de pertenencia.

La ventana para la edición de las reglas difusas se muestra en la Figura B.3 y ella se abre haciendo doble clic sobre el modelo. En el menú 1 se muestran las entradas definidas, en el menú 2 se selecciona el tipo de conexión lógica entre las variables de entrada y en el menú 3 se selecciona la salida que deberá entregar el controlador. Para que la regla sea generada se presiona el botón *Add rule*.

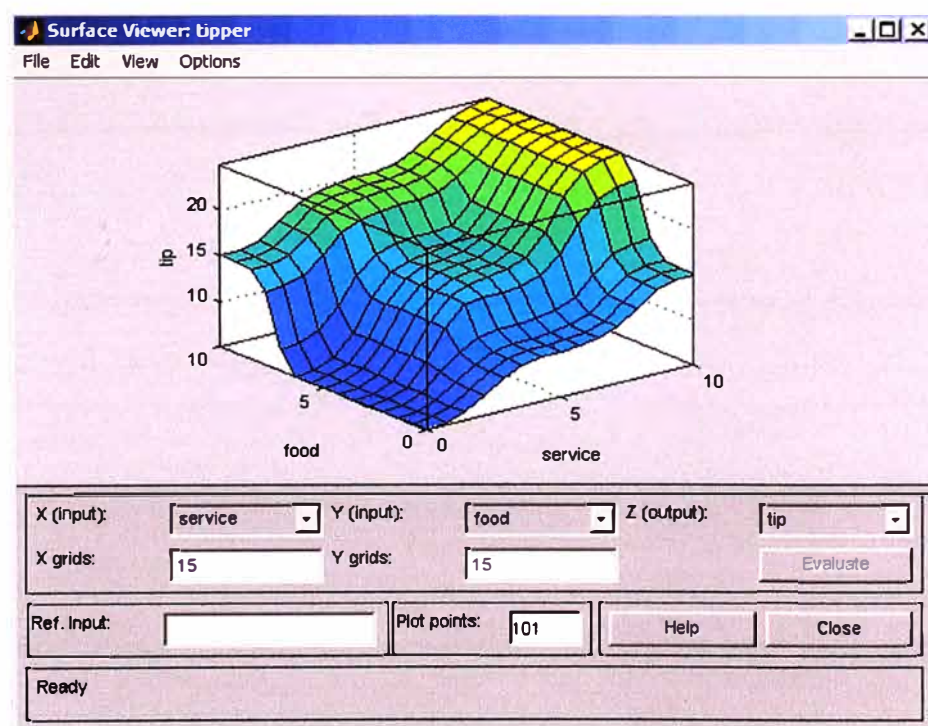


**Figura B.3:** Ventana para la edición de las reglas difusas.

Las ventanas para la visualización de reglas y de superficies se muestran en las Figura B.4 y B.5, respectivamente. Dichos visores facilitan el afinamiento de rangos de las funciones de pertenencias y se abren desde el menú *view* de la ventana principal.



**Figura B.4:** Visor de reglas.



**Figura B.5:** Visor de superficies.

Una vez terminado el diseño éste debe ser exportado al espacio de trabajo *workspace* para su uso en Simulink. Sin embargo, es recomendable que previamente se guarde el diseño en un archivo de extensión *.fis* para su posterior uso o modificación. Para esto se debe ir al menú *File* de la ventana principal.

**ANEXO C**  
**HOJAS DE DATOS DEL ACTUADOR Y DE LOS SENSORES**

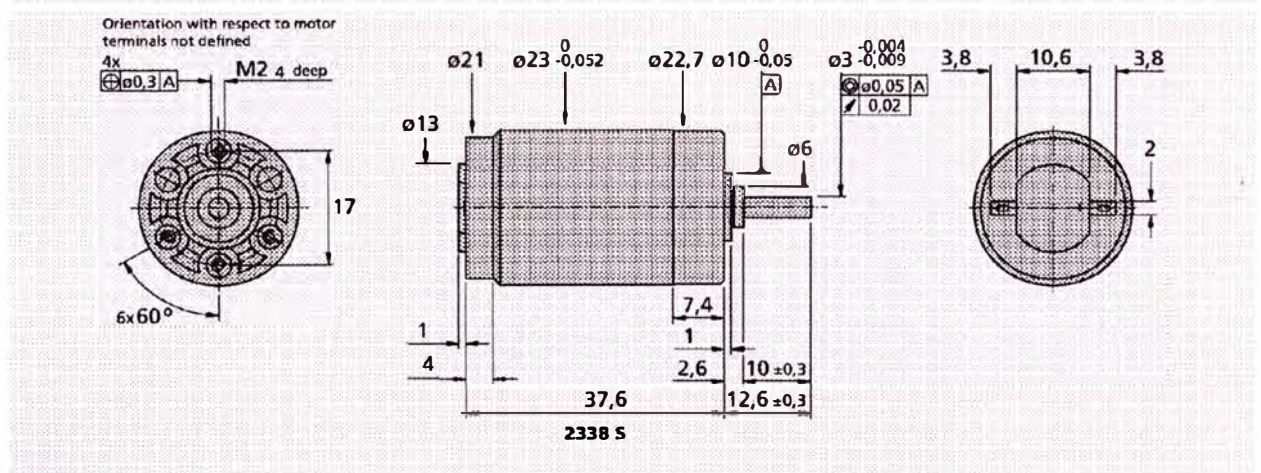
# Motor DC 12V 233812s

Series 2338 ... S

**FAULHABER**

	2338 S	4,5 S	006 S	009 S	012 S	018 S	024 S	
1 Nominal voltage	$U_N$	4,5	6	9	12	18	24	Volt
2 Terminal resistance	R	1,4	2,6	5,7	10,0	23,5	38,0	$\Omega$
3 Output power	$P_2$ max.	3,39	3,23	3,29	3,31	3,18	3,50	W
4 Efficiency	$\eta$ max.	70	69	67	66	67	67	%
5 No-load speed	$n_0$	7 200	7 200	7 400	7 800	7 400	7 600	rpm
6 No-load current (with shaft $\varnothing$ 3,0 mm)	$I_0$	0,100	0,080	0,060	0,050	0,030	0,025	A
7 Stall torque	$M_H$	18,00	17,10	17,00	16,20	16,40	17,60	mNm
8 Friction torque	$M_R$	0,58	0,61	0,67	0,70	0,67	0,72	mNm
9 Speed constant	$k_n$	1 650	1 240	855	678	428	330	rpm/V
10 Back-EMF constant	$k_E$	0,606	0,804	1,170	1,470	2,340	3,030	mV/rpm
11 Torque constant	$k_M$	5,78	7,68	11,20	14,10	22,30	29,00	mNm/A
12 Current constant	$k_I$	0,173	0,130	0,090	0,071	0,045	0,035	A/mNm
13 Slope of n-M curve	$\Delta n / \Delta M$	400	421	435	481	451	432	rpm/mNm
14 Rotor inductance	L	100	180	380	630	1 400	2 600	$\mu$ H
15 Mechanical time constant	$\tau_m$	20	17	17	17	17	17	ms
16 Rotor inertia	J	4,80	3,90	3,70	3,40	3,60	3,80	gcm <sup>2</sup>
17 Angular acceleration	$\alpha$ max.	38	44	46	48	46	47	$\cdot 10^3$ rad/s <sup>2</sup>
18 Thermal resistance	$R_{th1} / R_{th2}$	3 / 24						K/W
19 Thermal time constant	$\tau_{w1} / \tau_{w2}$	5,7 / 645						s
20 Operating temperature range:								
- motor		- 30 ... + 85 (optional - 55 ... + 125)						$^{\circ}$ C
- rotor, max. permissible		+125						$^{\circ}$ C
21 Shaft bearings		sintered bronze sleeves (standard)		ball bearings (optional)		ball bearings, preloaded (optional)		
22 Shaft load max.:		3,0		3,0		3,0		mm
- with shaft diameter:		2,5		20		20		N
- radial at 3000 rpm (3 mm from bearing)		0,3		2		2		N
- axial at 3000 rpm		20		20		20		N
23 Shaft play:								
- radial	$s$	0,03		0,015		0,015		mm
- axial	$s$	0,2		0,2		0		mm
24 Housing material		steel, zinc galvanized and passivated						
25 Weight		70						g
26 Direction of rotation		clockwise, viewed from the front face						

Recommended values								
27 Speed up to	$n_e$ max.	6 000	6 000	6 000	6 000	6 000	6 000	rpm
28 Torque up to	$M_e$ max.	4	4	4	4	4	4	mNm
29 Current up to (thermal limits)	$I_e$ max.	1,380	1,000	0,680	0,510	0,330	0,260	A



## Caja Reductora de Engranajes 66:1

### Series 23/1

Number of gear stages	1	2	3	4	5
Continuous torque	mNm 200	300	700	700	700
Intermittent torque	mNm 400	600	1 000	1 000	1 000
Weight without motor, ca.	g 60	70	90	100	110
Efficiency, max.	% 88	80	70	60	55
Direction of rotation, drive to output	=	=	=	=	=
Reduction ratio <sup>1)</sup> (rounded)	3,71:1	9,7:1 14:1	43:1 66:1	94:1 112:1 134:1 159:1 190:1 246:1	415:1 592:1 989:1 1 526:1
L2 [mm] = length without motor <sup>2)</sup>	27,9	34,1	40,3	46,4	52,6
L1 [mm] = length with motor	2224U...SR 48,2	2230U...S 54,0	2232U...SR 56,2	2233U...S 56,6	2237S...CXR 64,9
	2342S...CR 69,9	2057S...B 84,9	2232S...BSL 60,3	2248S...BSL 75,9	2444S...B 71,9
	AM2224...-10 55,5				

## Sensor: Codificador Óptico US S1

# S1 & S2

## Optical Shaft Encoders

### Description:

The S1 and S2 series optical shaft encoders are non-contacting rotary to digital converters. Useful for position feedback or manual interface, the encoders convert real-time shaft angle, speed, and direction into TTL-compatible quadrature outputs with or without index. The encoders utilize an unbreakable mylar disk, metal shaft and bushing, LED light source, and monolithic electronics. They may operate from a single +5VDC supply.

The S1 and S2 encoders are available with ball bearings for motion control applications or torque-loaded to feel like a potentiometer for front-panel manual interface.

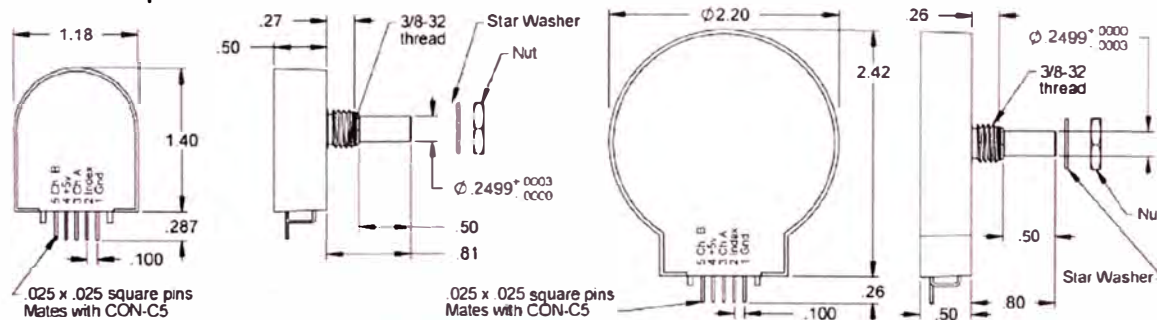
### Electrical Specifications:

B leads A for clockwise shaft rotation. A leads B for counter clockwise shaft rotation viewed from the shaft/bushing side of the encoder. For complete details see our HEDS data sheet.

### Features:

- > Small size
- > Low cost
- > 2-channel quadrature, TTL square wave outputs
- > 3rd channel index option
- > Tracks from 0 to 100,000 cycles/sec
- > Ball bearing option tracks to 10,000 RPM
- > -40 to +100°C operating temperature
- > Single +5V supply
- > US Digital warrants its products against defects and workmanship for two years. See complete warranty for details.

### Mechanical Specifications:



### Mechanical Notes: (ball bearing)

Acceleration	10,000 rad/sec <sup>2</sup>
Vibration	20 g, 5 to 2KHz
Shaft Speed	10,000 RPM max. continuous
Acceleration	50K rad/sec <sup>2</sup>
	10K rad/sec <sup>2</sup> (S2 series)
Shaft Torque	0.05 in. oz. max.
Shaft Loading	1 lb. max.
Bearing Life	(40/P) <sup>3</sup> = Life in millions of revs. P = radial load in pounds.
Weight	0.7 oz.
Shaft Runout	0.0015 T.I.R. max.

### Mechanical Notes: (sleeve bushing)

Acceleration	10,000 rad/sec <sup>2</sup>
Vibration	20 g, 5 to 2KHz
Shaft Speed	100 RPM max. continuous
Shaft Rotation	Continuous & reversible
Shaft Torque	0.5 ± 0.2 in. oz. 0.3 in. oz. max. (NT-option)
Shaft Loading	2 lbs. max. dynamic 20 lbs. max. static
Weight	0.7 oz.
Shaft Runout	0.0015 T.I.R. max.

### Materials & Mounting:

Shaft	Brass or stainless
Bushing	Brass
Connector	Gold plated
Hole Diameter	0.375 in. +0.005 - 0
Panel Thickness	0.125 in. max.
Panel Nut Max Torque	20 in.-lbs.

**ANEXO D**  
**ESQUEMA EN SIMULINK DEL SISTEMA FÍSICO PÉNDULO INVERTIDO**

En la Figura D.1, se muestra el esquema del sistema físico péndulo invertido, cuya emulación en Simulink forma parte del bloque denominado *Sistema Péndulo Invertido* mostrado en la Figura 5.9. El esquema fue desarrollado con las ecuaciones no lineales (2.11) y (2.27).

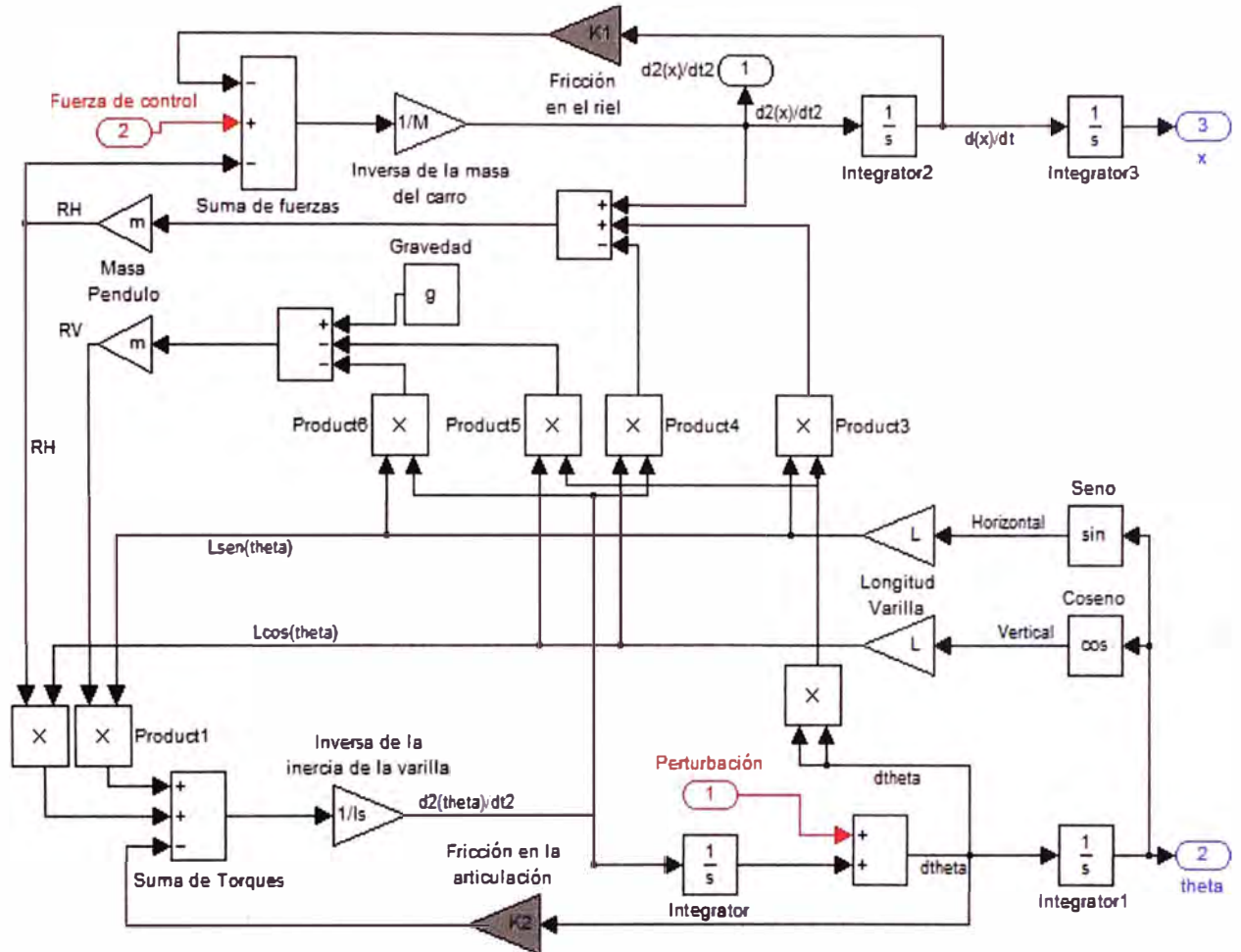


Figura D.1: Emulación en Simulink del sistema físico péndulo invertido.

## BIBLIOGRAFÍA

- [1] Segway Inc. *Segway RPM: Robotic Mobility Plataform*. Disponible en: <http://rmp.segway.com/>. [Fecha de consulta: 12-Junio-2011]
- [2] Marathon Targets Pty Ltd. *Smart Targets for Live-Fire Training*. Disponible en: <http://www.marathon-targets.com>. [Fecha de consulta: 12-Junio-2011]
- [3] Goswami, Ambarish. *Reaction Mass Pendulum*. Disponible en: [http://www.ambarish.com/simple\\_model.html](http://www.ambarish.com/simple_model.html). [Fecha de consulta: 10-Marzo-2011]
- [4] Beer Ferdinand P., Johnston Jr. E. Russell, y Eisenberg Elliot R. "Cuerpos rígidos: sistemas equivalentes de fuerzas." En: *Mecánica vectorial para ingenieros*, 8a ed. Mexico: McGraw-Hill, 2007, pp. 72-85.
- [5] Aguilar Cesar, "Approximate Feedback Linearization and Sliding Mode Control for the Single Inverted Pendulum", Universidad de Queen, Canada - 2002.
- [6] Ogata Katsuhiko, *Modern control engineering*, 4a ed. Upper Saddle River, New Jersey, E.U.A: Prentice Hall, 2002.
- [7] Quanser Consulting, "Linear Experiment 01:PV Position Control", Canada - 2010.
- [8] Franklin Gene F., Powell J. David, y Workman Michael L., *Digital control of dynamics systems*, 3a ed. California, E.U.A: Prentice Hall, 1997.
- [9] Naidu Desineni S., *Optimal control systems*. Boca Ratón, Florida, E.U.A: CRC Press, 2003.
- [10] Roland S. Burns, *Advanced control engineering*. Jordan Hill, Reino Unido: Butterworth-Heinemann, 2001.
- [11] Machuca M. José, "Sistemas de control digital", Notas del curso Control III, Universidad Nacional de Ingeniería, Lima, Perú - 2010.
- [12] Sivanandam S. N., Sumathi S., y Deepa S. N., *Introduction to fuzzy logic using MATLAB*. Berlin, Alemania: Springer, 2006.
- [13] The Mathworks Inc. *Product Documentation*. Disponible en: <http://www.mathworks.com/help/toolbox/fuzzy/>. [Fecha de consulta: 10-Abril-2011]