UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

FACULTAD DE CIENCIAS

TESIS

“FOLIACIONES DE DIMENSIÓN UNO EN ESPACIOS PROYECTIVOS COMPLEJOS”

PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE MAESTRO EN CIENCIAS CON MENCION EN MATEMÁTICA APLICADA

ELABORADO POR:

LILIANA OLGA JURADO CERRÓN

ASESOR:

Dr. RENATO BENAZIC TOMÉ

LIMA – PERÚ

2015

Agradecimientos

Quiero expresar mi sincero agradecimiento a mi orientador el profesor Renato Benazic Tomé, y a los profesores Rudy rosas y Liliana Puchuri.
Quiero agradecer también a mi familia Olga Cerrón Lagos, Samuel Jurado Sanchez, Williams Jurado Cerrón y Alejandro Jurado Cerrón por su paciencia y confianza durante este tiempo, así como también a Orlando Sarmiento por todo el apoyo brindado.

Resumen

FOLIACIONES DE DIMENSIÓN UNO EN ESPACIOS PROYECTIVOS COMPLEJOS

LILIANA OLGA JURADO CERRÓN
ENERO-2015

Asesor: Dr. Renato Benazic.

Título obtenido: Magíster en Matemática

El objetivo de este trabajo es caracterizar las foliaciones por curvas (de dimensión uno) y las foliaciones de codimensión uno en el espacio proyectivo complejo $\mathbb{CP}^n$. Para ello se estudiará los siguientes temas:

- El espacio proyectivo complejo $\mathbb{CP}^n$.
- Foliaciones en espacios proyectivos complejos.
- El concepto de grado de una foliación.
- Singularidades no degeneradas. co
- Foliaciones de codimensión uno.

Específicamente se probará que toda foliación holomorfa por curvas en $\mathbb{CP}^n$ es la compactificación de un campo polinomial y que toda foliación de codimensión uno, proviene de una 1-forma holomorfa con coeficientes polinomios homogéneos del mismo grado.

Para una foliación de dimensión uno en $\mathbb{CP}^n$ se probará los siguientes teoremas:

Teorema: Existe una foliación por curvas con singularidades en CPn que coincide con una foliación inducida por un campo polinomial en el espacio afin $\mathbb{C}^n$

Teorema: Toda foliación holomorfa por curvas en $\mathbb{CP}^n$ es el compactificado de una foliación definida por un campo polinomial en $\mathbb{C}^n$.

Para una foliación de codimensión uno en $\mathbb{CP}^n$ se probará los siguientes teoremas:

Teorema: Una foliación definida por 1-forma en $\mathbb{C}^n$. Podemos extender a una foliacion en $\mathbb{CP}^n$.

Teorema: Toda foliación de codimensión uno en $\mathbb{CP}^n$ puede ser definida por 1-formas polinomiales en cartas afines.

Palabras claves: Foliaciones, espacio proyectivo complejo.

Índice general

Introducción

Las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO) se convierte en una de las disciplinas más imponentes de las Matemática de las más importantes no solo en la Matemática sino en otras ramas de la ciencia como la Física, Química, Biología, Ecología, Economía e Ingeniería. En la mayoría de las EDO no es posible obtener una solución explicita, por este motivo se tuvieron que crear técnicas y una base teórica adecuada para estudiar el comportamiento de las soluciones de la EDO dadas.

La teoría de los Sistemas Dinámicos tiene por finalidad entender el comportamiento cualitativo de las soluciones de una EDO dada con el objetivo de predecir los resultados. Una técnica bien usada en los Sistemas Dinámicos es la clasificación de las Ecuaciones Diferenciales de acuerdo a ciertas propiedades que se desean estudiar (topológicas, diferenciales, analíticas, etc). Esencialmente la clasificación, en una vecindad del punto regular, esta determinado por el Teorema del Flujo Tubular y por tal razón la preocupación en los puntos singulares de las EDOs. El comportamiento de las soluciones en un punto singular es muy rico en el sentido topológico y para su estudio se emplean otras teorías como: Análisis en Varias Variables Reales y Complejas, Topología Diferencial, Topología Algebraica y otros temas.

En el presente trabajo de tesis estudiaremos Foliaciones Holomorfas Singulares por curvas sobre el espacio proyectivo complejo n-dimensional cuyo conjunto singular lo denotaremos por $Sing(\mathcal{F})$ con $codimSing(\mathcal{F}) \geq 2$. La tesis está dividida de los siguientes capítulos:

En el primer capítulo se verá los resultados preliminares que se utilizará a lo largo de la tesis, como la definición de una foliación en un variedad compleja, así como la definición de una foliación mediante campos de vectores holomorfos y la definición de una foliación de codimensión uno mediante formas holomorfas integrables, estas definiciones será importantes para los siguientes capítulos.

En el segundo capítulo se describirá el espacio proyectivo complejo, se probará que es una variedad compleja, los automorfismos en $\mathbb{CP}^n$ se caracterizara como son los automorfismos en mediante transformaciones lineales invertibles, las curvas algebraicas en $\mathbb{CP}^n$ y las aplicaciones entre espacios proyectivos.

En el tercer capítulo se probará que para cualquier foliación definido por un campo $X = \sum_{j=1}^{n} X_j \frac{\partial}{\partial x_j}$, $cod(sing(X)) \geq 2$ polinomial en el plano complejo $\mathbb{C}^n$, genera una foliación por curvas en $\mathbb{CP}^n$.

Teorema: Existe una foliación por curvas, con singularidades en $\mathbb{CP}^n$ que coincide con una foliación inducida por X en el espacio afín $\mathbb{C}^n$.

También se probará la viceversa dado por el siguiente teorema

Teorema: Toda foliación holomorfa por curvas en $\mathbb{CP}^n$ es el compactificado de una foliación definida por un campo polinomial en $E_0 \approx \mathbb{C}^n$

En el cuarto capítulo para una foliación por curvas $\mathcal{F}$ en $\mathbb{CP}^n$ Y un hiperplano H no invariante en $\mathcal{F}$ se definirá el grado de ula foliación, así como las caracterizaciones de la s foliaciones de grado k.

En el quinto capítulo se caracterizara una foliación de codimensión uno mediante el siguiente teorema

Teorema: Sea $\mathcal{F}$ una foliación de codimensión uno en $\mathbb{CP}^n\,(n)$ y sea $\mathcal{F}^* = \pi^*\,(\mathcal{F})$ donde $\pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{(0,\ldots,0)\} \longrightarrow \mathbb{C}^n\,(n)$ es una proyección canónica. Entonces existe una 1- forma holomorfa integrable en $\mathbb{C}^{n+1}$,

$$\Omega = \sum_{j=0}^{n} \Omega_j dx_j,$$

cuyos coeficientes $\Omega_0, \ldots, \Omega_n$ son polinomios homogéneos de mismo grado, tal que $\Omega = 0$ define $\mathcal{F}^*$ en $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{(0, \ldots, 0)\}$.

Logrando la caracterización de foliaciones de dimensión uno y la caracterización de foliaciones de codimensión uno.

Capítulo 1

Resultados preliminares

En este capítulo se introducirá conceptos y resultados de carácter general que serán utilizados a lo largo de la tesis.

Definición 1.1 *Una **variedad compleja de dimensión** n es un par $(X, \mathcal{A})$ en donde X es un espacio topológico de Hausdorff con base numerable y $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ es una colección de homeomorfismos*

$$\varphi_i : U_i \to V_i$$

en donde U_i es un abierto de X y V_i es un abierto de $\mathbb{C}^n$, que satisfacen las dos condiciones siguientes:

1. $X = \bigcup_{i \in I} U_i.$

2. *Se $(U_i, \varphi_i),\ (U_j, \varphi_j) \in \mathcal{A}$ son tales que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ entonces*

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \to \varphi_j(U_i \cap U_j)$$

   es un biholomorfismo.

La colección $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ es llamada **atlas analítico de dimensión** n y sus elementos (U_i, φ_i) son llamados **cartas locales**. Los biholomorfismos

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \to \varphi_j(U_i \cap U_j)$$

son llamados **cambios de coordenadas**.

Definición 1.2 *Sea M^m una variedad analítica compleja . Una foliación holomorfa regular de dimensión k (o codimensión $m-k$) en M es una familia $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ que satisface las tres condiciones siguientes:*

1. *$M = \bigcup_\alpha U_\alpha$.*
2. *Si $(U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \mathcal{A}$ entonces $\varphi_\alpha(U_\alpha) = \Delta_\alpha^k \times \Delta_\alpha^{m-k}$, para todo α.*
3. *Si $(U_\alpha, \varphi_\alpha), (U_\beta, \varphi_\beta) \in \mathcal{A}$ son tales que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ entonces el cambio de coordenadas*
$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$
viene dado por
$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}(z', z'') = (h_{\alpha\beta}(z', z''), g_{\alpha\beta}(z'')), \text{ para todo } (z', z'') \in \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \subseteq \mathbb{C}^k \times \mathbb{C}^{m-k}.$$

Observación 1.1 *Las foliaciones de dimensión 1 son llamadas **foliaciones por curvas** y la condición 3 establece que los cambios de coordenadas llevan conjuntos de la forma $\Delta^k \times \{z''\}$ (donde $z'' \in \Delta^{m-k}$) en conjuntos $\Delta^k \times \{w''\}$ (donde $w'' \in \Delta^{m-k}$).*

Ejemplo 1.1 *Sea $\mathbb{C}^m$ y $1 \leq k \leq m-1$. Considerando $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha = Id)\}$ tenemos*

$$\mathcal{F} = \{\mathbb{C}^k \times \{z''\};\ z'' \in \mathbb{C}^{m-k}\}$$

es una foliación analítica de dimensión k en $\mathbb{C}^m$. Observe que en este caso las hojas son $\mathbb{C}^k \times \{z''\}$.

Ejemplo 1.2 *Sea $f : M \to N$ una sumersión analítica, donde M y N son variedades analíticas de dimensiones $n+k$ y k respectivamente. En este caso, por el Teorema de la Forma local de las sumersiones analíticas, los conjuntos de nivel $\{f = c\}$, $c \in N$, son subvariedades analíticas de codimensión k de M.*

Prueba

Por el teorema de Forma Local de las Sumersiones, existen atlas $\{(U, X)\}, \{(V, Y)\}$ de M, N respectivamente tal que

1. $X(U) = D^n \times D^{m-n}$.

2. $Y(V) = D^{m-n}$.

3. $Y \circ f \circ X^{-1} = \Pi_2$.

Provaremos que la colección $\mathcal{F} = \{U, X)\}$ define una foliación de M. En efecto, sean $\{(U, X)\}, (U^*, X^*)$ dos elementos del recubrimiento. Entonces,

$$\Pi_2 \circ X^* \circ X^{-1} = Y^* \circ f \circ (X^*)^{-1} \circ X^* \circ X^{-1} =$$

$$= Y^* \circ f \circ X^{-1} = Y^* \circ Y^{-1} \circ \Pi_2.$$

Así, $\Pi_2 \circ (X^* \circ X^{-1}) = (Y^* \circ Y^{-1}) \circ \Pi_2$ que no depende de $x \in D^n$. Esto prueba que $\mathcal{F}$ es una foliación de clase C^r y codimensión $m - n$ de M. Es claro, por definición, que las placas de $\mathcal{F}$ estan contenidas en los conjuntos de nivel de f. Esto prueba que las hojas de $\mathcal{F}$ son precisamente los conjuntos de nivel de f y el resultado es obtenido.

1.1. Conjunto analítico

En esta sección se va definir que es un conjunto analítico, importante defición ya que mas adelante se hablará de conjunto singular de una foliación de dimensión y codimensión uno, donde un conjunto singular es un conjunto analítico.

La prueba de los teoremas y proposiciones que enuncien en esta sección se pueden encontrar en [14].

Definición 1.3 *Sea M una variedad compleja. Decimos que un subconjunto X de M es analítico si para todo $p \in M$ existen una vecindad conexa U de p y funciones holomorfas $f_1, ..., f_{m(p)} \in \mathcal{O}(U)$ tales que $X \cap U = (f_1 = ... = f_{m(p)} = 0)$.*

Decimos que X tiene codimensión uno si:

1. Para todo $p \in X, m(p) = 1$
2. Para todo $p \in X$ la función definidora $f_1 \in \mathcal{O}(U)$, no es constante.

Decimos que un subconjunto analítico X de M ($dim(M) = n \geq 2$) si $X = \emptyset$ o si $X \neq \emptyset$ para todo $p \in X$, $m(p) \geq 2$ existen funciones definidoras $f_1, ..., f_{m(p)}$ tales que dos de ellas, digamos f_1 y f_2 son independientes en p.

Ejemplo 1.3 *El conjunto vacio es un subconjunto analítico de $\mathbb{C}^n$. En efecto basta considerar $\emptyset = \{z \in \mathbb{C}^n; 1(z) = 0\}$.*

Ejemplo 1.4 *Todo conjunto abierto de $\mathbb{C}^n$ es un subconjunto analítico de U. En efecto basta considerar $U = \{z \in U; 0(z) = 0\}$.*

Ejemplo 1.5 *$X = \left\{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\right\} \subset \mathbb{C}$ es definido en la vecindad de cualquier de sus puntos por una función analítica, aunque no es posible definir por una función analítica en una vecindad de $0 \in \mathbb{C}$.*

Proposición 1.1 *Sea $U \subseteq \mathbb{C}^n$ abierto y $V \subseteq U$ subconjunto analítico de U. Si cumple:*

- V *es un subconjunto cerrado.*

- V *es un subconjunto nunca denso en* U*.*

- U *es conexo entonces* $U - V$ *es conexo.*

Proposición 1.2 *Sea* $U \subseteq \mathbb{C}^n$ *abierto y* $V_1, V_2 \subseteq U$ *subconjunto analíticos de* U*, entonces* $V_1 \cup V_2, V_1 \cap V_2$ *son subconjuntos analíticos.*

Definición 1.4 *Decimos que un subconjunto analítico* $\emptyset \neq X \subset U$ *es reductible si existen subconjuntos analíticos no vacios* $X_1 \neq X_2$ *tal que* $X = X_1 \cup X_2$*. Un conjunto analítico es irreductible si no es reductible.*

Ejemplo 1.6 *Sean* $X = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2; x = 0\}$ *y* $Y = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2; xy = 0\}$*.* X *es irreductible y* Y *reductible.*

Teorema 1.1 *Descomposición en componentes irreductibles. Sea* $\emptyset \neq X \subset U \subset \mathbb{C}^n$ *un subconjunto analítico. Entonces podemos escribir* $X = \cup_{j \in J} X_j$ *donde :*

- J *es enumerable (finito o infinito).*

- $X_j \neq \emptyset$ *es irreductible para todo* $j \in J$*.*

- $X_i \neq X_j$ *para todo* $i \neq j$*.*

- *Para todo compacto* $K \subset U$ *tenemos* $\{j \in J; X_j \cap K \neq \emptyset\}$ *es finito.*

La descomposición es única: si $X = \cup_{j \in J} X_j = \cup_{i \in I} Y_i$ *son dos descomposiciones entonces existe una biyección* $\sigma : I \to J$ *tal que* $Y_i = X_{\sigma(i)}$ *para todo* $i \in I$*.*

Definición 1.5 *Sea* U *un abierto conexo de* $\mathbb{C}^n$*. Decimos que un conjunto analítico irreductible* $\emptyset \neq X \subset U$ *es liso si* $X = U$ *o las funciones que lo definen localmente son submersiones.*

Teorema 1.2 *Un subconjunto analítico liso es una subvariedad propia y conexa de U (en el sentido de la topologia diferencial).*

Teorema 1.3 *Sea $Z \subset M$ un subconjunto analítico propio de una variedad holomorfa conexa M. Entonces el complemento $M - X$ es abierto, denso y conexo.*

Teorema 1.4 *Sean M y N variedades complejas y $f : M \to N$ una aplicación holomorfa propia. Si V es un subconjunto analítico de M, entonces $f(V)$ es un subconjunto analítico.*

1.2. Teoremas de extensión

En esta sección enunciaremos el teorema de extensión de Hartogs. Como aplicación, se prueba que una función holomorfa definida en el complemento de un conjunto analítico de codiemnsión mayor o igual a dos, se extiende al conjunto. También enunciaremos el teorema de extensión de funciones meromorfas de Levi. Antes recordaremos la definicón de función meromorfa.

La prueba de los teoremas y proposiciones que enuncien en esta sección se pueden encontrar en [6] y en el apendice de [12]

Definición 1.6 *Un dominio de Hartogs de $\mathbb{C}^{n+1} = \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$ es un abierto de la forma $H = (V \times D(0, r)) \cup (U \times A(0, r_1, r))$, donde $U \subset \mathbb{C}^n$ es abierto conexo y $V \subset U$ es un subconjunto abierto no vacio. Dado el conjunto H es como encima, colocamos $c(H) = U \times D(0, r)$.*

Teorema 1.5 ***(Teorema de Hartogs)*** *Sea H un dominio de Hartogs. Una función holomorfa $f : H \to \mathbb{C}$ se extiende a una función holomorfa $F : c(H) \to \mathbb{C}$.*

Corolario 1.1 *Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un abierto conexo y $F \subset U$ un cerrado tal que $U - F$ es conexo y para todo $z \in F$ existen*

1. *Un biholomorfismo $\phi : W \to V$, donde $W \subset \mathbb{C}^n$ es abierto y V en una vecindad de z.*

2. *Un dominio de Hartogs $H \subset W$ tal que $z \in \phi(c(H))$. Entonces toda función holomorfa $f : U - F \to \mathbb{C}^m$ se extiende a una única función holomorfa $g : U \to \mathbb{C}^m$.*

Corolario 1.2 *Sean $U \subset \mathbb{C}^n$, $n \geq 2$, un abierto, $\Lambda \in U$ un subconjunto discreto y $f : U - \Lambda \to \mathbb{C}^m$ una función holomorfa. Entonces f se extiende a una función holomorfa en U.*

Ejemplo 1.7 *Se $H \subset \mathbb{C}^{n+1}$ es un dominio de Hartogs y $W \subset \mathbb{C}^m$ es conexo entonces $H \times W$ es un dominio de Hartogs en $\mathbb{C}^{n+m+1}$. Toda función holomorfa en $H \times W$ se extiende a una función holomorfa en $c(H) \times W$.*

Definición 1.7 *Decimos que un conjunto analítico $X \subset U \subset \mathbb{C}^n$ tiene codimensión ≥ 2 si $dim(X) \leq n - 2$.*

Teorema 1.6 *Sea M una variedad compleja de dimensión $n \geq 2$ y $X \subset M$ un subconjunto analítico de codimensión mayor o igual a dos. Entonces toda función holomorfa en $M - X$ se extiende a única función holomorfa en M.*

Definición 1.8 *Sea M una variedad compleja conexa. Una función meromorfa en M es, por definición, una función holomorfa $f \in \mathcal{O}(W)$ tal que:*

(a) *W es un subconjunto abierto y denso de M.*

(b) *Para todo $p \in M$ existen una vecindad convexa U_p de p y funciones holomorfas $g_p, h_p \in \mathcal{O}(U_p)$ tales que $h_p \not\equiv 0$ y la restricción $f|W \cap U_p = g_p|h_p$.*

(c) *Si $f \not\equiv 0$ y U_p, g_p y h_p son como arriba, entonces el conjunto $\{q \in U_p : g_p(q) = h_p(q) = 0\}$ tiene codimensión mayor o igual a dos en U_p.*

En otras palabras, una función meromorfa es una función que puede ser escrita localmente como el cociente de dos funciones holomorfas. En particular, las funciones holomorfas, son meromorfas. Denotaremos el conjunto de las funciones meromorfas en M por $\mathcal{M}(M)$

Observación 1.1 *Como consecuencia de la definición, podemos decir que una función meromorfa, no identicamente nula, en M puede ser dada por una cobertura $\mathcal{U} = (U_j)_{j\in J}$ de M por abiertos conexos y dos colecciones de funciones holomorfas $(g_j)_{j\in J}$ y $(h_j)_{j\in J}$ tales que*

(i) $g_j, h_j \in \mathcal{O}(U_j)$, *siendo* $h_j \not\equiv 0$, *para todo* $j \in J$.

(ii) *El conjunto* $\{p \in U_j : g_j(p) = h_j(p) = 0\}$ *tiene codimensión mayor o igual a dos en* U_j *para todo* $j \in J$.

(iii) *Si* $i, j \in J$ *son tales que* $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, *entonces las funciones* $g_i|h_i$ *y* $g_j|h_j$ *coinciden (con* f*) en el conjunto* $\{p \in U_i \cap U_j : h_i(p) = 0 \text{ o } h_j(p) = 0\}$.

Veremos en seguida que una función meromorfa define naturalmente dos divisores.

Definición 1.9 *Sea M una variedad compleja. Un divisor en M es una terna $\mathcal{D} = (\mathcal{U}, \mathcal{G}, \mathcal{C})$ tal que:*

(a) $\mathcal{U} = (U_j)_{j\in J}$ *es una cobertura de* M *por abiertos conexos,* $\mathcal{G} = (g_j)_{j\in J})$ *y* $\mathcal{C} = (g_{ij})_{U_{ij}\neq\emptyset}$, *son colecciones de funciones holomorfas, donde* $g_j \in \mathcal{O}(U_j), U_{ij} = U_i \cap U_j, g_{ij} \in \mathcal{O}^*(U_{ij})(\mathcal{O}^*(W)$ *es el conjunto de funciones holomorfas en* W *en que no se anulam en ningum punto de* W*).*

(b) *Si* $U_{ij} \neq \emptyset$ *entonces* $g_i = g_{ij} \cdot g_j$ *en* U_{ij}.

(c) *$\mathcal{C}$ es un cociclo multiplicativo, es decir, si $i, j, k \in J$ son tales que $U_{ijk} = U_i \cap U_j \cap U_k \neq \emptyset$, entonces $g_{ij} = 1\ g_{ji}$ en U_{ij} y $g_{ij} \cdot g_{jk} \cdot g_{ki} = 1$ en U_{ijk}.*

Observe que la condición (b) implica que si $U_{ij} \neq \emptyset$, entonces $\{p \in U_{ij} : g_i(p) = 0\} = \{p \in U_{ij} : g_j(p) = 0\}$. Esto implica que existe un conjunto analítico X en M tal que $X \cap U_i = \{p \in U_i : g_i(p) = 0\}$ para todo $i \in J$. Este conjunto será llamado conjunto de ceros del divisor $\mathcal{D}$ y será denotado por $Z(\mathcal{D})$.

Proposición 1.3 *Sea f una función meromorfa, identicamente no nula, en la variedad compleja e conxea M. Entonces existen dos divisores $(f)_0$ y $(f)_\infty$ con las siguientes propiedades:*

(i) *El conjunto analítico $S(f) = Z((f)_0) \cap Z((f)_\infty)$ tiene codimensión mayor o igual a dos en M.*

(ii) *f puede ser considerada como una función holomorfa de $M|S(f)$ en $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C}P(1)$, siendo $Z((f)_0) = f^{-1}(0)$ y $Z((f)_\infty) = f^{-1}(\infty)$.*

Nota 1.1 *$(f)_0$ y $(f)_\infty$ son llamados divisores de ceros y de polos de f respectivamente. El conjunto $S(f)$ es llamado conjunto singular de f. Denotaremos los conjuntos $Z((f)_0)$ y $Z((f)_\infty)$ por $Z(f)$ y $P(f)$, respectivamente.*

Teorema 1.7 ***(Teorema de Levi)*** *Sea M una variedad compleja de dimensión $n \geq 2$ y $X \subset M$ un subconjunto analítico de codimensión mayor o igual a dos. Entonces toda función meromorfa en $M - X$ se extiende a única función meromorfa en M.*

1.3. 1-Formas diferenciables

Definición 1.10 *Una* 1***-forma diferenciable*** *en una variedad* M *es una aplicación*

$$\omega : M \to (TM)^*.$$

Sea $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ cubrimiento por abiertos de M. Recordamos que el espacio tangente $T_x(M)$ de M en cada ponto $x \in U_\alpha$ es generado por los vectores

$$(\varphi_\alpha^{-1})'(\varphi(x)) \cdot e_j := \frac{\partial}{\partial x_\alpha}$$

Considere nuevamente un sistema de coordenadas locales $\{(x_1, \ldots, x_n) \in U_\alpha, \varphi_\alpha^{-1}\}$ de M. Tome la base dual de $T_x(M)$ dada por las formas lineales $\{dx_1(x), \ldots, dx_n(x)\}$ tal que

$$dx_i\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

Por tanto, 1-forma diferenciable ω puede ser dada localmente como una aplicación

$$\begin{array}{rccc} \omega|_{U_\alpha} : & U_\alpha & \to & \pi^{-1}(U_\alpha) \simeq U_\alpha \times (\mathbb{C}^n)^* \\ & x & \mapsto & (x, \omega_\alpha(x)) \end{array}$$

donde $\omega_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{C}^{n*}$ es una aplicación de clase C^∞ llamada aplicación local de ω. Entonces, la representación local de ω puede ser escrita como

$$\omega = \sum_{1\leq i_1 \leq \cdots \leq i_p \leq n} P_{i_1,\ldots,i_p} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}. \tag{1.1}$$

con $P_{i_1,\ldots,i_p} \in C^\infty(U_\alpha)$.

Definición 1.11 *Dados $X \in \mathcal{X}(M)$ un campo de vectores y una p-forma diferenciable ω, definimos la* ***contracción*** *de ω en la dirección de X, la cual es una $(p-1)-$forma, por*

$$\begin{array}{rccl} i_X(\omega)(x): & \underbrace{\mathcal{X}(M)\times\cdots\times\mathcal{X}(M)}_{(p-1)-veces} & \rightarrow & \mathcal{O}(M) \\ & (v_1,\ldots,v_{p-1}) & \mapsto & \omega(x)(X(x),v_1,\ldots,v_{p-1}), \end{array}$$

para todo $x \in M$.

Definición 1.12 *Sea $\omega \in \bigwedge^p(M)$ una p-forma diferenciable. La* ***diferencial exterior*** *de ω es la $(p+1)$-forma, definida localmente por*

$$d\omega = \sum_{1\leq i_1\leq\cdots\leq i_p\leq n} dP_{i_1,\ldots,i_p}dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_p}.$$

Proposición 1.4 *Sean $f: M\rightarrow N$ una aplicación diferenciable, dadas las 1-formas diferenciables ω yθ se tiene:*

(i) $f^*(w\wedge\theta) = f^*\omega\wedge f^*\theta$

(ii) $df^*(\omega) = f^*(d\omega)$;

(iii) $d(d(\omega)) = 0$;

(iv) $d(\omega\wedge\theta) = d\omega\wedge\theta - \omega\wedge d\theta$.

Prueba: Sigue de la definición de diferencial exterior.

1.4. Fibrados vectoriales

Esta sección destinase al estudio de fibrados vectoriales. Este es un concepto importante en Geometría Algebraica y que será abordado en este trabajo.

Definición 1.13 *Sea M una variedad compleja. Un fibrado vectorial holomorfo de rango m en M es una familia de espacios vectoriales complejos parametrizados por M, $E = U_{p\in M}E_p$, donde E tiene una estructura de variedad compleja tal que*

a) *existe un holomorfismo $\pi : E \to M$, denominado proyección de E sobre M, que lleva al espacio E_p en p.*

b) *para cada p en M existe una vecindad U de p en M y un biholomorfismo*

$$\zeta_U : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{C}^m$$

tal que, para cada $q \in U, \zeta_U$ es un isomorfismo lineal del espacio E_q sobre $\{q\} \times \mathbb{C}^m$.

Ejemplo 1.8 *Sea M una variedad compleja compleja de dimensión n, sea el conjunto T^*M definido por*

$$T^*M = \cup_{p\in M}T_p^*M$$

que podemos indentificar con el siguiente conjunto

$$T^*M = \big\{(p,\omega) : p \in M, \omega \in T_p^*M\big\}$$

Podemos definir una aplicación proyección de manera natural entre T^*M y M

- $\pi^* : T^*M \to M$, $\pi^*(p,\omega) = p$
-
$$\begin{array}{rccl} \omega|_{U_\alpha} : & U_\alpha & \to & \pi^{-1}(U_\alpha) \simeq U_\alpha \times (\mathbb{C}^n)^* \\ & x & \mapsto & (x, \omega_\alpha(x)) \end{array}$$

  donde ω_α cumple 1.1 . T^*M es un fibrado vectorial holomorfo de dimensión $2n$, se le conoce como el fibrado cotangente de M.

A los espacios $E_p = \pi^{-1}(p)$ se les denomina fibras del espacio total E y, a la dimensión de éstas, rango de E.
La condición b) de la definición se le conoce como condición de trivialidad local. Así, si la vecindad U resulta ser todo M, entonces se dice que E es un fibrado trivial.
Si consideramos ahora dos biholomorfismos $\zeta_1 : \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times \mathbb{C}^m$, $\zeta_j : \pi^{-1}(U_j) \to U_j \times \mathbb{C}^m$ como en la Definición 1.13, se tiene que, para cada $p \in U_i \cap U_j$

$$\zeta_i \circ \zeta_j^{-1}|_{\{p\}\times\mathbb{C}^m} : \{p\} \times \mathbb{C}^m \to \{p\} \times \mathbb{C}^m$$

es un elemento del espacio de las matrices invertibles de rango m, $\mathrm{GL}(m, \mathbb{C})$. Por consiguiente, si $\{U_i\}_{i\in I}$ es una cubierta abierta de M y las parejas $\{U_i, \zeta_i)$ cumplen con la condición de trivialización local de la Definición 1.13, entonces para cada $U_i \cap U_j$ existe una transformación holomorfa

$$\zeta_{ij} : U_i \cap U_j \to GL(m, \mathbb{C})$$

definida por

$$\zeta_{ij}(p) = \zeta_i \circ \zeta_j^{-1}|_{\{p\}\times\mathbb{C}^k}$$

Así definidas, las transformaciones ζ_{ij} satisfacen la condición de cociclo en $U_i \cap U_j \cap U_k$ dada por

$$\zeta_{ik} = \zeta_{ij} \cdot \zeta_{jk}. \tag{1.2}$$

Observamos que una definición equivalente de fibrado vectorial en M puede darse a partir de una cubierta $\{U_i\}_{i\in I}$ de M y aplicaciones holomorfas $\zeta_{ij} : U_i \cap U_j \to GL(m, \mathbb{C})$ que satisfacen (1.2). En este caso, el espacio total E se construye como se indica a continuación para cada $i \in I$ consideremos el producto $U_i \times \mathbb{C}^m$, la transformación ζ_{ij} nos da, para cada $p \in U_i$ una matriz $\zeta_{ij}(p) \in GL(m, \mathbb{C})$ y por tanto un isomorfismo de $\mathbb{C}^m$ en sí mismo. Por medio de $\zeta_{ij}(p)$, cada $v \in \mathbb{C}^m$ tiene asociado un único vector $\zeta_{ij}(p) \cdot v$ de manera que es posible establecer una “regla de pegado”de los abiertos $U_i \times \mathbb{C}^m$, $U_j \times \mathbb{C}^m$: si $(p, v) \in (U_i \cap U_j) \times \mathbb{C}^m$, identificamos el punto (p, v) en $U_i \times \mathbb{C}^m$ con el punto $p, \zeta_{ij}(p) \cdot v)$ en $U_j \times \mathbb{C}^n$ y debotamos por E al espacio topológico obtenido a partir de dichas identificaciones. El espacio E como conjunto está dado por $E = \cup_{i\in I} U_i \times \mathbb{C}^m$; las inclusiones $U_i \times \mathbb{C}^m \hookrightarrow E$ le dan estructura de variedad y las condiciones de cociclo (1.2) garantizan que E es, de hecho, una variedad compleja provista de una aplicación $\pi : E \to M$, donde la fibra $\pi^{-1}(p) = E_p$, sobre p, tiene definida una estructura de espacio vectorial de dimensión m.

Ejemplo 1.9 *Sea M una variedad compleja compleja de dimensión n y $\{(U_i, \varphi_1)\}_{i\in I}$, $\varphi_i : U_i \to W_i \subset \mathbb{C}^n$, un cubrimiento abierto de M por cartas coordenadas, con funciones de transición $\varphi_{ij} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \to \varphi_i(U_i \cap U_j)$. La matriz jacobiana del cambio de coordenadas $(D\varphi_{ij})$ define el fibrado tangente de M.*
En este caso, la condición de cociclo es consecuencia inmediata de la Regla de la Cadena. Al espacio total se le denomina fibrado tangente de M y se denota por $TM, TM = \cup_{p\in M} T_pM$.

Definición 1.14 *Sea M una variedad compleja y E un fibrado vectorial holomorfo de rango m sobre M. Una sección holomorfa de E en un abierto $U \subset M$ es una función holomorfa $\sigma U \to E$, tal que $\sigma(p) \in E_p$ para toda $p \in U$; es decir, $\sigma U \to E$ es yal que $\pi \circ \sigma$ es la identidad en U. Si suponemos que (U, ζ_U) cumple la condición de trivialidad local de E en U, $\zeta_{ij} : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{C}^m$, podemos definir canónicamente m secciones $\sigma^1, \ldots, \sigma^m$ de E en U tales que $\sigma^i(p), p \in U$ forman una base de E_p. Si $\{e_1, \ldots, e_n\}$ es la base canónica de $\mathbb{C}^m$*

$$\sigma^i(p) = \zeta_{ij}^{-1}(p, e_i), \quad i \in I,$$

son las secciones buscadas.

Así, toda sección $\sigma : U \to E$ se expresa como

$$\sigma(p) = \sigma_{i=1}^{m} \alpha_i(p) \zeta_{ij}^{-1}(p, e_i),$$

Consideremos a M y a E como antes, y sea F un fibrado vectorial holomorfo de rango n sobre M, descrito por el cociclo (ξ_{ij}) en la cubierta $\{U_i\}_{i \in I}$. Entonces un morfismo de fibrados vectoriales, $\Phi : E \to F$, es una transformación holomorfa tal que $\Phi(E_p) \subset F_p$ y Φ es lineal en cada fibra. Esta propiedad nos permite describir a Φ por medio de una familia de funciones holomorfas $\Phi_i : U_i \to Hom(\mathbb{C}^m, \mathbb{C}^n) = M_{m \times n}(\mathbb{C})$, tales que, si $\tilde{\Phi}_i : U_i \times \mathbb{C}^m \to U_i \times \mathbb{C}^n$ está dada por

$$\tilde{\Phi}_i(p, v) = (p, \Phi_i(p)v),$$

entonces el siguiente diagrama es conmutativo en $U_i \cap U_j$

$$\begin{tikzcd} U_j \times \mathbb{C}^n \arrow[r, "\tilde{\xi}_{ij}"] & U_i \times \mathbb{C}^n \\ U_j \times \mathbb{C}^m \arrow[u, "\tilde{\Phi}_j"] \arrow[r, "\tilde{\zeta}_{ij}"] & U_i \times \mathbb{C}^m \arrow[u, "\tilde{\Phi}_i"'] \end{tikzcd} \tag{1.3}$$

donde $\tilde{\zeta_{ij}}(p, v) = (p, \zeta_{ij}(p)v)$ y $\tilde{\xi}_{ij}(p, u) = (p, \xi_{ij}(p)u)$.
Dos fibrados vectoriales son isomorfos si existe $\tilde{\Phi}_i$ como en (1.3) tal que $\tilde{\Phi}_i(p)$ es invertible para toda $p \in U_i \cap U_j$ y, esto se cumple para toda $i, j \in I$.

Ejemplo 1.10 *Sea $\mathcal{F}$ una foliación no singular por curvas en la variedad M, determinada por cartas coordenas distinguidas $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$, $\varphi_i : U_i \to W_i \subset \mathbb{C}^n$ que satisfacen la condición (1.4). Si se considera la composición de las matrices jacobianas de los cambios de coordenadas $D\varphi_{ik} = D\varphi_{ij} \circ D\varphi_{jk}$, se tiene, como consecuencia de (1.4), que el término en la entrada inferior derecha de $D\varphi_{ik}$ se multiplica como un cociclo:*

$$\begin{bmatrix} * & 0 \\ * & \frac{\partial \varphi_{ij}^n}{\partial w_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} * & 0 \\ * & \frac{\partial \varphi_{jk}^n}{\partial w_n} \end{bmatrix} \qquad \frac{\partial \varphi_{ik}^n}{\partial w_n} = \frac{\partial \varphi_{ij}^n}{\partial w_n} \cdot \frac{\partial \varphi_{jk}^n}{\partial w_n}.$$

Sea L el fibrado lineal descrito por el cociclo $(\frac{\partial \varphi_{ij}^n}{\partial w_n})$. Si definimos en $\{U_i\}$ a la familia de funciones $F_i : U_i \to Hom(\mathbb{C}, \mathbb{C}^n)$, tales que $F_i(p) = (0, \ldots, 1)$, entonces las transformaciones $\tilde{F}_i = U_i \times \mathbb{C} \to U_i \times \mathbb{C}^n$

$$\tilde{F}_i(p, v) = (p, F_i(p)v) = (p, (0, \ldots, 0, v))$$

son tales que el diagrama

$$\begin{tikzcd} U_j \times \mathbb{C}^n \arrow[r, "D\varphi_{ij}"] & U_i \times \mathbb{C}^n \\ U_j \times \mathbb{C} \arrow[u, "\tilde{F}_j"] \arrow[r, "\frac{\partial \varphi_{ij}^n}{\partial w_n}"] & U_i \times \mathbb{C} \arrow[u, "\tilde{F}_i"'] \end{tikzcd}$$

conmuta. Así, si $F : L \to TM$ es la transformación definida por la familia $\{F_i\}_{i \in I}$, entonces F es un morfismo de fibrados vectoriales. Además, para todo $p \in M$, la transformación $F(p, -) : L_p \to T_pM$ es inyectiva y su imagen es el espacio tangente a la hoja $\mathcal{L}_p$ de la foliación $\mathcal{F}$ que contiene a p.

Teorema 1.8 *Sea $\mathcal{F}$ una foliación por curvas (con singularidades) en M, no singular en $M - V$, donde V es una subvariedad de codimensión mayor que uno. Sea L' el subfibrado lineal holomorfo en $M - V$ formado por vectores tangentes a la foliación. Entonces:*

1) *L' tiene una extensión canónica a un fibrado lineal holomorfo L en M y existe una aplicación de fibrados vectoriales $\alpha : L \to TM$ cuya imagen restringida a $M - V$ está formada por los vectores tangentes a las hojas de $\mathcal{F}$. Además, α es único módulo multiplicación por una función holomorfa nunca nula es M.*

2) *Un punto p de V es una singularidad removible de $\mathcal{F}$ si y sólo si la aplicación $\alpha(p) : L_p \to T_pM$ no es nula.*

3) *El conjunto singular de la foliación $\mathcal{F}$ es una subvariedad analítica de M.*

Definición 1.15 *Una foliación por curvas (M, α) en una variedad M, es un morfismo de fibrados vectoriales, $\alpha : L \to TM$, del fibrado lineal L en M al fibrado tangente de M, que no es idénticamente nulo en ninguna componente conexa de M. Las parejas (l, α) y $(\bar{L}, \bar{\alpha})$ determina la misma foliación si y sólo L y $\bar{L}$ son isomorfos como fibrados lineales y además, después de identificar a L con $\bar{L}$ se tiene que $\bar{\alpha} = f \cdot \alpha$, donde f es una función holomorfa nunca nula en M. El conjunto singular de la foliación $\mathcal{F}$ ee la subvariedad analítica definida por $\{p \in M | \alpha(p) = 0\}$ y las hojas d e la foliación $\mathcal{F}$ en M son las hojas de la foliación no singular inducida por $\mathcal{F}$ en $M - Sing\,\mathcal{F}$.*

Las prueba de las siguiente Proposición y Corolarios podemos encontrar en [11].

Proposición 1.5 *Sea $\pi : E \to B$ una fibración local trivial, $a : J \to B$ un camino, con $J = [s_0, s_1]$, y $z_0 \in E$ un punto tal que $\pi(z_0) = a(s_0)$. Entonces existe un camino $\widetilde{a} : J \to E$ tal que $\pi\widetilde{a} = a$ y $\widetilde{a}(s) = z_0$.*

Corolario 1.3 *Sea $\pi : E \to B$ una fibración localmente trivial . SI la base B y la fibra F son conexos por caminos, el espacio total E es tambien conexo por caminos*

Corolario 1.4 *Sea $\pi : E \to F$ una fibración localmente trivial. Si la fibra F es conexo por caminos, el homeomorfismo inducido $\pi : \pi_1(E, z_0) \to \pi_1(B, x_0)$ es sobreyectiva.*

1.5. Grado topólogico

Definición 1.16 *Sean M y N variedades orientadas de la misma dimensión, con M compacta y N conexa. Sea $f : M \to N$ una función holomorfa, $y \in N$ un valor regular de f. Definimos el grado topológico de f en y como*

$$deg(f, y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} signo(df_x)$$

Las prueba de las siguientes proposiciones podemos encontrar en [9].

Proposición 1.6 *Es invariante por homotopia: sean M y N variedades reales compactas, sin bordo y orientables de misma dimensión. Si $f, g : M \to N$ son aplicaciones continuas y homotópicas, entonces f y g tienen el mismo grado.*

Proposición 1.7 *Es invariante por cobordismo: sea V una variedad compacta, orientable, con bordo $\partial V = M_1 \cup M_2$ (donde M_1 y M_2 son compactos, orientables y sin bordo). Sea $f : V \to N$ una aplicación continua, donde N es una variedad compacta, compacta, conexa sin bordo y orientable tal que $dim(N) = dim(M_1) = dim(M_2) = dim(V) - 1$. Si M_1 y M_2 consideramos las orientaciones inducidas por l orientación de V, entonces los grados de $f_1 = f$ y $f_2 = f$ son iguales.*

Proposición 1.8 *Todo difeomorfismo de $\mathbb{C}^n$ que preserva orientación es isotópico a la $id|\mathbb{C}^n$.*

1.6. Foliaciones Holomorfas singulares de dimensión uno

En esta sección veremos la caracterizacion de las foliaciones singulares de dimensión uno. Las prueba de las siguientes proposiciones podemos encontrar en [2] y [6]. Antes caracterizar

Definición 1.17 *Sean M una variedad compleja de dimensión n y $\mathcal{F}$. Una foliación por curvas con singularidades de M es un objeto $\mathcal{F}$ dado por las colecciones $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ y $\{g_{\alpha\beta}\}_{U_\alpha \cap U_\beta \neq \phi}$ tales que:*

(i) $\{\mathcal{U}_\alpha\}_{\alpha \in A}$ *es un cubrimiento abierto de M.*

(ii) *Para todo* α*,* X_α *es un campo de vectores holomorfo no identicamente nulo sobre* U_α*.*

(iii) $g_{\alpha\beta} \in \mathcal{O}^*(U_\alpha \cap U_\beta)$ *es una función holomorfa en* $U_\alpha \cap U_\beta$ *que no se anula.*

(iv) *Si* $U_\alpha \cap U_\beta \neq \phi$ *entonces* $X_\alpha = g_{\alpha\beta} X_\beta$*.*

Para cada campo X_α consideramos su conjunto singular dado por :

$$sing(X_\alpha) = \{p \in U_\alpha \; X_\alpha(p) = 0\} =: S_\alpha$$

Donde S_α es un subconjunto analítico. Así la unión de estos S_α define un subconjunto analítico S de M. Este conjunto que denotaremos por por $sing(\mathcal{F})$, es llamado de conjunto singular de $\mathcal{F}$.
Se prueba que $\mathcal{F}$ define una foliación por curvas (no singular) en el abierto $U = M - sing(\mathcal{F})$. Decimos que $\mathcal{F}$ es regular en U. Las hojas de $\mathcal{F}$ son por definición, las hojas de la restricción de $\mathcal{F}$ a U, la qual será denotada por $\mathcal{F}|_U$.

Definición 1.18 *Decimos que dos foliaciones* $\mathcal{F}_1$ *y* $\mathcal{F}_2$ *coinciden si* $sing(\mathcal{F}_1) = sing(\mathcal{F}_2)$ *y las foliaciones que ellas inducen en el complemento de* $sing(\mathcal{F}_1)$ *y* $sing(\mathcal{F}_2)$ *tambien coinciden.*

En el caso en que $sing(\mathcal{F}) = \emptyset$, se puede probar que $\mathcal{F}$ es una foliación por curvas, conforme fue definido en 1.2 . Decimos entonces que $\mathcal{F}$ es una foliación regular.
Con la siguiente proposición podemos suponer que las componentes irreductibles de $sing(\mathcal{F})$ tiene codimensión ≥ 2.

Proposición 1.9 *Sea* $\mathcal{F}$ *foliación singular por curvas en* M*. Existe una foliación* $\mathcal{F}_1$ *en* M *con las siguientes propiedades:*

(a) *Las componentes irreductibles de* $Sing(\mathcal{F}_1)$ *tiene codimensión* ≥ 2*, siendo que* $Sing(\mathcal{F}_1) \subset Sing(\mathcal{F})$*.*

(b) $\mathcal{F}_1$ *coincide con* $\mathcal{F}$ *en* $M \setminus Sing(\mathcal{F})$.

(c) Si $\mathcal{F}_2$ *es una foliación en* M *satisfaciendo* (a) *y* (b), *entonces* $\mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_1$.

Proposición 1.10 ***(El Principio de Identidad para foliaciones holomorfas).*** *Sean* M *una variedad holomorfa conexa y* $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}_1$, *dos foliaciones por curvas en* M, *cuyos conjuntos singulares tiene codimensión* ≥ 2. *Suponga que* $\mathcal{F}$ *y* $\mathcal{F}_1$ *coincide sobre un abierto no vacío* $U \subset M$. *Entonces* $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1$ *en* M.

Proposición 1.11 *Sean* M *una variedad compleja de dimensión* ≥ 2, V *un subconjunto analítico de* M *de codimensión* ≥ 2 *y* $\mathcal{F}$ *una foliación por curvas en* $U = M \backslash V$. *Entonces existe una única foliación* $\mathcal{F}'$ *en* M, *cuya restricción a* U *coincide con* $\mathcal{F}$.

1.7. Foliaciones Holomorfas singulares de codimensión uno

En esta sección veremos la caracterización de las foliaciones singulares de codimensión uno.

Definición 1.19 *Sean* M *una variedad compleja de dimensión* n. *Una foliación holomorfa singular de codimensión uno en* M *es un objeto* $\mathcal{F}$ *dado por colecciones* $\{\omega_\alpha\}_{\alpha \in A}$ $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ *y* $\{g_{\alpha\beta}\}_{U_\alpha \cap U_\beta \neq \phi}$ *tales que:*

(i) $\{\mathcal{U}_\alpha\}_{\alpha \in A}$ *es un cubrimiento abierto de* M.

(ii) Para todo α, ω_α *es una 1-forma diferencial holomorfa integrable en* U_α *que no se anula en ningún punto.*

(iii) $g_{\alpha\beta} \in \mathcal{O}^* (U_\alpha \cap U_\beta)$ *es una función holomorfa en* $U_\alpha \cap U_\beta$ *que no se anula.*

(iv) Si $U_\alpha \cap U_\beta \neq \phi$ *entonces* $\omega_\alpha = g_{\alpha\beta}\omega_\beta$.

Para cada campo ω_α consideramos su conjunto singular dado por :

$$sing(\omega_\alpha) = \{p \in U_\alpha \ \omega_\alpha(p) = 0\} =: S_\alpha$$

Donde S_α es un subconjunto analítico. Así la unión de estos S_α define un subconjunto analítico S de M. Este conjunto que denotaremos por por $sing(\mathcal{F})$, es llamado de conjunto singular de $\mathcal{F}$.
Se prueba que $\mathcal{F}$ define una foliación por curvas (no singular) en el abierto $U = M - sing(\mathcal{F})$. Decimos que $\mathcal{F}$ es regular en U. Las hojas de $\mathcal{F}$ son por definición, las hojas de la restricción de $\mathcal{F}$ a U, la qual será denotada por $\mathcal{F}|_U$.

Definición 1.20 *Decimos que dos foliaciones* $\mathcal{F}_1$ *y* $\mathcal{F}_2$ *coinciden si* $sing(\mathcal{F}_1) = sing(\mathcal{F}_2)$ *y las foliaciones que ellas inducen en el complemento de* $sing(\mathcal{F}_1)$ *y* $sing(\mathcal{F}_2)$ *tambien coinciden.*

En el caso en que $sing(\mathcal{F}) = \emptyset$, se puede probar que $\mathcal{F}$ es una foliación de codimensión uno, conforme fue definido en 1.2. Decimos entonces que $\mathcal{F}$ es una foliación regular.
Con la siguiente proposición podemos suponer que las componentes irreductibles de $sing(\mathcal{F})$ tiene codimensión ≥ 2.

Ejemplo 1.11 *Las foliaciones* $\mathcal{F}_1$ *y* $\mathcal{F}_2$ *definidas por las* $1-$*formas* $w_1 := d(z_1^2) = 2z_1dz_1$ *e* $w_2 := d(z_1^3) = 3z_1^2dz_1$, *coinciden ya que* $sing(\mathcal{F}_1) = sing(\mathcal{F}_2) = (z_1 = 0)$ *y las hojas de ambas son las hipersuperficies* $(z_1 = c)$ *donde* $c \neq 0$.

Observación 1.2 *Podemos observar que si el conjunto singular de las foliaciones poseen componentes de codimensión uno no necesariamente sus formas definidas son multiplos uno del otro.*

Proposición 1.12 *Sea $\mathcal{F}$ foliación singular de codimensión uno en M. Existe una foliación $\mathcal{F}_1$ en M con las siguientes propriedades:*

(a) Las componentes irreductibles de $Sing(\mathcal{F}_1)$ tiene codimensión ≥ 2, siendo que $Sing(\mathcal{F}_1) \subset Sing(\mathcal{F})$.

(b) $\mathcal{F}_1$ coincide con $\mathcal{F}$ en $M \setminus Sing(\mathcal{F})$.

(c) $\mathcal{F}_1$ es maximal, o sea, si $\mathcal{F}_2$ es una foliación en M satisfaciendo (a) y (b), entonces $\mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_1$.

Proposición 1.13 ***(Principio de la Identidad para foliaciones holomorfas de codimensión uno)****. Sean M una variedad holomorfa conexa y $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}_1$, dos foliaciones de codimensión un en M, cuyos conjuntos singulares tienen codimensión ≥ 2. Supongamos que $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}_1$ coinciden sobre un abierto no vacío $U \subset M$. Entonces $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1$ en M.*

Proposición 1.14 *Sean M una variedad compleja de dimensión ≥ 2, V un subconjunto analítico de M de codimensión ≥ 2 y $\mathcal{F}$ una foliación de codimensión un en $U = M \setminus V$. Entonces existe una única foliación $\mathcal{F}'$ en M, cuya restricción a U coincide con $\mathcal{F}$.*

Corolario 1.5 *Sean M una variedad compleja, V un subconjunto analítico de codimensión ≥ 2 de M y $\mathcal{F}$ una foliación regular de codimensión un en $M \setminus V$. Entonces $\mathcal{F}$ se extiende a una foliación (posiblemente singular) en M.*

Teneniendo en cuenta las proposiciones anteriores, siempre que no es mencionado lo contrario, supondremos que todas las componentes irreductibles del conjunto singular de una foiliación tiene codimensión ≥ 2.

Capítulo 2

Geometría en $\mathbb{CP}^n$

En este capítulo vamos a contruir $\mathbb{CP}^n$ primera herramienta de trabajo de la tesis, definido $\mathbb{CP}^n$ se probará que es una variedad compleja, se va caracterizar los automorfismos en $\mathbb{CP}^n$ también veremos algunos ejemplos de aplicaciones entre espacios proyectivos, siendo uno de aquellos ejemplos el mergullo de Veronese.

El cociente de $\mathbb{C}^{n+1}\backslash\{(0,...,0)\}$ por la relación de equivalencia

$$(x_0,...,x_n) \sim (y_0,...,y_n) \Longleftrightarrow \exists\, \lambda \in \mathbb{C}^* \textit{ tal que } x_i = \lambda y_i \; \forall\, i = 0,1,...,n.$$

Denotemos por $\mathbb{CP}^n = \mathbb{C}^{n+1}\backslash\{(0,...,0)\}/\sim$ es decir

$$\mathbb{CP}^n = \left\{[z]\,, z \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{(0,...,0)\}\right\}$$

Geometricamente $[z]$ es una recta compleja en $\mathbb{C}^{n+1}\backslash\{(0,...,0)\}$ que pasa por el $\{(0,...,0)\}$ pero no lo contiene.

- Si $n = 1 \longrightarrow \mathbb{CP}^n$:Esfera de Riemann o linea proyectiva.
- Si $n = 2 \longrightarrow \mathbb{CP}^n$:Plano proyectivo complejo.

Denotemos a $\mathbb{CP}^n$ por la topologia cociente. Sea

$$\pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{(0, ..., 0)\} \longrightarrow \mathbb{CP}^n$$

la aplicación cociente definida por $\pi(z) = [z]$.

Ejemplo 2.1 *El conjunto* $A = \{[t:2] : t \in \mathbb{C}\} \subset \mathbb{CP}^1$*, es un abierto pues* $\pi^{-1}(A) = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2; y \neq 0\}$*el cual cubre todo menos el punto* $[1:0] = \infty$*.*

Ejemplo 2.2 *El conjunto* $A = \{[t:0] : t \in C^*\} \subset \mathbb{CP}^1$*, es un punto pues* $t \neq 0$ *se tiene* $[t:0] = [1:0]$.

Observación 2.1 *Se puede probar con la topologia cociente que* $\mathbb{CP}^n$ *es un espacio de Hausdorff con base numerable.*

$\mathbb{CP}^n$ se puede escribir de la siguiente forma:
Cubrimos $\mathbb{CP}^n$ mediante n abiertos, $\mathbb{CP}^n = \bigcup_{i=0}^{n} U_i$ definidos por:

$$U_i = \{[x_0 : ... : x_n] ;\ x_i \neq 0\},\ i = 0, \ldots, n$$

y donde las aplicaciones:

$$\begin{array}{rccc} \varphi_i : & U_i & \to & \mathbb{C}^n \\ & [z_0 : \ldots : z_n] & \mapsto & \left(\dfrac{z_0}{z_i}, \ldots, \dfrac{z_{i-1}}{z_i}, \dfrac{z_{i+1}}{z_i}, \ldots, \dfrac{z_n}{z_i}\right) \end{array}$$

es una biyección, donde si $i \neq j$ $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ es un biholomorfismo de $\varphi_i(U_i \cap U_j)$ sobre $\varphi_j(U_i \cap U_j)$. Por ejemplo:

$$\varphi_1 \circ \varphi_0^{-1}(z_1, \ldots, z_n) = \left(\frac{1}{z_1}, \frac{z_2}{z_1}, \ldots, \frac{z_n}{z_1}\right).$$

Esto muestra que $\{(\varphi_i, U_i); i = 0, \ldots, n\}$ es un atlas holomorfo de $\mathbb{CP}^n$ por lo tanto $\mathbb{CP}^n$ es una variedad compleja de dimensión n.

Proposición 2.1 $\mathbb{CP}^n$ *es una variedad compacta .*

Prueba:

En efecto basta considerar que es imagen de una aplicación continua de la esfera real S^{2n+1}.Tomemos la composición de aplicaciones πoi dada por:

$$S^{2n+1} \quad \longrightarrow \quad \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{(0, ..., 0)\} \quad \longrightarrow \quad \mathbb{CP}^n$$

Esta aplicación es sobreyectiva pues toda linea pasa por un punto de S^{2n+1}. Como πoi es continua se tiene que $\mathbb{CP}^n$ es compacto.

Proposición 2.2 *El cociente* $\pi : S^{2n+1} \to \mathbb{CP}^n$ *es una fibración localmente trivial, con fibra* S^1*.*

Prueba

Para $j = 1, 2, ..., n + 1$, los conjuntos $V_j = \{z \in S^{2n+1}, z_j \neq 0\}$ son abiertos en S^{2n+1} entonces los conjuntos $U_j = \pi(V_j)$ son abiertos en $\mathbb{CP}^n$. Los conjuntos U_j cubren el espacio proyectivo, $V_j = \pi^{-1}(U_j)$. Definimos las funciones $\psi_j : V_j \to U_j \times S^1$ por

$$\psi_j(z) = (\pi(z), \frac{z_j}{|z_j|}), j = 1, 2, ..., n + 1$$

Evidentemente, $\pi_{U_j}\psi_j = \pi$. Necesitamos probar que ψ_j es una trivialización, necesitamos sólo verificar que es un homeomorfismo. La continuidad de ψ_j es evidente. Definamos su inversa $\varphi_j : U_j \times S^1 \to V_j$ definiendo para cada $\pi(z) \in U_j$ y cada $u \in S^1$,

$$\varphi_j(\pi(z), u) = \frac{u\overline{z}_j}{|z_j|}.z$$

El lado derecho de la ecuación sigue siendo el mismo cuando cambiamos z por $v.z$, con $v \in S^1$, por lo tanto φ_j es bien definido. El hecho de que φ_j es la inversa de ψ_j puede ser visto como sigue:

$$\varphi_j\psi_j(z) = \varphi_j\left(\pi(z), \frac{z_j}{|z_j|}\right) = \frac{z_j}{|z_j|}.\frac{\overline{z}_j}{|z_j|}.z = z$$

. Por otra parte,

$$\psi_j\varphi_j(\pi(z), u) = \psi_j\left(\frac{u\overline{z}_j}{|z_j|}.z\right) = (\pi(z), u)$$

La ultima igualdad se debe a que $v = u\frac{\overline{z}_j}{|z_j|} \in S^1$, de aqui $\pi(v.z) = \pi(z)$ y por definición $w = v.z$ entonces $w_j = vz_j$, un facil calculo nos muestra que $\frac{w_j}{|w_j|} = u$ Resta mostrar que $\varphi_j : U_j \times S^1 \to V_j$ es continua, consideremso $\sigma_j : U_j \to V_j$, definido por $\sigma_j(\varpi(z)) = \left(\frac{\overline{z_j}}{|z_j|}\right).z$. El lado derecho no cambia si mudamos z por $u.z$, $u \in S^1$ así σ_j esta bien defininido. Además de eso, $\sigma_j\pi : V_j \to V_j$ lleva z a $\left(\frac{\overline{z}_j}{|z_j|}\right) z$ por lo tanto es continua. Por lo tanto $\sigma_j : U_j \to V_j$. Finalmente desde que $\varphi_j(w, u) = u\sigma_j(w)$, nosotros concluimos que φ_j es continua.

Corolario 2.1 *Para cada $n \geq 1$, el espacio proyectivo complejo $\mathbb{CP}^n$ es simplemente conexo.*

Prueba :

La fibración $\pi.S^{2n+1} \to \mathbb{CP}^n$, el espacio total S^{2n+1} es simplemente conexo y S^1 es conexo por camino. Por el Corolario 1,3 $\mathbb{CP}^n$ es simplemente conexo.

Afirmación 2.1 *U_i, son biholomorfos a $\mathbb{C}^n$ por la carta φ_i^{-1} entonces $\mathbb{CP}^n \backslash U_i$ es biholomorfo a $\mathbb{CP}^{n-1}$.*

En efecto:

Identificando el hiperplano $H_i = \{(z_0, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1};\ z_i = 0\}$ de manera natural con $\mathbb{C}^n$ y $\pi\left(H_i - \{0\}\right) \approx \pi\left(\mathbb{C}^n - \{0\}\right) \approx \mathbb{CP}^{n-1}$.

Por otro lado, tenemos $\pi\left(H_i - 0\right) = \mathbb{CP}^n \setminus U_i$, entonces $\mathbb{CP}^n \setminus U_i \approx \mathbb{CP}^{n-1}$

Afirmación 2.2 *Si $1 \leq k \leq n$, $\mathbb{CP}^k$ es un mergullo sobre $\mathbb{CP}^n$.*

En efecto:

Fijemos el conjunto $\{v_0, \ldots, v_k\}$ de $k+1$ vectores linealmente independientes en $\mathbb{C}^{n+1}$, el cual generara un subespacio $V = \langle v_0, \ldots, v_k \rangle$ de dimensión $k + 1$ $\big(V$ se identifica con $\mathbb{C}^{k+1}\big)$. Observemos entonces que la aplicación definida por:

$$\phi_V\left([z_0, \ldots, z_k]\right) = \pi\left(\sum_{i=0}^{k} z_i v_i\right).$$

Esta bien definida y es biyectiva sobre su imagen.

- ϕ_V es bien definida.

$$[x_0 : x_1 : \cdots : x_k] = [y_0 : y_1 : \cdots : y_k]$$

$$\Pi(\sum_{j=0}^{k} x_j v_j) = \Pi(\sum_{j=0}^{k} \lambda y_j v_j)$$

Como $\lambda(\sum_{j=0}^{k} y_j v_j) \approx \sum_{j=0}^{k} y_j v_j$ entonces

$$\Pi(\sum_{j=0}^{k} x_j v_j) = \Pi(\sum_{j=0}^{k} y_j v_j)$$

$$\phi_v([x_0 : x_1 : \cdots : x_k]) = \phi_v([y_0 : y_1 : \cdots : y_k]).$$

Así, la aplicación ϕ_v es bien definida.

- ϕ_V es inyectiva.

$$\phi_v([x_0 : x_1 : \cdots : x_k]) = \phi_v([y_0 : y_1 : \cdots : y_k])$$
$$\sum_{j=0}^{k} x_j v_j = \lambda(\sum_{j=0}^{k} y_j v_j) \text{ para algún } \lambda \in \mathbb{C}$$
$$\sum_{j=0}^{k}(x_j - \lambda y_j)v_j = 0$$
$$x_j = \lambda y_j$$
$$[x_0 : x_1 : \cdots : x_k] = [y_0 : y_1 : \cdots : y_k]$$

  Así, ϕ_V es inyectiva.

- ϕ_V es holomorfa eso se puede observar viendo en sus cartas locales. Así $\phi_{V_{-1}}(\phi_V)$ es holomorfa. Entonces ϕ_V es un homeomorfismo.

La imagen $\phi_V\left(\mathbb{CP}^k\right) = [V]$ es el cociente de $V \setminus \{(0, \ldots, 0)\}$ por $\sim$.
Las subvariedades $\phi_V\left(\mathbb{CP}^k\right) = [V]$, serán llamados **$k$-planos** de $\mathbb{CP}^n$.
En el caso que $dim\,(V) = n$, $[V]$ es un $(n-1)$ plano o hiperplano, incrustado y el abierto $U = \mathbb{CP}^n \setminus [V]$ es biholomorfo a $\mathbb{C}^n$.
Por otro lado si V tiene dimension dos, $[V]$ es una **recta proyectiva o simplemente una recta**.

2.1. Automorfismos en $\mathbb{CP}^n$

Recordamos que dada una variedad compleja M un automorfismo de M es un biholomorfismo $\phi : M \to M$, es decir, una biyección holomorfa $M \to M$ con inversa holomorfa. Los automorfismos forman un grupo con la operación composición, denotaremos este grupo por $Aut\,(M)$. Decimos que $Aut\,(M)$ es **transitivo**, es decir, si dados $p,\ q \in M$ existe $f \in Aut\,(M)$ tal que $f\,(p) = q$. Decimos que un subconjunto de $n+2$ puntos en $\mathbb{C}P\,(n)$, digamos $\{[p_1]\,,\ldots,[p_{n+2}]\}$ es **genérico** si $\{p_1,\ldots,p_{n+1}\}$ es una base de $\mathbb{C}^{n+1}$ y $p_{n+2} = \sum_{j=1}^{n+1} a_j p_j$ donde $a_1 \ldots a_{n+1} \neq 0$.

Proposición 2.3 *El grupo de Automorfismos $Aut\,(\mathbb{C}P\,(n))$ se identifica naturalmente con $GL\,(n+1,\mathbb{C})$ el proyectizado del grupo de las transformaciones lineales invertibles de $\mathbb{C}^{n+1}$.*

Prueba: Sea la relación de equivalencia $\sim$ en $GL(n+1,\mathbb{C})$; $T \sim T_1$ si y solo si $\exists \lambda \in \mathbb{C}^*$, $T = \lambda T_1$

$$PSL(n+1,\mathbb{C}) = \mathbb{C}^{n+1}/\ \ = \{[T]/T \in GL(n+1,\mathbb{C})\}$$

Debemos probar que

$$PSL(n+1,\mathbb{C}) \approx Aut\mathbb{C}\mathbb{P}^n$$

Sea $T \in GL(n+1,\mathbb{C})$, tal que el diagrama conmute

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}\mathbb{P}^{n+1} \arrow[r, "\overline{T}"] & \mathbb{C}\mathbb{P}^{n+1} \\ \mathbb{C}^{n+1} \arrow[u, "\pi"] \arrow[r, "T"] & \mathbb{C}^{n+1} \arrow[u, "\pi"'] \end{tikzcd}$$

se tiene que $\overline{T}o\pi = \pi oT$

$\overline{T}[x_1 : \ldots : x_{n+1}] = \overline{T}o\pi(x_1,\ldots,x_{n+1}) = [T_1(x_1,\ldots,x_{n+1}),\ldots,T_{n+1}(x_1,\ldots,x_{n+1})]$

$\forall [x_1 : \ldots : x_{n+1}] \in \mathbb{C}\mathbb{P}^{n+1}$

Para $\lambda \neq 0$ se tiene que $\overline{T}o\pi = \pi oT = \pi o\lambda T = \overline{\lambda T}oT$ entonces T y λT definen la misma transformación proyectiva.

Veamos que si T y $T^{'}$ definen la misma transformación proyectiva τ entonces $T = \mu T^{'}$, $\mu \neq 0$.

En efecto: Tomemos la base $\{v_0, .., v_{n+1}\}$ de $\mathbb{C}^{n+1}$, entonces

$\tau(v_i) = [T^{'}(v_i)] = [T(v_i)]$ y $\tau(\sum_{i=0}^{n}) = [T^{'}(\sum_{i=0}^{n})] = [T(\sum_{i=0}^{n})]$ así

$T^{'}(v_i) = \lambda_i T(v_i)$, $\lambda_i \neq 0$ y $T^{'}(\sum_{i=0}^{n} v_i) = \lambda T(\sum_{i=0}^{n} v_i)$, $\lambda \neq 0$

$\sum_{i=0}^{n} \lambda T(v_i) = \lambda T(\sum_{i=0}^{n} v_i) = T^{'}(\sum_{i=0}^{n} v_i) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i T(v_i)$

Desde que T es invertible, $T(v_i)$ son linealmente independientes, asi que esto implica que $\lambda_i = \lambda$. Entonces $T^{'}(v_i) = \lambda T(v_i)$ para todos los vectores base así

$$T^{'} = \lambda T$$

Veamos que $\overline{T}$ es holomorfa.

En efecto: Sea el punto $[z] \in \mathbb{CP}^n$ con coordenadas homogeneas $[z_0, ..., z_n]$ es transformada por la matriz $T = \{a_{jk} : 0 \leq j, k \leq n\}$ a el punto $\overline{T([z])} = [w]$ con coordenadas homogeneas $[w_0, ..., w_n]$.

Si $z_0 w_0 \neq 0$ la expresión en sus coordenadas no homogeneas $(z_1, ..., z_n)$ y $(w_1, ..., w_n)$ tendriamos el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{CP}^{n+1} & \xrightarrow{\overline{T}} & \mathbb{CP}^{n+1} \\ {\scriptstyle \varphi_0^{-1}} \uparrow & & \uparrow {\scriptstyle \varphi_0^{-1}} \\ \mathbb{C}^n & \xrightarrow{\varphi_0 o \overline{T} \varphi_0^{-1}} & \mathbb{C}^n \end{array}$$

$\varphi_0 o \overline{T} \varphi_0^{-1}(z_1, ..., z_n) = \left(\frac{a_{10} + \sum_{k=1}^{n} a_{1k} z_k}{a_{00} + \sum_{k=1}^{n} a_{0k} z_k}, ..., \frac{a_{n0} + \sum_{k=1}^{n} a_{nk} z_k}{a_{00} + \sum_{k=1}^{n} a_{0k} z_k} \right)$ es holomorfa.

Si $z_0 = 0$ o $w_0 = 0$ se prueba de igual manera en otras coordenadas que es holomorfa.

De manera anloga con la matriz T^{-1} se prueba que $\overline{T^{-1}}$ es holomorfa.

Hasta ahí quedaria probado que dado un $[T] \in PSL(n + 1, \mathbb{C})$ induce un automorfismo proyectivo $\overline{T}$.

El otro sentido que dado una $\tau \in Aut\mathbb{CP}^n$ es una transformación proyectiva se puede encontrar en pag 172 de [7].

Corolario 2.2 *En particular goza de la siguiente propiedad, dados dos conjuntos genéricos en* $\mathbb{C}P(n), \{[p_1], \ldots, [p_{n+2}]\}$ *y* $\{[q_1], \ldots, [q_{n+2}]\}$ *existe una única* $f \in Aut(\mathbb{C}P(n))$ *tal que* $f([p_j]) = [q_j]$ *para todo* $j = 1, \ldots, n+2$. *En particular, es transitivo.*

Prueba:Primero escojemos vectores respresentantes $p_1, p_2, ...p_{n+2}$ de $\mathbb{C}^{n+1}$ para los puntos de $[p_1], \ldots, [p_{n+2}]$ respectivamente. Entonces existen escalares $\lambda_i \neq 0$ tal que

$$p_{n+2} = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i p_i$$

$\lambda_i p_i$ son tambien vectores representantes de $[p_1], \ldots, [p_{n+2}]$ respectivamente. Así que podemos escojer representantes p_i tal que

$$p_{n+2} = \sum_{i=1}^{n+1} p_i$$

Por otra parte, dado p_{n+2} esos p_i son únicos tal que

$$\sum_{i=1}^{n+1} p_i = \sum_{i=1}^{n+1} \mu_i p_i$$

implica que $\mu_i = 1$ desde que $p_1, p_2, ...p_{n+1}$ son linealmente independientes. Ahora para los vectores $[q_1], \ldots, [q_{n+2}]$ en $\mathbb{CP}^n$ escojemos los vectores representativos tal que

$$q_{n+2} = \sum_{i=1}^{n+1} q_i$$

Desde que $p_1, p_2, ...p_{n+1}$ y $q_1, q_2, ...q_{n+1}$ son linealmente independientes, existe una transformación lineal $T : \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}^{n+1}$ tal que $Tp_i = q_i$ tal que es invertible. Por lo tanto

$$Tp_{n+2} = \sum_{i=1}^{n+1} Tp_i = \sum_{i=1}^{n+1} q_i = q_{n+2}$$

T define una transformación proyectiva $\overline{T}([p_i]) = ([q_i])$ $i = 1, 2, ..., n+2$. Ahora mostraremos la unicidadd, supongamos que existe $\overline{T'}$ define una transformación proyectiva $\overline{T'}$ con la misma propiedad. Entonces $T^{'}p_i = \mu_i q_i$ y

$$\mu_{n+2}q_{n+2} = T^{'}p_{n+2} = \sum_{i=1}^{n+1} T^{'}p_i = \sum_{i=1}^{n+1} \mu_i q_i$$

Por la unicidad de la representación de ... , nosotros tenemos $\mu_i/\mu_{n+2} = 1$, así que $T^{'}p_i = \mu_{n+2}Tv_i$ entonces $\overline{T'} = \overline{\mu_{n+2}T}$.

Definición 2.1 *Diremos que un subconjunto $A \subset \mathbb{CP}^n$ es **algebraico**, si existen polinomios homogéneos:*

$$P_1, \ldots, P_m : \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}$$

tales que:

$$A = \{[z] = [z_0, \ldots, z_n] \in \mathbb{CP}^n ;\ P_1(z) = \ldots = P_m(z) = 0\}.$$

Ejemplo 2.3 *Los k-planos definidos anteriormente son subconjuntos algebraicos.*

Un subconjunto algebraico de $\mathbb{CP}^n$ es analítico ,en este caso lo recíproco también es cierto gracias al siguiente teorema:

Teorema 2.1 ***(Teorema de Chow)*** *Todo subconjunto analítico de $\mathbb{CP}^n$ es algebraico.*

Prueba:
Ver [6].

Un caso particular del Teorema de Chow, es cuando el subconjunto analítico de $\mathbb{CP}^n$ tiene codimensión uno, en este caso se puede demostrar que el subconjunto puede ser definido por un solo polinomio no nulo se puede ver en [8].

Definición 2.2 *Sea Z un subconjunto algebraico de codimensión uno de $\mathbb{CP}^n$. El **grado** de Z es el entero*

$$d(Z) = min\{m > 0; Z = Z(f), \text{ donde } f \text{ es un polinomio homogéneo de grado } m\}.$$

El grado de un polinomio f sera será denotado por $d(f)$.

Observemos que todo polinomio homogéneo no nulo f puede ser descompuesto en un producto de polinomios homogéneos $f_1^{j_1} \cdots f_r^{j_r}$ (con $j_s \geq 1$ para todo s) donde los polinomios $f_1, \ldots, f_r$ son irreducibles y relativamente primos dos a dos, esto es, $Z(f_i) \neq Z(f_j)$ si $i \neq j$. Tal descomposición se llama **descomposición de f en factores primos**. Tenemos también que se cumple:

$$Z(f) = Z(f_1, \ldots, f_r) = \bigcup_{j=1}^{r} Z(f_j) \quad \text{y} \quad d(Z) = d(f_1, \ldots, f_r) = \sum_{j=1}^{r} d(f_j).$$

Decimos que el polinomio f es **reducido** si su descomposición en factores primos no contiene factores con potencias ≥ 2.

2.2. Curvas algebraicas en $\mathbb{CP}^n$

Si identificamos $\mathbb{C}^n$ con la carta afín (E_0, φ_0) de $\mathbb{CP}(n)$. Consideremos un polinomio de grado k en $\mathbb{C}^n$

$$P(u_1, ..., u_n) = \sum_{i_1+...+i_n=0}^{i_1+...+i_n=k} a_{i_1...i_n}(u_1)^{i_1}, ..., (u_n)^{i_n}$$

Escribamos P en otra carta. Para ello calculemos

$$Po(\varphi_0 o \varphi_i^{-1})(u_1^i, ..., u_n^i)$$

Por la definición de $(\varphi_0 o \varphi_i^{-1})$ se tiene que nos queda

$$(u_i^i)^{-k} \sum_{i_1+\ldots+i_n=0}^{i_1+\ldots+i_n=k} a_{i_1\ldots i_n}(u_1^i)^{i_1}\ldots(u_i^i)^{k-(i_1+..+i_n)}\ldots(u_n^i)^{i_n}$$

Definamos los polinomios

$$P^i(u_1^i,\ldots,u_n^i) = \sum_{i_1+\ldots+i_n=0}^{i_1+\ldots+i_n=k} a_{i_1\ldots i_n}(u_1^i)^{i_1}\ldots(u_i^i)^{k-(i_1+..+i_n)}\ldots(u_n^i)^{i_n}$$

Entonces la curva algebraica S_P en $\mathbb{CP}^n$ viene definida por

$$\cup_{i=0}^{n}\varphi_i\left\{(u_1^i,\ldots,u_n^i) : P^i(u_1^i,\ldots,u_n^i) = 0\right\}$$

Ejemplo 2.4 *Identificamos* $\mathbb{C}^2$ *con la carta afín* (E_0,φ_0) *de coordenadas* (x,y). *Sea la curva*

$$y = x^2$$

realizando el cambio de coordenadas $y = \frac{1}{r}, x = \frac{s}{r}$ *escribiendo en la otra carta* (r,s) *tenemos la curva*

$$r = s^2$$

Graficamente las dos curvas en el infinito se van a juntar.

Teorema 2.2 ***(Teorema de Bezout)***. *Sean* $f_1,\ldots,f_n$ *polinomios homogéneos de grados* $d_1,\ldots,d_n$ *respectivamente en* $\mathbb{C}^{n+1}$. *Suponga que* $Z(f_1,\ldots,f_n)$ *no posee componentes irreducibles de dimension* ≥ 1. *Entonces* $Z(f_1,\ldots,f_n)$ *contiene* $d_1,\ldots,d_n$ *puntos contados con su multiplicidad.*

Prueba Ver en [8].

Ejemplo 2.5 *Dos rectas en $\mathbb{C}$ siempre se interceptan, en particular las rectas :*

$$aX + bY + cZ = 0 \text{ y } aX + bY + dZ = 0,$$

se interceptan en el infinito; en el punto $[b : -a : 0]$.

Ejemplo 2.6 *La parabola $Y^2 = X$ intersecta en $Y = 0$ en dos puntos $[0 : 0 : 1]$ y $[1 : 0 : 0]$.*
Aqui la curva afin $Y^2 = X$ es vista como $F(X, Y, 1) = 0$ homogenizando tenemos la ecuación $Y^2 = XZ$ intersectando con $Y = 0$ tenemos $[0 : 0 : t] = [0 : 0 : 1]$ y $[t : 0 : 0] = [1 : 0 : 0]$.

Ejemplo 2.7 *Supongamos que $L = (X = 0)$ (recta proyectiva) y $C = Z(F)$ una curva de grado d. Tenemos entonces:*

$$P = [0 : y : z] \in L \cap C \Longleftrightarrow F(0, y, z) = 0$$

El polinomio $F(0, y, z)$ es idénticamente nulo (si $L \subset C$), por otro lado descomponiendo en la forma:

$$F(0, y, z) = \prod (z_i y - y_i z)^{m_i}$$

donde los puntos $P_i = [0 : y_i : z_i]$ son dos a dos distintos y constituyen $L \cap C$.

2.3. Aplicaciones entre espacios proyectivos

Comencemos con un ejemplo de aplicaciones entre espacios complejos y extendemos a una aplicación entre espacios proyectivos.

Ejemplo 2.8 *Sea* $f = (p_0, p_1, \ldots, p_n) : \mathbb{C}^{k+1} \to \mathbb{C}^{n+1}$ *donde* $p_0, p_1, \ldots, p_n$ *son polinomios homogéneos del mismo grado* $m \geq 1$ *en* $k+1$ *variables, no todos nulos. Sea* $Z = Z(p_0, p_1, \ldots, p_n) \subset \mathbb{CP}(k)$ *. Como* $f(z \cdot p) = z^m f(p)$ *la aplicación de* f *induce una función*

$$[f] : \mathbb{CP}^k \setminus Z(k) \to \mathbb{CP}^n$$

Sean $z = [z_0, ..., z_k] \in \mathbb{CP}^k$ *entonces existen vecindadades* $U \subset \mathbb{CP}^k$ *y* $V \subset \mathbb{CP}^n$ *tal que* $[f](U) \subset V$*, achicando las vecindades convenientemente supongamos que* $U \subset E_0 = [z_0, ..., z_k], z_0 = 1$ *y* $V \subset \widetilde{E_0} = [w_0, ..., w_n], w_0 = 1$.

$$\begin{tikzcd} U \subset E_0 \arrow[r, "a"] \arrow[d, "b"] & V \subset \widetilde{E}_0 \arrow[d, "c"] \\ \mathbb{C}^k \arrow[r, "d"] & \mathbb{C}^n \end{tikzcd}$$

donde $\widetilde{\varphi}_0[f]\varphi_0^{-1}(x_1, ..., x_k) = \left(\frac{f_1(1,x_1,...,x_k)}{f_0(1,x_1,...,x_k)}, ..., \frac{f_n(1,x_1,...,x_k)}{f_0(1,x_1,...,x_k)}\right)$

Así tenemos que al expresar $[f]$ *en cartas afines se expresa como una aplicación de la forma* $(g_1, ..., g_n)$ *donde los* g_j *son cocientes de polinomios en* k *variables.*

Teorema 2.3 *Si* $F : \mathbb{CP}(k) \to \mathbb{CP}(n)$ *es una función holomorfa no constante entonces* $k \leq n$ *y existen polinomios homogéneos de* $\mathbb{CP}(k+1)$*, de mismo grado* $p_0, p_1, \ldots, p_n$ *tales que* $F = [(p_0 : \ldots : p_n)]$.

Prueba:

Ver en [4]

Ejemplo 2.9 ***(Mergullo de Veronese)****. Las* $k+1$*-uplas* $(i_1, \ldots, i_{k+1})$ *de números naturales que cumplen* $i_1 + \ldots + i_{k+1} = d$ *es* $N(k, d) = \binom{k+d}{d}$.

Por ello podemos subindicar las coordenadas homogéneas en $\mathbb{CP}^n$ *donde* $n =$

$N(k,d)-1$ *en la forma* $[v_{i_1,\ldots,i_{k+1}}]$.

Si $[u_i]$ *son las coordenadas homogéneas en* $\mathbb{CP}^k$ *definimos la* ***inmersión de Veronese***.

$$\begin{array}{cccc} V_d : & \mathbb{CP}^k & \longrightarrow & \mathbb{CP}^n \\ & [u_1,...,u_{k+1}] & \longrightarrow & [v_{i_1,\ldots,i_{k+1}}] \end{array}$$

La aplicación que a cada $[u_1,\ldots,u_{k+1}] \in \mathbb{CP}^k$ *le asigna el punto cuya coordenada homogénea* $[v_{i_1,\ldots,i_{k+1}}]$ *es* $u_1^{i_1}\cdots u_{k+1}^{i_{k+1}}$.

Subejemplo 2.1 *Si* $n=1$ *y* $d=3$, *la aplicación de Veronesse de grado 3,*

$$V_3 : \mathbb{CP}^1 \to \mathbb{CP}^3 \text{ ya que } \binom{k+d}{d} - 1 = 3$$

está dada por $V_3 : [a_0,a_1] \to [a_0^3, a_0^2a_1, a_0a_1^2, a_1^3]$. *Notamos entonces que su imagen es la curva* $V_3(\mathbb{CP}^1) = V(xw-yz, y^2-xz, wy-z^2) \subseteq \mathbb{CP}^3$. *Así tenemos* $v_{30}=a_0^3, v_{21}=a_0^2a_1, v_{12}=a_0a_1^2, v_{03}=a_1^3$

Afirmación 2.3 *La aplicación de Veronese es un mergullo sobre su imagen.*
En efecto*:*

1. V_d *es bien definida y holomorfa*

   - *Como en cada coordenada de* $\mathbb{CP}^n$ *se tienen polinomios de grado d entonces dentro de las coordenadas tenemos los polinomios* a_i^d *así* $V_d \neq 0$
   -
   $$[u_0 : u_1 : \cdots : u_k] = [w_0 : w_1 : \cdots : w_k]$$
   $$(u_0 : u_1 : \cdots : u_k) = \lambda(w_0 : w_1 : \cdots : w_k), \lambda \neq 0$$

$$V_d[u_0 : u_1 : \cdots : u_k] = V_d[\lambda w_0 : \cdots : \lambda w_k]$$

$$= [\lambda^d w_{i_1,\ldots,i_{k+1}}] = [w_{i_1,\ldots,i_{k+1}}] = V_d([w_0 : \cdots : w_k])$$

- *V_d es holomorfa eso se puede observar viendo en sus cartas locales.*

2. *Sea $V = V_d(\mathbb{CP}^k)$, $V_d^{-1} : V \to \mathbb{CP}^k$ es holomorfa.*

   se define la función $u : V \subseteq \mathbb{CP}^n \to \mathbb{CP}^k$. Observe ahora que en cada punto de V al menos una de las coordenadas indexadas por los monomios $x_0^{i_0} \cdots x_k^{i_k}$ debe ser $\neq 0$. Sea $U_i \subseteq V$ el subconjunto de puntos con la x_i^d-coordenada no cero. Entonces, los subconjuntos $U_0, \ldots, U_n$ cubren V y se tienen las funciones

   $$u_i : U_i \to \mathbb{CP}^k$$

   dadas mediante $x \mapsto [z_{(1,0,\ldots,d-1,\ldots,0)}, z_{(0,1,\ldots,d-1,\ldots,0)}, \ldots, z_{(0,0,\ldots,d-1,0,\ldots,1)}]$ para $z \in U_i$. Dicho en otras palabras, esta función manda z a la $(k+1)$-ada cuyas coordenadas están indexadas por los monomios $x_0 x_i^{d-1}, \ldots, x_k x_i^{d-1}$. Note ahora que en las intersecciones $U_i \cap U_j$ las funciones (u_i) coinciden y se tiene así una función

   $$u : V \to \mathbb{CP}^k$$

   dada localmente por poli bnomios y así es regular. Finalmente, la composición $\mathbb{CP}^k \xrightarrow{v_d} V \xrightarrow{u} \mathbb{CP}^k$ es la identidad porque

   $$[x_0, \ldots, x_k] \mapsto v_d[x_0, \ldots, x_k] \mapsto [x_0 x_i^{d-1}, \ldots, x_k x_i^{d-1}] = [x_0, \ldots, x_k]$$

   ya que como $x_i \neq 0$ en U_i, entonces se puede cancelar al factor común x_i^{d-1}. Así se tiene que V es una variedad proyectiva y es un isomorfismo de $V \approx V_d\left(\mathbb{CP}^k\right)$

Consideremos ahora una aplicación holomorfa no constante $F : \mathbb{CP}(n) \longrightarrow \mathbb{CP}(n)$ por el teorema 2,3 sabemos que $F = [p_0, ..., p_n]$, donde $p_0, ..., p_n$ son polinomios homogéneos de mismo grado d y $Z(p_0, ..., p_n)$ es vacio. Sea Ω una (n+1) forma definida $\Omega = dp_0 \wedge .... \wedge dp_n = P dx_0 \wedge .... \wedge dx_n$. El conjunto $Z(P) \subset \mathbb{CP}(n)$ Es el conjunto de los *puntos singulares* de F esto es el conjunto de los puntos $[p] \in \mathbb{CP}(n)$ tales que $DF_{[p]} : T_{[p]}\mathbb{CP}(n) \longrightarrow T_{[p]}\mathbb{CP}(n)$ no es un isomorfismo .El conjunto $F(Z(P))$ es llamado el conjunto de *valores críticos* de F y los puntos de $\mathbb{CP}(n) \setminus F(Z(P))$ son llamados los *valores regulares* de F .

Teorema 2.4 *Teorema de Bezout.Sean $f_1, ..., f_n$ polinomios homogéneos de grados $d_1, ..., d_n$ respectivamente en C^{n+1}.Suponga que $Z(f_1, ..., f_n)$ no posee componentes irreducibles de dimension $\geq$ 1.Entonces $Z(f_1, ..., f_n)$ contiene $d_1, ..., d_n$ puntos contados con su multiplicidad.*

Proposición 2.4 *Si q es un valor regular de F, entonces F_q^{-1} contiene exactamente d^n puntos.*

Prueba:

Sea $G = F - q = [P_0 - q_0, ..., P_n - q_n]$ entonces $Z(G) = F^{-1}(q)$ donde $Z(G)$ es finito. Por el Teorema de Bezout $Z(G)$ tiene d^n puntos.

Capítulo 3

Foliaciones de dimensión uno en el espacio proyectivo

En el siguiente capítulo vamos a extender una foliación de dimensión uno en $\mathbb{C}^n$ a $\mathbb{CP}^n$ y viceversa que dado una foliación de dimensión uno en $\mathbb{CP}^n$, es el compactificado de una foliación definida por un campo polinomial en $\mathbb{C}^n$, basicamente este capítulo abre las cuentas de teoremas ya probados en [12].

3.1. Foliación inducida por campos vectoriales polinomial

Cualquier foliación definido por un campo $X = \sum_{j=1}^{n} X_j \frac{\partial}{\partial x_j}$, $cod(sing(X)) \geq 2$ polinomial en el plano complejo $\mathbb{C}^n$. Supongamos que $\mathbb{C}^n = E_0 \subset \mathbb{CP}^n$. Vamos a probar que existe una foliación $\overline{\mathcal{F}}$ en $\mathbb{CP}^n$ tal que $\overline{\mathcal{F}}|_{E_0} = \mathcal{F}$.

Proposición 3.1 *Existe una foliación por curvas, con singularidades en* $\mathbb{CP}^n$

que coincide con una foliación inducida por X en el espacio afín $\mathbb{C}^n$.

Prueba:

Si identificamos $\mathbb{C}^n$ con la carta afín (E_0, φ_0) de $\mathbb{CP}(n)$, el campo X se expresa en esta carta como:

$$X = \sum_{j=1}^{n} X_j \frac{\partial}{\partial x_j}$$

donde:

$$X_j(x_1, \ldots, x_n) = X_j^0(x_1, \ldots, x_n) + \ldots + X_j^i(x_1, \ldots, x_n) + \ldots + X_j^{m_j}(x_1, \ldots, x_n)$$

Tal que X_j^i $(0 \leq i \leq m_j \wedge 1 \leq j \leq n)$ son componentes homogéneas de grado i de los X_j respectivamente. Sea $m = max\{m_1, \ldots, m_n\}$ el grado de X.

Utilizando los cambios de coordenadas entre E_0 y E_1.

$$\begin{aligned} \phi^1(x) &= \varphi_1 \circ \varphi_0^{-1}(x_1, \ldots, x_n) = \varphi_1(1, x_1, \ldots, x_n) \\ &= \left(\tfrac{1}{x_1}, \tfrac{x_2}{x_1}, \ldots, \tfrac{x_n}{x_1}\right) \\ &= (y_1, \ldots, y_n). \end{aligned}$$

Efectuando el cambio de variables en el campo X, que identificaremos con X^0 obtenemos

$$\phi_*^1\left(X^0\right) = X^1 = \sum_{j=1}^{n} X_j^1 \frac{\partial}{\partial y_j}.$$

Como $y_1 = \dfrac{1}{x_1}$ y $y_j = \dfrac{x_j}{x_1}$ para todo $j = 2, \ldots, n$; tenemos

$$\begin{aligned}
y_1^{'} &= -\frac{1}{x_1^2}x_1^{'} = -\frac{1}{x_1^2}X_1\left(x_1,\ldots,x_n\right) = -y_1^2 X_1\left(\frac{1}{y_1},\frac{y_2}{y_1},\ldots,\frac{y_n}{y_1}\right) \\
&= -y_1^2\left[X_1^0\left(\frac{1}{y_1},\frac{y_2}{y_1},\ldots,\frac{y_n}{y_1}\right)+\ldots+X_1^m\left(\frac{1}{y_1},\frac{y_2}{y_1},\ldots,\frac{y_n}{y_1}\right)\right] \\
&= -\frac{1}{y_1^{m-2}}\left[y_1^m X_1^0\left(1,y_2,\ldots,y_n\right)+y_1^{m-1}X_1^1\left(1,y_2,\ldots,y_n\right)+\ldots+X_1^m\left(1,y_2,\ldots,y_n\right)\right]
\end{aligned}.$$

Por lo tanto:

$$X_1^1\left(y_1,\ldots,y_n\right) = -\frac{1}{y_1^{m-1}}\sum_{i=0}^{m} y_1^{m-i+1}X_1^i\left(1,y_2,\ldots,y_n\right)$$

Por otro lado tenemos:

$$\begin{aligned}
y_j^{'} &= \frac{x_1x_j^{'}-x_jx_1^{'}}{x_1^2} = y_1X_j\left(x_1,\ldots,x_n\right)-y_1y_jX_1\left(x_1,\ldots,x_n\right) \\
&= y_1\left[X_j\left(\frac{1}{y_1},\frac{y_2}{y_1},\ldots,\frac{y_n}{y_1}\right)-y_jX_1\left(\frac{1}{y_1},\frac{y_2}{y_1},\ldots,\frac{y_n}{y_1}\right)\right] \\
&= \frac{1}{y_1^{m-1}}\left(\sum_{i=0}^{m} y_1^{m-i}X_j^i\left(1,y_2,\ldots,y_n\right)\right)-\frac{y_j}{y_1^{m-1}}\left(\sum_{i=0}^{m} y_1^{m-i}X_1^i\left(1,y_2,\ldots,y_n\right)\right)
\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$X_j^1 = \frac{1}{y_1^{m-1}}\left(\sum_{i=0}^{m} y_1^{m-i}X_j^i\left(1,y_2,\ldots,y_n\right)-y_j\sum_{i=0}^{m} y_1^{m-i}X_1^i\left(1,y_2,\ldots,y_n\right)\right)$$

Luego el campo de coordenadas $(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ de la carta afín (E_1,φ_1) esta dado por:

$$X_1^1, X_2^1, \ldots, X_n^1$$

Como X_0 es polinomial las expresiones X_i^1 implican que X^1 es un campo meromorfo con polos en el hiperplano $(y_1=0)$. Podemos entonces escribir

$$X^1\left(y\right) = y_1^{-k}Z^1\left(y\right)$$

Donde Z^1 es un campo polinomial y k es el orden del polo. Observemos que $(y_1 = 0)$ es la ecuación del hiperplano del infinito, digamos H de E_0 en la carta E_1.

De forma análoga al efectuar el cambio de variables entre E_0 y E_j

$$\begin{aligned}\phi^j(x) &= \varphi_j \circ \varphi_0^{-1}(x_1, \ldots, x_n) = \varphi_j(1, x_1, \ldots, x_n) \\ &= \left(\tfrac{1}{x_j}, \tfrac{x_1}{x_j}, \ldots, \tfrac{x_{j-1}}{x_j}, \tfrac{x_{j+1}}{x_j}, \ldots, \tfrac{x_n}{x_1}\right) \\ &= (w_1, \ldots, w_n).\end{aligned}$$

Efectuando el cambio de variables en el campo X obtenemos

$$\phi_*^j\left(X^0\right) = X^j = \sum_{j=1}^{n} X_j \frac{\partial}{\partial y_j}.$$

Teniendo en cuenta que $x_r = \dfrac{w_{r+1}}{w_1}$, $\forall 1 \leq r \leq j-1$, $x_j = \frac{1}{w_1}$ y $x_s = \dfrac{x_s}{x_1}$, $\forall j+1 \leq s \leq n$ tenemos

$$\begin{aligned}w_1^{'} &= -w_1^2 X_j\left(\tfrac{w_2}{w_1}, \ldots, \tfrac{w_j}{w_1}, \tfrac{1}{w_1}, \tfrac{w_{j+1}}{w_1}, \ldots, \tfrac{w_n}{w_1}\right) \\ &= -\frac{1}{w_1^{m-2}}\left[w_1^m X_j^0(w_2, \ldots, w_j, 1, w_{j+1}, \ldots, w_n) + \ldots + X_j^m(w_2, \ldots, w_j, 1, w_{j+1}, \ldots, w_n)\right]\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$X_1^j(w_1, \ldots, w_n) = -\frac{1}{w_1^{m-1}} \sum_{i=0}^{m} w_1^{m-i+1} X_j^i(w_2, \ldots, w_j, 1, w_{j+1}, \ldots, w_n).$$

$w_r = \frac{x_{r-1}}{x_j}$, $\forall\ 2 \leq r \leq j$ entonces

$$\begin{aligned}y_j^{'} &= \frac{x_j x_{r-1}^{'} - x_{r-1} x_j^{'}}{x_j^2} \\ &= w_1\left[X_{r-1}\left(\tfrac{w_2}{w_1}, \ldots, \tfrac{w_j}{w_1}, \tfrac{1}{w_1}, \tfrac{w_{j+1}}{w_1}, \ldots, \tfrac{w_n}{w_1}\right) - w_r X_j\left(\tfrac{w_2}{w_1}, \ldots, \tfrac{w_j}{w_1}, \tfrac{1}{w_1}, \tfrac{w_{j+1}}{w_1}, \ldots, \tfrac{w_n}{w_1}\right)\right]\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} X_r^j &= \frac{1}{w_1^{m-1}}[\sum_{i=0}^{m} w_1^{m-i} X_{r-1}^i \left(w_2, \ldots, w_j, 1, w_{j+1}, \ldots, w_n\right) \\ &\quad - w_r \sum_{i=0}^{m} w_1^{m-i} X_j^i \left(w_2, \ldots, w_j, 1, w_{j+1}, \ldots, w_n\right)] \end{aligned}$$

$w_s = \frac{x_s}{x_j}$, $\forall\ j \leq s \leq n$ entonces

$$\begin{aligned} w_s^{'} &= \frac{x_j x_s^{'} - x_s x_j^{'}}{x_j^2} \\ &= w_1 \left[X_s \left(\tfrac{w_2}{w_1}, \ldots, \tfrac{w_j}{w_1}, \tfrac{1}{w_1}, \tfrac{w_{j+1}}{w_1}, \ldots, \tfrac{w_n}{w_1} \right) - w_j X_j \left(\tfrac{w_2}{w_1}, \ldots, \tfrac{w_j}{w_1}, \tfrac{1}{w_1}, \tfrac{w_{j+1}}{w_1}, \ldots, \tfrac{w_n}{w_1} \right) \right] \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} X_s^j &= \frac{1}{w_1^{m-1}}[\sum_{i=0}^{m} w_1^{m-i} X_s^i \left(w_2, \ldots, w_j, 1, w_{j+1}, \ldots, w_n\right) \\ &\quad - w_j \sum_{i=0}^{m} w_1^{m-i} X_j^i \left(w_2, \ldots, w_j, 1, w_{j+1}, \ldots, w_n\right)] \end{aligned}$$

Luego el campo de coordenadas $(w_1, w_2, \ldots, w_n)$ de la carta afín (E_j, φ_j) esta dado por:

$$X_1^j, X_2^j, \ldots, X_n^j$$

Como X es polinomial las expresiones $X_1^j, X_2^j, \ldots, X_n^j$ implican que X^j es un campo meromorfo con polos en el hiperplano $(w_1 = 0)$ (es la ecuación del hiperplano del infinito, digamos H_j de E_0 en la carta E_j). Podemos entonces escribir

$$X^j\left(y\right) = w_1^{-k} Z^j\left(y\right)$$

Donde Z^j es un campo polinomial y k es el orden del polo.

Observación 3.1 *Por los cálculos hechos se puede observar que el orden del polo k, es la misma en todas las cartas E_j.*

Podemos entonces definir una foliación $\overline{\mathcal{F}}$ en $\mathbb{CP}(n)$ tal que $\overline{\mathcal{F}}$ restringido a E^j es definida por Z^j, es decir:

1. $Z^0 = X^0 = X$ en E_0
2. $Z^j = w_1^k(\varphi_j \circ \varphi_0^{-1})_* X$ en E_j

La foliación $\overline{\mathcal{F}}$ obtenida es llamada de compactificación de $\mathcal{F}$. Ella será denotada por $\mathcal{F}(X)$.

Ejemplo 3.1 *Sea*

$$A(z) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j z_j \frac{\partial}{\partial z_j}$$

un campo vectorial lineal diagonal en $\mathbb{C}^n \approx E_0$.

Veamos A en otras cartas canónicas, el cambio de coordenadas entre E_0 y E_1 es

$$\varphi(z_1, ..., z_n) = \left(\frac{1}{z_1}, \frac{z_2}{z_1}, ..., \frac{z_n}{z_1}\right) = (w_1, w_2, ..., w_n)$$

Efectuando el cambio de variables en el campo X obtenemos

$$\varphi_* (A)(w) = -\lambda_1 w_1 \frac{\partial}{\partial w_1} + ... + \sum_{j=2}^{n} (\lambda_j - \lambda_1) w_j \frac{\partial}{\partial w_j}$$

Así es un campo vectorial lineal en $\mathbb{C}^n$ con valores propios $-\lambda_1, (\lambda_2 - \lambda_1), ..., (\lambda_n - \lambda_1)$ Si hacemos ahora un cambio de coordenadas para el abierto E_j los valores propios serán $-\lambda_j, \lambda_1 - \lambda_j, ..., (\widehat{\lambda_j - \lambda_j}), ..., \lambda_n - \lambda_j$.

3.2. Compactificado de una foliación por curvas

Teorema 3.1 *Toda foliación holomorfa por curvas en $\mathbb{CP}^n$ es el compactificado de una foliación definida por un campo polinomial en $E_0 \simeq \mathbb{C}^n$.*

Prueba:

Supongamos que $S = sing(\mathcal{F})$ tiene codimensión ≥ 2. Sea $\pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{CP}^n$ la proyección de la relación de equivalencia que define $\mathbb{CP}^n$. Note π es una submersión, pues en coordenadas locales, usando el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \arrow[r, "\Pi"] \arrow[dr, "\varphi\circ\Pi"'] & \mathbb{CP}^n \arrow[d, "\varphi"] \\ & \mathbb{C}^n \end{tikzcd}$$

y tomando $x = (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$, podemos suponer sin perdida de generalidad que $x_1 \neq 0$ luego $\varphi \circ \pi(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \varphi([x_1 : \ldots : x_{n+1}]) = \left(\dfrac{x_2}{x_1}, \ldots, \dfrac{x_{n+1}}{x_1}\right)$ así

$$(\varphi \circ \pi)'(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \begin{pmatrix} -\dfrac{x_2}{x_1^2} & \dfrac{1}{x_1} & 0 & \ldots & 0 \\ -\dfrac{x_3}{x_1^2} & 0 & \dfrac{1}{x_1} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\dfrac{x_{n+1}}{x_1^2} & 0 & 0 & \ldots & \dfrac{1}{x_1} \end{pmatrix}_{n\times(n+1)}$$

tiene rango n, por tanto π es una submersión. Podemos definir una foliación no singular de dimensión dos, $\mathcal{F}^* = \pi^*(\mathcal{F}|_{\mathbb{CP}^n \setminus S})$ en $\mathbb{C}^{n+1} \setminus S^*$, donde $S^* =$

$\{0\} \cup \pi^{-1}(S)$ es un subconjunto algebraico de codimensión ≥ 2 de $\mathbb{C}^{n+1}$ (por la definición de dimensión del cono afin para mas detalles ver [17]). Note que $\mathcal{F}^*$ tiene dimensión dos porque su codimensión en $\mathbb{C}^{n+1}$ es la misma que la de $\mathcal{F}$ en $\mathbb{CP}^n$. De hecho, como π es una submersión entonces π es transversal $\mathcal{F}$ (por el atlas que se consigue en $\mathbb{C}^{n+1}$) luego

$$\begin{aligned} cod(\mathcal{F}^*) &= cod\mathcal{F} \\ (n+1) - dim\ \mathcal{F}^* &= n-1 \\ dim\ \mathcal{F}^* &= 2. \end{aligned}$$

Además de esto, si L es una hoja de $\mathcal{F}^*$ y $p \in L$, entonces la recta $[0,p]$, que pasa por p y 0, esta contenida en L, pues si $q \in [0,p]$ tenemos que $q = tp$ donde $t \neq 0$ luego

$$\pi(q) = \pi(tp) = \pi(tp_1, \ldots, tp_{n+1}) = [tp_1 : \ldots : tp_{n+1}] = [p]$$

En particular, las hojas de $\mathcal{F}^*$ son conos con vértice en el origen $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$. Denotando por R el campo radial, $R(x) = x$, vemos que las trayectorias de R están contenidas en las hojas de $\mathcal{F}^*$, pues el flujo R_t de R es dado por $R_t(x) = e^t x$.

Dado $p \in V = \mathbb{C}^{n+1} \setminus S^*$ abierto entonces existe una vecindad $V^p \subset V$, teniendo en cuenta que $R(p) \in T_p\mathcal{F}^*$ existe un campo continuo X^p tal que $T\mathcal{F}^*$ es generado por $X(p)$ y $R(p)$ donde $X(p) \neq 0$ entonces existe una vecindad $W_p \neq 0$. Por otro lado para $X^p_p, R(p)$ completamos con $f_1(p), ..., f_{n-2}(p)$ tal que

$$det(X^p_p, R(p), f_1(p), ..., f_{n-2}(p)) \neq 0$$

entonces existe una vecindad $\widetilde{W_p}$ tal que

$$det(X^p, R, f_1, ..., f_{n-})|_{\widetilde{W_p}} \neq 0$$

Tomando $U_p = V_p \cap W_p \cap \cap \widetilde{W_p}$ para todo $q \in U^p$ el subespacio $T_q(\mathcal{F}^*)$ es generado por los vectores $X^p(q)$ y $R(q)$, donde X^p y R son linealmente independientes en todos los puntos de U^p.

Veremos en seguida, como podemos extender $\mathcal{F}^*$ a una foliación singular en $\mathbb{C}^{n+1}$. Para esto, probaremos primeramente que $\mathcal{F}^*$ puede ser definida localmente por una $(n-1)$-forma holomorfa.

Defina una $(n-1)$- forma ω^p en U^p por

$$\omega^p = i_{X^p}\left(i_R\left(dx_0 \wedge \ldots \wedge dx_n\right)\right),$$

donde i denota el producto interior, así tenemos:
$\omega^p(q)(v_1, ..., v_{n-1}) = dx_0 \wedge \ldots \wedge dx_n(X^p_q, R_{(q)}, v_1, ..., v_{n-1})$, $v_1, ..., v_{n-1} \in T_qU^p$.

Afirmación 3.1 *Valen las siguientes propriedades:*

(i) Dados $q \in U^p$ y $v \in \mathbb{C}^{n+1}$, entonces $v \in T_q(\mathcal{F}^*)$ si, y solamente si, $i_v(\omega^p(q)) = 0$. Usaremos la notación $\{v;\ i_v(\omega^p(q)) = 0\} = ker(\omega^p(q))$.

(ii) Dados p y q tales que $U^p \cap U^q \neq \emptyset$, entonces existe una función $g_{pq} \in \mathcal{O}^*(U^p \cap U^q)$ tal que $\omega^p = g_{pq}\omega^q$ en $U^p \cap U^q$.

En efecto:

(i) Si $v \in T_q(\mathcal{F}^*)$ entonces $v = aX^p(q) + bR(q)$ luego

$$i_v(\omega^p(q))(v_1, ..., v_{n-2}) = \omega^p(q)(v, v_1, ..., v_{n-2}) = \omega^p(q)(aX^p(q) + bR(q), v_1, ..., v_{n-1})$$

$$= a\omega^p(q)(X^p(q), v_1, ..., v_{n-1}) + b\omega^p(q)(R(q), v_1, ..., v_{n-1})$$

entonces

$$i_v(\omega^p(q)) = ai_{X^p(q)}(\omega^p(q)) + bi_{R(q)}(\omega^p(q))$$

ahora como $i_{X^p(q)}(\omega^p(q)) = i_{R(q)}(\omega^p(q)) = 0$ *pues es una forma alternada tenemos que* $i_v(\omega^p(q)) = 0$.

Recíprocamente, tenemos que $i_v(\omega^p(q)) = 0$, *ahora como* $v \in \mathbb{C}^{n+1}$, *podemos escribirlo como* $v = v_1 + v_2$ *donde* $v_1 \in T_q(\mathcal{F}^*)$ *y* $v_2 \in T_q(\mathcal{F}^*)^{\perp}$. *Luego* $i_{v_1}(\omega^p(q)) = 0$ *y como* $i_v(\omega^p(q)) = 0$ *tenemos que* $i_{v_2}(\omega^p(q)) = 0$. *Así* $i_{v_2}(\omega^p(q))(a_1, \ldots, a_{n-2}) = 0$ *para cualesquier vectores* $a_1, \ldots, a_{n-2} \in \mathbb{C}^{n+1}$. *Ahora como*

$$i_{v_2}(\omega^p(q))(a_1, \ldots, a_{n-2}) = i_{v_2}(i_{X^p(q)}(i_{R(q)}(dx_0 \wedge \ldots \wedge dx_n)))(a_1, \ldots, a_{n-2})$$

así tenemos

$$i_{v_2}(\omega^p(q))(a_1, \ldots, a_{n-2}) = \begin{vmatrix} v_2^1 & \ldots & v_2^{n+1} \\ (X^p)^1 & \ldots & (X^p)^{n+1} \\ (R(q))^1 & \ldots & (R(q))^{n+1} \\ a_1^1 & \ldots & a_1^{n+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-2}^1 & \ldots & a_{n-2}^{n+1} \end{vmatrix} \qquad (*)$$

si $v_2 \neq 0$ *y* $v_2,\ X^p,\ R$ *son linealmente independientes tomemos* $a_1, \ldots, a_{n-2}$ *tal que* $v_2,\ X^p,\ R,\ a_1, \ldots,\ a_{n-2}$ *sean linealmente independientes entonces por* $(*)$ *tenemos* $i_{v_2}(\omega^p(q))(a_1, \ldots, a_{n-2}) \neq 0$ *absurdo. Por lo tanto* $v_2 = 0$.

(ii) *Sea* $t \in U^p \cap U^q$, $T_t\mathcal{F}^* = \langle X_t^p, R(t)\rangle = \langle X_t^q, R(t)\rangle$

Como $\{X_t^q, X_t^p, R(t)\} \subset T_t\mathcal{F}^*$ *se tiene que* $X^p = g_{pq}X^q$ *en* $U^p \cap U^q$ *tal* *que* $X^p(t)$ *y* $R(t)$ *son linealmente independientes*

$$g_{pq} \in \mathcal{O}^*(U^p \cap U^q)$$

$$\begin{aligned}\omega^p &= i_{X^p}(i_R(dx_0 \wedge \ldots \wedge dx_n)) \\ \\ &= g_{pq} i_{X^q}(i_R(dx_0 \wedge \ldots \wedge dx_n)) \\ \\ &= g_{pq}\omega^q.\end{aligned}$$

La idea ahora es obtener una $(n-1)$-forma holomorfa Ω en $\mathbb{C}^{n+1}$ tal que para todo $p \in V$ tengamos

$$ker(\Omega(p)) = ker(\omega^p(p)) = T_p(\mathcal{F}^*).$$

Podemos escribir

$$\omega^p = \sum_I a_I^p dx_I$$

donde la suma arriba recorre todos los multi-índices $I = (i_1 < \ldots < i_{n-1})$, siendo $dx_I = dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_{n-1}}$. Como S^* tiene codimensión ≥ 2, su complementar V es conexo. Esto implica que existe un multi-índice I_o tal que $a_{I_o}^p \neq 0$ para todo $p \in V$, pues si para todo I multi-índice $a_I^p = 0$ tenemos que $\omega^p = 0$ y como $\omega^p = g_{pq}\omega^q$ se tiene $\omega = \omega^q = 0$ para todo $q \in V$ y como V es conexo tenemos que $\omega = 0$ en U. Luego *cod* $S^* = 0$ lo que es absurdo. Por (ii), tenemos que si $U^p \cap U^q \neq \emptyset$ y I es un multi-índice, entonces $a_I^p = g_{pg} a_I^q$ se sigue que

$$\frac{a_I^p}{a_{I_o}^p} = \frac{a_I^q}{a_{I_o}^q} \text{ en } U^p \cap U^q.$$

Observemos que *cod* $\{x/a_I^p = 0\} \geq 2$.

Podemos entonces, para cada multi-índice I, definir una función meromorfa f_I en V por

$$f_I|_{U^p} = \frac{a_I^p}{a_{I_o}^p}.$$

Por Teorema de Levi la función f_I se extiende a una función meromorfa en $\mathbb{C}^{n+1}$, que denotaremos también por f_I. Considere una $(n-1)$-forma meromorfa en $\mathbb{C}^{n+1}$,

$$\omega = \sum_I f_I dx_I.$$

Note que, si $p \in V$ no es polo de ω, entonces $ker(\omega(p)) = ker(\omega^p(p)) = T_p(\mathcal{F}^*)$. ω se puede expresar

$$\omega = dx_{I_0} + \sum_{I \neq I_0} f_I dx_I$$

donde f_I es meromorfo en $\mathbb{C}^{n+1}$, así $f_I = \frac{g_I}{h_I}$ donde g_I y h_I son holomorfas en $\mathbb{C}^{n+1}$ y $cod\,\{x/h_I(x) = g_I(x) = 0\} \geq 2$ (donde f_I es la extensión y es meromorfa), entonces existe una $(n-1)$-forma holomorfa en $\mathbb{C}^{n+1}$, $\Omega = g\omega$, donde $g = mcm\,\{h_I\}$, el conjunto singular Ω es $\{x/f_I(x) = g_I(x) = 0\} \geq 2$, siendo g una función holomorfa que se anula apenas en el conjunto de los polos de ω. Observe que si $p \in V$, entonces $ker(\Omega(p)) = T_p(\mathcal{F}^*)$. Además de esto, $i_R(\Omega) = 0$. Consideremos ahora el desenvolvimiento de Taylor de Ω en 0:

$$\Omega = \sum_{j=k}^{\infty} \Omega_j,$$

donde Ω_j es una $(n-1)$-forma cuyos coeficientes son polinomios homogéneos de grado j y $\Omega_k \not\equiv 0$.

Afirmación 3.2 *Para todo $p \in V$ tenemos $ker(\Omega_k(p)) = T_p(\mathcal{F}^*)$.*

En efecto: sean $p \in V$ e $v \in \mathbb{C}^{n+1}$ tales que $v \in T_p(\mathcal{F}^*)$, o sea, $i_v(\Omega(p)) = 0$.

Como las hojas de $\mathcal{F}^*$ *son conos con vértice en* 0*, vemos que para todo* $t \neq 0$*,* $v \in T_{tp}(\mathcal{F}^*)$*, o sea* $ker(\Omega(p)) = ker(\Omega(tp))$*. Luego:*

$$0 = i_v(\Omega(tp)) = \sum_{j=k}^{\infty} i_v(\Omega_j(tp)) = t^k \left(\sum_{j=k}^{\infty} t^{j-k} i_v(\Omega_j(p)) \right)$$

entonces $i_v(\Omega_k(p)) = 0$*. Se sigue de ahí que* $ker(\Omega(p)) \subset ker(\Omega_k(p))$*. Sea* $\{v_1, \ldots, v_{n+1}\}$ *una base de* $\mathbb{C}^{n+1}$ *tal que* $v_n,\ v_{n+1} \in T_p(\mathcal{F}^*)$*. Como* $\{v_1, \ldots, v_{n-1}\} \notin T_p(\mathcal{F}^* = ker(\Omega(p))$ *entonces* $\Omega(p)(v_1, \ldots, v_{n-1}) \neq 0$*. Sea*

$$g(p) = \frac{\Omega_k(p)(v_1, \ldots, v_{n-1})}{\Omega(p)(v_1, \ldots, v_{n-1})}.$$

Donde g *es holomorfa. Como el complementar de* V *tiene codimensión* ≥ 2*, el Teorema de Hartogs implica que* g *se extiende a una función holomorfa en* $\mathbb{C}^{n+1}$*, la cual designamos también* g*. Sea* $g = \sum_{j=0}^{\infty} g_j$ *el desenvolvimiento de Taylor de* g *en* 0*, donde* g_j *es homogénea de grado* j*. Vemos entonces que:*

$$\Omega_k = g \cdot \Omega = \left(\sum_{j=0}^{\infty} g_j \right) \left(\sum_{j=k}^{\infty} \Omega_j \right) \qquad (**)$$

$$\Omega_k = g(0)\Omega_k$$

entonces $g_0 = g(0) = 1.$*. Sea* $v \in ker(\Omega_k(p))$ *entonces* $0 = \Omega_k(p) = g(p)\Omega_(p)v$ *y como* $g(0) \neq 0$ *se tiene* $v \in ker(\Omega_(p))$*.*

Fijemos ahora un plano $\tilde{E}_0 = \{(x_0, \ldots, x_n);\ x_0 = 1\}$, el cual identificamos con el sistema de coordenadas afín $E_0 \subset \mathbb{CP}^n$. Con esta identificación, la restricción $\alpha_0 = \Omega_k|_{\tilde{E}_0}$ define $\mathcal{F}|_{E_0}$, esto es, $\mathcal{F}|_{E_0} \simeq \mathcal{F}^*|_{\tilde{E}_0}$ y si $p \in V \cap \tilde{E}_0$, entonces

Observación 3.2

$$\begin{aligned} v \in T_p(\tilde{E}_0) \cap T_p(\mathcal{F}^*) \quad &\Leftrightarrow \quad v \in T_p(\tilde{E}_0) \ y\ v \in ker(\Omega_k|_{\tilde{E}_0}(p)) \\ &\Leftrightarrow \quad v \in T_p(\tilde{E}_0) \ y\ i_v(\alpha_0(p)) = 0 \end{aligned}$$

Por otro lado, podemos escribir

$$\alpha_0 = \sum_{j=1}^{n} (-1)^j X_j(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{j-1} \wedge dx_{j+1} \wedge \ldots \wedge dx_n$$

donde X_j es un polinomio de grado $\leq k$ para todo $j = 1, \ldots, n$. Ahora, si $X = \sum_{j=1}^{n} X_j \dfrac{\partial}{\partial x_j}$, se tiene que

$$i_X(\alpha_0)(v_1, ..., v_{n-2}) = \alpha_0(X, v_1, ..., v_{n-2})$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^j X_j(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{j-1} \wedge dx_{j+1} \wedge \ldots \wedge dx_n (\sum_{l=1}^{n} X_l \frac{\partial}{\partial x_l}, v_1, ..., v_{n-2})$$

$$= \sum_{l=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (-1)^j X_j(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{j-1} \wedge dx_{j+1} \wedge \ldots \wedge dx_n (X_l \frac{\partial}{\partial x_l}, v_1, ..., v_{n-2}) = 0$$

Como $X \in T_p(\tilde{E}_0)$ y $i_X(\alpha_0) = 0$ entonces por la observación 3.2, $X \in T\mathcal{F}|_{V \cap E_0}$ y también se tiene que $sing(X)$ tiene codimensión ≥ 2. Luego por el Principio de la Identidad de funciones Holomorfas X genera $\mathcal{F}|_{E_0}$.

Capítulo 4

Grado de una Foliación

Consideremos $\mathcal{F}$ una foliación por curvas en $\mathbb{CP}^n$ y $H \cong \mathbb{CP}^{n-1}$ mergullado. Estudiaremos las tangencias de $\mathcal{F}$ con H. El conjunto de tangencias será un subconjunto algebraico de H, el número de elementos de este conjunto será llamado el **grado de la foliación**.

Definición 4.1 *Un* ***hiperplano proyectivo*** H *en el espacio proyectivo* $\mathbb{CP}^n$, *es un subconjunto de* $\mathbb{CP}^n$ *definido por aquellos puntos que satisfacen la ecuación lineal homogénea*

$$a_0 z_0 + a_1 z_1 + \ldots + a_n z_n = 0.$$

Es decir:

$$H := \{[z_0 : z_1 : \ldots : z_n] \in \mathbb{CP}^n;\ a_0 z_0 + a_1 z_1 + \ldots + a_n z_n = 0\}.$$

Considerando el sistema de coordenadas afines $\varphi_j : E_j \to \mathbb{C}^n$

$$\varphi_j(H) := \left\{ \frac{a_0 z_0}{z_j} + \frac{a_1 z_1}{z_j} + \ldots + \frac{a_n z_n}{z_j} = 0 \right\} \ j = 0, 1, \ldots, n$$

Así, si $j = 0$, $\varphi_0(H) := \left\{a_0 + \frac{a_1 z_1}{z_0} + \ldots + \frac{a_n z_n}{z_0} = 0\right\}$, que se denota por:

$$\varphi_0(H) = H = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n;\ a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = 0\}.$$

4.1. Grado de una Foliación por curvas

Definición 4.2 *Sea $\mathcal{F}$ una foliación en $\mathbb{CP}^n$ y $H \subset \mathbb{CP}^n$ una subvariedad algebraica. Dado $p \in H$, decimos que $\mathcal{F}$ es tangente a H en p si $p \in Sing(\mathcal{F})$ o si $p \notin Sing(\mathcal{F})$ y $T_p\mathcal{F} \subset T_pH$. Decimos que H es invariante por $\mathcal{F}$ si todo punto $p \in H \setminus Sing(\mathcal{F})$ es un punto de tangencia de $\mathcal{F}$ con H. El conjunto de tangencias será denotado por $T(\mathcal{F}, H)$.*

Ejemplo 4.1 *Sea la foliación en $\mathbb{CP}^2$ de grado cero, dado por*

$$X = \lambda_0 \frac{\partial}{\partial z_0} + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial z_2}$$

es tal que toda recta de $\mathbb{CP}^2$ pasando por $(\lambda_0 : \lambda_1 : \lambda_2)$ es invariante.
En efecto, si l es una recta que pasa por $(\lambda_0 : \lambda_1 : \lambda_2)$, entonces l es dada por $F(z_0, z_1, z_2) = a_0z_0 + a_1z_1 + a_2z_2$ donde $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) \in V(F)$.
$X(p) = \lambda_0 \frac{\partial}{\partial z_0} + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial z_2} \in T_pV(F) = \{(x_0, x_1, x_2)/a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_{2=0}\}$ pues $a_0\lambda_0 + a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2 = 0$, sigue la afirmación. Mas todavia, si un recta de $\mathbb{CP}^2$ que no pasa por $(\lambda_0 : \lambda_1 : \lambda_2)$ ella no puede ser inavriante por la foliación.

Observación 4.1 *Si C es invariante por X, entonces $X(p) \in T_pC$ para $p \in C\ Sing(X)$ esto es $X(F)(p) = 0$.*

Ejemplo 4.2 *La curva definida por $z_0z_2^2 = z_1^3$ se invariante por la foliación definida por el campo vectorial de vectores*

$$X = -2z_0z_2 \frac{\partial}{\partial z_1} - 3z_1^2 \frac{\partial}{\partial z_2}$$

En efecto, $X(F) = -2z_0z_2(3z_1^2) - 3z_1^2(2z_0z_2)$.

Observemos que el campo vectorial es dado localmente en U_0 *por*

$$X_{U_0} = -2y\frac{\partial}{\partial x} - 3x^2\frac{\partial}{\partial y}$$

El sistema de ecuaciones diferenciales asociado a X_{U_0} *es* $\begin{cases} x'(t) &= -2y(t) \\ y'(t) &= -3x^2(t) \end{cases}$
que posee como una solución la trayectoria $(x, y) = (t^{-2}, t^{-3})$. *Así,* X_{U_0} *es un campo de vectores tangentes a la cura* $C_0 = C|_{U_0} : y^2 = x^3$

Proposición 4.1 *Dada una foliación por curvas* $\mathcal{F}$ *sobre* $\mathbb{CP}^n$, *cuyo conjunto singular tiene codimensión* ≥ 2, *existe un subconjunto abierto, denso y conexo* $NI(\mathcal{F})$ *del conjunto de hiperplanos* $H \subset \mathbb{CP}^n$ *se tiene que* H *no es invariante por* $\mathcal{F}$.

Prueba:
Fijemos una carta afín $E_0 \simeq \mathbb{C}^n$ de $\mathbb{CP}^n$ y un campo de vectores polinomiales

$$X = \sum_{j=1}^{n} X_j \frac{\partial}{\partial x_j}$$

con conjunto singular de codimensión ≥ 2, que represente $\mathcal{F}$ en E_0. Como existen hiperplanos no invariantes por $\mathcal{F}$, podemos suponer que el hiperplano en el infinito $(x_0 = 0)$ de E_0 no es invariante por $\mathcal{F}$.

Consideremos un hiperplano $H \subset \mathbb{CP}^n$, que no sea el hiperplano al infinito de E_0. En el sistema afín E_0 podemos representarlo por la ecuación lineal $L(x) = 0$ donde $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E_0$ y $L(x) = \sum_{j=1}^{n} a_jx_j + b$; con $a_j, b \in \mathbb{C}$. Por simplicidad suponemos que $a_n \neq 0$. En este caso, la ecuación de H puede ser reescrita como

$$x_n = c + \sum_{j=1}^{n-1} b_jx_j = B(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}), \quad \text{donde } b_j = -\frac{a_j}{a_n}, c = -\frac{b}{a_n}.$$

De la definición, obtenemos que $\mathcal{F}$ es tangente a H en $p \in H$ si, y sólo sí $T_p\mathcal{F} \subset T_pH$ si y sólo sí $X \in x_n = \sum_{j=1}^{n-1} b_j x_j$ si y sólo si $X_n(p) = \sum_{j=1}^{n-1} b_j X_j(p)$. Un punto $p \in H$ puede ser escrito como $p = (y, B(y))$, donde $y = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$. Luego el conjunto de tangencias de $\mathcal{F}$ con $H \cap E_0$ es $T = \{(y, x_n); x_n = B(y) \text{ y } F(y, B) = 0\}$, donde:

$$F(y, B) = X_n(y, B(y)) - \sum_{j=1}^{n-1} b_j X_j(y, B(y))$$

donde arriba se esta considerando B definida por los parámetros $(b_1, \ldots, b_{n-1}, c) \in \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C}^n$, entonces F puede ser escrito como:

$$F(y, B) = \sum_{|\sigma| \le k} F_\sigma(B)\, y^\sigma$$

Siendo σ el multi-índice $(\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1})$, $|\sigma| = \displaystyle\sum_{j=1}^{n-1} \sigma_j$ e $y^\sigma = x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \ldots x_{n-1}^{\sigma_{n-1}}$.
Note que para todo σ, $F_\sigma(B)$ es un polinomio en $B = (b_1, \ldots, b_{n-1}, c)$.
Por otro lado, H es invariante por $\mathcal{F}$ si y sólo si $F(y, B) = 0$ para todo $y \in \mathbb{C}^{n-1}$, o sea, si y sólo si $F_\sigma(B) = 0$ para todo σ.
Esto muestra que el conjunto de hiperplanos invariantes por $\mathcal{F}$, digamos $I(\mathcal{F})$, es un subconjunto algebraico propio del conjunto de todos los hiperplanos (pues E_0 no es invariante).
Sea ahora $k = max\{|\sigma|; F_\sigma \neq 0\}$ y $A = \{\sigma; |\sigma| = k\} = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_s\}$.
Si H es un hiperplano tal que el correspondiente B satisface $F_{\sigma_j}(B) \neq 0$ para algún $\sigma_j \in A$, entonces H no es invariante por $\mathcal{F}$ y el conjunto de tangencias de $\mathcal{F}$ con H es dado por

$$\mathrm{T}(\mathcal{F}, H) = \{(y, B(y));\ F(y, B) = 0\}$$

Observe que en este caso, $F(y,B)$ es un polinomio de grado k en y. Basta con definir $NI(\mathcal{F})$ como el complemento del conjunto algebraico .

$$\{B;\ F_{\sigma_1}(B) = \ldots = F_{\sigma_s}(B) = 0\}.$$

Por la Proposición 1.3, $NI(\mathcal{F})$ es un conjunto abierto, denso y conexo.

Proposición 4.2 *Sea $\mathcal{F}$ una foliación de grado k en $\mathbb{CP}^n$. Dado un sistema coordenada afín $\mathbb{C}^n \simeq E_0 \subset \mathbb{CP}^n$, entonces $\mathcal{F}|_{E_0}$ es representada en E_0 por un campo polinomial X de la forma:*

$$X(x) = P(x) + g(x)R(x)$$

donde:

1. *R es el campo radial $R(x) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_j \frac{\partial}{\partial x_j}$.*
2. *g es un polinomio homogéneo de grado k o un polinomio idénticamente nulo.*
3. *P es un campo polinomial cuyas coordenadas tienen grado a lo más igual a k. En el caso en que $g \equiv 0$, algunas de las componentes de P tienen grado exactamente k.*
4. *El hiperplano en el infinito $E_\infty := \mathbb{CP}^n \setminus E_0$ relativo a E_0, es invariante si, y sólo si, $g \equiv 0$.*
5. *Si $g \neq 0$, el conjunto de puntos de tangencias donde g se anula describe el conjunto de puntos de tangencias de $\mathcal{F}$ con $\mathbb{CP}^{n-1}$.*

Prueba:

Fijemos la carta afín E_0 es un campo polinomial $X = \sum_{j=1}^{n} X_j \dfrac{\partial}{\partial x_j}$ en E_0, que representa $\mathcal{F}$ en E_0 y cuyo conjunto singular tiene codimensión ≥ 2. Por la proposición anterior, y si fuera necesario, por un cambio de coordenadas lineales, podemos suponer que los planos coordenados $H_j = (x_j = 0)$ están en $NI\,(\mathcal{F})$.

$\mathrm{T}(\mathcal{F}, H)$ no dependia de H esto significa que el polinomio

$$X_j\,(x_1, \ldots, x_{j-1}, 0, x_{j+1}, \ldots, x_n) = 0$$

pues los demas coeficientes que de $x_i; i \neq 2$ son cero entonces

$$X_j\,(x_1, \ldots, x_{j-1}, 0, x_{j+1}, \ldots, x_n) = f_j\,(x)$$

tiene grado k. Podemos entonces escribir

$$X_j\,(x) = f_j\,(x) + g_j\,(x)\,x_j, \qquad (*)$$

donde g_j es un polinomio.

Por las notaciones de la proposición anterior, tomemos ahora $H \in NI\,(\mathcal{F})$ es un hiperplano con la ecuación:

$$x_n = B\,(y) = c + \sum_{j=1}^{n-1} b_j x_j := c + B_0\,(y)\,,$$

$\mathrm{T}(\mathcal{F}, H)$ será definido por:

$$\begin{aligned} F\,(y, B) &= X_n\,(y, B\,(y)) - \sum_{j=1}^{n-1} b_j X_j\,(y, B\,(y)) \\ &= f_n\,(y, B\,(y)) + g_n\,(y, B\,(y))\,B\,(y) - \sum_{j=1}^{n-1} b_j\,[f_j\,(y, B\,(y)) + g_j\,(y, B\,(y))\,x_j] = 0 \end{aligned}$$

Sea $m = max\,\{d\,(g_j)\,; j = 1, \ldots, n\}$ y denotaremos por g_{jm} la parte homogénea de grado m de g_j.

- Si $m \leq (k-1)$, por $(*)$ tenemos

$$X_j(x) = (f_{j0}(x) + g_{j0}(x)\,x_j) + \ldots + (f_{j(n-1)}(x) + g_{j(n-1)}(x)\,x_j) + f_{jn}(x) = a(x)$$

entonces la proposición se cumple haciendo $g = 0$.

- Si $m \geq k$

$$\begin{aligned} F(y, B) &= 0 \\ f_n(y, B(y)) + g_n(y, B(y))\,B(y) - \sum_{j=1}^{n-1} b_j\left[f_j(y, B(y)) + g_j(y, B(y))\,x_j\right] &= 0 \end{aligned}$$

reemplazando $B(y) = c + B_0(y)$ y teniendo en cuenta que $g_{im}(y, B(y)) = g_{im}(y, B_0(y)) - \widetilde{g_{im}}(y)$ donde $d(\widetilde{g_{im}}) \leq m-1$. obtenemos que $F(y, B)$ tiene un termino homogéneo de grado $m+1$.

$$g_{nm}(y, B_0(y))\,B_0(y) - \sum_{j=1}^{n-1} b_j g_{jm}(y, B_0(y))\,x_j := F_{m+1}(y, B_0)$$

lo cual, por la definición de grado de $\mathcal{F}$ es idénticamente nulo. Ahora, se tiene que

$$\begin{aligned} F_{m+1}(y, B_0(y)) &= 0 \\ g_{nm}b_1x_1 + ... + g_{nm}b_{n-1}x_{n-1} - b_1g_{1m}x_1 - ... - b_{n-1}g_{(n-1)m}x_{n-1} &= 0 \\ (g_{nm} - g_{1m})b_1x_1 + ... + (g_{nm} - g_{(n-1)m})b_{n-1}x_{n-1} &= 0 \end{aligned}$$

si, y sólo si, $g_{1m}(y, B_0(y)) = \ldots = g_{nm}(y, B_0(y)) = g$. En este caso, tenemos de $(*)$

$$X_j(x) = f_j(x) + g_j(x)\,x_j$$

$$\begin{aligned} X_j(x) &= (f_{j0}(x) + g_{j0}(x)x_j) + \ldots + (f_{jk}(x) + g_{jk}(x)x_j) + \\ &\quad \left(g_{j(k+1)}(x)x_j + \ldots + g_{j(m-1)}(x)x_j\right) + g_{j(m)}(x)x_j \\ &= (f_{j0}(x) + g_{j0}(x)x_j) + \ldots + (f_{jk}(x) + g_{jk}(x)x_j) + \\ &\quad \left(g_{j(k+1)}(x)x_j + \ldots + g_{j(m-1)}(x)x_j - \widetilde{g_{im}}(x)x_j\right) + g(x)x_j \end{aligned}$$

Y se tendrá:

$$X_j(x) = P_j(x) + g(x)x_j,$$

donde P_j es un polinomio de grado $\leq m$. Por tanto podemos escribir $X(x) = P(x) + g(x)R(x)$, donde P y g es como lo deseado en la proposición y g es un polinomio homogéneo de grado m.

Afirmación 4.1 *g es un polinomio homogeneo de grado k*

En efecto:

Por lo anterior tenemos que g es un polinomio de grado m. Basta entonces probar que $m = k$.

Sea T un cambio de coordenadas lineal en $E_0 \cong \mathbb{C}^n$

$$\begin{array}{rccl} T: & \mathbb{C}^n & \to & \mathbb{C}^n \\ & (y_1, ..., y_n) & \to & \left(\sum_{i=1}^n a_{1i}y_i, ..., \sum_{i=1}^n a_{ni}y_i\right) \end{array}$$

La transformación T es representada por la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ . & . & . \\ . & . & . \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

donde $DT^{-1}(T(q)) = A^{-1}$*, recordando que* $T(Y)(q) = DT^{-1}(T(q))Y(T(q))$
Para X *veamos* $T^*(X)$

$$\begin{aligned} T^*(X) &= T^*(P+gR) \\ &= T^*(P)+T^*(gR) \end{aligned}$$

donde $T^*P(q) = DT^{-1}(T(q))P(T(q)) = A^{-1}(P(T(q)))$ *como* P *es un polinomio de grado* $\leq m$ *entonces* $T^*(P)$ *es un polinomio de grado* $\leq m$.

$$\begin{aligned} T^*(gR)(q) &= DT^{-1}(T(q))(gR)(T(q)) \\ &= A^{-1}(g(T(q))R(T(q))) \\ &= g(T(q))A^{-1}(R(T(q))) \\ &= g(T(q))A^{-1}(T(q)) \\ &= g(T(q))(q) \end{aligned}$$

así $T^*(gR) = (goT)R$.
Entonces $T^*(X) = T^*(P) + (goT)R$ *escogemos un* T *de forma que* $g \circ T\,(1, x_2, \ldots, x_n)$ *tenga grado* m.
Consideremos un cambio de coordenadas entre E_0 *y* E_1

$$(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \phi_1(x) = \left(\frac{1}{x_1}, \frac{x_2}{x_1}, \ldots, \frac{x_n}{x_1}\right).$$

La ecuación de E_∞ *en la nueva carta es* $(y_1 = 0)$ *y* $(\phi_1)_*(X) = Y = \sum_{j=1}^{n} Y_j \dfrac{\partial}{\partial y_j}$*, donde:*

$$Y_1(y_1, y_2, \ldots, y_n) = -y_1^2\left[P_1\left(\frac{1}{y_1}, \frac{y_2}{y_1}, \ldots, \frac{y_n}{y_1}\right) + g(1, y_2, \ldots, y_n)\frac{1}{y_1^{m+1}}\right] \tag{4.1}$$

$$Y_j(y_1, y_2, \ldots, y_n) = y_1\left[X_j\left(\frac{1}{y_1}, \frac{y_2}{y_1}, \ldots, \frac{y_n}{y_1}\right) - y_jX_1\left(\frac{1}{y_1}, \frac{y_2}{y_1}, \ldots, \frac{y_n}{y_1}\right)\right] \tag{4.2}$$

$$= y_1\left[P_j\left(\frac{1}{y_1}, \frac{y_2}{y_1}, ..., \frac{y_n}{y_1}\right) - y_jP_1\left(\frac{1}{y_1}, \frac{y_2}{y_1}, ..., \frac{y_n}{y_1}\right)\right]$$

Como los $P_{j's}$ tienen grado $\leq m$, se sigue de 4.2 y 4.1 que el campo Y tiene polo de orden $(m-1)$ a lo largo de $(y_1 = 0)$. Multiplicando Y por y_1^{m-1}, obtenemos un campo polinomial $\widetilde{Y}$ que representa $\mathcal{F}$ en la nueva carta. La primera componente de $\widetilde{Y}$ será:

$$\widetilde{Y_1}\,(y) = -y_1\widetilde{P_1}\,(y) - g\,(1, y_2, ..., y_n)\,, \tag{$**$}$$

donde $\widetilde{P_1} = y_1^m P_1\left(\frac{1}{y_1}, \frac{y_2}{y_1}, ..., \frac{y_n}{y_1}\right)$.

De ahí resulta que $T\,(\mathcal{F}, E_\infty(y_1 = 0))$ es definido por

$$\begin{array}{rcl} -0\widetilde{P_1}\,(0, y_2, ..., y_n) - g\,(1, y_2, ..., y_n) & = & 0 \\ g\,(1, y_2, ..., y_n) & = & 0 \end{array}$$

Como $g\,(1, y_2, ..., y_n)$ tiene grado m, se obtiene finalmente que $m = k$ pues $\mathcal{F}$ tiene grado k.

Así tenemos probado la $(1), (2)$ y (3)

4. Si $E_\infty = (y_1 = 0)$ es invariante si y sólo si $Z_1(0, y_2, ..., y_n) = 0$ si y sólo si $g(1, y_2, ..., y_n) \equiv 0$.

   Sea $g(x_1, ..., x_n) = \sum_{i_1+...+i_n=m} a_{i_1...i_n} x_1^{i_1}...x_n^{i_n}$ entonces

$$g(1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i_2+...+i_n \leq m} a_{i_1...i_n} x_2^{i_2}...x_n^{i_n}$$

   haciendo el cambio de variable $x_j = \frac{y_j}{y_1}$, $\forall j \geq 2$ tenemos

$$\begin{array}{rcl} g(1, \frac{y_2}{y_1}, ..., \frac{y_n}{y_1}) & = & \sum_{i_2+...+i_n \leq m} a_{i_1 i_2...i_n} \left(\frac{y_2}{y_1}\right)^{i_2} ... \left(\frac{y_n}{y_1}\right)^{i_n} \\ & = & \sum_{i_2+...+i_n \leq m} a_{i_1 i_2...i_n} \frac{y_2^{i_2} y_2^{i_2}...y_n^{i_n}}{y_1^{m-i_1}} \\ & = & \frac{1}{y_1^m} g(y_1, ..., y_n) \equiv 0 \end{array}$$

Sea $y_1 \neq 0$ se tiene $g(y_1, ..., y_n) \equiv 0$ en $\mathbb{C}^n - \{y_1 = 0\}$ así $g \equiv 0$ en $\mathbb{C}^n$

5. Consideremos un cambio de coordenadas entre E_0 y E_2

$$(z_1, z_2, \ldots, z_n) = \phi_2(x) = \left(\frac{1}{x_2}, \frac{x_1}{x_2}, \frac{x_3}{x_2}, \ldots, \frac{x_n}{x_2}\right).$$

La ecuación de E_∞ en la nueva carta es $(z_1 = 0)$ y $(\phi_2)_*(X) = Z = \sum_{j=1}^n Z_j \dfrac{\partial}{\partial z_j}$, donde:

$$Z_1(z_1, z_2, \ldots, z_n) = -z_1^2 \left[P_2\left(\frac{z_2}{z_1}, \frac{1}{z_1}, \frac{z_3}{z_1}, \ldots, \frac{z_n}{z_1}\right) + g(z_2, 1, z_3, \ldots, z_n)\frac{1}{z_1^{m+1}}\right] \tag{4.3}$$

$$Z_2(z_1, z_2, \ldots, z_n) = z_1 \left[P_1\left(\frac{z_2}{z_1}, \frac{1}{z_1}, \frac{z_3}{z_1}, \ldots, \frac{z_n}{z_1}\right) - z_2 P_2\left(\frac{z_2}{z_1}, \frac{1}{z_1}, \frac{z_3}{z_1}, \ldots, \frac{z_n}{z_1}\right)\right] \tag{4.4}$$

$$Z_j(z_1, z_2, \ldots, z_n) = z_1 \left[P_3\left(\frac{z_2}{z_1}, \frac{1}{z_1}, \frac{z_3}{z_1}, \ldots, \frac{z_n}{z_1}\right) - z_3 P_2\left(\frac{z_2}{z_1}, \frac{1}{z_1}, \frac{z_3}{z_1}, \ldots, \frac{z_n}{z_1}\right)\right] \tag{4.5}$$

Como los $P_{j's}$ tienen grado $\leq m$, se sigue de 4.3, 4.4, 4.5 que el campo Z tiene polo de orden $(m-1)$ a lo largo de $(z_1 = 0)$. Multiplicando Z por z_1^{m-1}, obtenemos un campo polinomial $\widetilde{Z}$ que representa $\mathcal{F}$ en la nueva carta. La primera componente de $\widetilde{Z}$ será:

$$\widetilde{Z_1}(z) = -z_1 \widetilde{P_2}(y) - g(z_2, 1, z_3, ..., z_n), \tag{**}$$

donde $\widetilde{P_2} = z_1^m P_2\left(\frac{z_2}{z_1}, \frac{1}{z_1}, \frac{z_3}{z_1}, \ldots, \frac{z_n}{z_1}\right)$.

De ahí resulta que $T(\mathcal{F}, E_\infty(z_1 = 0))$ es definido por $g(z_2, 1, z_3, ..., z_n) = 0$. De manera análoga considerando los demás cambios de coordenadas entre E_0 y E_j tenemos $T(\mathcal{F}, E_\infty(w_1 = 0))$ es definido por $g(w_2, , w_3, ., 1, .., w_n) = 0$.

Denotaremos por $\mathcal{F}(n,k)$ el espacio de foliaciones de grado k en $\mathbb{CP}^n$.

Observación 4.2 *Dos campos polinomiales X y Y en $\mathbb{C}^n$ con conjunto singular de codimensión ≥ 2, inducen la misma foliación en $\mathbb{CP}^n$ si, y solamente si, $X = \lambda Y$ para alguna constante $\lambda \in \mathbb{C}^*$.*

Corolario 4.1 *$\mathcal{F}(n,k)$ posee esttructura natural de espacio proyectivo de dimensión $N(\mathcal{F}(n,k)) = nN(n,k) + N(n-1,k) - 1$, donde $N(r,s) = C_s^{r+s}$ es la dimensión del espacio de los polinomios homogéneos de grado s en $r+1$ variables complejas.*

Prueba:

Si consideramos el espacio $\mathbf{G}$ de polinomios homogéneos de grado k en n variables , considerando que los monomios homogéneos que tienen la forma $x_1^{i_1}x_2^{i_2}...x_n^{i_n}$, $i_1 + i_2... + i_n = k$. Así el espacio $\mathbf{G}$ tiene dimensión $N(n-1,k) = C_k^{n-1+k}$.

Sea P un polinomio de grado k sea

$$P(x) = P_0(x) + ... + P_k(x) = (\sum_{r=0}^{k} f_1^r(x_1, x_2, ..., x_n), ..., \sum_{r=0}^{k} f_n^r(x_1, x_2, ..., x_n))$$

donde cada f_i^r representa un polinomio de grado r. La dimensión de cada coordenada es $C_0^{n-1} + C_1^n + ... + C_k^{n-1+k} = C_k^{n+k}$ entonces la dimensión del espacio vectorial es $nN(k,n)$.

Por la proposición 4,2 tenemos $X(x) = P(x) + g(x)R(x)$ por lo tanto X est determinado por P y g y considerando la observación anterior de que dos campos que son multiplos por una constante inducen la misma foliación y de ahi sumando las dimensiones tenemos:

$$N(\mathcal{F}(n,k)) = nN(n,k) + N(n-1,k) - 1$$

Corolario 4.2 *Si $\mathcal{F}(n,0)$ entonces existe un sistema de coordenadas afin $\mathbb{C}^n \approx E \subset \mathbb{CP}^n$ tal que $\mathcal{F}$ es una foliación de E definida por el campo radial.*

Prueba:

Una foliación por curvas de grado cero en $\mathbb{CP}^n$ es representada en una carta afin por $X = X_0 + g_0 \cdot R_n$, donde X_0 es un vector constante y $g_0 \in \mathbb{C}^n$.

Si $g_0 = 0$, la foliación es definida en E por un campo constante y sus hojas son las rectas paralelas a X_0(en esta carta).

Si $g_0 \neq 0$, entonces $sing(\mathcal{F}) \cap E$ es un único punto, $p = -X_0/g_0$. En este caso, si T es la transformación afin $T(z) = z - X_0/g_0$ de E donde $T(p) = 0$, obtenemos $T^*(X) = R_n$, es decir, podemos decir que $\mathcal{F}$ es representada en alguna carta afin por le campo radial.

Corolario 4.3 *Una foliación $\mathcal{F}$ en $\mathbb{CP}^n$ tiene grado 1 si y solamente si $\mathcal{F}$ es dada por un campo de vectores holomorfo X definido globalmente sobre $\mathbb{CP}^n$.*

Prueba:

Por la proposición 4,2 podemos representar una foliacion de gardo k por $X = P_0 + \cdots + P_k + g_k \cdot R_n$ en una carta afin. Extendido a $\mathbb{CP}^n$ es un campo meromorfo pues si efectuamos un intercambio de carta afin, por ejemplo $\phi = (z_1 = 1/x_1, z_2 = x_2/x_1, \ldots, z_n = x_n/x_1)$,en el campo X, obtenemos un campo de la forma $\phi^*(X) = Z/x_1^{k-1}$, donde Z es un campo polinomial. Esto significa que el campo X representa un campo meromorfo en $\mathbb{CP}^n$ con el polo de multiplicidade $k-1$ en el hiperplano del infinito de $E = (x_1 = 0)$. Por lo tanto X puede ser estendido a un campo holomorfo global s e solamente si $k = 1$.

Ejemplo 4.3 *Sea $\mathcal{F}$ la foliación sobre $\mathbb{CP}^2$, definida en un sistema de coordenadas por la ecuación*

$$axdy - bydx = 0; \quad a \neq 0 \neq b.$$

Al hacer el cambio de cartas a (z, w), se tiene la recta $L_\infty = x = 0$ parametrizando es $\varphi(t) = (t, 0)$, no tiene puntos de tangencia. Así como para la carta (u, v) en $L_\infty = x = 0$ no hay puntos de tangencia.
De acuerdo con nuestra definición de grado de una foliación. Consideremos $L : y = a_0 + b_0 x$ una linea arbitraria, el cual puede ser parametrizada por $\varphi(t) = (t, a_0 + b_0 t)$, luego el polinomio que determina $T(\mathcal{F}, L)$ es

$$h_L = \omega(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$$

$$h_L = b_0(a - b)t - ba_0.$$

Observe que:

- *Si $a = b$, $h_L(t) = -ba_0$, ahora si $a_0 = 0$, L es invariante, por definición L tiene que ser una línea no invariante por tanto, a_0 es necesariamente distinto de cero de donde se sigue que $T(\mathcal{F}, L) = 0$.*
- *Si $a \neq b$, $h_L(t) = (a - b)t - ba_0$ y por tanto $T(\mathcal{F}, L) = 1$.*

4.2. Singularidades Genéricas de Foliaciones Proyectivas

En esta sección estudiaremos las foliaciones de $\mathbb{CP}^n$ con singularidades aisladas. En particular, veremos que el espacio de las foliaciones en $\mathcal{F}(n, k)$ que poseen todas las singularidades no degeneradas es un subconjunto abierto, denso y conexo de $\mathcal{F}(n,k)$. Ademas de eso, calcularemos el número de singularidades (contados con su multiplicidad) de una foliación en $\mathcal{F}(n,k)$ que tienen todas las singularidades aisladas.

Definición 4.3 *Una singularidad p de un campo holomorfo X definido en una vecindad de p es no degenerada si la derivada $DX(p)$ es no singular.*

Denotaremos por $V(n,k)$ es el espacio de las foliaciones de $\mathcal{F} \in \mathcal{F}(n,k)$ que poseen todas sus singularidades no degeneradas.

Proposición 4.3 *Sean $\mathcal{F}_0 \in \mathcal{F}(n,k)$ y $p \in sing(\mathcal{F}_0)$ singularidad no degenerada de $\mathcal{F}_0$. Entonces existen vecindades $p \in U$, $\mathcal{F}_0 \in \mathcal{U} \in$ y una aplicación holomorfa $\varphi : \mathcal{U} \to U$ tal que :*

(a) $\{\varphi(\mathcal{F})\} = sing(\mathcal{F}) \cap U, \forall \mathcal{F} \in \mathcal{U}$

(b) *$\varphi(\mathcal{F})$ es una singularidad no degenerada de $\mathcal{F}$, $\forall \mathcal{F} \in \mathcal{U}$*

Prueba:
Fijemos un sistema de coordenadas afin $\mathbb{C}^n \approx E \subset \mathbb{CP}^n$, tal que $p \in E$ es el origen 0. Sea $X_0 = P_0 + g_0 R$ un campo de vectores polinomial que representa $\mathcal{F}_0$ en E. Cada foliación $\mathcal{F} \in \mathcal{F}(n,k)$ puede ser descrita en E por un campo polinomial $X = P + gR$ como en la Proposición 4.2. El conjunto $\mathcal{F}(n,k)$ puede entonces ser parametrizado por los coeficientes de g y de los componentes de P.
Identificamos $\{(P,g)\,;X = P + gR\}$ con $\mathbb{C}^M$ donde $M = nN(n,k) + N(n-1,k)$ esta identificación es por el Corolario 4,1, podemos definir una aplicación

$$\theta(P,g,x) = X(x)$$

siendo $X = P + g.R$. Así θ es holomorfa y además de eso $\theta(P_0, g_0, 0) = 0$. Por otro lado la derivada parcial con respecto al punto $(P_0, g_0, 0)$ es dada por $D_x\theta(P_0, g_0, 0) = DX_0(0)$. Como 0 es una singularidad no degenerada de X_0 vemos que $D_x\theta(P_0, g_0, 0)$ es un isomorfismo. De ahi del Teorema de las funciones implícitas existen unas vecindades $\mathcal{U}$ de (P_0, g_0) y U de 0 y una función holomorfa $\varphi : \mathcal{U} \to U$ tal que :

1. $\varphi(P_0, g_0) = 0$
2. Si $(P, g) \in \mathcal{U}$ y $x \in U$ son tales que $\theta(P, g, x) = 0$ entonces $x = \varphi(P, g)$.

Es decir si $X(x) = 0$ por (2) $\varphi(P, g)$ es la única singularidad de X en U.

Por Teorema de función implícita tenemos que $\theta(P, g, \varphi(P, g)) = 0$ entonces $X(\varphi(P, g)) = 0$, por lo tanto $\varphi(\mathcal{F}) = Sing(\mathcal{F}) \cap U$ así se cumple (a)
Como $D_x\theta(P_0, g_0, 0) = DX(0) \neq 0$ por la continuidad de DX podemos disminuir $\mathcal{U}$ y U si es necesario podemos suponer que para todo $(P, g, x) \in \mathcal{U} \times U$ la derivada parcial $D_x\theta(P, g, x) = DX(x)$ es un isomorfismo en particular obtenemos que $DX(\varphi(P, g))$ es un isomorfismo si $(P, g) \in \mathcal{U}$ así se cumple (b).

Corolario 4.4 *Dada una foliación $\mathcal{F}_0 \in S(n, k)$, con $sing(\mathcal{F}_0) = \{p_1^0, \ldots, p_r^o\}$ onde $p_i^o \neq p_j^o$ se $i \neq j$, existen vecindades conexas $\mathcal{U}$ de $\mathcal{F}$ en $\mathcal{F}(n, k)$, $U_1, \ldots, U_r$ de $p_1, \ldots, p_r$ respectivamente, dos a dos disjuntos, y aplicaciones holomorfas $\varphi_j : \mathcal{U} \to U_j$, $j = 1, \ldots, r$ tales que*

1. *$\varphi_j(\mathcal{F}_0) = p_j^o$ para todo j.*
2. *Para todo $\mathcal{F} \in \mathcal{U}$ y todo j, $\varphi_j(\mathcal{F})$ es la única singularidad de $\mathcal{F}$ en U_j, siendo esta no degenerada.*

Prueba. De la Proposición 4.3 obtenemos la existencia de $\mathcal{U}, U_1, \ldots, U_r$ y $\varphi_1, \ldots, \varphi_r$ satisfaciendo (a) y (b).

En particular $S(n,k)$ es abierto en $\mathcal{F}(n,k)$.

En seguida veremos que $S(n,k)$ es no vacio, para $n \geq 2$ y $k \geq 0$.

Ejemplo 4.4 *(El ejemplo de Jouanolou). Sea $\mathcal{J}(n,k)$ el campo de vectores polinomial dado en $E_0 = \mathbb{C}^n \subset \mathbb{CP}^n$ por*

$$\mathcal{J}(n,k) = \sum_{j=1}^{n-1} (x_{j+1}^k - x_j x_1^k) \frac{\partial}{\partial x_j} + (1 - x_n x_1^k) \frac{\partial}{\partial x_n}.$$

Esta foliación será llamada de foliación de Jouanolou de grado k en $\mathbb{CP}^n$.
Es facil ver que $(1, ..., 1)$ es una singularidad de $\mathcal{J}(n,k)$.
Algunas de las propiedades de las foliaciones de Jouanolou son reunidas en la proposición a seguir.

Afirmación 4.2 *La foliación generada por $\mathcal{J}(n,k)$ no tiene singualridades en el hiperpalno infinito $E_\infty = \mathbb{CP}^n - E_0$.*

Prueba: Utilizando los cambios de coordenadas entre E_0 y E_1.

$$\phi^1(x) = \varphi_1 \circ \varphi_0^{-1}(x_1, \ldots, x_n) = \varphi_1(1, x_1, \ldots, x_n) = \left(\frac{1}{x_1}, \frac{x_2}{x_1}, \ldots, \frac{x_n}{x_1}\right) = (y_1, \ldots, y_n).$$

Efectuando el cambio de variables en el campo X obtenemos

$$\phi_*^1(X) = Y^1 = \sum_{j=1}^{n} Y_j \frac{\partial}{\partial y_j}.$$

Como $y_1 = \dfrac{1}{x_1}$ y $y_j = \dfrac{x_j}{x_1}$ para todo $j = 2, \ldots, n$; tenemos

$$
\begin{aligned}
y_1^{'} &= -\frac{1}{x_1^2}x_1^{'} = -\frac{1}{x_1^2}X_1\left(x_1,\ldots,x_n\right)\\
&= \tfrac{1}{x^2}\left(x_2^k - x_1^{k+1}\right)\\
&= \tfrac{-1}{y_1^{k-1}}(y_2^k y_1 - 1)
\end{aligned}
$$

Por otro lado tenemos: para $j = 2, ..., n-1$,

$$
\begin{aligned}
y_j^{'} &= \frac{x_1 x_j^{'} - x_j x_1^{'}}{x_1^2} = y_1 X_j\left(x_1,\ldots,x_n\right) - y_1 y_j X_1\left(x_1,\ldots,x_n\right)\\
&= \tfrac{1}{y_1^{k-1}}(y_{j+1}^k - y_j y_2^k)
\end{aligned}
$$

para $j = n$,

$$
\begin{aligned}
y_n^{'} &= \frac{x_1 x_n^{'} - x_n x_1^{'}}{x_1^2} = y_1 X_n\left(x_1,\ldots,x_n\right) - y_1 y_n X_1\left(x_1,\ldots,x_n\right)\\
&= \tfrac{1}{y_1^{k-1}}(y_1^k - y_n y_2^k)
\end{aligned}
$$

Luego la foliación es representada en E_1 por el campo polinomial

$$
(y_2^k y_1 - 1)\frac{\partial}{\partial y_1} + \sum_{j=2}^{n-1}(y_{j+1}^k - y_j y_2^k)\frac{\partial}{\partial y_j} + (y_1^k - y_n y_2^k)\frac{\partial}{\partial y_n}
$$

si $y_1 = 0$ remplazando arriba tenemos la primera coordenada -1, por tanto no presenta singularidades en el hiperplano infinito, pero aun esta quedando los puntos $[0 : 0 : 1 : ...]$ esto en E_2 se da en $(0, 0, *, ..., *)$ n-coordenadas, para ver esto, consideremos el cambio de coordenadas entre E_0 y E_2.

$$
\phi^2\left(x\right) = \varphi_2 \circ \varphi_0^{-1}\left(x_1,\ldots,x_n\right) = \varphi_2\left(1, x_1,\ldots,x_n\right) = \left(\frac{1}{x_2}, \frac{x_1}{x_2}, \frac{x_3}{x_2}, \ldots, \frac{x_n}{x_2}\right) = \left(y_1,\ldots,y_n\right).
$$

Efectuando el cambio de variables en el campo X obtenemos

$$
\phi_*^2\left(X\right) = Y^2.
$$

Como $y_1 = \dfrac{1}{x_2}$, $y_2 = \dfrac{x_1}{x_2}$ y $y_j = \dfrac{x_j}{x_2}$ para todo $j = 3, \ldots, n$; tenemos

$$\begin{aligned} y_1^{'} &= -\frac{1}{x_2^2}x_2^{'} = -\frac{1}{x_2^2}X_2\left(x_1, \ldots, x_n\right) \\ &= \tfrac{-1}{y_1^{k-1}}(y_3^k y_1 - y_2^k) \end{aligned}$$

para $j = 2$,

$$\begin{aligned} y_2^{'} &= \frac{x_2x_1^{'} - x_1x_2^{'}}{x_2^2} = y_1X_1\left(x_1, \ldots, x_n\right) - y_1y_2X_2\left(x_1, \ldots, x_n\right) \\ &= \tfrac{1}{y_1^{k-1}}(1 - y_2y_3^k) \end{aligned}$$

Por otro lado tenemos: para $j = 3, ..., n-1$,

$$\begin{aligned} y_j^{'} &= \frac{x_2x_j^{'} - x_jx_2^{'}}{x_2^2} = y_1X_j\left(x_1, \ldots, x_n\right) - y_1y_jX_2\left(x_1, \ldots, x_n\right) \\ &= \tfrac{1}{y_1^{k-1}}(y_{j+1}^k - y_jy_2^k) \end{aligned}$$

para $j = n$,

$$\begin{aligned} y_n^{'} &= \frac{x_2x_n^{'} - x_nx_2^{'}}{x_2^2} = y_1X_n\left(x_1, \ldots, x_n\right) - y_1y_nX_2\left(x_1, \ldots, x_n\right) \\ &= \tfrac{1}{y_1^{k-1}}(y_1^k - y_ny_3^k) \end{aligned}$$

luego la foliación es representado en E_2 por el campo polinomial

$$(y_3^k y_1 - y_2^k)\frac{\partial}{\partial y_1} + (1 - y_2y_3^k)\frac{\partial}{\partial y_2} + \sum_{j=3}^{n-1}(y_{j+1}^k - y_jy_2^k)\frac{\partial}{\partial y_j} + (y_1^k - y_ny_3^k)\frac{\partial}{\partial y_n}$$

si reeemplazamos $(0, 0, 1, ...)$ arriba tenemos la segunda componente del campo 1, por lo tanto $(0, 0, 1, ...)$ no es una singularidad de la foliación con lo que se concluye que el campo polinomial en E_0

$$\mathcal{S}(n,k)=\sum_{j=1}^{n-1}(x_{j+1}^k - x_j x_1^k)\frac{\partial}{\partial x_j}+(1-x_n x_1^k)\frac{\partial}{\partial x_n}$$

no tiene singularidades infinitas, es decir no presenta singularidades en $E\infty$.

Proposición 4.4 *Se cumplen las siguientes propiedades:*

(a) $\mathcal{J}\in S(n,k)$

(b) $\mathcal{J}$ *tienen todas sus singularidades en* E_0. *Estas son dadas en estas coordenadas afines por:*

$p_j=(\delta^j,(\delta^j)^{f(n-1)},\ldots,(\delta^j)^{f(1)})$, $j=1,\ldots,N$, *donde:* δ *es una raiz N-ésima primitivade la unidad, siendo* $N=1+k+\cdots+k^n$, *y* $f(m)=-(k+k^2+\cdots+k^m)$.

Prueba. Las singularidades del campo $J(n,k)$ son dadas por el sistema de ecuaciones:

$$1-x_n x_1^k=0\wedge\ x_n^k-x_{n-1}x_1^k=0\wedge\ldots x_{j+1}^k-x_j x_1^k=0,\ldots\wedge\ x_2^k-x_1^{k+1}=0$$

el cual puede ser resuelto inductivamente como:

$$\begin{array}{rcl}
x_n & = & x_1^{-k} \\
x_{n-1} & = & x_n^k x_1^{-k}=x_1^{-k-k^2} \\
\ldots & & \ldots \\
x_{n-j} & = & x_1^{f(j+1)} \\
x_2 & = & x_1^{f(n-1)}
\end{array}$$

así: $(x_1^{f(n-1)})^k = x_2^k = x_1^{k+1}$ donde $j \geq 1$

$$f(j) = -(k + k^2 + \cdots + k^j).$$

De la última ecuación, $k + 1 - f(n-1)k = N$ obtenemos $x_1^N = 1$, luego $x_1 = \delta^j$, es una de las raices N-ésimas de la unidad. Reemplazando este valor de x_1 en las ecuaciones anteriores obtenemos los puntos $p_1, \ldots, p_n$ en (b). En particular, $\mathcal{J}(n,k)$ posee N singularidades en E_0. Por la afirmación anterior $\mathcal{J}(n,k)$ posee apenas estas singularidades.

Para ver la prueba de a, antes veamos la siguiente observación

Observación 4.3 *Consideremos ahora la transformación $A \in GL(n, \mathbb{C})$ definida en E por:*

$$A(x_1, \ldots, x_n) = (\alpha_1 \cdot x_1, \ldots, \alpha_n \cdot x_n) = (\delta \cdot x_1, \delta^{f(n-1)} \cdot x_2, \ldots, \delta^{f(1)} \cdot x_n)$$

Note que, $A^N = I$ y $A^j \neq I$ si $0 < j < N$. En particular el grupo $G = \{Id, A, \ldots, A^{N-1}\}$ posee N elementos. Además, como es facil ver, $A^j(1, \ldots, 1) = p_j$, lo que prueba que los elementos de G permutan las singularidades de $\mathcal{J}(n,k)$. Por otro lado,

$$A^*(J(n,k)) = \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j^{-1} \cdot [\alpha_{j+1}^k \cdot x_{j+1}^k - \alpha_j \alpha_1^k \cdot x_j x_1^k] \partial/\partial x_j + \alpha_n^{-1} \cdot [1 - \alpha_n \alpha_1^k \cdot x_n x_1^k] \partial/\partial x_n \delta^k \cdot J(n,k),$$

es decir, $A^*(\mathcal{J}(n,k)) = \mathcal{J}(n,k)$.

Por la observación anterior, es suficiente demostrar que la singularidad $p = (1, \ldots, 1)$ de $J(n,k)$ es no degenerada. Calculando la matriz Jacobiana de $DJ(n,k)(p)$, obtenemos la matriz J como:

$$J = \begin{pmatrix} -(k+1) & k & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -k & -1 & k & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & \cdots & . & . \\ . & . & . & . & \cdots & . & . \\ . & . & . & . & \cdots & . & . \\ -k & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & k \\ -k & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Hallemos los autovalores para el caso particular $J \in M(4, \mathbb{C})$, la idea para hallar los autovalores para $J \in M(n, \mathbb{C})$ es similar.

$$\text{Sea } J = \begin{pmatrix} -(k+1) & k & 0 & 0 \\ -k & -1 & k & 0 \\ -k & 0 & -1 & k \\ -k & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
det(J-\lambda I) &= |J-\lambda I| \\
&= \begin{vmatrix} -(k+1)-\lambda & k & 0 & 0 \\ -k & -1-\lambda & k & 0 \\ -k & 0 & -1-\lambda & k \\ -k & 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (-(k+1)-\lambda)(-1-\lambda)^3 - k \begin{vmatrix} -k & k & 0 \\ -k & -1-\lambda & k \\ -k & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (-k-1-\lambda)(-1-\lambda)^3 - k[-k(-1-\lambda)^2 - k \begin{vmatrix} -k & k \\ -k & -1-\lambda \end{vmatrix}] \\
&= k^4 - k^3(-1-\lambda) + k^2(-1-\lambda)^2 - k(-1-\lambda)^3 + (-1-\lambda)^4
\end{aligned}$$

Los autovalores son de la forma

$$\lambda_j = -1 + k \cdot w^j,\ j = 1, 2 \ldots, 4$$

donde W es la raiz 5−ésima primitiva de la unidad.
Así de manera general para $J \in M(n, \mathbb{C})$.

$$J = \begin{pmatrix} -(k+1) & k & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -k & -1 & k & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ -k & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & -k \\ -k & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

cuyos autovalores son de la forma $\lambda_j = -1 + k \cdot \omega^j,\ j = 1, \ldots, n$, donde ω es una raiz $(n+1)$-ésima primitiva de la unidad $w_j \neq 1$. En particular, $\lambda_j \neq 0$ para todo $k \geq 1$ y todo $n \geq 2$, esto es, $\mathcal{J}(n, k) \in S(n, k)$.

Corolario 4.5 $\mathcal{S}(n, k)$ *es no vacio para todo* $n \geq 2$ *y todo* $k \geq 0$.

Prueba: Pues $\mathcal{J}(n, k) \in S(n, k)$.

Afirmación 4.3

$$\mathcal{D} = \{(\mathcal{F}, p) \in \mathcal{F}(n, k) \times \mathbb{CP}^n \ :\ p \textit{ es singularidad degenerada de } \mathcal{F}\}.$$

es un subconjunto análitico.

Prueba: Fijemos $(\mathcal{F}_0, p_0) \in \mathcal{D}$. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $p_0 = 0 \in E_0 \simeq \mathbb{C}^n$. Parametrizemos $\mathcal{F}(n, k)$ por (P, g), donde una foliación $\mathcal{F} \in \mathcal{F}(n, k)$ es representada en E_0 por $X = P + g \cdot R$. Una singularidad $p \in E_0$ de $\mathcal{F}$ es degenerada si, y solamente si, $Det(DX(p)) = 0$. Consideremos entonces la aplicación $\Gamma : \mathbb{C}^M \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$, definida por

$$\Gamma(P, g, x) = (X(x), Det(DX(x))),$$

donde $X = P + g \cdot R$ y $(P, g) \in \mathbb{C}^M$, como en la Proposición 4.2 Observe que Γ es un polinomio en las variables (P, g, x). Luego $\Gamma^{-1}(0)$ es un subconjunto analítico de $\mathbb{C}^M \times \mathbb{C}^n$. Por lo tanto $\mathcal{D}$ es analítico.

Teorema 4.1 *$\mathcal{S}(n, k)$ es abierto, denso y conexo en $\mathcal{F}(n, k)$.*

Prueba: En efecto, sean $\pi_1 : \mathcal{F}(n, k) \times \mathbb{CP}^n \to \mathcal{F}(n, k)$ y $\mathcal{D}_1 = \pi_1(\mathcal{D})$. NComo D es analítico y π es una aplicación holomorfa propia, por el Teorema 1.4 se tiene que D_1 es analítico. Como $D_1 = \mathcal{F}(n, k) - \mathcal{S}(n, k)$, entonces $\mathcal{S}(n, k)$ será un abierto de Zariski de $\mathcal{F}(n, k)$. Por otro lado, el Corolario 4.5 implica que $\mathcal{S}(n, k) \neq \emptyset$, luego $\mathcal{S}(n, k)$ será abierto, denso y conexo.

Corolario 4.6 *El número de singularidades de una foliación $\mathcal{F} \in \mathcal{S}(n, k)$ es :*

$$\#sing(\mathcal{F}) = 1 + k + ... + k^n$$

Prueba: Para probar el Corolario basta ahora observar que la aplicación $\# : \mathcal{S}(n, k) \to \mathbb{N}, \mathcal{F} \mapsto \#sing(\mathcal{F})$ es localmente constante, como consecuencia del Corolario 4.4, como $\mathcal{S}(n, k)$ es conexo, se sigue que esta aplicación es constante. Por otro lado, como vimos en la Proposición 4.4 , el ejemplo de Jouanolou posee $N = k^n + \cdots + k + 1$ singularidades. ∎

En seguida veremos una generalización del Corolario 2 para foliaciones con singularidades isoladas.

Veamos primero la multiplicidad de una aplicación.

La multiplicidad de un punto en $Z\left(f_1,...,f_n\right)$ es definida de la siguiente manera :
Sea $p \in Z$,fijemos el sistema de coordenadas afines $\mathbb{C}^n \approx E \subset \mathbb{CP}^n$ con $p \in \mathbb{C}^n$. Podemos suponer que $E = U_0$, de forma que vamos a considerar los polinomios $g_j\left(z\right) = f_j\left(1,z\right)$ para todo $j = 1,...,n$. Asimismo la hipotesis de que Z no posea componentes de dimension ≥ 1 por el teorema de Bezout implica que existe un bola de radio r tal que $B = B\left(p,r\right)$, tal que p es la única solución de $g_1\left(z\right) = ...g_n\left(z\right) = 0$ con $x \in B$ .Vamos entonces a considerar la solucion mas general en que $g = \left(g_1,...,g_n\right) : U \longrightarrow \mathbb{C}^n$, es una función holomorfa en un abierto U de $\mathbb{C}^n$, tal que p es la única solución de $g\left(z\right) = 0$ en la bola $B = B\left(p,r\right) \subset U$. Consideremos la aplicación $G : \frac{g}{|g|} : B \setminus \{p\} \longrightarrow S_1$ donde S_1 denota la esfera de radio 1 en $\mathcal{C}^n$.

Definición 4.4 *L a multiplicidad de g en p es por definición el grado topológico de la aplicación $G\mid_{S_\rho(p)}: S_\rho\left(p\right) \longrightarrow S_1$, donde $0 < \rho < r$ y $S_\rho\left(p\right)$ denota la esfera de radio ρ y centro p .Usaremos la notación $m\left(p,g\right)$ para esta multiplicidad.*

Corolario 4.7 *Si $B, C \in GL(n,\mathbb{C})$ entonces $m(h,p) = m(g,p)$, donde $h(x) = B(g(p + C(x-p)))$.*

Prueba: Sean B_t y C_t, $t \in [0,1]$ caminos en $GL(n,\mathbb{C})$ tales que $B_0 = B$, $B_1 = Id$, $C_0 = C$ y $C_1 = Id$. Sea $H_t(x) = B_t(g(p + C_t(x-p)))$. $H_t(x) \neq 0$ pues si $H(t,x) = 0$ y teniendo en cuenta que B_t y C_t son invertibles se tiene que $x = p$ lo que es una contradicción, entonces $H(t,x) \neq 0$.
Sea $G(t,x) = \frac{H_t(x)}{|H_t(x)|}$ para todo $(t,x) \in [0,1] \times S_\rho$ para algun $0 < m\rho < r$, G es una aplicación continua, entonces por la Proposición se tiene que el grado$G(0,x)$ =grado$G(1,x)$ por lo tanto $m(h,p) = m(g,p)$.

Lema 4.1 *La multiplicidad $m\left(p,g\right)$,goza de las siguentes propiedades:*

1. *Independe de $\rho \prec r$.*

2. *Sea $A = (a_{ij})$ una matriz cuyas entradas son a_{ij}; son funciones holomorfas en $B(p,s)\,, 0 < s \leq r$ y tal que $detA(p) \neq 0$. Defina $h : B(p,s) \longrightarrow C^n$ por $h = Ag$ esto es $h_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} g_j$. Entonces $m(h,p) = m(g,p)$.*

3. *Sean $f : V \longrightarrow C^n$ y $h : W \longrightarrow U$ aplicaciones holomorfas donde W y V son abiertos de C^n , $h(q) = p$ para algun $q \in W$, $0 \in V$, $f(0) = 0$ y $goh(W) \subset V$. Suponga que $Dh(q)$y $Df(0)$ son isomorfismos de C^n. Entonces $m(fogoh, q) = m(g,p)$.*

4. *$Dg(p)$ entonces $m(g,p) = 1$.*

Prueba:

(1) Sea $0<\rho_1<\rho$ de manera que g no se anula en $B(p,\rho) - p$. Sea $V = \overline{B(p,\rho)} - B(p,\rho_1)$. V es una variedad orientada y compacta. Observar que $\partial V = \partial B(p,\rho) \cup (-\partial B(p,\rho_1))$ con la orientación borde.
Sea $F : V \to S^{n-1}$, $F(p) = \frac{g(p)}{|g(p)|}$. Por la propiedad tenemos que

$$0 = m(F|\partial V) = m(F|B(p,\rho)) - m(F|B(p,\rho_1)).$$

(2) Consideremos la homotopia $H_t(x) = A(tx)g(x)$, $t \in [0,1], x \in S_\rho$ la cual satisface $H_t(x) \neq 0$ se $0<\rho<r$ suficientemente pequeño. Como $H_0 = A(0)g$ y $H_1 = h$ obtenemos del Corolario 4.7 que $m(g,p) = m(A(0)g,p) = m(h,p)$.

(3) Vamos suponer sin perdida de generalidad que $p = q = 0$. Consideremos la homotopia definida por $H(t,x) = \frac{1}{t} f\left(tg\left(\frac{1}{t}\right) h(tx)\right)$ si $t \neq 0$ y $H(0,x) = B\left(g\left(C(x)\right)\right)$ donde $B = Df(0)$ y $C = Dh(0)$. Se tiene que

$$\lim_{t\to 0} H(t,x) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(f(tg(\frac{1}{t}h(tx)))) = lim_{t\to 0} \frac{f(t \lim_{s\to 0} g(\frac{h(sx)}{s}))}{t}$$

Como $f(0) = 0$ y $h(0) = 0$ tenemos que

$$\lim_{t \to 0} H(t, x) = Df(0)(g(Dh(0)x)).$$

Por lo H es continua y satisface $H_t(x) \neq 0$ si $0<\rho$ suficientemente pequeño.
Por tanto $m(g, 0) = m(BgC, 0) = m(H_1, 0) = 0 = m(fgh, 0)$

(4) Basta probarlo para el caso en que $p = 0$ es una singularidad no degenerada.
En efecto: Por el Teorema de la función inversa, existe $U_0 \subset U$ una vecindad abierta y convexo de 0 tal que $g(U_0)$ es abierto y $g|U_0 : U_0 \to \mathbb{C}^n$ es un difeomorfismo.
Como estamos en el ambiente $\mathbb{C}^n$ tenemos que $g|U_0$ preserva orientación, de manera que $sgn(Dg_0) = 1$. Por la Proposición existe una isotopia $g_t : U_0 \to \mathbb{C}^n$ tal que $g_t(0) = 0$ para todo $t \in [0, 1]$, $g_0 = g|U_0$ y $g_1 = id|U_0$
Sea $r > 0$ tal que $\overline{B(0, r)} \subset U_0$. Como g_t es un difeomorfismo para todo t y $g_t(0) = 0$, entonces g_t no tiene singularidades $\partial B(0, r)$ para todo t. Definimos

$$G : \partial B(0, r) \times [0, 1] \to, G(p, t) = \frac{g_t(p)}{|g_t(p)|}$$

Entonces G es una homotopia entre $G_0 = \frac{g}{|g|}$ y $G_1 = \frac{id|B(0,r)}{r}$. este ultimo tiene grado 1.

Definición 4.5 *Sea $f : M \longrightarrow N$ una aplicación holomorfa donde M y N son variedades complejas de dimensión n. Sean $p \in M$ y $q \in N$ tales que $f(p) = q$. Supongamos que p es una solución aislada de la ecuación $f(x) = q$, esto es que existe una vecindad W de p tal que existe una única solución de $f(x) = q$ con $x \in W$ es p. Consideremos sistemas de coordenadas holomorfos (α, U) y (β, V) en $p \in M$ y $q \in N$ respectivamente tales que $f(U) \subset V, \alpha(p) = \beta(q) = 0 \in C^n$. La multiplicidad de f en p,q es por definición $m(f, p, q) = m(\beta o f o \alpha^{-1}, 0)$*

Proposición 4.5 *Sea $f : B(p,r) \to \mathbb{C}^n$ una aplicación holomorfa donde $B(p,r)$ es la bola de radio r y centro p en $\mathbb{C}^n$. Suponga que $f(p) = q$ y que p es la única solución de $f(x) = q$ en $B(p,r)$.*

1. *Dado $0<\rho<r$ existe $\epsilon > 0$ tal que si $g : B(p,r) \to \mathbb{C}^n$ es holomorfa y satisface $\|f - g\|_{\overline{B(p,\rho)}} <\epsilon$, entonces $g^{-1}(q) \cap \overline{B(p,\rho)} = X$ es finito y*

$$m(f,p,q) = \sum_{x\in X} m(g,x,q)$$

2. *Dado $0<\rho<r$ existe $\delta > 0$ tal que si $\left|q - q^{'}\right| <\delta$ entonces $f^{-1}(q^{'}) \cap \overline{B(p,\rho)} = X$ es finito y*

$$m(f,p,q) = \sum_{x\in X} m(f,x,q^{'})$$

Prueba:

(1) Recordemos el siguiente resultado

”Sea N un variedad compacta. Existe un $\epsilon > 0$ con la siguiente propiedad: dado una variedad M dos aplicaciones continuas $f, g : M \to N$ tales que $|f(x) - g(x)| < \epsilon$ para todo $x \in M$, entonces f y g son homotópicos.”

Tomemos el ϵ del resultado anterior, ademas X es compacto y discreto entonces X es finito. Como f y g son homotópicos entonces $grado(f) = grado(g)$ entonces se tiene $m(f,p,q) = \sum_{x\in X} m(g,x,q)$.

(2) q es un valor regular y valores regulares es un conjunto abierto entonces existe $\delta > 0$ así X es compacto y discreto entonces es finito.

Sean $p_1, ..., p_k$ las singularidades de X. Como son aisladas, existen $B_i \subset B(\rho,p)$ de centro p_i dos a dos disjuntas. Sea $V = B(\rho,p) - \cup_{i=1}^{k} B_i$ es uan n variedad con borde, observemos que $\partial V = \partial B(\rho,p) \cup -\sum_{i=1}^{k} \partial B_i$ entonces por la

Proposición tenemos

$$0 = grado(F|\partial V) = grado(F|\partial B(\rho, p)) - \sum_{i=1}^{k}(F|\partial B_i)$$

Por lo tanto $m(f,p,q) = \sum_{x\in X} m(f,x,q')$

Definición 4.6 *Sea* $X = \sum_{j=1}^{n} X_j \partial/\partial x_j$ *un campo de vectores holomorfo definido en um abierto* U *de* $\mathbb{C}^n$*. Dada una singularidad isolada* $p \in U$ *de* X*, el número de Milnor, o multiplicidad de* X *en* p*, es el entero*

$$\mu(X,p) = m(X,p,0)$$

donde arriba, $m(X,p,0)$ *denota la multiplicidad de* $X = (X_1, \ldots, X_n)$ *en* $p, 0$*, pensado como aplicación de* U *en* $\mathbb{C}^n$*.*

Teniendo en cuenta el Lema 4.1 valen las siguientes propiedades:

1. Si f es una función holomorfa en U que no se anula en p, entonces $\mu(X,p) = \mu(f \cdot X, p)$.

2. Si $\varphi : U \to V \subset \mathbb{C}^n$ es un biholomorfismo, entonces $\mu(\varphi_\star(X), \varphi(p)) = \mu(X,p)$. En efecto, basta observar que $\varphi_\star(X)(q) = D\varphi(\varphi^{-1}(q)) \times X(\varphi^{-1}(q))$ y aplicar (2) y (3) del Lema 4.1 .

3. Si p es una singularidad no degeneradam entonces $\mu(X,p) = 1$.

Teniendose en cuenta (1) y (2), el concepto se extiende a singularidades aisladas de foliaciones en variedades complejas, via cartas locales: si $p \in M$ es una singularidad aislada de una foliación $\mathcal{F}$ en M, tomamos un campo de vectores holomorfo X que represente $\mathcal{F}$ en una vecindad U de p, una carta local φ en p y definimos $\mu(\mathcal{F},p) = \mu(\varphi_\star(X), \varphi(p))$.
Podemos entonces enunciar el siguiente resultado:

Proposición 4.6 *Sea $\mathcal{F} \in \mathcal{F}(n,k)$, una foliación con singularidades aisladas. Entonces*

$$\sum_{p \in sing(\mathcal{F})} \mu(\mathcal{F}, p) = k^n + \cdots + 1.$$

Prueba. En el caso en que $\mathcal{F} \in \mathcal{S}(n,k)$, por (3), la formula de arriba se reduce al Corolario . Veamos el caso general.

Sea $\mathcal{F}_0 \in \mathcal{F}(n,k)$ una foliación con singularidades aisladas, digamos $sing(\mathcal{F}_0) = \{p_1, \ldots, p_r\}$. Tomando un hiperplano H tal que $p_j \notin H$, para todo $j = 1, \ldots, r$, podemos obtener una carta afin $\mathbb{C}^n \simeq E = \mathbb{C}(n) \setminus H$, tal que $\{p_1, \ldots, p_r\} \subset \mathbb{C}^n$. Sea $X_0 = P_0 + g_0 \cdot R$ un campo de vectores polinomial que represente $\mathcal{F}_0$ en E. Fijemos las bolas $B_1, \ldots, B_r$, $B_j = B(p_j, \rho)$, $j = 1, ..., r$, tales que $\overline{B_i} \cap \overline{B_j} = \phi$, se $i \neq j$. Consideremos el compacto $K = \mathbb{CP}^n \setminus \cup_{j=1}^r B(p_j, \frac{\rho}{2})$ entonces existe una vecindad $\mathcal{U}_1$ de $\mathcal{F}_0$ tal que si $\mathcal{F} \in \mathcal{U}_1$ entonces $sing(\mathcal{F}) \cap \mathcal{K} = \phi$, esto es $sing(\mathcal{F}) \subset \cup_{j=1}^r B(p_j, \frac{\rho}{2})$. Observamos ahora que la Proposición implica que existe una vecindad $\mathcal{U} \subset \mathcal{U}_1$ de $\mathcal{F}_0$, tal que si $\mathcal{F} \in \mathcal{U}$, entonces

$$\sum_{p \in sing(\mathcal{F}) \cap B_j} \mu(\mathcal{F}, p) = \mu(\mathcal{F}, p_j)$$

Entonces por la Proposición existe $\epsilon > 0$ tal que si $X = P + gR$ satisface $\|X - X_0\|_{\overline{B_j}} < \epsilon$ para todo $j = 1, ..., r$, entonces

$$\sum_{p \in sing(X) \cap B_j} \mu(X, p) = \mu(X_0, p_j)$$

La vecindad $\mathcal{U}$ seria la deseada. Finalmente, como $\mathcal{S}(n,k)$ es denso en $\mathcal{F}(n,k)$, tomamos $\mathcal{F} \in \mathcal{S}(n,k) \cap \mathcal{U}$, para lo cual tenemos

$$k^n + .. + 1 = \sum_{p \in sing(\mathcal{F})} \mu(\mathcal{F}, p) = \sum_{j=1}^{r} \left(\sum_{p \in sing(\mathcal{F} \cap B_j)} \mu(\mathcal{F}, p) \right) = \sum_{j=1}^{r} \mu(\mathcal{F}_{\prime}, p)$$

como queriamos.

Capítulo 5

Foliaciones de codimensión uno en el Espacio Projectivo

En el siguiente capítulo vamos a extender una foliación de codimensión uno en $\mathbb{C}^n$ a $\mathbb{CP}^n$ y viceversa que dado una foliación de codimensión uno en $\mathbb{CP}^n$, es compactificado de una foliación definida por 1-formas polinomiales en cartas afines, este capítulo esta basado en el estudio de la sección 1.5 de [18].

5.1. Foliación inducida por 1-formas integrables en $\mathbb{CP}^n$

Sea M una variedad complexa de dimensión n y ω una 1-forma holomorfa no identicamente nula en M. Sea $S = \{p \in M / \omega_p \neq 0\}$, el conjunto singular de ω, que denotaremos por $Sing(\omega)$.

Definición 5.1 *Decimos que ω es integrable, si existe una foliación holomorfa $\mathcal{F}$*

en $N = M - S$ *tal que*

$$T_p\mathcal{F} = ker\omega_p = v \in T_pM, \omega_p(v) = 0$$

El siguiente teorema es bien conocido que se puede encontrar en [2]

Teorema 5.1 *(Teorema de Frobenius)* ω *es integrable, si y sólo si ,* $\omega \wedge d\omega$*.*

Sea $\omega = \sum_{j=1}^{n} f_j(z)dz_j \not\equiv 0$ una 1-forma integrable en $\mathbb{C}^n$, $n \geq 2$, donde $f_1, \ldots, f_n$ son polinomios. Vamos suponer también que $cod(Sing(\omega)) \geq 2$, lo que corresponde al hecho de que $f_1, \ldots, f_n$ no tiene factor común en su descomposición en factores irreductibles (pues si tuvieran un factor en comun $cod(Sing(\omega)) = 1$).

Ejemplo 5.1 *Sean* N *y* M *variedades complexas y* $\mathcal{F}$ *una foliación de codimensión un en* N*. Dada una aplicación holomorfa no constante* $f : M \to N$*, podemos definir una foliación de codimensión un en* M*, que será denotada por* $f^*(\mathcal{F})$*, de la siguiente manera: si* $\mathcal{F}$ *es definida por el termino* $\big((U_j)_{j\in J},\ (\omega_j)_{j\in J},\ (g_{ij})_{U_{ij}\neq\emptyset}\big)$*, entonces* $f^*(\mathcal{F})$ *es definida por* $\big((V_j)_{j\in J},\ (\eta_j)_{j\in J},\ (h_{ij})_{V_{ij}\neq\emptyset}\big)$ *donde* $V_j := f^{-1}(U_j)$*,* $\eta_j := f^*(\omega_j)$ *y* $h_{ij} := g_{ij} \circ f$*. La foliación* $f^*(\mathcal{F})$ *será llamada de* ***pull-back, o contra-imagen de*** $\mathcal{F}$ ***por*** f*. Así* $f^*(\mathcal{F})$ *es una foliación de codimensión un en* M *pues*

- $M = f^{-1}(N) \subset \bigcup f^{-1}(U_j) = \bigcup V_j$.
- $f^*(\omega_j) \wedge d(f^*(\omega_j)) = f^*(\omega_j \wedge d\omega_j) = 0$
- *Si* $V_{ij} \neq \emptyset$ *entonces* $f^*(\omega_i) = f^*(g_{ij}\omega_j) = (g_{ij} \circ f)f^*(\omega_j) = h_{ij}f^*(\omega_j)$.

Proposición 5.1 *Sea* $\mathcal{F}$ *la foliación definida por* ω*(definida anteriormente) en* $\mathbb{C}^n$*. Podemos extender* $\mathcal{F}$ *a* $\mathbb{CP}^n$*.*

Prueba:

Consideremos $\mathbb{C}^n$ como la carta afín $E_0 := \{[z] := [z_0 : \ldots : z_n] \in \mathbb{CP}^n;\ z_0 = 1\}$. El

hiperplano del infinito de esta carta es dado por $H = \{[z] \in \mathbb{CP}^n;\ z_0 = 0\}$.
Utilizando los cambios de coordenadas entre E_1 y E_0.

$$\phi(x) = \varphi_1 \circ \varphi_0^{-1}(w_1, \ldots, w_n) = \varphi_1(1, w_1, \ldots, w_n) = \left(\frac{1}{w_1}, \frac{w_2}{w_1}, \ldots, \frac{w_n}{w_1}\right)$$

Por lo tanto, la expresión de ω en la carta E_1 es:

$$\phi^*(\omega) = f_1\left(\frac{1}{w_1}, \frac{w_2}{w_1}, \ldots, \frac{w_n}{w_1}\right) d\left(\frac{1}{w_1}\right) + \sum_{j=2}^{n} f_j\left(\frac{1}{w_1}, \frac{w_2}{w_1}, \ldots, \frac{w_n}{w_1}\right) d\left(\frac{w_j}{w_1}\right)$$

Sea $f_j(z_1, \ldots, z_n) = f_j^0(w_1, \ldots, w_n) + \ldots + f_j^i(w_1, \ldots, w_n) + \ldots$
Tal que f_j^i $(i \geq 0 \wedge 1 \leq j \leq n)$ son componentes homogéneas de grado i de los f_j respectivamente. Así:

$$\phi^*(\omega) = \sum_{m=0}^{+\infty} f_1^m\left(\frac{1}{w_1}, \frac{w_2}{w_1}, \ldots, \frac{w_n}{w_1}\right)\frac{-dw_1}{w_1^2} + \sum_{j=2}^{n}\sum_{m=0}^{+\infty} f_j^m\left(\frac{1}{w_1}, \frac{w_2}{w_1}, \ldots, \frac{w_n}{w_1}\right)\frac{dw_j w_1 - dw_1 w_j}{w_1^2}$$

$$\phi^*(\omega) = -(\sum_{m=0}^{+\infty} w_1^{-m} f_1^m(1, w_2, \ldots, w_n)\frac{1}{w_1^2} + \sum_{j=2}^{n}\sum_{m=0}^{+\infty} w_1^{-m} f_j^m(1, w_2, \ldots, w_n)\frac{w_j}{w_1^2})dw_1$$

$$+\sum_{j=2}^{n}\sum_{m=0}^{+\infty} w_1^{-m} f_j^m(1, w_1, \ldots, w_n)\frac{dw_j}{w_1}$$

$$\phi^*(\omega) = \frac{1}{w_1^{k+2}}(-\sum_{m=0}^{+\infty} w_1^{k-m}\left(f_1^m(1, w_2, \ldots, w_n) + \sum_{j=2}^{n} f_j^m(1, w_2, \ldots, w_n)\, w_j)\right) dw_1$$

$$+\sum_{j=2}^{n}\sum_{m=0}^{+\infty} w_1^{k+1-m} f_j^m(1, w_2, \ldots, w_n)\, dw_j)$$

Como los $f_{j's}$ son todos polinomios, la 1-forma arriba es meromorfa, siendo $|\phi^*(\omega)|_\infty = (w_1 = 0)$. Observamos que la multiplicidad de w_1 como polo de $\phi^*(\omega)$ es $k \geq 2$. Podemos entonce escribir $\phi^*(\omega) = \dfrac{\varpi}{w_1^k}$, donde ϖ tiene coeficientes polinomiales.

La forma ϖ es integrable
Como $\omega \wedge d\omega = 0$ se tiene $\phi^*(\omega) \wedge d(\pi^*(\phi)) = 0$ y $\phi^*(\omega) = \dfrac{\varpi}{w_1^k}$ entonces

$$\frac{\varpi}{w_1^k} \wedge \left(\frac{d\varpi}{w_1^k} - \frac{k\varpi}{w_1^{k+1}} \wedge dw_1 \right) = 0$$

$$\left(\frac{\varpi}{w_1^k} \wedge \frac{d\varpi}{w_1^k} \right) - \left(\frac{\varpi}{w_1^k} \wedge \frac{k\varpi}{w_1^{k+1}} dw_1 \right) = 0$$

por lo anterior

$$\varpi = -\sum_{m=0}^{+\infty} w_1^{k-m} \left(f_1^m\left(1, w_2, \ldots, w_n\right) + \sum_{j=2}^{n} f_j^m\left(1, w_2, \ldots, w_n\right) w_j \right) dw_1$$

$$+\sum_{j=2}^{n} \sum_{m=0}^{+\infty} w_1^{k+1-m} f_j^m\left(1, w_2, \ldots, w_n\right) dw_j$$

Luego

$$\frac{\varpi}{w_1^k} \wedge \frac{k\varpi}{w_1^{k+1}} dw_1 = \Big(\frac{1}{w_1^{k+2}} - \sum_{m=0}^{+\infty} w_1^{k-m} \left(f_1^m\left(1, w_2, \ldots, w_n\right) + \sum_{j=2}^{n} f_j^m\left(1, w_2, \ldots, w_n\right) w_j \right) dw_1$$

$$+ \frac{1}{w_1^{k+1}} \sum_{j=2}^{n} \sum_{m=0}^{+\infty} w_1^{k-m} f_j^m\left(1, w_2, \ldots, w_n\right) dw_j \Big) \wedge k \frac{1}{w_1^{k+2}} \sum_{j=2}^{n} \sum_{m=0}^{+\infty} w_1^{k-m} f_j^m\left(1, w_2, \ldots, w_n\right) dw_j dw_1$$

Como $dw_i dw_i = 0$ y $dw_i dw_j = 0$ si $i \neq j$ tenemos que $\frac{\varpi}{w_1^k} \wedge \frac{k\varpi}{w_1^{k+1}} dw_1 = 0$. Por lo tanto

$$\varpi \wedge d\varpi = 0$$

así ϖ es integrable y $\varpi = w_1^k \pi^*(\omega)$.

Por lo tanto ella define una foliación que extiende $\mathcal{F}$ a $H \cap E_1$. Procediendo de manera análoga para los otros sistemas afines $E_j := \{[z] ;\ z_j = 1\}$, obtenemos formas integrables, cuyas foliaciones asociadas, extienden $\mathcal{F}$ a una foliación $\mathcal{G}$ de $\mathbb{CP}^n$. La foliación $\mathcal{G}$ puede ser definida por 1-formas meromorfas.

Observación 5.1 ***Expresión en coordenadas homogéneas.*** *Sea $\mathcal{G}$ a foliación de $\mathbb{CP}^n$ definida pela 1-forma polinomial integrable*

$$\omega = \sum_{j=1}^{n} f_j(z) dz_j$$

en la carta afín E_0 de $\mathbb{C}^n$, donde E_0. Sea $\pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{CP}^n$ la proyección de la relación de equivalencia que define $\mathbb{CP}^n$: $\pi(z) = [z]$. En la carta E_0 ella puede ser expresada como

$$\pi(z) = \pi(z_0, \ldots, z_n) = \left[1 : \frac{z_1}{z_0} : \ldots : \frac{z_n}{z_0}\right] := \left[1 : \frac{w}{z_0}\right].$$

En particular,

$$\pi^*(\omega) = \frac{1}{z_0^2} \sum_{j=1}^{n} f_j\left(\frac{w}{z_0}\right)(z_0 dz_j - z_j dz_0). \qquad (*)$$

Como los $f_{j's}$ son polinomios, multiplicando $\pi^*(\omega)$ por una potencia apropiada de z_0, obtenemos una 1-forma polinomial $\Omega = z_0^k \dot{\pi}^*(\omega) = \sum_{j=0}^{n} F_j(z) dz_j$, satisfaciendo las siguientes propiedades:

(1) Ω *es integrable define la foliación* $\pi^*(\mathcal{G})$. *Como* $\omega \wedge d\omega = 0$ *se tiene* $\pi^*(\omega) \wedge d(\pi^*(\omega)) = 0$ *y* $\pi^*(\omega) = \dfrac{\omega_1}{z_0^k}$ *entonces*

$$\frac{\omega_1}{z_0^k} \wedge \left(\frac{d\omega_1}{z_0^k} - \frac{k\omega_1}{z_0^{k+1}} \wedge dz_0 \right) = 0$$

$$\left(\frac{\omega_1}{z_0^k} \wedge \frac{d\omega_1}{z_0^k} \right) - \left(\frac{\omega_1}{z_0^k} \wedge \frac{k\omega_1}{z_0^{k+1}} dz_0 \right) = 0$$

teniendo la forma explicita de ω_1 *y desdoblando se tiene que el segundo sumando es cero.*

$$\omega_1 \wedge d\omega_1 = 0$$

así ω_1 *es integrable y* $\omega_1 = z_0^k \pi^*(\omega)$.

(2) Los polinomios F_j *son homogéneos del mismo grado, digamos* $k \geq 1$. *Pues*

$$\pi^*(\omega) = \left(-\frac{1}{z_0^2} \sum_{j=1}^{n} f_j \left(\frac{w}{z_0} \right) \right) dz_0 + \left(\frac{1}{z_0} \sum_{j=1}^{n} f_j \left(\frac{w}{z_0} \right) dz_j \right)$$

para cada $j = 1, \ldots, n$; *sea* $s_j =$ *grado de* f_j, *luego tomemos*

$$k = \text{mín}\{1 + s_1, \ldots, 1 + s_n, 1 + \text{máx}\{s_1, \ldots, s_n\}\}$$

así tenemos

$$\Omega = z_0^k \pi^*(\omega) = \left(-z_0^{k-2} \sum_{j=1}^{n} f_j \left(\frac{w}{z_0} \right) \right) dz_0 + \left(z_0^{k-1} \sum_{j=1}^{n} f_j \left(\frac{w}{z_0} \right) dz_j \right),$$

basta tomar $F_0(z) = -z_0^{k-2} \sum_{j=1}^{n} f_j \left(\dfrac{w}{z_0} \right)$ *y* $F_j(z) = z_0^{k-1} \sum_{j=1}^{n} f_j \left(\dfrac{w}{z_0} \right)$.

(3) Los polinomios F_j *no tienen factor común. Pues como* $\Omega = z_0^k \pi^*(\omega) = \sum_{j=1}^{n} F_j(z) dz_j$ *tenemos que* z_0^i *no divide a* $F_j(z)$ *para todo* $i \geq 1$ *y todo* $j = 1, \ldots, n$. *Así si existe* g *tal* g *divide a* F_j *para todo* $j = 1, \ldots, n$ *entonces* g *divide a* $\pi^*(\omega)$ *en consecuencia* $\pi_*(g)$ *divide* ω *lo que es absurdo.*

(4) La forma Ω *satisface la relación* $i_R(\Omega) = 0$*, donde* $R = \sum_{j=0}^n z_j \dfrac{\partial}{\partial z_j}$ *es un campo radial de* C^{n+1}*. Esta relación es equivalente a*

$$\sum_{j=1}^n z_j F_j(z) \equiv 0. \qquad (**)$$

Pues como $\Omega = z_0^{k-2} \sum_{j=1}^n f_j \left(\dfrac{z}{z_0}\right)(z_0 dz_j - z_j dz_0)$ *y* $R = \sum_{j=1}^n z_j \dfrac{\partial}{\partial z_j}$ *tenemos*

$$i_R(\Omega) = z_0^{k-2} \sum_{j=1} f_j \left(\frac{z}{z_0}\right)(z_0 z_j - z_j z_0) = 0$$

ahora $i_R(\omega) = 0$ *es equivalente a* $\sum_{j=0}^n z_j F_j(z) = 0$

La relación $(**)$ *es consecuencia de* $(*)$*, ya que* $i_R(z_0 dz_j - z_j dz_0) = 0$ *para todo* $j = 1, \ldots, n$*. Observe que* $sing(\pi^*(\mathcal{G})) = (F_0 = \ldots = F_n = 0)$ *y por lo tanto las componentes irreductibles de* $sing(\pi^*(\mathcal{G}))$ *tiene codimensión* ≥ 2*, por (3).*

Notemos también que $\omega = \Omega|_{(z_0=1)}$*, o sea restringiendo* Ω *al hiperplano* $z_0 = 1$ *recuperamos la 1-forma* ω *original. De manera análoga, la restricción* $\Omega|_{(z_j=1)}$ *define una 1-forma polinomial integrable en la carta afín* $E_j = (z_j = 1)$*, que coincide, a menos de un factor constante, con la forma* ω_j *obtenido en el Ejemplo anterior.*

Observación 5.2 *Sea* Ω *una 1-forma que satisaface* $(1), (2), (3), (4)$ *de la observación anterior. Entonces se tiene que* $i_R(d\Omega) = (k+1)\Omega$*. En efecto veamos que esta relación se cumple:*

$$L_R(\Omega) =^{\Delta} \frac{d}{dt} R_t^*(\Omega)|_{t=0} = \frac{d}{dt} \sum_{j=0}^n F_j(e^t z) d(e^t z_j)|_{t=0}$$

y del hecho que F_j *es de grado* k *tenemos que* $F_j(e^t z) = e^{tk} F_j(z)$ *y* $d(e^t z_j) = e^t dz_j$

$$L_R(\Omega) = \frac{d}{dt}(e^{(k+1)t})|_{t=0} \sum_{j=0}^n F_j(z) dz_j = (k+1)\Omega$$

Ahora usando la formula de Cartan tenemos:

$$L_R(\Omega) = i_R(d\Omega) + d(i_R(\Omega)) = i_R(d\Omega).$$

Así tenemos la igualdad deseada. En particular obtenemos el siguiente hecho: $d\Omega = 0$ *si y solamente si* $\Omega = 0$

5.2. Compactificado de una foliación de codimensión uno

Proposición 5.2 *Toda foliación de codimensión uno en* $\mathbb{CP}^n$ *pode ser definida por 1-formas polinomiales en cartas afines.*

Prova. Sea $\mathcal{F}$ la foliación de codimensión uno en $\mathbb{CP}^n$, dada por el termino $\big((U_j)_{j\in J},\ (\eta_j)_{j\in J},\ (g_{ij})_{U_{ij}\neq\emptyset}\big)$ y tal que $cod(sing(\mathcal{F})) \geq 2$. La idea es probar que $\mathcal{F}$ puede ser representada en coordenadas homogéneas como en la observación de coordenadas homogeneas.

Sea $\pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{CP}^n$ la proyección canónica $\pi(z) = [z]$. Procediendo como en el ejemplo 5.1, obtenemos una foliación $\mathcal{G} := \pi^*(\mathcal{F})$ en $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$, dada por lo termino $\big((V_j)_j,\ (\theta_j)_j,\ (h_{ij})_{V_{ij}\neq\emptyset}\big)$, donde $V_j = \pi^{-1}(U_j),\ \theta_j = \pi^*(\eta_j)$ y $h_{ij} = g_{ij} \circ \pi$. Vamos probar que $\mathcal{G}$ puede ser definida por una 1-forma $\Omega \in \Omega^1(\mathbb{C}^{n+1})$ satisfaciendo $(1),\ (2),\ (3)$ y (4) de la observación 3,1.

Afirmación 5.1 *Existe una 1-forma* Θ*, definida en un polidisco* Q*, con centro en el origen, tal que* $\Theta|_{Q\setminus\{0\}}$ *define* $\mathcal{G}|_{Q\setminus\{0\}}$*.*

Coloquemos $\theta_j = \sum_{j=0}^{n} f_r^j(z)dz_r$, donde $f_r^j \in \mathcal{O}(V_j)$. Afirmamos que existe $r_o \in \{0, \ldots, n\}$ tal que $f_{r_o}^j \neq 0$ para todo $j \in J$. En efecto, la relación $\theta_i = h_{ij}\theta_j$ en $V_{ij} \neq \emptyset$, implica que $f_r^i = h_{ij} f_r^j$ en V_{ij}, para todo $r = 1, \ldots, n+1$. Como $h_{ij} \in \mathcal{O}^*(V_{ij})$, obtenemos que $f_r^i \not\equiv 0$ si y sólo si $f_r^j \not\equiv 0$, siempre que $V_{ij} \neq \emptyset$. La proba sigue entonces de los siguientes hechos:

(1) $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ es conexo.

(2) Dado $j_o \in J$ existe r_o tal $f_{r_o}^{j_o} \not\equiv 0$, pues $\theta_{j_o} \not\equiv 0$.

Sin perdida de generalidad, vamos a suponer que $f_0^j \not\equiv 0$ para todo $j \in J$. Dados $j \in J$ y $1 \leq r \leq n$, considere la función meromorfa $\phi_r^j := \dfrac{f_r^j}{f_0^j} \in \mathcal{M}(V_j)$. Como $f_r^i = h_{ij} f_r^j$ y $f_0^i = h_{ij} f_0^j$ si $V_{ij} = V_i \cap V_j \neq \emptyset$, obtenemos que $\phi_r^i = \phi_r^j$ en V_{ij}, para todo $r \in \{1, \ldots, n\}$. Luego existe una función meromorfa $\phi_r \in \mathcal{M}(\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\})$ tal que $\phi_r|_{V_j} = \phi_r^j$, para todo $j \in J$. Vamos ahora utilizar el teorema de Levi (vea $[Si]$): se $n \geq 1$, la función meromorfa ϕ_r puede ser extendida a una función meromorfa en $\mathbb{C}^{n+1}$. Ademas de eso, ella puede ser escrita como cociente de dos funciones holomorfas: $\phi_r = \dfrac{g_r}{h_r}$, $g_r,\ h_r \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^{n+1})$, $h_r \not\equiv 0$. Denotemos los germenes de g_r y h_r en $\mathcal{O}_{n+1}$ por g_{r0} y h_{r0}, respectivamente. Considerando las dos descomposiciones en factores irreductibles, podemos suponer, después simplificación en el cociente $\dfrac{g_{r0}}{h_{r0}}$, que ellos no tienen factor común. Utilizando aún que $\mathcal{O}_{n+1}$ es un anillo de factorización única, podemos obtener un mínimo común múltiplo de $h_{10}, \ldots, h_{n0}$, digamos $k_0 \in \mathcal{O}_{n+1}$: k_0 es tal que $h_{r0}|k_0$ para todo $r = 1, \ldots, n$, y si ψ es tal que $h_{r0}|\psi$ para todo r entonces $k_0|\psi$. Colocando $k_r := \dfrac{g_{r0} \cdot k_0}{h_{r0}}$, consideramos el germen de 1-forma $\sum_{r=0}^{n} k_r dz_r$. Un representante Θ de este germen definido en un polidisco Q, con centro en el origen, define $\mathcal{G}$ en $Q \setminus \{0\}$, pues Θ en $V_j \cap Q \neq \emptyset$ se tiene que $\Theta \wedge d\Theta = 0$

Afirmación 5.2 *$\mathcal{G}$ puede ser definida por una forma Ω satisfaciendo* (1), (2), (3) *y* (4) *de la observación 3.1*

Primeramente observamos que $i_R(\Theta) = 0$. En efecto, las fibras de la aplicación $\pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{CP}^n$ son las rectas que pasan por el origen. Esto obliga que $i_R(\theta_j) = 0$ para todo $j \in J$, luego $i_R(\Theta) = 0$.

Ademas de esto, la forma Θ es integrable, una vez que define una foliación. Consideremos la expansión de Θ en serie de Taylor en torno del origen:

$$\Theta = \sum_{r \geq k} \Theta_r, \ \Theta_k \not\equiv 0.$$

Para todo $r \geq k$, el coeficiente de dz_s de la 1-forma Θ_r es el polinomio homogéneo de grado r, obtenido de la expansión del germen k_s en serie de Taylor. La idea es probar que la 1-forma Θ_k define $\mathcal{G}$ y satisface $(1), \ldots, (4)$. La forma Θ_k claramente satisface (2). Verifiquemos que ella satisface (1) y (4). Expandiendo en serie de Taylor la relación $\Theta \wedge d\Theta = 0$, obtenemos

$$0 = \Theta \wedge d\Theta = \sum_{l \geq k} \sum_{r+s=l} \Theta_r \wedge d\Theta_s,$$

entonces $\Theta_k \wedge d\Theta_k = 0$. En particular, Θ_k satisface (1). Análogamente, expandiendo en serie de Taylor la relación $i_R(\Theta) = 0$, obtenemos que $i_R(\Theta_k) = 0$, ya que los coeficientes de R son homogéneos de grado un, luego θ_k satisface (4). Para verificar que Θ_k define $\mathcal{G}$ y satisface (3), definamos $F = \frac{\Theta}{\Theta_k}$, G es meromorfa , por el teorema de Hartogs se extiende a G holomorfa. Sea $G = \sum_0^\infty G_j$ el desenvolvimiento de Taylor donde G_j es homogénea de grado j

$$\Theta_k = G \cdot \Theta = \left(\sum_{j=0}^{\infty} G_j \right) \left(\sum_{j=k}^{\infty} \Theta_j \right) \tag{$**$}$$

entonces $G_0 = G(0) = 1.$, y se tiene que se cumple (3) pues si existe f divide a los polinomios homogéneos de Θ_k entonces f divide a $\frac{\Theta}{G} = \frac{\sum_{r \geq k} \Theta_r}{1+\sum_1^\infty G_j}$ esto es absurdo.

∎

Capítulo 6

Conclusión

En este trabajo se caracteriza las foliaciones de dimensión uno en $\mathbb{CP}^n$ y para H no invariante por $\mathcal{F}$ se tiene $\mathcal{T}(\mathcal{F}, H)$ es un subconjunto algebraico de H definido por un polinomio de grado k, que por definición se le llamará el grado de la foliación, se denotará a las foliaciones de grado k como $\mathcal{F}(n, k)$ y también se estudiará las foliaciones en $\mathcal{F}(n, k)$ que posean todas las singularidades no degeneradas. También se caracterizara las foliaciones de codimensión uno en $\mathbb{CP}^n$.

Una continuación de este trabajo, sería caracterizar el grado de una foliación de codimensión uno y en general el grado de una foliacion de dimensión arbitraria. También un trabajo pendiente sería estudiar una foliación por curvas como un morfismo de fibrados vectoriales, donde los morfismos en $\mathbb{CP}^n$ quedan determinados por morfismos

$$\alpha : L_d \to T\mathbb{CP}^n$$

L_d es un fibrado lineal, definido por los cociclos $g_{ij}(w_{j0}, ..., w_{jn}) = w_{ji}^{-d}$ y apartir de esa definición encontrar los mismos resultados de grado de una foliación que se vio en este trabajo.

Bibliografía

[1] R. Benazic *Algunas observaciones sobre el concepto de foliación analítica,* Revista Pesquimat Vol. XII N°2, FCM-UNMSM, 2009.

[2] C. Camacho-A. Lins Neto *Teoria geométrica das folheações,* Projeto Euclides, 1979.

[3] W. Fulton *Curvas Algebraicas,*

[4] A. Garcia; Y. lequain *Introdução à Álgebra,* Projeto Euclides, Rio de Janeiro.

[5] X. Gomez-Mont y L. Ortiz-Bobadilla *Sistemas Dinamicos Holomorfos en Superficies,* Sociedad Matemática Mexicana, Instituto de Matemáticas de la U.N.A.M, 1989.

[6] R. Gunning ; H. Rossi *Analytic functions of several complex variables,* Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ. 1965.

[7] R. Gunning *Introduction to Holomorphic Functions Several Variables,* Vol. I, Function Theory, Wadsworth and Brooks/Cole, 1990.

[8] R. Gunning *Introduction to Holomorphic Functions Several Variables,* Vol. II, Function Theory, Wadsworth and Brooks/Cole, 1990.

[9] M. Hirsh *Diferential Topology,* , Springer-Verlag,New York, 1976.

[10] E. Lages Lima *Variedades Diferenciais,* Monografias de Matemática N°15, 1973.

[11] E. Lages Lima *Grupo Fundamental y Espcios de Recubrimiento,* 11 Coloquio Brasileiro de Matemática, 1977.

[12] A. Lins-Neto ; B. Scardua *Folheações Algebraicas Complexas,* 21 Coloquio Brasileiro de Matemática, 1997.

[13] J. Milnor *Singular Points of Complex Hypersurfaces,* Annals of Mathematics Studies. Number 61.

[14] M. Sebastiani *Introduçao á geometria analítica complexa,* Projeto Euclides, 2010.

[15] Y. Siu *Techniques of Extension of Analytic Objects,* Marcel Dekker, N.Y., 1974.

[16] I. Vainsencher *Introdução as Curvas Algébricas Planas,* Coleção Matemática Universitaria.

[17] F. Zaldívar *Notas de geometría algebraica,*Instituto de Matemáticas de la UNAM.

[18] L. Neto *Componentes irredutíveis dos espaços de folheações* ,26 Colóquio Brasileiro de Matemática, 2007.

[19] C. Godbillon, *Feuilletages. Études Géométriques, Progress in Mathematics,98* Birkhauser Verlag, Basel, 1991.