

# UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

## FACULTAD DE CIENCIAS



### TESIS

#### COMPORTAMIENTO CRÍTICO DE OSCILONES DE SINE-GORDON PRODUCIDOS POR DEFORMACIONES DIMENSIONALES

PARA OBTENER EL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN FÍSICA

ELABORADA POR:

**Jose Tomas Galvez Ghersi**  
**ID 0000-0001-7289-3846**

ASESOR:

**Dr. Rosendo Ochoa Jimenez**  
**ID 0000-0001-8672-1084**

LIMA - PERÚ

2024

<b>Citar/How to cite</b>	Galvez Ghersi [1]
<b>Referencia/Reference</b>	[1] J. Galvez Ghersi, “Comportamiento crítico de oscilones de sine-Gordon producidos por deformaciones dimensionales” [Tesis de pregrado]. Lima (Perú): Universidad Nacional de Ingeniería, 2024.
<b>Estilo/Style:</b>	<b>IEEE</b>

<b>Citar/How to cite</b>	(Galvez, 2024)
<b>Referencia/Reference</b>	Galvez J. (2024). <i>Comportamiento crítico de oscilones de sine-Gordon producidos por deformaciones dimensionales</i> . [Tesis de pregrado, Universidad Nacional de Ingeniería]. Repositorio Institucional UNI.
<b>Estilo/Style:</b>	<b>APA (7ma ed.)</b>

## Resumen

Los oscilones son configuraciones relativistas de campo que pueden ser localizadas en el espacio, y oscilan en el tiempo con tiempos de vida que son mucho mayores que sus períodos de oscilación. En esta tesis, se simulan oscilones esfericamente simétricos que no se propagan y se producen por la deformación de breathers de la ecuación de sine-Gordon. El parámetro que controla dicha deformación es esencialmente la dimensionalidad del modelo, la que se considera como un parámetro real en vez de entero. Tras una necesaria reducción del número de parámetros que regulan las propiedades del oscilón, se escanea el espacio de parámetros iniciales para establecer un conexión continua entre breathers y oscilones para varias dimensionalidades. En los casos de deformaciones dimensionales pequeñas, se encuentra que los oscilones pueden ser descritos como breathers deformados en forma perturbativa. Sin embargo, en  $D \gtrsim 2$  dimensiones espaciales, se observan oscilones que presentan fases de contracción y expansión periódica. Sabiendo que las configuraciones estables e inestables se hallan en regiones disjuntas del espacio de parámetros iniciales, las soluciones con amplitud modulada se ubican en medio de ambas regiones. Ello implica que estas soluciones muestran la dinámica del comportamiento crítico en la vecindad del límite de estabilidad.

## Abstract

Oscillons are relativistic field configurations, which can be localized in the space and oscillate with lifetimes orders of magnitude larger than their oscillation periods. In this thesis, we simulate non-travelling spherically symmetric oscillons produced by the deformation of the one-dimensional breathers of the sine-Gordon model. The model dimensionality serves as a real – instead of integer – parameter controlling the deformation. After reducing the number of solution parameters, we scan the space of initial breather configurations to connect breathers and oscillons. Such a connection reveals that oscillons are well-approximated by breathers only in the perturbative limit. However, in  $D \gtrsim 2$  spatial dimensions, we observe solutions undergoing periodic phases of expansion and contraction of their cores. Knowing that the regions containing stable and unstable solutions are disjoint in the initial parameter space, we find that amplitude modulated solutions are located in between both stability regions. This implies that the dynamics of critical behavior around the stability limit is described by amplitude modulated solutions.

## Tabla de contenido

<b>Resumen</b>	<b>III</b>
<b>Abstract</b>	<b>IV</b>
<b>Introducción</b>	<b>XVIII</b>
<b>I. Definiciones (y soluciones) de breathers y oscilones de sine-Gordon</b>	<b>1</b>
A. Breathers y el modelo unidimensional de sine-Gordon .....	1
B. Ecuación radial de sine-Gordon $\varepsilon$ -deformada y sus soluciones .....	4
<b>II. Medición de parámetros diagnósticos a partir de las soluciones deformadas</b>	<b>10</b>
<b>III. Generación de oscilones por deformaciones dimensionales</b>	<b>17</b>
A. Caso $\varepsilon \lesssim 1$ : Oscilones a partir de deformaciones perturbativas .....	17
B. Caso $\varepsilon \gtrsim 1$ : Más allá del régimen perturbativo .....	26
<b>IV. Comportamiento crítico</b>	<b>35</b>
<b>V. Deformaciones dimensionales con duración finita</b>	<b>40</b>
<b>VI. Oscilones en otros modelos: deformando potenciales</b>	<b>46</b>
<b>VII. Implementación numérica, tests de convergencia y código</b>	<b>52</b>
A. Unidades adimensionales .....	52
B. Discretización espacial y temporal .....	53
C. Condiciones de frontera perfectamente absorbentes (PMLs) .....	56
D. Contracción y expansión periódica para oscilones de sine-Gordon en dos dimensiones .....	61
E. Tests de convergencia .....	62
F. Código en Fortran para la evolución de oscilones .....	66
<b>VIII. Conclusiones</b>	<b>71</b>
<b>IX. Referencias bibliográficas</b>	<b>76</b>

## Lista de tablas

<p>Tabla I.</p> <p>Tabla II.</p> <p>Tabla III.</p>	<p>Coeficientes de ajuste e incertidumbres para la energía y la frecuencia (a partir de los resultados perturbativos y no perturbativos) presentados en la Fig. XI (curva verde, panel derecho) y la fig. XIV. <math>E_0^&lt;</math> es consistente con la energía de un par <math>K\bar{K}</math> infinitamente separado, mientras que <math>E_0^&gt;</math> es la energía de un oscilón en dos dimensiones con frecuencia mínima. La última fila contiene los coeficientes de ajuste de la frecuencia mínima <math>\omega_{\min}</math> como una función de <math>\varepsilon</math>, la cual esta bien representada por la ley de potencias graficada en el panel inferior de la Fig. XIV.....</p> <p>Casos y duración (en unidades de cantidad de oscilaciones, dado el rango de frecuencias iniciales <math>\omega_{\text{ini}}</math>) de las trancisiones de una a dos dimensiones espaciales. La columna de la derecha contiene la cantidad de soluciones que decaen rápidamente, la que se obtiene al contarlas soluciones en los contornos grises directamente de los mapas de la Fig. XVII. ....</p> <p>Lista de resoluciones empleadas para resolver Ecns. (60a)–(60d) para <math>\varepsilon = 0.75</math>. Considerando <math>\ell = 100\mu^{-1}</math> y la condición de frontera absorbente centrada en el último punto de la malla de nodos de menor resolución, se realizan tests de convergencia para la configuración de campo que muestra fases periodicas de expansión y contracción del núcleo del oscilón, solución que se muestra en la Fig. VII. Los parámetros iniciales y las condiciones de frontera estan implementadas de manera fisicamente equivalente en todas las simulaciones, de otra manera, esta comparación no tendría sentido.....</p>	<p>36</p> <p>44</p> <p>63</p>
--	---	-------------------------------

## Lista de figuras

Figura I.	Perfiles radiales de máxima amplitud de los breathers en (3), donde $\phi_{\max}(x) \equiv \phi_B(t = 0, x \omega_B, \theta_0 = 0)$ corresponde a diferentes frecuencias de oscilación $\omega_B$ . Para $0 < \mu - \omega_B \ll \mu$ , los perfiles tienen amplitudes pequeñas en el origen y se aproximan lentamente a cero a medida que $\mu r \rightarrow \infty$ . Al tomar valores cada vez mas grandes de $\omega_B$ , el pico central de los breathers se vuelve más agudo y su decaimiento para radios grandes es mas rápido. Aquí se ilustran los breathers que sondean los puntos de inflexión del potencial ( $\omega_B = 0.92\mu$ ) y su máximo mas cercano ( $\omega_B = 0.71\mu$ ). Como referencia, también se grafican los breathers de mínima ( $\omega_B = 10^{-1}\mu$ ) y máxima ( $\omega_B = 0.95\mu$ ) frecuencia usados como condiciones iniciales para las simulaciones. ....	<a href="#">2</a>
Figura II.	Fases de evolución de un oscilón esféricamente simétrico en dos dimensiones, que se deforma a partir de un breather con $\omega_{\text{ini}} = 0.1\mu$ . Panel izquierdo: Fase transiente en la que el breather se deforma y la radiación clásica escapa del núcleo del oscilón. Panel derecho: Evolución de un oscilón estable, en la que el inserto graficado a la derecha muestra que aún hay radiación clásica que escapa del oscilón, sólo que ahora con menor amplitud. ....	<a href="#">7</a>
Figura III.	Comparando la evolución del perfil radial de un oscilón del modelo de sine-Gordon ( $\phi_{\text{osc}}$ ) en 3D (en líneas azules) con el perfil de un breather ( $\phi_B$ ) (en líneas rojas cortadas) en $t = 0$ y con una frecuencia de oscilación $\omega_{\text{inst}}/\mu = 0.482$ , extraída a partir de la amplitud del oscilón. Los picos de ambas soluciones tienen formas muy parecidas, diferenciándose sólo en las colas. ....	<a href="#">8</a>

- Figura IV. Estructura espacial, evolución temporal de los núcleos del oscilón y determinación de la frecuencia de oscilación ( $\omega_{\text{osc}}$ ) para  $\varepsilon = 0.75$ . Panel izquierdo: Evolución típica del perfil radial de un oscilón de larga vida, generado a partir de la deformación de un breather de sine-Gordon con frecuencia inicial de  $0.3\mu$  y  $\theta_0 = 0$ . Panel medio: Perfil radial del decaimiento de una solución (observar el eje temporal en escala logarítmica). Panel derecho (arriba): Evolución temporal de un oscilón evaluada en  $r = 0$  para determinar la frecuencia dominante ( $\omega_{\text{osc}}$ ) y la amplitud  $\mathcal{A}$ . La fase transiente, donde se emite más radiación y la amplitud cambia mas rápido, se muestra en la región achurada con líneas grises. Panel derecho (abajo): A partir del espectro de potencias temporal  $\mathcal{P}_\omega$  del panel superior, se determina  $\omega_{\text{osc}}/\mu$  tcomo la frecuencia angular con el pico de potencia mas alto (marcada como el punto rojo). ..... 11
- Figura V. Formación del oscilón atractor en el espacio de parámetros para  $\varepsilon = 0.5$ , el que se forma a partir de cuatro breathers diferentes. En los primeros dos paneles, se muestra la evolución de  $\mathcal{A}$  (la envolvente roja en la Fig. IV) y la frecuencia del oscilón como funciones del tiempo. Se puede observar que ambos parámetros cambian rápidamente hasta unirse a un atractor. Una vez que la convergencia al atractor ocurre, el flujo se ralentiza pero no se detiene. En el último panel se puede notar que el flujo en el espacio de parámetros colapsa a una línea que está alineada con la linea de flujo del oscilón (graficada en naranja y etiquetada como  $\varepsilon = 0$ ) dada por la Ec. (4). Las flechas solo denotan la dirección del flujo en el tiempo, ya que la velocidad se puede inferir a partir de los dos paneles anteriores de esta figura. ..... 14

Figura VI. Superficies que muestran la frecuencia del oscilón en función de la fase y la frecuencia de los breathers iniciales de sine-Gordon para  $\varepsilon = 0.125$ ,  $0.25$ ,  $0.5$  y  $0.75$ . Las regiones dentro de los contornos con frecuencia constante se producen a partir de una malla de  $50 \times 50$  configuraciones iniciales de frecuencias ( $\omega_{\text{ini}}$ ) y fases ( $\theta_0$ ), uniformemente distribuidas en los intervalos  $\log_{10}(\omega_{\text{ini}}/\mu) \in [-1, 0.02]$  y en  $\theta_0 \in [0, \pi]$ . La frecuencia de los oscilones estables (coloreada en marfil en todos los paneles), que se forman a partir de breathers con  $\omega_B = \omega_{\text{ini}} \lesssim 0.3\mu$ , crece con  $\varepsilon$ . Para el arreglo de condiciones iniciales aquí mostrado, la cantidad de escenarios en los que los oscilones (con  $\omega_{\text{osc}} < \mu$ ) se forman tiende a decrecer con el crecimiento de la dimensionalidad. Las soluciones en la región de transición (coloreada de naranja y rojo) pueden mostrar una modulación en su amplitud a lo largo de su evolución. La fig. VII se enfoca en los casos contenidos al interior del pequeño rectángulo azul ( $\varepsilon = 0.75$ , en el panel inferior derecho). Estas soluciones muestran una modulación periódica en el tamaño de sus núcleos. En el panel superior derecho (etiquetado como  $\varepsilon = 0.25$ ) se gráfica una curva verde en líneas cortadas, en la que la fase inicial toma un valor fijo de  $\theta_0 = 0.64$ . Se puede observar una región plana que se extiende sobre todo el intervalo de frecuencias iniciales coloreado de marfil. Esta región deja de ser constante cuando  $\omega_{\text{ini}}/\mu$  se acerca a uno. En este punto, es importante entender que en el desarrollo de las secciones de esta tesis, la dependencia de  $\omega_{\text{osc}}$  en  $\omega_{\text{ini}}$  se transforma de distintas maneras para representar el estado dinámico del campo oscilante. El límite superior de la frecuencia  $\omega_{\text{ini}}$  se escoge para resolver oscilones dentro de una caja de simulación de longitud  $\ell = 200$ , la cual permite resolver múltiples oscilones en paralelo sin afectar el costo computacional..... 16

Figura VII. Panel superior: Evolución temporal de  $\phi(0, t)/\phi_*$  para algunas de las soluciones en el rectángulo azul (caso  $\varepsilon = 0.75$ ) en la Fig. VI. La figura usa el mismo código de color que en la fig. VI, lo que muestra que las soluciones con amplitud modulada sirven como “soluciones de transición” entre los oscilaciones estables (en marfil y naranja) y las soluciones que decaen rápidamente (en gris). La frecuencia de la modulación se reduce a la vez que se escanea mas cerca de las soluciones que decaen rápidamente. Panel inferior izquierdo: Estructura espacial y evolución de una de las soluciones con amplitud modulada para  $\varepsilon = 0.75$ . La modulación en la amplitud está asociada a fases periódicas de expansión y contracción del núcleo del oscilón. Panel inferior derecho: Densidad de energía en función del radio y del tiempo para la solución ilustrada en el panel izquierdo. La modulación ocurre mientras la energía sale del núcleo del oscilón en una cantidad discreta de ráfagas. En los paneles al medio y a la derecha de la figura, las líneas negras entrecortadas corresponden a imágenes instantáneas del campo (panel izquierdo) y la densidad de energía (panel derecho) reescaladas para caber en ambos paneles. La rasterización de la imagen suprime la mayor parte de las estructuras de alta frecuencia que aparecen en la evolución del campo y de la densidad de energía. Las áreas sombreadas bajo las líneas dan estimado cualitativo de los valores del campo y de la densidad de energía. Los instantes de tiempo escogidos no son los mismos en ambos paneles: esto es útil para mostrar los picos y valles de las dos magnitudes..... 19

Figura VIII. Tras el conteo del número de soluciones en cada panel de la Fig. VI, se observa la deformación de las distribuciones discretas de probabilidades en función de la dimensionalidad  $\varepsilon$ . Los rectángulos contienen el 75 % de las soluciones muestreadas para cada valor de  $\varepsilon$ . Los puntos blancos representan la frecuencia media de la muestra que se desplaza hacia arriba al aumentar la dimensionalidad. Los puntos grandes semi-transparentes también se muestran para representar la dependencia de las distribuciones de frecuencias de oscilación con  $\varepsilon$ . ..... 23

- Figura IX. La convergencia de las curvas de energía y frecuencia (donde las energías y frecuencias de los oscilones se miden en instantes diferentes) es consistente con la representatividad de los oscilones como breathers en el límite  $\varepsilon \ll 1$ . La frecuencia de oscilación ( $\omega_{\text{osc}}$ ) después de algunos cientos de oscilaciones se ilustra como una función de la energía inicial ( $E_{\text{ini}}$ ) en puntos sólidos, mientras que la energía del oscilón y su frecuencia de oscilación se plotean usando puntos semi-transparentes. Las líneas cortadas corresponden a la frecuencia inicial en término de la energía inicial  $E_{\text{ini}}$ . Las líneas verticales indican la energía (llamada  $E_{\text{max}}$  en la leyenda) para la que los oscilones se acumulan, mostrando así la existencia de una energía máxima para la formación de oscilones. Los valores de  $\varepsilon$  empleados para generar la figura se muestran en la leyenda de colores en la esquina inferior derecha de la figura. .... 24
- Figura X. Energía inicial (panel izquierdo) y frecuencia de oscilación  $\omega_{\text{osc}}$  (panel derecho) en función de los parámetros de los breathers iniciales para  $\varepsilon = 1.25$ . La parametrización de condiciones iniciales con breathers de sine-Gordon descarta a una fracción no trivial de los estados accesibles (dentro del contorno de color gris en el panel derecho, y en la región sombreada del panel izquierdo). Lo que muestra que en el régimen no perturbativo los breathers pueden no tener suficiente energía para producir oscilones. Los contornos en líneas entrecortadas etiquetados como  $E_{\text{ini}}^{(\text{max})}$  indican el límite inferior de energía para el que los breathers generan (aproximadamente) el mismo oscilón. .... 27

Figura XI. Paneles izquierdos: Frecuencia de oscilación como función de la energía inicial (en puntos celestes) y después de algunos cientos de oscilaciones (puntos negros semitransparentes) para  $\varepsilon = 1.0$  (panel superior) y para  $\varepsilon = 1.8$  (panel inferior). Se usaron 50 breathers como condiciones iniciales con frecuencias en el rango  $\log_{10} \omega_{\text{ini}}/\mu \in [-1.0; 0.02]$  (el mismo que en la Fig. VI) y todos con fase inicial  $\theta_0 = 0$ . Es claro que en ambas figuras los cúmulos de puntos negros a bajas energías representan estados que han decaído. Dichos cúmulos también existen a energías más altas (marcadas con líneas rojas entrecortadas) y para frecuencias  $\omega_{\text{osc}} < \mu$ , en estos casos representan oscilaciones estables. Panel derecho: La ordenada de los puntos negros es la energía de los oscilaciones estables (indicadas con líneas rojas en los paneles izquierdos), para estas energías los estados se acumulan. Al graficarlas para diferentes valores de  $\varepsilon$  se obtiene una función que es (aproximadamente) monótonicamente creciente. Para instantes de tiempo mayores, los oscilaciones en  $D \lesssim 3$  dimensiones son los primeros en “escapar” de esta curva creciente, tal como se muestra con los puntos en la región azul. Esto se debe a que los oscilaciones pierden energía cuando fluyen a lo largo del atractor, mientras incrementan su frecuencia de oscilación, tal como se muestra en la fig. V. Como resultado de esto, los cúmulos de puntos correspondientes en los paneles izquierdos fluyen hacia arriba siguiendo las flechas de tiempo. ....

28

- Figura XII. Frecuencias y energías de oscilones en varias dimensionalidades. Se escogen cincuenta frecuencias de una muestra uniformemente distribuida en el rango  $\log_{10} \omega_{\text{ini}}/\mu \in [-1.0; 0.0]$  y diez fases iniciales en el rango  $\theta_0 \in [0; \pi/2)$  para cada valor de  $\varepsilon$ . Es posible distinguir la aparición de una banda de frecuencias libre de oscilones, esta se hace mas grande a la vez que  $\varepsilon$  crece. El gráfico insertado en la escala superior derecha representa el cambio en las distribuciones de probabilidades empíricas para  $\varepsilon \in [1.0; 1.375]$ . La deformación de los histogramas muestra explícitamente el colapso de un continuo de oscilones cuando  $\varepsilon \in [1.25; 1.375]$ . Este colapso se muestra de un modo distinto en la Fig. XI. .... 31
- Figura XIII. Evolución de la densidad de energía de una condición inicial tipo breather en el modelo de sine-Gordon en tres dimensiones para  $\omega_{\text{ini}} = 0.9\mu$  y  $\alpha = 20$ . En el caso sin deformar ( $\alpha = 1$ ), la frecuencia corresponde a la de un breather oscilando alrededor de  $\phi = 0$ . Panel izquierdo: fase inicial de la evolución correspondiente al colapso y expansión de cascarones esféricos. Panel derecho: dilución de los estados ligados, la solución desparece después de dos ráfagas intermitentes. .... 32
- Figura XIV. Energía máxima (panel superior) y frecuencia de oscilación mínima (panel inferior) de oscilones como una función del número de dimensiones espaciales, luego de recolectar los resultados de  $\omega_{\text{min}}$  y  $E_{\text{max}}$  de las subsecciones A y B. Las líneas entrecortadas coloreadas en verde y celeste en el panel superior muestran los comportamientos en los casos con  $\varepsilon > 1$  y  $\varepsilon < 1$  para la energía máxima en función de  $\varepsilon$ , respectivamente. En contraste a la energía máxima, la linea entrecortada negra en el panel inferior muestra que la frecuencia mínima se puede ajustar por una sola ley de potencias. Los contornos en azul y naranja son las regiones contenidas dentro de una distancia de una, dos y cinco veces los errores de los valores medidos. Estos contornos no deben ser usados para determinar valores de confianza. .... 34

- Figura XV. Diagrama de fases que muestra el colapso de estados hacia la curva de frecuencia mínima en la Fig. XIV con el incremento de la dimensionalidad. La línea punteada púrpura en  $\omega_{\max} = \mu$  representa a los estimados de máxima frecuencia en el régimen perturbativo. Los puntos negros representan a las frecuencias de oscilación máximas medidas en las simulaciones, las que muestran para  $\varepsilon \gtrsim 1$  el colapso de estados en el límite no perturbativo. El área cubierta en líneas azules contiene oscilaciones generados a partir de breathers dentro del rango escaneado de condiciones iniciales, mientras que el área en rojo es la región en el plano  $(\varepsilon, \omega_{\text{osc}})$  que no fue explorada. El rectángulo oblicuo, coloreado en distintos tonos de violeta, indica que los niveles de error en las frecuencias máximas para  $\varepsilon > 0.75$  son grandes. El tamaño del rectángulo no pretende mostrar la magnitud de los errores en  $\omega_{\max}$ . .... 38
- Figura XVI. Comparando la evolución en  $r = 0$  de la solución de las ecuaciones (26a) y (26b) (etiquetada como  $\phi(r = 0, t)/\phi_*$  y ploteada en una línea azul sólida), que pasó por una trancisión dimensional de 3D a 1D en un par de oscilaciones, con un breather de sine-Gordon centrado en el origen. El breather de sine-Gordon (etiquetado como  $\phi_B(r = 0, t)/\phi_*$  y graficado en puntos rojos) es un muy buen ajuste a la solución que sobrellevó una transición dimensional. Se consideró la fase inicial de  $\theta_B \approx -4\pi/21$  para completar el ajuste. Este resultado valida el procedimiento de extracción de frecuencias presentado en la Sección II, y que se usó en el desarrollo de este proyecto. .... 42

Figura XVII. Frecuencia del oscilón en función de la fase y frecuencia del breather inicial para la transición dimensional dinámica de una o dos dimensiones espaciales, cuyas duraciones se reportan en el cuadro II. Se considera una distribución de condiciones iniciales ( $\omega_{\text{ini}}$ ) y fases (que coincide con lo mostrado en la Fig. VI) uniforme en  $\log_{10}(\omega_{\text{ini}}/\mu) \in [-1, -0.02]$  y en  $\theta_0 \in [0, \pi]$ . Las estructuras graficadas en la Fig. VI aparecen en el límite de transiciones dimensionales abruptas, tales como los dos paneles inferiores, y del mismo modo se vuelven menos agudas (al punto de casi desparecer) con la ralentización de la transición (i.e., como los dos paneles en la parte superior). En todos los casos, los estados decaídos (dentro de los contornos grises) representan el 40% (aprox.) del total de 2500 soluciones evolucionadas. La simetría de las gráficas alrededor de  $\theta_0 = \pi/2$  solo se restaura en el límite  $\sigma_t \rightarrow 0$ . Se escogió que el rango de frecuencias de oscilación coincida con el rango de frecuencias para la línea de flujo  $\varepsilon = 1.0$  (los puntos naranja) en la Fig. XII. 43

Figura XVIII. Deformación de los potenciales según (31) para  $\varepsilon_V \in [0, 1]$ . Las modificaciones del potencial surten efecto gradualmente y se representan con respecto a la escala de densidad de energía  $V_0 = \mu^2 \phi_*^2$ . Como referencia, los potenciales de monodromía ( $\varepsilon_V = 1$ ) y de sine-Gordon ( $\varepsilon_V = 0$ ) se plotean en líneas sólidas color salmón y negro, respectivamente. El rango de amplitudes escaneadas se grafica en la región achurada, la cual está por los breathers con frecuencia  $\omega_{\text{ini}} = 0.96\mu$  (amplitud mínima) y  $\omega_{\text{ini}} = 0.79\mu$  (amplitud máxima). En el área achurada con líneas grises, los potenciales de monodromía y de sine-Gordon son sólo ligeramente distintos en su curvatura..... 47

- Figura XIX. Panel izquierdo: Distribución de frecuencias de oscilón  $\omega_{\text{osc}}$ , que parte de una distribución uniforme en  $\log_{10}(\omega_{\text{ini}}/\mu)$  en el rango  $-0.1 \leq \log_{10}(\omega_{\text{ini}}/\mu) \leq -0.015$ . Se toma una muestra de 50 condiciones iniciales uniformemente distribuidas en el intervalo indicado. El intervalo de frecuencias de oscilación se deforma como una función de  $\varepsilon_V$ . Las áreas sombreadas con líneas corresponden al Jacobiano  $Q_{\omega_{\text{osc}}} = N^{-1}|\text{d}\mathcal{W}_{\text{osc}}/\text{d}\mathcal{W}_{\text{ini}}|^{-1}$ , mientras que las áreas sombreadas en colores semitransparentes determinan el mapa inverso  $\mathcal{W}_{\text{osc}}^{-1}(\mathcal{W}_{\text{ini}})$ . En la medida en que los intervalos de frecuencia de oscilación se contraen con los cambios en curvatura del potencial de sine-Gordon, una muestra uniformemente distribuida en  $\log_{10}(\omega_{\text{osc}}/\mu)$  se deforma al punto de tener un mayor número de estados accesibles en las frecuencias mas bajas del espectro. Panel derecho: Deformación continua de las curvas de energía versus frecuencia de oscilación para varios estados intermedios de deformación del potencial. El gráfico insertado a la derecha muestra que las líneas de flujo concurren en el límite de  $\varepsilon_V \rightarrow 0$ . Lo cual es consistente con los resultados de las deformaciones dimensionales perturbativas mostrados en la Fig. IX..... 49
- Figura XX. Conservación de la energía para un breather de sine-Gordon con  $\omega_{\text{ini}} = 0.794\mu$  y  $\theta_0 = 0$ , que evoluciona a partir de las ecuaciones del movimiento en (60a–60d) para el caso  $\varepsilon = 0$ . Esto muestra que las condiciones de frontera absorbentes no afectan a la solución que esta al interior del volúmen de simulación..... 58
- Figura XXI. Impacto de un paquete de onda Gaussiano en una condición de frontera absorbente. El flujo escalar se reduce en 9 o 10 ordenes de magnitud luego de impactar la barrera absorbente por la primera vez, lo que muestra que la implementación funciona correctamente. Con el propósito de mostrar la acción de la PML, la gráfica incluye solo algunos de los puntos de colocación en los que se encuentra la barrera absorbente. El ancho de la barrera no se considera como parte de la caja de simulación. .... 60

- Figura XXII. Evolución de una condición inicial tipo breather en el modelo de sine-Gordon bidimensional (sin simetría esférica) para  $\omega_{\text{ini}} = 0.63\mu$ . Panel izquierdo: Proyección de la solución en el plano  $y = 0$ , que muestra las fases periódicas de contracción y expansión del núcleo del oscilón. Panel derecho: Evolución de la solución en el origen, la cual es consistente con las modulaciones en la amplitud descritas durante las discusiones del régimen perturbativo en la subsección A. .... 61
- Figura XXIII. Panel izquierdo: Coeficientes espectrales en función del número de puntos de colocación, los que corresponden a la solución en la Fig. VII (paneles al medio y a la derecha) para  $\varepsilon = 0.75$ . La condición inicial es un breather parametrizado por  $\omega_{\text{ini}} = 0.437\mu$  y  $\theta_0 = 0.6\pi$ , se plotea la solución en  $t = 10^4\mu^{-1}$  para las resoluciones reportadas en el cuadro III. Los resultados en todas las resoluciones coinciden en los primeros cientos de puntos, los que son suficientes para resolver el núcleo del oscilón. Panel derecho: Campo oscilante en función del radio para  $t = 10^4\mu^{-1}$  para todas las resoluciones. Es en el origen de coordenadas donde la diferencia entre resoluciones es apenas visible; sin embargo, es correcto afirmar que todas las soluciones coinciden aproximadamente. .... 63
- Figura XXIV. Restas entre simulaciones generadas a diferentes resoluciones, pero con condiciones físicas equivalentes, en el radio  $r = r_{\text{max}}$ , donde  $r_{\text{max}}$  es la posición radial en las diferencias entre las configuraciones de campo son las máximas. El error numérico se reduce a medida de que las simulaciones numéricas se resuelven con mayor resolución (con mas puntos de colocación). .... 64

## Introducción

Los oscilones son un conjunto particular de soluciones de teorías de campos relativistas no lineales que tienen largos tiempos de vida, estas soluciones oscilan en el tiempo y pueden ser localizadas en el espacio [1]. En este contexto, se entiende que sus tiempos de vida son varios órdenes de magnitud mayores que su periodo de oscilación. Estas soluciones mantienen su estabilidad gracias a un delicado equilibrio entre fuerzas atractivas y efectos dispersivos, previniéndolas del colapso o de la dilución. La existencia de oscilones es de especial relevancia para la cosmología del universo temprano, donde son producidos al final de la inflación cósmica [2]. Se especula que su presencia tiene varias consecuencias interesantes, entre las que se incluyen: posibles conexiones con la materia oscura [3, 4], así como una variedad de efectos e interacciones con modos escalares y tensoriales del campo gravitatorio [5, 6, 7, 8].

A pesar de los amplios e incontables esfuerzos hechos en trabajos anteriores [9, 10, 11, 12, 13, 14, 4, 15], aún no se comprenden las causas de la longevidad de los oscilones. Sin embargo, existe una clase similar de soluciones exactas del modelo de sine-Gordon llamada *breather*, que promete ser útil para esclarecer las causas de muchas de las propiedades del oscilón. Los breathers son estados dinámicos en los que el campo oscila como en una respiración, tal como su nombre en inglés lo describe. Estos son estados en los que un *kink* y un *antikink* están ligados. Cuando el acople entre ambos es fuerte, el breather se presenta como un perfil de campo localizado en el espacio que oscila en el tiempo. Mientras que en el caso del acople débil, se observa como el resultante de la colisión de un *kink* con un *antikink*: estos se alejan uno del otro después de la colisión para luego acercarse y repetir el choque. El primer régimen de acople es en el que el breather muestra su utilidad, ya que tiene las mismas propiedades estructurales que el oscilón. Sin embargo, en contraste a los oscilones, los breathers tienen tiempos de vida infinitos [16]. Debido a su parecido estructural, es natural buscar conexiones entre breathers y oscilones. Incluso cuando no es el objetivo de esta tesis, la oscilación perenne de los breathers se debe a la bien estudiada integrabilidad de las soluciones de las ecuaciones de sine-Gordon [17]. Potencialmente, esta conexión puede explicar la longevidad de los oscilones a través del rompimiento suave de esta integrabilidad.

El primer objetivo de esta tesis es conectar de forma explícita entre los oscilones esféricamente simétricos y los breathers unidimensionales de sine-Gordon. Para hacer la conexión más transparente, esta tesis se enfoca en el modelo de sine-Gordon en  $D > 1$  dimensiones espaciales; sin embargo, se hará una pequeña extensión del análisis a los modelos de monodromía de axiones para mostrar la generalidad del enfoque presentado. Es bien conocido que el modelo de sine-Gordon en  $D > 1$  dimensiones ya no es integrable, por lo que no genera soluciones localizadas con tiempos de vida infinitos. Sin embargo, el modelo de sine-Gordon admite oscilones, que son (aproximadamente) esféricamente simétricos en dos y tres dimensiones espaciales. Una conjetura natural es que estos oscilones son una consecuencia de romper la integrabilidad de las ecuaciones de sine-Gordon en una dimensión. Para hacer esta conexión explícita, se explorarán soluciones tipo oscilón de las ecuaciones de sine-Gordon en  $D \neq 1$  dimensiones espaciales. Esto implica que se tiene que modificar el modelo de sine-Gordon para introducir un término que contiene una derivada espacial de primer orden proporcional a  $\varepsilon \equiv D - 1$ . Sin embargo, es importante notar que tanto oscilones como breathers tienen las mismas condiciones de frontera en el origen. Por lo que es razonable interpretar a la ecuación radial resultante como una deformación de la ecuación de sine-Gordon en una dimensión. Con el fin de establecer una conexión suave y continua de los oscilones a los breathers en 1D, se permite que  $\varepsilon$  (y por lo tanto, el número de dimensiones espaciales) sea un parámetro real en vez de entero. Por lo que cuando  $\varepsilon \ll 1$ , la deformación a las ecuaciones es pequeña, y se puede esperar que los breathers sean soluciones aproximadas al modelo de sine-Gordon en  $D \neq 1$  dimensiones.

Con esto en consideración, se simula numericamente la evolución de una familia de perfiles radiales de breathers usando las ecuaciones de sine-Gordon en  $D$  dimensiones para un rango de dimensionalidades. Como es de esperarse, para  $\varepsilon \ll 1$ , la familia entera de breathers iniciales evoluciona para formar oscilones (es decir, forman estructuras oscilantes localizables en el espacio con tiempos de vida mucho mayores que sus periodos de oscilación). Ello provee una conexión explícita entre los oscilones del modelo de sine-Gordon y los breathers, como se planteó anteriormente. En este límite, los oscilones tienen tiempos de vida muy largos, por lo que no decaen durante la duración de las simulaciones ( $\sim 1000$  oscilaciones). La aplicación de los métodos perturbativos aplicados en forma estándar no es suficiente para representar a los oscilones en  $D \gtrsim 2$  dimensiones. Es en este régimen en el que el uso de técnicas de renormalización numérica (NDRG, por sus siglas en inglés)

[18] promete ser útil al momento de construir oscilones renormalizados usando la solución analítica de los breathers. La derivación de una fórmula semianalítica para predecir los tiempos de vida de los oscilones en  $D \neq 1$  dimensiones puede ser posible tras combinar resultados del los regímenes perturbativos y no-perturbativos. Estas investigaciones serán materia de estudio en futuros trabajos.

Hay una mirada de parámetros medibles y significativos para determinar el estado dinámico de los oscilones producidos de esta manera, tales como la curvatura en el origen, la energía emitida en las “colas”, el radio promedio, el ancho, la tasa de decaimiento, etc. En este estudio se elige como parámetros diagnósticos a la amplitud, la frecuencia de oscilación en el origen y la energía de la solución, con el objetivo de describir el estado dinámico de las deformaciones. Basta con la amplitud y la frecuencia de oscilación para mostrar de forma explícita la presencia de atractores en el espacio de funciones [19, 20, 21]. Las soluciones fluyen rápidamente hacia estos atractores a medida que se deforman para convertirse en oscilones. Por otro lado, los oscilones producidos tras deformar breathers se manifiestan en un rango de energías y frecuencias de oscilación, y la relación entre dichas frecuencias y energías en ese rango se extiende de manera continua desde la relación conocida para la energía del breather en función de la frecuencia. Esa misma relación también muestra (a) la existencia de oscilones con energía máxima y frecuencia mínima; así como (b) indicaciones claras de un umbral de mínima frecuencia y máxima energía cuando  $\varepsilon \sim \mathcal{O}(1)$ . Los resultados muestran también que todo un continuo de oscilones, acotado por configuraciones de máxima y mínima energía, colapsa para formar (aproximadamente) un único oscilón cuando  $\varepsilon \sim 2$ . Dicho colapso de estados muestra la forma en que el comportamiento crítico aparece en la formación de oscilones, el cual es el objetivo central de este trabajo.

La conexión entre breathers y oscilones revela cierta preferencia para formar oscilones a partir de breathers con más energía potencial que cinética. A modo de experimento conceptual, se modifican las ecuaciones del movimiento para demostrar que esta preferencia se debe a la instantaneidad de las transiciones dimensionales. Por otro lado, este trabajo muestra que es posible usar el mismo lenguaje de deformaciones continuas para modificar el potencial de campo. Concretamente, se deforma el potencial sinusoidal característico del modelo de sine-Gordon hasta transformarlo en el potencial de monodromía de axiones

[22, 23, 24, 25], en el que se sabe que los oscilones existen.

Esta tesis sirve de base para comprender los resultados de [26], los cuales han sido recientemente publicados por quien presenta este manuscrito. El trabajo se organiza de la siguiente manera. En la sección I, se revisa el modelo de sine-Gordon y se presenta la solución de breather junto con sus propiedades más notables. Asimismo, se presenta el modelo de sine-Gordon deformado por el término dimensional, del cual se pueden producir oscilaciones esféricamente simétricas al usar breathers como condiciones iniciales. En la sección II, se muestra la estructura espacial y la evolución de oscilaciones y soluciones inestables de las ecuaciones deformadas de sine-Gordon. En esta sección también se explica el método con el que se mide la frecuencia de oscilación de las soluciones, la cual se trata como un parámetro de control desde el que se compara a los oscilones con los breathers. Adicionalmente, en la misma sección se muestra la presencia de atractores en el espacio de parámetros. Considerando 2500 perfiles de breathers como condiciones iniciales, en la sección III se hace un escaneo de las energías y frecuencias de los oscilones producidos en un rango de deformaciones dimensionales. Entre las soluciones escaneadas, se encuentra una cantidad no trivial de oscilones que sobrellevan fases periódicas de expansión y contracción de sus núcleos. Del mismo modo, los resultados muestran que en el límite  $\varepsilon \ll 1$  es razonable usar breathers como aproximaciones de los oscilones; sin embargo, la conexión es más sutil para oscilones en  $D \geq 2$  dimensiones. Desde los resultados en la sección III, se muestran los cambios en las características del atractor con el aumento de la dimensionalidad. En la sección IV, se presenta el colapso de un continuo de oscilones en un único estado, siendo este colapso una clara manifestación del comportamiento crítico en la formación de oscilones. En la sección V, se experimenta con los efectos de una dimensionalidad dinámica del espacio-tiempo en oscilones. Lo que implica que las transiciones dimensionales tienen una duración. Aquí se investiga cómo es que transiciones con duraciones diferentes modifican el mapa de frecuencias de los oscilones resultantes. Asimismo, el enfoque desarrollado en esta sección permite validar el método de extracción de frecuencias presentado en la sección II. La sección VI extiende el tratamiento propuesto en las secciones anteriores al caso de deformaciones en el potencial de campo al sugerir un modelo en el que la deformación es ajustable. El potencial sinusoidal del modelo de sine-Gordon se deforma hasta convertirse en un modelo de monodromía de axiones. El principal resultado de esta sección es que en la medida en que el potencial se deforma,

las soluciones se acumulan en una región del espacio de parámetros mostrando oscilaciones con energía máxima (o frecuencia mínima). Lo cuál es análogo al caso de las deformaciones dimensionales. Los procedimientos de análisis numérico y las rutinas computacionales pseudoespectrales para la evolución de las ecuaciones de campo se presentan en el sección VII. El código usado para la evolución de oscilaciones se presenta en la subsección F, dentro de la misma sección VII. Finalmente, en la sección VIII se incluyen las discusiones y conclusiones de este estudio. A lo largo de este estudio, se considera la signatura  $(+, -, -, -)$  para escribir las expresiones relativistas de campo escalar.

## I. Definiciones (y soluciones) de breathers y oscilones de sine-Gordon

El primer objetivo de esta tesis es conectar a los oscilones que aparecen en teorías de campo relativistas con los breathers, los cuales son una clase especial de soluciones de las ecuaciones de sine-Gordon en una dimensión. En esta sección, se presentan los fundamentos y propiedades de los breathers de sine-Gordon, así como se describen los procedimientos sobre los que se construye esta conexión. Primero, se revisan algunas características de la ecuación de sine-Gordon y los breathers. A continuación, se presenta la ecuación que gobierna la dinámica de las soluciones esféricamente simétricas del modelo de sine-Gordon. Aquí tambien se desarrolla la interpretación de esta ecuación como una deformación de la ecuación unidimensional. Esta interpretación es una motivación para promover los perfiles de los breathers a perfiles radiales en D dimensiones para su uso como condiciones iniciales. Por lo que es razonable esperar que estos breathers iniciales evolucionen paulatinamente hasta converstirse en oscilones.

### A. Breathers y el modelo unidimensional de sine-Gordon

El modelo de sine-Gordon model es una teoría de un campo escalar relativista que evoluciona en un potencial tipo coseno

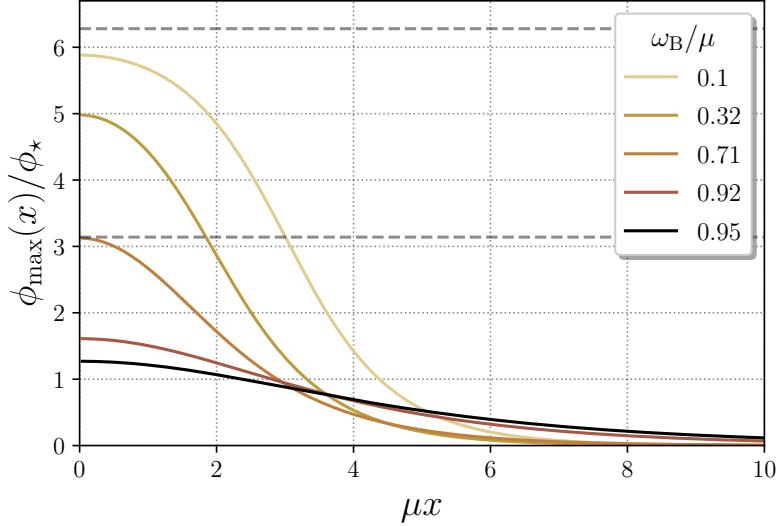
$$V_{SG} = \mu^2 \phi_*^2 \left[ 1 - \cos \left( \frac{\phi}{\phi_*} \right) \right], \quad (1)$$

donde  $\phi_*$  y  $\mu$  son parámetros que fijan las escalas de amplitud y masa características del potencial. En esta misma ecuación también se introduce la escala de densidad de energía  $V_0 \equiv \mu^2 \phi_*^2$ .

En una dimensión espacial, las ecuaciones del movimiento para el modelo de sine-Gordon son

$$\frac{d\phi}{dt} = \Pi \quad (2a)$$

$$\frac{d\Pi}{dt} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \mu^2 \phi_* \sin \left( \frac{\phi}{\phi_*} \right). \quad (2b)$$



**FIGURA I:** Perfiles radiales de máxima amplitud de los breathers en (3), donde  $\phi_{\max}(x) \equiv \phi_B(t = 0, x | \omega_B, \theta_0 = 0)$  corresponde a diferentes frecuencias de oscilación  $\omega_B$ . Para  $0 < \mu - \omega_B \ll \mu$ , los perfiles tienen amplitudes pequeñas en el origen y se aproximan lentamente a cero a medida que  $\mu r \rightarrow \infty$ . Al tomar valores cada vez más grandes de  $\omega_B$ , el pico central de los breathers se vuelve más agudo y su decaimiento para radios grandes es más rápido. Aquí se ilustran los breathers que sondan los puntos de inflexión del potencial ( $\omega_B = 0.92\mu$ ) y su máximo más cercano ( $\omega_B = 0.71\mu$ ). Como referencia, también se grafican los breathers de mínima ( $\omega_B = 10^{-1}\mu$ ) y máxima ( $\omega_B = 0.95\mu$ ) frecuencia usados como condiciones iniciales para las simulaciones.

Para fijar la terminología, a partir de ahora se hará referencia a estas ecuaciones como el modelo (o las ecuaciones) de sine-Gordon en una dimensión. Estas ecuaciones poseen propiedades muy especiales, tales como su integrabilidad, la existencia de una infinita jerarquía de cargas conservadas [27, 28, 29, 30], así como soluciones exactas a través del método inverso de la dispersión.

De todas estas propiedades, la más relevante para los fines de este trabajo es la existencia de una familia de soluciones espacialmente localizadas y con periodicidad temporal exactas – los breathers. En particular, los breathers tienen un tiempo de vida infinito, que esta íntimamente relacionado a la integrabilidad de (2). Es conveniente parametrizar a un breather ubicado en el origen de coordenadas a través de su frecuencia  $\omega_B$  y su fase inicial  $\theta_0$

$$\mathcal{R}(x) = \frac{\sqrt{\mu^2 - \omega_B^2}}{\omega_B} \operatorname{sech} \left( \sqrt{\mu^2 - \omega_B^2} x \right) \quad (3a)$$

$$\Psi(x, t) = \mathcal{R}(x) \cos(\omega_B t - \theta_0) \quad (3b)$$

$$\frac{\phi_B}{\phi_*} = 4 \tan^{-1} (\Psi) \quad (3c)$$

$$\frac{\Pi_B}{\mu \phi_*} = -4 \frac{\omega_B}{\mu} \frac{\mathcal{R}}{1 + \Psi^2} \sin(\omega_B t - \theta_0). \quad (3d)$$

Lo que implica que  $\omega_B < \mu$ . Esto indica que el breather es un estado que mantiene acoplado al par kink-antikink ( $K\bar{K}$ ) y su frecuencia de oscilación tiene que ser menor a la de una onda propagándose libremente. Para verificar esto, basta romper esta condición y reemplazar en (3) para obtener soluciones libres que se propagan en todo el dominio.

La fig. 1 ilustra algunos de los perfiles del breather para algunos valores destacables de  $\omega_B$  considerando  $t = 0$  y  $\theta_0 = 0$ . Por razones que se aclararán mas adelante, los perfiles se grafican respecto a la coordenada radial  $r = |x|$  en una dimensión. En este punto es importante entender que los breathers son simétricos respecto al origen, por lo que no se pierde ninguna información al hacer esta elección de coordenadas.

Existen dos regímenes asintóticos para los breathers: cuando  $\omega_B \sim 1$ , el par  $K\bar{K}$  está fuertemente acoplado y el breather es una solución localizada que oscila libremente. Mientras tanto en el caso  $\omega_B \ll 1$ , los breathers también representan un par  $K\bar{K}$ , pero esta vez el acople es débil y el kink colisiona perpetuamente con el antikink. Entre colisiones, ambas estructuras se alejan la una de la otra. Las soluciones en este régimen no guardan ningún parecido estructural con los oscilones, por lo que no son parte de este estudio.

La frecuencia de oscilación (que es la inversa del periodo) también determina otras propiedades estructurales del breather, como la amplitud del pico en el origen. Al conocer la solución analítica dada por la Ec. (3), es posible calcular la amplitud del pico del breather ( $\mathcal{A}$ ) en el origen

$$\frac{\mathcal{A}}{\phi_*} = 4 \tan^{-1} \left( \frac{\mu}{\omega_B} \sqrt{1 - \frac{\omega_B^2}{\mu^2}} \right), \quad (4)$$

la energía

$$\frac{E_B}{\mu \phi_*^2} = 16 \sqrt{1 - \frac{\omega_B^2}{\mu^2}}, \quad (5)$$

la tasa de decaimiento de la envolvente

$$\lim_{\mu r \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu r} \ln \left( \frac{\mathcal{A}}{\phi_*} \right) \sim \sqrt{1 - \frac{\omega_B^2}{\mu^2}}, \quad (6)$$

entre muchos otros parámetros geométricos y físicos.

## B. Ecuación radial de sine-Gordon $\varepsilon$ -deformada y sus soluciones

En esta sección se considera al modelo de sine-Gordon en  $D > 1$  dimensiones. Del mismo modo, también se presenta al oscilón como un objeto de interés en los casos de  $D = 2$  y  $D = 3$  [31, 32]. Estas soluciones también han sido obtenidas en una gran variedad de teorías de campo no lineales. Tal como se mencionó anteriormente, los oscilones son estructuras localizadas en el espacio que oscilan en el tiempo. Es por esto que estas soluciones comparten varias propiedades estructurales clave con los breathers de sine-Gordon. Sin embargo, en contraste con los breathers, los oscilones tienen un tiempo de vida finito. A pesar de esto, existen casos en los que los tiempos de vida pueden ser tan largos que es difícil precisar el instante exacto en que estas soluciones decaen. La mayor parte de los oscilones evolucionan para convertirse en un estado oscilante equipado con simetría esférica. Por lo tanto, bastará con considerar la evolución de sus perfiles radiales, tal como se muestra a continuación.

En simetría esférica, los perfiles en  $D$  dimensiones espaciales satisfacen las siguientes ecuaciones del movimiento

$$\frac{d\phi}{dt} = \Pi \quad (7a)$$

$$\frac{d\Pi}{dt} = \left[ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\varepsilon}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right] \phi - \mu^2 \phi_* \sin \left( \frac{\phi}{\phi_*} \right), \quad (7b)$$

donde se define  $\varepsilon \equiv D - 1$ . Incluso cuando el estudio de asimetrías en la forma de los oscilones es una valida extensión de estos esfuerzos [33, 34], el tratamiento perturbativo de la excentricidad no es parte del desarrollo de esta tesis. Con el propósito de distinguir las soluciones oscilantes y localizadas de (7) de los breathers unidimensionales de sine-Gordon, se denomina a las ecuaciones en (7) *como ecuaciones de sine-Gordon  $\varepsilon$ -deformadas*, o también *modelo de sine-Gordon  $D$ -dimensional*. La comparación directa con la Ec. (2) re-

vela que el término proporcional a  $\varepsilon$  puede ser tratado como una perturbación a la ecuación unidimensional de sine-Gordon. Siguiendo esa lógica, es válido permitir que  $\varepsilon$  tome valores reales, en vez de restringir sus valores a números enteros<sup>1</sup>. Este artificio provee un control de la ruptura de las propiedades de la ecuación de sine-Gordon, tales como la integrabilidad, y por lo tanto, la presencia de una infinita cantidad de cargas conservadas.

Con la noción de (7) como una deformación que modifica las soluciones del modelo de sine-Gordon en  $1D$ , se busca entender cual es el destino final de los breathers cuando  $\varepsilon > 0$ . En con esta motivación que se plantean las siguientes condiciones iniciales

$$\phi(r, t = 0) = \phi_B(r, t = 0 | \omega_B = \omega_{\text{ini}}) \quad (8a)$$

$$\Pi(r, t = 0) = \Pi_B(r, t = 0 | \omega_B = \omega_{\text{ini}}), \quad (8b)$$

donde se define  $\omega_{\text{ini}}$  como el valor de la frecuencia del breather  $\omega_B$  usado como condición inicial. Debido a que las soluciones de breather en (3) son pares respecto al origen de coordenadas, los perfiles correspondientes en  $\varepsilon + 1$  dimensiones no presentan comportamiento singular en  $\mu r = 0$ . En el caso  $\varepsilon = 0$  se recupera la solución de breather del modelo de sine-Gordon. Es lógico esperar que cuando  $\varepsilon \ll 1$ , la evolución generará configuraciones de campo similares a los breathers. Además, en este mismo límite, cuando la frecuencia inicial  $\omega_{\text{ini}} \sim \mu$ , las soluciones obtenidas son aún localizables – sólo que son mas anchas cuando  $\omega_{\text{ini}} \rightarrow \mu$  – y oscilan en el tiempo en forma estable. Al fijar  $\varepsilon \neq 0$ , se rompe la integrabilidad del modelo, lo que genera soluciones con tiempos de vida finitos (aunque cada vez mas largos a medida que  $\varepsilon$  sea mas pequeño). En breves palabras, las soluciones resultantes son oscilaciones esféricamente simétricos. La determinación de la frecuencia inicial del oscilón  $\omega_{\text{ini}}$  como la frecuencia del breather  $\omega_B$  es una simplificación mayor al estudiar el sistema, ya que es bien sabido que basta con este parámetro para fijar todas las propiedades estructurales del perfil inicial. Esto también implica que la frecuencia inicial de oscilación provee información (al menos parcial) de todas las otras propiedades del oscilón. Para fijar convenciones, se hará referencia a las soluciones localizadas de las Ecs. (7) como oscilaciones esféricamente simétricos en  $D \neq 1$  dimensiones, obtenidos a partir del modelo de sine-Gordon  $\varepsilon$ -deformado.

Una vez que se definió el objeto de estudio, es posible tener alguna idea analítica de

---

<sup>1</sup>Aunque la definición de simetría esférica no sea un concepto manejable en dimensiones fraccionarias.

como es que la deformación de la ecuación modifica el comportamiento de la asintótico de la solución. Para ello se asume que la solución es de la forma

$$\phi(r, t) \approx A(r) \cos(\omega t + \Theta). \quad (9)$$

Ya que se buscan soluciones oscilantes y localizadas se requiere que  $A(r) \ll 1$  en el límite  $\mu r \rightarrow \infty$ , es por eso que

$$\begin{aligned} A(r) &\sim r^{-\varepsilon/2} \exp\left(-r\sqrt{\mu^2 - \omega^2}\right) \\ &\sim \exp\left(-r\sqrt{\mu^2 - \omega^2}\right) \left[1 - \frac{\varepsilon}{2} \ln r + \mathcal{O}(\varepsilon^2)\right], \end{aligned} \quad (10)$$

en este límite. Al asumir la existencia de una solución con frecuencia  $\omega$  y de largo tiempo de vida, se observa que la deformación proporcional a  $\varepsilon$  induce la correspondiente deformación al comportamiento asintótico del breather con la misma frecuencia de oscilación dada en (6). Asimismo, el caso  $\omega > \mu$  corresponde a la emisión de frentes de onda libres. Es por eso que sólo aquellos estados con  $\omega < \mu$  describen soluciones localizadas.

No hay manera de entender con más detalle sobre es el destino final de la deformación de breathers por las ecuaciones de sine-Gordon  $\varepsilon$ -deformadas sin soluciones numéricas. Esta investigación determina cuáles son los valores de  $\omega_B = \omega_{\text{ini}}$  para los que las soluciones de larga vida existen, y para esto, el comportamiento asintótico resulta ser insuficiente. Para la evolución temporal, se hará uso del método simpléctico de octavo orden de Gauss-Legendre [35]. Los oscilones que existen por largos periodos necesitan que se resuelva de manera precisa la emisión de modos radiativos a largas distancias. Esta tarea requiere de una enorme cantidad de puntos en la malla de simulación, lo que puede elevar el costo computacional de este cálculo al punto de hacerlo numérico irrealizable. La adición de condiciones de frontera perfectamente absorbentes (PMLs, por sus siglas en inglés) permite que solo necesitemos de suficiente resolución al interior de una región acotada. Los detalles de la implementación de estas condiciones de frontera y el uso apropiado de magnitudes adimensionales se presentan en el sección VII.

La evolución de los oscilones estables producidos a partir de las Ecs. (7) tiene dos etapas bien diferenciadas. Entendiendo que los breathers iniciales no son soluciones del modelo deformado, es natural que exista una fase en la que la solución emita energía y

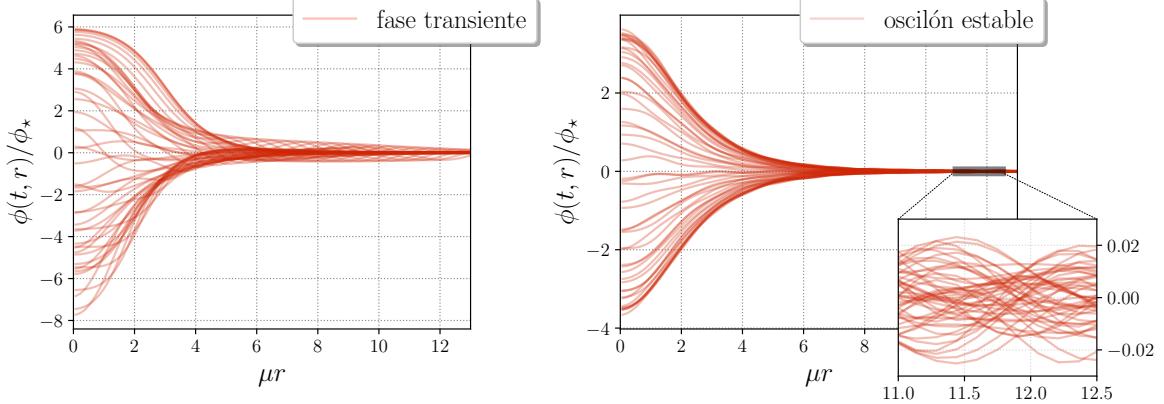


FIGURA II: Fases de evolución de un oscilón esféricamente simétrico en dos dimensiones, que se deforma a partir de un breather con  $\omega_{\text{ini}} = 0.1\mu$ . Panel izquierdo: Fase transiente en la que el breather se deforma y la radiación clásica escapa del núcleo del oscilón. Panel derecho: Evolución de un oscilón estable, en la que el inserto graficado a la derecha muestra que aún hay radiación clásica que escapa del oscilón, sólo que ahora con menor amplitud.

se deforme hasta converger al oscilón atractor. En la Fig. II se muestran estas dos etapas para el caso de un breather deformado para obtener un oscilón bidimensional ( $\varepsilon = 1$ ). En el panel de la izquierda se muestra como la solución (graficada en función de la coordenada radial  $r$  y el tiempo  $t$ ) se deforma mientras emite radiación. A partir de ahora, se hará referencia a esta etapa como la *fase transiente*, y es solo después de esta etapa que se puede considerar una evolución lenta y estable de los parámetros de la solución. En el panel de la derecha se muestra la evolución de la solución estable, y es necesario mencionar que el oscilón sigue disipando energía, aunque con menor amplitud que durante la fase transiente. La “cola” del oscilón es donde se puede ubicar a la mayor parte de la radiación que sale del núcleo, sin embargo el proceso de emisión es continuo en el tiempo y en el espacio. Es por eso que no es simple separar por completo al oscilón de la radiación que emite. La evolución de la solución como función del tiempo y otros detalles interesantes del oscilón formado se presentan [aquí](#). En la sección II se mostrará con el flujo de parámetros que el tiempo que la solución toma en converger a un oscilón es corto, y que una vez formado el oscilón la evolución de sus parámetros se ralentiza.

Una importante motivación de este trabajo es la similaridad entre los perfiles de los oscilones y de los breathers. Debido a esto, haremos una comparación directa entre sus soluciones. A manera de ejercicio, se considera la evolución de oscilones a partir del modelo de sine-Gordon dimensionalmente deformado haciendo uso de perfiles de breather como condiciones iniciales. Después de algunos cientos de oscilaciones, se mide la altura del

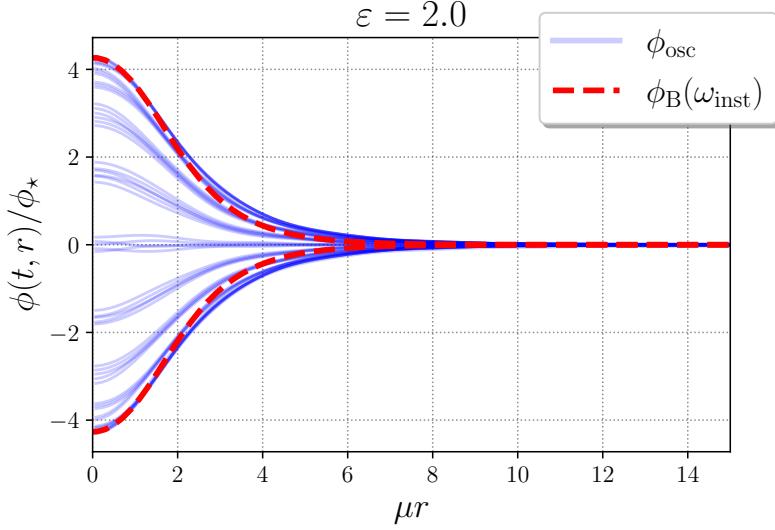


FIGURA III: Comparando la evolución del perfil radial de un oscilón del modelo de sine-Gordon ( $\phi_{\text{osc}}$ ) en 3D (en líneas azules) con el perfil de un breather ( $\phi_B$ ) (en líneas rojas cortadas) en  $t = 0$  y con una frecuencia de oscilación  $\omega_{\text{inst}}/\mu = 0.482$ , extraída a partir de la amplitud del oscilón. Los picos de ambas soluciones tienen formas muy parecidas, diferenciándose sólo en las colas.

pico de la solución ( $\mathcal{A}_{\text{osc}}$ ) en  $r = 0$ . Esta altura se mide escogiendo un instante en el que el oscilón haya alcanzado su amplitud máxima en algún periodo de oscilación. Es posible calcular la frecuencia instantánea del breather a partir de la amplitud del oscilón mediante

$$\frac{\omega_{\text{inst}}}{\mu} = \cos \left( \frac{\mathcal{A}_{\text{osc}}}{4\phi_*} \right), \quad (11)$$

y construir el perfil radial de un breather  $\phi_B(r, t = 0 | \omega_B = \omega_{\text{inst}})$  a partir de (3). En la fig. III se muestra la evolución del oscilón y se compara su forma (en un intervalo corto de tiempo) con la del breather construido a partir de la frecuencia. Se considera  $\varepsilon = 2$  (esto es, un perfil esféricamente simétrico en 3D), y la evolución se registra a partir de  $\mu t \sim 4 \times 10^2$ . A partir de estos resultados, es posible inferir que es posible encontrar un breather cuya forma se parezca a la de un oscilón a partir de la estimación de su frecuencia. Además, es posible replicar este procedimiento en instantes posteriores sin importar la dimensionalidad del oscilón, siempre y cuando el oscilón sea estable. Las diferencias en los perfiles radiales aparecen en las colas de la solución, y se hacen más notorias a medida que  $\varepsilon$  crece. Adicionalmente, en el caso  $\varepsilon \ll 1$ , la dinámica del oscilón está bien representada por la del breather; no obstante, cuando la dimensionalidad crece los oscilones tienden a desfasarse más rápidamente. La reproducibilidad del perfil del oscilón con un breather en

instantes arbitrarios no se ha verificado si se asumen otras formas de las condiciones iniciales (como una Gaussiana, por ejemplo); sin embargo se ha encontrado que este resultado se comprueba para deformaciones del potencial para soluciones en una dimensión (tales como lo que se presenta en la sección VI). Este argumento favorece a la idea de contemplar una fórmula no lineal para mezclar modos, en vez del conocido ansatz del quasibreather sugerido en [4, 13]. Este resultado es también una invitación a extender esta similaridad a la evolución entera del oscilón (de ser posible). Esta extensión requiere que la frecuencia de oscilación sea una función del tiempo en vez de un parámetro fijo (i.e.,  $\omega_B \rightarrow \omega_B(t)$ ). En un principio, este cambio de parametrización sería suficiente para representar aproximadamente la evolución de la forma del oscilón y de su fase de oscilación. La renormalización numérica [18] sugiere un procedimiento razonable para construir oscilones semianalíticos.

Se explorarán sus aplicaciones a este problema en futuros proyectos.

En lo que queda de este trabajo, se hará uso de las ecuaciones desarrolladas para entender la manera en la que los breathers se deforman al modificar la ecuación de unidimensional de sine-Gordon. Se dará énfasis a la deformación dimensional presentada en este capítulo. Sin embargo, también se experimentará con transiciones dimensionales dependientes del tiempo en la sección V. Finalmente, y para mostrar la generalidad de los resultados, se extenderá el análisis al estudio de deformaciones del potencial en la sección VI.

## II. Medición de parámetros diagnósticos a partir de las soluciones deformadas

La conexión entre breathers y oscilones se establece al resolver el sistema dinámico en las Ecs. (7), tomando a todos los breathers (parametrizados por  $\omega_{\text{ini}}$  y  $\theta_0$ ) como condiciones iniciales. Esto es equivalente a deformar a los breathers para convertirlos en oscilones. Para materializar dicha conexión es necesario entender la dependencia de las propiedades de los oscilones al ajustar el parámetro de deformación  $\varepsilon$ . Para hacer de que de este muestreo se obtenga una comparación eficiente de condiciones iniciales, se necesita que las propiedades de las soluciones resultantes puedan ser completamente descritas por unos pocos parámetros clave. En esencia, esto es análogo a la descripción completa de los breathers en función de un único parámetro  $\omega_B$ . En coherencia con este objetivo, se propone una reducción del espacio de parámetros que permite conocer el estado dinámico de las soluciones. En esta sección se prepara el camino para hacer un “barrido” de condiciones iniciales. A partir de este escaneo, se observa que basta con la evolución de unas pocas elecciones de  $\omega_{\text{ini}}$ ,  $\theta_0$ , y  $\varepsilon$  para representar el flujo de las soluciones en el espacio de parámetros. Es previsible que sea posible encontrar oscilones a partir de las condiciones iniciales tipo breather.

En los dos paneles a la izquierda de la fig. IV, se ilustra la evolución de dos configuraciones prototípicas, cuyas condiciones iniciales son breathers. El panel a la izquierda muestra una condición inicial que se asienta en un estado oscilante espacialmente localizado—un oscilón. Una mirada más detallada a la estructura espacio-temporal de la solución muestra pequeños efectos disipativos (cambios en el núcleo y las colas del perfil radial) asociados a la emisión de radiación clásica. Mientras tanto, en el panel central se puede observar una solución que decae rápidamente y no se forma un oscilón. Con el fin de fijar la nomenclatura, se denominará a ambas soluciones como oscilones y soluciones decaídas, respectivamente.

Entendiendo que se busca conectar las propiedades de los oscilones a las de los breathers, es conveniente parametrizar a los oscilones en términos de unas pocas propiedades clave. Lo que es imperativo porque hay una enorme cantidad de parámetros que se podría elegir, como: el ancho del pico, la tasa de decaimiento del oscilón en el infinito,

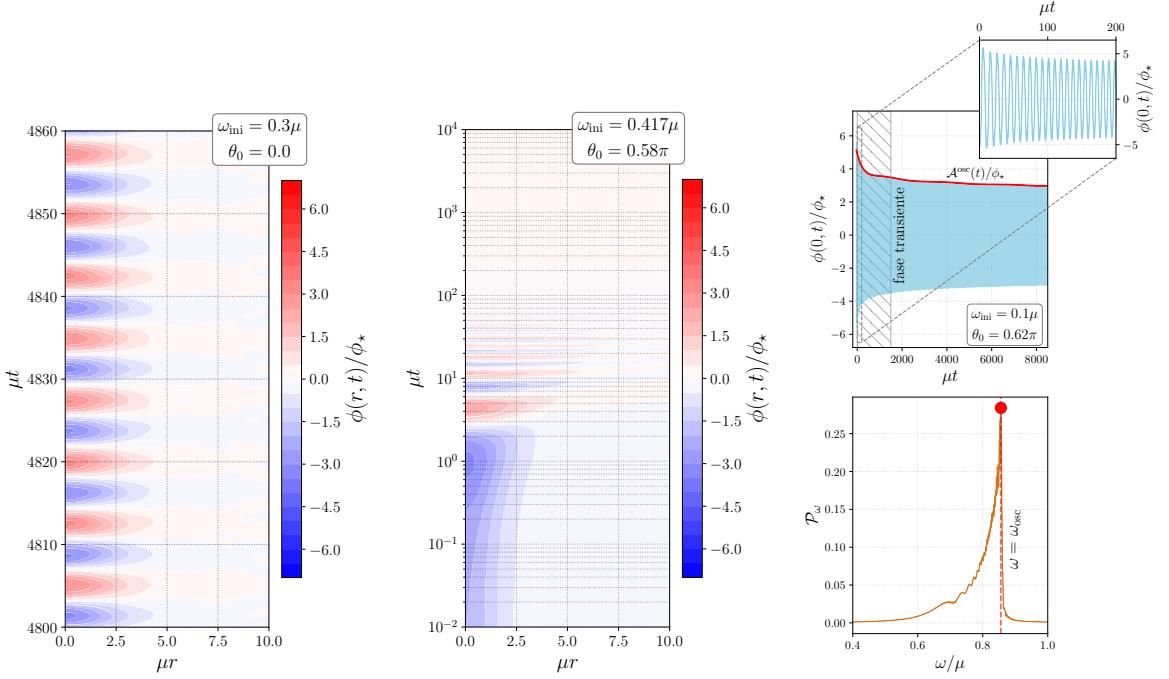


FIGURA IV: Estructura espacial, evolución temporal de los núcleos del oscilón y determinación de la frecuencia de oscilación ( $\omega_{\text{osc}}$ ) para  $\varepsilon = 0.75$ . Panel izquierdo: Evolución típica del perfil radial de un oscilón de larga vida, generado a partir de la deformación de un breather de sine-Gordon con frecuencia inicial de  $0.3\mu$  y  $\theta_0 = 0$ . Panel medio: Perfil radial del decaimiento de una solución (observar el eje temporal en escala logarítmica). Panel derecho (arriba): Evolución temporal de un oscilón evaluada en  $r = 0$  para determinar la frecuencia dominante ( $\omega_{\text{osc}}$ ) y la amplitud  $A$ . La fase transiente, donde se emite más radiación y la amplitud cambia más rápido, se muestra en la región achurada con líneas grises. Panel derecho (abajo): A partir del espectro de potencias temporal  $P_\omega$  del panel superior, se determina  $\omega_{\text{osc}}/\mu$  como la frecuencia angular con el pico de potencia más alto (marcada como el punto rojo).

las frecuencias de oscilación, el radio promedio ponderado por la densidad de energía, la curvatura en el centro, etc. Como el objetivo es realizar un escaneo de una cantidad grande de condiciones iniciales, es recomendable escoger cantidades que se puedan medir automáticamente. Con esto en mente, se procede a presentar los parámetros necesarios para describir las soluciones de campo. En especial, estos parámetros deben ser útiles para identificar oscilones en vez de soluciones decaídas. Es importante aclarar que esta parametrización no intenta generar una descripción dinámica “completa” de los oscilones, es más bien una conveniente (y necesaria) reducción de la dimensionalidad del espacio de parámetros.

La primera simplificación es considerar la evolución en un solo punto, siendo el origen  $r = 0$  una elección muy conveniente. El panel superior derecho de la fig. IV muestra la evolución en  $r = 0$  del oscilón ilustrado en el panel izquierdo. Es posible observar que la

evolución es caracterizada por una oscilación amortiguada

$$\phi(r = 0, t) \approx \mathcal{A}^{\text{osc}}(t) \sin(\omega_{\text{osc}} t + \varphi_0), \quad (12)$$

donde  $\varphi_0$  es una fase inicial arbitraria. El panel izquierdo de la fig. IV muestra que, considerando una frecuencia de oscilación  $\omega_{\text{osc}}$ , esta parametrización funciona para otros radios cerca al núcleo del oscilón. La existencia de una única función envolvente  $\mathcal{A}^{\text{osc}}$  (en vez de funciones diferentes que describen las envolventes superiores e inferiores) es consistente con la paridad del potencial. Este comportamiento es bastante común, a pesar que más adelante se encontrarán soluciones tipo oscilón donde la evolución de  $\mathcal{A}^{\text{osc}}$  desarrolla una modulación de baja frecuencia  $\omega_{\text{mod}} < \omega_{\text{osc}}$ . Por lo tanto, en vez de considerar la evolución completa del campo, es sensato comprimir la información en (a) una amplitud dependiente del tiempo  $\mathcal{A}^{\text{osc}}$  y (b) la frecuencia de oscilación  $\omega_{\text{osc}}$ . Un elegante beneficio de la elección de este último parámetro es que la frecuencia de oscilación del oscilón desciende de la frecuencia del breather, el cual es un parámetro de las condiciones iniciales. Finalmente, se observa empíricamente una ralentización del flujo de parámetros una vez que las soluciones alcanzan el atractor. Lo que se observa en la dependencia logarítmica de los flujos con el tiempo mostrada en la fig. V. Este resultado es una invitación a tratar los parámetros como constantes en secciones posteriores de esta tesis.

En los siguientes párrafos se expone un resumen del método por el que extraen  $\mathcal{A}^{\text{osc}}$  y  $\omega_{\text{osc}}$  de la data de simulación. En el caso de la amplitud del pico  $\mathcal{A}^{\text{osc}}$ , esta se extrae directamente de la evolución del campo en  $r = 0$ . Para contar con una resolución razonable de la posición temporal de los picos, se escoge el tamaño de paso  $dt_{\text{out}}$  de manera que se disponga de alrededor de 20 puntos por oscilación. Los picos escaneados en la serie de tiempo son luego etiquetados usando la función `find_peaks` en `scipy.signal` [36]. En la mayor parte de las ocasiones, basta con el ajuste de una spline cúbica usando `UnivariateSpline` en `Scipy`. Las únicas excepciones a esta regla se dan cuando la fase transiente cambia la amplitud de manera abrupta. En estos casos, es mejor usar un ajuste polinomial de un orden de décimo orden basado en `polyfit` en `NumPy`, el cual provee un mejor ajuste global. La evolución a escalas de tiempo mayores no se ve afectada por ninguna de estas dos opciones. Como prueba de robustez, se repitió este procedimiento considerando solamente un subconjunto de los picos encontrados, y se encontró que el flujo de la amplitud es insen-

sitivo a la elección de los subconjuntos. Esto ocurre siempre y cuando se escanee la serie de tiempo completa. Un ejemplo del ajuste de amplitud se muestra en el panel superior derecho de la fig. IV.

En cuanto a la frecuencia de oscilación, es conveniente trabajar en el espacio de Fourier

$$\tilde{\phi}(\omega) = \sum_{t_i} e^{i\omega t_i} \phi(r=0, t_i) \quad (13)$$

para luego calcular la densidad espectral de potencia

$$\mathcal{P}_\omega \equiv \left| \tilde{\phi}(\omega) \right|^2 + \left| \tilde{\phi}(-\omega) \right|^2 \quad (14)$$

como una función de la frecuencia temporal  $\omega$ . Luego se identifica  $\omega_{\text{osc}}$  como la frecuencia para la que el espectro de potencias  $\mathcal{P}_\omega$  tiene el máximo poder

$$\omega_{\text{osc}} = \underset{\omega \in [0, \mu]}{\text{argmax}} (\mathcal{P}_\omega) , \quad (15)$$

aquí la restricción  $\omega \leq \mu$  solo permite las oscilaciones del estado ligado. Una ilustración del espectro de potencias  $\mathcal{P}_\omega$  y de la frecuencia extraída  $\omega_{\text{osc}}$  se muestran en el panel inferior derecho de la fig. IV. La potencia de frecuencias menores a  $\omega_{\text{osc}}$  se debe a que la señal de entrada no es periódica, así como a la elección de la función ventana que divide la muestra en subintervalos de tiempo. Picos espectrales de más alto orden también pueden aparecer, pero tienden a ser subdominantes. Para estudiar la dependencia en el tiempo de  $\omega_{\text{osc}}$ , se calcula la transformada de Fourier para tiempos cortos con `signal.stft` de Scipy, usando la función suavizada de Hann como función ventana. Esta opción se aplica por defecto en la librería y es suficiente para lo que se busca. El tamaño de la ventana se escoge de manera que se capturan alrededor de 80 oscilaciones del campo, lo cual introduce errores de estimación de la frecuencia del orden de  $\mathcal{O}(1\%)$ . A partir de esto, se determina  $\omega_{\text{osc}}(t)$  en cada uno de los intervalos separados por la función ventana.

La Fig. V muestra la evolución de  $\mathcal{A}^{\text{osc}}$  y  $\omega_{\text{osc}}$  para cuatro elecciones de  $\omega_{\text{ini}}$  considerando  $\varepsilon = 0.5$ . Para hacer que las gráficas sean mas legibles, se omite la evolución desde  $\mu t = 0$  hasta  $\mu t \sim 10$ , por lo que la amplitud y la frecuencia inicial no se reportan en la figura. El panel izquierdo y el central muestran que ambos parámetros convergen rápidamente a

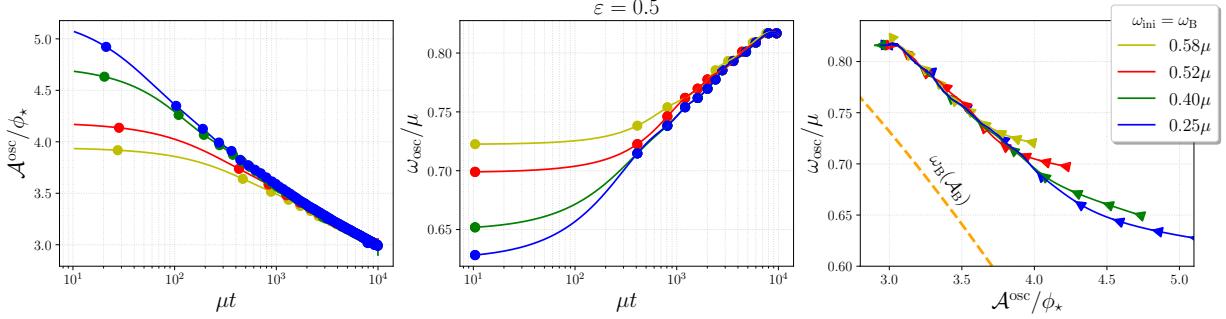


FIGURA V: Formación del oscilón atractador en el espacio de parámetros para  $\varepsilon = 0.5$ , el que se forma a partir de cuatro breathers diferentes. En los primeros dos paneles, se muestra la evolución de  $\mathcal{A}$  (la envolvente roja en la Fig. IV) y la frecuencia del oscilón como funciones del tiempo. Se puede observar que ambos parámetros cambian rápidamente hasta unirse a un atractor. Una vez que la convergencia al atractor ocurre, el flujo se ralentiza pero no se detiene. En el último panel se puede notar que el flujo en el espacio de parámetros colapsa a una línea que está alineada con la linea de flujo del oscilón (graficada en naranja y etiquetada como  $\varepsilon = 0$ ) dada por la Ec. (4). Las flechas solo denotan la dirección del flujo en el tiempo, ya que la velocidad se puede inferir a partir de los dos paneles anteriores de esta figura.

una solución de atractor. Nótese que una vez que estas soluciones alcanzan el atractor, la evolución de los parámetros se vuelve lenta, aunque no pierde su dependencia temporal. La última observación es crucial para el desarrollo de la próxima sección. En el panel de la derecha se observa el flujo de parámetros en el plano  $(\mathcal{A}^{\text{osc}}, \omega_{\text{osc}})$ , donde para comparar también se representa el flujo correspondiente al caso de los breathers ( $\varepsilon = 0$ )

$$\frac{\omega_B}{\mu} = \cos \left( \frac{\mathcal{A}^B}{4\phi_*} \right) . \quad (16)$$

Se puede destacar que, al menos para estos parámetros, el flujo de parámetros del oscilón (osea, la línea a las que las cuatro convergen) está aproximadamente alineado a la relación que obedecen los breathers, a pesar de que no existe ningún flujo dinámico cuando  $\varepsilon = 0$ . La existencia de oscilones atractores es consistente con la intuición en la literatura existente [19, 20]. A pesar de que no se muestra aquí, se puede observar que no todas las soluciones convergen hacia los oscilones atractores: los flujos de parámetros se separan del atractor a medida que la frecuencia de modulación  $\omega_{\text{mod}}$  de las soluciones con amplitud modulada se reduce.

El estudio de la dependencia temporal de la solución en el origen es extremadamente útil, ya que también contiene algo de información de la evolución del perfil radial completo. Vale la pena enfatizar que aún existen muchos otros parámetros que se pueden medir;

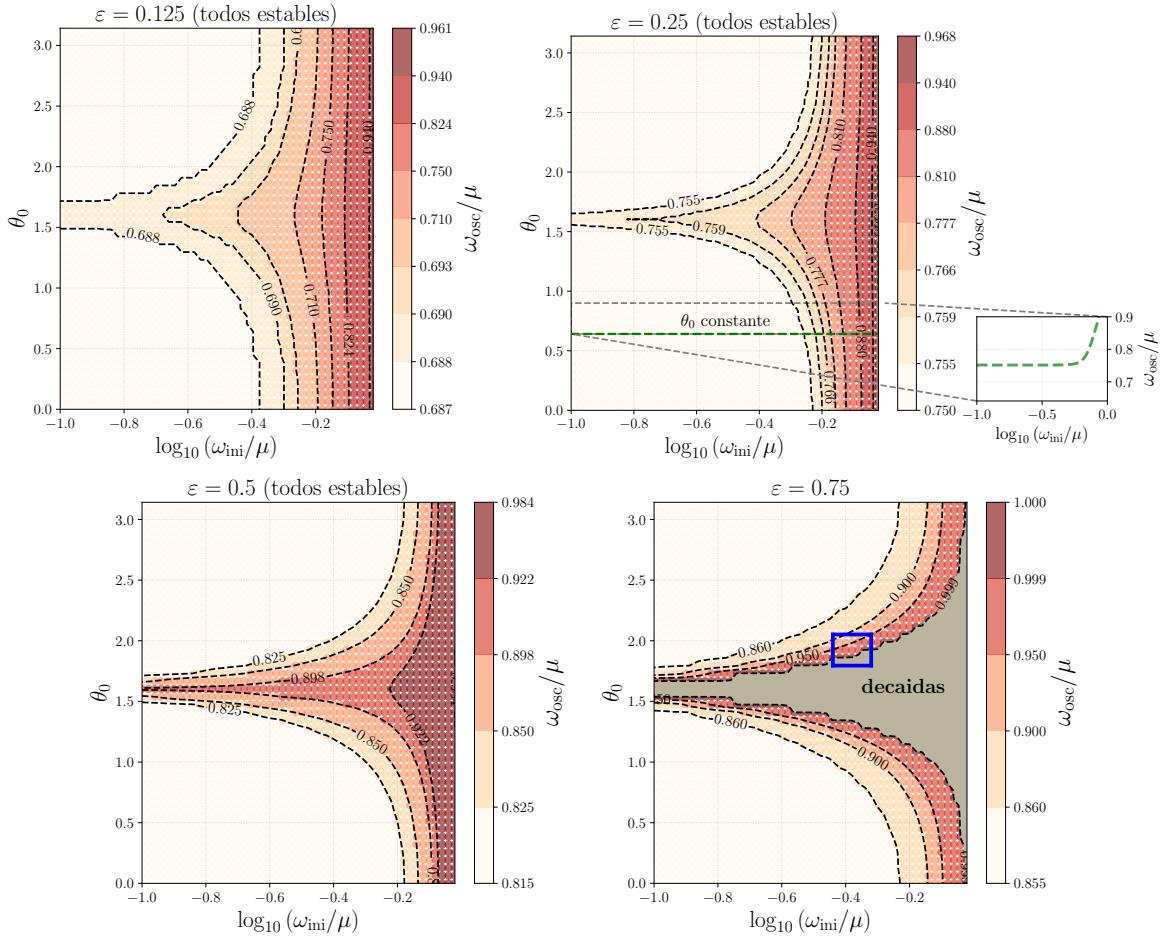
pero en lo que resta de esta sección se estudiará la energía del configuración de campo. Lo óptimo sería poder separar la energía del oscilón de la energía de la radiación clásica que se emite. Desafortunadamente, la emisión de energía es un proceso continuo en el tiempo y en el espacio, por lo que no se puede identificar una región de la solución (y/o un instante) que esté indiscutiblemente libre de radiación. Sin embargo, mientras el oscilón se ubique en el origen, la radiación se propaga a largas distancias y pierde su amplitud a medida que entra a la región en la que se implementan las condiciones de frontera absorbentes. Una vez finalizada la fase transiente, se sabe que el proceso de radiación de energía es lento. Por lo tanto, la energía total dentro del volumen de simulación es una razonable aproximación a la energía del oscilón. La energía total de la solución en  $D = \varepsilon + 1$  dimensiones se calcula a partir de la densidad de energía

$$\rho(r, t) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial r} \right)^2 + \mu^2 \phi_*^2 \left( 1 - \cos \left( \frac{\phi}{\phi_*} \right) \right), \quad (17)$$

y su integral

$$E = \frac{2\pi^{\frac{\varepsilon+1}{2}}}{\Gamma\left[\frac{\varepsilon+1}{2}\right]} \int_0^{R_{\max}} dr r^\varepsilon \rho(r, t). \quad (18)$$

Tal como se explica en el sección VII, esta integral se calcula usando cuadraturas numéricas, y como las funciones de base están definidas en el intervalo semi-infinito  $r \in (0, +\infty)$  se tiene que  $R_{\max} = \infty$ .



**FIGURA VI:** Superficies que muestran la frecuencia del oscilón en función de la fase y la frecuencia de los breathers iniciales de sine-Gordon para  $\varepsilon = 0.125, 0.25, 0.5$  y  $0.75$ . Las regiones dentro de los contornos con frecuencia constante se producen a partir de una malla de  $50 \times 50$  configuraciones iniciales de frecuencias ( $\omega_{\text{ini}}$ ) y fases ( $\theta_0$ ), uniformemente distribuidas en los intervalos  $\log_{10}(\omega_{\text{ini}}/\mu) \in [-1, 0.02]$  y en  $\theta_0 \in [0, \pi]$ . La frecuencia de los oscilones estables (coloreada en marfil en todos los paneles), que se forman a partir de breathers con  $\omega_B = \omega_{\text{ini}} \lesssim 0.3\mu$ , crece con  $\varepsilon$ . Para el arreglo de condiciones iniciales aquí mostrado, la cantidad de escenarios en los que los oscilones (con  $\omega_{\text{osc}} < \mu$ ) se forman tiende a decrecer con el crecimiento de la dimensionalidad. Las soluciones en la región de transición (coloreada de naranja y rojo) pueden mostrar una modulación en su amplitud a lo largo de su evolución. La fig. VII se enfoca en los casos contenidos al interior del pequeño rectángulo azul ( $\varepsilon = 0.75$ , en el panel inferior derecho). Estas soluciones muestran una modulación periódica en el tamaño de sus núcleos. En el panel superior derecho (etiquetado como  $\varepsilon = 0.25$ ) se gráfica una curva verde en líneas cortadas, en la que la fase inicial toma un valor fijo de  $\theta_0 = 0.64$ . Se puede observar una región plana que se extiende sobre todo el intervalo de frecuencias iniciales coloreado de marfil. Esta región deja de ser constante cuando  $\omega_{\text{ini}}/\mu$  se acerca a uno. En este punto, es importante entender que en el desarrollo de las secciones de esta tesis, la dependencia de  $\omega_{\text{osc}}$  en  $\omega_{\text{ini}}$  se transforma de distintas maneras para representar el estado dinámico del campo oscilante. El límite superior de la frecuencia  $\omega_{\text{ini}}$  se escoge para resolver oscilones dentro de una caja de simulación de longitud  $\ell = 200$ , la cual permite resolver múltiples oscilones en paralelo sin afectar el costo computacional.

### III. Generación de oscilaciones por deformaciones dimensionales

En las secciones anteriores se mostró que es posible formar oscilaciones a partir de condiciones iniciales tipo breather en el modelo de sine-Gordon dimensionalmente deformado. Asimismo, se demostró la existencia de atractores en el espacio de configuraciones del campo. En esta sección se explorará cómo es que cambian las propiedades de los oscilaciones al escanear sobre los parámetros  $\theta_0$  y  $\omega_{\text{ini}}$  de los breathers iniciales. Esto genera una conexión explícita entre los breathers del modelo de sine-Gordon unidimensional, y los oscilaciones de las ecuaciones de sine-Gordon en  $D \neq 1$  dimensiones. Para  $\varepsilon \ll 1$ , el modelo de sine-Gordon dimensionalmente deformado sólo representa una pequeña deformación de su versión unidimensional, por lo se espera que las propiedades de los oscilaciones resultantes sean muy parecidas a las de los breathers. Desde luego que a medida que la  $\varepsilon$  crezca, es lógico esperar que los oscilaciones (si es que estos se forman) se parezcan cada vez menos a sus condiciones iniciales. Para aportar a la claridad de esta tesis, se dividirán los resultados en los regímenes  $\varepsilon \lesssim 1$  y  $\varepsilon \gtrsim 1$ , a los que se les llamará a partir de ahora régimen perturbativo y no perturbativo, respectivamente. El incremento gradual de la dimensionalidad es importante en estas discusiones, por lo que hay instancias (mayormente en las figuras) en las que se combinan los resultados de ambos regímenes.<sup>2</sup>

#### A. Caso $\varepsilon \lesssim 1$ : Oscilaciones a partir de deformaciones perturbativas

Aquí se muestra una conexión explícita entre las soluciones de breather del modelo de sine-Gordon en una dimensión y los oscilaciones de la ecuación de sine-Gordon dimensionalmente deformada (7). En esta subsección se da especial atención a los casos en los que el parámetro de deformación es pequeño. Sin embargo, también se explora el impacto cómo es que cambia esta conexión con el crecimiento progresivo de la dimensionalidad. Del mismo modo, se estudia cómo es que la frecuencia de oscilación, la energía de los oscilaciones y la relación entre estos parámetros (que se introdujeron anteriormente en la Sección II) cambian con la deformación de las ecuaciones del movimiento. Antes de proceder, es importante hacer énfasis con antelación en una importante consecuencia de los resultados

---

<sup>2</sup>No es nada obvio encontrar una definición que separe que resultados se consideran parte del régimen perturbativo y cuales en el no perturbativo. En vez de buscar esto, en este trabajo se muestran propiedades características de los flujos de parámetros en los casos  $\varepsilon \lesssim 1$  y  $\varepsilon \gtrsim 1$ .

expuestos anteriormente: la energía y la frecuencia del oscilón son cantidades dependientes del tiempo. Pese a ello, la fig. V muestra que una vez que las soluciones alcanzan el atractor, el flujo en el espacio de parámetros desacelera notablemente. Es por eso que con el objetivo de comparar un amplio rango de breather iniciales, el tratamiento aproximado de  $\omega_{\text{osc}}$  y  $E$  como parámetros independientes del tiempo tiene sentido. En consideración a esta observación es que se trabaja con esta aproximación.

En primer lugar, se mide cómo es que cambia la frecuencia de oscilación  $\omega_{\text{osc}}$  al variar los parámetros del breather inicial. Para eso, se toma una muestra de oscilones con fases y frecuencias iniciales uniformemente distribuidas en los intervalos  $\log_{10} \omega_{\text{ini}}/\mu \in [-1; -0.02]$  y  $\theta_0 \in [0, \pi]$ . El límite inferior en  $\omega_{\text{ini}}$  asegura que los perfiles iniciales tienen un pico localizado en el origen, tal como se ilustra en la fig. I. En el caso del límite superior se determina sabiendo que las soluciones con perfiles que se amortiguan lentamente son difíciles (y costosas) de resolver numéricamente. A lo largo de esta sección, se emplea un tiempo total de integración de  $\mu T = 10^4$ , el cual permite alrededor de mil oscilaciones en el origen para los casos en los que se forma un oscilón. La resolución de la frecuencia es de  $\Delta\omega_{\text{osc}}/\omega_{\text{osc}} \sim N_{\text{osc}}^{-1} \sim 10^{-3}$ , donde  $N_{\text{osc}}$  es el número total de oscilaciones.

Las frecuencias de oscilación resultantes se ilustran en la fig. VI para cuatro elecciones de  $\varepsilon$ . La paleta de color representa el rango de frecuencias de oscilación ( $\omega_{\text{osc}}$ ), que abarca desde la frecuencia mas baja que se distingue como mesetas anchas coloreadas en marfil. Sus variaciones se colorean con tonos que se oscurecen hasta un color rojo ladrillo al crecer las frecuencias. Los valores precisos para especificar qué se entiende por bajas y altas frecuencias dependen de la dimensionalidad  $\varepsilon$ . Las regiones que contienen soluciones inestables están coloreadas en gris tienen una frecuencia de  $\omega_{\text{osc}} = \mu$  y llevan la etiqueta “decaídas”. En todos los casos, se observa una meseta de oscilones (graficados en color marfil) con frecuencias de oscilación casi idénticas. Esta meseta se ilustra en la figura adjunta al panel superior derecho. La aparición de esta meseta es consecuencia de la existencia del atractor mostrado en la fig. V. Además, esto sugiere que el atractor tiene un “punto de origen” que actúa como un punto casi fijo. En este punto se acumulan rápidamente muchas de las condiciones iniciales que pierden energía durante la fase transiente. Después de esta fase, los oscilones evolucionan lentamente a lo largo del atractor. Para esta elección de parámetros de condiciones iniciales, la frontera de la meseta tiene una es-

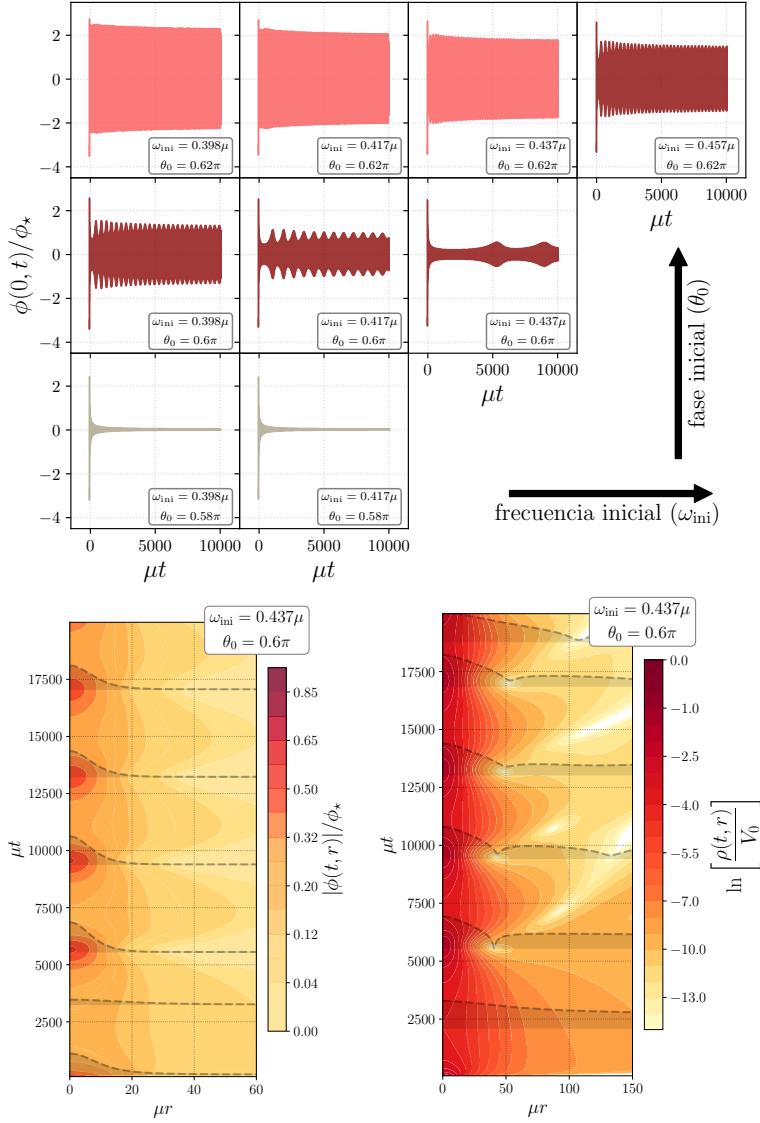


FIGURA VII: Panel superior: Evolución temporal de  $\phi(0, t)/\phi_*$  para algunas de las soluciones en el rectángulo azul (caso  $\varepsilon = 0.75$ ) en la Fig. VI. La figura usa el mismo código de color que en la fig. VI, lo que muestra que las soluciones con amplitud modulada sirven como “soluciones de trancisión” entre los oscilones estables (en marfil y naranja) y las soluciones que decaen rápidamente (en gris). La frecuencia de la modulación se reduce a la vez que se escanea mas cerca de las soluciones que decaen rápidamente. Panel inferior izquierdo: Estructura espacial y evolución de una de las soluciones con amplitud modulada para  $\varepsilon = 0.75$ . La modulación en la amplitud está asociada a fases periódicas de expansión y contracción del núcleo del oscilón. Panel inferior derecho: Densidad de energía en función del radio y del tiempo para la solución ilustrada en el panel izquierdo. La modulación ocurre mientras la energía sale del núcleo del oscilón en una cantidad discreta de ráfagas. En los paneles al medio y a la derecha de la figura, las líneas negras entrecortadas corresponden a imágenes instantáneas del campo (panel izquierdo) y la densidad de energía (panel derecho) reescaladas para caber en ambos paneles. La rasterización de la imagen suprime la mayor parte de las estructuras de alta frecuencia que aparecen en la evolución del campo y de la densidad de energía. Las áreas sombreadas bajo las líneas dan estimado cualitativo de los valores del campo y de la densidad de energía. Los instantes de tiempo escogidos no son los mismos en ambos paneles: esto es útil para mostrar los picos y valles de las dos magnitudes.

tructura no trivial, la que se extiende a lo largo de los contornos de isofrecuencia de manera general. Se discutirá el origen físico de estas estructuras en los párrafos que siguen.

En los tres paneles en los que  $\varepsilon \leq 0.5$ , todos los breathers iniciales evolucionan para convertirse en oscilaciones. Esto coincide con la intuición perturbativa mencionada en capítulos anteriores, en la que se entiende que los oscilaciones y los breathers deben estar relacionados cuando  $\varepsilon \ll 1$ . A su vez es consistente con el tratamiento perturbativo (en la amplitud de oscilaciones en el origen) de la dinámica de oscilaciones en [37, 32, 38], en los que se encuentra un continuo de oscilaciones con amplitudes arbitrariamente pequeñas y frecuencias muy cercanas a  $\mu$ . No obstante, el límite superior en  $\omega_{\text{ini}}$  impuesto por motivos numéricos no permite resolver la dinámica de soluciones anchas y de pequeña amplitud. Se explorará en trabajos posteriores la existencia de oscilaciones pequeños en el régimen  $\varepsilon \ll 1$ .

Para  $\varepsilon = 0.75$ , en la Fig. VI, (tal como se observa en el panel inferior izquierdo), se detecta la presencia de una nueva propiedad—algunos de los breathers no logran formar oscilaciones y decaen rápidamente, así lo indica la región coloreada en la figura. Este es un anticipo del “fracaso” de la descripción perturbativa, que solo resulta válida en el rango de pequeñas deformaciones  $\varepsilon \ll 1$ . La no-linealidad del sistema también pone en duda la validez del enfoque perturbativo, y una manifestación de esta no-linealidad es la existencia de un oscilón de mínima frecuencia.

Es claro que la forma de la región gris muestra una preferencia para formar oscilaciones a partir de breathers que tengan más energía potencial que cinética. Tal como se muestra en los ejemplos de la sección previa, las frecuencias de oscilación crecen mientras que los oscilaciones acercan al final de su vida. Consecuentemente, si se deja que la evolución de los oscilaciones dure tiempos mucho mas largos, se espera un crecimiento del tamaño de las regiones que contienen soluciones decaídas.<sup>3</sup> En la fig. VI, las frecuencias de oscilación  $\omega_{\text{osc}}$  obtenidas de diferentes condiciones iniciales tipo breather (las que se etiquetan según su frecuencia  $\omega_{\text{ini}}$  y fase inicial  $\theta_0$ ) se agrupan en regiones coloreadas. Estas regiones están delimitadas por contornos que contienen soluciones que reportan el mismo valor de  $\omega_{\text{osc}}$ . Los valores de los contornos que separan a las regiones de diferentes colores están incluidos en las barras de color que se ubican a la derecha de cada panel.

---

<sup>3</sup>Observar que también existen configuraciones que no tienen la energía suficiente para formar oscilaciones en ningún momento.

A continuación, se prestará especial atención a las soluciones en las regiones de transición. Estas regiones son aquellas que separan a las condiciones iniciales que forman oscilaciones de aquellas que forman soluciones decaídas. La frecuencia de oscilación incrementa lentamente en el tiempo, es de esperarse que las soluciones en el régimen de transición estén relacionadas al proceso de decaimiento del oscilón. Del mismo modo, es también razonable que estas soluciones se separen cada vez más del atractor con la reducción de  $\omega_{\text{mod}}$ . En el panel superior de la fig. VII se muestra la evolución en el origen para algunas de las soluciones en este régimen de transición (aquellas indicadas en el rectángulo azul, en el panel inferior derecho de la fig. VI) para  $\varepsilon = 0.75$ . El aspecto más resaltante de estas soluciones es la presencia de modulación en la amplitud, y la correspondiente aparición de una segunda escala temporal (llamada de ahora en adelante como  $t_{\text{mod}}$ ). Dentro de la región de transición, la magnitud de la modulación y la escala de tiempo entre picos adyacentes crecen con la frecuencia de oscilación  $\omega_{\text{osc}}$  (que corresponden a valores más grandes de  $\omega_{\text{ini}}$  para  $\theta_0$  fijo). Este incremento continua hasta encontrar la región de soluciones decaídas, donde no se forma ningún oscilón. Para valores suficientemente pequeños de  $\omega_{\text{osc}}$ , la modulación se vuelve imperceptible al punto de obtener oscilaciones en los que basta con una escala de tiempo para describir su dinámica en  $r = 0$ . A pesar de que no se muestra aquí explícitamente, también se encontraron (a) soluciones con amplitud modulada para  $\varepsilon = 0.125, 0.25$  y  $0.5$  al interior de las regiones coloreadas en contornos rojos y marrones en la fig. VI; y (b) se confirmó en el espacio de parámetros que las soluciones con amplitud modulada se desvían del atractor tan pronto como  $\omega_{\text{mod}} \neq \omega_{\text{osc}}$ .

El origen dinámico de la modulación en amplitud en  $\phi(r = 0, t)$  puede ser entendida de una mejor manera al observar la estructura espacio-temporal competa de las soluciones. El panel superior de la fig. VII muestra que (por lo menos en el origen) las soluciones moduladas involucran a dos escalas de tiempo jerárquicamente separadas

1. una escala de tiempo rápida  $t_{\text{fast}} \sim \omega_{\text{osc}}^{-1}$ , y
2. una escala de tiempo mucho más lenta  $t_{\text{mod}} \sim \omega_{\text{mod}}^{-1}$  asociada a la modulación en amplitud.

Con el fin de estudiar la modulación, se busca separar la dinámica modulada de la dinámica rápida de oscilación descrita por  $\omega_{\text{osc}}$ . Después de rasterizar las imágenes de los paneles

inferiores de la fig. VII, se puede apreciar que muchas de las propiedades de alta frecuencia han sido suprimidas de las figuras. Los dos paneles inferiores de la fig. VII ilustran la evolución de la componente lenta para una solución con amplitud modulada. En el panel inferior izquierdo, se muestra la evolución de  $|\phi(r, t)/\phi_\star|$ . Con esta imagen espacio-temporal, se logra distinguir que la modulación de la amplitud es una manifestación de la contracción y expansión lenta del núcleo del oscilón. En el panel inferior derecho, se plotea la estructura radial de la densidad de energía del mismo oscilón mostrado en el panel inferior izquierdo. Durante la contracción y expansión del núcleo, se observan ráfagas correlacionadas de radiación clásica que se alejan del oscilón (aproximadamente) a la velocidad de la luz. Soluciones análogas que muestran fases periódicas de expansión y contracción también aparecen en dos o más dimensiones. Un ejemplo de ellas se mostrará en el sección ??, como el resultado de una implementación numérica diferente a la usada a lo largo de esta tesis. En esfuerzos previos también se presentan soluciones con amplitud modulada (ver [19, 39], por ejemplo), a partir de perfiles Gaussianos y otros potenciales. La contribución de este trabajo no se limita a mostrar la estructura espacial de estas soluciones; sino también a mostrar que estas describen la dinámica del modelo en el límite de estabilidad.

Es importante notar que estas soluciones moduladas no son debidamente representadas por la comúnmente asumida prescripción del quasibreather

$$\frac{\phi(r, t)}{\phi_\star} = \sum_{n \in \mathbb{N}} R_n(r, \omega) \sin(n\omega t + \delta_n), \quad (19)$$

la que expresa la solución en múltiplos de la “frecuencia fundamental”  $\omega$  [40, 4, 13]. Esta frecuencia fundamental corresponde a  $\omega_{\text{osc}}$ , de acuerdo a la nomenclatura usada en esta tesis. Por lo tanto, cualquier conclusión sobre las propiedades del oscilón basadas en esta expresión no son aplicables a las soluciones con amplitud modulada que se encuentran en el régimen de transición. A pesar de esto, la estructura espacial visible en ambos paneles inferiores de la fig. VII revela que estas soluciones aún pueden ser espacialmente localizadas, y por eso aún se les puede llamar breathers. Se sospecha (pero no se confirma) que estas soluciones están relacionadas a la emisión de radiación tipo staccato en oscilones [41, 42].

A partir de los resultados mostrados en la fig. VI, es claro que la formación de oscilones es robusta ante cambios en la forma de los breathers iniciales, al menos para  $\varepsilon \ll 1$ .

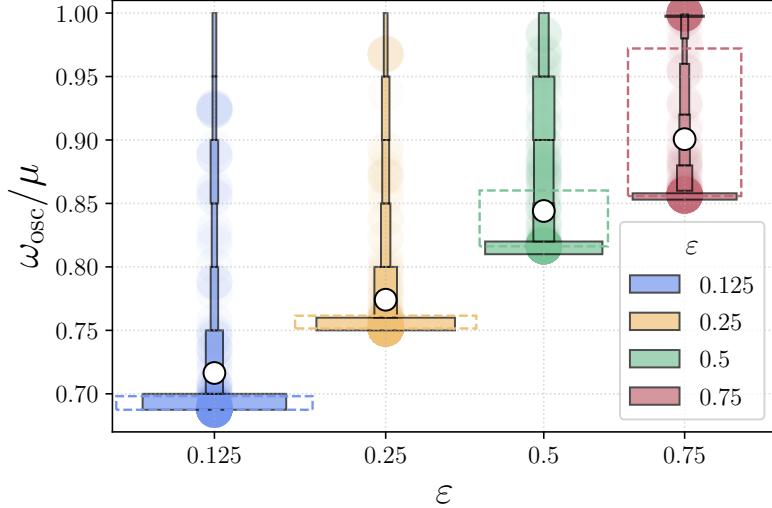


FIGURA VIII: Tras el conteo del número de soluciones en cada panel de la Fig. VI, se observa la deformación de las distribuciones discretas de probabilidades en función de la dimensionalidad  $\varepsilon$ . Los rectángulos contienen el 75 % de las soluciones muestreadas para cada valor de  $\varepsilon$ . Los puntos blancos representan la frecuencia media de la muestra que se desplaza hacia arriba al aumentar la dimensionalidad. Los puntos grandes semitransparentes también se muestran para representar la dependencia de las distribuciones de frecuencias de oscilación con  $\varepsilon$ .

La Fig. VIII provee una representación alternativa empírica de esta robustez. Usando el ensamble de condiciones iniciales uniformemente muestreados en  $\log_{10}(\omega_{\text{ini}}/\mu)$  y  $\theta_0$ , se construyen distribuciones empíricas de  $\omega_{\text{osc}}$  que cambian con la dimensionalidad. Se ilustra estas distribuciones en la fig. VIII y se observa que estas se deformacion de una mezcla de dos componentes (cuando  $\varepsilon = 0.125$  y  $0.25$ ) a una mezcla de tres componentes (cuando  $\varepsilon = 0.75$ ), siendo el caso  $\varepsilon = 0.5$  un intermedio entre ambos estados. Para valores más pequeños de  $\varepsilon$ , la distribución está bien modelada como un sistema de dos componentes: la primera componente es una función delta aproximada con  $\omega_{\text{osc}} = \omega_{\min,\varepsilon}$ , mientras la segunda componente es un continuo de frecuencias. Estas corresponden a un atractor en el espacio de funciones y a puntos a lo largo de la linea del atractor, respectivamente. Respecto a la primera componente, esta indica un punto importante a desarrollar a lo largo de este trabajo: existe una frecuencia mínima para la que los oscilaciones se forman. Examinando las barras de colores en la fig. VI y los límites inferiores en los histogramas en la Fig. VIII, se observa que  $\omega_{\min,\varepsilon}$  crece con la dimensionalidad. Con respecto a la segunda componente, el continuo de soluciones es consistente con la presencia de oscilaciones con amplitudes pequeñas [37, 32, 38]. Como se mostrará en breve, estas soluciones están bien representadas por perturbaciones a los breathers. Dentro de la distribución de frecuencias

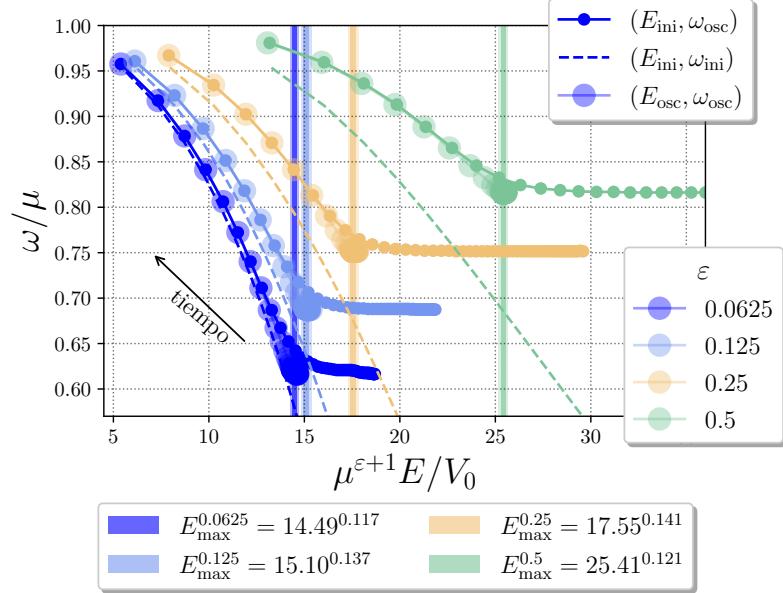


FIGURA IX: La convergencia de las curvas de energía y frecuencia (donde las energías y frecuencias de los oscilones se miden en instantes diferentes) es consistente con la representatividad de los oscilones como breathers en el límite  $\varepsilon \ll 1$ . La frecuencia de oscilación ( $\omega_{\text{osc}}$ ) después de algunos cientos de oscilaciones se ilustra como una función de la energía inicial ( $E_{\text{ini}}$ ) en puntos sólidos, mientras que la energía del oscilón y su frecuencia de oscilación se plotean usando puntos semi-transparentes. Las líneas cortadas corresponden a la frecuencia inicial en término de la energía inicial  $E_{\text{ini}}$ . Las líneas verticales indican la energía (llamada  $E_{\text{max}}$  en la leyenda) para la que los oscilones se acumulan, mostrando así la existencia de una energía máxima para la formación de oscilones. Los valores de  $\varepsilon$  empleados para generar la figura se muestran en la leyenda de colores en la esquina inferior derecha de la figura.

de breathers, no se observan soluciones decaídas para  $\varepsilon < 0.75$ . En el caso  $\varepsilon = 0.75$  aparece una tercera componente que también luce como una función delta que corresponde a las soluciones que decayeron.

Estos resultados permiten que se pueda apreciar cómo es que las distribuciones (i.e., los histogramas coloreados para diferentes valores de  $\varepsilon$ ) se deforman progresivamente, pasando de ser unimodales ( $\varepsilon \ll 1$ ) a ser bimodales ( $\varepsilon \sim 1$ ). También se observa que el rango de frecuencias de oscilación se contrae y se desplaza hacia frecuencias más grandes con el crecimiento de  $\varepsilon$ . El corrimiento en el intervalo de frecuencias es también notorio gracias al desplazamiento de la media de la muestra, la que se muestra como el punto blanco en cada distribución. La extensión de estos resultados estadísticos a otras variables dinámicas (como la energía, por ejemplo) no es recomendable. La distribución de parámetros iniciales juega un rol crucial al determinar la forma de la distribución final, y no es simple disociar los efectos de esta elección sin un muestreo de parámetros aún más denso que el hecho

hasta este punto del proyecto.

La aparición de contornos suaves y extensos con la misma frecuencia de oscilación, ubicados a lo largo de la muestra de breathers iniciales es una indicación de que muchos de los perfiles iniciales de breather pueden colapsar en (aprox.) un único estado. Esta degeneración sugiere una reducción adicional en la dimensión del espacio de parámetros, en esta reducción se pueden considerar curvas de fase inicial constante (como  $\theta_0 = 0$  fijo, por ejemplo) en lugar de las superficies completas con frecuencias constantes mostradas en fig. VI. Se ha verificado para varias frecuencias que las líneas de flujo de energía/frecuencia no dependen de la elección de las fases iniciales. Lo que se busca con esto es visualizar cómo es que la relación entre la frecuencia de oscilación y la energía del oscilón cambian con la dimensionalidad  $\varepsilon$ . La Fig. IX muestra la frecuencia  $\omega_{\text{osc}}$  como función de la energía inicial y la energía del oscilón después de  $\mu t = 10^4$ . A partir de esta figura, se identifican dos propiedades importantes:

- El colapso de estados iniciales diferentes para producir un (aprox.) único oscilón con frecuencia mínima ( $\omega_{\min}$ ) y máxima energía ( $E_{\max}$ ). La energía máxima y la frecuencia mínima crecen con el aumento de la dimensionalidad de las soluciones. Estos oscilones corresponden a las mesetas observadas en la fig. VI.
- Un continuo de estados con frecuencias mayores a  $\omega_{\min}$  y energías menores a  $E_{\max}$ . El rango de frecuencias se reduce con el aumento de  $\varepsilon$ .

El continuo de estados (que es también visible en las barras mas cortas de los primeros tres histogramas de la Fig. VIII) es consistente con la expectativa perturbativa de que para  $\varepsilon \neq 0$  cada breather pasará por una pequeña deformación para convertirse en un oscilón. La aparición de un oscilón con energía máxima  $E_{\max}$  es un efecto no perturbativo porque el oscilón resultante tiene propiedades distintas a las de los muchos breathers usados como condiciones iniciales que lo pueden generar. La intención es representar el estado dinámico de la solución al introducir un mapa (claramente no invertible) entre las energías y frecuencias de los breathers y los correspondientes parámetros para los oscilones medidos en  $\mu t = 10^4$ . Es por ello que hay propiedades de las distribuciones iniciales de parámetros que inevitablemente se mapearan a las líneas de flujo en el plano  $(\omega_{\text{osc}}, E)$ . Como un ejemplo de esto, se puede observar que para  $\varepsilon \ll 1$ , el valor máximo de  $\omega_{\text{osc}}$  (y por lo tanto, el valor

mínimo de la energía) es sólo un artefacto del muestreo de condiciones iniciales. Ese límite sólo resulta de mapear el límite superior de la frecuencia inicial y encontrar su correspondiente valor de  $\omega_{\text{osc}}$ . El trabajo existente en el área argumenta que existe un continuo de oscilones con frecuencias arbitrariamente cercanas a  $\omega_{\text{osc}} = \mu$  y energías arbitrariamente pequeñas [37, 32, 38], desde lo que se puede inferir que es sensato fijar  $\omega_{\text{max}} = \mu$  y  $E_{\text{min}} = 0$  en el límite  $\varepsilon \ll 1$ . Lamentablemente, estas soluciones son muy anchas y generan una enorme jerarquía adimensional de frecuencias entre el ancho del oscilón y la longitud de onda típica de la radiación emitida. Esto hace que la investigación numérica de este régimen sea muy complicada, por lo que se dejará la fenomenología de oscilones anchos para trabajos futuros.

Las soluciones que decaen rápidamente empiezan a aparecer con el crecimiento de la dimensionalidad. Por lo tanto, para una muestra suficientemente densa de configuraciones iniciales, el cálculo de la mínima energía/máxima frecuencia para un oscilón es posible para  $\varepsilon \gtrsim 0.75$ . El panel superior de la fig. VII muestra que es altamente probable que dicha solución presente modulación en su amplitud. En el otro regimen, la fig. IX resulta útil para mostrar el acercamiento de las curvas de energía y frecuencia (en puntos) a las de sus valores iniciales (graficadas en líneas cortadas) cuando  $\varepsilon$  decrece. Esto representa una clara indicación de que los breathers y los oscilones pueden ser muy similares en este regimen. La misma imagen muestra que la conexión entre breathers y oscilones se torna más complicada en dimensiones más altas. Por lo que alguna medida de qué tan cercana es la convergencia (o divergencia) respecto a las curvas correspondientes a las condiciones iniciales motiva una definición más precisa del régimen perturbativo. La validez de esta propuesta y otras se estudiará en futuras exploraciones.

## B. Caso $\varepsilon \gtrsim 1$ : Más allá del régimen perturbativo

Hasta el momento se exploró la formación de oscilones en el límite  $\varepsilon \lesssim 1$ , lo que corresponde a dimensiones espaciales  $D \lesssim 2$ . Vale la pena recordar que  $\varepsilon$  actúa como un parámetro de control que deforma el modelo de sine-Gordon en una dimensión. Este régimen comprende los casos en los que se espera que los oscilones y los breathers sólo sean distintos en correcciones pertrubativas en  $\varepsilon$ . Por consiguiente, se espera que las diferencias en energía, frecuencia y otros parámetros de forma de los breathers y oscilones también

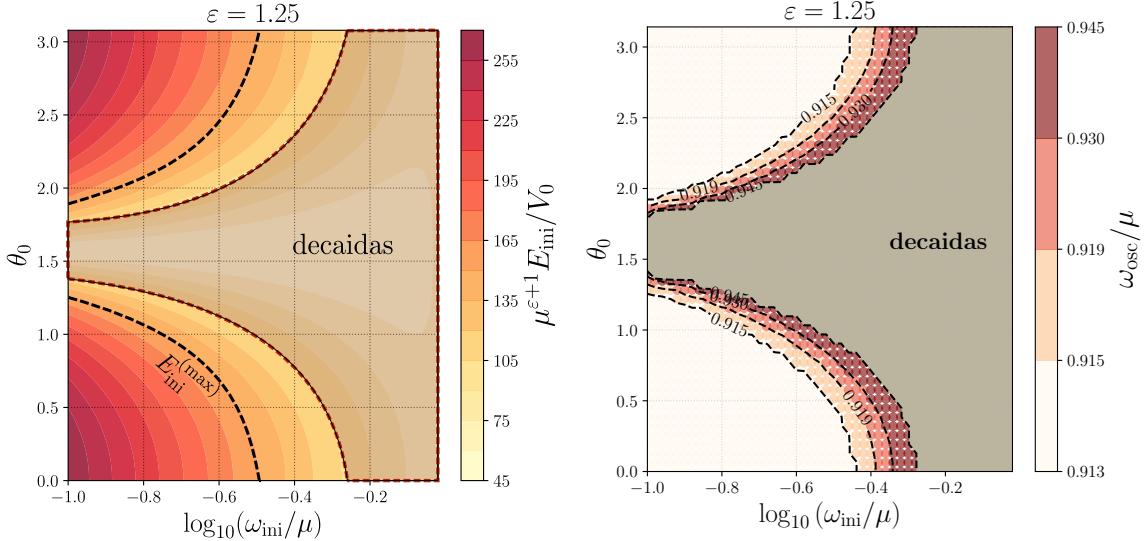
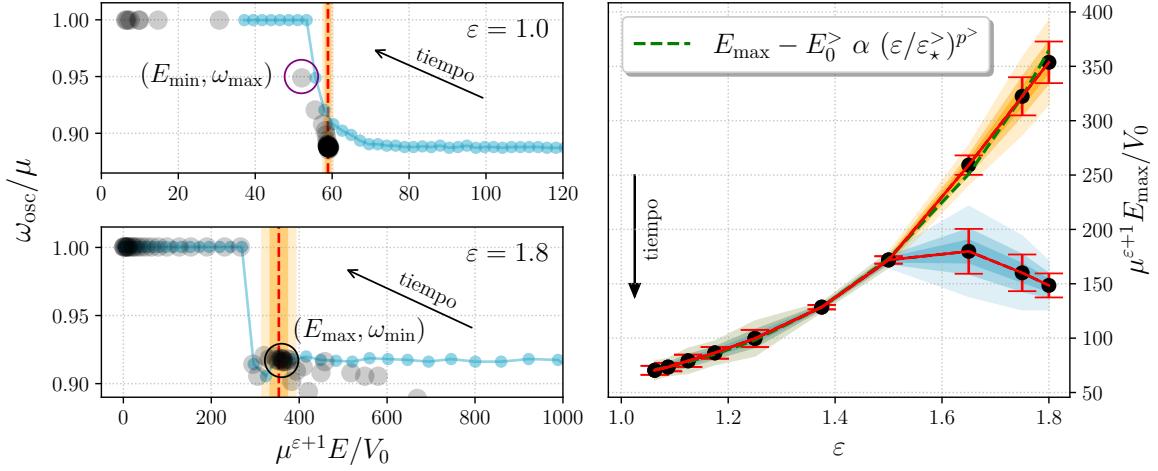


FIGURA X: Energía inicial (panel izquierdo) y frecuencia de oscilación  $\omega_{\text{osc}}$  (panel derecho) en función de los parámetros de los breathers iniciales para  $\varepsilon = 1.25$ . La parametrización de condiciones iniciales con breathers de sine-Gordon descarta a una fracción no trivial de los estados accesibles (dentro del contorno de color gris en el panel derecho, y en la región sombreada del panel izquierdo). Lo que muestra que en el régimen no perturbativo los breathers pueden no tener suficiente energía para producir oscilaciones. Los contornos en líneas entrecortadas etiquetados como  $E_{\text{ini}}^{(\max)}$  indican el límite inferior de energía para el que los breathers generan (aproximadamente) el mismo oscilón.

sean perturbativas en  $\varepsilon$ . A manera de recordatorio, el siguiente [enlace](#) se muestra la dependencia espacio-temporal de las soluciones tipo oscilón esféricamente simétricas en 2D. Del mismo modo se muestra la evolución de su densidad de energía y del flujo en función del tiempo. En esta sección se consideran los escenarios en los que  $\varepsilon \gtrsim 1$ , es en estos casos en los que las similitudes entre breathers y oscilones son cuestionables. El panel inferior derecho de la fig. VI (donde  $\varepsilon = 0.75$ ) muestra evidencia de esto, ya que se muestra que algunas configuraciones decaen en vez de formar oscilaciones. Estos resultados generan preguntas interesantes sobre la existencia de una banda de frecuencias y energías en la que no hayan oscilaciones.

Al comparar el panel derecho de la fig. X con el panel inferior derecho de la Fig. VI, se observa que al crecer  $\varepsilon$ , una fracción cada vez mayor del espacio de parámetros de los breathers iniciales en el espacio de parámetros decae en vez de formar oscilaciones estables. El incremento en esta fracción también afecta a los perfiles con  $\theta_0 = 0$  (i.e., con energía cinética nula). Por otro lado, en el panel izquierdo de la fig. X se muestra la dependencia de la energía inicial del perfil radial con los parámetros que controlan la forma de las condiciones iniciales  $\omega_{\text{ini}}$  y  $\theta_0$ . La comparación entre las superficies de energía en el panel



**FIGURA XI:** Paneles izquierdos: Frecuencia de oscilación como función de la energía inicial (en puntos celestes) y después de algunos cientos de oscilaciones (puntos negros semi-transparentes) para  $\varepsilon = 1.0$  (panel superior) y para  $\varepsilon = 1.8$  (panel inferior). Se usaron 50 breathers como condiciones iniciales con frecuencias en el rango  $\log_{10} \omega_{\text{ini}}/\mu \in [-1.0; 0.02]$  (el mismo que en la Fig. VI) y todos con fase inicial  $\theta_0 = 0$ . Es claro que en ambas figuras los cúmulos de puntos negros a bajas energías representan estados que han decaído. Dichos cúmulos también existen a energías más altas (marcadas con líneas rojas entrecortadas) y para frecuencias  $\omega_{\text{osc}} < \mu$ , en estos casos representan oscilaciones estables. Panel derecho: La ordenada de los puntos negros es la energía de los oscilones estables (indicadas con líneas rojas en los paneles izquierdos), para estas energías los estados se acumulan. Al graficarlas para diferentes valores de  $\varepsilon$  se obtiene una función que es (aproximadamente) monótonicamente creciente. Para instantes de tiempo mayores, los oscilones en  $D \lesssim 3$  dimensiones son los primeros en “escapar” de esta curva creciente, tal como se muestra con los puntos en la región azul. Esto se debe a que los oscilones pierden energía cuando fluyen a lo largo del atractor, mientras incrementan su frecuencia de oscilación, tal como se muestra en la fig. V. Como resultado de esto, los cúmulos de puntos correspondientes en los paneles izquierdos fluyen hacia arriba siguiendo las flechas de tiempo.

izquierdo con la frontera de la región de las soluciones decaídas sugiere que para  $\varepsilon \gtrsim 1$  hay una energía mínima para la que un oscilón se forma, y aquellas condiciones iniciales que no logran formar una solución estable se encuentran al interior de la región sombreada. La emisión de radiación clásica es una parte fundamental en el proceso de formación de oscilones, y es por esto que en  $D \geq 2$  dimensiones hay configuraciones que irradian toda su energía sin poder formar un oscilón. De la misma manera, la figura también muestra un valor de energía inicial para el que todas aquellas soluciones con energía mayor que  $E_{\text{ini}}^{(\text{max})}$  forman, aproximadamente, un mismo oscilón. El sustento de ambas observaciones es la evidente similitud entre las isosuperficies a energía constante en el panel izquierdo y las isosuperficies de frecuencia de oscilación en el panel derecho, por lo que se puede concluir que la estructura del mapa de frecuencias está determinada por la energía disponible en las condiciones iniciales. Este parecido entre las isosuperficies de energía y frecuencia

también se da para otros valores de  $\varepsilon$ .

De la misma manera que para la Fig. IX en el régimen perturbativo (en la Subsec. A), se comparan los valores de  $\omega_{\text{osc}}$  y  $E$  en una necesaria reducción del espacio de parámetros. Con la intención de testear la consistencia de los flujos de parámetros, se encuentra que el único efecto de considerar  $\theta_0 \neq 0$  es el corrimiento de los estados hacia energías mas bajas (o frecuencias mas altas) cuando las fases crecen, lo que hace que las líneas de flujo sean invariantes. Los paneles a la izquierda de la fig. XI muestran que una fracción de las soluciones decae de forma análoga a lo observado en el caso  $\varepsilon = 0.75$  en los resultados en el régimen perturbativo. En analogía a los resultados en fig. IX, se encontró la frecuencia de oscilación en función de la energía inicial, así como la energía en instantes posteriores pero ahora en los casos con  $\varepsilon \gtrsim 1$ . El panel superior (que corresponde a soluciones en 2D) también muestra un estado intermedio etiquetado como  $(E_{\min}, \omega_{\max})$ . Esta solución es el estado estable de menor energía de la muestra y se ubica exactamente entre las soluciones decaídas y los oscilaciones: se trata de una solución con amplitud modulada, que es muy similar a las mostradas en el caso  $\varepsilon = 0.75$ . Encontrar la ubicación exacta de los estados de máxima frecuencia requiere de un muestreo de condiciones iniciales mas fino (y computacionalmente costoso) del que aquí se presenta. En cuanto a la estabilidad de los valores de energía y frecuencia, esta no es un problema mayor ya que después de la fase transiente estos valores no varían significativamente con el tiempo ni siquiera para las soluciones con amplitudes moduladas.

Respecto al panel inferior izquierdo que corresponde a  $\varepsilon = 1.8$ , no se encuentran estados intermedios. La dispersión de estados a la derecha y a la izquierda de  $E_{\max}$  se puede interpretar como una señal de que los estados de máxima y mínima energía (así como la línea completa de estados en medio que representan un continuo de oscilaciones en el límite de epsilon pequeño) han colapsado a un punto en el espacio de parámetros. En breve se demostrará que ese colapso ocurrió para un valor de  $\varepsilon$  menor a 1.8.

En todos los casos, es claro de que existe un oscilón con energía máxima. Este oscilón puede ser producido por una gran familia de breathers cuya energía inicial sea mayor que cierto valor umbral. El umbral de energía se puede representar por una superficie de energía constante, de modo similar a lo que se ilustra en la fig. X para las soluciones decaídas. La energía máxima de los oscilones ( $E_{\max}$ ) se puede determinar de forma mas

robusta que las energías mínimas. Esto se puede confirmar visualmente al examinar la agregación de estados en los cúmulos de puntos negros en los paneles a la izquierda de la Fig. XI, estados que se acumulan alrededor de una banda delgada de energías. Se estima el valor de la energía máxima para algunos valores de  $\varepsilon > 1$  a partir de la energía promedio de los cúmulos de puntos. Los errores de estimación corresponden a las desviaciones estándar alrededor de la energía promedio. Con toda esta información, en el panel derecho de la fig. XI se hace un ajuste de la energía máxima  $E_{\max}$  como una ley de potencias en  $\varepsilon$  de la forma

$$\frac{\mu^{\varepsilon+1}}{V_0}(E_{\max} - E_0^>) = \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_*^>}\right)^{p^>} , \quad (20)$$

donde los parámetros de ajuste son  $E_0^> = 50.26 \pm 2.44$ ,  $p^> = 5.15 \pm 0.15$  y  $\varepsilon_* = 0.947 \pm 0.001$ . Las energías y frecuencias tienden a cambiar más rápido a medida que la dimensionalidad crece, debido a la reducción en los tiempos de vida de los oscilones. Al ser las medidas de  $E_{\max}$  and  $\omega_{\min}$  menos estables en el tiempo, las barras de error crecen con  $\varepsilon$ . Los puntos cuyas barras de error están sombreadas en color azul evidencian los efectos de la evolución temporal en el ajuste: los puntos con mayores valores de  $\varepsilon$  son los primeros en salir de la ley de potencias, debido a que los oscilones decaen más rápido a medida que la dimensionalidad crece. El ajuste en la Ec. (20) no tiene dependencia en los parámetros iniciales del breather  $\omega_{\text{ini}}$  y  $\theta_0$  (siempre y cuando aún se consideren las soluciones en las “mesetas” con  $\omega_{\text{osc}}$  constante). Esto se debe a que los oscilones acumulados alrededor de  $\omega_{\min}$  son aproximadamente los mismos para todas las opciones de frecuencias y fases iniciales.

El colapso de las configuraciones de máxima y mínima energía en una región pequeña del espacio de parámetros (la que se trata aproximadamente como un punto) es una propiedad característica del régimen no perturbativo de deformaciones dimensionales. Se necesita de una cantidad suficiente de estados en la región de transición, la cual separa oscilones de las soluciones decaídas, para estudiar este colapso. Una manera de incrementar la cantidad de configuraciones en esta región es la inclusión de oscilones que evolucionen a partir de breathers con diferentes fases iniciales. Como se explicó anteriormente, las estimaciones de la energía máxima  $E_{\max}$  y la frecuencia mínima  $\omega_{\min,\varepsilon}$  no varían al incluir soluciones con diferentes fases en el muestreo. Es por eso que en adición al rango de frecuencias

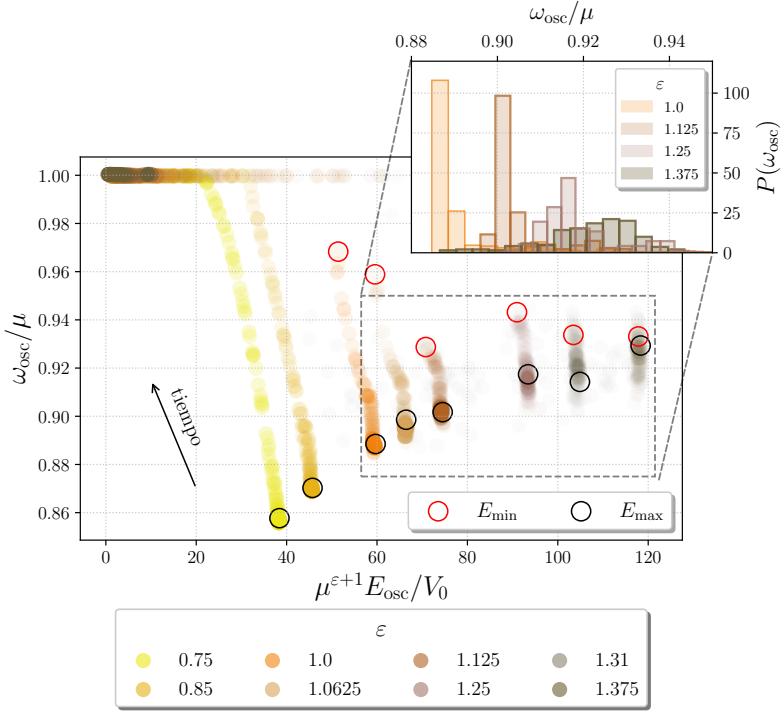


FIGURA XII: Frecuencias y energías de oscilones en varias dimensionalidades. Se escogen cincuenta frecuencias de una muestra uniformemente distribuida en el rango  $\log_{10} \omega_{\text{ini}}/\mu \in [-1.0; 0.0)$  y diez fases iniciales en el rango  $\theta_0 \in [0; \pi/2)$  para cada valor de  $\varepsilon$ . Es posible distinguir la aparición de una banda de frecuencias libre de oscilones, esta se hace mas grande a la vez que  $\varepsilon$  crece. El gráfico insertado en la escala superior derecha representa el cambio en las distribuciones de probabilidades empíricas para  $\varepsilon \in [1.0; 1.375]$ . La deformación de los histogramas muestra explícitamente el colapso de un continuo de oscilones cuando  $\varepsilon \in [1.25; 1.375]$ . Este colapso se muestra de un modo distinto en la Fig. XI.

iniciales, en la fig. XII también se mapean fases en el intervalo  $\theta_0 \in [0; \pi/2)$  con el objetivo de contar con hasta 500 configuraciones en cada línea de flujo a  $\varepsilon$  constante. Incluso cuando no es posible determinar  $\omega_{\text{max}}$  y  $E_{\min}$  con precisión, debido a que la muestra sigue sin contar con suficientes oscilones, la muestra es lo suficiente densa como para mostrar cambios drásticos en la cantidad de oscilones en ciertos rangos de frecuencias y energías. Estos cambios aparecen como espacios, los que refuerzan la idea de que existe un estado con energía mínima (y frecuencia máxima) cuando  $\varepsilon \gtrsim 1$ . Adicionalmente, estos resultados confirman el colapso de un continuo de estados (limitados por estados de máxima y mínima energía) para valores de  $\varepsilon$  cercanos a uno. En el caso  $\varepsilon = 1.125$ , se encuentra un rango localizado de frecuencias en los que se pueden encontrar oscilones. A partir de esta dimensionalidad las frecuencias máximas y mínimas se encuentran notablemente más cercanas que en otros casos con menores valores de epsilon. Las distribuciones marginalizadas sobre la energía se encuentran en la gráfica insertada en la esquina superior derecha de

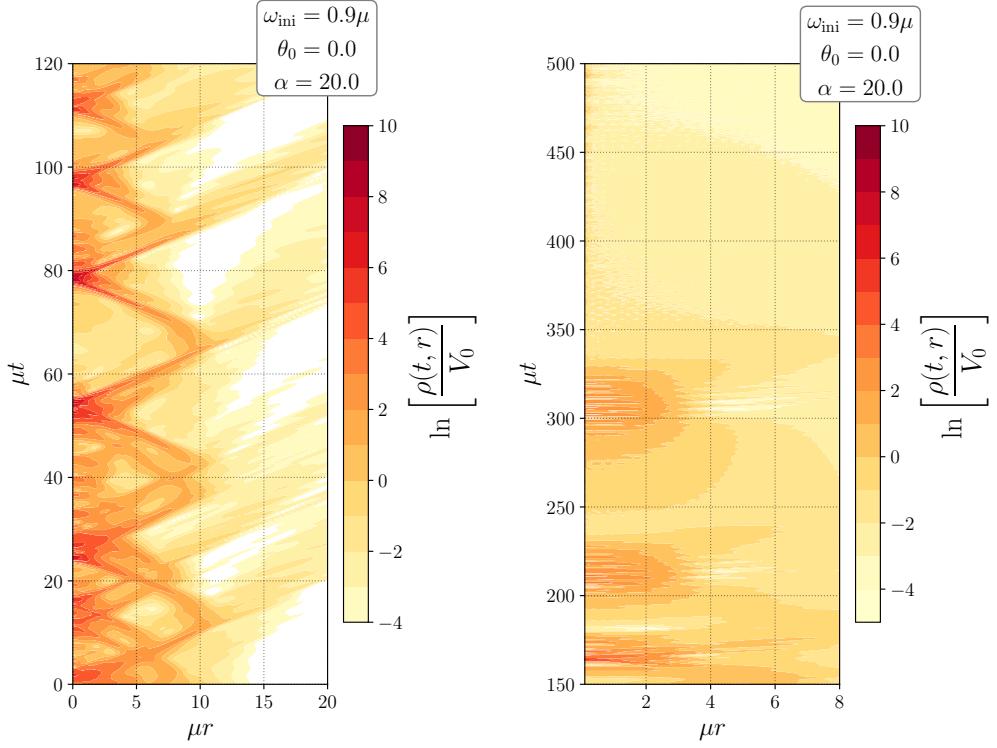


FIGURA XIII: Evolución de la densidad de energía de una condición inicial tipo breather en el modelo de sine-Gordon en tres dimensiones para  $\omega_{\text{ini}} = 0.9\mu$  y  $\alpha = 20$ . En el caso sin deformar ( $\alpha = 1$ ), la frecuencia corresponde a la de un breather oscilando alrededor de  $\phi = 0$ . Panel izquierdo: fase inicial de la evolución correspondiente al colapso y expansión de cascarones esféricos. Panel derecho: dilución de los estados ligados, la solución desparece después de dos ráfagas intermitentes.

la fig. XII. Aquí se restringe el rango de frecuencias a  $\omega_{\text{osc}}/\mu \in [0.88; 0.95]$  para representar las deformaciones en las distribuciones empíricas. Estas distribuciones son consistentes en mostrar que el colapso de estados a un único oscilón ocurre cuando  $1.25 \leq \varepsilon < 1.375$ . Es posible (aunque no muy probable) que dicho punto corresponda a una linea muy delgada cuando  $\varepsilon \approx 2$ . De acuerdo a lo mostrado en el panel inferior izquierdo de la fig. XI, los estados se esparcen de manera difusa alrededor de la banda de máxima energía/mínima energía, la que aparece en  $\varepsilon = 1.31$ . No es posible distinguir más de un estado dentro de esa pequeña región a partir de las simulaciones. Para los casos  $\varepsilon = 1$  y  $\varepsilon = 1.0625$ , los resultados etiquetados como  $(\omega_{\max}, E_{\min})$  en círculos rojos (así como algunos de los vecinos mas cercanos) corresponden a oscilones que sobrellevan fases periódicas de contracción y expansión de sus núcleos. En el mismo plano de energías y frecuencias, estos oscilones se ubican justo en medio de las regiones disjuntas que contienen oscilones y soluciones decaídas, lo que confirma los resultados en la Subsec. A para  $\varepsilon = 0.75$ , tal cómo se ilustra en la Fig. VII.

El uso de parametrizaciones alternas genera muchas oportunidades y posibles exploraciones; en particular, es razonable evaluar cómo es que un incremento en la energía afecta la estabilidad del oscilón. Si se considera

$$\frac{\phi(r,t)}{\phi_*} = \alpha \phi_B(r,t|\omega_B = \omega_{\text{ini}}), \quad (21)$$

como una condición inicial que inyecta energía cinética y gradiente para  $\alpha > 1$ . La energía potencial también podría crecer para estados de amplitud pequeña oscilando alrededor de  $\phi = 0$ . El momento conjugado a esta condición inicial también se multiplica por  $\alpha$ . Al considerar esta condición inicial para  $\alpha = 1$  y  $\omega_{\text{ini}}/\mu = 0.9$  y evolucionarla para  $\varepsilon = 2$  (es decir, en tres dimensiones espaciales), la solución no forma un oscilón. A manera de experimento, se incrementó la amplitud de la misma configuración en un factor de 20 para ver los efectos causados por un aumento arbitrariamente grande de la amplitud inicial. En la fig. XIII, se observa que la densidad de energía de la solución luce como un conjunto de cascarones esféricos que oscilan alrededor de más de un mínimo del potencial de sine-Gordon. Es evidente que esta solución no tiene ningún parecido a los oscilones que se muestran a lo largo de esta tesis, y por otro lado, el tiempo de vida de la solución tampoco parece cambiar de manera ostensible tras este aumento en la energía inicial. Se aprecian ráfagas de radiación clásicas que escapan de la solución a lo largo de su evolución. Es claro que la energía no es una magnitud que pueda ser localizable en la solución, y la frecuencia de oscilación en el origen no es un parámetro relevante. Por lo tanto, el incremento arbitrario de la energía de un breather inicial siguiendo la parametrización sugerida por la Ec. (21) no necesariamente favorece a la formación de oscilones con largos tiempos de vida en dimensiones mas altas. Esto coincide con varios resultados preexistentes que usan perfiles Gaussianos alargados como condiciones iniciales.

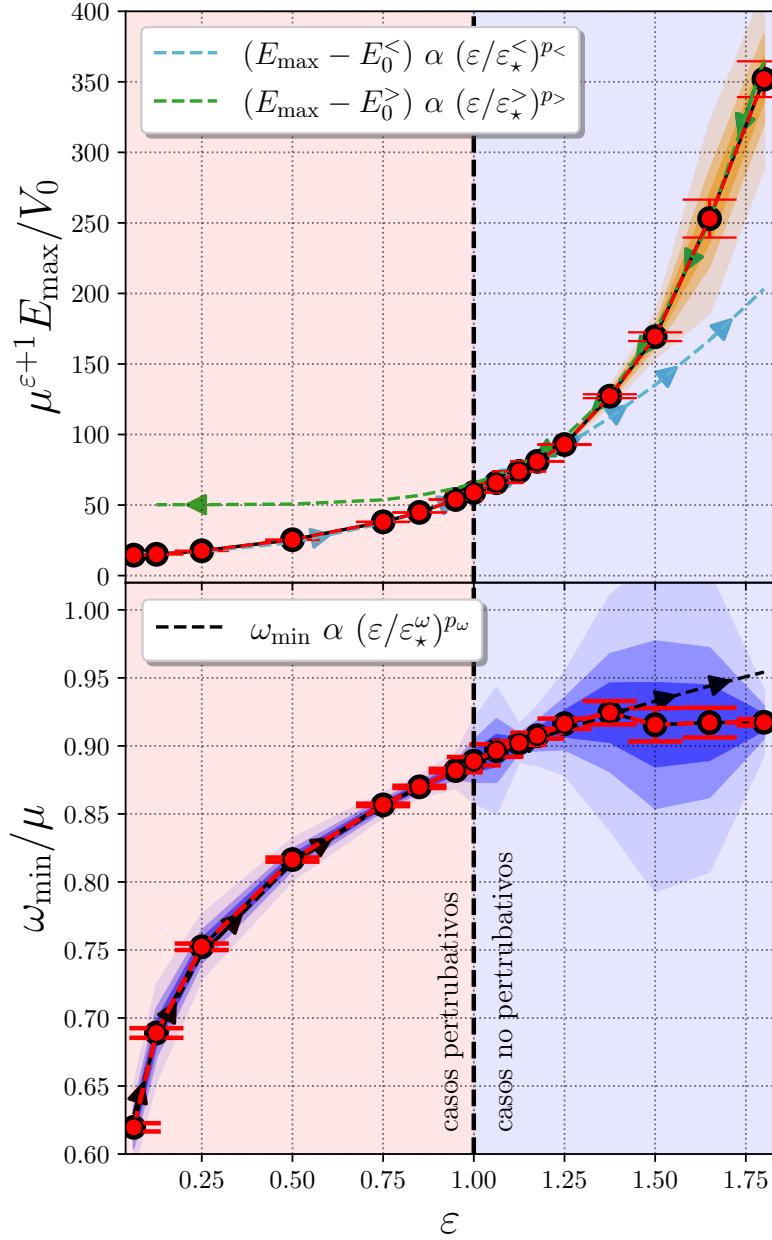


FIGURA XIV: Energía máxima (panel superior) y frecuencia de oscilación mínima (panel inferior) de oscilaciones como una función del número de dimensiones espaciales, luego de recolectar los resultados de  $\omega_{\min}$  y  $E_{\max}$  de las subsecciones A y B. Las líneas entrecortadas coloreadas en verde y celeste en el panel superior muestran los comportamientos en los casos con  $\varepsilon > 1$  y  $\varepsilon < 1$  para la energía máxima en función de  $\varepsilon$ , respectivamente. En contraste a la energía máxima, la linea entrecortada negra en el panel inferior muestra que la frecuencia mínima se puede ajustar por una sola ley de potencias. Los contornos en azul y naranja son las regiones contenidas dentro de una distancia de una, dos y cinco veces los errores de los valores medidos. Estos contornos no deben ser usados para determinar valores de confianza.

## IV. Comportamiento crítico

En capítulos anteriores, se encontró evidencia de un atractor en el espacio de soluciones esféricamente simétricas a las ecuaciones de sine-Gordon  $\varepsilon$ -deformadas. Del mismo modo, se mostró que este atractor es accesible desde una gran cantidad de condiciones iniciales radiales tipo breather. Complementariamente, se mostró la existencia de soluciones con amplitud modulada, que son estados intermedios que conectan oscilones y soluciones decaídas. Las soluciones con amplitudes moduladas alejan progresivamente del atractor a medida que la frecuencia de modulación disminuye. En esta sección se cuantifican las propiedades del atractor con el cambio de la dimensionalidad  $\varepsilon \equiv D - 1$ . Luego de recopilar los resultados perturbativos y no perturbativos, es posible notar que las propiedades del atractor son consistentes con la presencia de comportamiento crítico. Hasta el momento, la mayor parte de estas discusiones han hecho uso de las frecuencias de oscilación  $\omega_{\text{osc}}$  y las energías como parámetros diagnósticos para describir la dinámica de los oscilones. Ambos parámetros tienen motivaciones físicas claras, e ilustran de manera explícita las similaridades entre breathers y oscilones cuando  $\varepsilon \ll 1$ , la que se mostró en la Fig. IX.

Para comenzar esta sección, es importante resumir las propiedades clave del oscilón atractor que se encuentra en la Sección III:

1. Para todos los valores de  $\varepsilon > 0$  en el rango de condiciones iniciales muestreado, se encontró un oscilón con energía máxima  $E_{\max}$ , que implica una frecuencia de oscilación mínima  $\omega_{\min}$ . Las condiciones iniciales con  $E_{\text{init}} > E_{\text{init}}^{\max}$  tienden a evolucionar rápidamente a esta configuración.
2. Con el incremento de  $\varepsilon$ , se encontró que eventualmente algunos de los perfiles iniciales de breather decaen en vez de formar un oscilón. La distribución de soluciones decaídas y oscilones coincidió en forma exacta con el mapa de energías iniciales, lo que sugiere la existencia de un oscilón de mínima energía para valores de  $\varepsilon$  suficientemente grandes. Los resultados en la Fig. XII en los que se encuentran rangos en los que no hay oscilones dan evidencia complementaria de este hecho. La muestra de condiciones iniciales  $|\omega_{\text{osc}} - \omega_{\min}| \ll 1$  no es lo suficientemente densa para confirmar si esta característica aparece un en valor preciso de  $\varepsilon$  o no. Una razón técnica para no muestrear esta región es que los oscilones son muy anchos, por lo que una

implementación computacional adecuada sería muy costosa.

3. Como un resultado de las últimas dos propiedades, hay un continuo de oscilones para  $\varepsilon \ll 1$ , que bien se pueden etiquetar por sus frecuencias de oscilación  $\omega_{\text{osc}}$  o por sus energías  $E_{\text{osc}}$ .
4. A medida que  $\varepsilon$  crece, los estados  $(\omega_{\max}, E_{\min})$ ,  $(\omega_{\min}, E_{\max})$ , y todos los estados en medio de estos se acercan entre sí, y la linea del atractor colapsa a un punto.

Es importante comprender como las características clave del atractor oscilón cambian con la dimensionalidad. Específicamente, considerando que (de cierto modo) los oscilones con máxima energía actúan como soluciones críticas, ya que se forman al comienzo de las líneas de atractor del oscilón. Como consecuencia de esto, las configuraciones iniciales de oscilón con  $E_{\text{ini}} > E_{\max}$  tienden a aglomerarse alrededor de este punto a lo largo de su evolución dinámica. En la Fig. XIV se recolectan los resultados de  $E_{\max}$  y  $\omega_{\min}$  del régimen perturbativo y del no perturbativo de deformaciones dimensionales, sabiendo que estos se hallan a partir de la acumulación de estados alrededor de puntos específicos en el plano  $(\omega_{\text{osc}}, E)$  para cada valor de  $\varepsilon$ . Los resultados muestran que la dependencia de  $E_{\max}$  en  $\varepsilon$  no pueden ser representadas por una única ley de potencias. Se necesita de dos curvas separadas para el ajuste, una para  $\varepsilon \lesssim 1$

$$\frac{\mu^{\varepsilon+1}}{V_0} (E_{\max} - E_0^<) = \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_*^<} \right)^{p<} , \quad (22)$$

y otra para  $\varepsilon \gtrsim 1$

$$\frac{\mu^{\varepsilon+1}}{V_0} (E_{\max} - E_0^>) = \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_*^>} \right)^{p>} . \quad (23)$$

TABLA I: Coeficientes de ajuste e incertidumbres para la energía y la frecuencia (a partir de los resultados perturbativos y no perturbativos) presentados en la Fig. XI (curva verde, panel derecho) y la fig. XIV.  $E_0^<$  es consistente con la energía de un par  $K\bar{K}$  infinitamente separado, mientras que  $E_0^>$  es la energía de un oscilón en dos dimensiones con frecuencia mínima. La última fila contiene los coeficientes de ajuste de la frecuencia mínima  $\omega_{\min}$  como una función de  $\varepsilon$ , la cual esta bien representada por la ley de potencias graficada en el panel inferior de la Fig. XIV.

caso	$E_0[\mu^{\varepsilon+1}/V_0]$	$\varepsilon_*$	$p$
(<)	$15.54 \pm 0.66$	$0.21 \pm 0.01$	$2.47 \pm 0.07$
(>)	$50.26 \pm 2.44$	$0.947 \pm 0.001$	$5.15 \pm 0.15$
( $\omega$ )	—	$2.262 \pm 0.078$	$0.125 \pm 0.003$

Los parámetros de ajuste en ambos casos se reportan en el cuadro I. A simple vista, esto sugiere la presencia de una transición de fase de orden mayor que cero. Sin embargo, el panel inferior de la Fig. XIV muestra que la frecuencia mínima  $\omega_{\min}$  sí puede ser ajustada en una ley de potencias

$$\frac{\omega_{\min}}{\mu} = \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_*^\omega} \right)^{p_\omega}, \quad (24)$$

donde  $\varepsilon_*^\omega = 2.262 \pm 0.078$  y  $p_\omega = 0.125 \pm 0.003 \approx \frac{1}{8}$ . Los resultados sugieren que las potencias  $p_>$ ,  $p_<$  y  $p_\omega$  se podrían interpretar como exponentes críticos. En particular, ello implica que la discontinuidad en las potencias vista para la energía máxima puede (a) no ser universal, o (b) ser de un orden mas alto respecto a la frecuencia. Para valores más grandes de  $\varepsilon$ , el ajuste como una ley de potencias se vuelve pobre, y la frecuencia mínima parece decrecer ligeramente antes de desarrollar una asíntota horizontal. Las expresiones ajustadas como las Ecs. (22–24) no dependen de los parámetros iniciales  $\omega_{\text{ini}}$  ni  $\theta_0$ , ya que los oscilones son aproximadamente los mismos para todas las elecciones de frecuencia inicial y fase (al menos para  $\theta_0 \neq \pi/2$ ). Por lo tanto, los valores medidos de  $E_{\max}$  y  $\omega_{\min}$  no muestran variaciones significativas a cambios en la forma de los breathers iniciales que las generan.

El colapso de un continuo de estados, que esta limitado por configuraciones de máxima y mínima energía (correspondientes a mínima y máxima frecuencia, respectivamente), es uno de los resultados principales del régimen no perturbativo de deformaciones dimensionales (Subsec. B). Para ilustrar el colapso hacia la línea de mínima frecuencia ploteada en el panel inferior de la Fig. XII, se considera que los estados de máxima frecuencia se incluyen luego de (a) fijar  $\omega_{\max} = \mu$  como una sospecha educada cuando  $\varepsilon < 0.75$ , y (b) incluir los valores empíricos de frecuencia máxima encontrados a partir de las simulaciones realizadas en el régimen no perturbativo. La Fig. XV muestra con toda claridad la presencia de comportamiento crítico en la generación de oscilones, ya que se asemeja a un diagrama de fases que grafica el colapso de los estados de máxima y mínima frecuencia a un único punto. El colapso permite identificar un “punto triple” (o de bifurcación) en el diagrama de fases, el que se ubica en el intervalo  $\varepsilon \in [1.25; 1.375]$ . Los puntos negros denotan el límite superior de las frecuencias  $\omega_{\text{osc}}$  muestreado por las simulaciones. La región marcada con líneas azules representa dónde es que se han encontrado oscilones estables, mientras que la región roja corresponde a oscilones anchos que no se han explorado debido a los límites

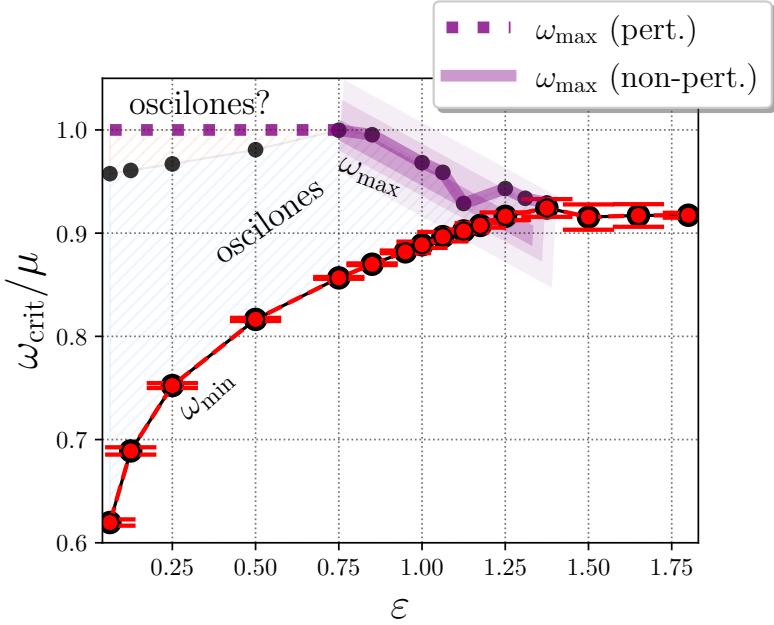


FIGURA XV: Diagrama de fases que muestra el colapso de estados hacia la curva de frecuencia mínima en la Fig. XIV con el incremento de la dimensionalidad. La línea punteada púrpura en  $\omega_{\max} = \mu$  representa a los estimados de máxima frecuencia en el régimen perturbativo. Los puntos negros representan a las frecuencias de oscilación máximas medidas en las simulaciones, las que muestran para  $\varepsilon \gtrsim 1$  el colapso de estados en el límite no perturbativo. El área cubierta en líneas azules contiene oscilaciones generadas a partir de breathers dentro del rango escaneado de condiciones iniciales, mientras que el área en rojo es la región en el plano  $(\varepsilon, \omega_{\text{osc}})$  que no fue explorada. El rectángulo oblicuo, coloreado en distintos tonos de violeta, indica que los niveles de error en las frecuencias máximas para  $\varepsilon > 0.75$  son grandes. El tamaño del rectángulo no pretende mostrar la magnitud de los errores en  $\omega_{\max}$ .

de resolución impuestos por la implementación numérica. Incluso después de incluir soluciones con diferentes fases iniciales para aumentar el número de oscilaciones para cada valor de  $\varepsilon$ , los valores precisos de la frecuencia mínima aún son susceptibles a márgenes de error grandes. A pesar de ello, el colapso de todos los estados intermedios a un único punto aún se distingue con claridad, así como la existencia de espacios que separan a las soluciones estables de las inestables. Algunas de las soluciones en la región achurada en líneas azules corresponden a soluciones de amplitud modulada; estas son aún más sencillas de distinguir cerca de  $\varepsilon \gtrsim 1$ . Este diagrama de fases también se asemeja a los diagramas de bifurcación que aparecen en los estudios de la función logística y en sistemas caóticos [43].

En lo que resta del desarrollo de esta tesis, se explorarán formas alternativas de deformar el modelo de sine-Gordon. En la Sección V, se sugiere una implementación que considera transiciones dinámicas en la dimensionalidad del espacio-tiempo, y se revisan al-

gunos de sus efectos. En la Sección VI se construye un modelo ajustable que transforma el potencial sinusoidal de sine-Gordon en el potencial de monodromía de axiones de manera continua. Esto tiene como objetivo extender algunos de los resultados de secciones anteriores a deformaciones continuas del potencial. Mas adelante en el texto, el lector podrá conocer los detalles de la implementación numérica en el sección VII, así como leer las discusiones y conclusiones en la Sección VIII. Una idea muy interesante sería la extensión de este tratamiento a otro tipo de estructuras localizadas, tales como solitones y cuerdas producidas por defectos topológicos [44, 45, 46], y de esa manera estudiar su comportamiento crítico o sus conexiones (si existen) a otros modelos integrables.

## V. Deformaciones dimensionales con duración finita

El concepto de dimensionalidad dinámica del espacio-tiempo se ha sugerido en una gran variedad de escenarios físicos [47, 48, 49, 50], y sus efectos en teorías de campos no lineales merecen especial atención. Por otro lado, los oscilones esféricamente simétricos producidos hasta el momento se generan bajo la premisa de que la deformación dimensional de los breathers de sine-Gordon ocurre instantáneamente. Es por eso que en esta sección se exploran modificaciones del modelo de sine-Gordon que tienen una duración finita, ya que sería válido cuestionarse sobre la manera en la que las conexiones mostradas en la sección III cambian debido a la inserción de escalas temporales extra. Para introducir transiciones dimensionales dinámicas, se considera la siguiente acción

$$S_{\varepsilon_t} = \int (\ell_T r)^{\varepsilon_t} \left\{ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial r} \right)^2 - \mu^2 \phi_*^2 \left[ 1 - \cos \left( \frac{\phi}{\phi_*} \right) \right] \right\} dr dt. \quad (25)$$

Por simplicidad, se asume que la escala dimensional ( $\ell_T$ ) con unidades de la inversa de longitud es la misma que  $\mu$ , lo que no necesariamente aplica en casos más generales. Las consecuencias de escoger diferentes escalas de longitud sobre los resultados se explorará en un futuro proyecto. Esta acción genera las ecuaciones del movimiento para el modelo de sine-Gordon dimensionalmente deformado en (7). En esta sección, se modifica la acción al convertir  $\varepsilon$  en una función dependiente del tiempo denotada como  $\varepsilon_t$ , esta es una generalización directa de la acción Minkowskiana para un campo escalar en simetría esférica. La idea de introducir una dependencia real en  $\varepsilon$  en la acción es análoga al procedimiento de regularización dimensional aplicado en teoría cuántica de campos [51, 52, 53]. Tras esta definición, las ecuaciones del movimiento se derivan a partir de la derivada funcional de (25):

$$\frac{d\phi}{dt} \equiv \Pi_\varepsilon, \quad (26a)$$

$$\frac{d\Pi_\varepsilon}{dt} = -\Pi_\varepsilon \dot{\varepsilon}_t \ln(\ell_T r) + \left[ \frac{\varepsilon_t}{r} + \frac{\partial}{\partial r} \right] \frac{\partial \phi}{\partial r} - \mu^2 \phi_* \sin \left( \frac{\phi}{\phi_*} \right). \quad (26b)$$

A partir de estas ecuaciones, es claro que en el caso  $\dot{\varepsilon}_t = 0$  estas se reducen al caso esféricamente simétrico en  $(1 + \varepsilon_t)$  dimensiones espaciales. El término proporcional a  $\dot{\varepsilon}_t$  introduce una singularidad logarítmica en  $r = 0$ , sin embargo esta no es una razón de

preocupación debido a que esta singularidad es menos severa que  $r^{-1}$ . Para resolver esta divergencia basta con omitir el origen en el volumen de simulación, así como expandir la solución en funciones de base cuyas derivadas sean regulares en  $r = 0$ , lo que se muestra con detalle en el Sección VII. Adicionalmente, este término singular solo se activa brevemente durante la transición dimensional.

La forma funcional de  $\varepsilon_t$  se escoge con el fin de conectar valores constantes de  $\varepsilon$  de manera continua. Para ello, se consideran las funciones ventana tipo coseno [54], de manera que se puede escribir  $\varepsilon_t$  como

$$\varepsilon_t = \begin{cases} \varepsilon_{\text{ini}} + \Delta D \left[ \sin \left( \frac{\pi t}{2\sigma_t} \right) \right]^2, & 0 \leq t < \sigma_t, \\ \varepsilon_{\text{ini}} + \Delta D, & t \geq \sigma_t, \end{cases} \quad (27)$$

esta es una función a trozos de clase  $C^1$ , que es continua (así como su derivada) en  $t = \sigma_t$ . Esta función es muy similar a la versión continua de una función de Heaviside, excepto que para  $t \leq 0$  y en  $t > \sigma_t$  la función toma exactamente (no de forma asintótica) los valores de  $\varepsilon_{\text{ini}}$  y para  $\varepsilon_{\text{ini}} + \Delta D$ , respectivamente.  $\sigma_t$  es la duración de la transición dimensional de  $D = \varepsilon_{\text{ini}} + 1$  a  $D = \varepsilon_{\text{ini}} + \Delta D + 1$  dimensiones espaciales. El signo de  $\Delta D$ , que es el cambio en la dimensionalidad, puede ser positivo o negativo si es que se desea un incremento o una reducción en el numero de dimensiones del problema.  $\dot{\varepsilon}_t$  es la derivada temporal de  $\varepsilon_t$  y es una función de un solo pico, que se comporta como un impulso tipo delta en el límite  $\sigma_t \rightarrow 0$ . En el límite en el que se reduce el sistema a una sola partícula, ese pico causa una pérdida (o ganancia) fraccional de energía cinética, que se asemeja a una colisión instantánea e inelástica. Como un ejemplo, en el siguiente [enlace](#) se presenta la evolución de un breather con  $\omega_{\text{ini}} = 0.1\mu$  en una dimensión ( $\varepsilon_{\text{ini}} = 0$ ). La solución se deforma para transformarse un oscilón esféricamente simétrico en dos dimensiones ( $\Delta D = +1$ ) mediante un proceso de variación dinámica de la dimensionalidad que dura  $\sigma_t = 200\mu^{-1}$ . La animación muestra que durante la transición dimensional, la solución reduce su amplitud y aumenta su frecuencia. Asimismo, también se observa la emisión de radiación clásica.

A manera de ensayo del sistema de ecuaciones deformadas, se evalúa la transición de una condición inicial esféricamente simétrica tipo breather en 3D a un breather de sine-Gordon en una dimensión. Como ya se mencionó, la condición inicial tiene la misma forma

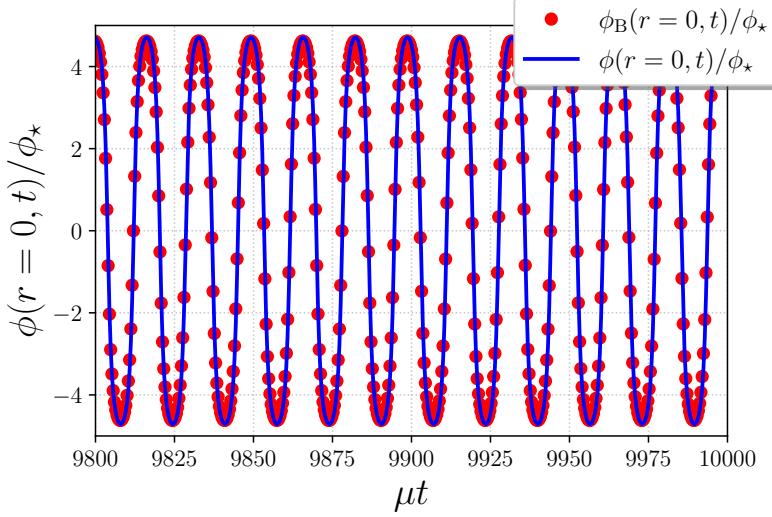


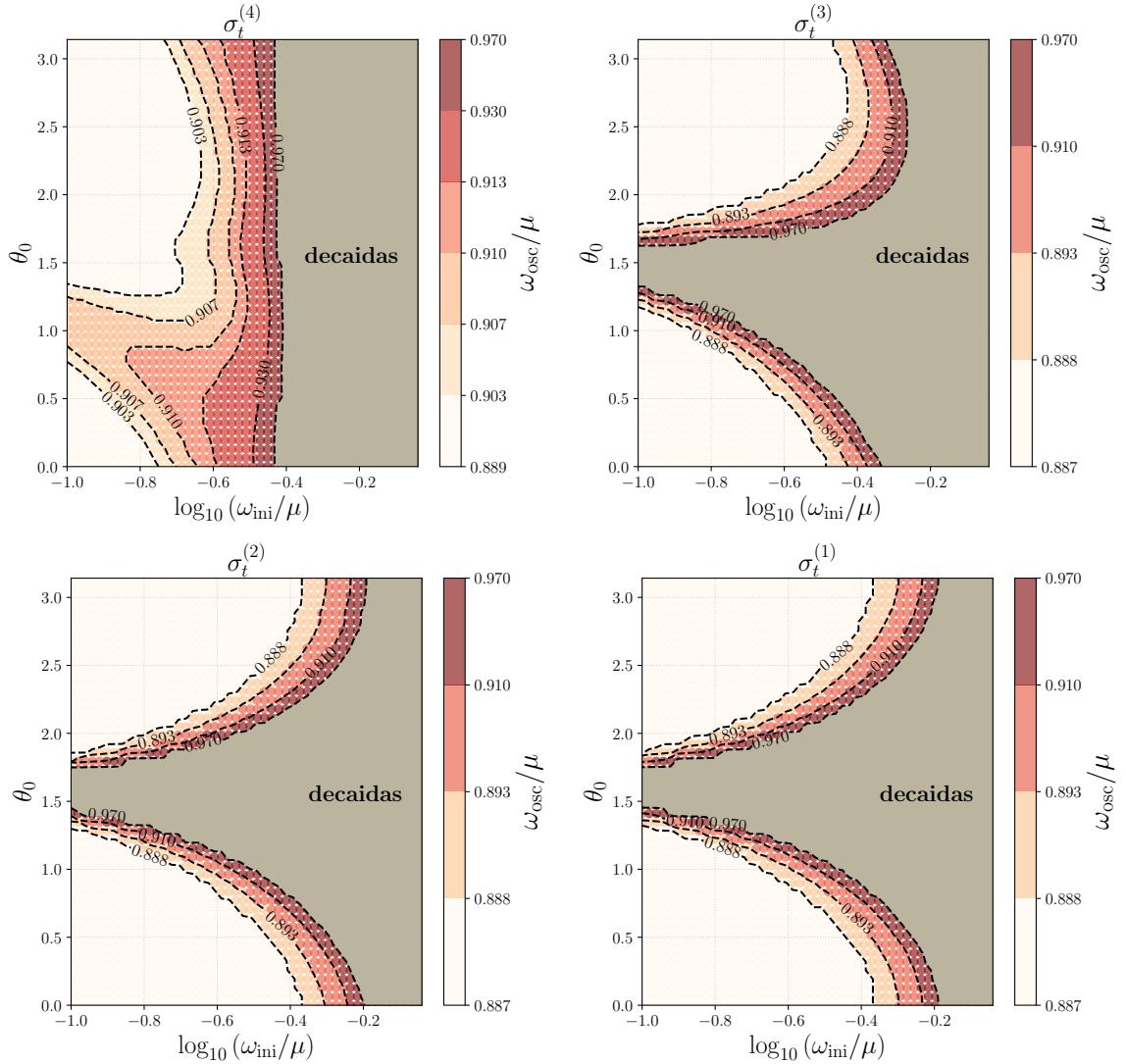
FIGURA XVI: Comparando la evolución en  $r = 0$  de la solución de las ecuaciones (26a) y (26b) (etiquetada como  $\phi(r = 0, t)/\phi_*$  y ploteada en una línea azul sólida), que pasó por una trancisión dimensional de 3D a 1D en un par de oscilaciones, con un breather de sine-Gordon centrado en el origen. El breather de sine-Gordon (etiquetado como  $\phi_B(r = 0, t)/\phi_*$  y graficado en puntos rojos) es un muy buen ajuste a la solución que sobrellevó una transición dimensional. Se consideró la fase inicial de  $\theta_B \approx -4\pi/21$  para completar el ajuste. Este resultado valida el procedimiento de extracción de frecuencias presentado en la Sección II, y que se usó en el desarrollo de este proyecto.

que un breather de la Ec. (3) con  $\omega_B = 0.1\mu$  y fase inicial igual a cero. Para representar la transición inicial, se consideró  $\varepsilon_{\text{ini}} = 2$ ,  $\Delta D = -2$  y  $\sigma_t = 0.1\mu^{-1}$ , lo que corresponde a una transición aproximadamente instantánea. La Fig. XVI muestra que la solución evaluada en un radio constante  $r = 0$  se puede escribir como

$$\frac{\phi(r, t)}{\phi_*} = \phi_B(r = 0, t | \omega_B = \omega_{\text{osc}}), \quad (28)$$

con  $\theta_B \approx -4\pi/21$  y  $\omega_{\text{osc}} \approx 0.381\mu$ . Lo importante aquí es que este valor de  $\omega_{\text{osc}}$  se extrajo de la evolución del campo, siguiendo el procedimiento descrito en la Sección II (tal como se ilustró en el panel derecho de la Fig. IV): se encontró la frecuencia dominante de la solución evaluada en el origen. Tal como se muestra en la figura, este resultado es plenamente consistente con un hecho bien conocido del model de sine-Gordon [16]: sus soluciones solo pueden ser combinaciones de breathers, solitones y ondas no lineales. Simultaneamente, este resultado evalúa la consistencia de la deformación planteada por la ecuación (26b) y valida el método de extracción de frecuencias explicado en secciones anteriores.

Habiendo revisado la consistencia de las deformaciones dimensionales dependientes



**FIGURA XVII:** Frecuencia del oscilón en función de la fase y frecuencia del breather inicial para la transición dimensional dinámica de una o dos dimensiones espaciales, cuyas duraciones se reportan en el cuadro [II](#). Se considera una distribución de condiciones iniciales ( $\omega_{\text{ini}}$ ) y fases (que coincide con lo mostrado en la Fig. [VI](#)) uniforme en  $\log_{10}(\omega_{\text{ini}}/\mu) \in [-1, -0.02]$  y en  $\theta_0 \in [0, \pi]$ . Las estructuras graficadas en la Fig. [VI](#) aparecen en el límite de transiciones dimensionales abruptas, tales como los dos paneles inferiores, y del mismo modo se vuelven menos agudas (al punto de casi desparecer) con la ralentización de la transición (i.e., como los dos paneles en la parte superior). En todos los casos, los estados decaídos (dentro de los contornos grises) representan el 40% (aprox.) del total de 2500 soluciones evolucionadas. La simetría de las gráficas alrededor de  $\theta_0 = \pi/2$  solo se restaura en el límite  $\sigma_t \rightarrow 0$ . Se escogió que el rango de frecuencias de oscilación coincida con el rango de frecuencias para la línea de flujo  $\varepsilon = 1.0$  (los puntos naranja) en la Fig. [XII](#).

TABLA II: Casos y duración (en unidades de cantidad de oscilaciones, dado el rango de frecuencias iniciales  $\omega_{\text{ini}}$ ) de las trancisiones de una a dos dimensiones espaciales. La columna de la derecha contiene la cantidad de soluciones que decaen rápidamente, la que se obtiene al contarlas soluciones en los contornos grises directamente de los mapas de la Fig. XVII.

Casos	duración $\sigma_t [\mu^{-1}]$	# de oscilaciones	# de soluciones decaídas
$\sigma_t^{(1)}$	0.1	[0.02; 0.16]	1080
$\sigma_t^{(2)}$	0.5	[0.1; 0.8]	1080
$\sigma_t^{(3)}$	2.5	[0.5; 4.0]	1183
$\sigma_t^{(4)}$	12.5	[2.5; 20.0]	984

del tiempo, se evalúa la sensibilidad de la frecuencia de oscilación ( $\omega_{\text{osc}}$ ) con la duración de las transiciones dimensionales sugeridas en las ecuaciones (26a) y (26b). Ninguno de los breathers simulados ha sido deformado para compensar la falta de energía de los breathers de sine-Gordon en una dimensión. Luego de considerar  $\varepsilon_{\text{ini}} = 0$  y  $\Delta D = +1$ , se simula la deformación dinámica de los breathers en 1D a oscilones en 2D para las cuatro duraciones mostradas en el cuadro II. Es posible observar que los casos  $\sigma_t^{(1)}$  y  $\sigma_t^{(2)}$  corresponden a transiciones que duran menos de un periodo oscilación completo, mientras que los casos  $\sigma_t^{(3)}$  y  $\sigma_t^{(4)}$  si duran mas de una oscilación, notando además que los tiempos en los casos extremos son son diferentes en dos ordenes de magnitud. Los mapas de frecuencias de oscilación en la Fig. VI barren los mismos rangos de frecuencias y fases iniciales. En los cuatro paneles de la Fig. XVII, se presentan los mapas de frecuencias de oscilación correspondientes a las duraciones de transición en el cuadro. La simetría de el pico centrado en  $\theta_0 = \pi/2$  se restaura solo en el límite de transiciones abruptas (en los paneles de la parte inferior). No obstante, se puede notar que el rango de frecuencias de oscilación es aproximadamente independiente de la duración de la transición dimensional.

La columna derecha del cuadro II revela que la cantidad de soluciones que decaen rápidamente (al interior de los contornos grises) cambia en menos del 10%, a pesar que las duraciones cambian hasta en dos ordenes de magnitud. Esto implicaría que la cantidad de oscilones es también aproximadamente independiente de la velocidad de transición. Sin embargo, no sería riguroso extender estos resultados a diferentes elecciones (y formas de muestreo) de condiciones iniciales. Formas similares de deformaciones de estos mapas se pueden obtener si se mezcla alguna fracción de las soluciones de condiciones iniciales adyacentes en el espacio de parámetros iniciales. Dicho de otra manera, la deformación

de mapas es replicable si se cambia el muestreo de soluciones iniciales en el panel  $\sigma_t^{(1)}$ . Para duraciones mas largas, como la mostrada en el panel  $\sigma_t^{(4)}$ , los picos se vuelven menos agudos, y del mismo modo la conexión entre oscilones y soluciones decaídas se vuelve mas suave. Asimismo, es claro que la dependencia en las fases iniciales puede desaparecer a medida que las transiciones dimensionales se hagan más lentas. Como se muestra en el cuadro II, si bien la transición mas lenta tiene un efecto muy leve en la cantidad de oscilones; no se puede decir lo mismo sobre la cantidad de estados intermedios. El panel etiquetado como  $\sigma_t^{(4)}$ , se observa que la transición entre estados decaídos y oscilones es mas suave y presenta mas soluciones con frecuencias intermedias, por lo que el número de soluciones con amplitud modulada crece respecto las configuraciones en las que las transiciones dimensionales son más breves.

## VI. Oscilones en otros modelos: deformando potenciales

Hasta este momento se han estudiado oscilones cuyo origen es una teoría escalar de campos con términos cinéticos canónicos, y que evolucionan en un potencial tipo coseno (i.e., el modelo de sine-Gordon). En secciones pasadas, fue posible conectar soluciones de oscilón con breathers del modelo de sine-Gordon unidimensional tras considerar soluciones esféricamente simétricas en un número no entero de dimensiones. No obstante, es bien conocido que los oscilones aparecen en muchas otras teorías de campo relativistas, por lo que sería valioso explorar posibles conexiones entre estos oscilones y los breathers de sine-Gordon. En esta sección se extiende el tratamiento aplicado anteriormente al caso de oscilones en teorías distintas a la de sine-Gordon. Concretamente, el potencial de sine-Gordon se transformará en el de monodromía de axiones, el cual se sabe que soporta soluciones tipo oscilón [14, 13, 4, 55].<sup>4</sup>

El potencial mas simple para la monodromía de axiones es

$$V_M = \mu_M^2 \phi_M^2 \left[ \sqrt{1 + \frac{\phi^2}{\phi_M^2}} - 1 \right], \quad (29)$$

y se ilustra en fig. XVIII. Desde una perspectiva global, el potencial de monodromía  $V_M$  es totalmente diferente del potencial de sine-Gordon. Por ejemplo,  $V_M$  tiene un mínimo global y ningún máximo local, mientras que el potencial de sine Gordon tiene una cantidad infinita (y contable) de máximos y mínimos degenerados. Sin embargo, un oscilón convencional sólo oscila alrededor de una región finita que se aleja del mínimo local de potencial. En consecuencia, debido a que las deformaciones que involucran a los otros extremos y puntos de inflexión no son relevantes, el potencial de monodromía es sólo perturbativamente diferente al de sine-Gordon.

En analogía al paso de un número de dimensiones a otro, se busca que la deformación del modelo de sine-Gordon al de monodromía de axiones sea controlable al variar un sólo parámetro. Hay muchas maneras en las que se puede introducir este parámetro, por lo que aquí se sigue el siguiente enfoque simplificado. En primer lugar, es necesario emparejar las escalas características de amplitud del campo y de tiempo para ambos potenciales. Se

<sup>4</sup>Las deformaciones dimensionales expuestas en las secciones anteriores también se pueden estudiar como modificaciones al potencial del campo después de usar el cambio de variable  $\phi = r^{-\varepsilon/2}\varphi$ , aunque la forma en la que  $\varepsilon$  controla la deformación del potencial es más compleja.

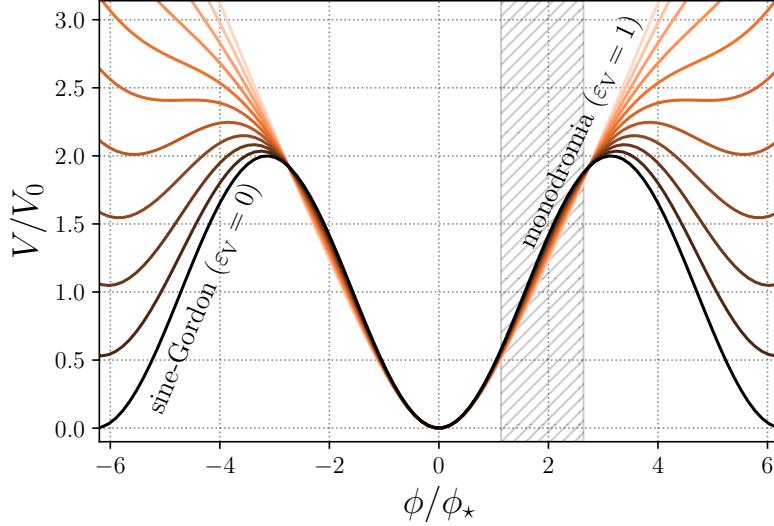


FIGURA XVIII: Deformación de los potenciales según (31) para  $\varepsilon_V \in [0, 1]$ . Las modificaciones del potencial surten efecto gradualmente y se representan con respecto a la escala de densidad de energía  $V_0 = \mu^2 \phi_*^2$ . Como referencia, los potenciales de monodromía ( $\varepsilon_V = 1$ ) y de sine-Gordon ( $\varepsilon_V = 0$ ) se plotean en líneas sólidas color salmón y negro, respectivamente. El rango de amplitudes escaneadas se grafica en la región achurada, la cual está por los breathers con frecuencia  $\omega_{\text{ini}} = 0.96\mu$  (amplitud mínima) y  $\omega_{\text{max}} = 0.79\mu$  (amplitud máxima). En el área achurada con líneas grises, los potenciales de monodromía y de sine-Gordon son sólo ligeramente distintos en su curvatura.

igualan las escalas de tiempo al fijar  $\mu_M = \mu_{SG}$  y  $\phi_* = \phi_M$ , por lo que las curvaturas de ambos potenciales son iguales. Para asegurar que las correcciones no-lineales a ambos potenciales aparecen para desviaciones similares del campo, también se fija  $\phi_M = \phi_*$ . El paso siguiente es definir la diferencia entre el potencial de monodromía y el de sine-Gordon

$$\begin{aligned} \Delta V &\equiv V_M - V_{SG} \\ &= \mu^2 \phi_*^2 \left[ \sqrt{1 + \frac{\phi^2}{\phi_*^2}} + \cos\left(\frac{\phi}{\phi_*}\right) - 2 \right]. \end{aligned} \quad (30)$$

Finalmente, se define el siguiente potencial ajustable

$$\begin{aligned} V_{\varepsilon_V} &\equiv V_{SG} + \varepsilon_V \Delta V \\ &= \mu^2 \phi_*^2 \left[ 1 - \cos\left(\frac{\phi}{\phi_*}\right) \right] + \varepsilon_V \Delta V, \end{aligned} \quad (31)$$

donde el parámetro de ajuste está en el rango  $\varepsilon_V \in [0, 1]$ . En el caso  $\varepsilon_V = 0$  se recupera el potencial de sine-Gordon, y para  $\varepsilon_V = 1$  se obtiene el potencial de monodromía de axiones. La Fig. XVIII grafica el proceso por el que se deforma el potencial. Es posible

observar que las deformaciones alrededor del mínimo local en el origen (aproximadamente en el intervalo  $-\pi \lesssim \phi/\phi_* \lesssim \pi$ ), los potenciales deformados (incluyendo al potencial de monodromía) son pequeñas deformaciones del potencial de sine-Gordon. A pesar de que sólo se considera el potencial de monodromía de axiones, este procedimiento puede ser aplicado a la deformación de otros potenciales sin pérdida de generalidad. Para los fines de este estudio, se restringe el análisis a deformaciones en el potencial para configuraciones de campo en una dimensión espacial. Las ecuaciones del movimiento correspondientes son

$$\frac{d\phi}{dt} = \Pi_\phi, \quad (32a)$$

$$\frac{d\Pi_\phi}{dt} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \mu^2 \phi_* \sin\left(\frac{\phi}{\phi_*}\right) - \varepsilon_V \Delta V'(\phi), \quad (32b)$$

donde se identifica  $\varepsilon_V$  como el parámetro de deformación que modifica la ecuación unidimensional de sine-Gordon. A pesar de que esto no se explora en este proyecto, las deformaciones del potencial controladas por  $\varepsilon_V$  pueden combinarse con las deformaciones dimensionales desarrolladas en las secciones anteriores.

A continuación se considera la evolución a partir de las condiciones iniciales de breather en el potencial deformado (31) cuando el parámetro  $\varepsilon_V$  se varía. Para asegurar que la solución solo sondea regiones donde el potencial deformado se parezca al de sine-Gordon, se toma  $\omega_{\text{ini}}/\mu \in [10^{-0.1}, 10^{-0.015}]$  como el rango de frecuencias iniciales. El límite inferior es tal que se puede asegurar que las soluciones están confinadas a oscilar en un único pozo de potencial centrado en  $\phi = 0$ , en el que los potenciales de sine-Gordon y de monodromía de axiones son muy parecidos. Mientras tanto, el límite superior evita la evolución de perfiles de oscilón muy anchos. Empíricamente, se encuentran soluciones tipo oscilón a partir de los breathers iniciales; sin embargo, la evolución hacia el oscilón atractor es algo más lenta que en el caso de deformaciones dimensionales que se estudió anteriormente. Buscando la convergencia al atractor, las simulaciones se dejan correr hasta  $\mu T_{\text{máx}} = 2 \times 10^4$ , lo que es el doble de lo necesario en los casos  $\varepsilon \ll 1$  considerados en las secciones pasadas. Del mismo modo que en las secciones anteriores, las propiedades de los oscilones resultantes son aproximadamente invariantes a diferentes elecciones de la fase inicial, lo cual es consistente con la independencia de la energía inicial con  $\theta_0$  para  $D = 1$ . Por lo tanto, se fija la fase inicial de los perfiles de breather como  $\theta_0 = 0$ . La Fig. XIX resume las propiedades

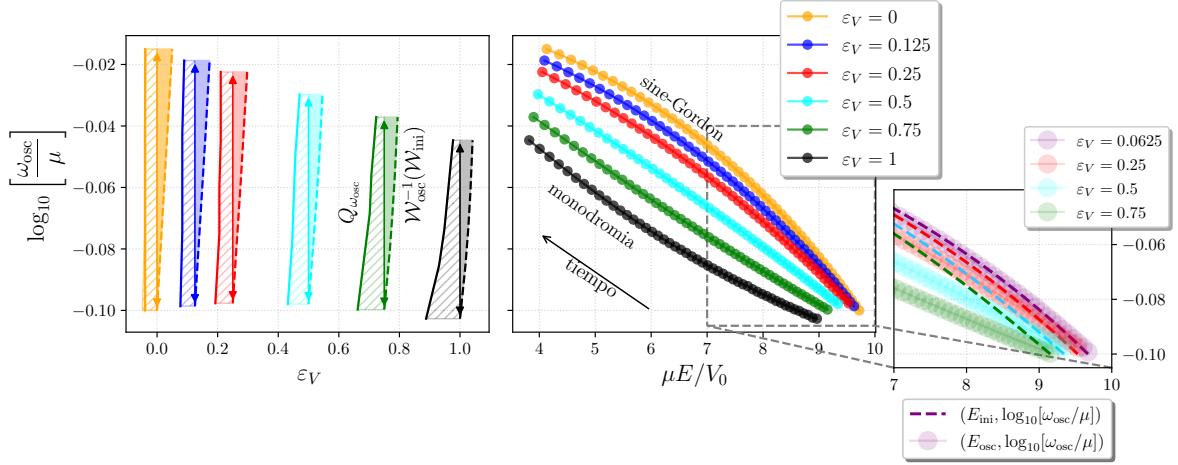


FIGURA XIX: Panel izquierdo: Distribución de frecuencias de oscilón  $\omega_{\text{osc}}$ , que parte de una distribución uniforme en  $\log_{10}(\omega_{\text{ini}}/\mu)$  en el rango  $-0.1 \leq \log_{10}(\omega_{\text{ini}}/\mu) \leq -0.015$ . Se toma una muestra de 50 condiciones iniciales uniformemente distribuidas en el intervalo indicado. El intervalo de frecuencias de oscilación se deforma como una función de  $\varepsilon_V$ . Las áreas sombreadas con líneas corresponden al Jacobiano  $Q_{\omega_{\text{osc}}} = N^{-1} |\text{d}\mathcal{W}_{\text{osc}}/\text{d}\mathcal{W}_{\text{ini}}|^{-1}$ , mientras que las áreas sombreadas en colores semitransparentes determinan el mapa inverso  $\mathcal{W}_{\text{osc}}^{-1}(\mathcal{W}_{\text{ini}})$ . En la medida en que los intervalos de frecuencia de oscilación se contraen con los cambios en curvatura del potencial de sine-Gordon, una muestra uniformemente distribuida en  $\log_{10}(\omega_{\text{osc}}/\mu)$  se deforma al punto de tener un mayor número de estados accesibles en las frecuencias más bajas del espectro. Panel derecho: Deformación continua de las curvas de energía versus frecuencia de oscilación para varios estados intermedios de deformación del potencial. El gráfico insertado a la derecha muestra que las líneas de flujo concurren en el límite de  $\varepsilon_V \rightarrow 0$ . Lo cual es consistente con los resultados de las deformaciones dimensionales perturbativas mostrados en la Fig. IX.

de los oscilones que aparecen tras escanear el rango de frecuencias iniciales, a medida que se varía el parámetro de deformación de potencial  $\varepsilon_V$ . Como en las secciones previas, el análisis se dirige a las frecuencias de oscilón  $\omega_{\text{osc}}$  y a la energía del oscilón resultante. Los detalles del procedimiento de extracción de ambas cantidades se explican al detalle en la sección II.

Para  $\varepsilon_V = 0$  se recupera la dinámica del modelo de sine-Gordon, en el que los breathers son soluciones exactas a las ecuaciones del movimiento. En este caso, se observa que la distribución uniforme de frecuencias permanece inalterada, lo que verifica la validez de nuestros resultados. Ante el incremento de  $\varepsilon_V$ , es posible notar de que la densidad de probabilidades se ensancha para bajas frecuencias de oscilación. A partir de los resultados obtenidos en las secciones anteriores, es válido inferir que distribuciones como las de la Fig. XIX se originan de un mapa de frecuencias de oscilación cuyo conjunto de partida sean las frecuencias de oscilación de los breathers (i.e.,  $\log_{10} \omega_{\text{ini}}$ ) y el conjunto de

llegada sean las frecuencias de los oscilones. Por lo que las deformaciones en las distribuciones se traducen en cambios en los mapas que conectan a los breathers son los oscilones. Para reducir la notación, se emplearán las variables auxiliares  $\mathcal{W}_{\text{osc}} \equiv \log_{10}(\omega_{\text{osc}}/\mu)$  y  $\mathcal{W}_{\text{ini}} \equiv \log_{10}(\omega_{\text{ini}}/\mu)$  para las frecuencias. Además, la conservación de las probabilidades implica que la distribución de frecuencias de breather  $P_{\omega_{\text{ini}}}$  y la distribución de frecuencias de oscilón  $Q_{\omega_{\text{osc}}}$  se relacionan a través de

$$P_{\omega_{\text{ini}}} d\mathcal{W}_{\text{ini}} = Q_{\omega_{\text{osc}}} d\mathcal{W}_{\text{osc}}. \quad (33)$$

Donde al asumir que  $P_{\omega_{\text{ini}}}$  es una distribución uniforme discreta  $\mathcal{W}_{\text{ini}}$  se obtiene que  $Q_{\omega_{\text{osc}}}$  corresponde al Jacobiano

$$Q_{\omega_{\text{osc}}} = \frac{1}{N} \left| \frac{d\mathcal{W}_{\text{osc}}}{d\mathcal{W}_{\text{ini}}} \right|^{-1}, \quad (34)$$

aquí  $N = 50$  es la cantidad de soluciones muestreadas en el intervalo  $\log_{10}(\omega_{\text{ini}}/\mu) \in [-0.1; -0.015]$ . La integral de  $Q_{\omega_{\text{osc}}}$  a lo largo de  $\mathcal{W}_{\text{osc}}$  (i.e., su distribución cumulativa) representa al mapa  $\mathcal{W}_{\text{ini}}(\mathcal{W}_{\text{osc}})$ , el cual es esencialmente el mapa inverso de  $\omega_{\text{osc}}(\omega_{\text{ini}})$ . El panel izquierdo de fig. XIX muestra tanto la evolución del Jacobiano, como la del mapa  $\mathcal{W}_{\text{osc}}^{-1}(\mathcal{W}_{\text{ini}})$  cuando el potencial se deforma. La acumulación de estados de baja frecuencia en el Jacobiano sugiere que la formación de oscilones de mínima frecuencia es una característica dinámica general e independiente de la elección de condiciones iniciales. A pesar que el mismo Jacobiano tiende a volverse mas delgado en el límite superior del intervalo de frecuencias, esta evidencia puede no ser suficiente para mostrar la existencia de un oscilón de máxima frecuencia.

El panel derecho de la fig. XIX muestra la relación entre la energía y la frecuencia de oscilación de los oscilones, la cual es análoga a lo que se muestra en la fig. IX y en la fig. XI. Tal como en el caso de las deformaciones dimensionales, que se presenta en la fig. IX, se observa un continuo de energías y frecuencias de oscilón. Por otro lado, es claro que (al menos en este rango de frecuencias iniciales) los breathers del modelo de sine-Gordon unidimensional se pueden mapear a oscilones del modelo de monodromía de axiones  $\omega_{\text{ini}}$ . Al igual que en el escenario de deformaciones dimensionales, el límite  $\varepsilon_V \ll 1$  es en el que los breathers son una buena aproximación de los oscilones. Las frecuencias máximas

de oscilón que aquí se observan corresponden al límite superior fijado por las limitaciones numéricas y no hay un mecanismo físico subyacente que las fije. Por lo que no es prudente usarlas como referencia. Si se exploraran valores más pequeños de  $\omega_{\text{ini}}/\mu$ , es razonable esperar que se forme una meseta de oscilaciones de máxima energía que se asemeja a lo observado en el caso de deformaciones dimensionales. Al comparar las frecuencias en el extremo izquierdo de las curvas (todas con  $\omega_{\text{ini}}^{(\text{max})} = 10^{-0.015}\mu$ ), se observa que  $\omega_{\text{osc}}(\omega_{\text{ini}}^{(\text{max})})$  se reduce con  $\varepsilon_V$ . Esto está en concordancia con el comportamiento visible en el panel izquierdo. No se observa evidencia de un espacio en el rango de frecuencias o una solución de mínima energía: para encontrarla, sería necesaria una investigación que extienda los métodos numéricos aplicados en este trabajo para el estudio de oscilaciones muy anchas. Similarmente, la producción de un diagrama de fase de oscilaciones (parecido a lo obtenido en la sección IV) para deformaciones potenciales para un próximo proyecto. Buscando la consistencia con los resultados para deformaciones dimensionales en la Fig. IX, el gráfico insertado en la esquina inferior derecha de la fig. XIX incluye a las líneas de energía inicial para mostrar la convergencia de los flujos de parámetros cuando  $\varepsilon_V \rightarrow 0$ . Ello confirma que los oscilaciones en una dimensión espacial también pueden ser bien representados por breathers en el límite  $\varepsilon_V \ll 1$ . Actualmente, no es posible explicar porqué los estados con las frecuencias más bajas coinciden para todos los valores de  $\varepsilon_V$ . Esto se investigará en un proyecto futuro.

## VII. Implementación numérica, tests de convergencia y código

En este apéndice se dan detalles de la implementación numérica, incluyendo las convenciones de unidades usadas en el código numérico, el esquema de discretización, y varios tests de convergencia numérica.

### A. Unidades adimensionales

Antes de dar detalles de los métodos numéricos usados, se hace una revisión de las unidades usadas en el código. Se denotan a las cantidades adimensionales con barras superiores  $\bar{\cdot}$  buscando consistencia en la notación. Se sigue la convención  $\hbar = c = 1$  a lo largo de este manuscrito, de manera que las dimensiones espaciales y temporales tienen unidades de masa inversa.

Sin pérdida de generalidad, se puede suponer un potencial de la forma

$$V(\phi) = \mu^2 \phi_*^2 \bar{V} \left( \frac{\phi}{\phi_*} \right), \quad (35)$$

donde  $\mu^2$  se fija por la condición

$$V''(\phi_{\min}) = \mu^2, \quad (36)$$

donde  $\phi_{\min}$  es el valor del campo en el mínimo de potencial alrededor del que se quiere expandir. Dado un potencial de esta forma, se mide el campo en unidades de la escala característica de campo  $\phi_*$ , las coordenadas temporales y espaciales en unidades del inverso de la masa del campo  $\mu^{-1}$ . Para conseguir esto, se introduce la variable adimensional de campo

$$\bar{\phi} \equiv \frac{\phi}{\phi_*}, \quad (37)$$

y las coordenadas adimensionales de tiempo y espacio

$$\bar{t} \equiv \mu t, \quad \bar{x} \equiv \mu x. \quad (38)$$

Por consistencia, el momento adimensional del campo está dado por

$$\bar{\Pi} \equiv \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{t}} = \frac{\Pi}{\mu \phi_*} \quad (39)$$

Por lo tanto, las ecuaciones del movimiento adimensionales para los perfiles radiales en  $D = \varepsilon + 1$  dimensiones en función de derivadas temporales de primer orden vienen dadas por

$$\frac{d\bar{\phi}}{dt} = \bar{\Pi} \quad (40a)$$

$$\frac{d\bar{\Pi}}{dt} = \left[ \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\varepsilon_t}{r} \right] \frac{\partial\bar{\phi}}{\partial r} - \frac{d\bar{V}(\bar{\phi})}{d\bar{\phi}}. \quad (40b)$$

En el caso del potencial de sine-Gordon, que es el potencial primario usado en esta tesis, este se escribe como

$$\bar{V}(\bar{\phi}) = 1 - \cos \bar{\phi}. \quad (41)$$

En el estudio de transiciones dimensionales dependientes del tiempo desarrolladas en la sección V, la versión adimensional de las Ecs. (26a) y (26b) son

$$\frac{d\bar{\phi}}{dt} = \bar{\Pi} \quad (42a)$$

$$\frac{d\bar{\Pi}}{dt} = \left[ \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\varepsilon_t}{r} \right] \frac{\partial\bar{\phi}}{\partial r} + \dot{\varepsilon}_t \bar{\Pi} \ln \bar{r} - \sin \bar{\phi}. \quad (42b)$$

donde se considera  $\ell_T = \mu$ . Para las deformaciones que involucran al potencial de monodromía de axiones, como en sección VI, se tiene

$$\bar{V}(\bar{\phi}) = \sqrt{1 + \bar{\phi}^2}. \quad (43)$$

Para simplificar la notación, se utilizan las unidades adimensionales mostradas líneas arriba en el desarrollo de este apéndice, pero se omiten las barras superiores para una notación mas compacta.

## B. Discretización espacial y temporal

En cuanto a la discretización espacial, se usa el enfoque pseudoespectral que se resume aquí. Dada una función  $f(r)$  definida en el intervalo semi-infinito  $[0, \infty)$ , la función se expande en una base (truncada) de polinomios de Chebyshev racionales en el intervalo

doblemente infinito

$$f(r) = \sum_{n=0}^{N-1} c_n \cos(n\theta(r)) \quad (44)$$

donde

$$\theta(r) = 2 \cos^{-1} \left( \frac{r}{\sqrt{r^2 + \ell^2}} \right), \quad (45a)$$

$$r(\theta) = \ell \cot \left( \frac{\theta}{2} \right), \quad (45b)$$

con  $r \in (0, \infty)$  y  $\theta \in (0, \pi)$ . Aquí  $\ell$  es un parámetro ajustable que se debe ajustar al “tamaño” típico del objeto que se desea simular en el dominio radial. Tal como se muestra en la Ec. (44), esta expansión es equivalente a una expansión par tipo coseno en la coordenada  $\theta$ . Alternativamente, en el sistema de coordenadas

$$x = \cos \left( \frac{\theta(r)}{2} \right) = \frac{r}{\sqrt{r^2 + \ell^2}}, \quad (46)$$

esta es una expansión en polinomios de Chebyshev pares con  $x \in (0; 1)$ . Para más detalles, ver el libro de Boyd [56]. A pesar de que esto no se explora aquí, el mapa tangente puede ser cambiado libremente por otros mapas coordinados adaptados a un problema en específico.

La expansión (44) define el campo en todos los valores del dominio radial  $r \in (0, \infty)$ . Sin embargo, si la función  $f$  se ha resuelto adecuadamente (lo que significa que  $N$  es lo suficientemente grande), se puede almacenar la información de la función en los coeficientes espectrales  $c_n$  en  $N$  puntos del espacio. Para los propósitos de esta exploración, es conveniente escoger los puntos de colocación de Gauss-Chebyshev

$$r_i = \ell \cot \left( \frac{\theta_i}{2} \right) \quad (47a)$$

$$\theta_i = \left( N - i + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{N} \quad i = 1, \dots, N. \quad (47b)$$

Aquí se presenta uno de los factores claves para entender esta implementación: la paridad de las soluciones respecto al origen de coordenadas no requiere que se impongan condiciones de frontera de Neumann. Además, la elección de los puntos de colocación de Chebyshev no contiene a  $r = 0$ , ni a  $r = \infty$ , por lo que no es necesario evaluar términos

singulares en las ecuaciones del movimiento. Por eso, la función  $f$ , que se puede expandir en la base de polinomios pares de Chebyshev, se puede expresar como

$$f(r_i) = \sum_{n=0}^{N-1} c_n \cos [n\theta(r_i)] , \quad (48)$$

donde  $\theta(r_i)$  se calcula a partir de (46)

$$\theta(r_i) = 2 \cos^{-1} \left( \frac{r_i}{\sqrt{r_i^2 + \ell^2}} \right) . \quad (49)$$

Como en toda expansión espectral, la evaluación de la función en puntos que estén fuera del conjunto de puntos de colocación sólo necesita de los coeficientes de expansión. Por ejemplo, se puede calcular el valor de la función en el origen como

$$f(r)|_{r=0} = - \sum_{n=0}^{N-1} c_n . \quad (50)$$

Del mismo modo, la expansión permite calcular la derivada de la función objetivo  $f$

$$\frac{df(r_i)}{dr} = \sum_{n=0}^{N-1} \left[ -nc_n \frac{d\theta(r_i)}{dr} \right] \sin [n\theta(r_i)] . \quad (51)$$

De donde se identifica inmediatamente que el término entre corchetes es la transformada seno de la derivada radial. Sabiendo que  $d\theta(r_i)/dr = -2\ell(r_i^2 + \ell^2)^{-1}$ , la derivada radial es también equivalente a la siguiente transformada inversa seno

$$\frac{df(r_i)}{dr} = \frac{2\ell}{\ell^2 + r_i^2} \mathcal{F}_{\sin}^{-1}(nc_n) \quad (52)$$

en este trabajo se usa `fftw3` [57] para calcular las transformadas coseno (FFTW\_REDFT10 –DCT del tipo II) e inversa seno (FFTW\_RODFT01 – DST del tipo III), por lo que los elementos en el arreglo  $nc_n$  necesitan un reacomodo antes de aplicar la transformada inversa seno.

Para la evolución temporal, se emplea un integrador simpléctico de Gauss-Legendre de octavo orden [35], el cual es el mismo que se usó en [58, 18]. El tamaño de paso para la

evolución se calcula a través de la condición de Courant-Friedrichs-Lowy (CFL):

$$\Delta t_{\text{CFL}} \approx \Delta x_{\min}, \quad (53)$$

donde  $\Delta x_{\min}$  es el más pequeño espacio entre los puntos de colocación. Esta condición funciona para ecuaciones de onda semi-lineales (aquellas que son lineales en sus derivadas y no tienen que serlo en sus potenciales), siempre y cuando las (auto-)interacciones no contengan términos que introduzcan inestabilidades.

### C. Condiciones de frontera perfectamente absorbentes (PMLs)

Los oscilones disipan energía lentamente durante su evolución, a través de la emisión de radiación clásica hacia el exterior, tal como se muestra en la fig. VII y en la fig. XIII, por ejemplo. Para mantener la precisión numérica, se debe lidiar con la radiación de una de dos posibles maneras: o (a) removiéndola del volúmen de simulación, o (b) incrementando la resolución espacial para valores grandes del radio. Como los oscilones son soluciones que tienen largos tiempo de vida, es necesario integrar por largos periodos de tiempo. Por lo tanto, la segunda opción requiere de una cantidad muy grande de puntos de colocación, lo que requiere enormes cantidades de memoria y reduce las posibilidades de calcular los parámetros diagnósticos de manera escalable. En vez de esa opción, se considera la primera opción, lo que implica forzar a que la radiación se suprima exponencialmente a largas distancias a través del uso de condiciones de frontera absorbentes (PMLs, por sus siglas en inglés). En esta subsección, se presenta la implementación numérica de las PMLs siguiendo el procedimiento desarrollado en Frolov et al [58], el cual extiende la propuesta presentada por Johnson en [59]. El primer paso es reconocer las ecuaciones del movimiento

$$\frac{d\phi}{dt} = \Pi \quad (54a)$$

$$\frac{d\Pi}{dt} = \left[ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\varepsilon}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right] \phi - \frac{dV}{d\phi}(\phi), \quad (54b)$$

para luego introducir dos campos auxiliares que se denotan como  $v \equiv r^{-1} \partial\phi/\partial r$ , además de

$$\frac{dw}{dt} \equiv (\varepsilon + 1)v - \frac{dV}{d\phi}(\phi), \quad (55)$$

el cuál absorbe las derivadas del potencial y las deformaciones dimensionales. La definición de  $v$  preserva la paridad de los campos que evolucionan en la malla de puntos sin introducir comportamiento singular. Tras la redefinición de campos, las ecuaciones quedan escritas en la famosa forma conservativa de flujo:

$$\frac{d\phi}{dt} = \Pi - w \quad (56a)$$

$$\frac{d\Pi}{dt} = r \frac{\partial v}{\partial r} \quad (56b)$$

$$\frac{dw}{dt} = (\varepsilon + 1)v - \frac{dV}{d\phi}(\phi) \quad (56c)$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(\Pi - w), \quad (56d)$$

donde la última ecuación impone la commutación de las derivadas temporales y radiales. La implementación de las condiciones de frontera absorbente se basan en la continuación analítica del dominio espacio-temporal. Para entender eso, supongamos que para una onda plana unidimensional de la forma  $\psi(x) = \exp[i(k_x x - \omega t)]$ , el vector de onda se transforma de la siguiente manera

$$k_x \rightarrow k_x + i \frac{k_x}{\omega} \gamma(x), \quad (57)$$

donde la función  $\gamma(x)$  está definida en un dominio compacto que toma valores distintos de cero en los bordes del dominio de simulación. Tras esta transformación, la onda plana es de la forma

$$\psi'(x) = \exp[i(k_x x - \omega t)] \exp\left(-\frac{k_x}{\omega} \int \gamma(x') dx'\right), \quad (58)$$

cualquier velocidad de fase  $c_x = \omega/k_x$  es constante, la atenuación es exponencial e independiente de las frecuencias de la radiación incidente. En el caso de  $c_x$  constante, el factor de  $1/\omega$  es necesario para el filtrado de todas las frecuencias en la radiación saliente. Aunque no sea imprescindible para el filtrado de altas frecuencias. Por lo que la transformación

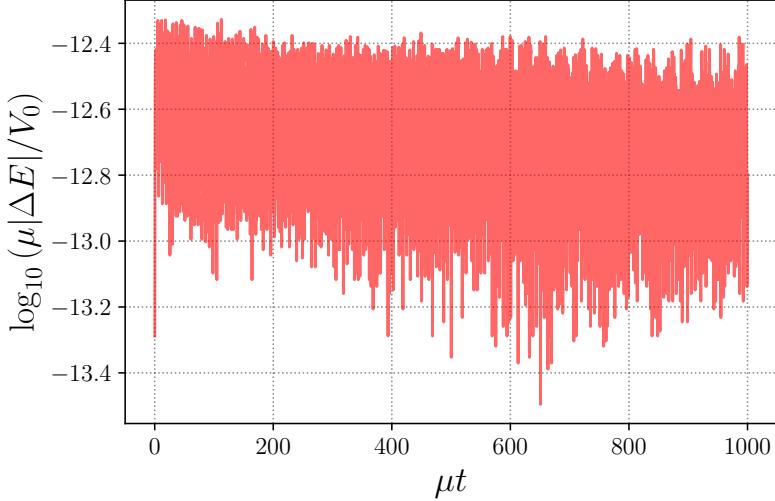


FIGURA XX: Conservación de la energía para un breather de sine-Gordon con  $\omega_{\text{ini}} = 0.794\mu$  y  $\theta_0 = 0$ , que evoluciona a partir de las ecuaciones del movimiento en (60a–60d) para el caso  $\varepsilon = 0$ . Esto muestra que las condiciones de frontera absorbentes no afectan a la solución que está al interior del volúmen de simulación.

del vector de onda también actúa sobre el operador derivada en el dominio radial como

$$\frac{\partial}{\partial r} \rightarrow \left(1 + \frac{\gamma(r)}{\partial_t}\right)^{-1} \frac{\partial}{\partial r} \quad (59)$$

donde se debe enfatizar que  $\gamma(r)$  se comporta como una pendiente suave en los últimos nodos de la malla de colocación<sup>5</sup>, lo que hace que estos actúen como una barrera absorbente. El factor  $i/\omega$  se reemplaza por el operador  $\partial_t^{-1}$ , cuya acción es cancelar las derivadas temporales que aparezcan en las ecuaciones del movimiento. Vale la pena resaltar que, aunque la elección más apropiada de  $\gamma(r)$  depende del problema, esta elección no debe afectar los resultados de las simulaciones, siempre que su ancho sea suficiente para resolver la radiación a absorber.

Una vez que la redefinición de la derivada se aplica a las Ecs. (56b) y (56d), se encuentra

---

<sup>5</sup>En este caso se usaron una función Gaussiana en los últimos nodos de la malla (tal como se muestra en Sección F; aunque también se pueden usar funciones ventana tipo coseno, como la que se muestra en la Ec. (27) en la sección V. Es recomendable implementar  $\gamma$  en coordenadas de colocación para las resoluciones mas altas, y registrando las coordenadas físicas para usarlas en simulaciones de más baja resolución.

el conjunto de ecuaciones a simular

$$\frac{d\phi}{dt} = \Pi - w \quad (60a)$$

$$\frac{d\Pi}{dt} = r \frac{\partial v}{\partial r} - \gamma \Pi \quad (60b)$$

$$\frac{dw}{dt} = (\varepsilon + 1)v - \frac{dV}{d\phi}(\phi) \quad (60c)$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(\Pi - w) - \gamma v, \quad (60d)$$

donde el “costo” numérico extra es la introducción de dos variables auxiliares y sus correspondientes ecuaciones de evolución. Las ecuaciones del movimiento permanecen inalteradas cuando  $\gamma(r) = 0$ , y la atenuación es efectiva solo en las regiones en las que  $\gamma \neq 0$ . La escritura de las ecuaciones del movimiento en forma conservativa de flujo para el sistema unidimensional de ecuaciones usado en la Sec. V no es sustancialmente diferente al procedimiento descrito anteriormente. En este caso, se necesita una ecuación más que corresponde a una variable auxiliar  $\psi$ , cuya definición parte de la ecuación

$$\frac{d\psi}{dt} = \dot{\varepsilon}_t \Pi, \quad (61)$$

la cual absorbe el término de colisión inelástica en (26b). Después de redefinir la derivada de acuerdo a  $\Pi + \psi \ln r - w \rightarrow \Pi$ , las ecuaciones del del movimiento se escriben en su forma final como

$$\frac{d\phi}{dt} = \Pi + w - \psi \ln r, \quad (62a)$$

$$\frac{d\Pi}{dt} = r \frac{\partial v}{\partial r} - \gamma \Pi, \quad (62b)$$

$$\frac{dv}{dt} = \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right] (\Pi + w - \psi \ln r) - \gamma v, \quad (62c)$$

$$\frac{dw}{dt} = (\varepsilon_t + 1)v - \frac{dV}{d\phi}(\phi), \quad (62d)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \dot{\varepsilon}_t (\Pi + w - \psi \ln r), \quad (62e)$$

la cual es la extensión de las Ecns. (60a–60d) para el caso de transiciones dimensionales dependientes del tiempo. Las implementación de estas ecuaciones ya incluye condiciones de frontera absorbentes, las que lidian con la radiación clásica generada durante las transiciones dimensionales.

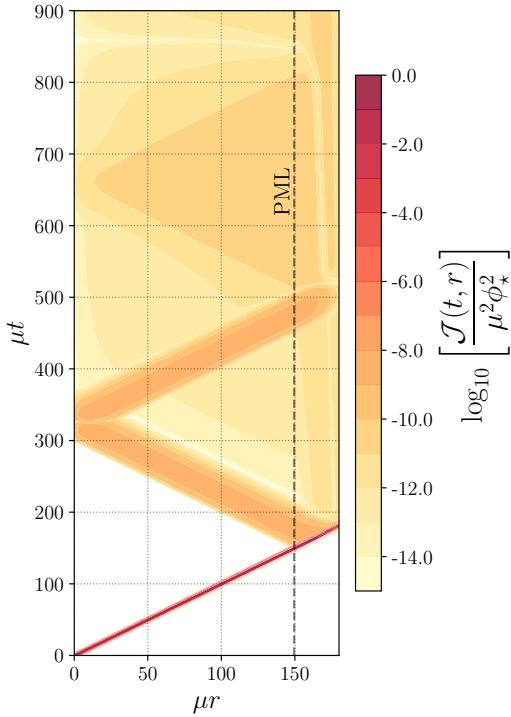


FIGURA XXI: Impacto de un paquete de onda Gaussiano en una condición de frontera absorbente. El flujo escalar se reduce en 9 o 10 órdenes de magnitud luego de impactar la barrera absorbente por la primera vez, lo que muestra que la implementación funciona correctamente. Con el propósito de mostrar la acción de la PML, la gráfica incluye solo algunos de los puntos de colocación en los que se encuentra la barrera absorbente. El ancho de la barrera no se considera como parte de la caja de simulación.

Para probar la consistencia del sistema, se evalúa la conservación de la energía en la longitud de simulación en el caso  $\varepsilon = 0$  (i.e., durante la oscilación de breathers). En la Fig. XX, se grafican las residuales  $|\Delta E| \equiv |E(t) - E(t_0)|$ , y se puede observar que la conservación de la energía en la solución se cumple al nivel de errores de redondeo de los números de precisión doble. Además, su puede notar que los errores no crecen en el tiempo. Adicionalmente, es necesario revisar que las PMLs actúas como filtros de la simulación que escapa de la longitud de simulación. Para hacer eso, se permite la propagación de un paquete Gaussiano libre que obedece la ecuación de onda (sin potencial) y se calcula su flujo escalar

$$\mathcal{J}(t, r) \equiv \mu^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \frac{\partial \phi}{\partial t}, \quad (63)$$

en el dominio de simulación. En la Fig. XXI, se observa la absorción de un pico Gaussiano “disparado” directamente hacia la barrera absorbente (etiquetada en la figura como PML). El flujo escalar reflejado es diez órdenes de magnitud menor que el flujo incidente, y se reduce

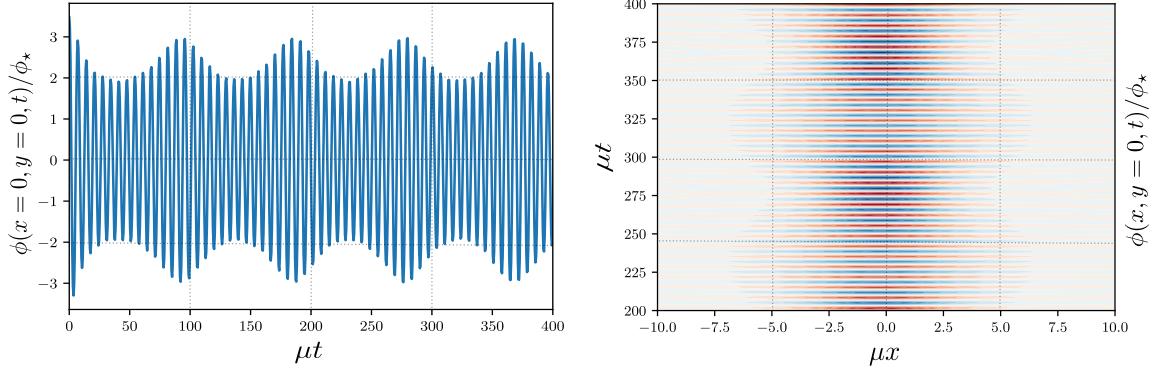


FIGURA XXII: Evolución de una condición inicial tipo breather en el modelo de sine-Gordon bidimensional (sin simetría esférica) para  $\omega_{\text{ini}} = 0.63\mu$ . Panel izquierdo: Proyección de la solución en el plano  $y = 0$ , que muestra las fases periódicas de contracción y expansión del núcleo del oscilón. Panel derecho: Evolución de la solución en el origen, la cual es consistente con las modulaciones en la amplitud descritas durante las discusiones del régimen perturbativo en la subsección A.

aún mas en reflexiones sucesivas. Una revisión cercana a la región en color rojo muestra el decaimiento progresivo al pasar por la barrera absorbente. Afortunadamente, los casos de estudio no involucran (a) medios inhomogéneos, ni (b) absorción dependiente de los ángulos de incidencia donde las PMLs son susceptibles a fallos. En el caso de reflexiones artificiales generadas por causas numéricas, lo mejor es aumentar la resolución de los puntos en los que se ubican las barreras absorbentes (tal como lo sugiere [59]). Esto ayuda a resolver la estructura de las colas y los picos de frecuencia.

#### D. Contracción y expansión periódica para oscilones de sine-Gordon en dos dimensiones

La presencia de modualción en la amplitud de oscilones no es un artefacto de sólo considerar las ecuaciones del movimiento radiales. Para mostrar eso, se evalúan las ecuaciones del movimiento en dos dimensiones, dadas por

$$\frac{d\phi}{dt} = \Pi, \quad (64a)$$

$$\frac{d\Pi}{dt} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \mu^2 \phi_* \sin\left(\frac{\phi}{\phi_*}\right), \quad (64b)$$

Para la evaluación de estos resultados, se usó un código independiente preparado por Jonathan Braden (co-autor de [26]). El código trabaja con condiciones de frontera periódicas,

que están suficientemente alejadas del área de simulación para evitar interacciones con la radiación emitida. En el panel derecho de la Fig. XXII, se muestra la evolución de la solución con las condiciones iniciales tipo breather de la Ec. (21) proyectadas en el plano  $y = 0$ , escogiendo  $\theta_0 = 0$  y  $\omega_{\text{ini}} = 0.63\mu$  para fijar la forma del breather inicial. El núcleo del oscilón se contrae y expande periódicamente, además de su oscilación habitual, sus fases de expansión y contracción son distinguibles a distancias comparables con el tamaño del objeto. Por otro lado, se observa que la modulación periódica del tamaño del oscilón no parece ser compatible con la equipartición de la energía, ya que durante esta fase la radiación puede ser capturada y re-inyectada en la solución, antes de escapar definitivamente del núcleo del oscilón. En el panel izquierdo de la misma figura, se muestra la modulación de la amplitud para los mismos parámetros del breather inicial. La evolución de la amplitud modulada es consistente con lo mostrado en la subsección A. La existencia de fases intermitentes de expansión y contracción del núcleo del oscilón (representadas por mosulaciones en la amplitud) han sido probadas (al menos) en dos implementaciones numéricas independientes. Es por eso que es muy poco probable que estas modulaciones sean consecuencias de algún efecto numérico involuntario, o alguna inestabilidad numérica debida a largos tiempos de evolución. Además de este test de consistencia, es también posible usar las soluciones bidimensionales de las Ecns. (64a) y (64b) tras fijar la fase inicial  $\theta_0$  para muestrear sobre diferentes frecuencias iniciales ( $\omega_{\text{ini}}$ ). Se pudo notar que la frecuencia de modulación de la envolvente de amplitud (que se asemeja a la curva roja en el panel derecho de la Fig. IV) crece a medida que la frecuencia inicial del breather se reduce. Este resultado es consistente con los resultados desarrollados en el régimen perturbativo para  $\varepsilon = 0.75$ . En principio, la frecuencia de modulación se puede considerar como un parámetro diagnóstico adicional, el cual no sólo es medible sino que se puede conectar con la parte imaginaria de la frecuencia (siempre y cuando esa conexión exista), la cual es la tasa de decaimiento del oscilón. Se estudiarán estas posibles conexiones en un futuro proyecto.

## E. Tests de convergencia

Es también necesario realizar pruebas de convergencia para la solución de amplitud modulada mostrada en el panel de en medio y en el derecho de la Fig. VII para  $\varepsilon = 0.75$ . Las deformaciones dimensionales estiran la longitud del breather para formar oscilones

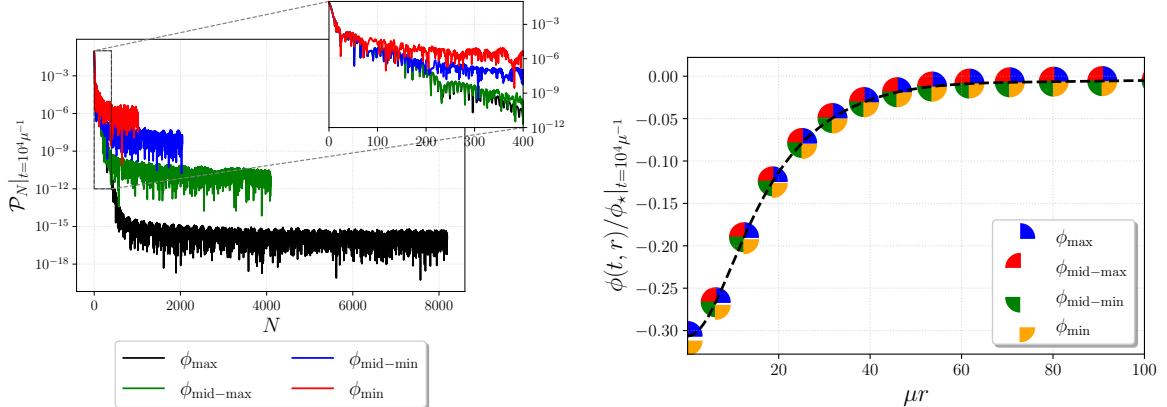


FIGURA XXIII: Panel izquierdo: Coeficientes espectrales en función del número de puntos de colocación, los que corresponden a la solución en la Fig. VII (paneles al medio y a la derecha) para  $\varepsilon = 0.75$ . La condición inicial es un breather parametrizado por  $\omega_{\text{ini}} = 0.437\mu$  y  $\theta_0 = 0.6\pi$ , se plotea la solución en  $t = 10^4\mu^{-1}$  para las resoluciones reportadas en el cuadro III. Los resultados en todas las resoluciones coinciden en los primeros cientos de puntos, los que son suficientes para resolver el núcleo del oscilón. Panel derecho: Campo oscilante en función del radio para  $t = 10^4\mu^{-1}$  para todas las resoluciones. Es en el origen de coordenadas donde la la diferencia entre resoluciones es apenas visible; sin embargo, es correcto afirmar que todas los soluciones coinciden aproximadamente.

mucho más anchos, por eso es que la implementación numérica necesita al menos de  $10^3$  puntos de colocación para encontrar las soluciones con un suficiente rango dinámico. Se construyen cuatro dominios radiales de Gauss-Chebyshev para una escala de longitud  $\ell = 10^2\mu^{-1}$ , y considerando las resoluciones reportadas en el cuadro III, donde la escala de tiempo  $\Delta t_{\text{CFL}}$  es consistente con la condición en la Eq. (53). La condición de estabilidad de Courant-Friedrichs-Lowy (CFL) es válida para ecuaciones semi-lineales con potenciales inferiormente acotados. El número de puntos de colocación aún se puede considerar como “alto” para simulaciones espectralmente precisas. No obstante, la resolución de radiación

TABLA III: Lista de resoluciones empleadas para resolver Ecns. (60a)–(60d) para  $\varepsilon = 0.75$ . Considerando  $\ell = 100\mu^{-1}$  y la condición de frontera absorbente centrada en el último punto de la malla de nodos de menor resolución, se realizan tests de convergencia para la configuración de campo que muestra fases periodicas de expansión y contracción del núcleo del oscilón, solución que se muestra en la Fig. VII. Los parámetros iniciales y las condiciones de frontera están implementadas de manera físicamente equivalente en todas las simulaciones, de otra manera, esta comparación no tendría sentido.

Resoluciones	# de puntos	tamaño de paso [ $\Delta t_{\text{CFL}}^{(\text{res})}$ ]
max	8192	1/16
mid-max	4096	1/8
mid-min	2048	1/4
min	1024	1/4

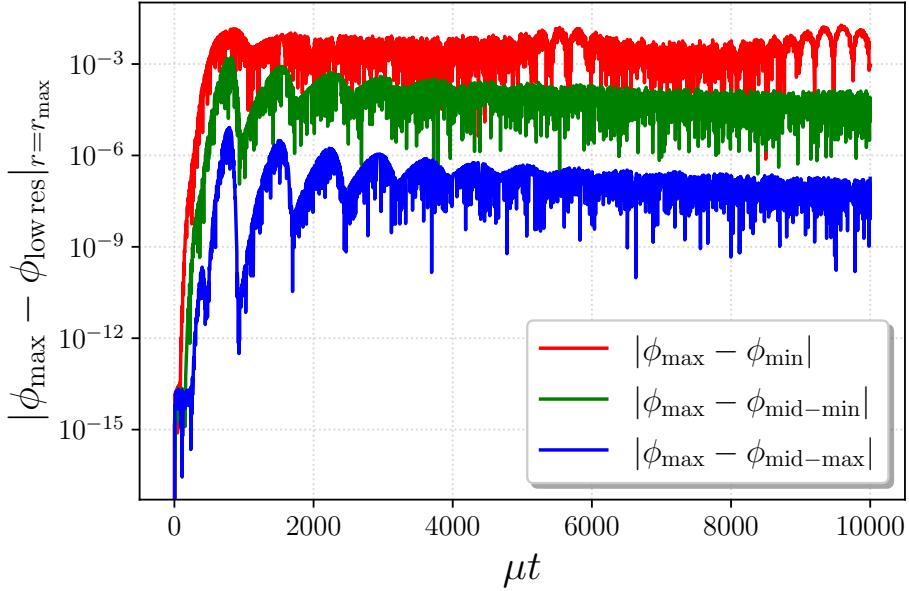


FIGURA XXIV: Restas entre simulaciones generadas a diferentes resoluciones, pero con condiciones físicas equivalentes, en el radio  $r = r_{\max}$ , donde  $r_{\max}$  es la posición radial en las diferencias entre las configuraciones de campo son las máximas. El error numérico se reduce a medida de que las simulaciones numéricas se resuelven con mayor resolución (con mas puntos de colocación).

a largas distancias aún necesita de suficiente resolución para ser correctamente atenuada por las PMLs. En el panel izquierdo de la Fig. [XXIII](#) se grafican los coeficientes espectrales (que se encuentran al calcular la transformada coseno de la solución) en términos del número de nodos para todas las resoluciones en  $t = 10^4 \mu^{-1}$ . Se necesita de una importante cantidad de puntos de colocación para mantener los coeficientes correspondientes a altas frecuencias en la misma magnitud que los errores de redondeo. La primera manifestación de los coeficientes espectrales de alta frecuencia es la fase transiente, donde la radiación forma estructuras que decaen como colas con potencias fraccionales. Los coeficientes espectrales coinciden para los primeros cientos de puntos de colocación, los que son suficientes para resolver el núcleo del oscilón, tal como se observa en el panel derecho. Hasta cierto punto, esto justifica la invariancia de los mapas de oscilación de frecuencia en la Fig. [VI](#) ante cambios en la resolución. Las soluciones que mantienen todos los coeficientes de alta frecuencia por debajo de los niveles de precisión de máquina es costoso computacionalmente (e innecesario), ya que se necesitan entre ocho y diez veces mas nodos para ser completamente resueltos. En el panel derecho, se plotea la configuración de campo en función de las coordenadas radiales. Las soluciones a diferentes resoluciones (todas interpoladas a los nodos de la resolución más baja) se ven casi idénticas: es solo en

el origen de coordenadas en donde se observan errores del orden de 1 %.

Una propiedad importante que se puede rescatar de los resultados del panel derecho de la Fig. [XXIII](#) es que se pueden evaluar los errores de convergencia considerando los valores del campo a diferentes resoluciones en el origen (o en el punto de colocación más cercano a este). Empleando la solución con la mas alta resolución como referencia, es posible restar las soluciones de las otras resoluciones y evaluar la magnitud de estas diferencias en función del tiempo. Con el objetivo de comparar los resultados de diferentes resoluciones espaciales, el tamaño de paso temporal  $\Delta t = \Delta t_{\text{CFL}}^{\text{mid-max}}/8$  se mantiene constante en todas las resoluciones para evitar inexactitudes debidas a la interpolación temporal. En la Fig. [XXIV](#), se plotea la entre configuraciones de campo obtenidas a diferentes resoluciones espaciales. Es claro que las diferencias se reducen con el incremento del número de modos usados para resolver oscilones, esta figura es una evidencia de la convergencia numérica. Además, vale la pena resaltar que en ninguno de los casos el error numérico crece en el tiempo. Es de esperarse que en las resoluciones más bajas el error numérico tenga picos durante las fases de expansión y contracción periódica del oscilón.

## F. Código en Fortran para la evolución de oscilones

```
! este código se corre en la consola de la siguiente manera
! ifort -r8 -O3 -I/opt/local/include -L/opt/local/lib -lfftw3
nombre_del_codigo.f90 -o nombre_del_ejecutable.out &&
./nombre_del_ejecutable.out

program oscilon
use, intrinsic :: iso_c_binding; implicit none

! paquete que calcula las transformadas seno y coseno
include "fftw3.f03"

! parametros de control de la rutina
integer, parameter :: nn = 2**11                      ! numero de nodos en los que
se resuelve (i.e. orden espectral)
real, parameter :: len = 200.0 ! parametro \ell
real, parameter :: eps = 1.0   ! eps = D-1
real, parameter :: alpha = 1.0 ! deformacion en la amplitud, capitulo 4.2

! esto es exactamente lo que ud. cree que es
real, parameter :: pi = 3.1415926535897932384626433832795028841971694Q0

real r(nn), red(nn), gamma(nn)
! se empaqueta a todas las variables dinamicas [phi,u,v,w] en un vector
real state(4*nn), F(nn), der_an(nn), der_num(nn)

! tamaño de paso temporal
real, parameter :: dt =
len*(cos(0.5*(nn-1.5)*pi/real(nn))/sin(0.5*(nn-1.5)*pi/real(nn))-&
cos(0.5*(nn-0.5)*pi/real(nn))/sin(0.5*(nn-0.5)*pi/real(nn)))/4.0

! cantidad de iteraciones (tiempo total/tamaño de paso)
integer, parameter :: tt = int(2000.0/dt)
! cada cuanto tiempo se escribe
real, parameter :: cut = real(int(real(tt)/5000.0))

!código
! se define la malla sobre la que se integra
call radial_grid(r, gamma);
! evolución
call evol_point(0.1, 0.0*pi)

! subrutinas
contains

! evolucionador
subroutine evol_point(omega, phase_init)
! frecuencia inicial del breather
real, intent(in) :: omega
```

```

! fase inicial del breather
real, intent(in) :: phase_init
! variable de estado
real state_evol(4*nn)
! contador del loop de evolución
integer count

! condición inicial
call init_SG_breather(state_evol, omega, phase_init, r)
! escribir condición inicial
call dump_sol(state_evol, 0.0)
! loop de evolución
do count = 1,tt
    ! rutina simplectica que lleva desde y(t) hasta y(t+dt)
    call gl8(state_evol, dt, count)
    ! escribe cada (cut) numero de pasos
    if (mod(real(count), cut) == 0.0) then
    ! escribe t
        write (*,*) count*dt
    ! y la solucion
        call dump_sol(state_evol, count*dt)
        end if
    end do
end subroutine evol_point

! derivadas espaciales
function Dr(phi, time_count)
real phi(nn), Dr(nn), dtheta_dr(nn)
real dct_phi(nn), dct_shft_phi(nn), mapping(nn)
type(C_PTR) :: plan_dct, plan_dst
integer i, time_count

! crea plan para DCT (solo en la primera iteracion)
if (time_count==1) call dfftw_plan_r2r_1d(plan_dct, nn, phi, dct_phi,&
FFTW_REDFT10, FFTW_MEASURE)

! calcula DCT
call dfftw_execute_r2r(plan_dct, phi, dct_phi)
! lleva a la variable radial
forall (i=1:nn) mapping(i) = -2.0*len/(len*len+r(i)*r(i))
! reacomoda el array (leer apendice)
forall (i=1:nn) dct_shft_phi(i) = -real(i-1)*dct_phi(i)
forall (i=1:nn-1) dct_shft_phi(i) = dct_shft_phi(i+1)
dct_shft_phi(nn) = 0.0

! crea plan para IDST (solo en la primera iteracion)
if (time_count==1) then
call dfftw_plan_r2r_1d(plan_dst, nn, dct_shft_phi, Dr, FFTW_RODFT01,
FFTW_MEASURE)
end if

```

```

! calcula IDST
call dfftw_execute_r2r(plan_dst, dct_shft_phi, Dr)

! construye la derivada (debidamente normalizada)
Dr = -Dr*mapping/(2.0*nn)
end function Dr

! malla de Gauss-Chebyshev
subroutine radial_grid(r, gamma)
! argumento del coseno (ver apendice I)
real red(nn)
real, dimension(nn), intent(out) :: r, gamma
! ancho de la barrera absorbente
integer, parameter :: pml = 2**7
integer j, i
forall (j=1:nn) red(j) = (nn-j+0.5)*pi/real(nn);
forall (j=1:nn) r(j) = len*cos(0.5*red(j))/sin(0.5*red(j))
! barrera absorbente gaussiana
forall (i=1:nn) gamma(i) = exp(-real(i-nn)**2/pml**2) - 1.25e-4
where (gamma < 0.0) gamma = 0.0; gamma = (4.0/dt) * gamma
end subroutine radial_grid

! breather inicial
subroutine init_SG_breather(state, omega, phase_init, r)
real, dimension(4*nn), intent(out) :: state
real, intent(in) :: omega, phase_init
real SG_breather(nn), SG_breather_t(nn), w(nn), SG_breather_r(nn), tan_aux(nn)
real, dimension(nn), intent(in) :: r
integer i
! variable auxiliar
tan_aux = sqrt(1.0-omega*omega)*cos(phase_init)&
/(omega*cosh(sqrt(1.0-omega*omega)*r))
! breather
SG_breather = 4.0*atan(tan_aux)
! derivada temporal
SG_breather_t = (-4.0*omega*tan(phase_init)*tan_aux)/(1.0+tan_aux*tan_aux)
! derivada radial
SG_breather_r = (-4.0*sqrt(1.0-omega*omega)*tanh(sqrt(1.0-omega*omega)*r)*&
tan_aux)/(1.0+tan_aux*tan_aux)
! derivada temporal de la "fuerza"
w = 0.0
! empaquetando la variable de estado
do i = 1, nn
! phi
state(i) = alpha*SG_breather(i)
! u
state(nn+i) = alpha*SG_breather_t(i)
! v
state(2*nn+i) = alpha*SG_breather_r(i)/r(i)
! w
state(3*nn+i) = w(i)

```

```

end do
end subroutine init_sg_breather

! evaluando las ecuaciones del movimiento
subroutine evalf(y, dydt, time_count)
    real, dimension(4*nn) :: y, dydt
    real t, phi(nn), dphi(nn), u(nn), dudt(nn), v(nn), dvdt(nn), w(nn),
    dwdt(nn)
    integer fill, time_count
! desempaquetando el vector de estado
do fill = 1, nn
    phi(fill) = y(fill)
    u(fill) = y(nn+fill)
    v(fill) = y(2*nn+fill)
    w(fill) = y(3*nn+fill)
end do

! calculando cada una de las derivadas temporales
dphi = u+w; dudt = r*(Dr(v, time_count)) - gamma*u;
dvdt = (Dr(u+w, time_count))/r- gamma*v;
dwdt = -sin(phi)+(eps+1.0)*v

! empaquetandolas en el vector derivada
do fill = 1, nn
    dydt(fill) = dphi(fill)
    dydt(nn+fill) = dudt(fill)
    dydt(2*nn+fill) = dvdt(fill)
    dydt(3*nn+fill) = dwdt(fill)
end do
end subroutine evalf

! escribe la solución en binario
subroutine dump_sol(state, time)
real state(4*nn), time, energy_density(nn), ens(4*nn)
integer ell
call adds(state, ens)
if (time == 0.0) open(unit = 22, file = 'amp_eps_1_omega_01.bin',
access='stream', status='unknown')
if (time> 0.0) open(unit = 22, file = 'amp_eps_1_omega_01.bin',
access='stream', status='old', position = 'append')

do ell = 1, nn
    write (22) time, r(ell), state(ell), ens(ell), ens(nn+ell)
end do
close (22)

end subroutine dump_sol

```

```

! Integrador implícito de Gauss-Legendre de octavo orden
subroutine g18(y, dt, time_count)
    integer, parameter :: s = 4, n = 4*nn
    real y(n), g(n,s), dt; integer i, k, time_count

    ! tabla de Butcher
    real, parameter :: a(s,s) = reshape( (/ &
        0.869637112843634643432659873054998518Q-1,
        -0.266041800849987933133851304769531093Q-1, &
        0.126274626894047245150568805746180936Q-1,
        -0.355514968579568315691098184956958860Q-2, &
        0.188118117499868071650685545087171160Q0,
        0.163036288715636535656734012694500148Q0, &
        -0.278804286024708952241511064189974107Q-1,
        0.673550059453815551539866908570375889Q-2, &
        0.167191921974188773171133305525295945Q0,
        0.353953006033743966537619131807997707Q0, &
        0.163036288715636535656734012694500148Q0,
        -0.141906949311411429641535704761714564Q-1, &
        0.177482572254522611843442956460569292Q0,
        0.313445114741868346798411144814382203Q0, &
        0.352676757516271864626853155865953406Q0,
        0.869637112843634643432659873054998518Q-1 / ), (/s,s/))
    real, parameter :: b(s) = (/ &
        0.173927422568726928686531974610999704Q0,
        0.326072577431273071313468025389000296Q0, &
        0.326072577431273071313468025389000296Q0,
        0.173927422568726928686531974610999704Q0 /)

    ! iteraciones de pasos de prueba
    g = 0.0; do k = 1,16
        g = matmul(g,a)
        do i = 1,s
            call evalf(y + g(:,i)*dt, g(:,i), time_count)
        end do
    end do

    ! actualiza la solución
    y = y + matmul(g,b)*dt
end subroutine g18

end

```

## VIII. Conclusiones

En esta tesis se ha encontrado una conexión explícita que relaciona a los breathers unidimensionales del modelo de sine-Gordon con oscilaciones esféricamente simétricos. Para conseguir esto, se trató al término dimensional  $\varepsilon r^{-1} \partial\phi/\partial r$  (con  $\varepsilon \equiv D - 1$ ) como una perturbación que deforma a la ecuación de sine-Gordon en una dimensión espacial. Adicionalmente, al considerar al perfil radial de breather como condición inicial, las soluciones estables corresponden a oscilaciones obtenidas por deformaciones dinámicas de los breathers. Los resultados y procedimientos de esta tesis han sido realizados por el autor de esta tesis, y ya están publicados en [26].

En la sección I se revisó la solución de breather del modelo de sine-Gordon, sus parámetros y propiedades, presentándola como condición inicial del sistema dinámico. Un punto central en esta sección es entender que la frecuencia de oscilación es el único parámetro que se necesita para caracterizar al perfil inicial. Por lo tanto, al encontrar la evolución de la frecuencia del oscilón después de la fase transiente se tiene acceso (al menos, parcial) al estado dinámico de la deformación. En la sección II, se resumió un procedimiento de extracción de la frecuencia de oscilación, así como de su amplitud y su energía. Cabe resaltar que con esta elección de parámetros, no se buscó brindar una descripción “completa” de la dinámica del oscilón en todos sus puntos, sino una conveniente reducción de la dimensionaldad del espacio de configuraciones que sea suficiente para conocer en qué estado está la deformación. Asimismo, se muestra la formación de un oscilón atractor en el espacio de parámetros, encontrando que una vez que las soluciones alcanzan el atractor, es seguro considerar que sus parámetros son aproximadamente constantes.

La desaceleración del flujo de parámetros permite que se construya un mapa estático que conecta breathers en una dimensión y oscilaciones esféricamente simétricos. En la sección III, se resolvieron las ecuaciones del movimiento del modelo de sine-Gordon dimensionalmente deformado para hacer un muestreo de diferentes perfiles de breathers. Dichos perfiles se parametrizan respecto a sus frecuencias de oscilación y sus fases. Los resultados de este escaneo se presentan en dos regímenes de deformaciones dimensionales: el perturbativo ( $\varepsilon \lesssim 1$ ) y el no perturbativo. Al escoger la energía del oscilón y su frecuencia como parámetros diagnósticos, se mostró el vínculo entre breathers y oscilaciones en la

subsección A a través de mapas no invertibles. En el escenario en el que  $\varepsilon \ll 1$ , se puede observar que la distribución de energías y frecuencias se puede modelar como un sistema de dos componentes: el primero es (aproximadamente) una función delta que determina un oscilón de máxima energía (a la que le corresponde una frecuencia mínima). La segunda componente es un continuo de estados que corresponde a puntos a lo largo de la linea de atracción. Los oscilones en el continuo están bien aproximados por breathers corregidos perturbativamente. Para determinar el límite de máxima frecuencia (o mínima energía) de manera precisa, se necesita resolver oscilones anchos. Esta es una labor complicada y numéricamente costosa, ya que existe una extensa jerarquía de longitudes de onda entre el ancho del oscilón y la longitud de onda de la radiación clásica emitida que debe ser resuelta.

La aparición de soluciones decaídas en las simulaciones comienza en el límite en el que  $\varepsilon$  se acerca a uno. Al igual que en el límite de deformaciones pequeñas, muchos de los estados se acumulan alrededor de una configuración de máxima energía. En las regiones que separan estados decaídos y oscilaciones, se encuentran soluciones con estructuras radiales no triviales para  $0.75 \lesssim \varepsilon \lesssim 1.0625$ ; la evolución de estas configuraciones es incompatible con la prescripción de quasibreather en la Ec. (19). No obstante, aún es correcto llamarlas oscilaciones debido a que sus perfiles oscilantes y sus densidades de energía se pueden localizar espacialmente. Estos oscilaciones sobrellevan fases periódicas de expansión y contracción en sus núcleos. Junto con estas fases de modulación periódica, se observan ráfagas correlacionadas de radiación clásica que escapan del oscilón a la velocidad de la luz (aproximadamente). Además de la escala natural de oscilación (que se comporta como  $\omega_{\text{osc}}^{-1}$ ), se puede apreciar la aparición de una segunda escala de tiempo relacionada a la modulación en amplitud. La ubicación de estas soluciones en el mapa de frecuencias de oscilación sugiere que podría existir una relación entre esta nueva escala de tiempo y la tasa de decaimiento del oscilón. La exploración de esta posible relación se ahondará en un futuro proyecto.

La conexión entre breathers y oscilaciones en el caso no perturbativo es más sutil que en el caso perturbativo. Esto se debe a la presencia de configuraciones iniciales que no tienen suficiente energía para generar oscilaciones. Sin embargo, los resultados en la Fig. III (en la Sección II) muestran que es posible encontrar breathers que se ajusten bien instantáneamente.

mente a los perfiles de oscilón, sin importar la dimensionalidad. No se ha explorado aún si este resultado se mantiene para diferentes elecciones de perfiles iniciales; sin embargo, a pesar de que no se muestre aquí, se verificó que esto se cumple para modificaciones del potencial como las que se presenta en la sección VI. Las similaridades persisten dinámicamente solamente en los casos en los que las deformaciones son pequeñas, y tienden a desfasarse más rápidamente cuando  $\varepsilon$  crece. Este resultado es clave, ya que sugiere la posibilidad de construir oscilones semianalíticos al reemplazar la frecuencia, amplitud y fase de oscilación por parámetros dependientes del tiempo. En [18], se sugiere un método para la construcción de soluciones semianalíticas a partir de soluciones perturbativas a primer orden. Esta implementación se abordará en un proyecto futuro.

Con el crecimiento de la dimensionalidad, en la subsección B se estudió el régimen  $\varepsilon \gtrsim 1$  de breathers dimensionalmente deformados. Se generó (a) un mapa de frecuencias de oscilón – extendiendo los procedimientos en el caso  $\varepsilon \lesssim 1$  –, así como (b) un mapa de energías iniciales que escanea los mismos rangos de parámetros iniciales de los breathers empleados en la subsección A. Al sobreponer los dos mapas, se encuentra que existe una energía umbral para formar un oscilón. Para estados con energías menores a ese umbral, se muestra que un boost arbitrariamente grande en la energía inicial no necesariamente se traduce en una mejora en la estabilidad de los oscilones. No es simple la tarea de encontrar los valores correspondientes de energía mínima (y frecuencia máxima) para los oscilones producidos por deformación. Pese a ello, los hallazgos de este trabajo muestran que el escaneo de condiciones iniciales es suficiente para demostrar su existencia. Al otro extremo del atractor de oscilones, las distribuciones en forma de función delta (que definen el límite de máxima energía) también aparecen en el régimen no perturbativo. En este caso, se encuentra que la energía máxima en función de  $\varepsilon$  se ajusta bien a una ley de potencia proporcional a  $\varepsilon^{5.15 \pm 0.15}$ . Incluso cuando no se puede determinar con precisión las energías mínimas del oscilón para cada dimensionalidad, la muestra de breathers iniciales es suficiente para encontrar uno de los resultados claves de este trabajo: el colapso gradual de un continuo de estados, acotado por oscilones de mínima y máxima energía, a un sólo oscilón. El “punto triple” que muestra la posición del colapso se ubica en el rango  $\varepsilon \in [1.25; 1.375]$  de dimensionalidades.

La sección IV presenta un compendio de los resultados de las secciones anteriores, y

busca cumplir con el objetivo de mostrar cómo es que el comportamiento crítico se manifiesta en la formación de oscilones. Aquí se muestra que la evolución de la máxima energía de los oscilones con respecto a  $\varepsilon$  necesita de dos leyes de potencia para ser representada: la primera contiene a los oscilones en el régimen perturbativo, mientras que la segunda representa a las soluciones en los casos en que  $\varepsilon \gtrsim 1$ . Una evaluación rápida de los resultados sugiere la presencia de una transición de fase alrededor de  $\varepsilon \sim 1$ . Sin embargo, basta con una sola ley de potencias proporcional a  $\varepsilon^{1/8}$  para describir a los oscilones de mínima frecuencia. Este resultado implica que una de estas dos opciones es verídica: (a) la transición de fase presentada para la energía máxima no es universal; o (b) el orden de la transición de fase es mayor cuando se usa la frecuencia como parámetro de orden.

No fue posible resolver con precisión los extremos de mínima energía de los atractores de oscilón (ni su dependencia con la dimensionalidad) debido al alto costo computacional asociado a la solución de oscilones anchos. Aún bajo estas limitaciones, es posible hacer una estimación adecuada de la ubicación de la cota superior de sus frecuencias: mientras que en el límite perturbativo es razonable considerar  $\omega_{\text{osc}} = \mu$  como la frecuencia máxima; se pueden usar las simulaciones en  $\varepsilon \gtrsim 1$  para hacer una estimación cruda de  $\omega_{\text{max}}$ . Después de combinar las estimaciones para las frecuencias máximas con los resultados de las frecuencias mínimas, se genera un gráfico similar a un diagrama de fases. Este gráfico muestra el colapso de las configuraciones de máxima y mínima frecuencia a un solo punto, el cual es el resultado principal de la subsección B. Por otro lado, se observa que algunos de los estados al interior de la región acotada por oscilones de máxima y mínima frecuencia corresponden a soluciones de amplitud modulada.

En las secciones V y VI, se probaron los efectos de diferentes implementaciones dinámicas en las conexiones entre breathers y oscilones. En la sección V, se plantea un experimento conceptual en el que se estudian los efectos de la dimensionalidad dinámica del espacio-tiempo en la formación de oscilones. En términos mas simples: se consideran transiciones dimensionales de duración finita, en vez de las transiciones instantáneas simuladas en las secciones I–IV. Se observa que las estructuras en los isocontornos de la frecuencia de oscilación (picos centrados en  $\theta = \pi/2$ ) tienden a diluirse a medida que las transiciones dimensionales duran por más tiempo. Por lo que no habrían preferencias para formar oscilones a partir de breathers que tienen más energía potencial que cinética.

Adicionalmente, el enfoque implementado en esta sección permite que se valide el procedimiento de extracción presentado en la sección II. En la sección VI, se presenta un enfoque alternativo al construir un potencial ajustable con el fin de conectar breathers y oscilones. Este potencial transforma el potencial periódico de sine-Gordon en el potencial de monodromía de axiones de manera continua. La evolución del Jacobiano de frecuencias con el parámetro de deformación sugiere que la acumulación de estados que forma un oscilón de máxima frecuencia es general, y no depende de la deformación de las ecuaciones del movimiento. No se encuentran evidencias de algún intervalo libre de soluciones estables, ni de una cota inferior para la energía de los oscilones.

La sección VII presenta todo el desarrollo numérico necesario para simular numéricamente la deformación de breathers. Siendo soluciones que emiten energía al evolucionar, es necesario implementar condiciones de frontera perfectamente absorbentes para recoger la radiación emitida y que esta no interactúe posteriormente con la solución. La implementación requiere que las ecuaciones de flujo se escriban en forma conservativa de flujo. En esta sección se desarrollan los fundamentos que explican este setup numérico, y del mismo modo se mide la conservación de energía de soluciones que no emiten radiación. Esto con el objetivo de demostrar que la implementación de estas condiciones de frontera no afecta a las soluciones dentro del volumen de simulación. Por otro lado, se lanzan paquetes de onda Gaussianos para mostrar que el flujo escalar absorbido genera reflexiones despreciables a lo largo del intervalo de simulación.

## IX. Referencias bibliográficas

- [1] I. L. Bogolyubsky and V. G. Makhankov, “Lifetime of Pulsating Solitons in Some Classical Models,” *Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, vol. 24, pp. 15–18, 1976.
- [2] M. A. Amin, R. Easther, H. Finkel, R. Flauger, and M. P. Hertzberg, “Oscillons After Inflation,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 108, p. 241302, 2012.
- [3] J. Ollé, O. Pujolàs, and F. Rompineve, “Oscillons and Dark Matter,” *JCAP*, vol. 02, p. 006, 2020.
- [4] D. Cyncynates and T. Giurgica-Tiron, “Structure of the oscillon: The dynamics of attractive self-interaction,” *Phys. Rev. D*, vol. 103, no. 11, p. 116011, 2021.
- [5] M. A. Amin, J. Braden, E. J. Copeland, J. T. Giblin, C. Solorio, Z. J. Weiner, and S.-Y. Zhou, “Gravitational waves from asymmetric oscillon dynamics?” *Phys. Rev. D*, vol. 98, p. 024040, 2018.
- [6] E. Cotner, A. Kusenko, and V. Takhistov, “Primordial Black Holes from Inflaton Fragmentation into Oscillons,” *Phys. Rev. D*, vol. 98, no. 8, p. 083513, 2018.
- [7] T. Hiramatsu, E. I. Sfakianakis, and M. Yamaguchi, “Gravitational wave spectra from oscillon formation after inflation,” *JHEP*, vol. 03, p. 021, 2021.
- [8] X.-X. Kou, J. B. Mertens, C. Tian, and S.-Y. Zhou, “Gravitational Waves from Fully General Relativistic Oscillon Preheating,” 12 2021.
- [9] M. Gleiser and A. Sornborger, “Longlived localized field configurations in small lattices: Application to oscillons,” *Phys. Rev. E*, vol. 62, pp. 1368–1374, 2000.
- [10] N. Graham and N. Stamatopoulos, “Unnatural Oscillon Lifetimes in an Expanding Background,” *Phys. Lett. B*, vol. 639, pp. 541–545, 2006.
- [11] M. Gleiser and D. Sicilia, “Analytical Characterization of Oscillon Energy and Lifetime,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 101, p. 011602, 2008.
- [12] P. M. Saffin, P. Tognarelli, and A. Tranberg, “Oscillon Lifetime in the Presence of Quantum Fluctuations,” *JHEP*, vol. 08, p. 125, 2014.

- [13] H.-Y. Zhang, M. A. Amin, E. J. Copeland, P. M. Saffin, and K. D. Lozanov, “Classical Decay Rates of Oscillons,” *JCAP*, vol. 07, p. 055, 2020.
- [14] J. Olle, O. Pujolas, and F. Rompineve, “Recipes for oscillon longevity,” *JCAP*, vol. 09, p. 015, 2021.
- [15] F. van Dissel, O. Pujolas, and E. I. Sfakianakis, “Oscillon spectroscopy,” *JHEP*, vol. 07, p. 194, 2023.
- [16] M. J. Ablowitz, D. J. Kaup, A. C. Newell, and H. Segur, “Method for solving the sine-gordon equation,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 30, pp. 1262–1264, Jun 1973. [Online]. Available: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.30.1262>
- [17] P. Olver, *Applications of Lie groups to differential equations*, ser. Graduate texts in mathematics. Springer-Verlag, 1993. [Online]. Available: <https://books.google.com/books?id=8TrvAAAAMAAJ>
- [18] J. T. Gálvez Ghersi and L. C. Stein, “Numerical renormalization-group-based approach to secular perturbation theory,” *Phys. Rev. E*, vol. 104, no. 3, p. 034219, 2021.
- [19] M. Hindmarsh and P. Salmi, “Numerical investigations of oscillons in 2 dimensions,” *Phys. Rev. D*, vol. 74, p. 105005, 2006.
- [20] M. Gleiser and D. Sicilia, “A General Theory of Oscillon Dynamics,” *Phys. Rev. D*, vol. 80, p. 125037, 2009.
- [21] P. Salmi and M. Hindmarsh, “Radiation and Relaxation of Oscillons,” *Phys. Rev. D*, vol. 85, p. 085033, 2012.
- [22] L. McAllister, E. Silverstein, and A. Westphal, “Gravity Waves and Linear Inflation from Axion Monodromy,” *Phys. Rev. D*, vol. 82, p. 046003, 2010.
- [23] R. Flauger, L. McAllister, E. Pajer, A. Westphal, and G. Xu, “Oscillations in the CMB from Axion Monodromy Inflation,” *JCAP*, vol. 06, p. 009, 2010.
- [24] X. Dong, B. Horn, E. Silverstein, and A. Westphal, “Simple exercises to flatten your potential,” *Phys. Rev. D*, vol. 84, p. 026011, 2011.
- [25] W. Jin, R. Brandenberger, and L. Heisenberg, “Axion monodromy inflation, trapping mechanisms and the swampland,” *Eur. Phys. J. C*, vol. 81, no. 2, p. 162, 2021.

- [26] J. T. Gálvez Ghersi and J. Braden, “Dimensional deformation of sine-Gordon breathers into oscillons,” *Phys. Rev. D*, vol. 108, no. 9, p. 096017, 2023.
- [27] S. Kasuya, M. Kawasaki, and F. Takahashi, “I-balls,” *Phys. Lett. B*, vol. 559, pp. 99–106, 2003.
- [28] L. A. Ferreira and W. J. Zakrzewski, “The concept of quasi-integrability: a concrete example,” *JHEP*, vol. 05, p. 130, 2011.
- [29] L. A. Ferreira, G. Luchini, and W. J. Zakrzewski, “The concept of quasi-integrability,” *AIP Conf. Proc.*, vol. 1562, no. 1, pp. 43–49, 2013.
- [30] H. Blas and H. F. Callisaya, “Quasi-integrability in deformed sine-Gordon models and infinite towers of conserved charges,” *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, vol. 55, pp. 105–126, 2018.
- [31] G. Fodor, P. Forgacs, Z. Horvath, and M. Mezei, “Radiation of scalar oscillons in 2 and 3 dimensions,” *Phys. Lett. B*, vol. 674, pp. 319–324, 2009.
- [32] G. Fodor, “A review on radiation of oscillons and oscillatons,” Ph.D. dissertation, Wigner RCP, Budapest, 2019.
- [33] A. B. Adib, M. Gleiser, and C. A. S. Almeida, “Long lived oscillons from asymmetric bubbles: Existence and stability,” *Phys. Rev. D*, vol. 66, p. 085011, 2002.
- [34] Y.-J. Wang, Q.-X. Xie, and S.-Y. Zhou, “Excited oscillons: Cascading levels and higher multipoles,” *Phys. Rev. D*, vol. 108, no. 2, p. 025006, 2023.
- [35] J. C. Butcher, “Implicit Runge-Kutta Processes,” *Mathematics of Computation*, vol. 18, no. 85, pp. 50–64, 1964. [Online]. Available: <http://www.jstor.org/stable/2003405>
- [36] P. Virtanen, R. Gommers, T. E. Oliphant, M. Haberland, T. Reddy, D. Cournapeau, E. Burovski, P. Peterson, W. Weckesser, J. Bright, S. J. van der Walt, M. Brett, J. Wilson, K. J. Millman, N. Mayorov, A. R. J. Nelson, E. Jones, R. Kern, E. Larson, C. J. Carey, İ. Polat, Y. Feng, E. W. Moore, J. VanderPlas, D. Laxalde, J. Perktold, R. Cimrman, I. Henriksen, E. A. Quintero, C. R. Harris, A. M. Archibald, A. H. Ribeiro, F. Pedregosa, P. van Mulbregt, and SciPy 1.0 Contributors, “SciPy 1.0: Fundamental Algorithms for Scientific Computing in Python,” *Nature Methods*, vol. 17, pp. 261–272, 2020.

- [37] G. Fodor, P. Forgacs, Z. Horvath, and A. Lukacs, “Small amplitude quasi-breathers and oscillons,” *Phys. Rev. D*, vol. 78, p. 025003, 2008.
- [38] D. G. Levkov, V. E. Maslov, E. Y. Nugaev, and A. G. Panin, “An Effective Field Theory for Large Oscillons,” 8 2022.
- [39] G. Fodor, P. Forgács, P. Grandclément, and I. Rácz, “Oscillons and quasibreathers in the  $\phi^4$  klein-gordon model,” *Phys. Rev. D*, vol. 74, p. 124003, Dec 2006. [Online]. Available: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.74.124003>
- [40] N. G. Vakhitov and A. A. Kolokolov, “Stationary solutions of the wave equation in a medium with nonlinearity saturation,” *Radiophysics and Quantum Electronics*, vol. 16, no. 7, pp. 783–789, Jul. 1973. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1007/bf01031343>
- [41] P. Dorey, T. Romanczukiewicz, and Y. Shnir, “Staccato radiation from the decay of large amplitude oscillons,” *Phys. Lett. B*, vol. 806, p. 135497, 2020.
- [42] B. C. Nagy and G. Takacs, “Collapse instability and staccato decay of oscillons in various dimensions,” *Phys. Rev. D*, vol. 104, no. 5, p. 056033, 2021.
- [43] S. H. Strogatz, “Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics,” *Biology, Chemistry and Engineering*, p. 1, 1994.
- [44] M. Hindmarsh and P. Salmi, “Oscillons and domain walls,” *Phys. Rev. D*, vol. 77, p. 105025, 2008.
- [45] J. J. Blanco-Pillado, D. Jiménez-Aguilar, and J. Urrestilla, “Exciting the domain wall soliton,” *JCAP*, vol. 01, p. 027, 2021.
- [46] J. J. Blanco-Pillado, D. Jiménez-Aguilar, J. M. Queiruga, and J. Urrestilla, “The dynamics of Domain Wall Strings,” 9 2022.
- [47] J. J. Atick and E. Witten, “The Hagedorn Transition and the Number of Degrees of Freedom of String Theory,” *Nucl. Phys. B*, vol. 310, pp. 291–334, 1988.
- [48] G. ’t Hooft, “Dimensional reduction in quantum gravity.”
- [49] S. M. Carroll, M. C. Johnson, and L. Randall, “Dynamical compactification from de Sitter space,” *JHEP*, vol. 11, p. 094, 2009.

- [50] Y. Ito, J. Nishimura, and A. Tsuchiya, “Universality and the dynamical space-time dimensionality in the Lorentzian type IIB matrix model,” *JHEP*, vol. 03, p. 143, 2017.
- [51] G. ’t Hooft and M. J. G. Veltman, “Regularization and Renormalization of Gauge Fields,” *Nucl. Phys. B*, vol. 44, pp. 189–213, 1972.
- [52] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, *An Introduction to quantum field theory*. Reading, USA: Addison-Wesley, 1995.
- [53] S. Weinberg, *The Quantum theory of fields. Vol. 1: Foundations*. Cambridge University Press, 6 2005.
- [54] P. Bloomfield, *Fourier analysis of time series: an introduction*. John Wiley & Sons, 2004.
- [55] D. G. Levkov and V. E. Maslov, “Analytic description of monodromy oscillons,” 6 2023.
- [56] J. P. Boyd, *Chebyshev and Fourier Spectral Methods*. Mineola, NY: Dover Publications, 2001.
- [57] M. Frigo and S. G. Johnson, “The Design and Implementation of FFTW3,” *IEEE Proc.*, vol. 93, no. 2, pp. 216–231, 2005.
- [58] A. V. Frolov, J. T. Gálvez Ghersi, and A. Zucca, “Unscreening scalarons with a black hole,” *Phys. Rev. D*, vol. 95, no. 10, p. 104041, 2017.
- [59] S. G. Johnson, “Notes on perfectly matched layers (pmls),” *CoRR*, vol. abs/2108.05348, 2021. [Online]. Available: <https://arxiv.org/abs/2108.05348>