

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA
FACULTAD DE INGENIERÍA GEOLOGICA, MINERA Y
METALÚRGICA



“APLICACIÓN DE LA FUNCION INVERSA Y EL
MÉTODO MONTECARLO EN LA SIMULACION DE LAS
OPERACIONES MINERAS”

TESIS

PARA OPTAR EL TITULO PROFESIONAL DE

INGENIERO DE MINAS

PRESENTADO POR:

AUGUSTO TEVES ROJAS

Lima – Perú

2012

DEDICATORIA

A mis padres: Pedro Teves Savero y Paulina Rojas Flores , por enseñarme que el trabajo y el ahorro es fuente de riqueza.

A mi esposa: Elena Cubas, por su infinita paciencia, comprensión y amor

A mis hijos : Pierre Augusto y Gonzalo Aarón, por sus motivaciones, y su alegría

También quiero dedicar este modesto trabajo al científico Arequipeño Miguel Wenceslao Garaycochea Delgado (1816-1861) autor del cálculo binomial y de la fórmula generalizada, de la hoy conocida como , de Euler. Garaycochea planteó esta fórmula mucho antes que Euler.

AGRADECIMIENTO

Infinitas gracias a todos mis maestros universitarios especialmente a: Ing. Francisco Sotillo Palomino, Dr. Max Inga, Dr. Carlos Agreda, Dr. Alfredo Marín, Ing. Máximo Romero Rojas, Ing. Isaac Ríos Quinteros, Ing. Jorge Díaz Artieda, Lic. Carlos DulantoO, Lic Cesar SaalR, Lic Celestina Peña, Lic. Carlos DeSouza, Ing. Pedro Máximo Ángeles Beteta, Ing. Ricardo Zacarías D. Ing. Víctor Montenegro Vilchez, Ing. Pero Hugo Tumialán De la Cruz, quienes me guiaron en el camino del mundo minero, las matemáticas y la investigación científica.

Mención especial a los trabajadores universitarios que me apoyaron durante mi permanencia como estudiante: Sra Olga Rubio, Sr. Helí García, Sra Elvira Palomino, Sr. Javier Pitman V. Sr. Eusebio Mujica, Sr. Armando Cáceres, Sra Vilma Salvatierra y Sr. Pedro Cerrón Gaspar.

LISTAS DE FIGURAS

Figura 1-2-1 Histograma de leyes de aseguramiento y control de calidad	4
Figura 1 2-2 Histograma de los logaritmos de las leyes de aseguramiento y control de calidad	5
Figura 1-2-3 análisis de Pareto de accidentes	6
Figura Nº 1-3-1 Función de distribución binomial negativa	9
Figura Nº 1-3-2 Distribución de Poisson para varios valores de media	11
Figura Nº 1-3-3 Distribución Normal	12
Figura Nº 1-3-4 Distribución Uniforme	14
Figura 1-5-1 Gráfico de la función inversa	26
Fig. 1.6.1 Datos ajustados a un polinomio	27
Figura 1.7.1 Forma gráfica del método de la transformada inversa	34
Figura 1-7-1 Gráfico mostrando la simulación de una v.a. exponencial	37
Figura 1-7-2 Gráfico mostrando histograma de v.a. exponenciales simulados	37
Figura 1-7-3 Gráfico mostrando PP-PLOT de v.a. exponenciales simulados y esperados	38
Figura 1-8-3-1 Histograma de leyes de aseguramiento y control de calidad	42
Figura 8-3--2 Histograma de los logaritmos de las leyes de aseguramiento y control de calidad	43

LISTAS DE TABLAS

Tabla 1	Tabla de frecuencias de accidentes	6
Tabla N° 2	Generador $X_{n+1}=(5X_n+7) \bmod 8$	20
Tabla N° 1.6.1	Datos experimentales	28
Tabla N° 1.6.2	Función desconocida dada en forma tabular	29
Tabla N° 1-7-2	Simulación de la distribución exponencial aplicando el método de transformada inversa	35
Tabla N° 1-7-2	Resultados de Simulación de la distribución exponencial aplicando el método de transformada inversa	36

RESUMEN

Esta Tesis. “Aplicación de la función inversa y el método Monte Carlo en la simulación de las operaciones mineras”, si bien las aplicaciones están orientadas a las operaciones mineras, la metodología puede ser usada para la simulación de cualquier proceso industrial, donde la función de distribución de probabilidad no se ajusta a ningún modelo teórico conocido.

La metodología planteada es simple y de fácil aplicación para los ingenieros de minas que están en las operaciones mineras. A partir de un contexto experimental traducido en histogramas, se genera valores aleatorios que siguen un comportamiento probabilístico “función de distribución acumulada personalizada” sin tener que pasar por el tedioso trabajo Modelar el histograma, la función acumulada, que es una integral, y de la función inversa de esta última si la solución fuera analítica. Se simplifica aplicando procedimientos numéricos como la interpolación inversa de LaGrange .

Esta metodología trata de explicar algunos algoritmos de simulación que tienen los paquetes computacionales comerciales, y que en sus manuales no son claros y aparecen como una “caja negra”

ABSTRACT

This thesis, "The inverse function and Monte Carlo method Application in mining operations simulation " while applications are aimed at mining operations, the methodology can be used to simulate any industrial process, where the probability distribution function does not fit any known theoretical model.

The proposed of the methodology is simple and easy to apply for mining engineers in mining operations. From an experimental setting resulted in histograms, random values is generated following a probabilistic behavior "Custom cumulative distribution function", without having to go through the tedious work modeling: the histogram, the cumulative function, which is an integral, and the inverse function of the cumulative function if the solution is analytic. Is simplified by applying numerical procedures as the inverse of La Grange interpolation.

This methodology tries to explain some simulation algorithms that are in commercial computer software, and that in their manuals are not clear and appear as a "black box"

TABLA DE CONTENIDO

INTRODUCCION

1. CAPITULO I

CONCEPTOS BASICOS

1.1. ¿Qué es simulación?.....	2
1.2. Distribuciones experimentales de probabilidad.....	4
1.3. Distribuciones de probabilidad teóricas.....	7
1.4. Métodos de generación de números aleatorios.....	16
1.5. Función inversa.....	24
1.6. Método de interpolación de Lagrange.....	27
1.7. Simulación : Método de la transformada inversa.....	33
1.8. Simulación : Método del teorema del límite central.....	39
1.9. Simulación: Método de Montecarlo.....	44

2. CAPITULO II

METODOLOGIA PARA LA SIMULACION DE OPERACIONES MINERAS APLICANDO LA FUNCION INVERSA Y EL MÉTODO MONTECARLO.

2.1. Diagrama de burbujas del método.....	59
2.2. Colección de datos experimentales.....	60
2.3. Construcción de tablas y curvas de la función de distribución de probabilidad acumulada.....	60
2.4. Asignación de números índices: Asociación de la probabilidad acumulada y los números aleatorios.....	61
2.5. Formulación de la función inversa.....	61
2.6. Generación de datos simulados.....	62
2.6.1. Generar números aleatorios.....	62
2.6.2. Aplicación de la interpolación de Lagrange.....	63

3. CAPITULO III

APLICACIONES

3.1. Simulación financiera para un proyecto minero: Simulación de Tasa interna de retorno.....	67
3.2. Simulación de las vibraciones producidas por la detonación de una mezcla explosiva en la voladura de rocas.....	73
3.3. Simulación de una variable geomecánica (espaciamiento, aberturas, discontinuidades).....	81
3.4. Discusión de resultados.....	88
3.5. Correlación de datos experimentales y simulados.....	89

CONCLUSIONES.....	92
RECOMENDACIONES.....	93
BIBLIOGRAFÍA.....	94

INTRODUCCION

El presente trabajo sobre Aplicación de la función inversa y el método Montecarlo en la simulación de operaciones mineras, muestra una metodología y procedimiento para que cualquier persona que conoce algún proceso de producción, pueda realizar la simulación de las mismas .

Sólo se requiere identificar las variables y construir su histograma experimental a partir de datos históricos. Se analiza y aplica conceptos de función inversa, probabilidades, interpolación de Lagrange, teorema del límite central, Transformada inversa y Montecarlo.

Se explica cómo simular valores de la función inversa de la función de distribución acumulada sin la necesidad modelar la función $f(x)$ y de su Acumulada $F(x)$.

Los resultados obtenidos al ser contrastado con los datos reales dan una buena aproximación, los histogramas de errores son gaussianos y centrados en cero

Se presenta una técnica útil fácil de entender y fácil de aplicar

Capítulo 1

CONCEPTOS BASICOS

1.1 ¿QUÉ ES SIMULACIÓN?

Simulación se refiere a una amplia colección y aplicación de métodos para imitar el comportamiento de un sistema real, usualmente en una computadora con un apropiado software.

Para realizar la simulación se requiere que el fenómeno real sea representado a través de un modelo que refleje “fielmente” el comportamiento del fenómeno real. Esto es una aproximación al fenómeno real y en lo posible el modelo debe ser simple y fidedigna. La eficiencia de un modelo se mide en términos proporcionales, esto es, en qué porcentaje representa a la realidad.

La simulación en computadoras, hoy en día, va de la mano con el modelado de sistemas. Un sistema es un facility(instalaciones, equipos, aparatos etc) o proceso ya sea actual o propuesto tales como:

- Una planta manufacturera con máquinas, personas, equipos de transporte, fajas transportadoras y espacio para almacenamiento

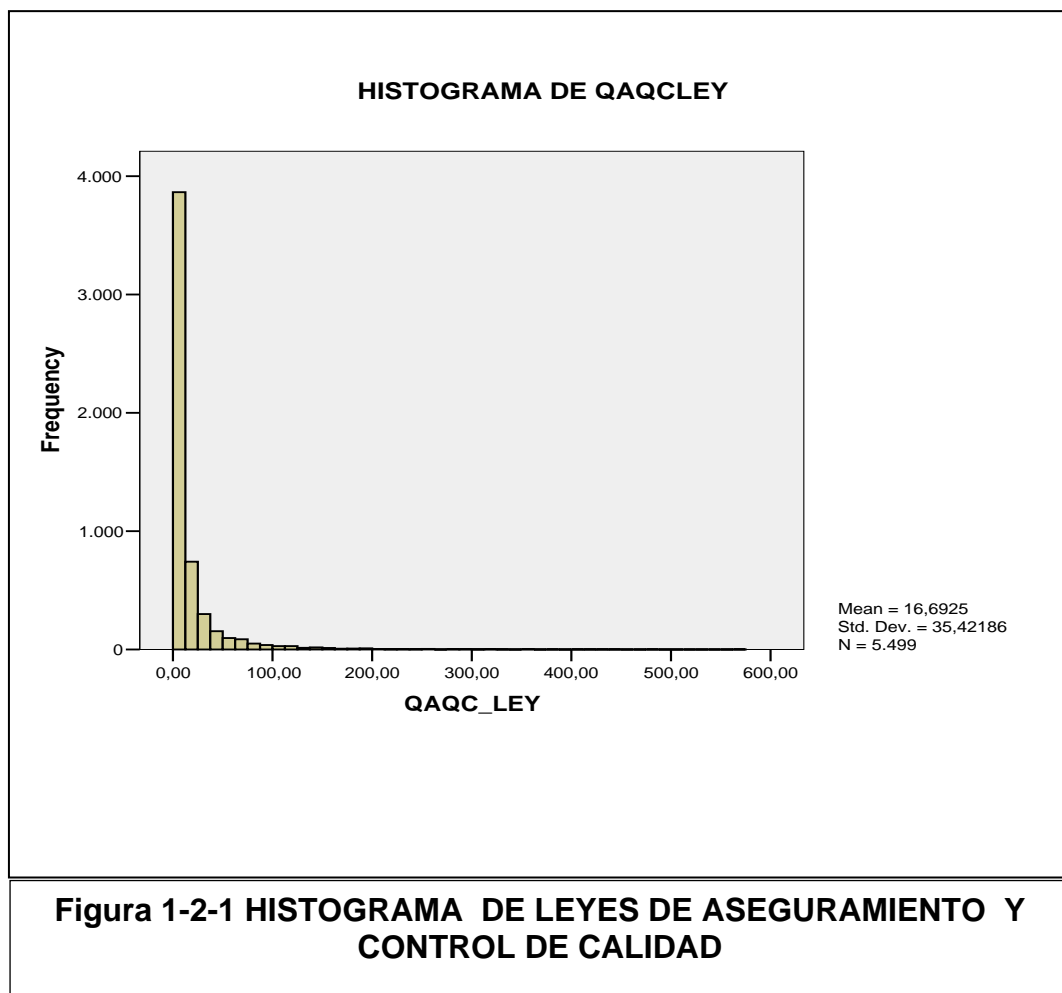
- Un banco con diferentes tipos de clientes, servidores, y equipos como cajeros en ventanillas, cajeros automáticos, etc.
- Una distribución de redes de plantas, almacenes, y rutas de transporte.
- Una planta de productos químicos con tanques de almacenamiento, tuberías, recipientes reactores y carros tanques de ferrocarril que llevan el producto hasta la embarcación marítima.
- Respuestas a emergencia del personal a la ocurrencia de un evento catastrófico.
- Sistema de extracción de una mina donde intervienen equipos, personas, medios de transporte
- Sistema de flujo de caja en actividades económicas.

Un sistema se estudia para: medir su performance, mejorar su operación, o diseñarlo si aún no existe. La gerencia y los controladores de un sistema deberían tener siempre listo y disponible una ayuda para la operación diaria y una ayuda para tomar decisiones sobre qué hacer en una fábrica o proceso si una máquina importante cae en el proceso..

Para lograr la simulación, además del modelo se requiere que el modelador tenga información estadística del comportamiento de todos los parámetros del sistema que participan en el modelo y para reproducir eventos se requiere que estos parámetros estén relacionados a números aleatorios.

1.2 DISTRIBUCIONES EXPERIMENTALES DE PROBABILIDAD

Los valores numéricos que representan la realización de un fenómeno real, y que han sido muestreados en algún periodo de tiempo, son agrupados, analizados y representados en los histogramas experimentales tales como se muestra a continuación.



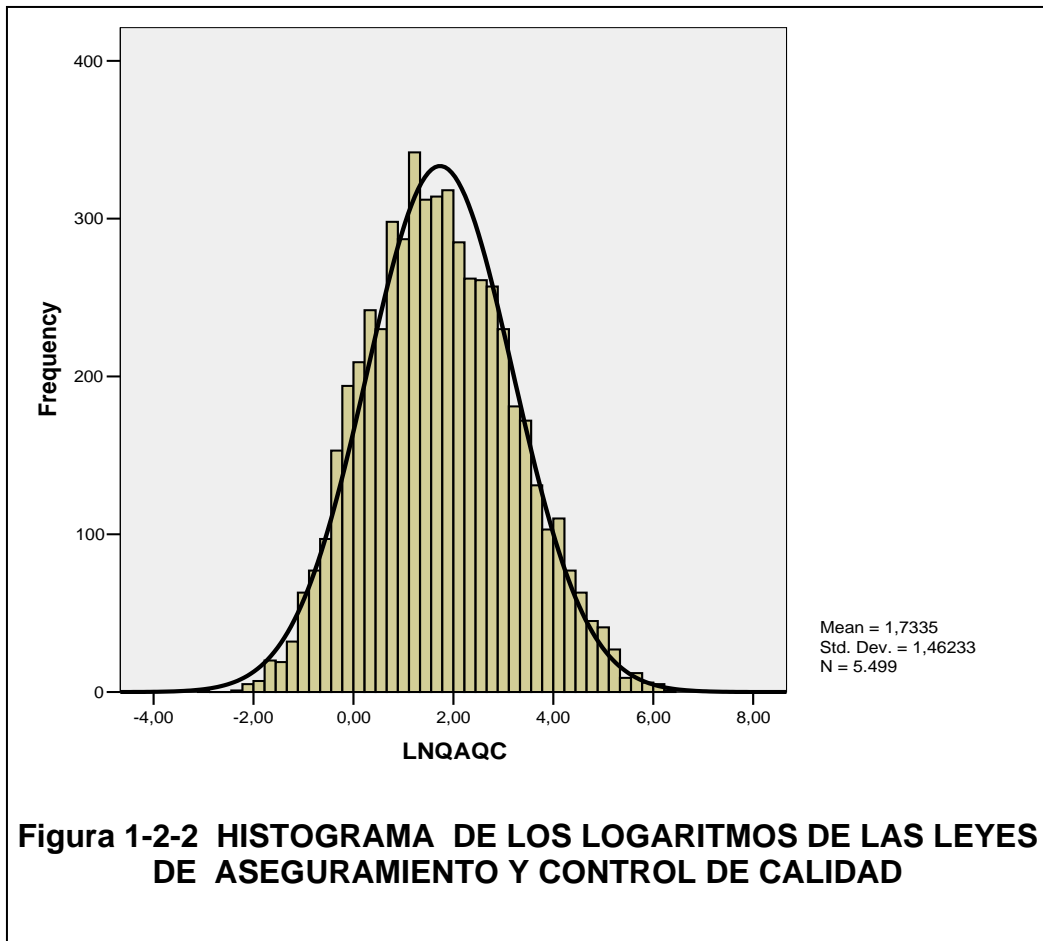
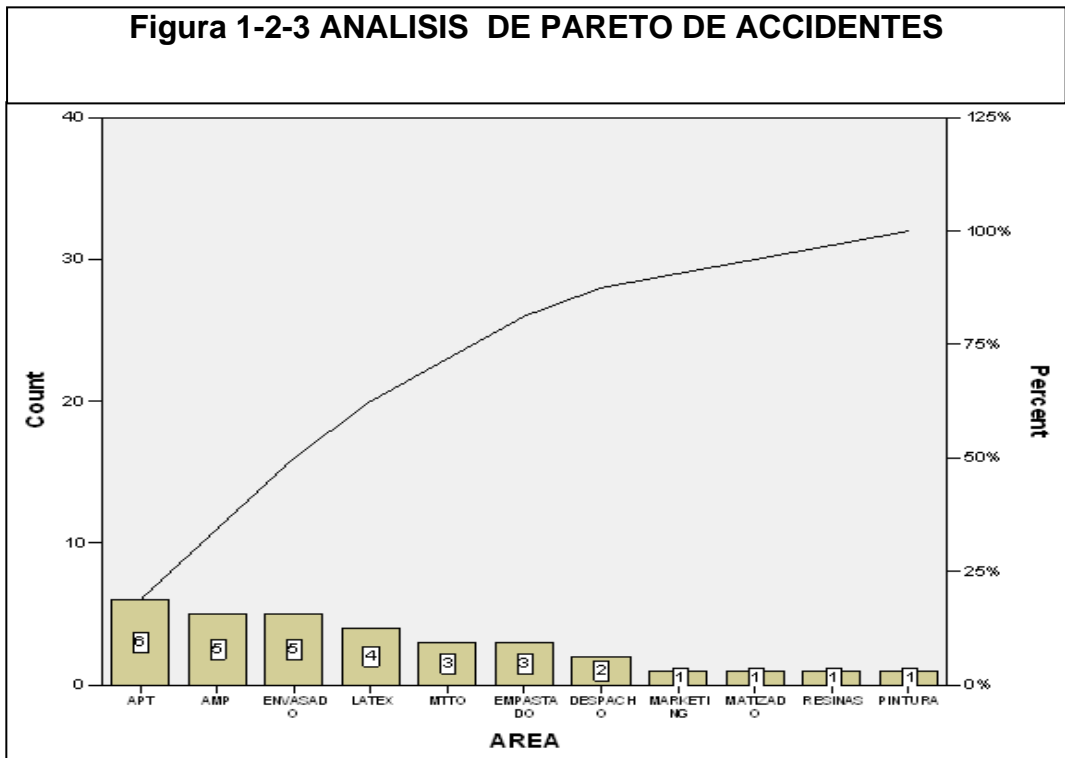


Tabla 1 TABLA DE FRECUENCIAS DE ACCIDENTES

		ACCIDENTE			
		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	ATRICCION	1	3.1	3.1	3.1
	CERVICA DORSALGIA	1	3.1	3.1	6.3
	CONTUSION	5	15.6	15.6	21.9
	CORTE	2	6.3	6.3	28.1
	DERMATITIS	4	12.5	12.5	40.6
	DESGARRO	1	3.1	3.1	43.8
	ESGUINCE	1	3.1	3.1	46.9
	FRACTURA	5	15.6	15.6	62.5
	HERIDA	2	6.3	6.3	68.8
	LUMBALGIA	4	12.5	12.5	81.3
	QUEMADURA	5	15.6	15.6	96.9
	TRAUMATISMO	1	3.1	3.1	100.0
	Total	32	100.0	100.0	

Figura 1-2-3 ANALISIS DE PARETO DE ACCIDENTES



1.3 DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD TEÓRICAS

1.3.1 DISTRIBUCION DE PROBABILIDAD

Recordemos inicialmente que existen las variables aleatorias, siendo aquellas que se asocian a la ocurrencia de un fenómeno aleatorio. Cuando una de estas variables aleatorias toma diversos valores, la probabilidad asociada a cada uno de tales valores puede ser organizada como una **distribución de probabilidad**, la cual es la distribución de las probabilidades asociadas a cada uno de los valores de la variable aleatoria.

Las distribuciones de probabilidad pueden representarse a través de una tabla, una gráfica o una fórmula, en cuyo caso tal regla de correspondencia se le denomina **función de probabilidad**.

1.3.2 DISTRIBUCIONES DISCRETAS DE PROBABILIDAD

Son aquellas cuyo dominio es el conjunto de números enteros.y sus parámetros se calcula tal como se muestra a continuación.

Esperanza matemática o media

$$\mu = X_1 \cdot p_1 + X_2 \cdot p_2 + \dots + X_i \cdot p_i = \sum_{i=1}^n X_i \cdot p_i$$

Varianza

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2 \cdot p_i - \mu^2$$

Desviación típica

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^n X_i^2 \cdot p_i - \mu^2}$$

$$0 \leq p_i \leq 1$$

$$p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n = \sum p_i = 1$$

1.3.2.1 DISTRIBUCION BINOMIAL

$$p(X = k) = \binom{n}{k} p^k \cdot q^{n-k}$$

n es el número de pruebas.

k es el número de éxitos.

p es la probabilidad de éxito.

q es la probabilidad de fracaso.

El número combinatorio $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Media

$$\mu = n \cdot p$$

Varianza

$$\sigma^2 = n \cdot p \cdot q$$

Desviación típica

$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q}$$

Función generadora de momentos: $(1 - p + p e^t)^n$

f(x) distribución binomial negativa

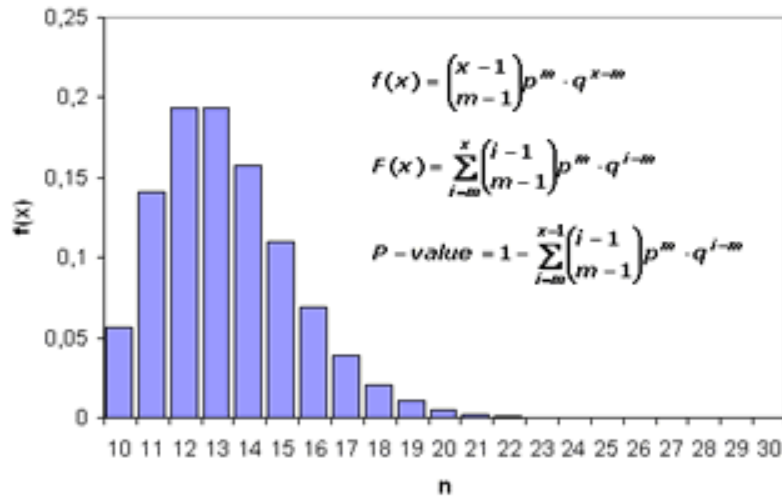


FIGURA N° 1-3-1 FUNCION DE DISTRIBUCION BINOMIAL NEGATIVA

1.3.2.2 DISTRIBUCION DE POISSON

Características:

En este tipo de experimentos los éxitos buscados son expresados por unidad de área, tiempo, pieza, etc, etc,:

- # de defectos de una tela por m²
- # de aviones que aterrizan en un aeropuerto por día, hora, minuto, etc, e
- # de bacterias por cm² de cultivo
- # de llamadas telefónicas a un conmutador por hora, minuto, etc, etc.
- # de llegadas de embarcaciones a un puerto por día, mes, etc, etc.
- # de contactos con dirección predominante por metro cuadrado en un túnel

Para determinar la probabilidad de que ocurran x éxitos por unidad de tiempo, área, o producto, la fórmula a utilizar sería:

$$P(x, \lambda) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$$

donde:

$p(x, \lambda)$ = probabilidad de que ocurran x éxitos, cuando el número promedio de ocurrencia de ellos es λ

$\lambda = np$ (tamaño de muestra multiplicado por la probabilidad de éxito)

n = Tamaño de muestra

p = Probabilidad de éxito

e = base de logaritmos = 2.718281828

x = variable que nos denota el número de éxitos que se desea que ocurra

Hay que hacer notar que en esta distribución el número de éxitos que ocurren por unidad de tiempo, área o producto es totalmente al azar y que cada intervalo de tiempo es independiente de otro intervalo dado, así como cada área es independiente de otra área dada y cada producto es independiente de otro producto dado.

Ejemplo.

El 8% de los registros contables de una empresa presentan algún problema, si un auditor toma una muestra de 40 registros ¿Calcular probabilidad de que existan 5 registros con problemas?

$n = 40$

$p = 0.08$

$\lambda = 3.2$

$X = 5$

$$P(X = 5) = (e^{-3.2})(3.2^5)/5! = 0.1139793 = 11.39\%$$

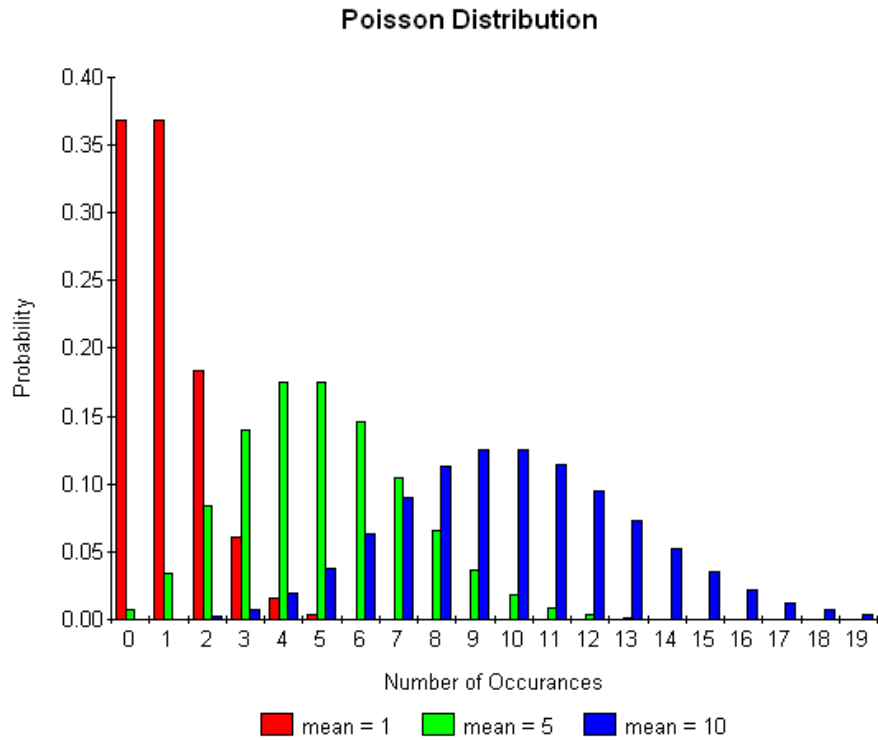


Figura N° 1-3-2 Distribución de Poisson para varios valores de media

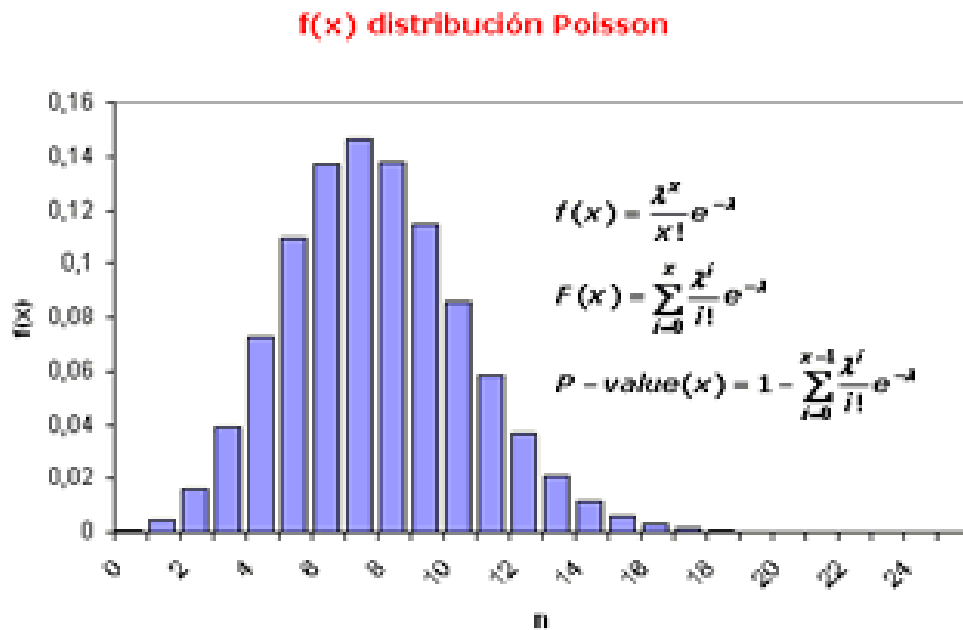


Figura N° 1-3-3 Distribución de Poisson

1.3.3 DISTRIBUCIONES CONTINUAS DE PROBABILIDAD

1.3.3.1 DISTRIBUCION NORMAL

La distribución normal o distribución de Gauss es sin duda la más importante y la de más aplicación de todas las distribuciones continuas. Esta distribución es bastante adecuada para describir la distribución de muchos conjuntos de datos que ocurren en la naturaleza, la industria y la navegación. Así pues para los siguientes conjuntos de datos, se puede considerar adecuada la distribución normal:

- Datos meteorológicos correspondientes a temperaturas, lluvias, etc.
- Las clasificaciones correspondientes a pruebas de aptitud.
- Las alturas de individuos de una edad y sexo dado.
- Las medidas físicas de productos manufacturados.
- La vida media de un tipo de lámparas con un voltaje dado, etc.

Definición: Diremos que una variable aleatoria X , de tipo continuo, sigue una distribución normal de parámetros μ y σ si su función de densidad es:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < +\infty$$

donde $\mu, \sigma \in \mathfrak{R}$ y tales que $-\infty < \mu < +\infty$ y $\sigma > 0$. ($\pi=3,14159\dots$, $e=2,71828$)

μ = media de \mathbf{X}

σ = desviación típica de \mathbf{X}

Abreviadamente la indicaremos por $X \sim N(\mu, \sigma)$

Veamos ahora la representación gráfica de la función de densidad $f(x)$ de la $N(\mu, \sigma)$.

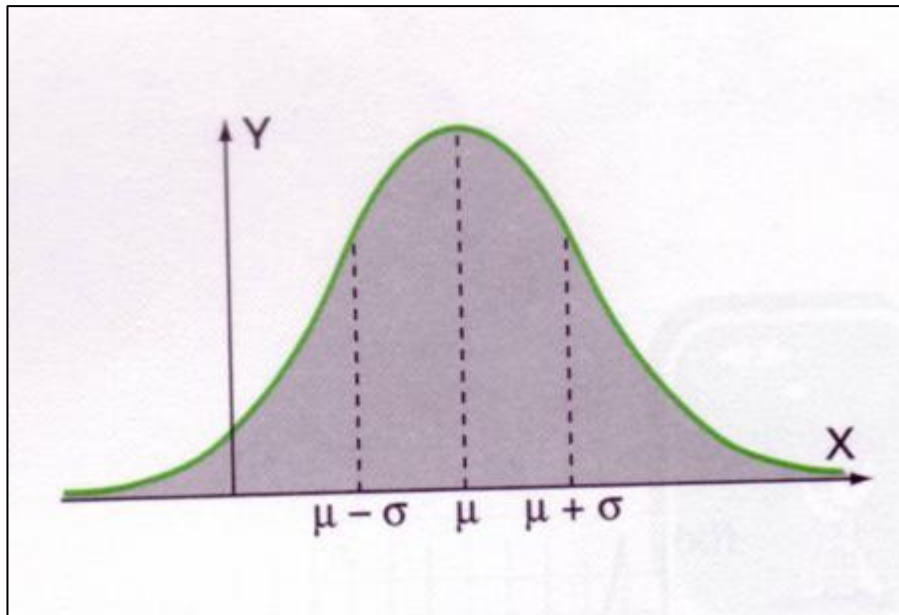


Figura N° 1-3-3 Distribución Normal

1.3.3.2 DISTRIBUCION UNIFORME

Se dice que una variable aleatoria sigue una distribución uniforme si la función de densidad es constante en el intervalo en el que se encuentran todos los valores de la variable. La función de densidad o ley de probabilidad viene dada por:

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \quad \text{si } a \leq x \leq b$$

Propiedades. Toda variable aleatoria continua que sigue una ley de distribución uniforme tiene como características:

- La media es $\mu = \frac{(a+b)}{2}$
- La varianza es $\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$

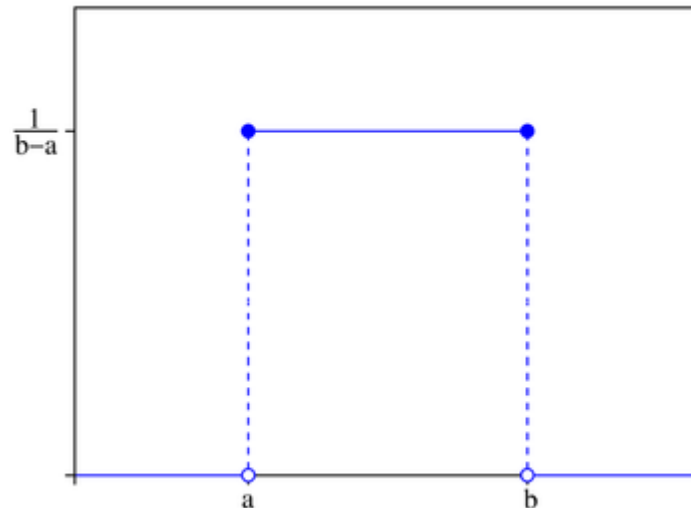


Figura N° 1-3-4 Distribución Uniforme

1.3.3.3 DISTRIBUCION EXPONENCIAL

Se utiliza como modelo para representar tiempo de funcionamiento o de espera. La distribución exponencial expresa también el tiempo que transcurre entre sucesos que se contabilizan mediante la distribución de Poisson. Por ejemplo, tiempo de espera en la parada de autobús, tiempo transcurrido entre dos llamadas telefónicas, número de vehículos que llegan a un semáforo...

La función de densidad o ley de probabilidad es:

$$f(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda x} \quad x > 0$$

siendo λ el parámetro de la distribución con $\lambda > 0$.

Propiedades. Toda variable aleatoria continua que sigue una ley de distribución exponencial tiene como características:

- La media es $\mu = \frac{1}{\lambda}$
- La varianza es $\sigma^2 = \frac{1}{\lambda^2}$

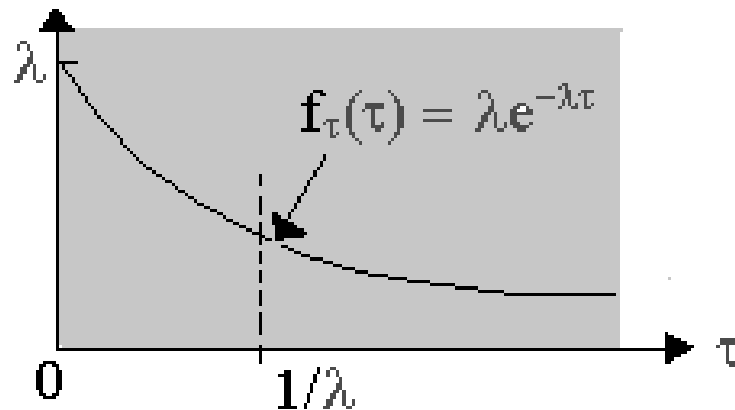


Figura N° 1-3-4 Distribución Exponencial

En el caso de que una distribución experimental pueda aproximarse por una distribución normal, exponencial, lognormal u otra función de distribución teórica, dicha distribución deberá tener como media y desviación típica la media y la desviación típica de la distribución empírica. Posteriormente veremos la manera de responder a la pregunta: ¿Siempre se ajusta una distribución experimental a una teórica?.

Si analizamos las tablas de frecuencia con las probabilidades, encontramos que la frecuencia relativa está asociada al concepto de probabilidad

Si un evento A se produce $n(A)$ veces en un experimento, la probabilidad del evento A es la frecuencia relativa de ocurrencia del evento, cuando el número de veces N que se realiza el experimento tiende a infinito, o sea

$$P(A) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n(A)}{N}$$

Asimismo si analizamos las frecuencias relativas acumuladas de cualquier función de distribución, siempre están en el rango $]0,1[$ y los números aleatorios también ocurren el mismo rango $]0,1[$ esta correspondencia univoca se utiliza para simular eventos a partir de números aleatorios que corresponden a la frecuencia relativa acumulada y calculando la función inversa de la función que representa dicha frecuencia relativa acumulada se obtiene el valor de la variable x que se quiere simular.

1.4 MÉTODOS DE GENERACIÓN DE NÚMEROS ALEATORIOS

Para simular un experimento cualquiera, como del lanzamiento de un dado legal, se tiene de contar con un método sencillo que nos proporcione o genere los números aleatorios, los cuales deben satisfacer las condiciones:

- a) Estar uniformemente distribuidos en el intervalo $]0,1[$
- b) Ser independientes entre sí.

GENERACIÓN DE NÚMEROS ALEATORIOS

Algunos métodos para la generación de números aleatorios son:

- 1) El método de los cuadrados del medio, debido a Von Neumann y Ulam.
- 2) Métodos congruenciales, desarrollados por Lehmer
 - I) Mixto.
 - II) Multiplicativo.

A continuación se muestran estos métodos.

1) MÉTODO DE LOS CUADRADOS DEL MEDIO

Este método consiste en generar aleatoriamente un número de cuatro dígitos, denominado la semilla, elevarlo al cuadrado y establecer una forma de tomar los cuatro números centrales del resultado de la exponenciación, ya sea quitando dos o un sólo dígito de cada extremo del resultado.

EJEMPLO 1. Sea la semilla $RND_0 = 4380$, (obtenida aleatoriamente con el procedimiento de “papelitos” o tarjetas numeradas del 0 al 9 cada una).

$(4380)^2 = 19\ 18\ 44\ 00$, por lo que al eliminar las cifras exteriores 19 y 00; tenemos que: $RND_1 = 1844$. Aplicamos iterativamente este procedimiento y tendremos:

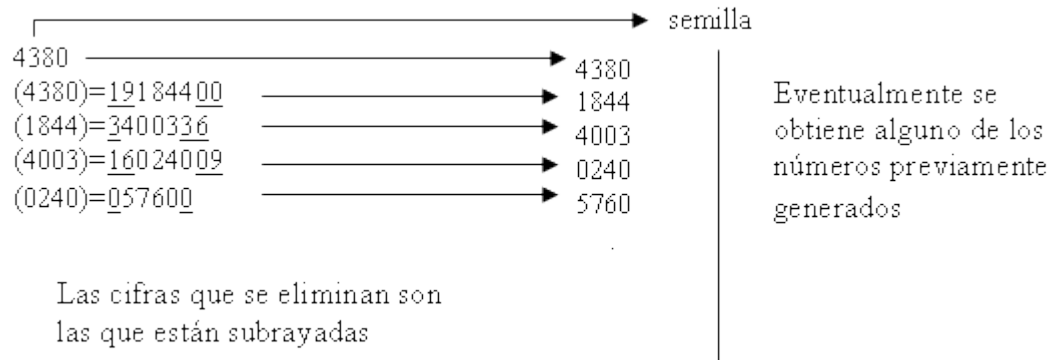
$(1844)^2 = 3400336$. Como esta es una cifra con un número impar de dígitos, establecemos el criterio de aumentar por la izquierda un cero (puede ser a la derecha), es decir, ahora tendremos: 03 40 03 36. Entonces, al eliminar a la izquierda la cifra 03 y a la derecha la cifra 36, tendremos: $RND_2 = 4003$;

$(4003)^2 = 16\ 02\ 40\ 09$, eliminando a la izquierda la cifra 16 y a la derecha la cifra 09, tenemos: $RND_3 = 0240$;

$(240)^2 = 57600$, entonces: 05 76 00. Aquí se elimina un solo dígito tanto a la izquierda como a la derecha, por lo que: $RND_4 = 5760$;

$(5760)^2 = 33\ 17\ 76\ 00$ $RND_5 = 1776$; y así sucesivamente hasta obtener el tamaño de muestra deseado, o bien hasta que el procedimiento se

degenere repitiendo una serie de números previamente generados. Si eventualmente se obtiene la semilla inicial, a la cantidad de números obtenida se le llama período del generador.



2) MÉTODOS CONGRUENCIALES

Los métodos congruenciales están basados en el álgebra de **congruencias**.

I) EL MÉTODO CONGRUENCIAL MIXTO

El método mixto tiene la siguiente ecuación de recurrencia:

$$X_{n+1} = (aX_n + c) \bmod m$$

donde

a = es la constante multiplicativa.

c = es la constante aditiva.

m = es la magnitud del módulo.

X₀ = es la semilla.

Los requisitos mínimos que estos parámetros deben satisfacer son:

$X_0, a, c, m \geq 0$; enteros y $m > a, m > c, m > X_0$

Aquí **mod** representa a la operación aritmética módulo entre los enteros a y b tal que el resultado de $(a \bmod b)$ es el residuo entero de la

división a entre b . Por ejemplo $16 \bmod 3$ es igual a 1, ya que $5 \times 3 + 1 = 15 + 1 = 16$. 1 residuo entero de la división ($16 \bmod 3$)

EJEMPLO 2. Sea el generador congruencial mixto

$$X_{n+1} = (5X_n + 7) \bmod 8$$

con $X_0 = 4$ (la semilla)

3 (División de 27/8)

$$X_1 = (5 \cdot 4 + 7) \bmod 8 = 27 \bmod 8 = 3; \text{RND1} = 0.375$$

3 (Residuo de 27/8)

2 (División de 22/8)

$$X_2 = (5 \cdot 3 + 7) \bmod 8 = 22 \bmod 8 = 6; \text{RND2} = 0.750$$

6 (Residuo de 22/8)

4

$$X_3 = (5 \cdot 6 + 7) \bmod 8 = 37 \bmod 8 = 5; \text{RND3} = 0.625$$

5

4

$$X_4 = (5 \cdot 5 + 7) \bmod 8 = 32 \bmod 8 = 0; \text{RND4} = 0.000$$

0

0

$$X_5 = (5 \cdot 0 + 7) \bmod 8 = 7 \bmod 8 = 7; \text{RND5} = 0.875$$

7

5

$$X_6 = (5 \cdot 7 + 7) \bmod 8 = 42 \bmod 8 = 2; \text{RND6} = 0.250$$

2

2

$$X7 = (5 \cdot 2 + 7) \bmod 8 = 17 \quad X7 = 1; \text{RND}7 = 0.125$$

1

1

$$X8 = (5 \cdot 1 + 7) \bmod 8 = 12 \quad X8 = 4; \text{RND}8 = 0.500$$

4

El valor de $X8 = 4$, es igual al de la semilla X_0 , por lo que la sucesión obtenida se repetirá.

En la siguiente tabla se muestran los resultados, obsérvese que X_i es el resultado de la operación módulo, mientras que RND_i es el correspondiente valor en decimales.

Tabla N° 2 Generador $X_{n+1} = (5X_n + 7) \bmod 8$

n	X_n	$(5X_n + 7)/8$	X_{n+1}	Números uniformes
0	4	$3 + 3/8$	3	$3/8$
1	3	$2 + 6/8$	6	$6/8$
2	6	$4 + 5/8$	5	$5/8$
3	5	$4 + 0/8$	0	0
4	0	$0 + 7/8$	7	$7/8$
5	7	$5 + 2/8$	2	$2/8$
6	2	$2 + 1/8$	1	$1/8$
7	1	$1 + 4/8$	4	$4/8$

La selección adecuada de los parámetros para un generador congruencialmixto, se basa en el siguiente teorema, debido a HULL-DODELL:

“el generador congruencial mixto tiene periodo completo si y sólo si:

- a) El número entero positivo que divide (exactamente) a a y m , es 1 (lo que significa que c es relativamente primo a m).
- b) Si q es un número primo que divide a m , entonces, q divide a $(a-1)$.
- c) Si 4 divide a m , entonces 4 divide a $(a-1)$ ”.

SELECCIÓN DE LOS PARÁMETROS DEL GENERADOR CONGRUENCIAL MIXTO

SELECCIÓN DE m . Seleccionar m de modo que sea el número primo más grande posible y que a su vez sea menor que p , donde:

p es la base del sistema binario y

d es el número de bits de la palabra de la computadora. Por ejemplo 2^{31} .

SELECCION DE a . Preferentemente selecciónese a a de tal manera que

I) $(a-1) \bmod 4 = 0$, si 4 es un factor de m .

II) $(a-1) \bmod b = 0$, si b es un factor primo de m .

Usualmente, el valor de a se toma como $a = 2^k + 1$; $k \geq 2$

SELECCION DE c . Es recomendable escoger c tal que $c \bmod 8 = 5$

SELECCION DE X_0 . La selección de X_0 es irrelevante.

Algunos parámetros que se utilizaron en diferentes máquinas son

UNIVAC:	$a = 515$ $c = 1$ $m = 2^{35}$	IBM:	$a = 314$ $c = 453$ $m = 2^{31}$
VAX:	$a = 269$ $c = 245$ $m = 2^{31}$	DEC:	$a = 159$ $c = 806$ $m = 2^{31}$

II) MÉTODO CONGRUENCIAL MULTIPLICATIVO:

Este método tiene la ecuación congruencial de recurrencia

donde

$$X_{n+1} = (aX_n) \bmod m$$

$a =$ es la constante multiplicativa.

$m =$ es la magnitud del módulo.

$X_0 =$ es la semilla.

los requisitos mínimos que deben satisfacer los parámetros son
 $X_0, a, m > 0$; enteros y $m > a, m > X_0$

EJEMPLO 3. Desarrollar cinco iteraciones del generador $X_{n+1} = 3X_n \text{ mod } 100$, con $X_0=51$.

X_n	RND
51	0.51
53	0.53
59	0.59
77	0.77
31	0.31

SELECCIÓN DE LOS PARÁMETROS DEL GENERADOR CONGRUENCIAL MULTIPLICATIVO

SELECCION DE a . Debe seleccionarse el valor de a de la forma siguiente:

$a = 8t \pm 3$ donde t es cualquier entero positivo.

SELECCION DE m . Este valor se selecciona de tal manera que: $m = 2^d$,

donde d es el número de bits de la palabra de la computadora.

SELECCION DE X_0 . Tómese X_0 impar, relativamente primo a m .

A continuación damos los parámetros para dos casos especiales que ya han sido probados para este generador (Varela, Kelton respectivamente).

$$\begin{aligned} \alpha &= 100\ 003 \\ m &= 10^{10} \\ \text{semilla} &= 123\ 456 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha &= 7^5 \\ m &= 2^{31} - 1 \\ \text{semilla} &= \text{pueden ser } 100, 1000, 10000 \text{ y } \\ &100000. \end{aligned}$$

1.5 LA FUNCIÓN INVERSA

1.5.1 Dada una función $f(x)$, su inversa es otra función, designada por

$f^{-1}(x)$ de forma que se verifica: si $f(a) = b$, entonces $f^{-1}(b) = a$

Pasos a seguir para determinar la función inversa de una dada:

Despejar la variable independiente x .

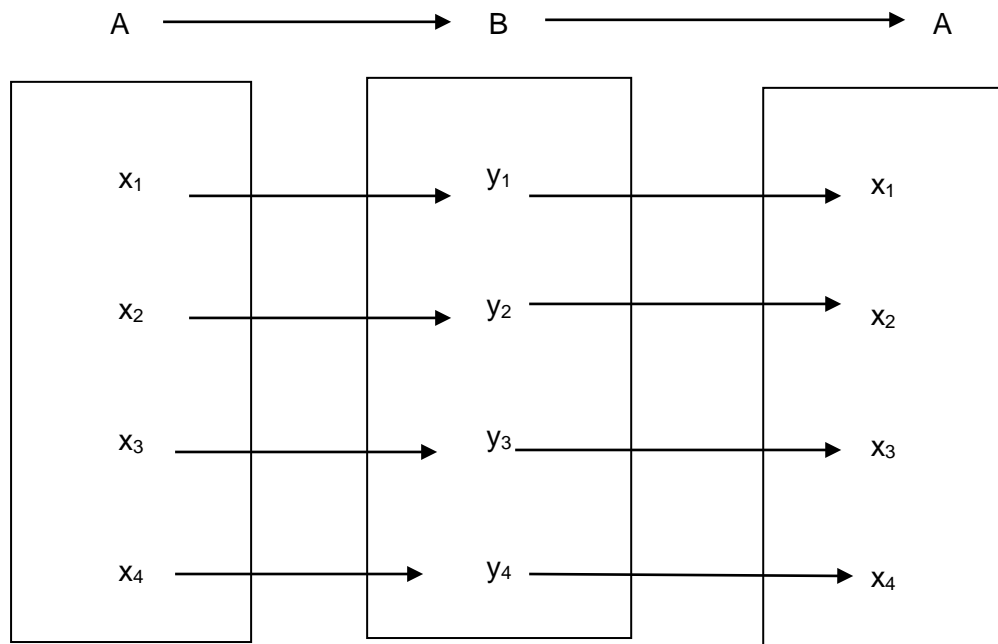
Intercambiar la x por la y , y la y por la x .

La función así obtenida es la inversa de la función dada.

Las gráficas de dos funciones inversas son simétricas respecto de la bisectriz del 1.er cuadrante y del 3.er cuadrante.

El concepto de función inversa está asociado al cambio de roles que experimentan el primero y el segundo conjunto de una función. Es decir, la conversión del rango de una función f , es el dominio de su inversa; además, el dominio de este tomará en su inversa el rol de rango, la asociación elemento; a consecuencia de lo anterior, también invierte su rol. Así, si para una función f la imagen del argumento x es y entonces para la inversa de f , el argumento será ahora y , y su imagen asociada será x .

fg



En la figura se ejemplifica lo anterior; observa que:

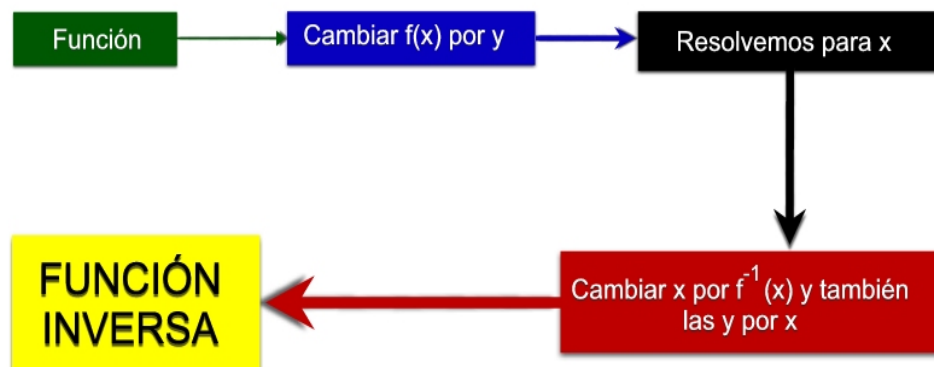
1. f es una función con dominio A y Rango B. Es decir, $f: A \rightarrow B$.
2. g es una función con dominio B y rango A. O sea, $g: B \rightarrow A$.
3. Toda x del conjunto A y y del conjunto B, se asocian de tal manera que:

$$3.1 \quad y = f(x)$$

$$3.2 \quad x = g(y)$$

Si todo esto ocurre, entonces la función g es inversa de la función f .

Funciones inversas



Ejemplo: Sea $f(x) = x^2 - 1$, con dominio en todos los números reales positivos y el cero, hallar $f^{-1}(x)$

Respuesta:

Si $y = x^2 - 1$, entonces, despejando x :

$x = \pm \sqrt{y+1}$. La función inversa tiene dos posibilidades aquí:

$x = \sqrt{y+1}$, o $x = -\sqrt{y+1}$. Ahora, como el dominio indica para la variable x números positivos y el cero, vemos que esto último se verifica para la primera posibilidad. Así, la función inversa f^{-1} es:

$$\mathbf{x = f^{-1}(y) = \sqrt{y+1}, \text{ o } f^{-1}(x) = \sqrt{x+1}}$$

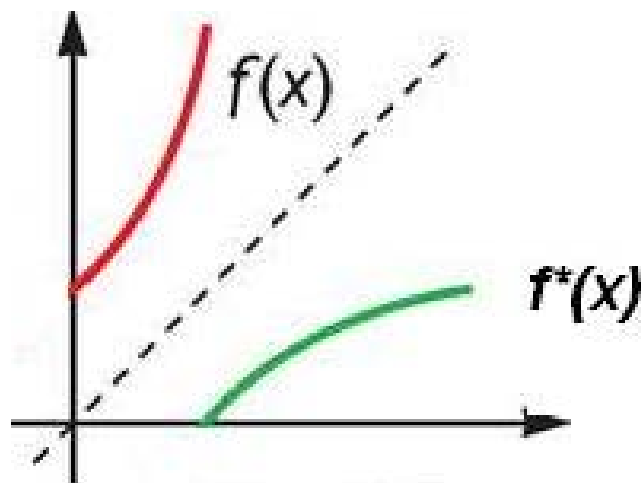


Figura 1-5-1 GRAFICO DE LA FUNCION INVERSA

1.6 MÉTODO DE INTERPOLACIÓN DE LAGRANGE

1.6.0 ANTECEDENTES

¿Pueden ajustarse tres o cinco datos por medio de una curva?

Uno de los métodos fundamentales para encontrar una función que pase a través de los datos dados es usar un polinomio. (ver fig. N° 1.6.1)

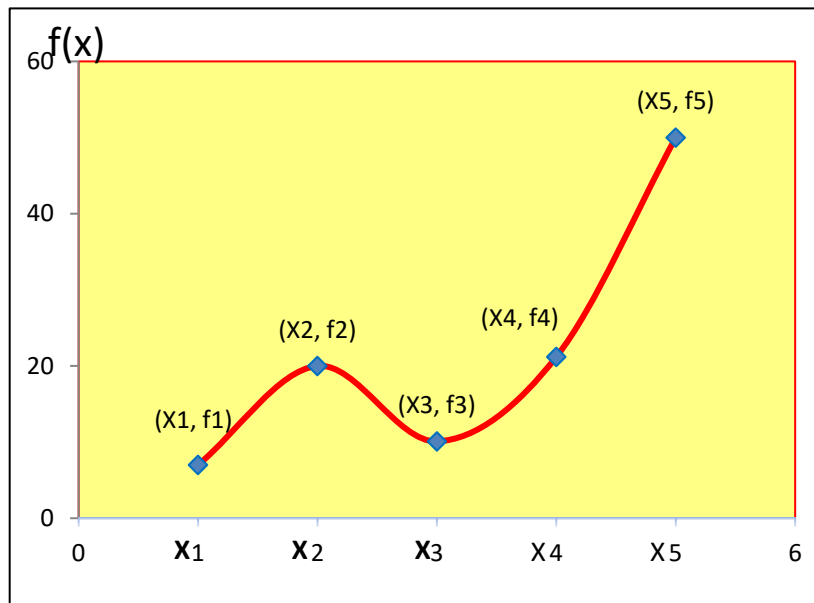


Fig. 1.6.1 Datos ajustados a un polinomio

Un polinomio de orden N que pasa a través de $N + 1$ puntos es único. Significa que independientemente de la fórmula de interpolación, todas las interpolaciones polinomiales que se ajustan a los mismos datos son matemáticamente idénticas.

Supongamos que se tiene $N+ 1$ puntos(datos experimentales) como se muestra en la tabla N° 1.6.1.

Tabla N° 1.6.1 Datos experimentales

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	...			x_N
f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	...			f_N

Donde $x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_N$ son las abscisas de los puntos dados en orden creciente. Los intervalos entre los puntos $x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_N$ son arbitrarios. El polinomio de orden N que pasa por los $N+1$ puntos se puede escribir en una serie de potencias como.

$$g(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_Nx^N \quad (1.6.1)$$

Donde los a_i son los coeficientes. El ajuste de la serie de potencias a los $N+1$ puntos dados da el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} f_0 = a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + a_3x_0^3 + \dots + a_Nx_0^N \\ f_1 = a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + a_3x_1^3 + \dots + a_Nx_1^N \\ \vdots \\ f_N = a_0 + a_1x_N + a_2x_N^2 + a_3x_N^3 + \dots + a_Nx_N^N \end{cases}$$

Ec. (1.6.2)

Estos métodos de aproximación polinomial, requiere la solución de un sistema de ecuaciones algebraicas lineales que cuando el grado N del polinomio es alto puede presentar inconvenientes de cálculo y de errores de redondeo.

Por fortuna existen mejores métodos para determinar la interpolación polinomial sin resolver el sistema de ecuaciones lineales; Entre éstos

está la fórmula de interpolación de Lagrange y la fórmula de interpolación de Newton hacia adelante y hacia atrás.

1.6.1 LA FÓRMULA DE INTERPOLACION DE LAGRANGE

El método de interpolación de polinomios de Lagrange consiste en lo siguiente: Se parte de una función desconocida $f(x)$ dada en forma tabular (ver tabla 1.6.2)

Tabla N° 1.6.2 Función desconocida dada en forma tabular

PUNTOS	x_i	$f(x_i)$
0	x_1	$f(x_1)$
1	x_2	$f(x_2)$
2	x_2	$f(x_2)$
.	.	.
.	.	.
.	.	.
N	x_N	$f(x_N)$

Si se aproxima a un polinomio de primer grado (la ecuación es de una línea recta), puede escribirse de la siguiente manera:

$$p(x) = a_0(x - x_1) + a_1(x - x_0) \quad (1.6.3)$$

Donde x_0, x_1 son las abscisas de los puntos conocidos dados en la tabla N° 1.6.2 que corresponde a los siguientes pares ordenados:

$(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1))$ y a_0 y a_1 son los coeficientes a determinar

Haciendo $x = x_0$ la ecuación 1.6.3 se transforma en:

$$p(x_0) = f(x_0) = a_0(x_0 - x_1) + a_1(x_0 - x_0)$$

$$a_0 = \frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1)}$$

Para hallar x_1 se sustituye $x = x_1$ y se tiene

$$a_1 = \frac{f(x_1)}{(x_1 - x_0)}$$

De ese mismo modo ya se tiene definido el polinomio $p(x)$

$$p(x) = \frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1)}(x - x_1) + \frac{f(x_1)}{(x_1 - x_0)}(x - x_0)$$

O en forma más compacta

$$p(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) \quad (1.6.4)$$

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \quad ; \quad L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

Si se aproxima a un polinomio de segundo grado (ecuación de una parábola), se puede escribir de la siguiente manera:

$$p_2(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2) + a_1(x - x_0)(x - x_2) + a_2(x - x_0)(x - x_1) \quad (1.6.5)$$

Donde x_0, x_1, x_2 son abscisas de los puntos "experimentales" conocidos: $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2))$. Los valores a_0, a_1, a_2 se encuentran sustituyendo $x = x_0, x = x_1, x = x_2$, respectivamente en la ecuación (1.6.5)

$$a_0 = \frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1)(x_1 - x_2)}$$

$$a_1 = \frac{f(x_1)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}$$

$$a_2 = \frac{f(x_2)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

Cuyo reemplazo en dicha ecuación genera el siguiente polinomio

$$p_2(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + L_2(x)f(x_2)$$

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

Por inducción matemática se puede obtener el polinomio de n-ésimo grado y queda indicado como sigue:

$$p_n(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + L_2(x)f(x_2) + \dots + L_n(x)f(x_n)$$

(1.6.6)

Donde:

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \dots (x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3) \dots (x_0 - x_n)}$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3) \dots (x - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \dots (x_1 - x_n)}$$

...

$$L_n(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3) \dots (x - x_n)}{(x_n - x_0)(x_n - x_1)(x_n - x_3) \dots (x_n - x_{n-1})}$$

(1.6.7)

Que en forma más compacta y útil para programarse por cualquier lenguaje de programación quedaría de la siguiente manera:

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^n L_i(x)f(x_i)$$

(1.6.8)

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

(1.6.9)

Al combinarse linealmente con $f(x_i)$, se obtiene los polinomios $L_i(x)$, denominados polinomios de Lagrange de la información dada en forma tabular.

1.6.2 Ejemplo numérico

Se tiene la información tabular mostrada a continuación

i	0	1	2	3
x_i	0	1	3	6
$f(x_i)$	-3	0	5	7

- Obtener el polinomio de aproximación de Lagrange con todos los puntos.
- Interpole el valor de la función $f(x)$ para $x = 1.8$

Solución

- Observamos que hay cuatro puntos en la tabla; por lo tanto, el polinomio será de tercer grado. Al sustituir los cuatro puntos en las ecuaciones (1.6.8) y (1.6.9) se obtiene:

$$\begin{aligned}
P_3(x) &= \frac{(x-1)(x-3)(x-6)}{(0-1)(0-3)(0-6)}(-3) + \frac{(x-0)(x-3)(x-6)}{(1-0)(1-3)(1-6)}(0) \\
&\quad + \frac{(x-0)(x-1)(x-6)}{(3-0)(3-1)(3-6)}(5) + \frac{(x-0)(x-1)(x-3)}{(6-0)(6-1)(6-3)}(7) \\
P_3(x) &= \frac{(x^3 - 10x^2 + 27x - 18)}{(-18)}(-3) + \frac{(x^3 - 9x^2 + 18x)}{(10)}(0) \\
&\quad + \frac{(x^3 - 7x^2 + 6x)}{(-18)}(5) + \frac{(x^3 - 4x^2 + 3x)}{(90)}(7)
\end{aligned}$$

Finalmente resulta el siguiente polinomio de Lagrange de tercer grado

$$P_3(x) = -\frac{3}{90}x^3 - \frac{3}{90}x^2 + \frac{276}{90}x - 3$$

b) El valor de $f(x)$ para $x=1.8$ es:

$$P_3(1.8) = -\frac{3}{90}1.8^3 - \frac{3}{90}1.8^2 + \frac{276}{90}1.8 - 3 = 2.2176$$

1.7 SIMULACIÓN: MÉTODO DE LA TRANSFORMADA INVERSA

1.7.1 DEFINICION

El método de la transformada inversa utiliza la distribución acumulada $F(x)$ de la distribución que se va a simular. Como $F(x)$ está definida en el intervalo $]0,1[$, se puede generar un número aleatorio uniforme R y tratar de determinar el valor de la variable aleatoria para lo cual su distribución acumulada es igual a R , es decir, el valor simulado de la variable aleatoria que sigue una distribución de probabilidad $f(x)$, se determina al resolver la ecuación: $F(x) = R$ o $x = F^{-1}(R)$ (ver figura 1.7.1)

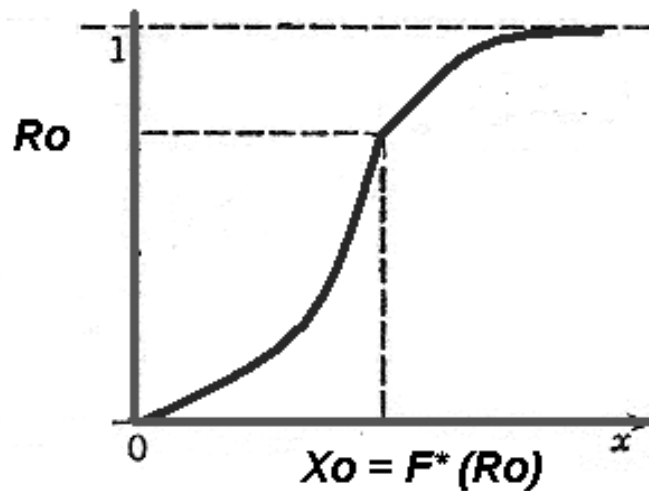


Figura 1.7.1 Forma gráfica del método de la transformada inversa

La dificultad principal de este método está en que en algunas ocasiones es difícil encontrar la transformada inversa. Sin embargo si esta función inversa se logra establecer de cualquier manera, generando números aleatorios uniformes se podrán obtener valores de la variable aleatoria que sigan la distribución de probabilidad deseada.

1.7.2 TRANSFORMADA INVERSA DE LA DISTRIBUCION EXPONENCIAL

Se desea generar números aleatorios que sigan la distribución de probabilidad exponencial.

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{Si } x \geq 0 \\ 0 & \text{Si } x < 0 \end{cases}$$

La distribución acumulada de esta distribución es:

$$R = F(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{-\lambda x}$$

Como $x = F^{-1}(R)$ obtenemos:

$$1 - e^{-\lambda t} = R$$

$$e^{-\lambda t} = 1 - R$$

Pero si R sigue una distribución uniforme, entonces 1-R también sigue esta distribución. Por lo tanto

$$e^{-\lambda t} = R$$

$$x = \frac{1}{\lambda} \ln R$$

La función inversa de la acumulada de la distribución exponencial con $\lambda=1$ se muestra en la siguiente tabla

R	(1-LNR)
0.0000	0.0000
0.1000	0.1054
0.2000	0.2231
0.3000	0.3567
0.4000	0.5108
0.5000	0.6931
0.6000	0.9163
0.7000	1.2040
0.7500	1.3863
0.8000	1.6094
0.8400	1.8326
0.8800	2.1203
0.9000	2.3026
0.9200	2.5257
0.9400	2.8134
0.9500	2.9957
0.9600	3.2189
0.9700	3.5066
0.9800	3.9120
0.9900	4.6052
0.9950	5.2983
0.9980	6.2146
0.9990	6.9078
0.9998	8.5172

Tabla N° 1-7-2 Simulación de la distribución exponencial aplicando el método de transformada inversa

Los valores aleatorios simulados se muestran en la siguiente tabla

SIMULACION ALEATORIA DE LA FUNCION EXPONENCIAL APLICANDO LA FUNCION INVERSA							
R	X		R	X		R	X
0.58757	0.9163		0.83123	1.8326		0.09705	0.1054
0.58193	0.9163		0.67079	1.2040		0.69055	1.2040
0.92470	2.8134		0.03370	0.1054		0.03814	0.1054
0.53070	0.9163		0.78111	1.6094		0.01402	0.1054
0.06436	0.1054		0.12854	0.2231		0.89251	2.3026
0.09829	0.1054		0.81912	1.8326		0.07782	0.1054
0.74927	1.3863		0.08323	0.1054		0.07207	0.1054
0.52574	0.9163		0.81296	1.8326		0.73618	1.3863
0.19531	0.2231		0.75674	1.6094		0.73246	1.3863
0.59266	0.9163		0.13604	0.2231		0.33060	0.5108
0.74583	1.3863		0.04565	0.1054		0.74998	1.3863
0.72094	1.3863		0.14672	0.2231		0.45879	0.6931
0.46085	0.6931		0.77213	1.6094		0.50644	0.9163
0.80531	1.8326		0.41147	0.6931		0.67180	1.2040
0.79487	1.6094		0.62942	1.2040		0.22042	0.3567
0.03088	0.1054		0.88676	2.3026		0.91610	2.5257
0.97751	3.9120		0.80592	1.8326		0.03812	0.1054
0.90450	2.5257		0.22340	0.3567		0.45652	0.6931
0.45530	0.6931		0.76334	1.6094		0.07243	0.1054
0.57088	0.9163		0.06583	0.1054		0.74429	1.3863
0.43401	0.6931		0.54033	0.9163		0.87243	2.1203
0.12242	0.2231		0.12974	0.2231		0.35571	0.5108
0.01821	0.1054		0.05210	0.1054		0.44856	0.6931
0.58642	0.91629		0.21368	0.3567		0.29391	0.3567
0.78565	1.60944		0.54221	0.9163		0.05217	0.1054
0.26796	0.35667		0.63628	1.2040		0.33826	0.51083
						0.08723	0.1054

Tabla N° 1-7-2 Resultados de Simulación de la distribución exponencial aplicando el método de transformada inversa

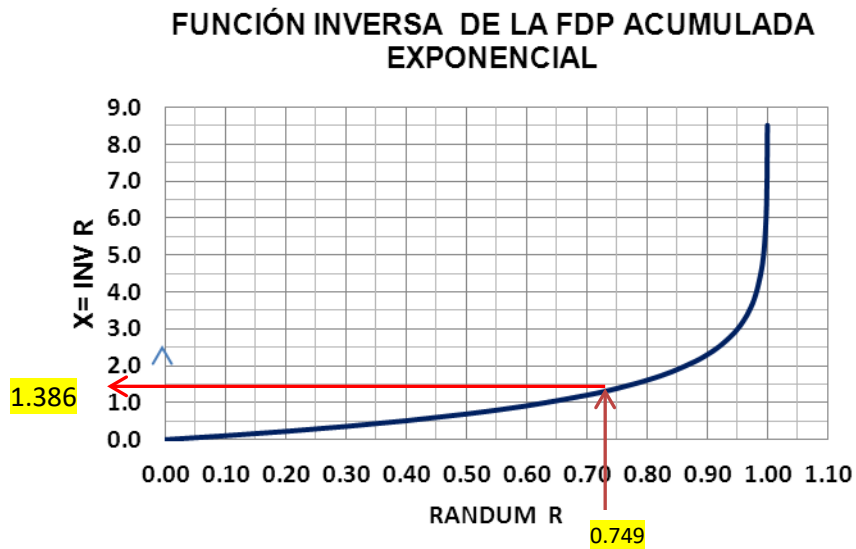


Figura 1-7-1 Grafico mostrando la simulación de una v.a. exponencial

Para un valor $R = 0.749$ corresponde el valor de la variable aleatoria $x = 1.386$ con distribución exponencial. El histograma de los valores exponenciales simulados se muestra en el siguiente gráfico.

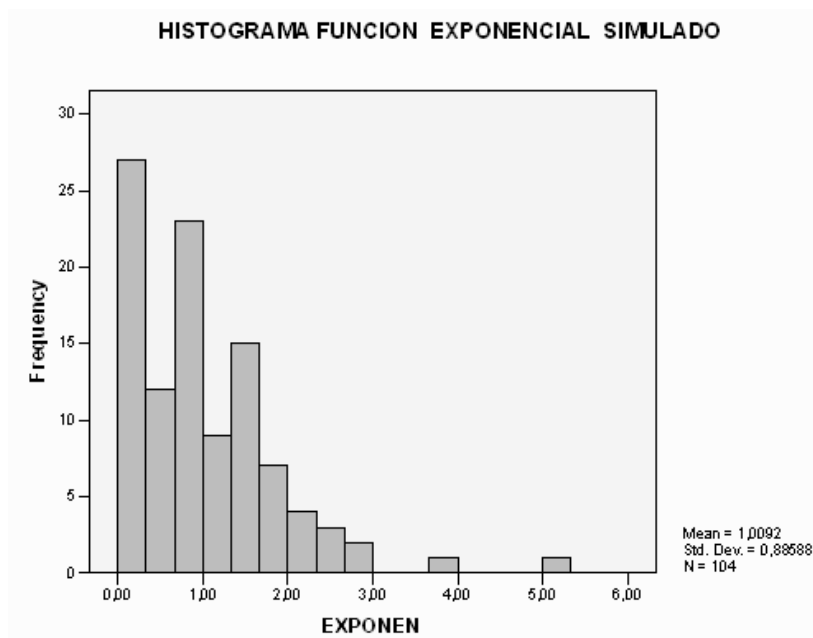


Figura 1-7-2 Grafico mostrando histograma de v.a. exponenciales simulados

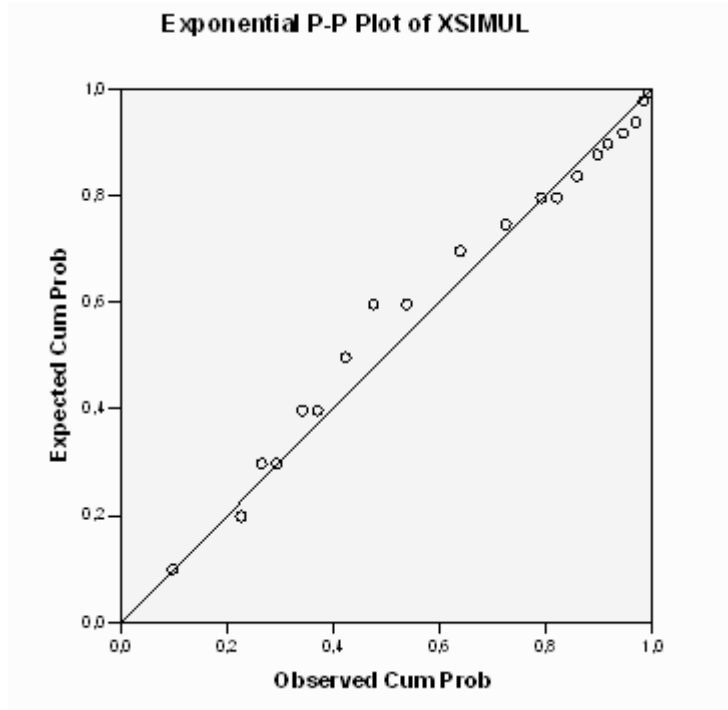


Figura 1-7-3 Grafico mostrando PP-PLOT de v.a. exponenciales simulados y esperados

En el gráfico P-P Plot anterior se verifica que los datos simulados si siguen una ley de distribución exponencial.

1.7.3 DISTRIBUCION EXPERIMENTAL

En la práctica, siempre tenemos la dificultad de encontrar la función de distribución que se ajuste a nuestros datos experimentales. Ocurre frecuentemente que nuestro histograma experimental no se ajusta a ninguna de las funciones teóricas conocidas. Muchos Ingenieros y analistas, frente a esta dificultad, insisten en modelar su histograma experimental a una función teórica. Aquí olvidan que están ante un error

y que sus conclusiones podrían estar sesgadas. Porque su realidad , su proceso, su mina lo están forzando al modelo.

Cuando una información histórica va a ser usado como pronóstico y para planeamiento a largo plazo tiene que ser medida evaluada y analizada con mucho cuidado teniendo en cuenta su naturaleza.

Según la opinión de expertos en planeamiento, la mejor data para el cálculo de índices de rendimiento de equipos y de productividad en las minas, es tomar un cronómetro y registrar los tiempos reales de cada actividad en cada operación minera unitaria. Por eso para el proceso de simulación necesitamos conocer los histogramas experimentales de cada actividad que interviene en el proceso que se va a simular.

1.8 SIMULACIÓN: MÉTODO DEL TEOREMA DEL LÍMITE CENTRAL

1.8.1 TEOREMA DEL LIMITE CENTRAL

Si $\{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, \dots, r_K\}$ representan variables aleatorias independientes cada uno de las cuales tiene la misma distribución de probabilidad caracterizada por $E(r_i) = \theta$ y $Var(r_i) = \sigma^2$, entonces la nueva variable $y_i = \sum_{i=1}^K r_i$ tiene esperanza y varianza correspondiente:

$$E\left(\sum_{i=1}^K r_i\right) = K\theta$$

$$\text{Var}\left(\sum_{i=1}^K r_i\right) = K\sigma^2$$

A medida que K se hace grande $\sum_{i=1}^K r_i$ tiende a seguir la distribución normal.

$$z = \frac{\sum_{i=1}^K r_i - K\theta}{\sigma\sqrt{K}}$$

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \text{P}\left[a < \frac{\sum_{i=1}^K r_i - K\theta}{\sigma\sqrt{K}} < b\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

1.8.2 SIMULACION DE LA DISTRIBUCION NORMAL APLICANDO TEOREMA DEL LÍMITE CENTRAL

Para simular una distribución normal con media μ_x y varianza σ^2

Se aplica el teorema del límite central

$$\frac{\sum_{i=1}^K r_i - K\theta}{\sigma\sqrt{K}} = \frac{x - \mu_x}{\sigma_x}$$

Es importante resaltar que r_i puede tener cualquier distribución de probabilidad. Si en este caso utilizamos K valores aleatorios distribuidos uniformemente entre]0,1[$a=0$ y $b=1$. Entonces se tiene:

$$\theta = \frac{a+b}{2} = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\sigma = \frac{b-a}{\sqrt{12}} = \frac{1}{\sqrt{12}}$$

$$\frac{\sum_{i=1}^K r_i - \frac{K}{2}}{\sqrt{\frac{K}{12}}} = \frac{x - \mu_x}{\sigma_x}$$

Resolviendo se tiene $x = \mu_x + \sigma_x \left(\frac{12}{K}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^K r_i - \frac{K}{2}\right)$ si $K=12$ se obtiene la fórmula de Naylor $x = \mu_x + \sigma_x (\sum_{i=1}^{12} r_i - 6)$ Este proceso se repite N veces y se obtiene N valores de variable aleatoria normal simulada.

1.8.3 SIMULACION DE LA DISTRIBUCION LOGNORMAL APLICANDO EL TEOREMA DEL LIMITE CENTRAL

Una variable x tiene una distribución logaritmo normal si cuando solamente se consideran los valores positivos de x , el logaritmo natural de la variable aleatoria x ($y = \ln x$) tiene una función de densidad $f(y)$ dada como sigue:

$$f(x) = \frac{1}{\beta\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x - \alpha}{\beta}\right)^2}$$

$$\text{Donde } \alpha = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \ln x_i$$

$$\beta^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\ln x_i - \alpha)^2$$

$$\beta = \sqrt{\ln\left(\frac{\sigma_x^2}{\mu_x^2} + 1\right)}$$

$$\alpha = \ln \mu_x - \frac{1}{2} \ln\left(\frac{\sigma_x^2}{\mu_x^2} + 1\right)$$

Por lo tanto para simular un valor aleatorio lognormal con media μ_x y varianza σ_x se procede de la siguiente manera.

$$x = e^{\alpha + \beta \left(\frac{12}{K}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^K r_i - \frac{K}{2}\right)}$$

El valor de K puede ser 12, 20, 100,1000 dependiendo del grado de aproximación que se desea obtener.

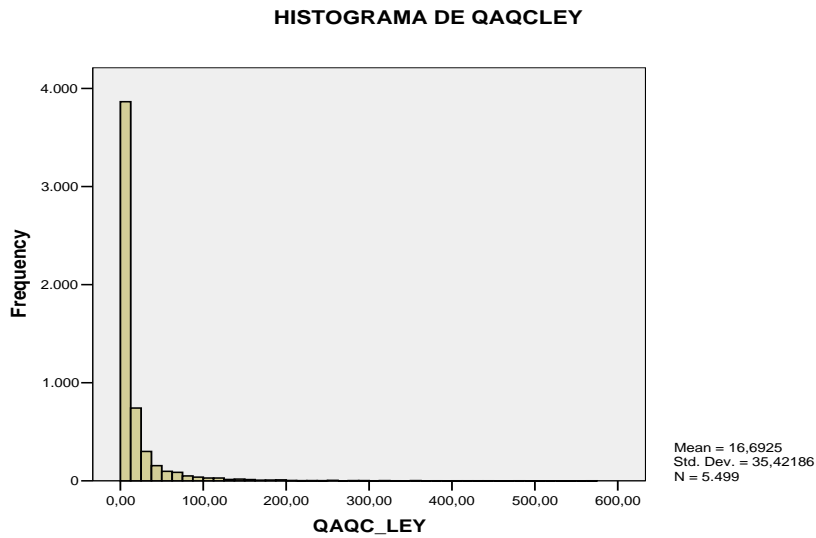


Figura 1-8-3-1 Histograma de leyes de aseguramiento y control de calidad

La variable x tiene una distribución log normal $\mu_x = 16.6925$

$\sigma_x = 35.42186$ y tomando los logaritmos naturales de cada valor x se tiene el siguiente histograma gaussiano de los logaritmos. Por eso se llama lognormal.

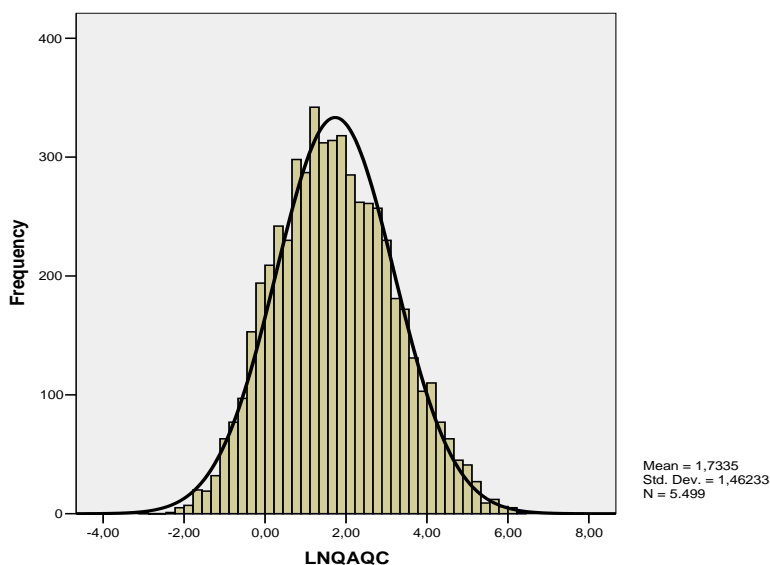


Figura 8-3--2 Histograma de los logaritmos de las leyes de aseguramiento y control de calidad

1.9 SIMULACIÓN: MÉTODO DE MONTECARLO

1.9.1 HISTORIA DEL METODO MONTECARLO

El método fue llamado así por el principado de Mónaco por ser "la capital del juego de azar", al tomar una ruleta como un generador simple de números aleatorios. El nombre y el desarrollo sistemático de los métodos de Monte Carlo data aproximadamente de 1944 con el desarrollo de la computadora electrónica. Sin embargo hay varias instancias (aisladas y no desarrolladas) en muchas ocasiones anteriores a 1944.

El uso real de los métodos de Monte Carlo como una herramienta de investigación, viene del trabajo de la bomba atómica durante la Segunda Guerra Mundial. Este trabajo involucraba la simulación directa de problemas probabilísticos de hidrodinámica concernientes a la difusión de neutrones aleatorios en material de fusión.

Aún en la primera etapa de estas investigaciones, John von Neumann y Stanislaw Ulam refinaron esta curiosa "Ruleta rusa" y los métodos "de división". Sin embargo, el desarrollo sistemático de estas ideas tuvo que esperar el trabajo de Harris y Herman Kahn en 1948. Aproximadamente en el mismo año, Fermi, Metropolis y Ulam obtuvieron estimadores para los valores característicos de la ecuación de Schrödinger para la captura de neutrones a nivel nuclear.

1.9.2 DESCRIPCION DEL METODO MONTECARLO

Una de las técnicas estadísticas más usadas en simulación es el método de Monte Carlo. Según Naylor, el método Monte Carlo es una técnica de simulación para problemas que tienen una base estocástica o probabilística. Existen dos tipos diferentes de problemas que dan lugar al empleo de esta técnica; primero, aquellos problemas que implican algún tipo de proceso estocástico como la demanda del consumidor y la prioridad en la producción e inversión total para la expansión de plantas industriales; segundo, ciertos problemas matemáticos completamente determinísticos, que no pueden resolverse fácilmente (si es que admiten solución) por métodos estrictamente determinísticos, por ejemplo, evaluar integrales. En este texto nos dedicaremos al caso probabilístico.

A continuación se describe el método Monte Carlo:

1. Identificar el experimento o sistema a simular.
2. Identificar el espacio muestral y definir la variable aleatoria.
3. Definir la función de probabilidad.
4. Construir la función acumulada de probabilidad.
5. Calcular o construir la tabla de la transformación inversa de la función acumulada de probabilidad. La transformación inversa utiliza la función acumulada de probabilidad de la variable aleatoria que se va a simular. Puesto que la función acumulada está definida en el intervalo $]0,1[$, se puede generar un número aleatorio uniforme en $]0,1[$ RND, y tratar de determinar el valor de la variable aleatoria para la cual su distribución acumulada es igual al valor de RND.

6. Generar un número aleatorio y ubicarlo en la tabla de transformada inversa para simular un valor específico de la variable aleatoria.

En general, un modelo de simulación requiere de:

1. La definición del sistema con sus variables, parámetros, funciones de probabilidad, relaciones funcionales y medidas de efectividad.
2. La definición del estado del sistema, es decir, el establecimiento de las condiciones iniciales de operación.
3. La identificación de los posibles estados del sistema y sus componentes que pueden ocurrir.
4. La previsión de los posibles eventos que pueden cambiar el estado del sistema y de sus componentes.
5. La disponibilidad de un mecanismo que mida el transcurso del tiempo de simulación: el **tiempo reloj** (clock).
6. Procedimientos para la generación aleatoria de los diversos eventos.
7. Las relaciones lógicas que enlazarán transiciones de estado que son generadas por los diversos eventos que ocurren.

1.9.3 EJEMPLO DE LA SIMULACION MONTECARLO

Como ejemplo metodológico, suponer que se está analizando la función efectividad de algún sistema que se representa por la siguiente relación:

$$W = 5X + 2Y + Z$$

Donde las variables X, Y, y Z están descritas por las distribuciones de probabilidad mostradas en las siguientes figuras y tablas.

TABLAS DE FRECUENCIAS DE LA VARIABLE X

X	P(X)
0	0.10
1	0.20
2	0.25
3	0.25
4	0.15
5	0.05

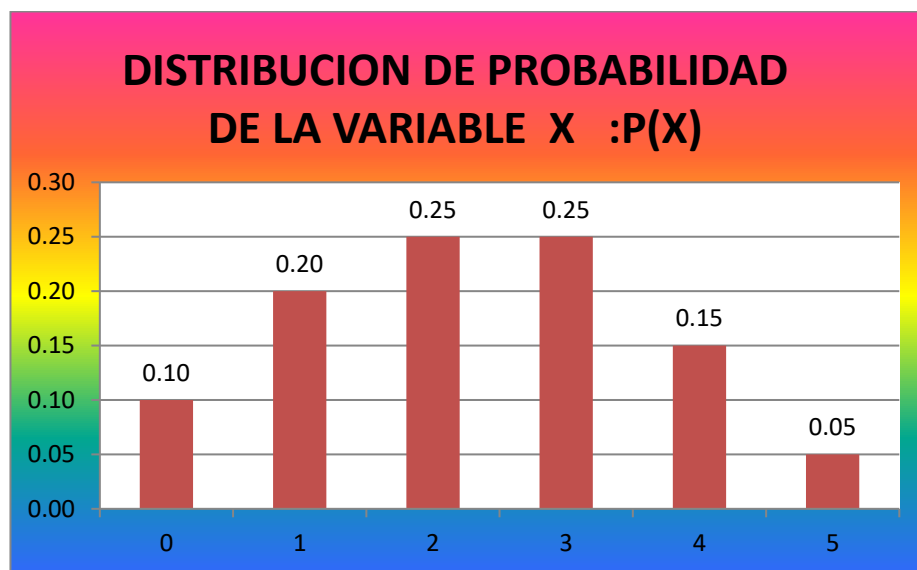


Figura N° HISTOGRAMA EXPERIMENTAL DE LA VARIABLE X

TABLA DE FRECUENCIAS DE LA VARIABLE Y

y	P(y)
2	0.25
3	0.30
4	0.25
5	0.20

HISTOGRAMA EXPERIMENTAL DE LA VARIABLE Y

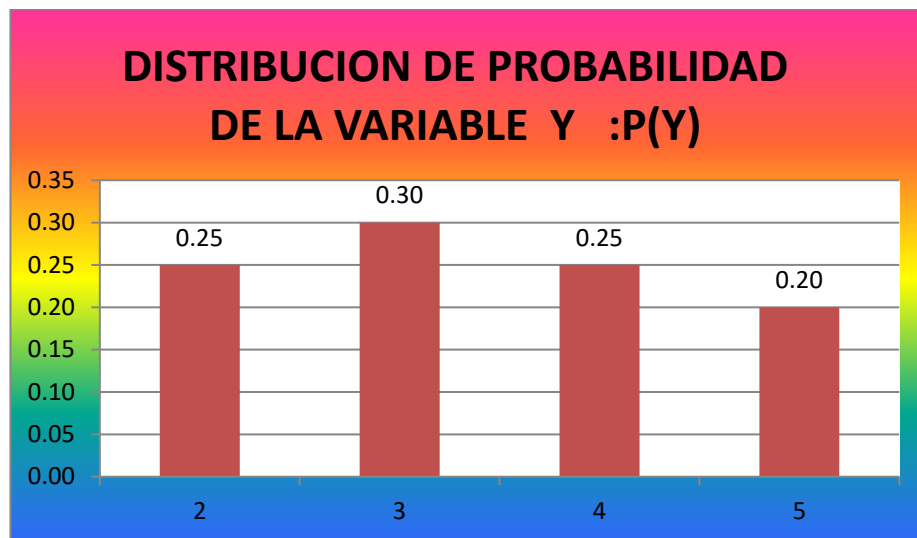
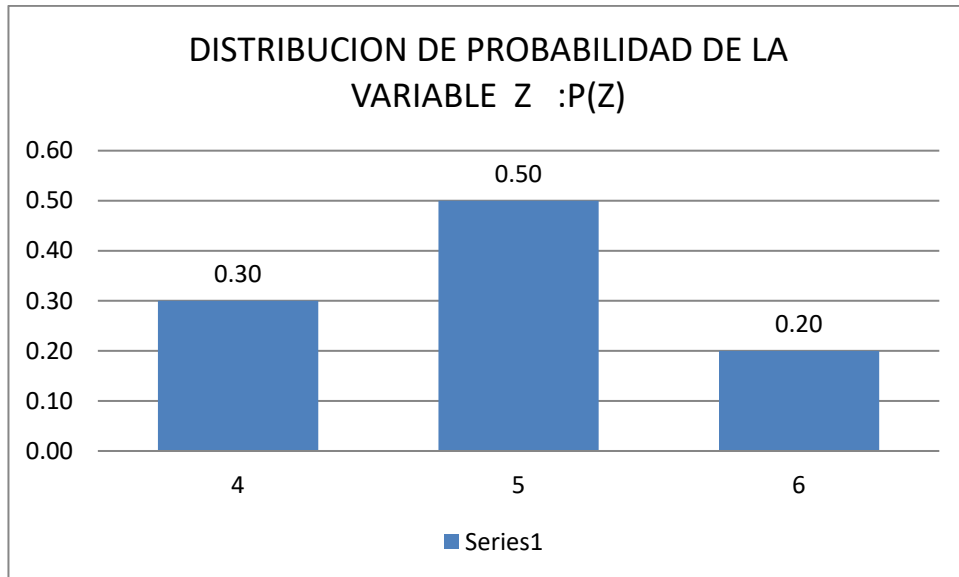


TABLA DE FRECUENCIAS DE LA VARIABLE Z

Z	P(Z)
4	0.30
5	0.50
6	0.20

HISTOGRAMA EXPERIMENTAL DE LA VARIABLE Z



Determinar mediante simulación, la distribución de efectividad

SOLUCIÓN

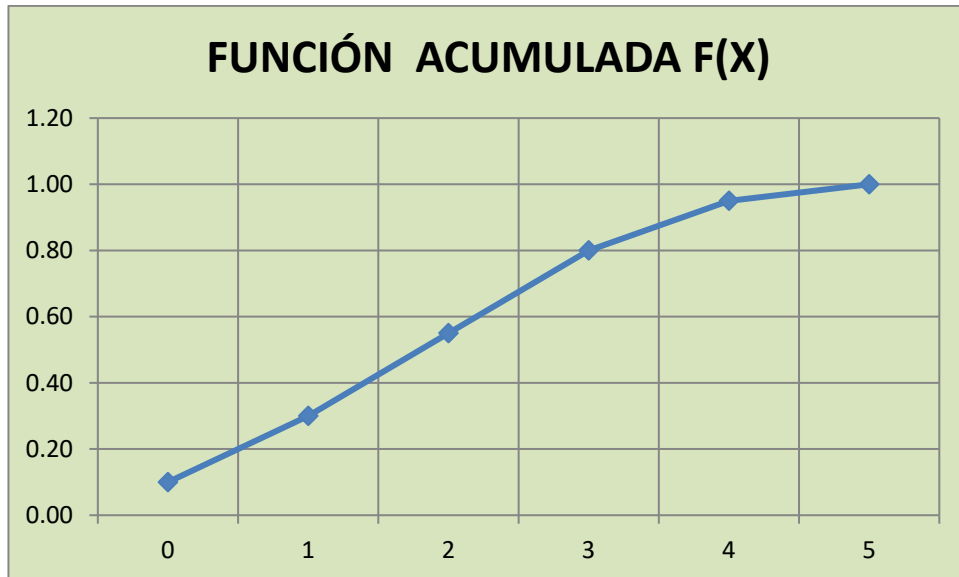
En primer lugar se construye la Función de distribución acumulada de cada variable y luego se asigno los números índices.

VARIABLE X

TABLA DE FRECUENCIAS ACUMULADA DE LA VARIABLE X

X	P(X)	F(X)
0	0.10	0.10
1	0.20	0.30
2	0.25	0.55
3	0.25	0.80
4	0.15	0.95
5	0.05	1.00

HISTOGRAMA DE FRECUENCIA ACUMULADA DE LA VARIABLE X



ASIGNACION DE NÚMEROS INDICES PARA LA VARIABLE X

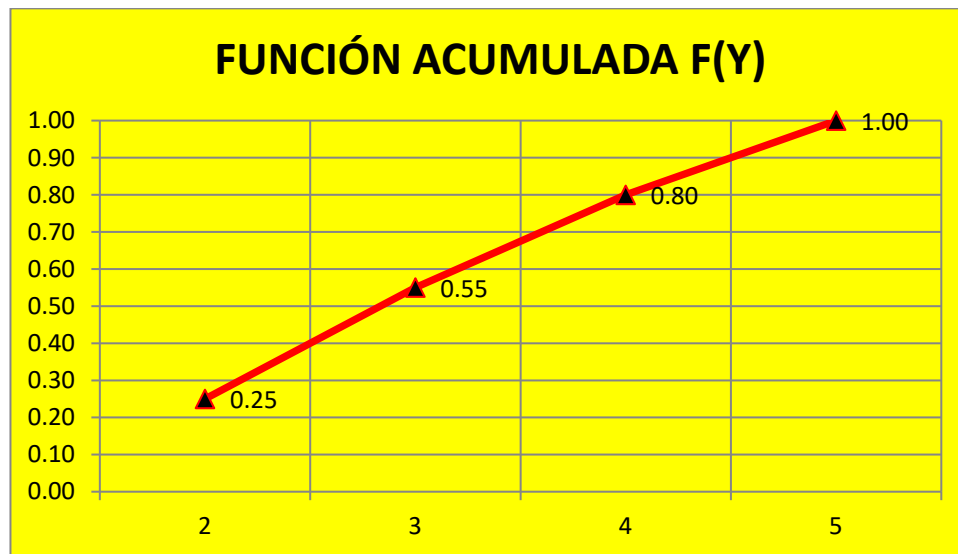
X	NUMERO INDICE
0	0.00 - 0.09
1	0.10 - 0.29
2	0.30 - 0.54
3	0.55 - 0.79
4	0.79 - 0.94
5	0.95 - 0.99

VARIABLE Y

TABLA DE FRECUENCIAS ACUMULADA DE LA VARIABLE Y

Y	P(Y)	F(Y)
2	0.25	0.25
3	0.30	0.55
4	0.25	0.80
5	0.20	1.00

HISTOGRAMA DE FRECUENCIA ACUMULADA DE LA VARIABLE Y



ASIGNACION DE NÚMEROS INDICES PARA LA VARIABLE Y

Y	NÚMERO INDICE
2	0.00 - 0.24
3	0.25 - 0.54
4	0.55 - 0.79
5	0.80 - 0.99

SIMULACIÓN DE LOS VALORES DE X, Y ,Z W

Nº PRUEBA	Nº ALEATORIO PARA X	VALOR SIMULADO DE X	Nº ALEATORIO PARA Y	VALOR SIMULADO DE Y	Nº ALEATORIO PARA Z	VALOR SIMULADO DE Z	VALOR SIMULADO DE W
1	0.519	2	0.737	4	0.197	4	20
2	0.044	0	0.443	3	0.907	6	11
3	0.593	3	0.459	3	0.344	5	25
4	0.530	2	0.278	3	0.231	4	19
5	0.328	2	0.087	2	0.482	5	19
6	0.443	2	0.351	3	0.705	5	20
7	0.886	4	0.597	4	0.724	5	31
8	0.359	2	0.659	4	0.570	5	21
9	0.649	3	0.281	3	0.372	5	25
10	0.190	1	0.024	2	0.315	5	14
11	0.166	1	0.165	2	0.887	6	15
12	0.835	4	0.770	4	0.977	6	32
13	0.415	2	0.895	5	0.536	5	22
14	0.735	3	0.374	3	0.866	6	26
15	0.266	1	0.848	5	0.451	5	17
16	0.672	3	0.262	3	0.943	6	26
17	0.495	2	0.859	5	0.134	4	21
18	0.406	2	0.249	2	0.749	5	19
19	0.229	1	0.359	3	0.783	5	15
20	0.552	3	0.299	3	0.798	5	25
21	0.566	3	0.788	4	0.790	5	26
22	0.828	4	0.070	2	0.515	5	29
23	0.409	2	0.793	4	0.329	5	21
24	0.243	1	0.885	5	0.507	5	17
25	0.001	0	0.645	4	0.820	6	12
26	0.249	1	0.297	3	0.155	4	14
27	0.413	2	0.849	5	0.038	4	21
28	0.674	3	0.344	3	0.858	6	26
29	0.995	5	0.386	3	0.049	4	34
30	0.478	2	0.756	4	0.648	5	21
31	0.797	3	0.179	2	0.407	5	24
32	0.886	4	0.377	3	0.687	5	30
33	0.255	1	0.351	3	0.109	4	14
34	0.671	3	0.386	3	0.776	5	25
35	0.536	2	0.219	2	0.537	5	19

Nº PRUEBA	Nº ALEATORIO PARA X	VALOR SIMULADO DE X	Nº ALEATORIO PARA Y	VALOR SIMULADO DE Y	Nº ALEATORIO PARA Z	VALOR SIMULADO DE Z	VALOR SIMULADO DE W
36	0.992	5	0.697	4	0.278	4	35
37	0.422	2	0.646	4	0.627	5	21
38	0.519	2	0.823	5	0.945	6	23
39	0.439	2	0.791	4	0.127	4	20
40	0.617	3	0.556	4	0.823	6	27
41	0.858	4	0.946	5	0.873	6	33
42	0.414	2	0.875	5	0.713	5	22
43	0.483	2	0.760	4	0.311	5	21
44	0.578	3	0.158	2	0.225	4	23
45	0.651	3	0.775	4	0.339	5	26
46	0.809	4	0.149	2	0.045	4	28
47	0.025	0	0.608	4	0.159	4	10
48	0.246	1	0.514	3	0.539	5	15
49	0.972	5	0.173	2	0.081	4	33
50	0.546	2	0.563	4	0.919	6	22
51	0.393	2	0.256	3	0.227	4	19
52	0.570	3	0.929	5	0.024	4	26
53	0.419	2	0.814	5	0.033	4	21
54	0.788	3	0.242	2	0.766	5	24
55	0.208	1	0.833	5	0.795	5	17
56	0.801	4	0.360	3	0.936	6	31
57	0.354	2	0.135	2	0.867	6	20
58	0.741	3	0.694	4	0.183	4	25
59	0.653	3	0.354	3	0.662	5	25
60	0.593	3	0.510	3	0.963	6	26
61	0.660	3	0.313	3	0.582	5	25
62	0.616	3	0.171	2	0.287	4	23
63	0.262	1	0.517	3	0.425	5	15
64	0.763	3	0.343	3	0.365	5	25
65	0.815	4	0.330	3	0.344	5	30
66	0.324	2	0.165	2	0.423	5	19
67	0.156	1	0.223	2	0.038	4	13
68	0.617	3	0.774	4	0.273	4	25
69	0.624	3	0.232	2	0.439	5	24
70	0.627	3	0.139	2	0.192	4	23

Nº PRUEBA	Nº ALEATORIO PARA X	VALOR SIMULADO DE X	Nº ALEATORIO PARA Y	VALOR SIMULADO DE Y	Nº ALEATORIO PARA Z	VALOR SIMULADO DE Z	VALOR SIMULADO DE W
71	0.268	1	0.625	4	0.783	5	16
72	0.700	3	0.692	4	0.981	6	27
73	0.850	4	0.984	5	0.453	5	32
74	0.071	0	0.766	4	0.261	4	10
75	0.050	0	0.633	4	0.163	4	10
76	0.681	3	0.571	4	0.367	5	26
77	0.405	2	0.673	4	0.231	4	20
78	0.434	2	0.885	5	0.517	5	22
79	0.672	3	0.469	3	0.571	5	25
80	0.260	1	0.103	2	0.456	5	14
81	0.181	1	0.154	2	0.180	4	13
82	0.561	3	0.240	2	0.535	5	24
83	0.706	3	0.558	4	0.386	5	26
84	0.285	1	0.250	2	0.353	5	14
85	0.506	2	0.068	2	0.301	5	19
86	0.543	2	0.537	3	0.503	5	20
87	0.108	1	0.019	2	0.301	5	14
88	0.811	4	0.231	2	0.963	6	30
89	0.592	3	0.350	3	0.508	5	25
90	0.568	3	0.430	3	0.126	4	24
91	0.201	1	0.239	2	0.501	5	14
92	0.489	2	0.292	3	0.972	6	21
93	0.199	1	0.699	4	0.157	4	15
94	0.996	5	0.815	5	0.344	5	37
95	0.560	3	0.211	2	0.013	4	23
96	0.781	3	0.565	4	0.030	4	25
97	0.683	3	0.688	4	0.234	4	25
98	0.390	2	0.881	5	0.681	5	22
99	0.423	2	0.970	5	0.166	4	21
100	0.087	0	0.312	3	0.137	4	9

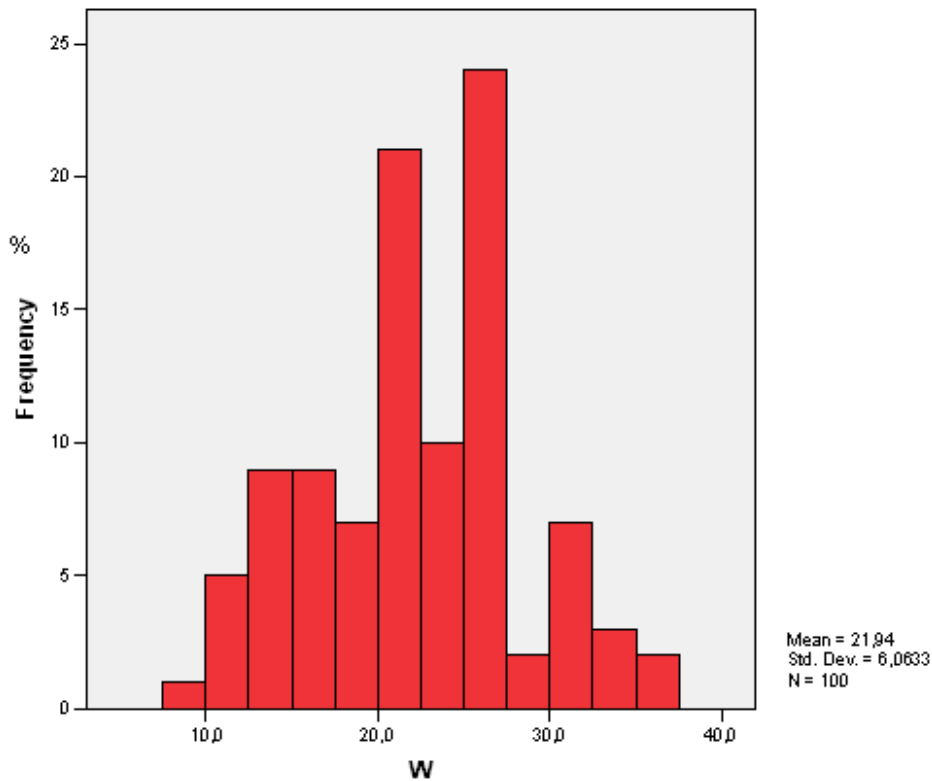
Como las variables son independientes, se han usado números aleatorios diferentes para la simulación de cada uno de ellos

La distribución de probabilidad de la función efectividad $W = 5X + 2Y + Z$ obtenida por simulación de 100 datos se muestra a continuación:

La media es: 21.94

La desviación estándar es : 6.0633

El histograma de la función efectividad se muestra en el siguiente gráfico:



COMPARACIÓN DE LOS DATOS SIMULADOS VS LOS EXPERIMENTALES:

VARIABLE X

TABLA DE FRECUENCIA DE VALORES

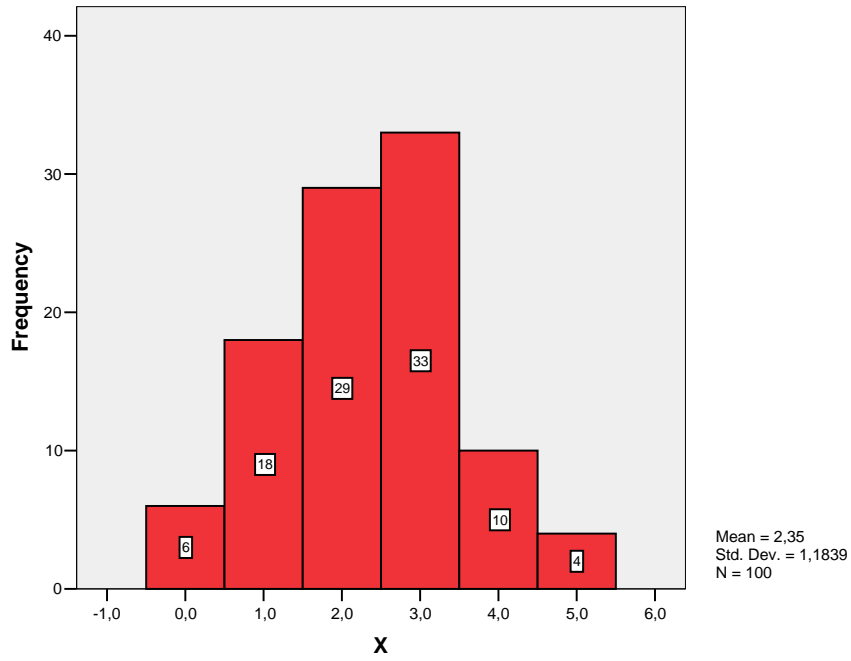
SIMULADOS DE X

X	Frecuency	Percent	ValidPercent	CumulativePercent
.0	6	6.0	6.0	6.0
1.0	18	18.0	18.0	24.0
2.0	29	29.0	29.0	53.0
3.0	33	33.0	33.0	86.0
4.0	10	10.0	10.0	96.0
5.0	4	4.0	4.0	100.0
Total	100	100.0	100.0	

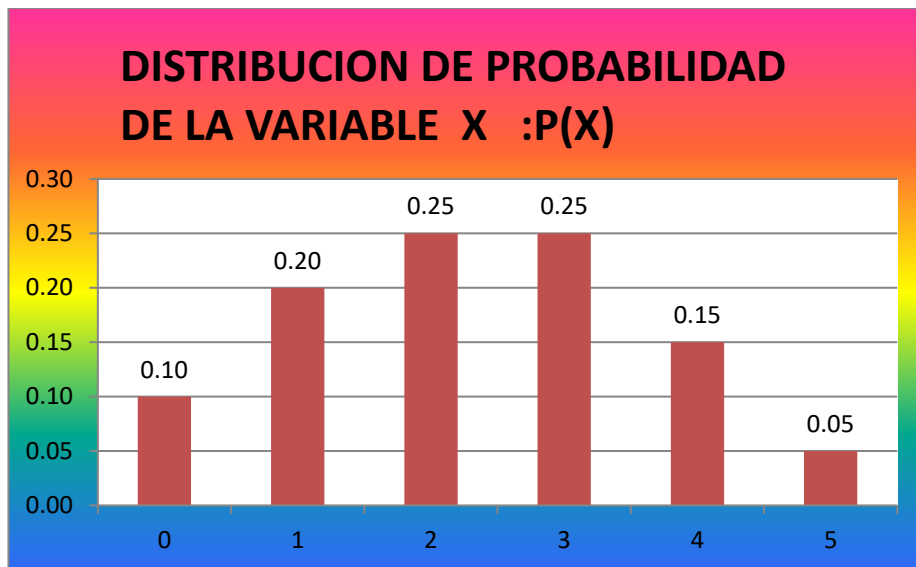
TABLA DE FRECUENCIA EXPERIMENTAL

X	P(X)	F(X)	Frecuencia Acumulada
0	0.10	0.10	10
1	0.20	0.30	30
2	0.25	0.55	55
3	0.25	0.80	80
4	0.15	0.95	95
5	0.05	1.00	100

Textbox
HISTOGRAMA DE VARIABLE X SIMULADA



VARIABLE X EXPERIMENTAL



VARIABLE Y

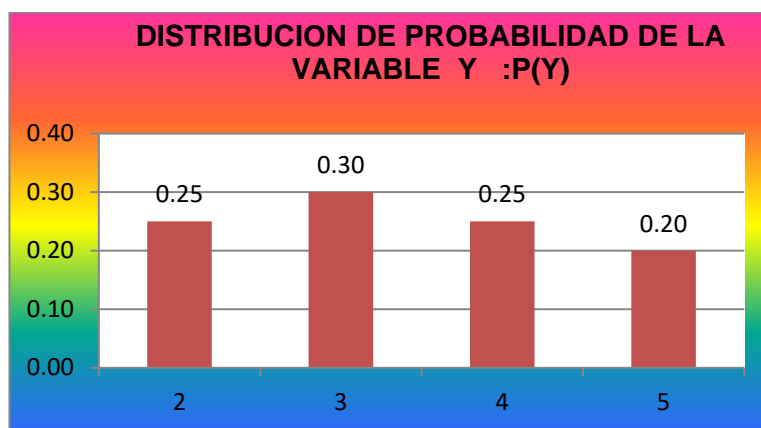
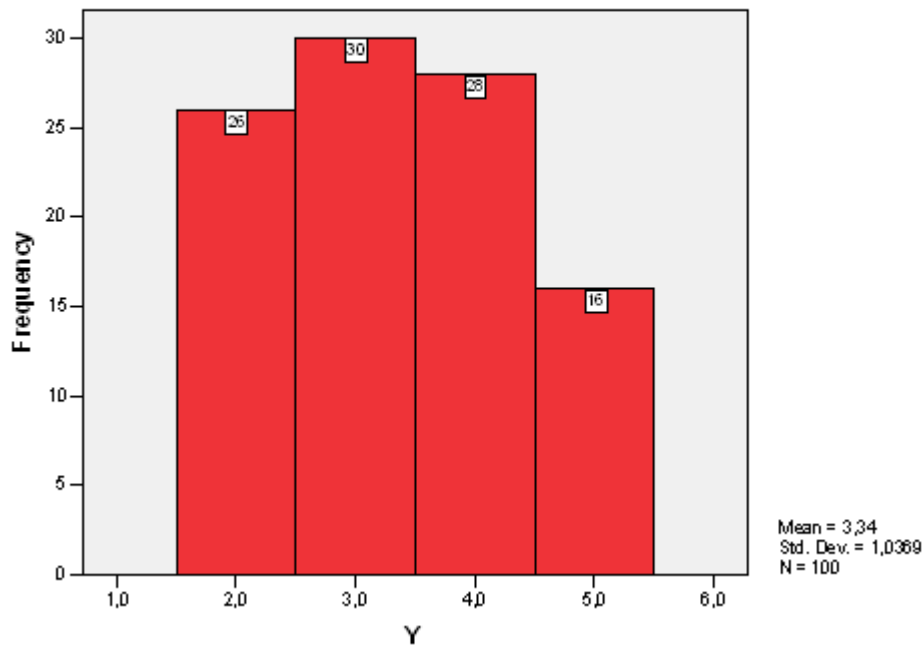
TABLA DE FRECUENCIA DE VALORES DE Y SIMULADOS

Y	Frecuency	Percent	Cumulative Percent
.0	6	6.0	6.0
1.0	18	18.0	24.0
2.0	29	29.0	53.0
3.0	33	33.0	86.0
4.0	10	10.0	96.0
5.0	4	4.0	100.0
Total	100	100.0	

TABLA DE FRECUENCIA DE Y EXPERIMENTAL

Y	P(Y)	F(Y)	FrecAcum
2	0.25	0.25	25.0
3	0.30	0.55	55.0
4	0.25	0.80	80.0
5	0.20	1.00	100.0

HISTOGRAMA DE LA VARIABLE Y SIMULADA



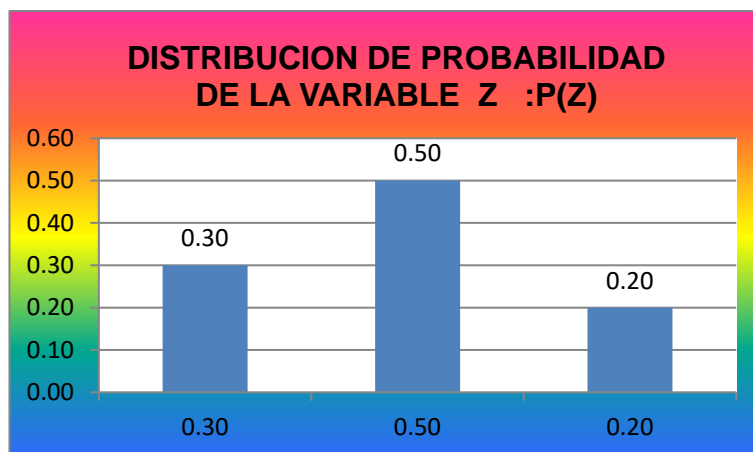
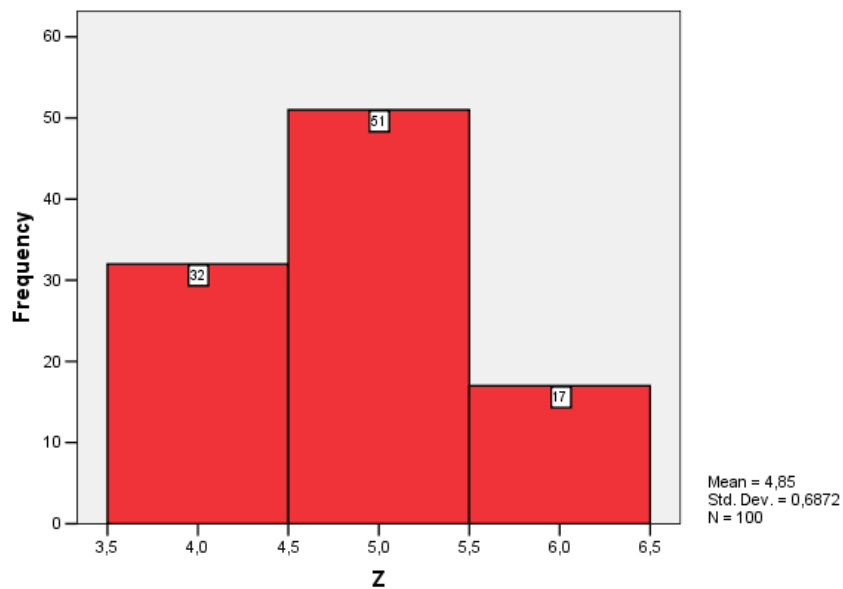
VARIABLE Z

VARIABLE Z SIMULADA

Z	Freq	Percent	Cumulative Percent
4.0	32	32.0	32.0
5.0	51	51.0	83.0
6.0	17	17.0	100.0
Total	100	100.0	

VARIABLE EXPERIMENTAL			Z
X	P(X)	F(X)	FREC. Acum
4	0.30	0.30	30
5	0.50	0.80	80
6	0.20	1.00	100

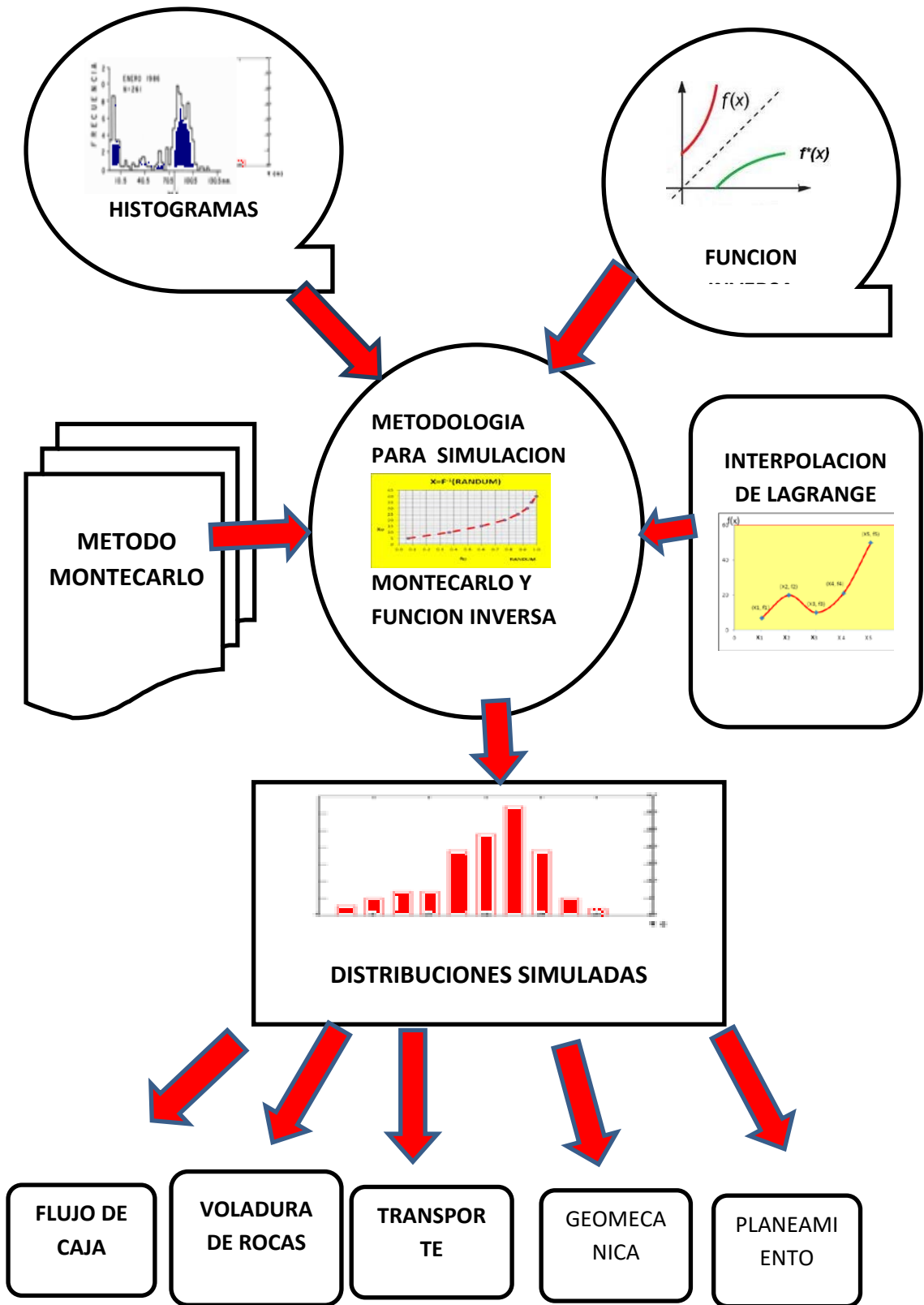
HISTOGRAMA DE LA VARIABLE Z SIMULADA



Capítulo 2

METODOLOGIAS PARA LA SIMULACION DE OPERACIONES APLICANDO LA FUNCION INVERSA Y EL MÉTODO MONTECARLO

2.1 DIAGRAMA DE BURBUJAS DEL MÉTODO



2.2 COLECCIÓN DE DATOS EXPERIMENTALES

Para una buena simulación se requiere que la información colectada sea real y fidedigna; para eso el analista debe tener conocimiento del fenómeno, o proceso que va a simular para no incurrir en errores.

Como el objetivo es representar el comportamiento de situaciones especiales, se tiene que tener una buena base de datos tomados en el campo. Es necesario aclarar que una buena base de datos no necesariamente implica cantidad de datos, si no lo suficiente que pueda ayudar a representar el comportamiento de algún parámetro importante del sistema.

2.3 CONSTRUCCIÓN DE TABLAS Y CURVAS DE LA FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD ACUMULADA

Un buen comienzo para la simulación de un fenómeno cualquiera es construir las tablas de frecuencia, con la frecuencia relativa y la frecuencia relativa acumulada.

La frecuencia relativa acumulada está asociada a la probabilidad, pues su rango es de $(0,1)$; y ésta a su vez está en correspondencia uno a uno con los números aleatorios. Recordemos que los números “pseudo aleatorios” siguen una distribución uniforme entre 0 y 1.

2.4 ASIGNACIÓN DE NÚMEROS ÍNDICES: ASOCIACIÓN DE LA PROBABILIDAD ACUMULADA Y LOS NÚMEROS ALEATORIOS

En esta etapa se trabaja con el límite superior del intervalo de clase con la frecuencia relativa acumulada. Si los datos de la población analizada es discreta a cada número entero le corresponde una porción de intervalo entre 0 y 1. Sin embargo cuando la población analizada tiene variables continuas, a cada intervalo de clase le corresponde una porción de intervalo entre 0 y 1.

2.5 FORMULACIÓN DE LA FUNCIÓN INVERSA

La función $F(X)$ que se analizará es la frecuencia relativa acumulada vs límite superior del intervalo de clase.

En algunos casos $F(X)$ es una función que analíticamente se puede obtener su función inversa. Por ejemplo: La función exponencial, la función triangular, entre otros. Pero en la mayoría de los casos encontrados la función de probabilidad no se aproxima a ninguna función teórica conocida, por lo tanto su $F(x)$ acumulada es difícil de hallar por medio analítico y consecuentemente su función inversa.

Recordemos que:
$$F(X) = \int_{-\infty}^X f(x)dx$$

Aquí tenemos que plantear un método para resolver este problema: ¿Cómo puedo simular una función inversa sin la necesidad de modelar la función de distribución de probabilidad $f(x)$ y su acumulada?

En el curso de Cálculo se menciona las propiedades de la función inversa. Esta se genera intercambiando primeras componentes con

segundas componentes de cada pareja ordenada, y que el rango de la función se convierte en el dominio de la función inversa, asimismo el dominio de la función se convierte en el rango de la función inversa.

Aprovechamos esta singularidad de la función inversa para resolver nuestro problema.. No modelamos la función de distribución de frecuencias, tampoco modelamos la función de distribución acumulada. Si no que a partir de $F(X): \mathcal{A} \subset \mathbb{R} \rightarrow]0,1[$ Intercambiamos las componentes $(X,F(X))$ en $(F(X),X)$ o (R,X) y sin modelar buscamos un algoritmo de interpolación. A mi criterio el mejor interpolador es el interpolador polinomial de Lagrange. Pues genera nosolo interpolación lineal, si no , cuadrática, cúbica, cuarta,.... Dependiendo del número de pares ordenados tiene la función acumulada. Esta interpolación se hace a partir de un un número R aleatorio generado.

2.6 GENERACIÓN DE DATOS SIMULADOS

2.6.1 GENERAR NÚMEROS ALEATORIOS

Los números aleatorios generados podemos obtenerlo de dos maneras

- 1.- Usando los randum propios de los softwares que estamos utilizando o,
- 2.- Aplicando nuestras propias rutinas de generación de números aleatorios como se ha explicado en capítulos anteriores. Esta segunda opción es la más recomendada pues eligiendo una adecuada semilla y valores de los parámetros, podemos controlar la generación cíclica o repetición periódica delos números aleatorios.

2.6.2 APLICACIÓN DE LA INTERPOLACIÓN DE LAGRANGE

2.6.2.1 CONSTRUCCION DEL HISTOGRAMA DE DATOS EXPERIMENTALES

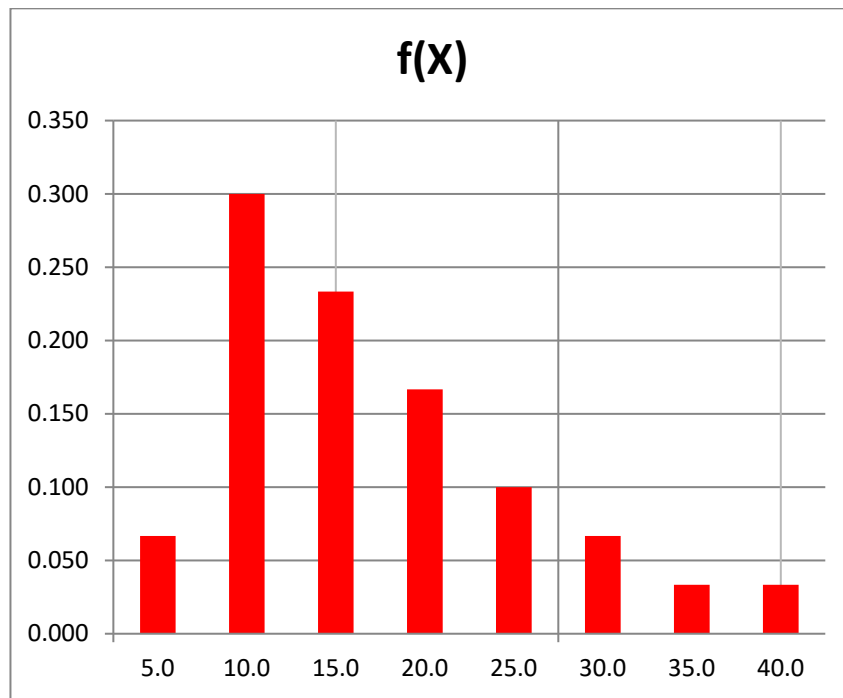


Fig.Nº2.6.2.1 Histograma de datos experimentales

2.6.2.2 CONSTRUCCION DE HISTOGRAMA ACUMULADA

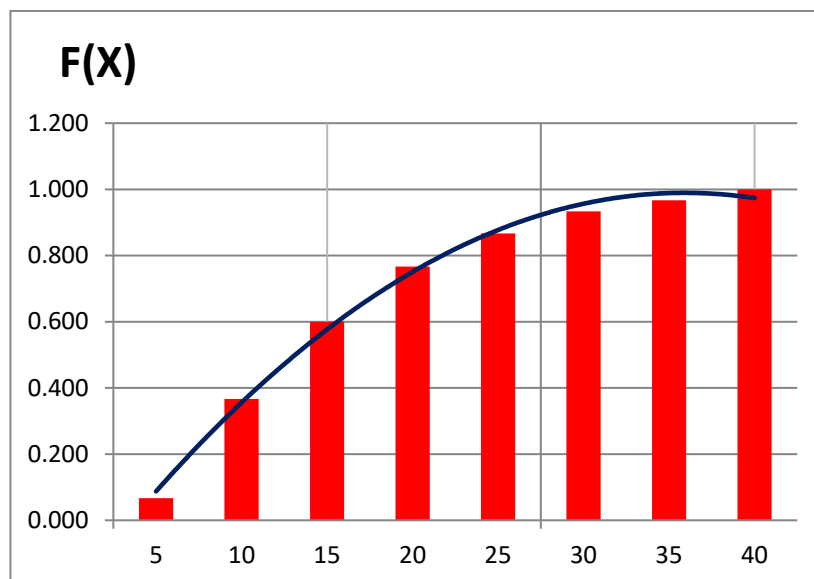


Fig N° 2.6.2.2 Histograma experimental acumulado

FX	ZX
FX(1)	ZX(1)
FX(2)	Z(2)
FX(3)	Z(3)
FX(4)	Z(4)
...	...
FX(L)	ZX(L)

Tabla N° 2.6.2.2 Tabulación del Histograma experimental acumulado
preparado para la simulación inversa

R(k)	X(k)
R(1)	X(1)
R(2)	X(2)
R(3)	X(3)
R(4)	X(4)
...	...
R(LL)	X(LL)

Tabla N° 2.6.2.3 Tabulación para interpolación inversa: LL es el número
de datos aleatorios que se desea simular

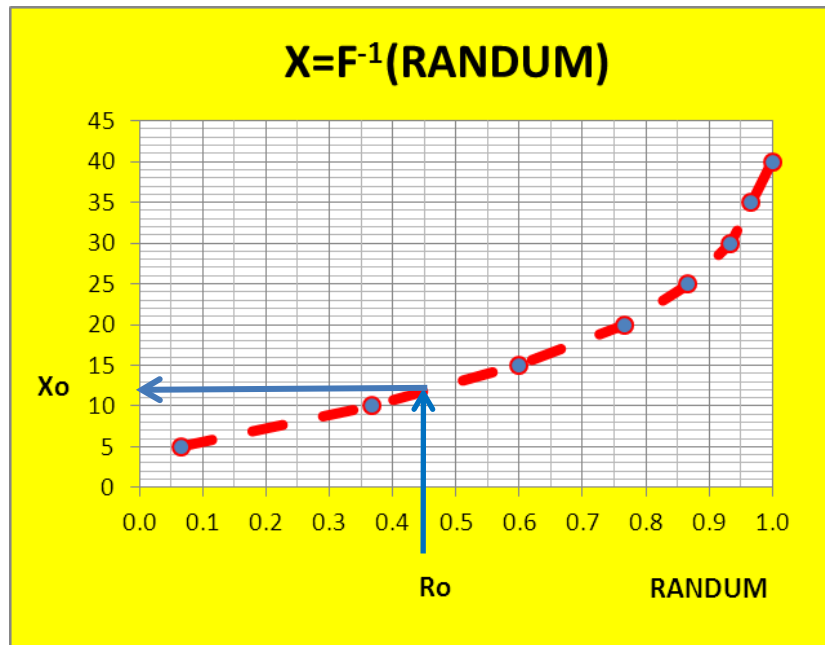
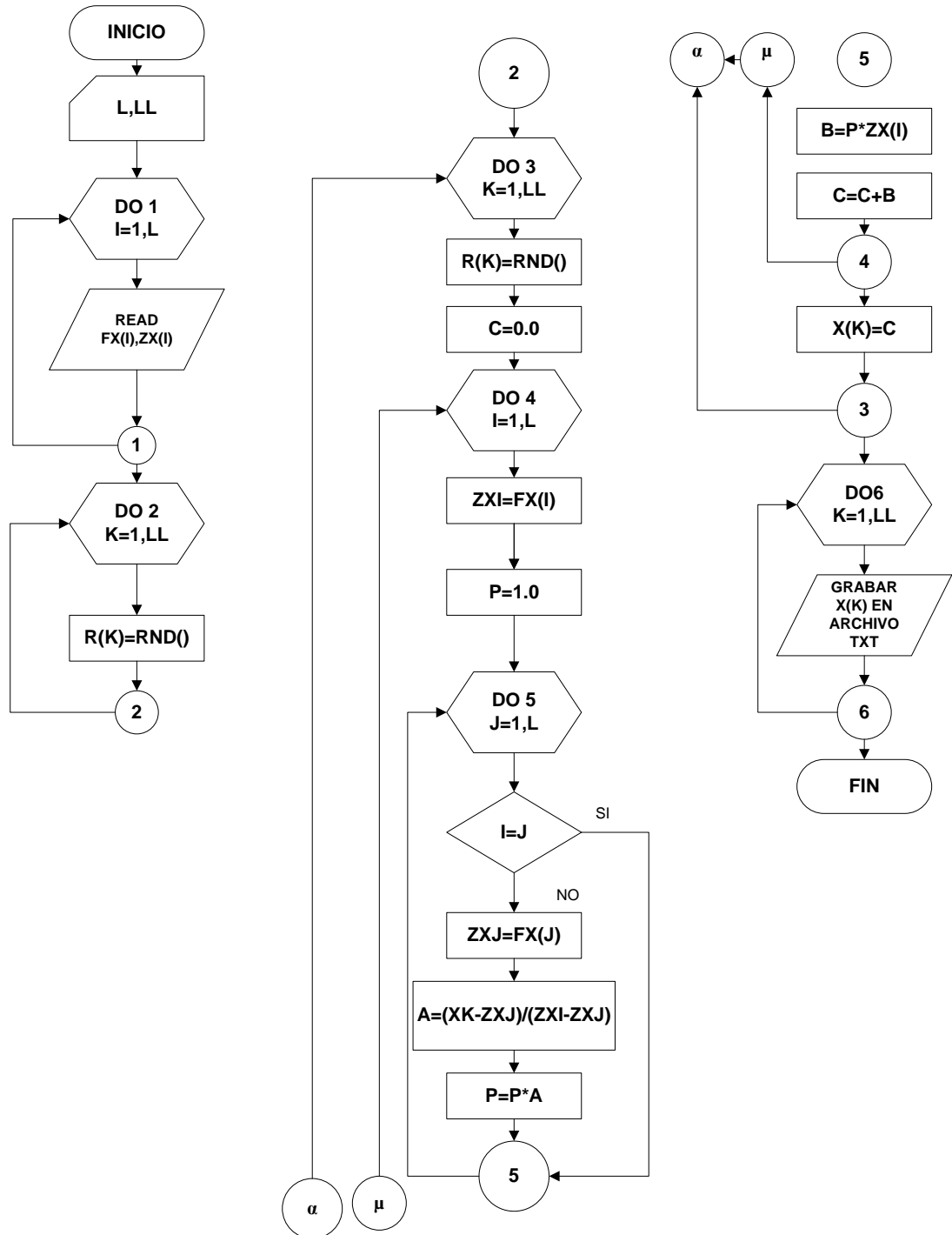


Fig N° 2.6.2.3 Grafico del histograma Acumulado $X=F^{-1}(R)$ Para la interpolación inversa

2.6.2.3 DIAGRAMA DE FLUJO DEL PROGRAMA DE INTERPOLACION DE LAGRANGE.



Capítulo 3

APLICACIONES

3.1 SIMULACIÓN FINANCIERA PARA UN PROYECTO MINERO: SIMULACION DE TASA INTERNA DE RETORNO.

En esta aplicación se va a simular la tasa interna de retorno y compararla con la tasa atractiva mínima de retorno

TIR= Tasa de interés i para la cual se cumple

$$0 = \sum_{k=0}^N \frac{X_k}{(1+i)^k}$$

Donde :

N = Vida estimada de la inversión

X_k = Flujo de dinero en el año K

$$X_k = (I-C) - (I-C-D)t - P$$

I = ingreso bruto en el año K

C = Gastos en el año K (incluyendo costos de pérdida)

D = Depreciación en el año K

t = Tasa efectiva del impuesto

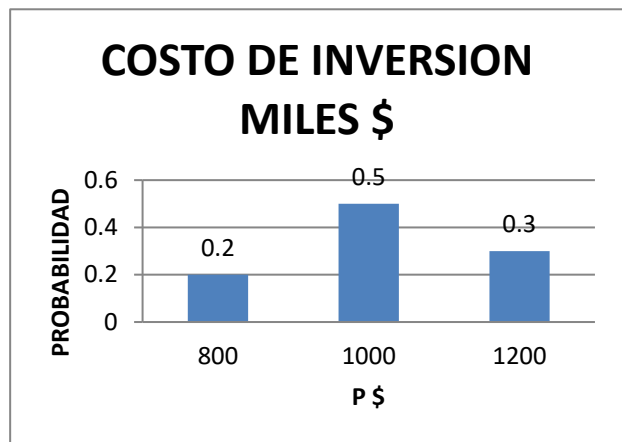
P = capital desembolsado en el año K

Mediante simulación monte carlo si se establecen las distribuciones de probabilidad de las variables de la ecuación

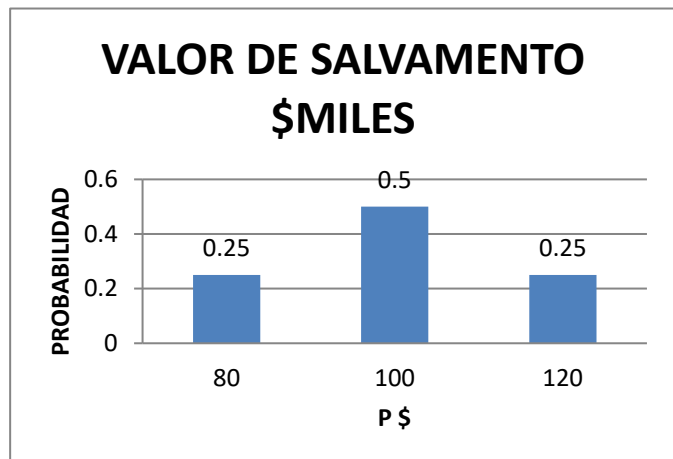
$$X_K = (I-C) - (I-C-D)t - P$$

Como primer paso se define a partir de datos experimentales las distribuciones de probabilidad.

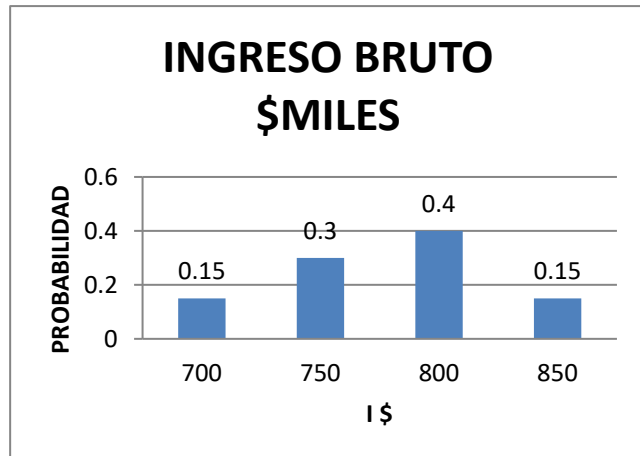
COSTO DE INVERSION\$ AÑO 0		
MILES DE \$		
P	fi	Fi
800	0.2	0.2
1000	0.5	0.7
1200	0.3	1



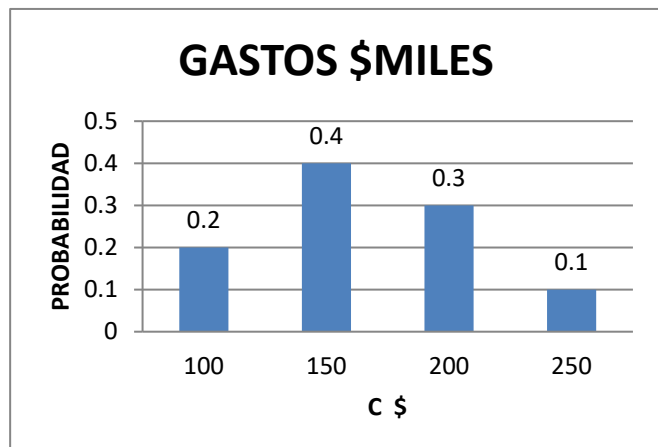
VALOR DE SALVAMENTO		
MILES DE \$ AÑO N		
L	fi	Fi
80	0.25	0.25
100	0.5	0.75
120	0.25	1



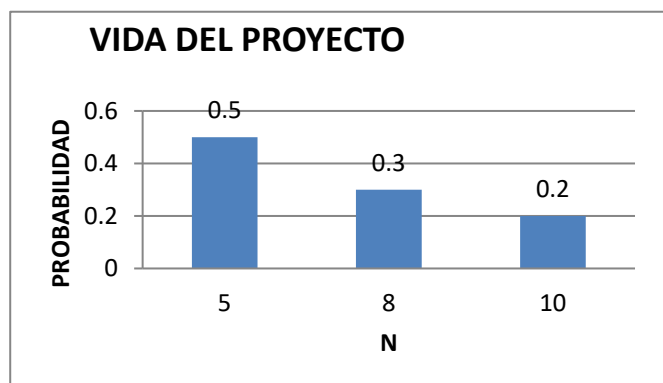
INGRESO BRUTO		
MILES DE \$ (AÑO)		
I	fi	Fi
700	0.15	0.15
750	0.3	0.45
800	0.4	0.85
850	0.15	1



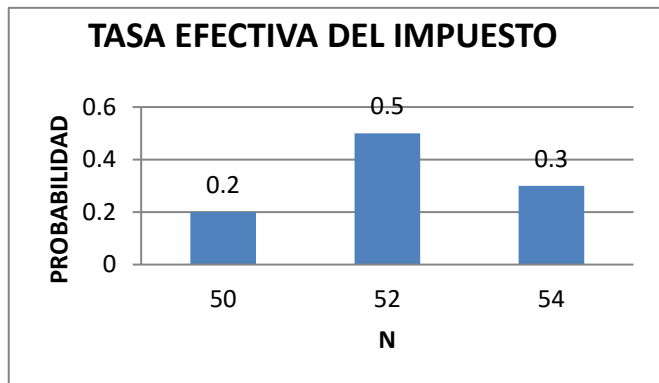
GASTOS		
MILES DE \$ (AÑO)		
C	fi	Fi
100	0.2	0.2
150	0.4	0.6
200	0.3	0.9
250	0.1	1



VIDA DEL PROYECTO		
AÑOS		
N	fi	Fi
5	0.5	0.5
8	0.3	0.8
10	0.2	1



TASA EFECTIVA DEL IMPUESTO		
%		
t	fi	Fi
50	0.2	0.2
52	0.5	0.7
54	0.3	1



PASO 2 :ASIGNACION DE INDICES PARA CADA VARIABLE A PARTIR DE LA DISTRIBUCIÓN EXPERIMENTAL DE PROBABILIDAD

INGRESO BRUTO MILES \$	
VALORES DE I	Nº INDICE
700	0.15
750	0.45
800	0.85
850	1

COSTO DE LA INVERSION MILES \$	
VALORES DE P	Nº INDICE
800	0.2
1000	0.7
1200	1

COSTOS MILES \$	
VALORES DE C	Nº INDICE
100	0.2
150	0.6
200	0.9
250	1

VIDA DEL PROYECTO	
VALORES DE N	Nº INDICE
5	0.5
8	0.8
10	1

TASA DE IMPUESTO %	
VALORES DE T	Nº INDICE
50	0.2
52	0.7
54	1

VALOR DE SALVAMENTO EN AÑO N MILES \$	
VALORES DE N	Nº INDICE
5	0.5
8	0.8
10	1

PASO 3: GENERAR NÚMEROS ALEATORIOS FORMULAR NUMÉRICAMENTE LA FUNCIÓN INVERSA E INTERPOLAR PARA OBTENER UN DATODE CADA VARIABLE.

VIDA DEL PROYECTON	5 AÑOS
COSTO DE LA INVERSIONP	1000,000
VALOR DE SALVAMENTO	100,000
DEPRECIACION	180,000

$$DEPRECIACION ANUAL = \frac{1,000,000 - 100,000}{5} = 180,000$$

SIMULACION DE FLUJO DE DINERO								
FINAL AÑO	INVERSIÓN	DEPRECIACION	INGRESO I	COSTO C	TASA DE IMPUESTO	INGRESO SUJETO A IMPUESTO	IMPUESTO	FLUJO DE DINERO
0	1000000							-1000000
1		180000	800000	150000	52.0%	470000	244400	405600
2		180000	750000	200000	54.0%	370000	199800	350200
3		180000	800000	150000	52.0%	470000	244400	405600
4		180000	800000	150000	52.0%	470000	244400	405600
5		180000	700000	200000	52.0%	320000	166400	433600*
							TIR	28.07%

- Este valor incluye \$100,000 del valor de salvamento

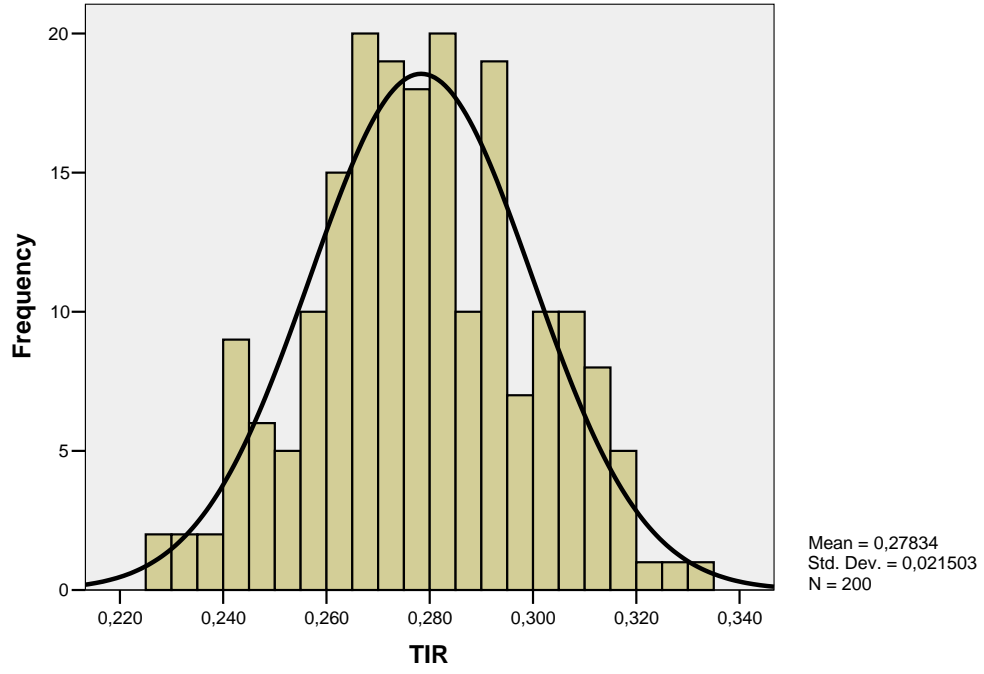
Aplicando la fórmula de flujo de dinero generados en la tabla se obtiene

$$0 = -1000000 + \frac{405600}{(1+i)^1} + \frac{350200}{(1+i)^2} + \frac{405600}{(1+i)^3} + \frac{405600}{(1+i)^4} + \frac{433600}{(1+i)^5}$$

El valor de $i = 28.07\%$

Se simuló 200 valores TIR cuyo resultados se muestran en la siguiente figura.

HISTOGRAMA DE TIR



3.2 SIMULACION DE LAS VIBRACIONES PRODUCIDAS POR LA DETONACIÓN DE UNA MEZCLA EXPLOSIVA EN LA VOLADURA DE ROCAS

Se necesitaba analizar los efectos de la PVV en construcciones aledañas a un área en Atocongo donde se requería remover colinas para hacer una planicie para su posterior urbanización. El objetivo era determinar la cantidad de carga que debería detonarse por unidad de retardo para que los efectos de las vibraciones producidos por esta detonación no produzcan daños a las instalaciones aledañas. Esto requería que se modele la ecuación de la propagación de la partícula en el tipo de roca, mediante la siguiente relación:

$$V = K \left(\frac{D}{\sqrt{Q}} \right)^{-\alpha}$$

Donde K y α son llamados constantes de atenuación. El parámetro que se puede simular es α y V .

α geométricamente representa la pendiente de la recta V vs Distancia escalada $\frac{D}{\sqrt{Q}}$ en un gráfico log-log. Y varía en un rango (-1.2,3.0) y

depende del tipo de roca.

Para calcular K y α a partir de una data de monitoreo, se tomó el logaritmo decimal de ambos miembros de la ecuación:

$$\log V = \log K - \alpha \log \left(\frac{D}{\sqrt{Q}} \right)$$

Haciendo:

$$y = \log V$$

$$b = \log K$$

$$x = \log \left(\frac{D}{\sqrt{Q}} \right)$$

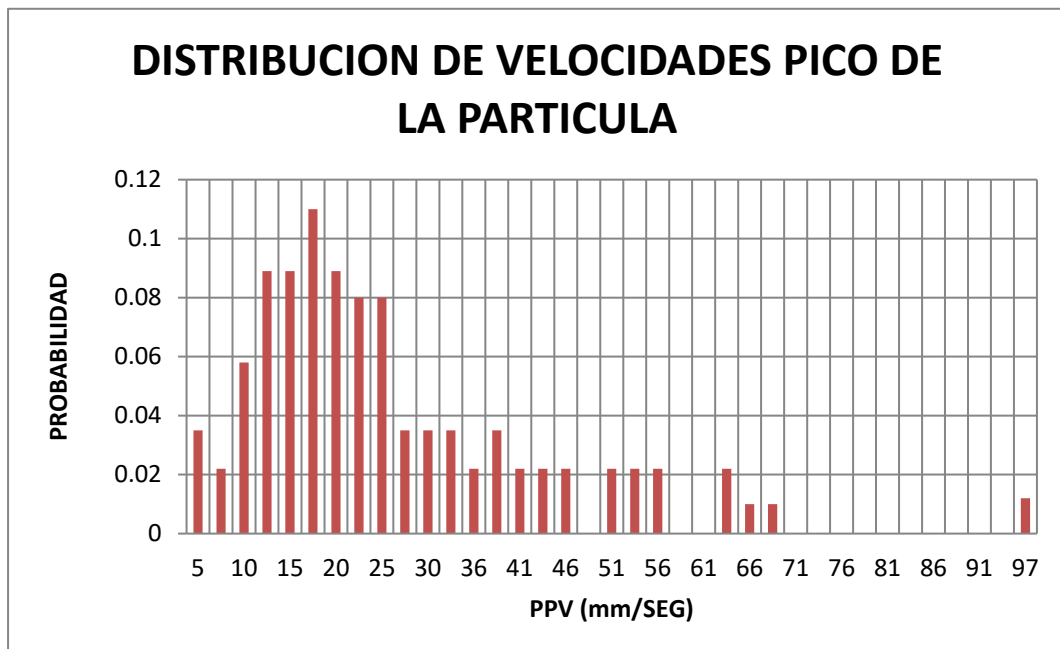
$$y = b - ax$$

De cada prueba de ensayo se obtiene (x_i, y_i) y se resuelve el sistema de ecuaciones:

$$-a \sum x_i + Nb = \sum y_i$$

$$-a \sum x_i^2 + b \sum x_i = \sum x_i y_i$$

Valores experimentales de monitoreo de velocidades de la partícula en rocas similares a la zona en estudio están representados en el siguiente histograma.



Y su frecuencia acumulada u ojiva se muestra en el siguiente gráfico.

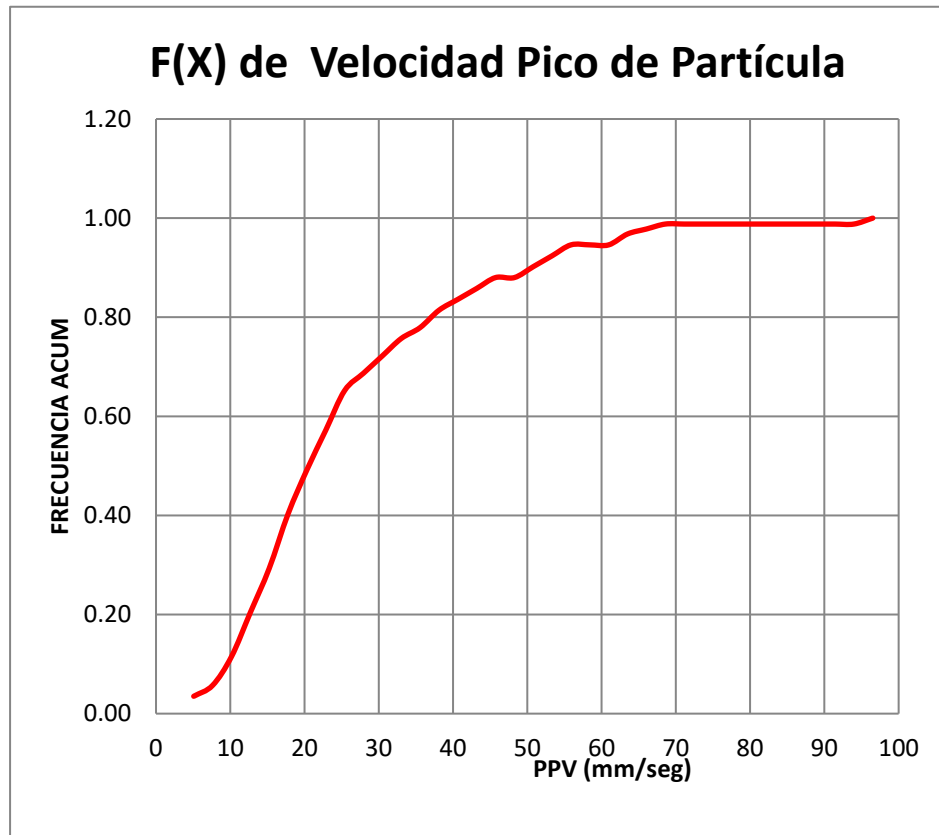


Tabla de frecuencias de PPV experimental

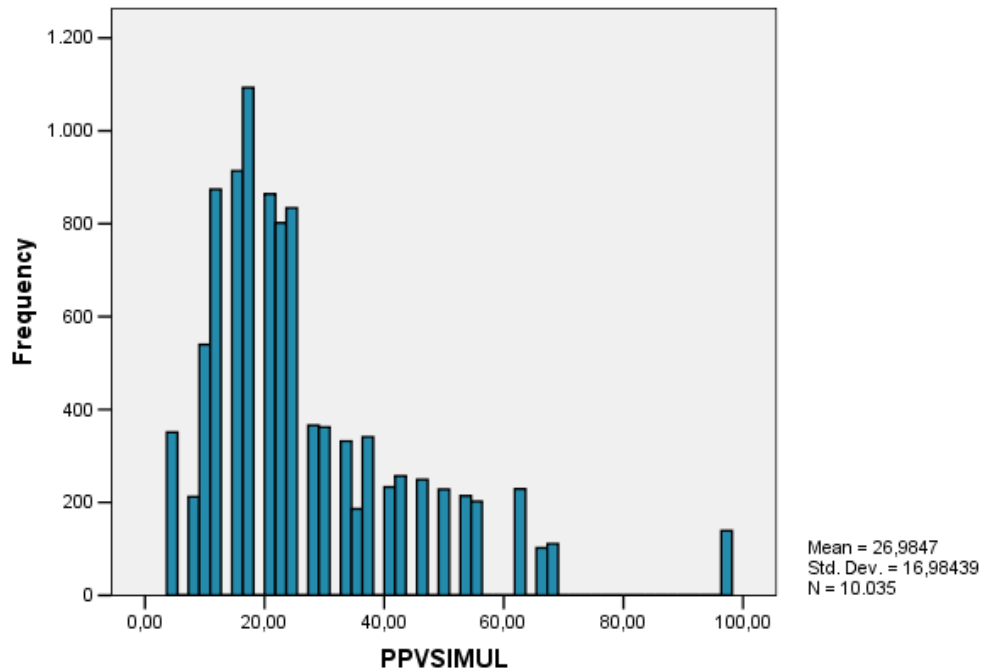
PPV	fi	Fi
5.1	0.035	0.035
7.6	0.022	0.057
10.2	0.058	0.115
12.7	0.089	0.204
15.2	0.089	0.293
17.8	0.11	0.403
20.3	0.089	0.492
22.9	0.08	0.572
25.4	0.08	0.652
27.9	0.035	0.687
30.5	0.035	0.722
33.0	0.035	0.757
35.6	0.022	0.779
38.1	0.035	0.814
40.6	0.022	0.836
43.2	0.022	0.858
45.7	0.022	0.880
50.8	0.022	0.902
53.3	0.022	0.924
55.9	0.022	0.946
63.5	0.022	0.968
66.0	0.01	0.978
68.6	0.01	0.988
96.5	0.012	1

Asignación de números índices

R	PPV
0.000	5.1
0.035	7.6
0.057	10.2
0.115	12.7
0.204	15.2
0.293	17.8
0.403	20.3
0.492	22.9
0.572	25.4
0.652	27.9
0.687	30.5
0.722	33.0
0.757	35.6
0.779	38.1
0.814	40.6
0.836	43.2
0.858	45.7
0.880	48.3
0.902	53.3
0.924	55.9
0.946	58.4
0.968	66.0
0.978	68.6
0.988	71.1

Con esta información de campo se ha simulado aplicando el método Montecarlo 10035 valores de PPV y se construyó el histograma de los datos simulados que están mostrados en el siguiente gráfico.

HISTOGRAMA PPV SIMULADO



Al comparar este histograma de PPV simulado con el histograma experimental se puede apreciar que son similares.

Luego se realizó un monitoreo de cinco disparos y se midió la velocidad de vibración en mm/seg. Los datos se muestran en la siguiente tabla.

Nº PRUEBA	DISTANCIA (m)	CARGA Q (Kg)	VELOCIDAD DE VIBRACION
1	20	0.473	2.91
2	20	0.670	5.72
3	20	0.820	8.44
4	20	0.946	11.12
5	20	1.058	13.59

Para aplicar las fórmulas planteadas sobre la regresión para calcular las constantes de atenuación K y α se construyó la siguiente tabla:

i	$x_i = \log(D_i/Q_i)$	$y_i = \log V_i$	$x_i y_i$	x_i^2	y_i^2
1	1.62645	0.46425102	0.75508108	2.6453396	0.21552901
2	1.47517	0.757153	1.11692939	2.17612653	0.57328066
3	1.38738	0.92619834	1.28498906	1.92482326	0.85784337
4	1.32504	1.04616727	1.38621348	1.755731	1.09446596
5	1.27666	1.13318111	1.44668699	1.62986076	1.28409942
suma	7.0907	4.32695074	5.9899	10.1318812	4.02521843

$$\sum x_i = 7.0907$$

$$\sum y_i = 4.32695$$

$$\sum x_i y_i = 5.9899$$

$$\sum x_i^2 = 10.1318$$

$$\sum y_i^2 = 4.02521$$

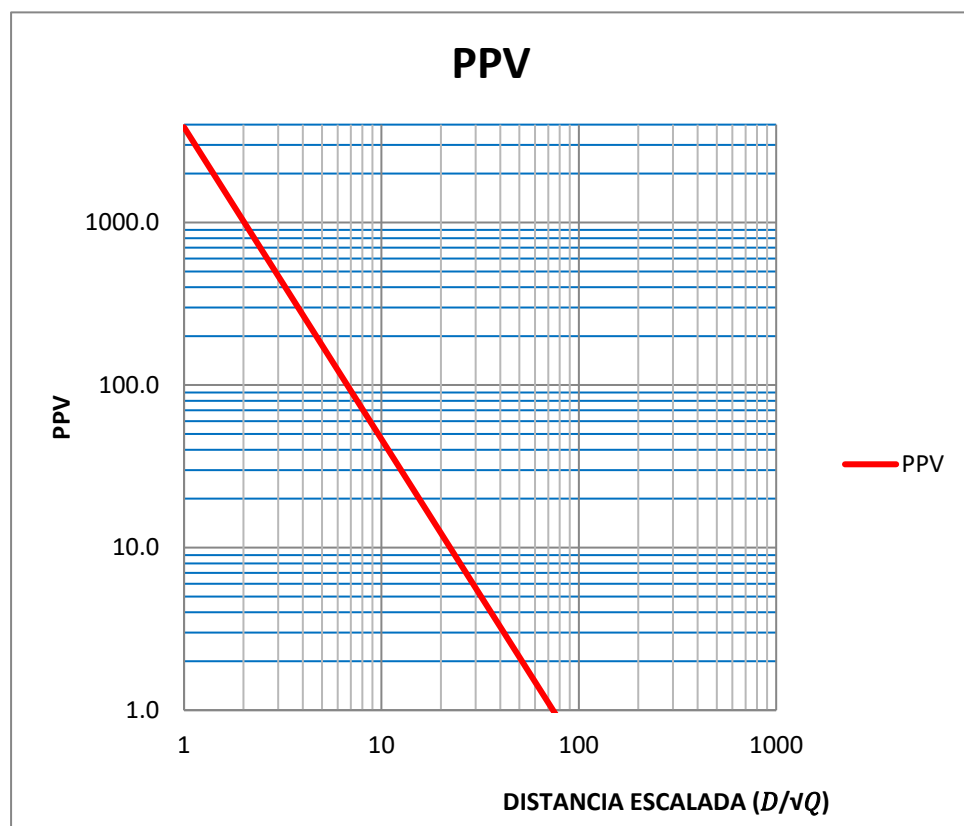
Resolviendo el sistema de ecuaciones se tiene:

PARAMETRO	a	b				
VALOR	1.91832567	3.58584452	Profit			
	1.00	1.00	5.50			
<u>Constraints</u>	-	-	<u>Total LHS</u>		<u>RHS</u>	<u>Slack</u>
RESTRICCION1	-7.091	5.000	4.33	=	4.327	0.0
RESTRICCION2	-10.132	7.091	5.99	=	5.990	0.0

a= α	1.91832567
b= logk	3.58584452
k=	3853.40379
α =	1.91832567

$$V = 3853.40379 \left(\frac{D}{\sqrt{Q}} \right)^{-1.91832567}$$

Dist Escalada	PPV
1	3853.404
2	1019.462
4	269.710
6	123.907
8	71.355
10	46.507
20	12.304
40	3.255
60	1.495
80	0.861
100	0.561
200	0.148
400	0.039
600	0.018
800	0.010
1000	0.007



3.3 SIMULACION DE UNA VARIABLE GEOMECÁNICA (ESPACIAMIENTO ABERTURAS Y DISCONTINUIDADES

En el Túnel: 9 Lado Derecho del proyecto chuquicara se simuló aplicando Montecarlo los siguientes parámetros geomecánicos: Espaciamiento entre Discontinuidades, apertura y Orientación Discontinuidades.

La tabla de frecuencia de los tres parámetros se muestra a continuación.

	espaciamiento	Ni	fi	Fi
5	<60mm	0	0.000	0.000
8	60 - 200 mm	871	0.537	0.537
10	200- 400 mm	244	0.151	0.688
12	400-600 mm	14	0.009	0.696
15	0,6 - 2.0 m	458	0.283	0.979
20	> 2m	34	0.021	1.000
	Total	1621	1.000	

apertura

	Abertura	Ni	fi	Fi
				0
0	muy abierta > 5 mm	97	0.05984	0.05984
1	abierta 1.0 - 5.0 mm	78	0.04812	0.10796
4	angosta 0.1- 1.0 mm	1446	0.89204	1.00000
5	muy angosta <0.1 mm	0		
6	cerrada	0		
	Total	1621	1.00000	

Orientación De Discontinuidades

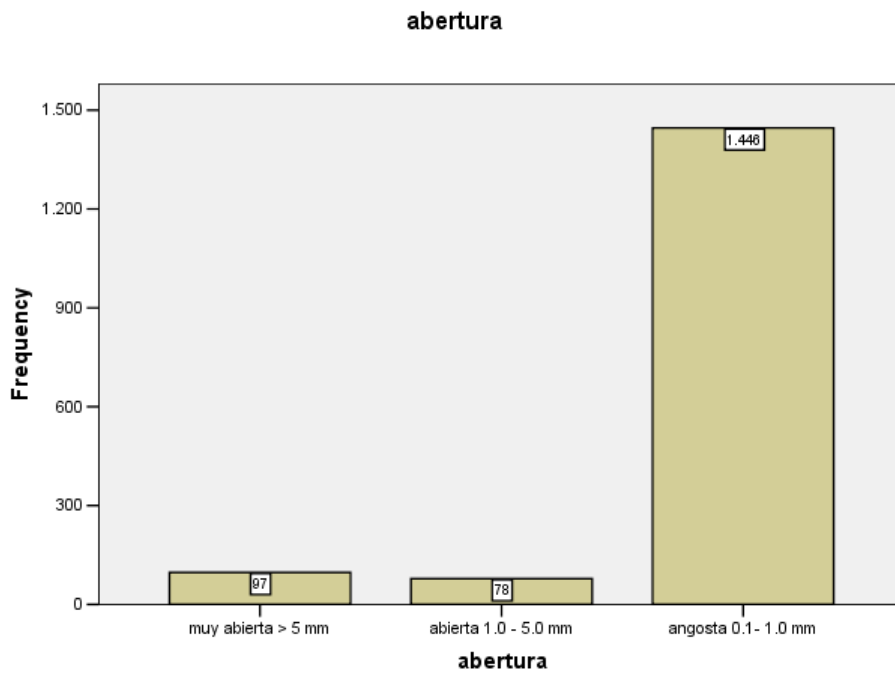
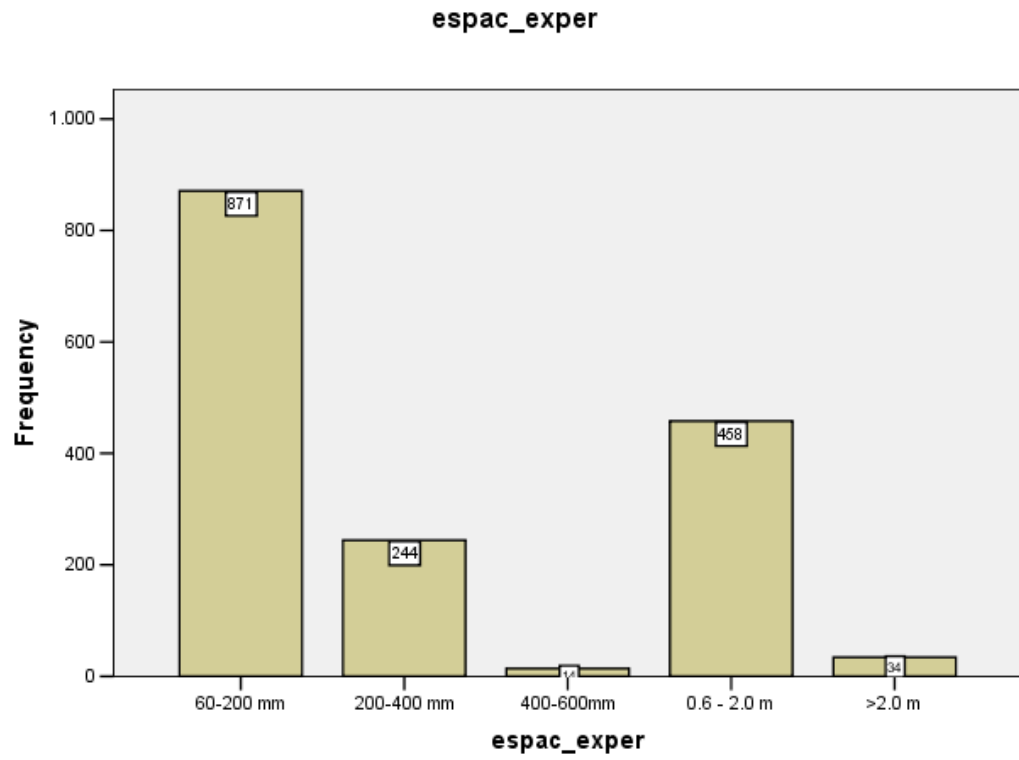
	Orientación de discontinuidades	Ni	fi	Fi
				0
-10	desfavorable	1599	0.98643	0.98643
-5	favorable	22	0.01357	1.00000
	Total	1621	1.00000	

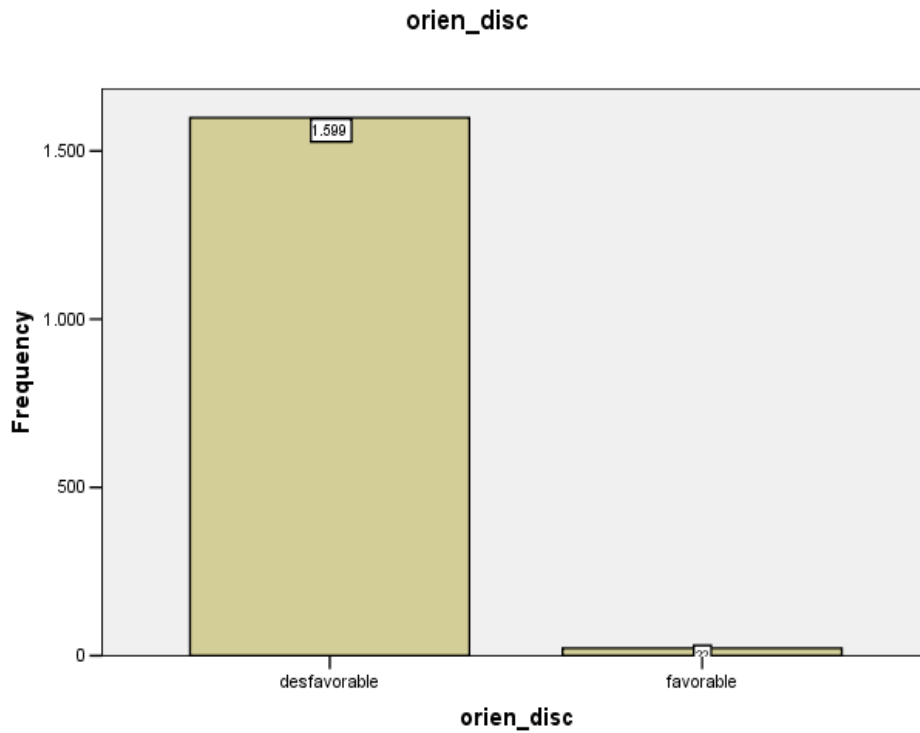
Los número índices para cada parámetro se muestra en los siguientes gráficos

Fi = Randun	espaciamento
0.000	8
0.537	10
0.688	12
0.696	15
0.979	20
1.000	

Fi	abertura
0	0
0.05984	1
0.10796	4
1.00000	

Fi	orient_disc
0	-10
0.98643	-5
1.00000	





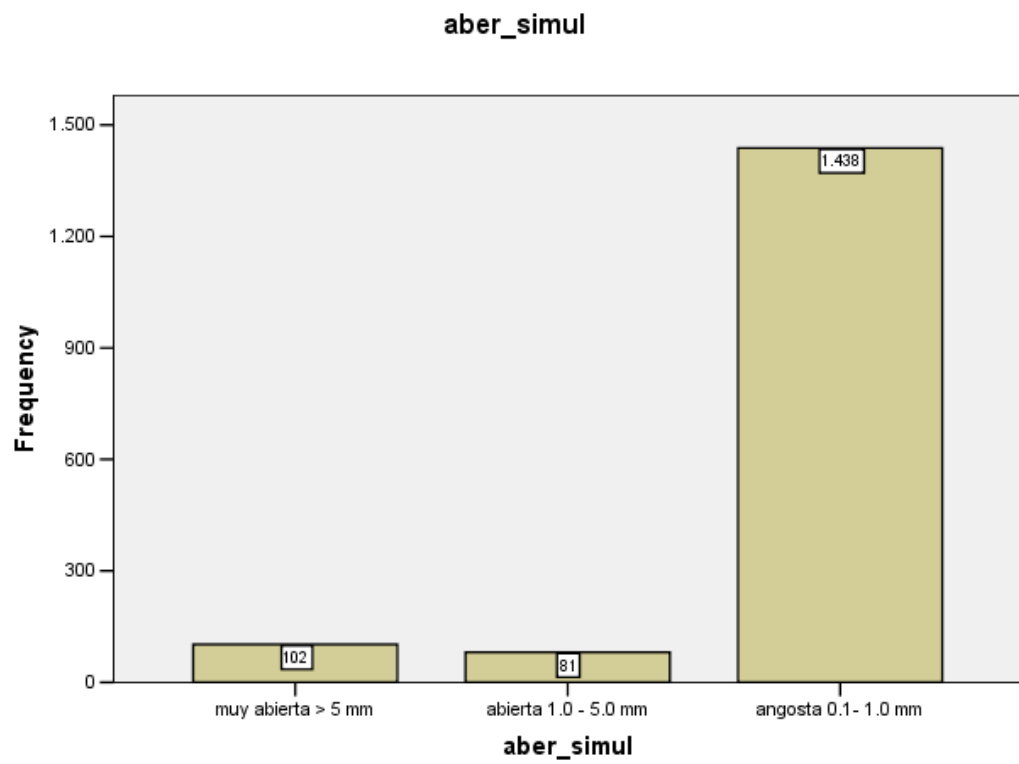
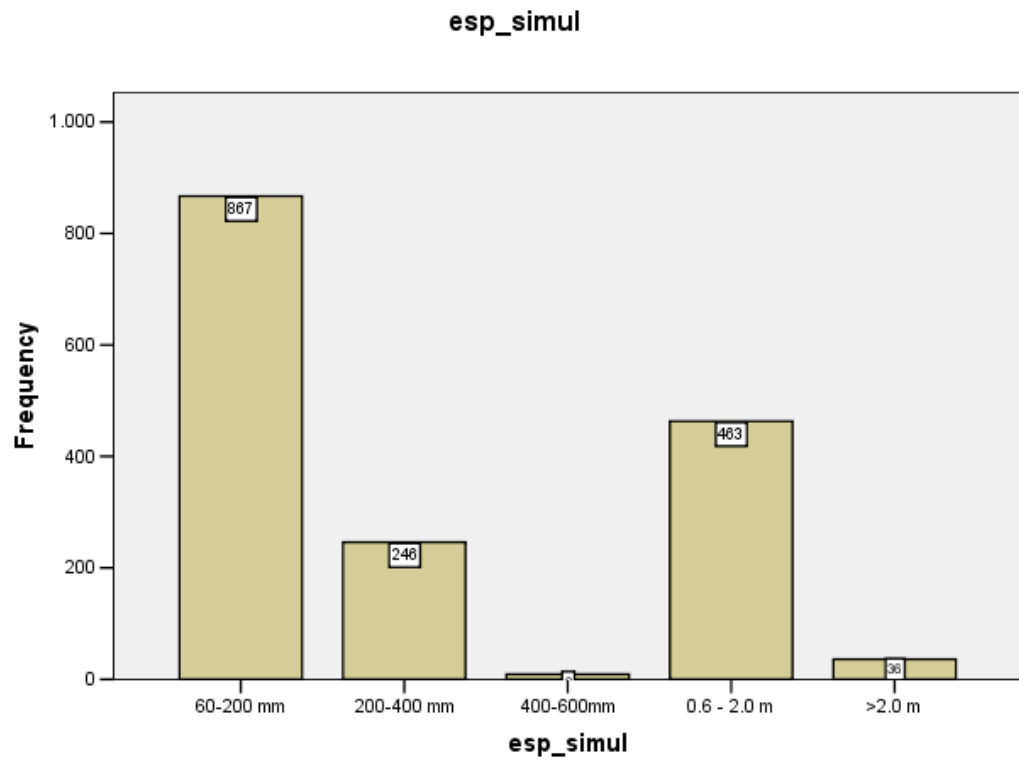
Así mismo mostramos los resultados estadístico de los datos simulados

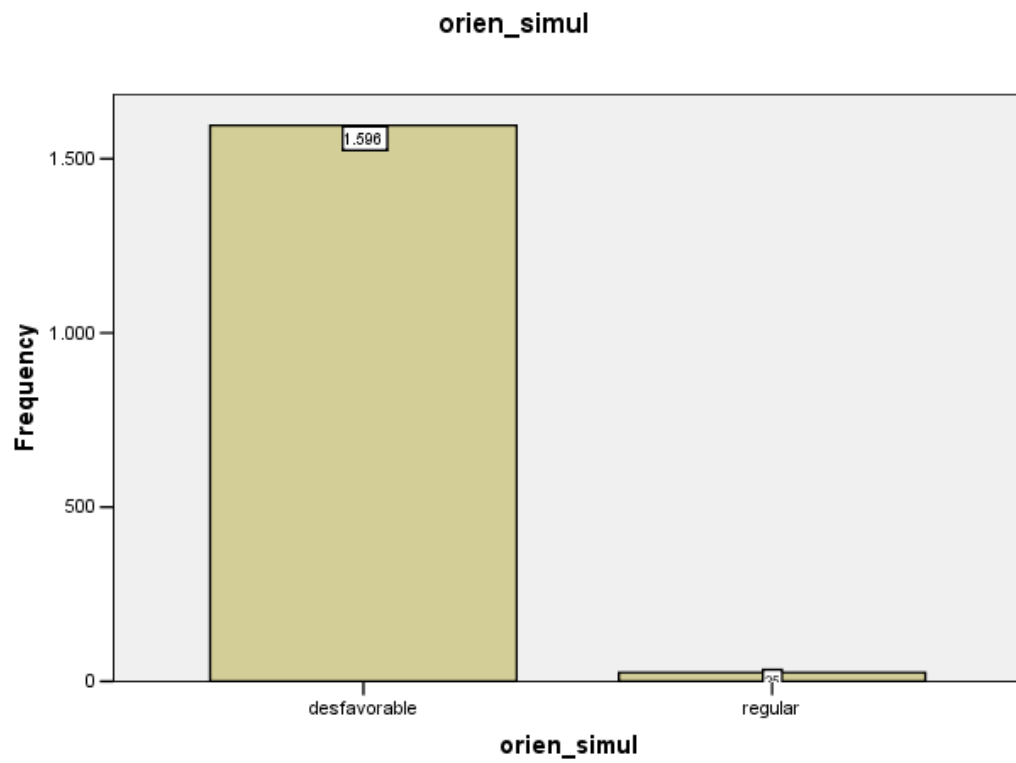
espaciamiento simulados

	Ni	fi	Fi
60-200 mm	867	0.53486	0.53486
200-400 mm	246	0.15176	0.68661
400-600mm	9	0.00555	0.69217
0.6 - 2.0 m	463	0.28563	0.97779
>2.0 m	36	0.02221	1.00000
Total	1621		

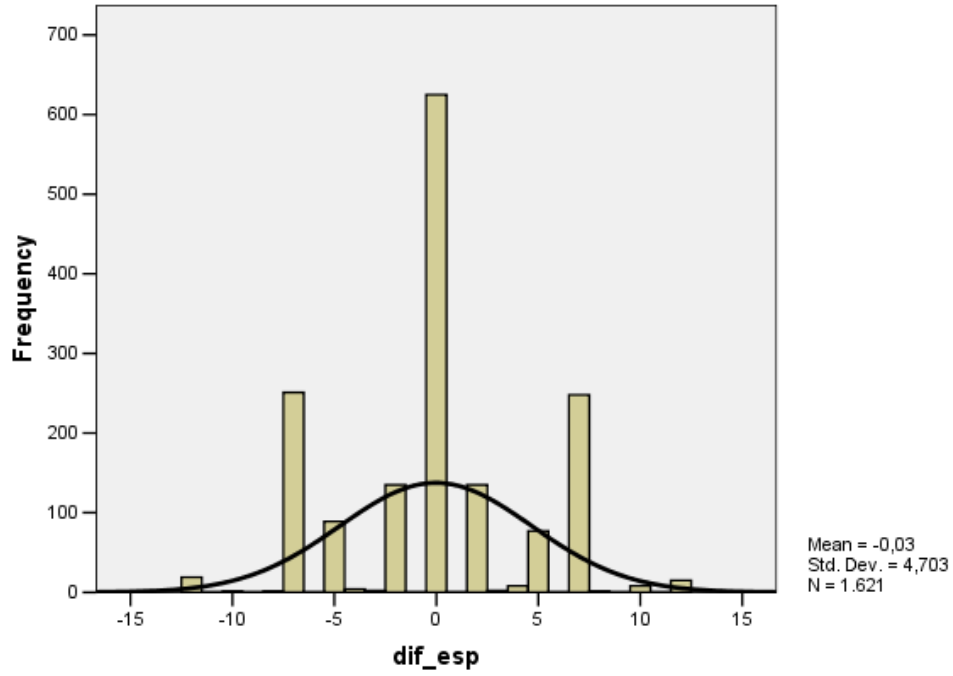
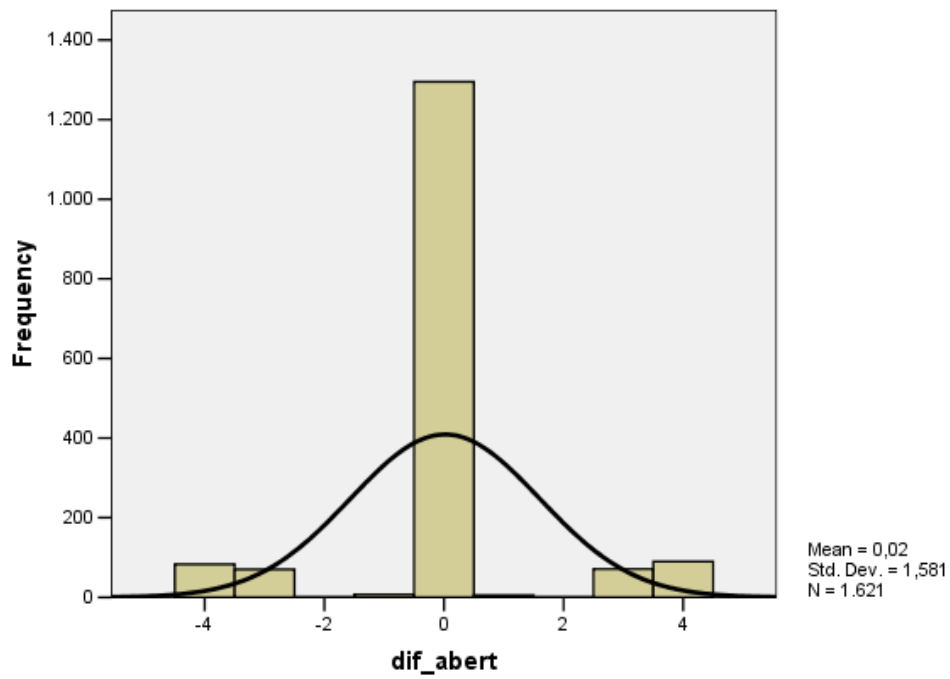
abertura	Ni	fi	Fi
muy abierta > 5 mm	102	0.06292	0.06292
abierta 1.0 - 5.0 mm	81	0.04997	0.11289
angosta 0.1- 1.0 mm	1438	0.88711	1.00000
Total	1621	1.00000	

Orientación de discont	Ni	fi	Fi
desfavorable	1596	0.98458	0.98458
regular	25	0.01542	1.00000
Total	1621	1.00000	

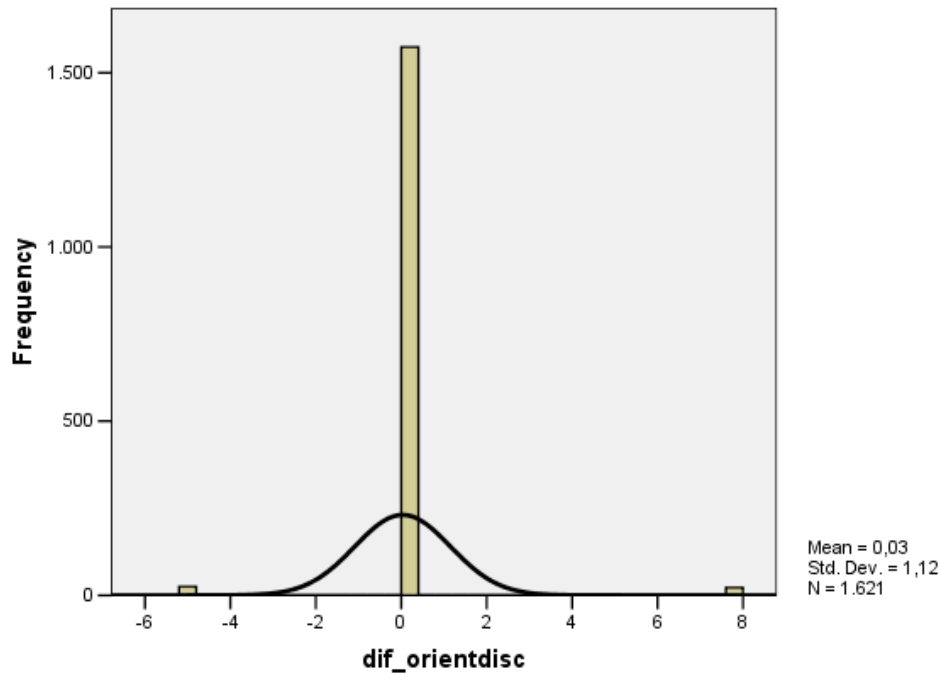




Al analizar los histogramas de errores Diferencia entre lo simulado y el estimados de campos se tiene los siguientes gráficos. Donde se puede apreciar que dichos histogramas están centrados alrededor de cero ; lo cual significa que la simulación efectuada no tiene sesgo.

Diferencia entre simulado y real espaciamento**diferencia entre datos simulados y reales aberturas**

Diferencia entre datos simulados y reales orientacion de discontinuidades



3.4 DISCUSION DE RESULTADOS

Los datos simulados comparados con los estimados tienen una correlación buena. La reproducción de los datos simulados refleja el comportamiento del fenómeno y reproducen con buena aproximación al fenómeno simulado.

El método Montecarlo usado es fácil de aplicar y representa una solución numérica rápida y al alcance de todos.

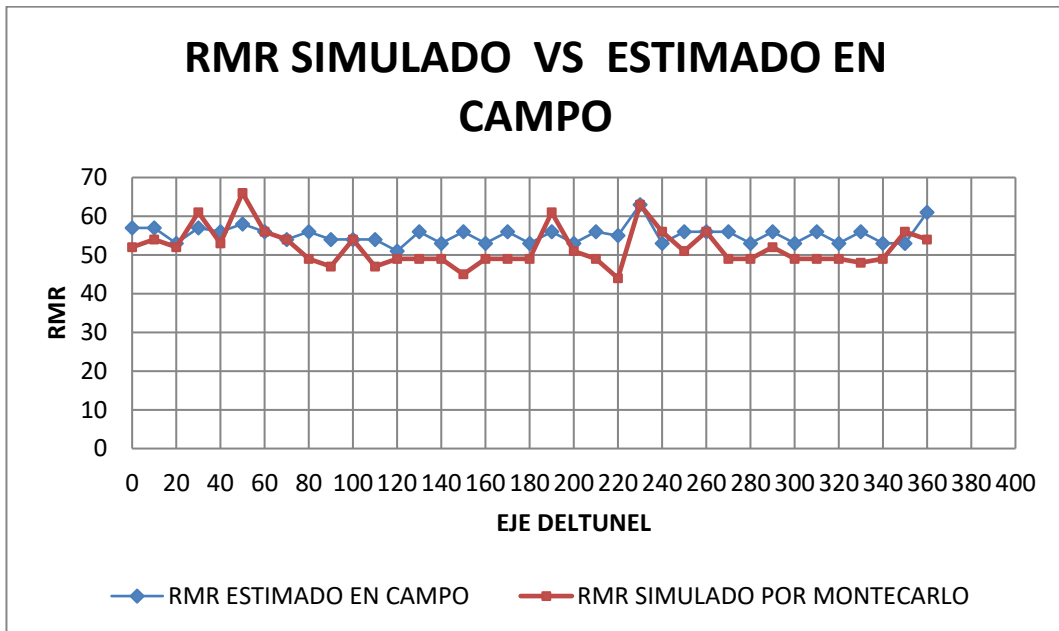
El análisis del histograma de errores no muestra sesgo al comparar con los datos "reales".

3.5 CORRELACION DE DATOS EXPERIMENTALES Y DATOS SIMULADOS

CORRELACION ENTRE EL RMR SIMULADO Y EL RMR ESTIMADO EN CAMPO

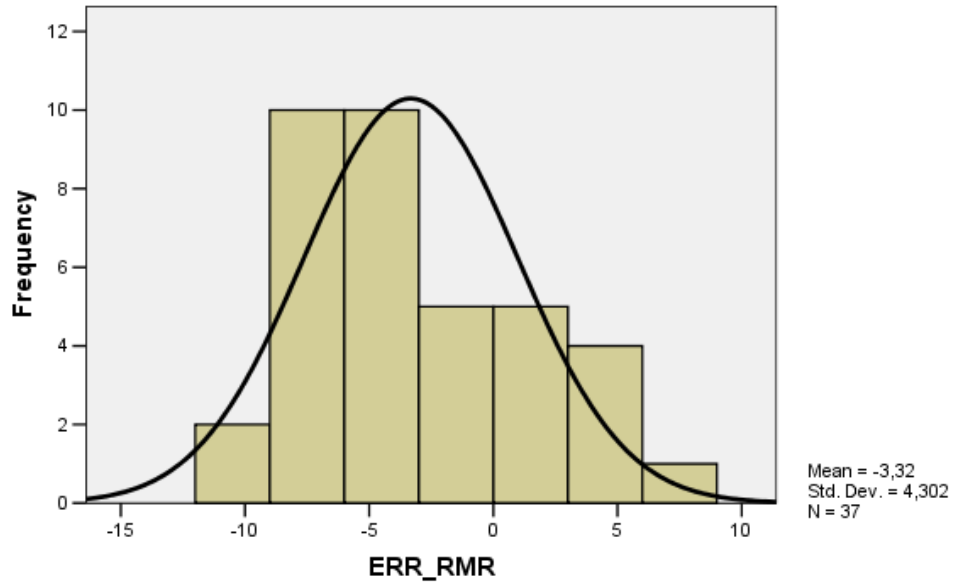
	ESTACION	DISTANCIA ALA DISCONTINUIDAD	RMR CALCULADO EN CAMPO	RMR SIMULADO MONTE CARLO	ERROR
0	E1	S- 0m	57	52	-5
10		S-10m	57	54	-3
20		S-20m	53	52	-1
30		S-30m	57	61	4
40		S-40m	56	53	-3
50		S-50m	58	66	8
60	E2	T-10m	56	56	0
70		T-20m	54	54	0
80	E3	T-30m	56	49	-7
90		T-40m	54	47	-7
100		T-50m	54	54	0
110		T-60m	54	47	-7
120		T-70m	51	49	-2
130		T-80m	56	49	-7
140		T-90m	53	49	-4
150		T-100m	56	45	-11
160		T-110m	53	49	-4
170		T-120m	56	49	-7
180		T-130m	53	49	-4
190		T-140m	56	61	5
200		T-150m	53	51	-2
210		T-160m	56	49	-7
220		T-170m	55	44	-11
230		T-180m	63	63	0
240		T-190m	53	56	3

250		T-200m	56	51	-5
260		T-210m	56	56	0
270		T-220m	56	49	-7
280		T-230m	53	49	-4
290		T-240m	56	52	-4
300		T-250m	53	49	-4
310		T-260m	56	49	-7
320		T-280m	53	49	-4
330		T-290m	56	48	-8
340		T-300m	53	49	-4
350		T-310m	53	56	3
360		T-320m	61	54	-7



HISTOGRAMA DE ERRORES

(RMR SIMULADO - RMR ESTIMADO EN CAMPO)



CONCLUSIONES

- La técnica de simulación de Montecarlo permite al ingeniero a cargo de cualquier proceso de producción, simular variables aleatorias y formular un planeamiento probabilístico
- El soporte matemático de función inversa, probabilidades, interpolación de Lagrange, teorema del límite central fortalecen al método de simulación Montecarlo dan fortaleza a su eficacia del método.
- La aplicación del método Montecarlo tiene aplicabilidad cuando las variables son aleatorias.
- El método de la simulación aplicando Montecarlo y la función inversa es aplicable en cualquier proceso de ingeniería, donde se pueda identificar a las variables aleatorias y se conozcan datos históricos

RECOMENDACIONES

- En cada operación u actividad que realicemos, debemos registrar datos históricos para tener cuantificado todos los histogramas experimentales que son la base para la simulación probabilística usando el método montecarlo.
- Tener como hábito el control estadístico de la calidad para disponer de la información de histograma de todas las actividades o procesos que se quiere analizar.

BIBLIOGRAFIA

1. BlankLeland P.E.&Tarquin Anthony .“Ingeniería Económica”,Mc Graw Hill, México, 2006
2. Coss Bu Raúl, “Simulación , un enfoque práctico” Limusa ,México 1994
3. Dowding Charles H. “ Blast vibration monitoring and control” 1985
4. Gitman Laurence J. “Principios de administración financiera”. Pearson, México , 2003
5. Guasch Antoni et al “Modelado y simulación,aplicación a los procesos logísticos de fabricación y servicios”.Alfaomega, México 2005
6. HitoshiKume. “Herramientas estadísticas para el mejoramiento de la calidad” Editorial Norma, Colombia, 1993
7. Judson John A. Harrison John P. “Engineering rock mechanics, an introduction to the principles” Pergamonpress,UK 1997.
8. Marín Suárez Alfredo, Notas de Clases de los cursos: Geoestadística I y II, Análisis de Sistemas Mineros UNI, Lima 2005
9. Naylor Thomas H; et al “Técnicas de simulación en computadoras Limusa , México 1982
10. Taylor Howard E.; Wade4 Thomas I.”Matemáticas Básicas con vectores y matrices”, Limusa 1974.
- 11.Tucker Howard G. ”Introducción a la teoría matemática de las probabilidades y estadística”Vinces Vives , Barcelon 1966.
- 12.Wilke F.L. “Simulation studies of computer-controlled traffic underground in large coal mines” in Decisión-Making in the mineral industry. The special volume 12 The Canadian institute of mining and metallurgy. 1971