

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

FACULTAD DE CIENCIAS



**MODELACIÓN MATEMÁTICA Y SIMULACIÓN
NUMÉRICA PARA MEJORAR EL DIAGNÓSTICO DE
LA FIBROSIS PULMONAR IDIOPÁTICA BASADAS EN
EL ANÁLISIS DE DATOS Y EL PROCESAMIENTO DE
IMÁGENES**

TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE:
LICENCIADO EN MATEMÁTICA

Elaborada por:

MIHAEL ARCE BALDO

ID 0000-0001-5269-4452

Asesora:

Dra. IRLA DORALIZA MANTILLA NÚÑEZ

ID 0000-0001-9392-404X

Lima, Perú
2024

Citar/How to cite	Arce Baldo [1]
Referencia/Reference	[1] M. Arce Baldo, “Modelación matemática y simulación numérica para mejorar el diagnóstico de la fibrosis pulmonar idiopática basadas en el análisis de datos y el procesamiento de imágenes” [Tesis de pregrado]. Lima (Perú): Universidad Nacional de Ingeniería, 2024.
Estilo/Style: IEEE	
Citar/How to cite	(Arce, 2024)
Referencia/Reference	Arce, M. (2024). “Modelación matemática y simulación numérica para mejorar el diagnóstico de la fibrosis pulmonar idiopática basadas en el análisis de datos y el procesamiento de imágenes”. [Tesis de pregrado, Universidad Nacional de Ingeniería]. Repositorio Institucional UNI.
Estilo/Style: APA (7ma ed.)	

Agradecimientos

Mi agradecimiento especial a mi asesora la Profesora Dra. Irla Doraliza Mantilla Núñez por su generoso apoyo y constante disposición en las asesorías del desarrollo de mi tesis, la cual ha sido elaborada en el Laboratorio de Simulación e Investigación Numérica (LABO-SIN) de la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional de Ingeniería. Así mismo, un sincero agradecimiento al personal del Hospital de Bagua por su colaboración profesional con la prestación de las imágenes de pacientes que padecieron la enfermedad de FPI y a los familiares de pacientes que brindaron los datos recogidos en las encuestas. Así mismo, agradezco a todos los profesores que han contribuido en mi formación académica.

Dedicatoria

*Dedicado al universo, y en especial
a mis padres biológicos
y celestiales,*

Resumen

Para el desarrollo de este trabajo, en principio, se construye una base de datos que comprende un análisis del grado de letalidad de la pandemia del coronavirus (COVID-19), características y consecuencias de las personas más vulnerables a contagiarse con este virus según los datos recogidos mediante encuestas realizadas con los formularios de Google y procesados a través de técnicas de análisis de datos, como el oversampling para el balanceo de datos, las medidas de tendencia central para su tratamiento y series temporales cuyos indicadores de efectividad están basados en la determinación de los p-valores.

Las variables objetivo clasificadas y optimizadas con las técnicas indicadas anteriormente fueron consideradas la edad, el Índice de Masa Corporal (IMC) y la vulnerabilidad a las técnicas imagenológicas; estos resultados también se corroboraron con los datos registrados de aquellos pacientes que sufrieron los peores efectos de la pandemia y pasaron por la Unidad de Cuidados Intensivos (UCI) o que tuvieron alguna cercanía con los pacientes afectados. Una de las consecuencias post-COVID fue el incremento de la cantidad de pacientes diagnosticados con la enfermedad denominada Fibrosis Pulmonar Idiopática (FPI), por lo que se considera uno de los objetivos fundamentales la investigación del protocolo de diagnóstico basado en las imágenes radiológicas realizadas a pacientes que fueron diagnosticados con esta enfermedad; la cual aún sigue en investigación.

El protocolo médico para el diagnóstico de esta enfermedad es mediante imágenes tomográficas, radiografías de rayos X y resonancias magnéticas, pero en muchos casos hubo malas prácticas del procedimiento causadas por errores en las imágenes obtenidas. Generalmente, los errores fueron de posicionamiento de la cámara, almacenamiento del archivo de la imagen y baja densidad en la resolución de la zona afectada. En ese sentido, en el presente trabajo nos centramos en la investigación de las imágenes de FPI, con la finalidad de contribuir con modelos matemáticos y técnicas no invasivas para detectar en las imágenes la verdadera zona afectada por la FPI, aplicando diferentes métodos de procesamiento de imágenes que puedan superar estos errores. La aplicación de esta metodología fue posible gracias a la construcción de modelos matemáticos correspondientes a cada técnica de procesamiento, basados en Transformada Rápida de Fourier, Transformada Discreta de Coseno, Transformada Discreta de Wavelet y Ecuaciones Diferenciales Parciales Parabólicas No Lineales.

Con esta metodología, se alcanzaron los resultados deseados; es decir, se pudo visualizar el comportamiento de las variables objetivo predictivas, así como el mejoramiento de las imágenes de FPI procesadas, con lo cual se ha podido verificar la existencia de zonas afectadas por FPI y, en tal caso, ubicarlas con mayor precisión.

Para la visualización de los resultados obtenidos, se construyó un módulo computacional conformado por una base de datos realizada con el software estadístico JMP. Los algoritmos de los modelos numéricos fueron implementados con los códigos de MATLAB.

Palabras clave: Mapeo, Oversampling, Series temporales, Procesamiento de imagen digitalizada, Transformada Rápida de Fourier, Transformada Discreta Coseno, Transformada Discreta de Wavelet, Ecuación Diferencial Parcial Parabólica No Lineal.

Abstract

For the development of this work, a database was initially constructed, which included an analysis of the lethality rate of the coronavirus (COVID-19) pandemic, the characteristics, and consequences of the most vulnerable individuals to contracting this virus, based on data collected through surveys conducted using Google Forms and processed using data analysis techniques such as oversampling for data balancing, central tendency measures for data treatment, and time series whose effectiveness indicators are based on the determination of p-values.

The target variables classified and optimized using the aforementioned techniques included age, Body Mass Index (BMI), and vulnerability to imaging techniques. These results were also corroborated with the recorded data of patients who experienced the worst effects of the pandemic and went through the Intensive Care Unit (ICU) or had close contact with affected patients. One of the post-COVID consequences was the increase in the number of patients diagnosed with the disease called Idiopathic Pulmonary Fibrosis (IPF), which is why investigating the diagnostic protocol based on radiological images of patients diagnosed with this disease is considered one of the fundamental objectives, as it is still under investigation.

The medical protocol for diagnosing this disease is through tomographic images, x-ray radiographs and magnetic resonance imaging, but in many cases, there were procedural malpractices caused by errors in the obtained images. Generally, the errors were due to camera positioning, image file storage, and low resolution in the affected area's density. In this regard, this study focuses on investigating IPF images, aiming to contribute with mathematical models and non-invasive techniques to detect the true affected area by IPF in the images, applying different image processing methods to overcome these errors. This methodology was possible thanks to the construction of mathematical models corresponding to each processing technique, based on Fast Fourier Transform, Discrete Cosine Transform, Discrete Wavelet Transform, and Nonlinear Parabolic Partial Differential Equations.

With this methodology, the desired results were achieved; that is, it was possible to visualize the behavior of the predictive target variables, as well as the improvement of the processed IPF images, which allowed verifying the existence of areas affected by IPF and, in such cases, locating them with greater precision.

For the visualization of the obtained results, a computational module was built, consisting of a database created with the statistical software JMP. The algorithms of the numerical models were implemented using MATLAB codes.

Keywords: Mapping, Oversampling, Time series, Digitized image processing, Fast Fourier Transform, Discrete Cosine Transform, Discrete Wavelet Transform, Nonlinear Parabolic Partial Differential Equation.

Tabla de Contenido

Resumen	V
Abstract	VI
Introducción	XIX
I PRELIMINARES	1
A Consideraciones generales sobre el trabajo de investigación	1
1) Definiciones generales relacionadas a la Fibrosis Pulmonar	1
2) Fibrosis pulmonar idiopática	1
3) Introducción al procesamiento de imágenes	5
B Objetivos del estudio	14
1) Objetivos generales	14
2) Objetivos específicos	14
C Motivación y antecedentes	15
1) Nivel de vulnerabilidad al Covid-19 según la edad	15
2) Nivel de vulnerabilidad al Covid-19 según el índice de masa corporal .	20
3) Nivel de vulnerabilidad al Covid-19 según macrorregión	25
4) Cantidad de familiares de los encuestados que contrajeron COVID-19 internados en camas UCI	28
5) Cantidad de familiares fallecidos de los encuestados con COVID-19 .	33
6) Contagios de COVID-19 por mes y año	36
7) Resultados según los datos del MINSA	42
8) Comparación entre los resultados según la encuesta y según los datos del MINSA	48
9) Cantidad de los encuestados que se realizaron diversas técnicas imagenológicas, los motivos y reacciones adversas	50
10) Clasificación de enfermedades como consecuencias de COVID-19 .	55
11) El protocolo médico y diagnóstico de la FPI	56
D Problema de investigación: Detección y eliminación de errores en imágenes de FPI mediante técnicas de procesamiento de imágenes	56
1) Formulación matemática para la medición del oxígeno pulmonar y diagnóstico médico de la FPI mediante imágenes	57
2) Errores y defectos en las imágenes médicas	63
II FUNDAMENTO MATEMÁTICO Y ESQUEMA ESTRUCTURAL DEL TRABAJO DE INVESTIGACIÓN	65
A Espacios L^1	65
1) Definiciones generales	65
2) Funciones en L^1	66
3) Supremo esencial	66
4) La norma en L^1	67
B Funciones de Fourier	71
1) Series de Fourier	71
2) Transformada de Fourier	72
3) Propiedades de la transformada de Fourier	72
4) Teorema de convolución	72
C Espacio de Hilbert $L_\omega^2(\mathbb{R})$	73

1)	El producto interno en el espacio de Hilbert $L^2_\omega(\mathbb{R})$	73
2)	Propiedades del espacio de Hilbert $L^2_\omega(\mathbb{R})$	74
3)	La norma en el espacio de Hilbert $L^2_\omega(\mathbb{R})$	75
4)	Polinomio ortogonal	76
D	Plano Escala-Frecuencia (II)	77
E	Las wavelets (ondas viajeras), tipos y propiedades	78
1)	Definición de la función de wavelet	79
2)	Tipos de wavelets	80
3)	Condiciones de ortonormalidad de una wavelet	84
4)	Transformada de wavelet integral	85
5)	Transformada de wavelet discreta (DWT)	86
6)	Transformada rápida de wavelet (FWT)	87
7)	Espacio Escala-Frecuencia	88
F	Operador divergencia	90
1)	Definición del operador divergencia	90
2)	Propiedades del operador divergencia	91
3)	Teorema de la Divergencia (Teorema de Gauss)	92
G	Filtro de difusión anisotrópica - EDP de difusión lineal	92
1)	Fundamento físico de los procesos de difusión	92
2)	Fundamento del filtrado lineal de difusión	93
3)	Propiedades del espacio-escala	95
H	Filtro de difusión anisotrópica - EDP de difusión no lineal	95
1)	El modelo de Perona-Malik	96
2)	Modelos no lineales regularizados	97
3)	Modelos anisotrópicos no lineales	98
I	Esquema estructural del desarrollo de esta investigación	99
III	METODOLOGÍA Y DESARROLLO DE LAS TÉCNICAS DE PROCESAMIENTO DE LAS IMÁGENES DE FPI	101
A	Técnicas del procesamiento del error de calibración	101
1)	Operaciones aritméticas	101
2)	Operaciones lógicas	102
3)	Convolución bidimensional	102
4)	Transformaciones geométricas	104
B	Técnicas de amplificación y Análisis Numérico del Álgebra Lineal	107
1)	Interpolación polinomial	107
2)	Transformada de Fourier y el procesamiento en el dominio de la frecuencia	111
C	Técnicas de compresión - TDC y DWT	116
1)	Transformada discreta coseno (TDC)	116
2)	Compresión basada en la transformada discreta de wavelets (DWT2)	117
D	Técnicas de filtrado	118
1)	Filtros lineales espaciales	118
2)	Filtro de la mediana	119
3)	Filtro paso bajo	120
4)	Filtrado de paso alto para la localización de contornos	124
5)	Método de suavizado mediante la resolución numérica de la EDP de difusión anisotrópica no lineal	127
E	Técnicas de resaltamiento virtual	129
1)	Técnica de “skeleton” para la detección de la escala de grises en la imagen y su binarización	129

2)	Realce de detalles mediante el método de la DWT2	130
3)	Método de la segmentación basado en funciones de wavelet	131
4)	Método wavelet de detección de bordes	132
5)	Método de detección de bordes mediante la resolución numérica de la EDP de difusión anisotrópica no lineal	133
IV	RESULTADOS DE APLICACIÓN DE LAS TÉCNICAS DE PROCESAMIENTO DE IMÁGENES A LAS IMÁGENES DE FPI	136
A	Corrección de los errores de calibración	136
1)	Corrección del error de angulación	136
2)	Corrección del error de la mala ubicación de la cámara	137
3)	Corrección de la descentralización de la imagen	139
4)	Corrección de la luminosidad de la imagen	140
B	Resultados de técnicas de amplificación	141
1)	Amplificación de la imagen mediante la técnica <i>RGB</i>	141
2)	Amplificación de la imagen mediante interpolación polinomial bilineal .	142
3)	Amplificación de la imagen mediante interpolación polinomial bicúbica	142
4)	Amplificación de la imagen mediante la transformada discreta de Fourier	143
C	Resultados de técnicas de compresión	144
1)	Compresión de la imagen mediante la transformada discreta coseno (TDC)	144
2)	Compresión de la imagen mediante la técnica de wavelet	145
D	Resultados de filtrado	148
1)	Filtrado de ruidos de “sal y pimienta” (desaparecen altamente puntos claros y oscuros que no pertenecen a la imagen pero disminuye su resolución) mediante la técnica de la media estadística	148
2)	Filtrado mejorado de los ruidos de “sal y pimienta” (desaparecen casi en su totalidad puntos claros y oscuros que no pertenecen a la imagen pero disminuye mínimamente su resolución)	149
3)	Filtrado de un interlineado que no pertenece a la imagen mediante la técnica lineal gaussiana	150
4)	Filtrado de paso bajo de ruidos de “sal y pimienta” a la imagen (desaparecen totalmente puntos claros y oscuros que no pertenecen a la imagen pero se mantiene su resolución), mediante la transformada rápida de Fourier	151
5)	Filtrado de paso alto que quita objetos de la imagen que no son contornos, y resalta a aquellos donde existe brillo y textura; mediante la transformada rápida de Fourier	154
6)	Filtrado de los bordes en alto relieve y suavizado de la imagen, mediante las EDP de difusión anisotrópica	157
E	Resultados de las técnicas de detección de la FPI y su resaltamiento virtual .	159
1)	Detección de la escala de grises en la imagen y su binarización en “0” (negro) y “1” (blanco) mediante la técnica de “skeleton”	159
2)	Detección de indicadores de la FPI (en color rojo) y el resaltamiento de sus detalles mediante la DWT2	159
3)	Detección de algunos indicadores que caracterizan a la FPI mediante la técnica de segmentación, la cual está basada en las funciones de wavelet	162
4)	Detección de la FPI mediante la técnica wavelet de resaltamiento de bordes	169

5) Detección y resaltamiento de la FPI (en forma de “panal de abejas”) mediante el modelo de la difusión anisotrópica	171
CONCLUSIONES	174
BIBLIOGRAFÍA	176
ANEXOS	182

Lista de Tablas

Tabla I:	Tabla de colores y sus respectivos valores numéricos <i>RGB</i>	7
Tabla II:	Número de encuestados por género y clase en base a su edad.	16
Tabla III:	Tabla de la cantidad de personas que contrajeron Covid-19 por género y clase basada en la edad.	18
Tabla IV:	Número de encuestados por género y clase en base a su índice de masa corporal.	21
Tabla V:	Tabla de la cantidad de personas que contrajeron Covid-19 por género y clase basada en el índice de masa corporal.	22
Tabla VI:	Tabla de porcentajes de personas con COVID-19 por región y macro-región según los datos del MINSA.	27
Tabla VII:	Tabla de cantidades de familiares internados en camas UCI de las personas encuestadas que contrajeron COVID-19.	28
Tabla VIII:	Tabla de cantidades de familiares difuntos de las personas encuestadas que contrajeron COVID-19.	33
Tabla IX:	Tabla del número de contagios por mes y año de los encuestados que contrajeron COVID-19 luego de aplicar oversampling.	38
Tabla X:	Tabla de los coeficientes de correlación de las variables utilizadas en el modelo predictivo de los encuestados que contrajeron COVID-19 por mes y año.	38
Tabla XI:	Tabla de datos del modelo predictivo de los encuestados que contrajeron COVID-19 por mes y año.	39
Tabla XII:	Tabla del número de contagios por mes y año según los datos del MINSA.	43
Tabla XIII:	Tabla de los coeficientes de correlación de las variables utilizadas en el modelo predictivo del número de contagios por mes y año según los datos del MINSA.	44
Tabla XIV:	Tabla de datos del modelo predictivo del número de contagios por mes y año según los datos del MINSA.	45
Tabla XV:	Tabla de porcentajes de variación entre las cantidades de contagios por mes y año según la encuesta y según los datos del MINSA.	48
Tabla XVI:	Tabla de porcentajes de variación entre los pronósticos de las cantidades de contagios por mes y año según la encuesta y según los datos del MINSA.	49
Tabla XVII:	Tabla de los promedios de las cantidades de reacciones adversas a las técnicas imagenológicas experimentadas por los encuestados por rangos de edad.	54
Tabla XVIII:	Tabla de los promedios de las cantidades de reacciones adversas a las técnicas imagenológicas experimentadas por los encuestados según los rangos de índices de masa corporal.	54
Tabla XIX:	Técnicas de resampling.	28
Tabla XX:	Tabla de datos agrupados en intervalos.	30
Tabla XXI:	Tabla de parámetros y estadísticas.	36

Lista de Figuras

Figura I:	Eje de color de rangos de temperatura.	8
Figura II:	Ráster de temperaturas del Perú.	9
Figura III:	Ubicación de colores en el espacio <i>RGB</i>	9
Figura IV:	Histograma del ráster de temperaturas del Perú.	10
Figura V:	Ubicación del pixel p y sus vecinos del conjunto $N_4(p)$ en coordenadas cartesianas.	11
Figura VI:	Ubicación del pixel p y sus vecinos del conjunto $N_D(p)$ en coordenadas cartesianas.	11
Figura VII:	Imagen que contiene los pixeles mencionados en el ejemplo anterior.	12
Figura VIII:	Efecto del ruido en la imagen de un paisaje.	14
Figura IX:	Gráfico de barras del número de encuestados por género y clase en base a su edad.	17
Figura X:	Número de personas que contrajeron Covid-19 por género y clase en base a la edad luego de aplicar oversampling.	20
Figura XI:	Gráfico de barras del número de encuestados por género y clase en base a su índice de masa corporal.	22
Figura XII:	Gráfico del número de personas que contrajeron Covid-19 por género y clase en base al IMC luego de aplicar oversampling.	25
Figura XIII:	Mapa político del Perú dividido en macrorregiones y regiones.	25
Figura XIV:	Gráfico de barras del número de personas encuestadas por macrorregión.	26
Figura XV:	Gráfico de barras del porcentaje de personas encuestadas con Covid-19 por macrorregión.	26
Figura XVI:	Gráfico de barras del porcentaje de personas con Covid-19 por macrorregión según MINSA.	27
Figura XVII:	Porcentajes de cantidades de familiares internados en camas UCI de las personas encuestadas que contrajeron COVID-19.	28
Figura XVIII:	Porcentajes de encuestados que contrajeron COVID-19 que estuvieron internados en camas UCI.	29
Figura XIX:	Matriz de correlación entre las personas encuestadas que contrajeron COVID-19 y las cantidades de familiares suyos internados en camas UCI.	30
Figura XX:	Matriz del gráfico de dispersión de las personas encuestadas que contrajeron COVID-19 y las cantidades de familiares suyos internados en camas UCI.	30
Figura XXI:	Diagramas de regresión, valores atípicos, y observaciones realizadas respecto a los datos predichos de las personas encuestadas que contrajeron COVID-19 y las cantidades de familiares suyos internados en camas UCI.	31
Figura XXII:	Datos estadísticos del modelo predictivo de las personas encuestadas que contrajeron COVID-19 y las cantidades de familiares suyos internados en camas UCI.	32
Figura XXIII:	Porcentajes de las cantidades de familiares fallecidos de las personas encuestadas que contrajeron COVID-19.	33
Figura XXIV:	Matriz de correlación entre las personas encuestadas que contrajeron COVID-19 y las cantidades de familiares suyos fallecidos.	34

Figura XXV:	Matriz del gráfico de dispersión de las personas encuestadas que contrajeron COVID-19 y las cantidades de familiares suyos fallecidos	34
Figura XXVI:	Diagramas de regresión, valores atípicos, y observaciones realizadas respecto a los datos predichos de las personas encuestadas que contrajeron COVID-19 y las cantidades de familiares suyos fallecidos	35
Figura XXVII:	Datos estadísticos del modelo predictivo de las personas encuestadas que contrajeron COVID-19 y las cantidades de familiares suyos difuntos	36
Figura XXVIII:	Porcentajes de las variantes de COVID-19 contraídas por los encuestados	37
Figura XXIX:	Gráfico del número de contagios por mes y año de los encuestados que contrajeron COVID-19	37
Figura XXX:	Matriz de los gráficos de dispersión entre las variables utilizadas en el modelo predictivo de los encuestados que contrajeron COVID-19 por mes y año	39
Figura XXXI:	Diagrama de las observaciones realizadas respecto a los datos predichos del modelo predictivo de los encuestados que contrajeron COVID-19 por mes y año	40
Figura XXXII:	Datos estadísticos del modelo predictivo de las cantidades de personas encuestadas que contrajeron COVID-19 por mes y año	41
Figura XXXIII:	Gráfico del número de contagios por mes y año según los datos del MINSA	43
Figura XXXIV:	Matriz de los gráficos de dispersión entre las variables utilizadas en el modelo predictivo del número de contagios por mes y año según los datos del MINSA	44
Figura XXXV:	Diagrama de las observaciones realizadas respecto a los datos predichos del modelo predictivo del número de contagios por mes y año según los datos del MINSA	46
Figura XXXVI:	Datos estadísticos del modelo predictivo del número de contagios por mes y año según los datos del MINSA	46
Figura XXXVII:	Gráfico circular de los porcentajes de los encuestados que se realizaron cada técnica imagenológica	51
Figura XXXVIII:	Gráfico circular de los porcentajes de los motivos por los que los encuestados se realizaron técnicas imagenológicas	52
Figura XXXIX:	Gráfico de barras de los porcentajes de las reacciones adversas a las técnicas imagenológicas experimentadas por los encuestados .	53
Figura XL:	Imagen obtenida de una tomografía computarizada de tórax en alta resolución que muestra un alto grado de fibrosis pulmonar [28] .	57
Figura XLI:	Radiografía torácica de un paciente con FPI [28]	58
Figura XLII:	Imagen tomográfica de FPI de un pulmón con miofibroblastos, tejido cicatricial y panalización [28]	58
Figura XLIII:	Realizando una espirometría [29]	59

Figura XLIV:	Curva de flujo-volumen que muestra una maniobra CVF exitosa. Inicialmente, tanto el flujo como el volumen son iguales a cero (lo que representa el volumen en el espirómetro y no del pulmón). Despues del punto de partida, la curva asciende rápidamente a un pico (el flujo espiratorio máximo). El trazo se mueve en el sentido horario a medida que se efectúa la espiración seguida de la inspiración. (El valor de FEV ₁ es arbitrario en este gráfico y solo se muestra para contribuir a la comprensión del lector) [29].	60
Figura XLV:	Bases fisiológicas del principio de Fick [34].	63
Figura XLVI:	Relación espacial entre los espacios de funciones de escala y funciones de wavelet.	78
Figura XLVII:	Gráfica de la wavelet de Haar.	80
Figura XLVIII:	Gráfica de la wavelet de Daubechies-4.	81
Figura XLIX:	Gráfica de la wavelet de Coiflets-2.	82
Figura L:	Gráfica de la wavelet de Symlets-6.	83
Figura LI:	Gráfica de la wavelet de Meyer.	83
Figura LII:	Gráfica de la wavelet de Morlet.	84
Figura LIII:	Gráficas de la función de difusividad g y la función de flujo Φ	96
Figura LIV:	Resultado de aplicar la convolución bidimensional al pixel de posición (1, 1) de la imagen I	104
Figura LV:	Traslación de un pixel de una imagen.	104
Figura LVI:	Rotación de un pixel de una imagen.	105
Figura LVII:	Transformación geométrica de una imagen de diecisésis pixeles. .	108
Figura LVIII:	Interpolación por el vecino más próximo.	109
Figura LIX:	Interpolación bilineal.	109
Figura LX:	Interpolación bicúbica.	110
Figura LXI:	Resultado de aplicar la correlación al pixel de posición (1, 1) de la imagen I	111
Figura LXII:	Construcción de la matriz aumentada A_α a partir de la matriz A . .	116
Figura LXIII:	Gráfico del ejemplo del filtro de la mediana de 3×3	120
Figura LXIV:	Gráfico de perspectiva de una función de transferencia de filtro ideal de paso bajo y la sección transversal radial del filtro.	121
Figura LXV:	Gráfico de perspectiva de una función de transferencia de filtro Butterworth de paso bajo de orden n	122
Figura LXVI:	Gráfico de la sección transversal radial del filtro Butterworth de paso bajo de orden n	123
Figura LXVII:	Gráfico de perspectiva de una función de transferencia de filtro gaussiano de paso bajo y la sección transversal radial del filtro. .	124
Figura LXVIII:	Gráfico de perspectiva de una función de transferencia de filtro ideal de paso alto y la sección transversal radial del filtro.	124
Figura LXIX:	Gráfico de perspectiva de una función de transferencia de filtro Butterworth de paso alto de orden n	125
Figura LXX:	Gráfico de la sección transversal radial del filtro Butterworth de paso alto de orden n	126
Figura LXXI:	Gráfico de perspectiva de una función de transferencia de filtro gaussiano de paso alto y la sección transversal radial del filtro. .	127
Figura LXXII:	Diagrama de dilatación de una imagen I mediante un elemento estructurante J para obtener una imagen dilatada I_d	129
Figura LXXIII:	Diagrama de erosión de la imagen I_r mediante un elemento estructurante K para obtener una imagen erosionada I_e	130

Figura LXXIV:	Imagen original: Aquí se muestra el error de angulación en la dirección vertical de la columna vertebral de una radiografía de FPI obtenida mediante la colaboración de un hospital nacional.	136
Figura LXXV:	Elaboración propia: Aquí se muestra la corrección de la angulación de la radiografía de FPI anterior.	137
Figura LXXVI:	Imagen original: Aquí se muestra el error de enfoque de la cámara sobre una radiografía de FPI obtenida mediante la colaboración de un hospital nacional.	138
Figura LXXVII:	Elaboración propia: aquí se muestra el cuadrilátero formado por los puntos elegidos para transformar la imagen.	138
Figura LXXVIII:	Elaboración propia: Aquí se muestra la corrección de la distorsión producida por la mala ubicación de la cámara de la imagen de la figura LXXV.	139
Figura LXXIX:	Elaboración propia: Aquí se muestra la corrección de una radiografía de FPI con mal encuadre obtenida mediante la colaboración de un hospital nacional.	140
Figura LXXX:	Elaboración propia: Aquí se puede ver el aumento de luminosidad de una radiografía de FPI con baja nitidez obtenida mediante la colaboración de un hospital nacional.	140
Figura LXXXI:	Elaboración propia: Aquí se puede ver los cambios de luminosidad de la radiografía de FPI de la imagen izquierda de la figura anterior.	141
Figura LXXXII:	Fuente: Aquí se muestra una imagen de una radiografía de FPI de pequeñas dimensiones obtenida por colaboración de un hospital nacional.	141
Figura LXXXIII:	Elaboración propia: Aquí se muestra la imagen de la radiografía de FPI anterior amplificada mediante la interpolación <i>RGB</i> con factor de escala 3.	142
Figura LXXXIV:	Elaboración propia: Aquí se muestra la imagen de la radiografía de FPI de la figura LXXXII amplificada mediante la interpolación bilineal con factor de escala 3.	142
Figura LXXXV:	Elaboración propia: Aquí se muestra la imagen de la radiografía de FPI de la figura LXXXII amplificada mediante la interpolación bicúbica con factor de escala 3.	143
Figura LXXXVI:	Elaboración propia: Aquí se muestra el resultado de aplicar la amplificación de imágenes basada en interpolación espacial usando el método de la transformada de Fourier a la imagen de la radiografía de FPI de la figura LXXXII.	143
Figura LXXXVII:	Imagen original: Aquí se muestra una radiografía de FPI con líneas casi verticales que no pertenecen a la imagen obtenida mediante la colaboración de un hospital nacional con un peso de 531.327 KB.	144
Figura LXXXVIII:	Elaboración propia: Aquí se observa que las líneas que no pertenecen a la imagen han sido eliminadas al disminuir los coeficientes y se ha mantenido su resolución en alta medida, lo que resulta de aplicar la compresión de imágenes basada en la TDC a la imagen anterior, conservando 222 coeficientes. El peso de la imagen disminuyó de 531.327 KB a 96.318 KB.	144
Figura LXXXIX:	Imagen original: Aquí se muestra una tomografía computarizada de un paciente con FPI [87] de 263.144 KB de tamaño.	145

Figura XC:	Elaboración propia: Aquí se muestra la compresión en un 70 % de la tomografía computarizada (TC) de FPI de la figura anterior mediante la wavelet de Haar de 56.436 KB de tamaño.	146
Figura XCI:	Elaboración propia: Aquí se puede ver la compresión en un 70 % de la TC de FPI mediante la wavelet de Daubechies-4 de 54.413 KB de tamaño.	146
Figura XCII:	Elaboración propia: Aquí se muestra la compresión en un 70 % de la TC de FPI mediante la wavelet de Coiflets-2 de 54.462 KB de tamaño.	147
Figura XCIII:	Elaboración propia: Aquí se observa la compresión en un 70 % de la TC de FPI mediante la wavelet de Symlets-6 de 54.369 KB de tamaño.	147
Figura XCIV:	Elaboración propia: Aquí se puede ver la compresión de la TC de FPI en un 70 % mediante la wavelet de Meyer de 54.149 KB de tamaño.	148
Figura XCV:	Elaboración propia: En la imagen izquierda de esta figura, se muestra una radiografía de FPI obtenida mediante la colaboración de un hospital nacional; y a la derecha, el efecto de aplicarle el ruido de “sal y pimienta” a la imagen.	148
Figura XCVI:	Elaboración propia: Aquí se muestra el efecto de aplicar el filtro de la media de 3×3 y 9×9 para la radiografía de FPI con ruido de “sal y pimienta”.	149
Figura XCVII:	Elaboración propia: Aquí se muestra el efecto de aplicar el filtro de la mediana de 3×3 y 9×9 para la imagen con ruido de “sal y pimienta” de la figura XCV.	149
Figura XCVIII:	Elaboración propia: En la imagen izquierda de esta figura, se muestra una radiografía de FPI obtenida mediante la colaboración de un hospital nacional; y a la derecha, el efecto de aplicarle el ruido gaussiano a la imagen.	150
Figura XCIX:	Elaboración propia: Aquí se muestra el efecto de aplicar el filtro gaussiano de 3×3 y 27×27 para una radiografía de FPI con ruido gaussiano.	150
Figura C:	Elaboración propia: Aquí se muestra el efecto de aplicar el filtro ideal de paso bajo sobre una radiografía de FPI obtenida mediante la colaboración de un hospital nacional con ruido de “sal y pimienta” para las frecuencias de corte de 150 hz, 90 hz y 30 hz.	151
Figura CI:	Elaboración propia: Aquí se observa el efecto de aplicar el filtro Butterworth de paso bajo de orden uno sobre la radiografía de FPI de la figura C con ruido de “sal y pimienta” para las frecuencias de corte de 270 hz, 90 hz y 30 hz.	152
Figura CII:	Elaboración propia: Aquí se muestra el efecto de aplicar el filtro Butterworth de paso bajo de orden tres sobre la radiografía de FPI de la figura C con ruido de “sal y pimienta” para las frecuencias de corte de 270 hz, 90 hz y 30 hz.	153
Figura CIII:	Elaboración propia: Aquí se observa el efecto de aplicar el filtro gaussiano de paso bajo sobre la radiografía de FPI de la figura C. con ruido de “sal y pimienta” para frecuencias de corte de 270 hz, 90 hz y 30 hz.	154

Figura CIV:	Elaboración propia: Aquí se muestra el efecto de aplicar el filtro ideal de paso alto sobre la radiografía de FPI de la figura C para frecuencias de corte de 9.9 hz, 11.1 hz y 13.3 hz. Las flechas de color cian señalan las zonas en las que se puede visualizar la fibrosis.	155
Figura CV:	Elaboración propia: Aquí se puede observar el efecto de aplicar el filtro Butterworth de paso alto de orden tres sobre la radiografía de FPI de la figura C para frecuencias de corte de 9.9 hz, 11.1 hz y 13.3 hz.	156
Figura CVI:	Elaboración propia: Aquí se muestra el efecto de aplicar el filtro gaussiano de paso alto sobre una radiografía de FPI para frecuencias de corte de 9.9 hz, 11.1 hz y 13.3 hz.	157
Figura CVII:	Imagen original: Aquí se muestra una radiografía de FPI con defecto de cristalización obtenida mediante la colaboración de un hospital nacional.	158
Figura CVIII:	Elaboración propia: Aquí se muestra la radiografía de FPI de la figura anterior suavizada mediante el método de difusión anisotrópica.	158
Figura CIX:	Elaboración propia: Aquí se puede observar el efecto de aplicar el filtro “skeleton” sobre una tomografía computarizada de FPI [88].	159
Figura CX:	Imagen original: Aquí se muestra una tomografía computarizada de un paciente con FPI [87].	160
Figura CXI:	Elaboración propia: Aquí se puede ver el realce de las estructuras de la fibrosis en la tomografía computarizada (TC) de la figura anterior con la técnica de wavelet de Haar discreta.	160
Figura CXII:	Elaboración propia: Aquí se muestra el realce de las estructuras de la fibrosis en la TC de la figura CX con la técnica de wavelet de Daubechies-4 discreta.	161
Figura CXIII:	Elaboración propia: Aquí se puede ver el realce de las estructuras de la fibrosis en la TC de la figura CX con la técnica de wavelet de Coiflets-2 discreta.	161
Figura CXIV:	Elaboración propia: Aquí se puede observar el realce de las estructuras de la fibrosis en la TC de la figura CX con la técnica de wavelet de Symlets-6 discreta.	162
Figura CXV:	Elaboración propia: Aquí se muestra el realce de las estructuras de la TC de la figura CX con la técnica de wavelet de Meyer discreta.	162
Figura CXVI:	Imagen original: Aquí se muestra una TC de un paciente con FPI [89].	163
Figura CXVII:	Elaboración propia: Aquí se muestra la TC de la figura CXVI segmentada en coeficientes de aproximación y de detalle con la wavelet de Haar.	163
Figura CXVIII:	Elaboración propia: Aquí se muestra la TC de FPI de la figura CXVI segmentada en coeficientes de aproximación y de detalle con la wavelet de Daubechies-4.	164
Figura CXIX:	Elaboración propia: Aquí se puede observar la TC de la figura CXVI segmentada en coeficientes de aproximación y de detalle con la wavelet de Coiflets-2.	165
Figura CXX:	Elaboración propia: Aquí se puede observar la TC de la figura CXVI segmentada en coeficientes de aproximación y de detalle con la wavelet de Symlets-6.	165

Figura CXXI:	Elaboración propia: Aquí se puede observar la TC de la figura CXVI segmentada en coeficientes de detalle con la wavelet de Symlets-6.	166
Figura CXXII:	Elaboración propia: Aquí se puede observar la TC de la figura CXVI segmentada en coeficientes de aproximación y de detalle con la wavelet de Meyer.	166
Figura CXXIII:	Elaboración propia: Aquí se observa la TC de la figura CXVI reconstruida con la wavelet de Haar luego de ser segmentada.	167
Figura CXXIV:	Elaboración propia: Aquí se puede ver la TC de la figura CXVI reconstruida con la wavelet de Daubechies-4 luego de ser segmentada.	167
Figura CXXV:	Elaboración propia: Aquí se muestra la TC de la figura CXVI reconstruida con la wavelet de Coiflets-2 luego de ser segmentada.	168
Figura CXXVI:	Elaboración propia: Aquí se puede observar la TC de la figura CXVI reconstruida con la wavelet de Symlets-6 luego de ser segmentada.	168
Figura CXXVII:	Elaboración propia: Aquí se ve la TC de la figura CXVI reconstruida con la wavelet de Meyer luego de ser segmentada.	169
Figura CXXVIII:	Elaboración propia: Aquí se puede ver los bordes detectados mediante la wavelet de Haar de la TC de la figura CXVI.	169
Figura CXXIX:	Elaboración propia: Aquí se puede ver los bordes detectados de la FPI mediante la wavelet de Daubechies-4 de la TC de la figura CXVI.	170
Figura CXXX:	Elaboración propia: Aquí se observa los bordes detectados de la FPI mediante la wavelet de Coiflets-2 de la TC de la figura CXVI.	170
Figura CXXXI:	Elaboración propia: Aquí se muestra los bordes detectados de la FPI mediante la wavelet de Symlets-6 de la TC de la figura CXVI.	171
Figura CXXXII:	Elaboración propia: Aquí se ven los bordes detectados de la FPI, mediante la wavelet de Meyer de la TC de la figura CXVI.	171
Figura CXXXIII:	Imagen original: Aquí se muestra una radiografía de un paciente con FPI obtenida mediante la colaboración de un hospital nacional, donde no se visualiza claramente la zona afectada por la FPI.	172
Figura CXXXIV:	Elaboración propia: Aquí se puede visualizar la radiografía procesada con el método de la difusión anisotrópica con paso de tiempo $\Delta t = 0,0015$ y parámetro $\kappa = 20$, donde las zonas afectadas por la FPI, las cuales están indicadas con flechas rojas, se pueden ver en forma de “panal de abejas”.	172
Figura CXXXV:	Gráfico de un mapeo de actores por rango de edad, IMC y manzana o región.	24
Figura CXXXVI:	Conjuntos de datos numéricos.	29
Figura CXXXVII:	Gráficas de los datos de las muestras.	29
Figura CXXXVIII:	Gráfica de una distribución de datos con oblicuidad positiva.	33
Figura CXXXIX:	Gráfica de una distribución de datos con oblicuidad negativa.	33
Figura CXL:	Gráfica de una distribución de datos simétrica.	33
Figura CXLI:	Tipos de gráficas de distribución según su curtosis.	34
Figura CXLII:	Gráfica de una distribución de datos según la regla empírica.	35
Figura CXLIII:	Gráfica del modelo predictivo.	37
Figura CXLIV:	Áreas bajo la gráfica de una distribución normal en las que $P(T > t_{bi})$.	41

Introducción

Cuando se manifiesta un evento desafortunado, como fue la pandemia del coronavirus (COVID-19), existe la necesidad de proteger la salud de las personas de cualquier efecto perjudicial que esta pandemia pueda generar en la sociedad y de predecir los efectos que pueda generar a nivel socioeconómico a lo largo del tiempo, ya sea durante la pandemia o post-pandemia. Debido a ello, la motivación de este trabajo reside en informar estadística y matemáticamente sobre el comportamiento de las características físicas en el efecto que el COVID-19 ha generado en las personas, y basado en ello, construir modelos predictivos para la toma de decisiones post-pandemia.

Algunos estudios, según Undurraga [1], demuestran que la enfermedad de Fibrosis Pulmonar ha aumentado en los últimos años debido a la contaminación ambiental; y según Torres-González [2], aumentó en 15 de cada 24 pacientes que padecieron SARS-CoV-2, la cual es una enfermedad difícil de controlar para el sistema inmune.

Según Esqueda [3], existen técnicas de procesamiento espacial de imágenes que permiten ampliar, comprimir, trasladar y rotar las imágenes. También existen técnicas de procesamiento en el dominio de la frecuencia para localizar determinadas características de una imagen y amplificarlas con una muy alta resolución; y técnicas de procesamiento básicas como la manipulación del contraste, el filtrado de una imagen y el realce de los bordes. Según Gonza [4], los errores más comunes en las imágenes son manchas o rasguños, seguidos por una mala angulación o posicionamiento de la cámara; los cuales pueden ser corregidos mediante la técnica de filtrado de la imagen y la aplicación de la transformada de Fourier.

Según Benegas [5], un error muy importante en las imágenes médicas de Fibrosis Pulmonar es la baja luminosidad y resolución de la zona afectada por esta enfermedad pulmonar. En una imagen de un paciente con Fibrosis Pulmonar, la zona afectada se muestra como un minúsculo panal de abeja. La identificación del panal puede ser dificultosa cuando los quistes que se encuentran cerca de la superficie del pulmón son pequeños y escasos, siendo a veces necesario suministrar al paciente sustancias invasivas para detectar mejor este indicador. Sin embargo, este procedimiento es dañino para el organismo de la persona si no se realiza con una dosis precisa. Los dos hallazgos diferenciales más típicos que imitan al panal son el enfisema paraseptal y las bronquiolectasias de tracción. Dada la dificultad en la interpretación del panal, la variabilidad interobservador es moderada.

Otro error que ocurre con menor frecuencia es que la imagen presente una luminosidad excesiva o muy baja; lo cual se corrige realizando operaciones aritméticas en las imágenes. Por lo tanto, se espera que al aplicar las técnicas de procesamiento de imágenes mencionadas a las radiografías de pacientes con Fibrosis Pulmonar Idiopática, los errores sean corregidos y se pueda brindar un diagnóstico preciso.

Según los datos recogidos mediante las encuestas realizadas con los formularios de Google y procesados a través de técnicas de análisis de datos, se clasificaron las variables objetivo y se optimizaron con series temporales. Así también se evaluaron los datos registrados de los efectos secundarios producidos en aquellos pacientes que sufrieron esta enfermedad y pasaron por la Unidad de Cuidados Intensivos (UCI), así como a familiares que tuvieron cercanía con los pacientes afectados. Una de las consecuencias fundamentales de esta pandemia es el incremento de los pacientes que fueron diagnosticados con esta rara enfermedad denominada Fibrosis Pulmonar Idiopática (FPI) y, según Fleetwood [6], sólo viven con la enfermedad entre tres a cinco años; por ello, aún sigue en investigación.

El protocolo médico para el diagnóstico de esta enfermedad es mediante imágenes tomográficas y resonancias magnéticas, pero en muchos casos hubo malas prácticas del procedimiento causadas por errores en las imágenes obtenidas. Generalmente, los errores fueron de posicionamiento de la cámara, almacenamiento del archivo de la imagen y baja densidad en la resolución de la zona afectada. En ese sentido, en el presente trabajo nos centramos en la modelación matemática y simulación numérica del procesamiento de imágenes para el mejoramiento del diagnóstico de la Fibrosis Pulmonar Idiopática (FPI) mediante la investigación de las imágenes obtenidas de esta enfermedad, con la finalidad de contribuir con esta técnica no invasiva y facilitar la detección de la verdadera zona afectada por la FPI. La aplicación de esta metodología es posible gracias a la construcción de modelos matemáticos basados en Ecuaciones Diferenciales Parciales Parabólicas No Lineales, Transformada Rápida de Fourier, Transformada Discreta de Coseno y Transformada Discreta de Wavelet.

Para visualizar los resultados, se implementa un módulo computacional realizado con el software estadístico JMP y con códigos de la plataforma MATLAB.

El contenido de este trabajo está organizado de la siguiente manera:

En el **Capítulo 1**, se consideran algunos conceptos generales que describen la enfermedad de la Fibrosis Pulmonar Idiopática, así como los errores que existen en las imágenes médicas, y se plantea como hipótesis la aplicación de técnicas de procesamiento de imágenes para mejorar las imágenes radiográficas de FPI. Así mismo, se mencionan los diferentes modelos matemáticos que se pueden utilizar como técnicas no invasivas para el mejoramiento de las imágenes radiográficas de FPI. Luego, se mencionan los tipos de Fibrosis Pulmonar, las dificultades en el diagnóstico y los problemas que resultan en las imágenes médicas obtenidas, tales como posicionamiento, almacenamiento y densidad. Después, se formulan matemáticamente las técnicas de procesamiento existentes para el tratamiento y mejoramiento de estas imágenes. Más adelante, se realiza el planteamiento del problema del mejoramiento de las imágenes de FPI; para ello, se realiza la gestión de colaboración con un centro médico de diagnóstico de FPI basado en imágenes médicas para la obtención de imágenes radiográficas de FPI. En este capítulo, también se construye una base de datos para obtener información importante sobre los antecedentes e incremento de esta enfermedad post-COVID-19.

En el **Capítulo 2**, se considera el fundamento matemático aplicado al procesamiento de imágenes tales como: Transformada de Fourier, Transformada de Wavelet, espacios L^1 , los espacios de Hilbert L^2_ω , Ecuaciones Diferenciales Parciales Parabólicas No Lineales específicamente para la definición de los filtros de difusión. Así mismo, en este capítulo, se presenta un esquema conceptual donde se resume el contenido del proceso de investigación.

En el **Capítulo 3**, se desarrolla la metodología de las técnicas del procesamiento de imágenes (TPI) basada en la aplicación de la teoría mencionada anteriormente. Las TPI que se han desarrollado, específicamente para el mejoramiento de las imágenes médicas de FPI, son las siguientes: Calibración (mejora el error de exposición de la cámara), Amplificación (eleva la escala de la imagen original), Compresión (disminuye la cantidad de bytes de almacenamiento de la imagen original y sólo almacena los datos de los puntos objetivo), Filtrado (eliminación de ruidos no deseados) y Resaltamiento Virtual (ubica con mayor precisión la zona afectada por la FPI).

En el **Capítulo 4**, se consideran los resultados numéricos de la aplicación de las TPI a las imágenes radiográficas de la FPI mediante la visualización gráfica de las imágenes originales y las imágenes mejoradas con la metodología descrita anteriormente, para lo cual se ha realizado la implementación de un módulo computacional de los algoritmos en la plata-

forma de MATLAB. Finalmente, se concluye con los objetivos trazados de la tesis; es decir, se logra visualizar el mejoramiento de las imágenes médicas con la verdadera zona afectada por FPI, mostrando la eficacia y eficiencia de los modelos matemáticos desarrollados y aplicados en las técnicas de procesamiento de imágenes.

I PRELIMINARES

A. Consideraciones generales sobre el trabajo de investigación

1). Definiciones generales relacionadas a la Fibrosis Pulmonar

Esta sección contiene dos grupos de definiciones, las cuales serán empleadas en el texto para brindar al lector el conocimiento necesario para que pueda comprender diversos aspectos importantes sobre la Fibrosis Pulmonar.

1. Anatomía y función respiratoria

- a) **Alvéolos pulmonares:** Pequeños sacos de aire que se encuentran en los pulmones donde se realiza el intercambio de oxígeno.
- b) **Pleura:** Es una membrana compuesta por dos finas capas de células de origen mesodérmico que recubre el exterior de los pulmones y reviste el interior de la cavidad torácica.
- c) **Bronquios:** Grandes conductos de aire que van de la tráquea a los pulmones. Se generan a partir de un conducto en que se bifurca la tráquea y que se va subdividiendo gradualmente en ramificaciones más finas.
- d) **Bronquiolos:** Son los más finos y diminutos conductos de aire en que se ramifican los bronquios.

2. Patologías y medicamentos

- a) **Bronquiectasias:** Es una dilatación anormal e irreversible del árbol bronquial¹ en la que las vías respiratorias de los pulmones quedan permanentemente dañadas y ensanchadas debido a una infección persistente. Los síntomas son infecciones frecuentes y problemas respiratorios, los cuales son generados por la acumulación de exceso de moco y bacterias.
- b) **Neumonía intersticial usual (NIU):** Constituye un diagnóstico radiológico derivado de los hallazgos de la anatomía patológica. Se trata de elementos de la fibrosis situados debajo de la pleura en la base de las formaciones orgánicas que forman una red con forma de panal, presentan bronquiectasias por tracción e impiden el flujo de luz en una proporción apreciable.
- c) **Medicamentos corticosteroides:** Son un conjunto de medicamentos que se utilizan para tratar diferentes problemas de salud, como enfermedades intestinales inflamatorias y asma. Funcionan reduciendo la inflamación en el cuerpo y pueden ser muy útiles para aliviar síntomas y mejorar la calidad de vida de las personas que los necesitan.

2). Fibrosis pulmonar idiopática

En esta sección, se describe la fibrosis pulmonar idiopática para que el lector conozca el efecto que tiene esta patología en la población y las características que la diferencian de otros tipos de fibrosis pulmonar; lo cual será útil para que comprenda la motivación de este trabajo y el planteamiento del problema, respectivamente.

Definición: La fibrosis pulmonar idiopática es una afección médica crónica caracterizada por una disminución gradual y constante de la función pulmonar que causa cicatrización

¹Red de alvéolos, bronquiolos y bronquios.

progresiva del tejido pulmonar. Esta cicatrización puede ser desencadenada por infecciones virales, bacterianas o fúngicas, lo que provoca una inflamación fuerte en los pulmones. Detectar esta enfermedad puede ser difícil en los exámenes médicos regulares, por lo que se utilizan pruebas de imágenes para ayudar al médico a diagnosticarla correctamente. Esta enfermedad tiende a afectar principalmente a hombres mayores, y su gravedad puede variar dependiendo de la edad de la persona afectada [7].

Causas: La fibrosis pulmonar idiopática es una enfermedad donde los pulmones desarrollan cicatrices de forma excesiva, causando dificultad para respirar. Aunque la causa exacta no se conoce, sabemos que ciertas células en los pulmones se vuelven demasiado activas, lo que desencadena este proceso de cicatrización. Estas células producen sustancias que hacen que otras células se acumulen y produzcan más tejido cicatricial de lo normal. Como resultado, los pulmones pierden su estructura normal y se vuelven más rígidos, lo que dificulta la respiración.

Datos demográficos: Si bien no se ha determinado con exactitud la incidencia de esta enfermedad, según Undurraga [1], diversos estudios indican que entre 6 a 17 personas de cada 100 mil habitantes la contraen. Sin embargo, hay estudios que muestran que la incidencia ha ido aumentando durante los últimos años; por ejemplo, un estudio reciente realizado en Estados Unidos indica que entre 14 a 43 personas de cada 100 mil contraen esta enfermedad. Además, entre 67 y 271 de cada 100 mil personas de edad no menor a 75 años contraen la enfermedad. La mortalidad por FPI ha aumentado en la última década; en Argentina se realizó un estudio que indica que la tasa de mortalidad aumentó de 3.31 a 5.87 por cada 100 mil habitantes. Además, según Coni [8], un estudio realizado durante los años 2014 y 2015 a personas no menores de 40 años muestra que la tasa de mortalidad es menor a 4 muertos por cada 100 mil habitantes en las personas menores de 65 años; mientras que esta tasa en los grupos de personas con edades entre 65 y 69 años, 70 y 74 años, y de 75 años a más es de 6.56, 11.12 y 25.43 muertos por cada 100 mil habitantes respectivamente. En el último grupo, en el caso de los varones, la tasa es de 30.88 muertos mientras que en el caso de las mujeres es de 22.34 muertos por cada 100 mil habitantes.

Factores de riesgo: Los factores que aumentan el riesgo de contraer la FPI, aún con poca evidencia al respecto, son la exposición al polvo de metales duros, madera, carbón o granos, el uso de harina de sílice, el contacto con fibras de asbesto, la presencia de excremento de aves y otros animales, las actividades agrícolas, y principalmente el consumo de tabaco.

Genética: Alrededor del 5 % de personas que se enferman de fibrosis pulmonar idiopática tienen más de dos familiares que han tenido la misma enfermedad. En este grupo de personas la enfermedad se suele manifestar en edades más tempranas. Estudios genómicos han sugerido que el gen *ELMOD2*, cuya función biológica es desconocida, localizado en el cromosoma 4q31, podría ser un gen de susceptibilidad para la FPI familiar.

Diagnóstico: Para diagnosticar la fibrosis pulmonar idiopática (FPI), es necesario descartar otras causas conocidas de problemas pulmonares que podrían parecerse a la FPI en radiografías y muestras de tejido. Estas causas incluyen exposición a ciertos materiales, enfermedades del sistema inmunológico y efectos secundarios de ciertos medicamentos. Si los pacientes no se han sometido a una cirugía para tomar muestras de tejido pulmonar, el diagnóstico se basará en imágenes detalladas de sus pulmones, especialmente en una tomografía computarizada de alta resolución. En esta imagen, buscamos un patrón característico que se llama “panal de abejas”. Este patrón aparece como áreas oscuras rodeadas por tejido pulmonar con aspecto de panal. Estas áreas tienen un tamaño típico de entre 3 y 10 milímetros y pueden ser más grandes en casos raros, pero siempre con bordes bien definidos. Este patrón, junto con otros cambios en las imágenes, nos ayuda a confirmar el

diagnóstico de FPI.

Progresión de la enfermedad: A medida que la enfermedad avanza, los síntomas respiratorios empeoran, la capacidad de los pulmones para funcionar correctamente disminuye y las imágenes de tomografía computarizada muestran un progreso en la fibrosis pulmonar. En algunos casos, la enfermedad puede llevar a la muerte. Para predecir quiénes tienen más riesgo de morir debido a esta enfermedad, los médicos suelen fijarse en dos cosas principalmente: la capacidad de los pulmones para transferir oxígeno y la gravedad de la dificultad para respirar, especialmente cómo esta empeora con el tiempo. Sin embargo, es complicado determinar exactamente cuáles son los principales factores de riesgo para la muerte, ya que la enfermedad puede tener muchas causas diferentes y la tasa de mortalidad puede variar de una persona a otra y a lo largo del tiempo.

Tratamiento: Actualmente se realizan terapias que intentan detener el proceso de fibrosis progresiva, aliviar los síntomas de la enfermedad y controlar las complicaciones que se puedan generar. Si bien en 1999 fue publicado el primer consenso internacional de diagnóstico y tratamiento de esta enfermedad, recién en 2004 se efectuó un estudio de terapia de FPI en el que los participantes se dividieron aleatoriamente en grupos de tratamiento separados. En el año 2011, las Sociedades de Enfermedades Respiratorias de varios continentes publicaron las recomendaciones terapéuticas establecidas en base a la evidencia para diagnóstico y tratamiento de la FPI. Se recomendó que los pacientes con FPI no reciban un tratamiento con monoterapia corticoesteroidal² ni con colchicina³. Además, se recomendó evitar la combinación de prednisona⁴, azatioprina⁵ y N-acetilcisteína⁶; pero también se ubicó a un grupo de pacientes para los cuales sería una alternativa beneficiosa. Algunas alternativas para el tratamiento de la FPI son las siguientes:

- **Suspensión del tabaco:** Es indispensable que el paciente deje de consumir tabaco cuando se le realiza el diagnóstico ya que la FPI es más frecuente en fumadores debido a que existen diversas maneras mediante las que el cigarrillo podría interferir en las heridas diminutas del epitelio respiratorio⁷.
- **Oxigenoterapia:** Muchos pacientes suelen presentar hipoxemia⁸ al hacer ejercicio. La saturación de oxígeno mide cuánta hemoglobina hay en la sangre; la cual está en el rango de 95 % a 99 % en humanos que se encuentren sanos. Hay pacientes que se encuentran en etapas relativamente avanzadas de la enfermedad y presentan una saturación de oxígeno poco alterada, pero disminuye considerablemente a penas el paciente realiza un poco de ejercicio. Cuando esto sucede, se le recomienda al paciente recibir oxigenoterapia. Si bien en los textos sobre medicina hay pocos datos que avalen realizar esta terapia e incluso se ha realizado un estudio retrospectivo que sostiene que no se generan ventajas al aplicarla, muchos médicos comentaron que cuando sus pacientes recibieron oxigenoterapia, mejoró su capacidad para hacer ejercicio y su calidad de vida.

²Es un tratamiento en el que se le receta al paciente únicamente medicamentos corticosteroides para controlar y aliviar su enfermedad.

³Es un medicamento que reduce la inflamación y la hinchazón; por lo que puede aliviar el dolor. Sin embargo, su consumo puede ser perjudicial en personas con problemas renales o hepáticos, o si se toma en exceso.

⁴Es un medicamento que se usa para reducir la inflamación y la respuesta inmunitaria del cuerpo.

⁵Es un medicamento que se utiliza para el tratamiento de algunas afecciones autoinmunitarias; es decir, trata aquellas enfermedades que generan que el sistema natural de defensa del cuerpo se ataque a sí mismo.

⁶Es un antioxidante que también podría servir como antiinflamatorio y para la prevención del cáncer.

⁷Es una mucosa que se encuentra en la mayor parte de las vías respiratorias cuya función es humedecerlas y protegerlas.

⁸Es una enfermedad que afecta directamente la respiración y circulación correcta de la sangre y se desarrolla cuando el nivel de la presión parcial de oxígeno en la sangre arterial se encuentra por debajo de 60 mmHg.

- **Rehabilitación:** El médico estimulará al paciente a que mantenga un plan de ejercicios simples y camine con oxígeno para mitigar las condiciones de atrofia muscular que se manifiestan en etapas más avanzadas de la enfermedad en los pacientes. Si existe disponibilidad de kinesiólogos y el paciente se encuentra en una buena posición económica, pueden acudir a programas de rehabilitación complejos que incluyen condiciones aeróbicas, ejercicios de fuerza y flexibilidad, charlas educativas, intervenciones nutricionales y soporte psicosocial. Gracias a estos programas, muchos pacientes mejoraron su capacidad de caminata y su calidad de vida.
- **Trasplante pulmonar:** Según los datos obtenidos a nivel mundial y principalmente en latinoamérica, entre el 50% al 60% de los casos de personas con FPI que recibieron un trasplante pulmonar viven alrededor de cinco años más. Sin embargo, este procedimiento es costoso y además se requiere que el paciente se mantenga cerca del establecimiento donde se piensa realizar este trasplante, antes y después de la operación por plazos no menores a un año. Dado que este procedimiento se realiza en pocos centros, es muy importante que el paciente tenga conocimiento de esta información para no realice viajes ni gastos en vano.

En el caso de las siguientes complicaciones y comorbilidades⁹ se recomiendan los tratamientos respectivos:

- **Exacerbación aguda:** Se recomienda el tratamiento de soporte con corrección de la hipoxemia, y solamente si es necesario ventilación mecánica no invasiva (VMNI)¹⁰ ya que se recomienda débilmente¹¹ no usar ventilación mecánica para la mayoría de pacientes; y la administración de altas dosis de corticoides (administración rápida y controlada de metilprednisolona¹² de 500 mg a 1,000 mg al día durante 3 días, seguidos de dosis altas de prednisona (0,5 mg por el peso del paciente en kilogramos al día), con recomendación débil a favor.
- **Hipertensión pulmonar:** Antes de realizar un diagnóstico, es necesario descartar otras comorbilidades relacionadas a la FPI como enfermedad cardiaca, enfisema pulmonar, enfermedad tromboembólica venosa¹³ y síndrome de apnea-hipopnea del sueño (SAHS)¹⁴. Cuando los pacientes tienen hipertensión pulmonar asociada a la FPI, deben recibir oxigenoterapia domiciliaria si presentan hipoxemia crónica y tener la posibilidad de recibir un trasplante pulmonar siempre y cuando no hayan contraindicaciones por edad o comorbilidades.
- **Enfisema pulmonar:** Si bien no se ha establecido un tratamiento específico para el enfisema relacionado a la FPI, se recomienda a los pacientes reducir paulatinamente

⁹Son enfermedades o trastornos que se manifiestan en una persona que ya tiene una enfermedad y están relacionados a esta.

¹⁰Es una terapia de soporte respiratorio en la que se utilizan dispositivos que no son introducidos en el aparato respiratorio.

¹¹Se dice que una recomendación es débil cuando los beneficios que se obtienen al seguir una recomendación no tienen una magnitud mucho mayor que la de los riesgos.

¹²Es un corticosteroide que actúa de manera similar a una hormona natural producida por las glándulas suprarrenales. Generalmente se usa cuando estas glándulas no producen suficientes hormonas. Alivia la inflamación y se usa para tratar ciertas formas de artritis y trastornos de la piel.

¹³Es una enfermedad que se produce debido a un proceso caracterizado por la coagulación de la sangre en el interior de las venas (trombosis), que puede crecer o fragmentarse, e interrumpir la circulación normal de la sangre y causando diversas alteraciones.

¹⁴Es un cuadro caracterizado por un estado de somnolencia durante varios intervalos del día, trastornos cardiorrespiratorios, cognitivos, metabólicos o inflamatorios secundarios a episodios repetidos de obstrucción de la vía respiratoria superior durante el sueño. Estos episodios provocan despertares transitorios repetidos que ocasionan descensos en la saturación de oxígeno y posibles alteraciones cardiovasculares a mediano o largo plazo.

el hábito de consumir tabaco, vacunación antigripal y antineumocócica, rehabilitación pulmonar, oxigenoterapia domiciliaria en caso de insuficiencia respiratoria y la valoración de trasplante pulmonar.

- **Cáncer broncogénico¹⁵:** Esta comorbilidad se puede tratar con radioterapia, radioterapia corporal estereotáctica, ablación por radiofrecuencia, braquiterapia intraoperatoria¹⁶ con ^{125}I (isótopo de yodo con masa atómica de 125 umas), quimioterapia y principalmente cirugía. Sin embargo, alteraciones funcionales que contraindican algunos tratamientos como la cirugía y la radioterapia presentan alteraciones funcionales y mala tolerancia.
- **Reflujo gastroesofágico:** Se sugiere el uso regular del tratamiento antiácido en los pacientes con FPI. Se deberán adoptar medidas higiénico-dietéticas que conlleven a reducir la presión intraabdominal. Si estas medidas no generan beneficios en el paciente, se recomienda el tratamiento quirúrgico para resolver el problema.
- **Síndrome de apnea-hipoapnea del sueño (SAHS):** No hay ninguna recomendación particular para tratar el SAHS en pacientes con FPI. Sin embargo, el tratamiento médico más eficaz es la aplicación de presión positiva en la vía aérea (CPAP) que tiene escasos y leves efectos secundarios y suele ser bien tolerado. Una vez adaptado, el paciente debe realizarse un ajuste de la presión mediante polisomnografía¹⁷ o con las autoCPAP¹⁸, capaces de variar la presión hasta corregir las respiraciones. Además, se recomienda reducir paulatinamente el consumo de alcohol y tabaco, y evitar dormir en la posición de decúbito supino¹⁹ debido a que estos factores agravan el SAHS.

3). Introducción al procesamiento de imágenes

En esta sección, se explicarán conceptos básicos del procesamiento de imágenes, los cuales serán útiles para que el lector comprenda las técnicas del procesamiento.

3).1. Conceptos generales

Una imagen digitalizada es una representación de una imagen en forma de datos binarios que pueden ser procesados por una computadora para generar dicha imagen. Los componentes principales de una imagen digitalizada, según Esqueda [3], son:

- **Pixel:** Es el elemento básico de una imagen digitalizada que tiene un vector asociado de tres componentes que representa su color e intensidad.
- **Resolución:** Se refiere al número de pixeles en la matriz. Generalmente, se expresa como $M \times N$, donde M es el número de pixeles de alto y N es el número de pixeles de ancho.

¹⁵Cáncer cuyo desarrollo inicia en el tejido que reviste o recubre las vías respiratorias de los pulmones; incluye el cáncer de pulmón de células pequeñas y el de células no pequeñas.

¹⁶Es una terapia que consiste en emitir una dosis concentrada de radiación sobre la zona en la que se ha extirpado un tumor gracias a la implantación de catéteres de forma mínimamente invasiva.

¹⁷Es un estudio médico utilizado para diagnosticar trastornos del sueño. Se trata de una prueba exhaustiva que registra varias funciones corporales mientras una persona duerme.

¹⁸Presión positiva continua en la vía aérea.

¹⁹Posición anatómica del cuerpo humano que se caracteriza por encontrarse acostado boca arriba, con el cuello en posición derecha, la mirada dirigida al céñit, los brazos extendidos junto al tronco y las piernas también extendidas con los pies en flexión neutra.

- **Profundidad de color:** Se refiere a la cantidad de bits se utilizan para representar el color de cada pixel. Un bit es la menor unidad de información que una computadora puede almacenar y se representa con un dígito del sistema de numeración binario; por lo que puede adoptar el valor de “0” (cero) o “1” (uno). Normalmente, se usan ocho bits para representar cada componente del color de un pixel; por lo que en total se suelen usar 24 bits por cada pixel.

Una imagen en color se puede representar como tres matrices R , G y B de tamaño $M \times N$, donde cada matriz corresponde a los canales de color rojo, verde y azul respectivamente, cuyas longitudes de onda son 665 nm , 550 nm y 470 nm respectivamente. El valor de cada pixel se representa como una tripla $R(i, j), G(i, j), B(i, j)$; donde $(i, j) \in \{1, \dots, M\} \times \{1, \dots, N\}$. Por lo tanto, las matrices R , G y B se representan de la siguiente manera:

$$R = \begin{pmatrix} R(1, 1) & R(1, 2) & \cdots & R(1, N) \\ R(2, 1) & R(2, 2) & \cdots & R(2, N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R(M, 1) & R(M, 2) & \cdots & R(M, N) \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$G = \begin{pmatrix} G(1, 1) & G(1, 2) & \cdots & G(1, N) \\ G(2, 1) & G(2, 2) & \cdots & G(2, N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G(M, 1) & G(M, 2) & \cdots & G(M, N) \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$B = \begin{pmatrix} B(1, 1) & B(1, 2) & \cdots & B(1, N) \\ B(2, 1) & B(2, 2) & \cdots & B(2, N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B(M, 1) & B(M, 2) & \cdots & B(M, N) \end{pmatrix} \quad (3)$$

Si n representa el número de bits por canal de color, cada componente puede tomar valores que sean números enteros que se encuentren en el intervalo $[0, 2^n - 1]$. Debido a que las imágenes tienden a usar ocho bits para cada canal de color de cada pixel, las componentes pueden tomar valores enteros entre el 0 y el 255. Esto se debe a que como cada bit puede tomar únicamente dos valores (“0” y “1”), existen 2^8 posibles combinaciones de bits para cada canal de color de cada pixel. Por lo tanto, es posible representar el nivel de intensidad de cada canal de color en una escala de 256 valores. En la tabla 1 se muestran algunos ejemplos:

TABLA I

Tabla de colores y sus respectivos valores numéricos *RGB*.

Nombre	Color	R	G	B
Rojo		255	0	0
Anaranjado		255	128	0
Ámbar		255	191	0
Amarillo		255	255	0
Verde limón		191	255	0
Verde		0	255	0
Aguamarina		0	255	191
Cian		0	255	255
Turquesa		0	191	255
Azul vívido		0	128	255
Azul		0	0	255
Índigo		64	0	255
Violeta		128	0	255
Púrpura eléctrica		191	0	255
Magenta		255	0	255
Fucsia		255	0	191
Rosa		255	0	128
Escarlata		255	0	64
Blanco		255	255	255
Gris		128	128	128
Negro		0	0	0
Guinda		149	47	87
Marrón		128	64	0
Mostaza		191	159	0
Oliva		128	128	0
Verde bosque		33	139	33
Celeste		75	199	255
Arándano		111	133	251
Lila		191	128	255
Rosado		255	128	191

Brillo: Cualidad de una imagen digitalizada que permite percibir los distintos niveles de intensidad luminosa de las zonas de la imagen.

Contraste: Es una medida del grado de diferencia de luminosidad entre las zonas más luminosas y menos luminosas de una imagen digitalizada.

Luminosidad: Cualidad de un color que mide su brillo. La medida de luminosidad de un color se obtiene del promedio de las intensidades luminosas de la tripleta de ondas *RGB*; por lo que está dada por la siguiente ecuación:

$$\mu = \frac{R + G + B}{3} \quad (4)$$

Saturación: Cualidad de un color que mide la impresión de vividez o pureza que genera. La saturación de un color se obtiene de la desviación estándar de los valores de las variables *R*, *G* y *B*; por lo que está dada por la siguiente ecuación:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(R - \mu)^2 + (G - \mu)^2 + (B - \mu)^2}{3}} \quad (5)$$

Tono, matiz o croma: Cualidad de un color que indica el color de máxima saturación, resultante de la superposición de no más de dos ondas de la tripla *RGB* al que más se asemeja. Si el color de un pixel posee saturación mínima, es decir, se encuentra en una escala de grises entre el blanco y el negro, se mantiene igual al cambiar el tono de la imagen o zona en la que se encuentra.

Eje de color: Es una escala discreta y gradual de colores que representan las intensidades de diversas cualidades de un elemento o lugar como la temperatura, la presión o la velocidad, nivel de acidez, magnitud de un movimiento sísmico, altura sobre el nivel del mar, índice de rayos ultravioleta (UV), humedad, concentración de dióxido de carbono (CO_2), etc. En la siguiente figura, se puede visualizar un eje de color y el significado de cada uno de sus colores:

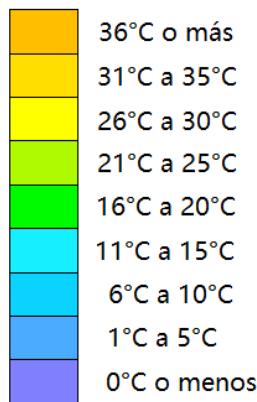


Figura I: Eje de color de rangos de temperatura.

Mapa de color: Es una matriz cuyas filas contienen los valores de las variables *R*, *G* y *B* respectivamente correspondientes de cada color de un eje de color de forma ordenada. Se asocian valores naturales y consecutivos comenzando del “1” a dichos colores siguiendo el orden de la escala del eje de manera que la primera fila corresponda al mínimo valor del eje de color y la última al máximo valor. El mapa de color asociado al eje de color del ejemplo anterior sería el siguiente:

$$\begin{pmatrix} 128 & 128 & 255 \\ 75 & 171 & 255 \\ 11 & 211 & 255 \\ 22 & 239 & 255 \\ 0 & 250 & 0 \\ 175 & 250 & 0 \\ 255 & 255 & 0 \\ 255 & 222 & 0 \\ 255 & 191 & 0 \end{pmatrix}$$

Ráster: Es un modelo de datos espaciales expresados mediante pixeles o zonas de colores cuya configuración *RGB* pertenece a un mapa de color. Teniendo en cuenta el mapa de color definido en el ejemplo anterior, el ráster que represente las temperaturas en las distintas zonas del Perú un día de septiembre a las 11 A.M. puede ser el que se muestra en la siguiente figura:

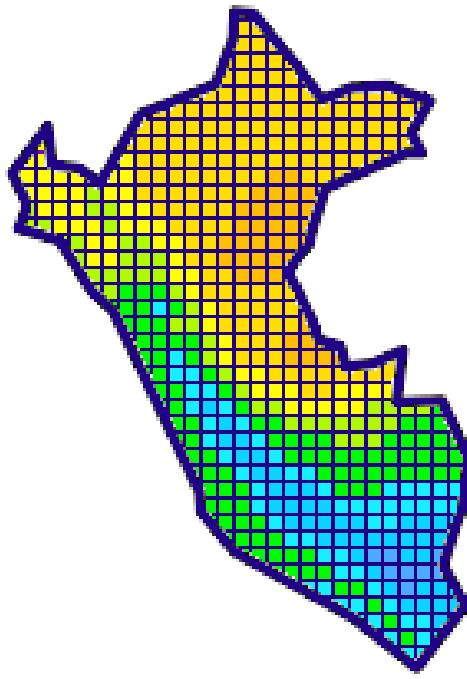


Figura II: Ráster de temperaturas del Perú.

Espacio RGB : Los colores pueden ser representados mediante coordenadas en el espacio \mathbb{R}^3 si reemplazamos las variables x, y y z por las variables R, G y B respectivamente en el sistema de coordenadas. Por lo tanto, si definimos por X a la variable que represente al color, tendríamos que:

$$X = \hat{R}\hat{i} + \hat{G}\hat{j} + \hat{B}\hat{k} \quad (6)$$

En la siguiente figura se muestra la ubicación en el espacio \mathbb{R}^3 de algunos de los colores listados en la tabla I:

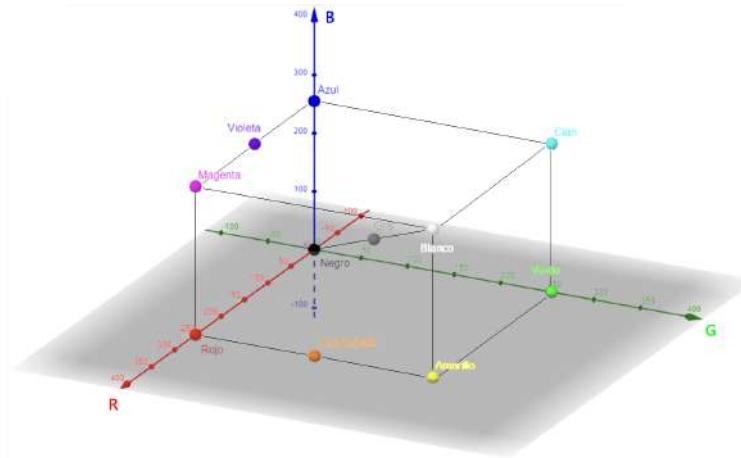


Figura III: Ubicación de colores en el espacio RGB .

Histograma de una imagen: Es un gráfico de barras que compara los colores de una imagen luego de establecer una determinada cantidad de conjuntos ordenados de colores que sean parte de la imagen y teniendo en cuenta las cantidades de píxeles que emiten colores pertenecientes a dichos conjuntos. Generalmente, los histogramas de una imagen representan las cantidades de píxeles que emiten colores de determinados nive-

les de luminosidad. Para ello, las imágenes son convertidas a blanco y negro, y se definen rangos de tonalidades de gris. Es decir, si se tiene una imagen de m y n filas y columnas de pixeles respectivamente, definimos una hipermatriz $X_{m \times n \times 3}$ cuyos vectores X_{ij} , $(i, j) \in \{1, 2, \dots, m\} \times \{1, 2, \dots, n\}$ contengan la configuración *RGB* del color irradiado por el pixel que se encuentra en la i -ésima fila y la j -ésima columna de la imagen; de manera que para cada $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ y cada $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ definimos por μ_{ij} al nivel de luminosidad del color del pixel en la i -ésima fila y la j -ésima columna de la imagen y los vectores Y_{ij} mediante la siguiente ecuación:

$$Y_{ij} = \mu_{ij}(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) = \frac{X_{ij1} + X_{ij2} + X_{ij3}}{3} (\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) \quad (7)$$

Finalmente, definimos la hipermatriz $Y_{m \times n \times 3} = [Y_{ij}]$ cuyos vectores Y_{ij} contienen la configuración *RGB* del color irradiado por el pixel que se encuentra en la i -ésima fila y la j -ésima columna de la imagen en blanco y negro. Si asumimos que cada cuadro del ráster de la figura II es un pixel, dado que dichos colores pertenecen a un eje de color, se tienen conjuntos unitarios ordenados de colores. Por lo tanto, sería posible realizar un histograma de dicho ráster; el cual sería el siguiente:

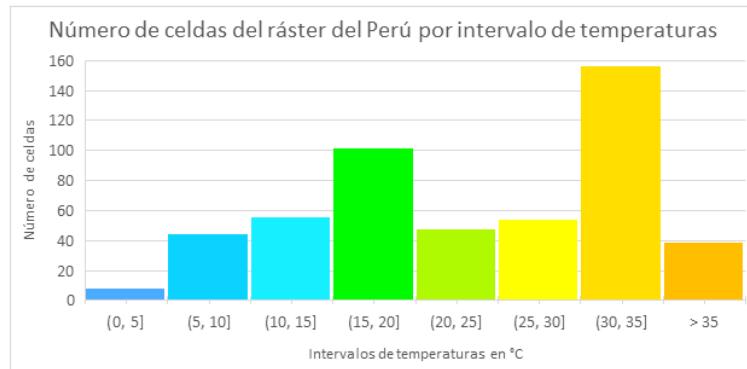


Figura IV: Histograma del ráster de temperaturas del Perú.

3).2. Relaciones entre pixeles

Si colocamos una imagen digital en un plano cartesiano y denotamos por p a un pixel y por (x_p, y_p) a sus respectivas coordenadas, dicho pixel tendrá dos vecinos horizontales y dos vecinos verticales de coordenadas $(x_p - 1, y_p); (x_p + 1, y_p); (x_p, y_p - 1);$ y $(x_p, y_p + 1)$. Estos pixeles forman un conjunto llamado vecindad 4 de p (o 4 vecinos de p), denotado por $N_4(p)$, según Esqueda [3]. Evidentemente, todos los elementos de este conjunto son aquellos pixeles cuya distancia al pixel p es igual a uno. Si el pixel p se encuentra en el borde de la imagen, algunos elementos del conjunto $N_4(p)$ quedarán fuera de la imagen. La ubicación del pixel p y los vecinos mencionados se muestra en la siguiente figura:

	$(x_p, y_p + 1)$	
$(x_p - 1, y_p)$	(x_p, y_p)	$(x_p + 1, y_p)$
	$(x_p, y_p - 1)$	

Figura V: Ubicación del pixel p y sus vecinos del conjunto $N_4(p)$ en coordenadas cartesianas.

Además, p tiene otros cuatro vecinos diagonales cuyas coordenadas son $(x_p - 1, y_p - 1)$; $(x_p + 1, y_p - 1)$; $(x_p - 1, y_p + 1)$; y $(x_p + 1, y_p + 1)$. Estos pixeles forman un conjunto denotado por $N_D(p)$. La vecindad 8 de p contiene los ocho pixeles vecinos de p y se denota por $N_8(p)$. Este conjunto se obtiene mediante la siguiente suma de conjuntos:

$$N_8(p) = N_4(p) + N_D(p) \quad (8)$$

La ubicación del pixel p y los vecinos diagonales mencionados se muestra en la siguiente figura:

$(x_p - 1, y_p + 1)$		$(x_p + 1, y_p + 1)$
	(x_p, y_p)	
$(x_p - 1, y_p - 1)$		$(x_p + 1, y_p - 1)$

Figura VI: Ubicación del pixel p y sus vecinos del conjunto $N_D(p)$ en coordenadas cartesianas.

Conectividad: Se dice que dos pixeles p_1 y p_2 están conectados si y sólo si $p_2 \in N_8(p_1)$ y $p_1 \in N_8(p_2)$, y además se cumple que:

$$\sqrt{(R_{p_1} - R_{p_2})^2 + (G_{p_1} - G_{p_2})^2 + (B_{p_1} - B_{p_2})^2} < 8\sqrt{3} \quad (9)$$

Donde R_{p_1}, G_{p_1} y B_{p_1} , y R_{p_2}, G_{p_2} y B_{p_2} son los valores de las coordenadas de los colores de los pixeles p_1 y p_2 respectivamente en el espacio *RGB*.

Si colocamos la imagen de la figura VII en el primer cuadrante de un plano cartesiano, de manera que el pixel que se encuentra en el punto de la esquina superior izquierda de la imagen se encuentre en el origen y los ejes X e Y recorran de dicho punto al punto de la

esquina superior derecha y al punto de la esquina inferior izquierda respectivamente, y que la longitud de los lados de los pixeles sea equivalente a la distancia entre los valores de los ejes de coordenadas; dado que su ancho y altura tienen 511 y 454 pixeles respectivamente, los pixeles $p_1 = (229, 222)$ y $p_2 = (230, 222)$ son conexos ya que $|p_1 - p_2| = 1$ y por lo tanto, $p_2 \in N_8(p_1)$ y $p_1 \in N_8(p_2)$; y además de eso, se cumple que:

$$\sqrt{(R_{p_1} - R_{p_2})^2 + (G_{p_1} - G_{p_2})^2 + (B_{p_1} - B_{p_2})^2} = \sqrt{6^2 + 5^2 + 5^2} = 4\sqrt{5} < 8\sqrt{3}$$

Debido a que: $R_{p_1} = 255$, $G_{p_1} = 215$, $B_{p_1} = 26$, $R_{p_2} = 249$, $G_{p_2} = 210$ y $B_{p_2} = 21$.

Mientras que en los pixeles $p_3 = (238, 168)$ y $p_4 = (238, 169)$, se cumple que $|p_3 - p_4| = 1$; y por lo tanto, $p_4 \in N_8(p_3)$ y $p_3 \in N_8(p_4)$. Sin embargo, se tiene que:

$$\sqrt{(R_{p_3} - R_{p_4})^2 + (G_{p_3} - G_{p_4})^2 + (B_{p_3} - B_{p_4})^2} = \sqrt{119^2 + 126^2 + 44^2} = \sqrt{31973} > 8\sqrt{3}$$

Debido a que: $R_{p_1} = 239$, $G_{p_1} = 207$, $B_{p_1} = 67$, $R_{p_2} = 120$, $G_{p_2} = 81$ y $B_{p_2} = 23$.

Por lo tanto, los pixeles p_3 y p_4 son vecinos pero no están conectados.



Figura VII: Imagen que contiene los pixeles mencionados en el ejemplo anterior.

Distancia: Dados tres pixeles $p = (p_1, p_2)$, $q = (q_1, q_2)$ y $r = (r_1, r_2)$, es posible definir una función distancia d si y sólo si cumple las siguientes características:

- $d(p, q) \geq 0$
- $d(p, q) = 0$ si y sólo si $p = q$
- $d(p, q) = d(q, p)$
- $d(p, r) \leq d(p, q) + d(q, r)$

Se define la distancia euclídea entre los pixeles p y q por:

$$d_E(p, q) = \sqrt{(p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2} \quad (10)$$

Se define la distancia Manhattan entre los pixeles p y q por:

$$d_S(p, q) = |p_1 - q_1| + |p_2 - q_2| \quad (11)$$

Y se define la distancia de Chebyshov entre los pixeles p y q por:

$$d_M(p, q) = \max_{i \in \{1, 2\}} |p_i - q_i| \quad (12)$$

Debido a que $d(p, q) \geq 0$, para toda función distancia y que evidentemente $d_M^2 \leq d_E^2 \leq d_S^2$, se puede observar que:

$$0 \leq d_M \leq d_E \leq d_S \quad (13)$$

Si dos pixeles p y q tienen las coordenadas $p = (1, 3)$ y $q = (7, 4)$, obtendremos que las distancias euclíadiana, Manhattan y Chebyshov entre los pixeles son respectivamente:

- $d_E(p, q) = \sqrt{(1-7)^2 + (3-4)^2} = \sqrt{36+1} = \sqrt{37}$
- $d_S(p, q) = |1-7| + |3-4| = 6 + 1 = 7$
- $d_M(p, q) = \max\{|1-7|, |3-4|\} = \max\{6, 1\} = 6$

3).3. Ruido en imágenes digitales

Se dice que existe ruido en una imagen digital cuando se produce variación en el brillo en algunas regiones de la imagen debido al medio que se utiliza para obtener la imagen digital. Esto generalmente sucede cuando se toman fotografías en lugares en los que el brillo solar es muy intenso y los elementos que no reciben la luz solar directamente son expresados con muy poco brillo en la imagen obtenida por la cámara. Los tipos de ruido de una imagen son los siguientes:

- **Gaussiano:** Genera pequeñas variaciones en la imagen. Una causa de ello suele ser que el sensor de la cámara tiene distintas ganancias que tienen diferentes capacidades de captura de fotoelectrones; por lo que los pixeles que toman colores representados por los valores de las variables R , G y B obtenidos de los fotoelectrones capturados por las ganancias con menor capacidad de captura presentan un color más opaco. Otras causas son el ruido en los digitalizadores y perturbaciones en la transmisión.
- **Impulsional:** Genera un efecto al que se le llama sal y pimienta debido a que convierte colores de pixeles de distintas tonalidades en colores similares al blanco y al negro. El blanco se produce cuando la imagen captada emite colores cuyas ondas luminosas tienen una amplitud muy alta y los fotoelectrones que irradian excede las capacidades de captura de las ganancias del sensor de la cámara, o cuando se obtiene una imagen de objetos de altas temperaturas que emiten rayos infrarrojos que no pueden ser captados por el ojo humano mas los fotoelectrones irradiados por estos rayos son capturados por el sensor; ya que se satura el sensor. El negro se produce cuando se pierde la señal en un pixel y el sensor capta valores RGB mínimos.
- **Multiplicativo:** Se produce cuando la imagen se obtiene a través de dos señales que generan el mismo efecto de ruido y el ruido resultante de la imagen se multiplica en la señal relevante durante la captura o transmisión.
- **Aditivo:** Se produce cuando la imagen se obtiene a través de dos señales que generan distintos efectos de ruido y el ruido total de la imagen expresa los ruidos generados de las señales.

A continuación, se muestra el efecto del ruido en la siguiente figura:



Con ruido

Sin ruido

Figura VIII: Efecto del ruido en la imagen de un paisaje.

B. Objetivos del estudio

Crear una base de datos óptima para el análisis estadístico del incremento de la FPI como una enfermedad post-COVID-19 en el Perú, cuyos diagnósticos médicos se basan en imágenes radiográficas, las cuales, en un porcentaje significativo, contienen errores, siendo uno de estos la ubicación de la verdadera zona afectada por la FPI. Así también, corregir los errores existentes en estas imágenes radiográficas, con la finalidad de detectar la estructura de los canales de irrigación sanguínea pulmonar y poder ubicar la verdadera zona afectada por la FPI (la cual se encuentra en forma de un panal de abejas), lo que conduce al desarrollo de modelos matemáticos de técnicas de procesamiento de imágenes y su implementación computacional. Para ello, planteamos los siguientes objetivos:

1). Objetivos generales

- Aumentar la resolución de la imagen de FPI.
- Amplificar la radiografía para la detección de errores (calibración de equipos, ubicación de cámara y calidad de la imagen) en los protocolos médicos.
- Comprimir la cantidad de KB de almacenamiento de una imagen radiográfica de FPI.
- Corregir la luminosidad y aumentar la nitidez de la imagen de FPI.
- Mejorar la calidad del contraste de la imagen radiográfica (filtrado de ruidos, filtro de paso alto, filtro de paso bajo y filtro “skeleton”).

2). Objetivos específicos

- Aplicación de las herramientas estadísticas y del análisis de datos para la clasificación de las variables predictivas para la investigación del tema.
- Plantear y desarrollar modelos matemáticos basados en Interpolación polinomial (bidimensional lineal y cúbica), Transformada rápida de Fourier bidimensional, Transformada discreta de coseno, Transformada discreta de wavelet 2D (detección de bordes en la imagen), Ecuaciones Diferenciales Parciales parabólicas No Lineales (difusión anisotrópica) y la Morfología matemática de las formas geométricas y del álgebra (suma directa, matrices de pixeles), en la finalidad de conformar las técnicas de procesamiento digital de las imágenes, tales como: posicionamiento (angulación, alineación, ubicación y encuadre de la cámara virtual), amplificación, compresión, filtrado de ruidos (paso bajo y nitidez de los puntos objetivo), en la finalidad de aplicarlas en

la generación de técnicas de procesamiento de imágenes como contribución en el mejoramiento y corrección de errores de las imágenes radiográficas de FPI.

- Amplificar una radiografía de FPI mediante la técnica *RGB*, interpolación bilineal, interpolación polinomial cúbica bidimensional y usando el método de la transformada discreta de Fourier bidimensional.
- Corregir el efecto generado por una mala calibración del equipo radiográfico.
- Corregir la luminosidad e incrementar la nitidez de la imagen de una radiografía de FPI.
- Comprimir una radiografía de FPI mediante la transformada discreta coseno y la compresión basada en los coeficientes de wavelet.
- Reducir el ruido de una radiografía de FPI mediante filtros lineales, el filtro de la mediana y los filtros de paso bajo.
- Resaltar los detalles y bordes de una radiografía de FPI mediante los filtros de paso alto, el filtro “skeleton”, la transformada discreta de wavelet en 2D y la técnica de detección de bordes basada en funciones de wavelet.
- Mejorar el contraste de una imagen de una radiografía de FPI mediante difusión anisotrópica.
- Aumentar la nitidez de la estructura de “panal de abejas” de una radiografía de FPI aplicando el método de detección de bordes mediante difusión anisotrópica.
- Implementación numérica de estas técnicas en MATLAB.

C. Motivación y antecedentes

La motivación de esta investigación es hallar métodos no invasivos para contribuir en el diagnóstico adecuado de pacientes con FPI y, de este modo, evitar procedimientos de riesgo como ingerir mayor cantidad de sustancias tóxicas que se utilizan para resaltar los tejidos de los pulmones en la obtención de imágenes radiográficas.

Se hizo una encuesta que fue publicada en la red social “facebook” para obtener los grupos de personas más vulnerables al COVID-19 ya que según Torres-González [2], la fibrosis pulmonar aumentó en 15 de cada 24 pacientes que padecieron SARS-CoV-2, la cual es una patología que pertenece a una subfamilia de los coronavirinae, la cual es una familia de coronavirus. En esta sección, se muestran los datos obtenidos de esa encuesta.

1). Nivel de vulnerabilidad al Covid-19 según la edad

1).1. Definición de clases

Debido a que las edades de las personas que respondieron la encuesta no siguen una distribución uniforme, es necesario definir clases que representen los distintos intervalos de edades y que estas clases estén bien definidas. En este caso, plantearemos como hipótesis que las clases sean las siguientes:

- **Clase 0:** Personas encuestadas que tengan entre 10 a 14 años.
- **Clase 1:** Personas encuestadas que tengan 15 años.

- **Clase 2:** Personas encuestadas que tengan 16 años.
- **Clase 3:** Personas encuestadas que tengan 17 años.
- **Clase 4:** Personas encuestadas que tengan entre 18 a 24 años.
- **Clase 5:** Personas encuestadas que tengan entre 25 a 39 años.
- **Clase 6:** Personas encuestadas que tengan entre 40 a 59 años.
- **Clase 7:** Personas encuestadas que tengan no menos de 60 años.

En la siguiente tabla se muestran las cantidades de encuestados por género que pertenecen a las clases definidas:

TABLA II

Número de encuestados por género y clase en base a su edad.

Clase	0	1	2	3	4	5	6	7
Masculino	4	18	18	20	13	11	6	3
Femenino	12	22	42	50	11	8	8	6

Si se define una variable categórica que represente las clases cuyos códigos sean los números de las clases para representarlas, obtendríamos que esta variable podría tomar los valores 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7. Sean $\{x_{1,i}, i \in \{1, \dots, 93\}\}$ y $\{x_{2,i}, i \in \{1, \dots, 159\}\}$ los conjuntos cuyos elementos representan las clases a las que pertenecen los encuestados de géneros masculino y femenino, respectivamente en orden ascendente. Calculamos las medidas de tendencia central y de variación de la siguiente manera:

- Para el género masculino:
 - La moda $m_o = 3$, ya que las cantidades de elementos de cada clase del 0 al 7 son: 4, 18, 18, 20, 13, 11, 6 y 3 respectivamente; y el número mayor es el 20 que corresponde a la cantidad de elementos de la clase 3.
 - La mediana $m_e = 3$, ya que si colocamos los elementos $\{x_{1,i}\}$ en orden ascendente, el elemento central sería $x_{1,47}$; y como $4 + 18 + 18 = 40 < 47 < 60 = 4 + 18 + 18 + 20$, $x_{1,47}$ pertenece a la clase 3; por lo tanto, la mediana es 3.
 - La media $\bar{x}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{93} x_{1,i}}{93} = \frac{4*0+18*1+18*2+20*3+13*4+11*5+6*6+3*7}{93} \approx 2.989$.
 - La desviación estándar $s_1 = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{93} (x_{1,i} - \bar{x}_1)^2}{93-1}} \approx 1.760$.
 - El coeficiente de variación $CV_1 = \frac{s_1}{\bar{x}_1} \cdot 100\% = 58.88\%$.
- Para el género femenino:
 - La moda $m_o = 3$, ya que las cantidades de elementos de cada clase del 0 al 7 son: 12, 22, 42, 50, 11, 8, 8 y 6 respectivamente; y el número mayor es el 50 que corresponde a la cantidad de elementos de la clase 3.
 - La mediana $m_e = 3$, ya que si colocamos los elementos $\{x_{2,i}\}$ en orden ascendente, el elemento central sería $x_{1,79}$; y como $12 + 22 + 42 = 76 < 79 < 126 = 12 + 22 + 42 + 50$, $x_{1,79}$ pertenece a la clase 3; por lo tanto, la mediana es 3.

- La media $\bar{x}_2 = \frac{\sum_{i=1}^{159} x_{2,i}}{159} = \frac{12*0+22*1+42*2+50*3+11*4+8*5+8*6+6*7}{159} \approx 2.704$.
- La desviación estándar $s_2 = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{159} (x_{2,i} - \bar{x}_2)^2}{159-1}} \approx 1.659$.
- El coeficiente de variación $CV_2 = \frac{s_2}{\bar{x}_2} \cdot 100\% = 61.36\%$.

Dado que en el primer caso se cumple que $z_1 = \frac{|\bar{x}_1 - 3|}{s_1} = 0.006$, en el segundo caso que $z_2 = \frac{|\bar{x}_2 - 3|}{s_2} = 0.178$ y en ambos casos se cumple que $m_o = m_e = 3$, las clases están bien definidas para las muestras de ambos géneros ya que al reemplazar los valores de z_1 y z_2 en la tabla normal, se observa que en el primer caso hay menos del 0.40 % de datos entre la media y la mediana mientras que en el segundo caso, menos del 7.14 % de datos. Sin embargo, ambas muestras son muy heterogéneas debido a que sus coeficientes de variación son no menores a 26 %. Al realizar un gráfico de barras de estos datos, se puede observar que las distribuciones son similares a una distribución normal, dado que la mayoría de datos se concentran alrededor del centro, pero hay mayor concentración de datos en el lado izquierdo que en el lado derecho:

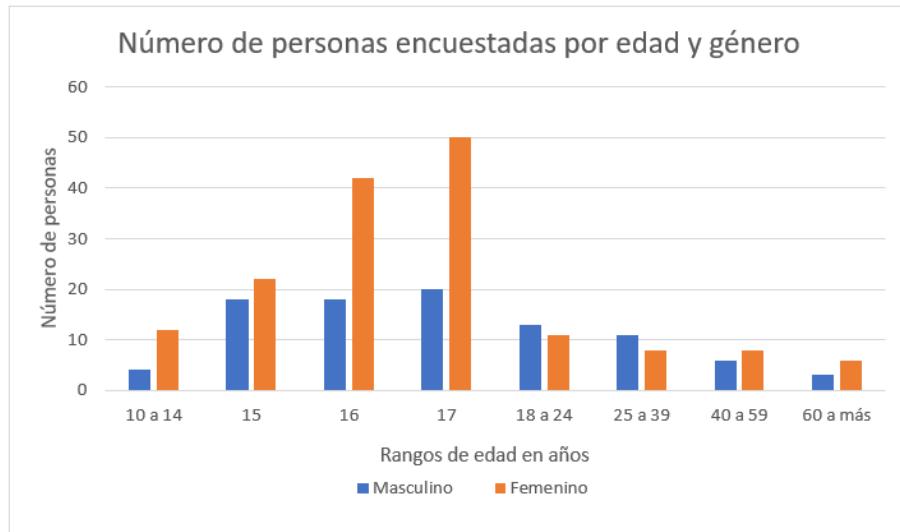


Figura IX: Gráfico de barras del número de encuestados por género y clase en base a su edad.

Para hallar el grado de concentración de datos en las zonas centrales de las distribuciones, hallamos las curtosis.

- Para el género masculino:

$$k_1 = \frac{\sum_{i=1}^{93} (x_{1,i} - \bar{x})^4}{(93-1) \cdot s_1^4} \approx 2,357$$

Como $k_1 < 3$, la gráfica de distribución de datos de los encuestados del género masculino es platicúrtica.

- Para el género femenino:

$$k_2 = \frac{\sum_{i=1}^{159} (x_{2,i} - \bar{x})^4}{(159-1) \cdot s_2^4} \approx 3,403$$

Como $k_2 > 3$, la gráfica de distribución de datos de los encuestados del género femenino es leptocúrtica.

1).2. Datos obtenidos luego de aplicar oversampling

Dado que la subclase²⁰ con mayor cantidad de datos tiene 50 datos, agregamos datos a las demás clases mediante la técnica de oversampling, de manera que cada clase contenga 50 datos para que estén balanceadas y sea posible realizar comparaciones en los resultados. Luego de ello, se obtiene que las cantidades de personas por clase y género que contrajeron Covid-19 son las que se muestran en la siguiente tabla:

TABLA III

Tabla de la cantidad de personas que contrajeron Covid-19 por género y clase basada en la edad.

Clase	0	1	2	3	4	5	6	7
Masculino	25	8	14	20	4	41	25	17
Femenino	17	16	21	18	32	31	25	17

Dado que los datos están balanceados, podemos concluir a partir de los resultados de la encuesta que las personas menos propensas a contraer Covid-19 son los hombres de entre 18 y 24 años, con 4 casos de Covid-19, seguidos por los hombres de 15 años con 8 casos. El grupo más propenso a contraer Covid-19 son los hombres de entre 25 y 39 años, con 41 casos. En el caso de las mujeres, las diferencias entre grupos son menos marcadas; el grupo menos propenso a contraer Covid-19 son las mujeres de 15 años, con 16 casos, y el más propenso son las mujeres de entre 18 y 24 años, con 32 casos.

Para calcular las medidas de tendencia central y de variación, hemos representado las edades no como clases categóricas, sino como intervalos. Esto se debe a que ya no se busca demostrar que están bien definidos, sino determinar si las distribuciones de personas de los géneros masculino y femenino que contrajeron Covid-19 según su edad siguen una distribución normal. Dado que el encuestado de mayor edad tiene 72 años, las medidas se calculan de la siguiente manera utilizando la opción "filtro" en Excel:

- Para el género masculino:

- La moda se obtiene mediante la siguiente operación:

$$m_o = 25 + \frac{41 - 4}{(41 - 4) + (41 - 25)} (39 - 25) \approx 35$$

Esto quiere decir que, según los resultados de la encuesta, los hombres más propensos a contraer el coronavirus tienen 35 años.

- La mediana se obtiene haciendo:

$$m_e = 25 + \frac{\frac{154}{2} - 71}{41} (39 - 25) \approx 27$$

Por lo tanto, según la encuesta, tanto la cantidad de hombres mayores de 27 años como la cantidad de hombres menores de 27 años que contrajeron el coronavirus no pueden ser más de la mitad del total de hombres.

- La media se obtiene al hacer:

$$\bar{x}_1 = \frac{25 \cdot 12 + 8 \cdot 15 + \dots + 25 \cdot 49.5 + 17 \cdot 66}{154} = 30.78 \approx 31$$

Por lo tanto, el promedio de edades de los encuestados del género masculino que contrajeron el coronavirus es de 31 años.

²⁰Género de una clase

- La desviación estándar sería:

$$s_1 = \sqrt{\frac{25(12 - 30.78)^2 + \dots + 17(66 - 30.78)^2}{154 - 1}} = 27.16 \approx 27$$

- El coeficiente de variación sería:

$$CV_1 = \frac{s_1}{\bar{x}_1} \cdot 100 \% \approx 88.2 \%$$

Como la mediana es menor que la moda y la media, la distribución tiene más de un punto extremo y, por ende, no se asemeja a una distribución normal. Además, la distribución es bastante heterogénea, ya que el coeficiente de variación tiene un valor altísimo.

■ Para el género femenino:

- La moda se obtiene mediante la siguiente operación:

$$m_o = 18 + \frac{32 - 18}{(32 - 18) + (32 - 31)}(24 - 18) \approx 24$$

Esto quiere decir que según los resultados de la encuesta, las mujeres más propensas a contraer el coronavirus tienen 24 años.

- La mediana se obtiene haciendo:

$$m_e = 18 + \frac{\frac{177}{2} - 72}{32}(24 - 18) \approx 21$$

Por lo tanto, según la encuesta, tanto la cantidad de mujeres mayores de 21 años como la cantidad de mujeres menores de 21 años que contrajeron el coronavirus no pueden ser más de la mitad del total de las mujeres.

- La media se obtiene al hacer:

$$\bar{x}_2 = \frac{17 \cdot 12 + 16 \cdot 15 + \dots + 25 \cdot 49.5 + 17 \cdot 66}{177} = 28.92 \approx 29$$

Por lo tanto, el promedio de edades de los encuestados del género femenino que contrajeron el coronavirus es de 29 años.

- La desviación estándar sería:

$$s_1 = \sqrt{\frac{17(12 - 28.92)^2 + \dots + 17(66 - 28.92)^2}{177 - 1}} = 25.32 \approx 25$$

- El coeficiente de variación sería:

$$CV_1 = \frac{s_1}{\bar{x}_1} \cdot 100 \% \approx 87.6 \%$$

Al igual que en el caso del género masculino, la mediana es menor que la moda y la media, por lo que la distribución tiene más de un punto extremo y, por ende, no se asemeja a una distribución normal. Además, la distribución también es bastante heterogénea debido a que el coeficiente de variación también tiene un valor muy alto.

Evidentemente, al realizar un gráfico de barras de estos datos, no se obtiene una distribución similar a una distribución normal debido a que para cada género, las distribuciones tienen más de un valor extremo. En el caso del género masculino, hay máximos relativos en la clase 0, la clase 3 y la clase 5; y en el caso del género femenino, hay máximos relativos en la clase 0, la clase 2 y la clase 4.

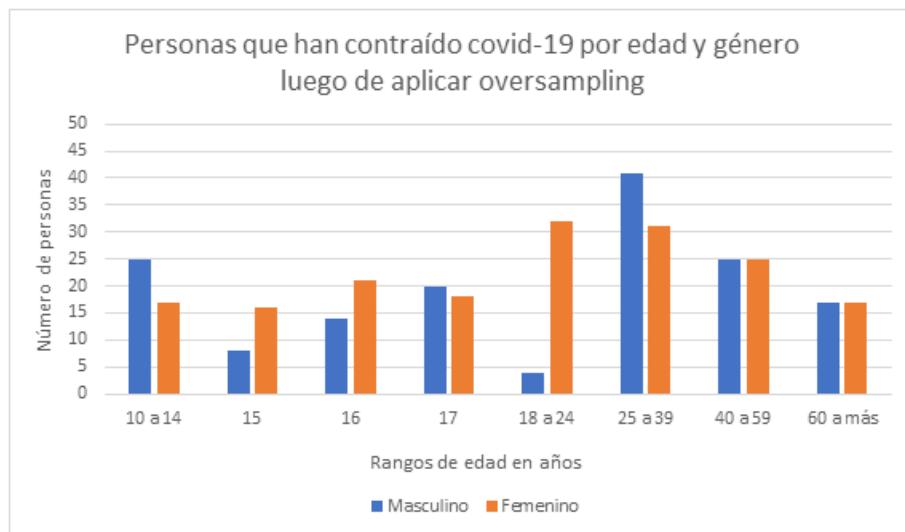


Figura X: Número de personas que contrajeron Covid-19 por género y clase en base a la edad luego de aplicar oversampling.

2). Nivel de vulnerabilidad al Covid-19 según el índice de masa corporal

2).1. Definición de clases

De igual manera que en el caso anterior, debido a que los índices de masa corporal de las personas que respondieron la encuesta no siguen una distribución uniforme, es necesario definir clases que representen los distintos intervalos de estos índices y que estas clases estén bien definidas. En este caso, plantearemos como hipótesis que las clases sean las siguientes:

- **Clase 0:** Personas encuestadas que tengan un índice de masa corporal menor a $18.5 \text{ kg}/\text{m}^2$.
- **Clase 1:** Personas encuestadas que tengan un índice de masa corporal no menor a $18.5 \text{ kg}/\text{m}^2$ y menor a $22 \text{ kg}/\text{m}^2$.
- **Clase 2:** Personas encuestadas que tengan un índice de masa corporal no menor a $22 \text{ kg}/\text{m}^2$ y menor a $26 \text{ kg}/\text{m}^2$.
- **Clase 3:** Personas encuestadas que tengan un índice de masa corporal no menor a $26 \text{ kg}/\text{m}^2$ y no mayor a $30 \text{ kg}/\text{m}^2$.
- **Clase 4:** Personas encuestadas que tengan un índice de masa corporal mayor a $30 \text{ kg}/\text{m}^2$.

En la siguiente tabla se muestran las cantidades de encuestados por género que pertenezcan a las clases definidas:

Si se define una variable categórica que represente las clases cuyos códigos sean los números de las clases para representarlas, obtendríamos que esta variable podría tomar los valores 0, 1, 2, 3 y 4. Sean $\{x_{1,i}, i \in \{1, \dots, 96\}\}$ y $\{x_{2,i}, i \in \{1, \dots, 159\}\}$ los conjuntos cuyos elementos representan las clases a las que pertenecen los encuestados de géneros masculino y femenino respectivamente en orden ascendente. Calculamos las medidas de tendencia central y de variación de la siguiente manera:

- Para el género masculino:

TABLA IV

Número de encuestados por género y clase en base a su índice de masa corporal.

Clase	0	1	2	3	4
Masculino	11	27	36	12	10
Femenino	25	44	61	20	9

- La moda $m_o = 2$, ya que las cantidades de elementos de cada clase del 0 al 4 son: 11, 27, 36, 12 y 10 respectivamente; y el número mayor es 36, que corresponde a la cantidad de elementos de la clase 2.
- La mediana $m_e = 2$, ya que si colocamos los elementos $x_{1,i}$ en orden ascendente, los elementos centrales serían $x_{1,48}$ y $x_{1,49}$; y como $11 + 27 = 38 < 48.5 < 74 = 11 + 27 + 36$, la mediana es 2.
- La media $\bar{x}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{96} x_{1,i}}{96} = \frac{11 \cdot 0 + 27 \cdot 1 + 36 \cdot 2 + 12 \cdot 3 + 10 \cdot 4}{96} \approx 1.823$.
- La desviación estándar $s_1 = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{96} (x_{1,i} - \bar{x}_1)^2}{96-1}} \approx 1.124$.
- El coeficiente de variación $CV_1 = \frac{s_1}{\bar{x}_1} \cdot 100\% = 61.65\%$.

■ Para el género femenino:

- La moda $m_o = 2$, ya que las cantidades de elementos de cada clase del 0 al 4 son: 25, 44, 61, 20 y 9 respectivamente; y el número mayor es el 61, que corresponde a la cantidad de elementos de la clase 2.
- La mediana $m_e = 2$, ya que si colocamos los elementos $x_{2,i}$ en orden ascendente, el elemento central sería $x_{1,79}$; y como $25 + 44 = 69 < 79 < 130 = 25 + 44 + 61$, la mediana es 2.
- La media $\bar{x}_2 = \frac{\sum_{i=1}^{159} x_{2,i}}{159} = \frac{25 \cdot 0 + 44 \cdot 1 + 61 \cdot 2 + 20 \cdot 3 + 9 \cdot 4}{159} \approx 1.648$.
- La desviación estándar $s_2 = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{159} (x_{2,i} - \bar{x}_2)^2}{159-1}} \approx 1.068$.
- El coeficiente de variación $CV_2 = \frac{s_2}{\bar{x}_2} \cdot 100\% = 64.82\%$.

Dado que en el primer caso se cumple que $z_1 = \frac{|\bar{x}_1 - 2|}{s_1} = 0.158$, en el segundo caso que $z_2 = \frac{|\bar{x}_2 - 3|}{s_2} = 0.330$, y en ambos casos se cumple que $m_o = m_e = 2$, las clases están bien definidas para las muestras de ambos géneros, ya que al reemplazar los valores de z_1 y z_2 en la tabla normal se observa que en el primer caso hay menos del 6.36 % de datos entre la media y la mediana, mientras que en el segundo caso, menos del 12.93 % de datos. Sin embargo, ambas muestras son muy heterogéneas debido a que sus coeficientes de variación son no menores a 26 %. Al realizar un gráfico de barras de estos datos, se puede observar que las distribuciones son similares a una distribución normal, dado que la mayoría de datos se concentran alrededor del centro, pero hay mayor concentración de datos en el lado izquierdo de la distribución:

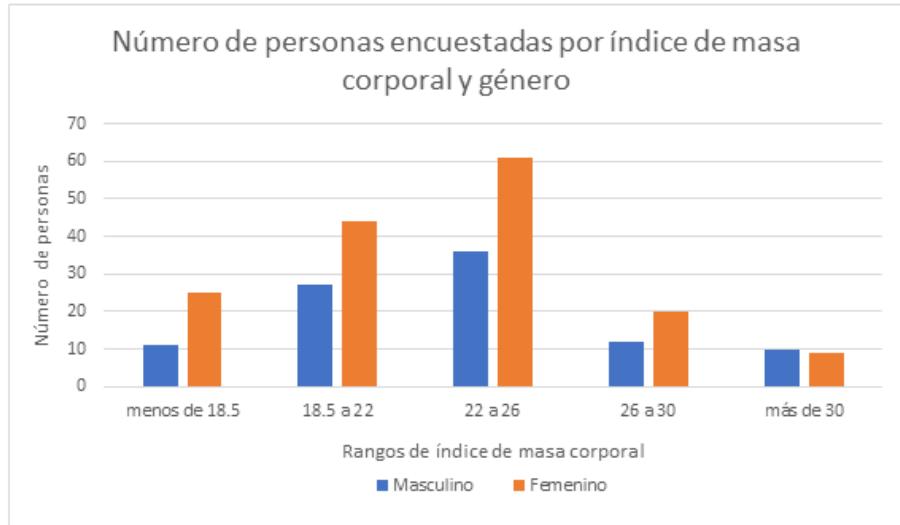


Figura XI: Gráfico de barras del número de encuestados por género y clase en base a su índice de masa corporal.

Para hallar el grado de concentración de datos en las zonas centrales de las distribuciones, hallamos las curtosis.

- Para el género masculino:

$$k_1 = \frac{\sum_{i=1}^{96} (x_{1,i} - \bar{x})^4}{(96 - 1) \cdot s_1^4} \approx 2.518$$

Como $k_1 < 3$, la gráfica de distribución de datos de los encuestados del género masculino es platicúrtica.

- Para el género femenino:

$$k_2 = \frac{\sum_{i=1}^{159} (x_{2,i} - \bar{x})^4}{(159 - 1) \cdot s_2^4} \approx 2.603$$

Como $k_2 < 3$, la gráfica de distribución de datos de los encuestados del género femenino también es platicúrtica.

2).2. Datos obtenidos luego de aplicar oversampling

Las cantidades de personas por clase y género que contrajeron Covid-19 son las que se muestran en la siguiente tabla:

TABLA V

Tabla de la cantidad de personas que contrajeron Covid-19 por género y clase basada en el índice de masa corporal.

Clase	0	1	2	3	4
Masculino	14	9	17	41	31
Femenino	27	19	24	31	27

Esto se obtiene ya que la clase con mayor cantidad de datos tiene 61 datos. Agregamos

datos a las demás clases mediante la técnica de oversampling, de manera que cada clase contenga 61 datos para que estén balanceadas y sea posible realizar comparaciones en los resultados. Dado que los datos están balanceados, podemos concluir a partir de los resultados de la encuesta que las personas menos propensas a contraer Covid-19 son los hombres que tienen un índice de masa corporal entre 18.5 kg/m^2 y 22 kg/m^2 con 9 personas que contrajeron Covid-19, seguidos por los hombres que tienen un IMC menor a 18.5 kg/m^2 con 9 personas que lo contrajeron; mientras que el grupo más propenso a contraer Covid-19 son los hombres que tienen un IMC entre 26 kg/m^2 y 30 kg/m^2 con 41 personas. En el caso del género femenino, las diferencias entre clases son menos amplias; ya que el grupo menos propenso a contraer Covid-19 es el de las mujeres que tienen un IMC entre 18.5 kg/m^2 y 22 kg/m^2 con 19 personas que lo contrajeron, y el más propenso a contraer Covid-19 es el de las mujeres que tienen un IMC entre 26 kg/m^2 y 30 kg/m^2 con 31 personas.

Para calcular las medidas de tendencia central y de variación, representamos las clases como intervalos para determinar si las distribuciones de personas de los géneros masculino y femenino que contrajeron Covid-19 según su IMC siguen una distribución normal. Dado que al utilizar la opción “filtro” en Excel se puede visualizar que el encuestado con menor IMC tiene 11.5 kg/m^2 y el encuestado con mayor IMC tiene 47.3 kg/m^2 , estas medidas se obtienen realizando las siguientes operaciones:

- Para el género masculino:
 - La moda se obtiene mediante la siguiente operación:

$$m_o = 26 + \frac{41 - 17}{(41 - 17) + (41 - 31)}(30 - 26) \approx 29$$

Esto quiere decir que, según los resultados de la encuesta, los hombres más propensos a contraer el coronavirus tienen un IMC de 29.

- La mediana se obtiene haciendo:

$$m_e = 26 + \frac{\frac{112}{2} - 40}{41}(30 - 26) = 27.6 \approx 28$$

Por lo tanto, según la encuesta, tanto la cantidad de hombres con un IMC mayor a 28 kg/m^2 como la cantidad de hombres con un IMC menor a 28 kg/m^2 que contrajeron el coronavirus no pueden ser más de la mitad del total del hombres.

- La media se obtiene al hacer:

$$\bar{x}_1 = \frac{14 \cdot 15 + 9 \cdot 20.25 + 17 \cdot 24 + 41 \cdot 28 + 31 \cdot 38.65}{112} = 28.09 \approx 28$$

Por lo tanto, el promedio de índices de masa corporal de los encuestados del género masculino que contrajeron el coronavirus es 28 kg/m^2 .

- La desviación estándar sería:

$$s_1 = \sqrt{\frac{14(15 - 28.09)^2 + \dots + 31(38.65 - 28.09)^2}{112 - 1}} = 7.77 \approx 7.8$$

- El coeficiente de variación sería:

$$CV_1 = \frac{s_1}{\bar{x}_1} \cdot 100 \% \approx 27.6 \%$$

Debido a las cifras significativas, se redondea la moda, la mediana y la media a 29, 28 y 28 respectivamente. Una distribución con esos datos es una distribución normal de oblicuidad ligeramente negativa, ya que $\bar{x} \leq m_e < m_o$. Sin embargo, redondeando al décimo estos valores, la mediana es menor que la moda y la media; por lo que la distribución tiene más de un punto extremo y, por ende, no se asemeja a una distribución normal. Además, la distribución es heterogénea, ya que el coeficiente de variación tiene un valor no menor a 26 %.

■ Para el género femenino:

- La moda se obtiene mediante la siguiente operación:

$$m_o = 26 + \frac{31 - 24}{(31 - 24) + (31 - 27)}(30 - 26) \approx 29$$

Esto quiere decir que, según los resultados de la encuesta, las mujeres más propensas a contraer el coronavirus tienen un IMC de 29 kg/m^2 .

- La mediana se obtiene haciendo:

$$m_e = 22 + \frac{\frac{128}{2} - 46}{24}(26 - 22) \approx 25$$

Por lo tanto, según la encuesta, tanto la cantidad de mujeres con un IMC mayor a 25 kg/m^2 como la cantidad de mujeres con un IMC menor a 25 kg/m^2 que contrajeron el coronavirus no pueden ser más de la mitad del total de mujeres.

- La media se obtiene al hacer:

$$\bar{x}_2 = \frac{27 \cdot 15 + 19 \cdot 20.25 + 24 \cdot 24 + 31 \cdot 28 + 27 \cdot 38.65}{128} = 25.60 \approx 26$$

Por lo tanto, el promedio de índices de masa corporal de los encuestados del género femenino que contrajeron el coronavirus es 26 kg/m^2 .

- La desviación estándar sería:

$$s_1 = \sqrt{\frac{17(15 - 25.60)^2 + \dots + 27(38.65 - 25.60)^2}{128 - 1}} = 8.14 \approx 8.1$$

- El coeficiente de variación sería:

$$CV_1 = \frac{s_1}{\bar{x}_1} \cdot 100 \% \approx 31.8 \%$$

Al igual que en el caso del género masculino, la mediana es menor que la moda y la media; por lo que la distribución tiene más de un punto extremo y, por ende, no se asemeja a una distribución normal. Además, la distribución también es heterogénea, debido a que el coeficiente de variación también tiene un valor no menor a 26 %.

Al realizar un gráfico de barras de estos datos, no se obtiene una distribución similar a una distribución normal debido a que para cada género, las distribuciones tienen más de un valor extremo. En el caso de ambos géneros, hay valores extremos en la clase 0 y la clase 3, como se puede ver en la figura XXII al observar las barras del primer y el cuarto conjunto de datos, así como las barras de los conjuntos de datos adyacentes.

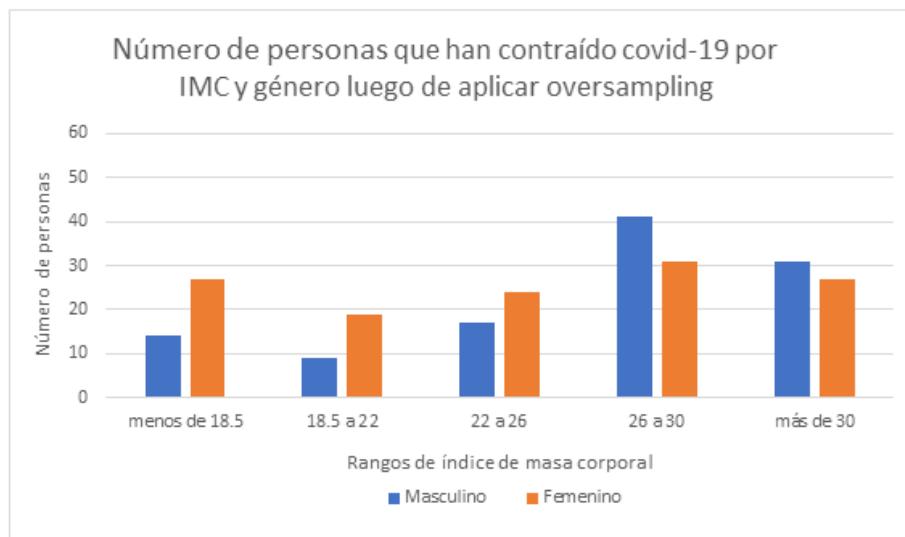


Figura XII: Gráfico del número de personas que contrajeron Covid-19 por género y clase en base al IMC luego de aplicar oversampling.

3). Nivel de vulnerabilidad al Covid-19 según macrorregión

A los encuestados se les preguntó el departamento en el que viven. Dado que hubo algunos departamentos en los que vivían menos de cinco encuestados y, por ende, la cantidad de datos era insuficiente para hacer una estadística, se agruparon los datos en las macrorregiones señaladas en la siguiente figura.



Figura XIII: Mapa político del Perú dividido en macrorregiones y regiones.

Como se puede ver, las macrorregiones se conforman por las regiones siguientes:

- **Metropolitana:** Ciudad de Lima y Callao.

- **Norte:** Tumbes, Piura, Lambayeque, La Libertad, Áncash y Cajamarca.
- **Centro:** Lima Provincias, Ica, Huánuco, Pasco, Junín, Huancavelica y Ayacucho.
- **Sur:** Arequipa, Moquegua, Tacna, Apurímac, Cuzco y Puno.
- **Oriente:** Amazonas, San Martín, Loreto, Ucayali y Madre de Dios.

La cantidad de personas encuestadas por macrorregión se muestra en el siguiente gráfico:

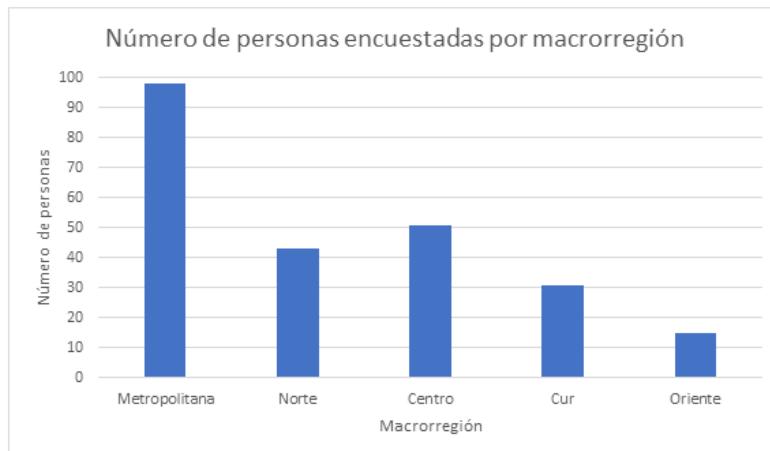


Figura XIV: Gráfico de barras del número de personas encuestadas por macrorregión.

El porcentaje de encuestados por macrorregión que respondieron haber contraído Covid-19 se muestra en el siguiente gráfico:

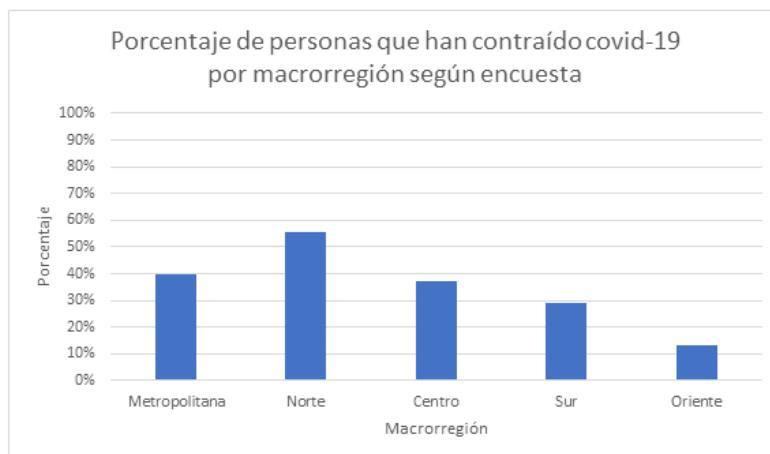


Figura XV: Gráfico de barras del porcentaje de personas encuestadas con Covid-19 por macrorregión.

Según los datos tomados en mayo de 2022 de la página web del MINSA [9] y las estimaciones y proyecciones de población en base al Censo 2017 elaboradas por el Departamento de estadística de la encuestadora CPI [10], se obtuvieron los siguientes porcentajes de personas que contrajeron COVID-19 por región y macrorregión:

TABLA VI

Tabla de porcentajes de personas con COVID-19 por región y macrorregión según los datos del MINSA.

Región	Casos positivos	Población total	Porcentaje
Ciudad de Lima	1498611	9295300	16.12%
Callao	146800	1118800	13.12%
Total macrorregión metropolitana	1645411	10414100	15.80%
Tumbes	27583	256100	10.77%
Piura	158621	2102500	7.54%
Lambayeque	105651	1360500	7.77%
La Libertad	146809	2016700	7.28%
Áncash	127867	1227200	10.42%
Cajamarca	96149	1495600	6.43%
Total macrorregión norte	662680	8458600	7.83%
Lima Provincias	117206	1639000	7.15%
Huánuco	52160	806600	6.47%
Pasco	23998	286100	8.39%
Junín	126307	1406900	8.98%
Huancavelica	25848	385900	6.70%
Ayacucho	48191	691700	6.97%
Ica	103812	970100	10.70%
Total macrorregión centro	497522	6186300	8.04%
Arequipa	214879	1581200	13.59%
Moquegua	48671	200500	24.27%
Tacna	53770	376100	14.30%
Apurímac	39069	454500	8.60%
Cuzco	117018	1358300	8.62%
Puno	66091	1323000	5.00%
Total macrorregión sur	539498	5293600	10.19%
Amazonas	44176	423000	10.44%
San Martín	61848	915700	6.75%
Loreto	57966	987900	5.87%
Ucayali	39568	558300	7.09%
Madre de Dios	17854	159100	11.22%
Total macrorregión oriente	221412	3044000	7.27%

Por lo tanto, el gráfico de barras del porcentaje de personas que contrajeron COVID-19 por macrorregión según los datos del MINSA es el siguiente:

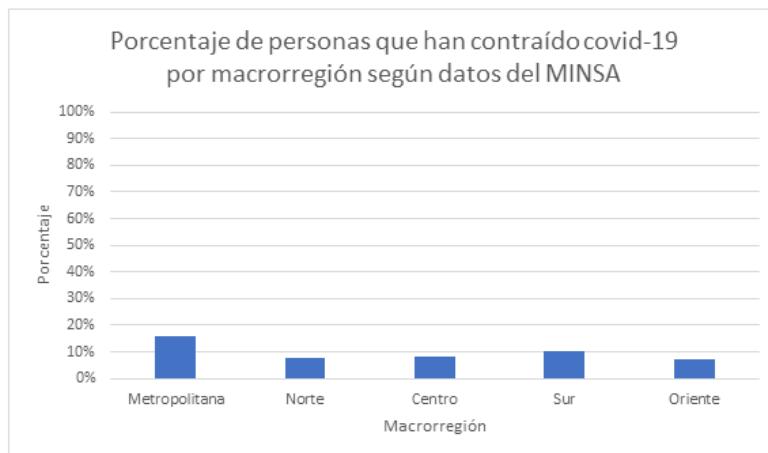


Figura XVI: Gráfico de barras del porcentaje de personas con Covid-19 por macrorregión según MINSA.

Como podemos observar, la macrorregión metropolitana y la macrorregión oriente son las que tienen el porcentaje más alto y más bajo, respectivamente, de personas que contrajeron COVID-19 según la encuesta y los datos del MINSA. Esto probablemente se deba a que Lima es una ciudad con alta humedad en la mayoría de sus distritos y una densidad pobla-

cional considerablemente alta; por lo tanto, las personas están más propensas a contraer el COVID-19. Por otro lado, las regiones del oriente tienen un clima tropical durante todo el año y una densidad poblacional muy baja, lo que hace que las personas estén menos propensas a contraer el COVID-19.

En cuanto a la macrorregión sur, en los datos de la encuesta tiene el segundo porcentaje más bajo. Hay testimonios de que en regiones como Cuzco, muchas personas prefieren protegerse del coronavirus tomando sopa de chuño, cebada y trigo en lugar de usar mascarillas. Por lo tanto, existe una probabilidad considerable de que el chuño, la cebada y el trigo refuercen el sistema inmunológico y prevengan enfermedades como el coronavirus.

En todas las macrorregiones, y especialmente en la macrorregión norte, los resultados de la encuesta muestran porcentajes mucho más altos que los datos del MINSA en cuanto a personas que contrajeron el COVID-19. Esto se debe a diversos factores, como que las personas afectadas por el COVID-19 y aquellas que se sometieron a pruebas de diagnóstico fueron más propensas a participar y responder la encuesta. Además, muchas personas que experimentaron la enfermedad prefirieron recuperarse en casa debido a la lejanía de las clínicas o largos tiempos de espera para la atención médica.

4). Cantidad de familiares de los encuestados que contrajeron COVID-19 internados en camas UCI

Para evaluar el impacto del COVID-19 en las personas encuestadas que contrajeron la enfermedad, se les preguntó cuántos de sus familiares estuvieron internados en una cama UCI en algún momento. Los resultados se presentan en la siguiente tabla:

TABLA VII

Tabla de cantidades de familiares internados en camas UCI de las personas encuestadas que contrajeron COVID-19.

Familiares	0	1	2	3	4	5	6	7
Personas	59	15	10	6	1	2	0	1

Por lo tanto, los porcentajes de personas encuestadas con distintas cantidades de familiares internados en camas UCI se muestran en el siguiente gráfico circular:

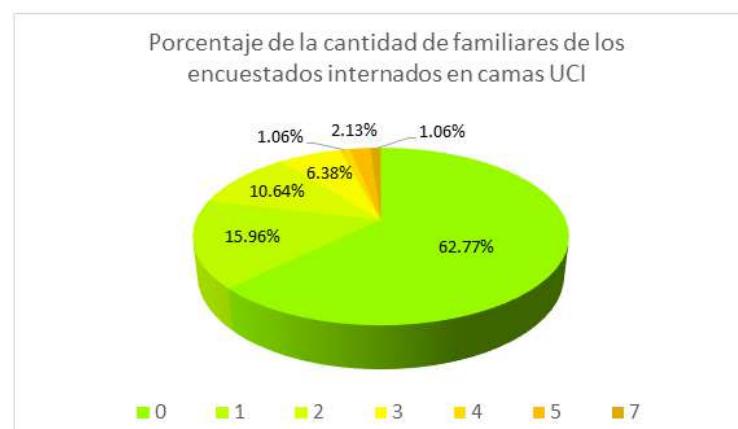


Figura XVII: Porcentajes de cantidades de familiares internados en camas UCI de las personas encuestadas que contrajeron COVID-19.

Observando los datos, a primera vista se puede deducir que el COVID-19 no genera un impacto de muy alta magnitud, ya que más del 60 % de los encuestados que lo contrajeron no tuvieron ni un solo familiar internado en una cama UCI, y más del 75 % tuvo a lo sumo uno. Sin embargo, a este mismo grupo de encuestados también se les preguntó si alguna vez habían sido internados en una cama UCI. De los 96 que respondieron haber contraído COVID-19, 94 indicaron que no y solo 2 respondieron que sí. Los porcentajes de estas respuestas en relación al total de personas en ese grupo de encuestados se muestran en el siguiente gráfico circular:



Figura XVIII: Porcentajes de encuestados que contrajeron COVID-19 que estuvieron internados en camas UCI.

Entonces, haciendo una comparación entre los dos gráficos, se podría deducir que el COVID-19, además de ser contagioso, tiene un alto impacto en quienes lo contraen. Mientras que más del 35 % de los encuestados que contrajeron COVID-19 tienen al menos un familiar que estuvo en una cama UCI, apenas el 2 % de esos encuestados ha estado en una cama UCI. Sin embargo, hay que tener en cuenta que cada encuestado tiene varios familiares. Si, por ejemplo, consideramos que en 1998 la tasa de natalidad era de 3 hijos por mujer según [11], y asumimos que cada encuestado convive con sus padres y sus dos hermanos, basándonos en los resultados de la encuesta tendríamos que la probabilidad de que ningún conviviente haya estado en una cama UCI sería $(1 - \frac{2}{96})^4 \cdot 100\% = 91.92\%$. Dado que este porcentaje sigue estando muy alejado del 62.77 %, es evidente que los encuestados han considerado a varios de sus familiares.

Entonces, dado que la media de edad de los encuestados del género femenino fue 29 años y la de los del género masculino fue 31 años, si tomamos como ejemplo a una persona de 30 años nacida en 1992, cuando la tasa de natalidad era de 3.67 hijos por mujer, con padres nacidos en 1962 cuando la tasa de natalidad era de 6.90 hijos por mujer, podemos asumir que en promedio cada padre tendrá al menos 5 hermanos y cada uno de ellos una pareja y al menos 3 hijos. Entonces, esta persona tendrá al menos 54 familiares conformados por sus 2 padres, 2 hermanos, $(5 \cdot 2) \cdot 2 = 20$ tíos y $2 \cdot (5 \cdot 3) = 30$ primos, asumiendo que ni ella, ni sus primos, ni sus hermanos tienen hijos. Por lo tanto, la probabilidad de que ninguno de sus familiares hubiera estado en una cama UCI sería a lo mucho $(1 - \frac{2}{96})^{54} \cdot 100\% = 32.08\%$, que es mucho más bajo que el 62.77 %. Pero si solo consideramos el contacto con sus padres y hermanos, y la tercera parte de sus demás familiares, este porcentaje podría llegar a ser $(1 - \frac{2}{96})^{4+17} \cdot 100\% = 64.27\%$, el cual sí es muy cercano al 62.77 %. Por lo tanto, basándonos en los resultados de la encuesta, podríamos concluir de manera superficial que alrededor del 2 % de las personas que contraen COVID-19 son internadas en camas UCI y cada persona suele tener contacto con la tercera parte de sus familiares más cercanos.

Al realizar un modelo predictivo del número de personas encuestadas que contrajeron COVID-19 respecto a la cantidad de familiares suyos internados en camas UCI, se encontró que el coeficiente de correlación r es $r = -0.7512$. Debido a que r tiene un valor negativo, la relación lineal entre el número de personas encuestadas que contrajeron el coronavirus y la cantidad de familiares suyos internados en camas UCI es negativa. Además, como $|r|$ no es menor a 0.7, la intensidad de esta relación lineal es fuerte. La matriz de correlación hallada en JMP es la siguiente:

	Familiares	Personas
Familiares	1.0000	-0.7512
Personas	-0.7512	1.0000

Figura XIX: Matriz de correlación entre las personas encuestadas que contrajeron COVID-19 y las cantidades de familiares suyos internados en camas UCI.

Mientras que la matriz del gráfico de dispersión entre ambas variables es la siguiente:

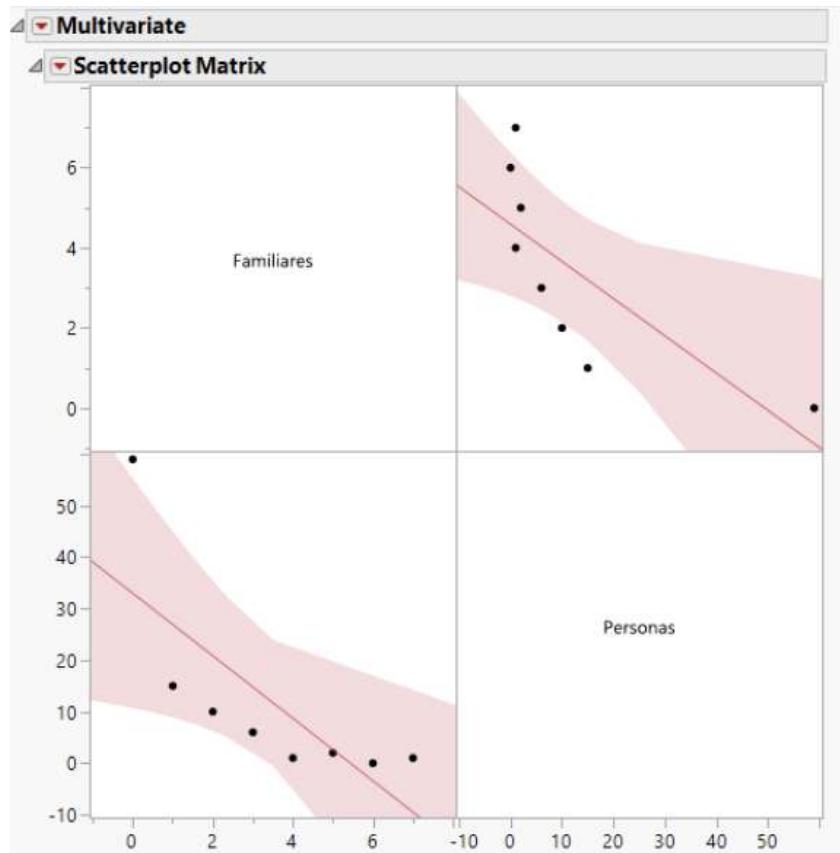


Figura XX: Matriz del gráfico de dispersión de las personas encuestadas que contrajeron COVID-19 y las cantidades de familiares suyos internados en camas UCI.

En este gráfico se pueden visualizar las posiciones de los datos y las líneas de ajuste para verificar de manera geométrica que las variables tienen una relación lineal fuerte y negativa.

Además de incluir la línea de ajuste en el diagrama de regresión, así como las bandas rojas que definen los intervalos de confianza del 95 %²¹, y la línea azul que define la media de las ordenadas de los datos, en la siguiente imagen se incluye el gráfico de las observaciones realizadas respecto a los datos predichos. Por lo tanto, el gráfico se ajusta de manera que la línea de ajuste tenga una pendiente cuyo valor sea igual a 1, y las distancias entre los datos basados en las observaciones mantengan las mismas distancias respecto a la línea de ajuste verticalmente.

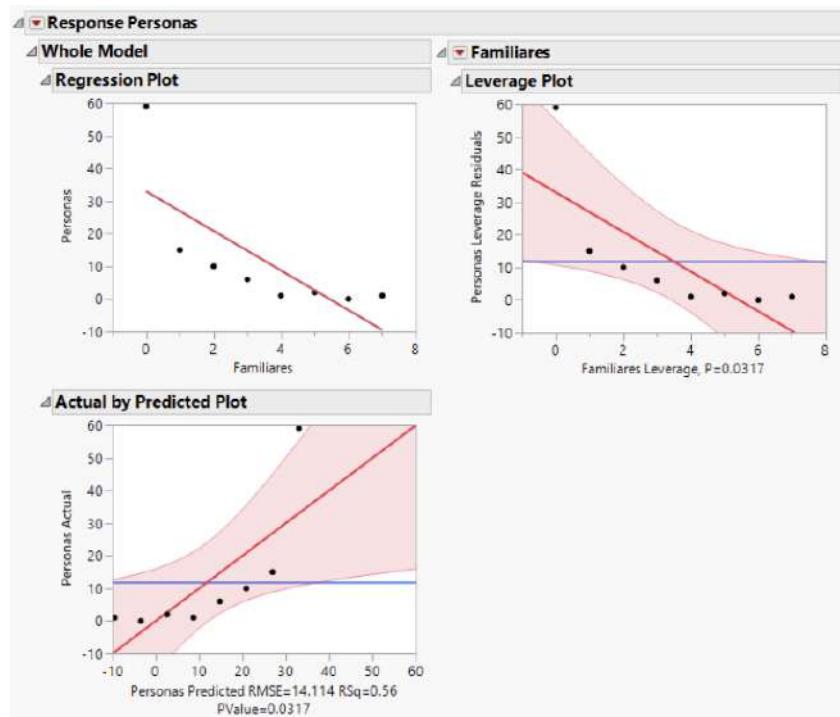


Figura XXI: Diagramas de regresión, valores atípicos, y observaciones realizadas respecto a los datos predichos de las personas encuestadas que contrajeron COVID-19 y las cantidades de familiares suyos internados en camas UCI.

En la imagen de la figura XXII, se puede observar lo siguiente:

- El gráfico muestra los residuos respecto a las cantidades de personas predichas; es decir, los valores de las diferencias de las ordenadas de los datos y las ordenadas de los puntos de la línea de ajuste cuyas abscisas son iguales a las de los datos.
- El resumen de ajuste muestra los siguientes datos:
 - El valor cuadrático del coeficiente de correlación es 0.564321.
 - El valor cuadrático del coeficiente de correlación ajustado es 0.491708; lo que quiere decir que se han agregado predictores al modelo que lo mejoraron menos de lo esperado, ya que este valor es menor al anterior.
 - La raíz del error cuadrático medio (RECM) o desviación estándar es 14.11433.
 - La media de las ordenadas de los datos es 11.75.
 - En total hay 8 observaciones.

²¹un intervalo de confianza del 95 % se refiere a que los valores de la población se encuentran en la zona rosa con un 95 % de certeza

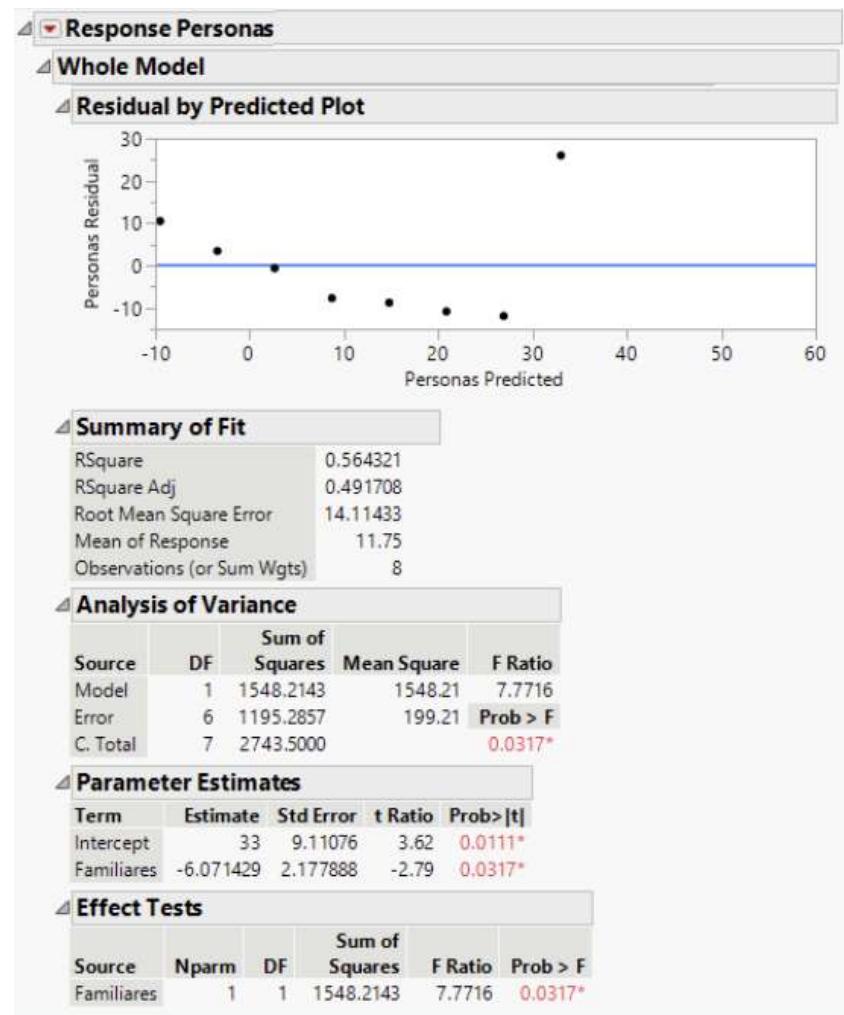


Figura XXII: Datos estadísticos del modelo predictivo de las personas encuestadas que contrajeron COVID-19 y las cantidades de familiares suyos internados en camas UCI.

- En el análisis de la varianza se muestra lo siguiente:
 - Dado que en el modelo solamente se comparan dos variables, este tendrá $2 - 1 = 1$ grados de libertad; ya que los grados de libertad equivalen a la diferencia entre el total de variables y las variables dependientes.
 - El error posee 6 grados de libertad debido a que equivalen a la diferencia entre el total de observaciones y el total de variables.
 - Debido a lo anterior, el número de grados de libertad totales es 7.
 - La suma de cuadrados entre las medias de los grupos y la gran media es 1548.2143.
 - La suma de cuadrados entre los datos y las medias de los grupos es 1195.2857.
 - La suma de cuadrados entre los n datos y la gran media es 2743.5.
 - El valor obtenido por la estadística de prueba para verificar la hipótesis general es 7.7716.
- Teniendo en cuenta los parámetros estimados:
 - El modelo predictivo estaría dado por la ecuación:

$$\hat{y} = 33 - 6.0714x \quad (14)$$

Donde x representa la cantidad de familiares.

- Las desviaciones estándar del término independiente y de la pendiente son 9.11076 y 2.177888 respectivamente.
- El p -valor del término independiente es 0.0111 y el de la pendiente es 0.0317. Como el p -valor del término independiente es mayor a 0.001 y menor a 0.025, hay evidencia fuerte o sustancial en contra de la hipótesis nula para dicho término. Mientras que, como el p -valor de la pendiente es mayor a 0.025 y menor a 0.05, hay evidencia moderada en contra de la hipótesis nula para dicho término.

5). Cantidad de familiares fallecidos de los encuestados con COVID-19

Para determinar la letalidad del COVID-19 entre los encuestados que contrajeron la enfermedad, se les preguntó cuántos de sus familiares fallecieron a causa del virus. Los resultados se presentan en la siguiente tabla:

TABLA VIII

Tabla de cantidades de familiares difuntos de las personas encuestadas que contrajeron COVID-19.

Familiares	0	1	2	3	4	5	6	...	11	12
Personas	59	15	10	6	1	2	0	...	0	1

Por lo tanto, los porcentajes de personas encuestadas con distintas cantidades de familiares fallecidos se muestran en el siguiente gráfico circular:

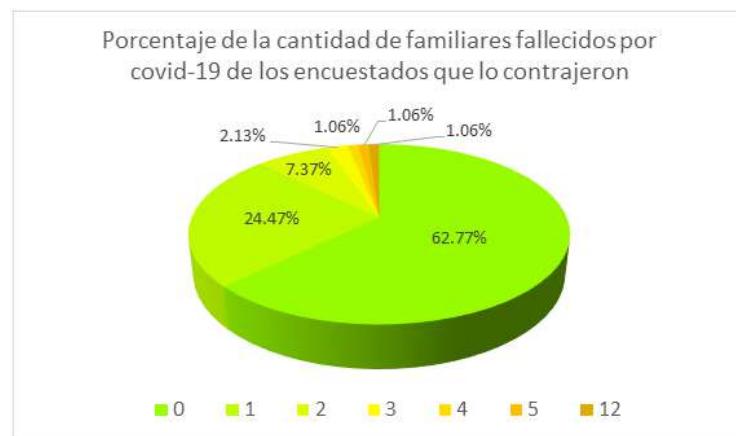


Figura XXIII: Porcentajes de las cantidades de familiares fallecidos de las personas encuestadas que contrajeron COVID-19.

Observando los datos, a primera vista se puede deducir que el COVID-19 no tiene una alta letalidad ya que más del 60 % de los encuestados que lo contrajeron no tuvieron ni un solo familiar fallecido y más del 85 % a lo mucho tuvo sólo uno.

Al realizar un modelo predictivo del número de personas encuestadas que contrajeron COVID-19 respecto a las cantidades de familiares suyos internados en camas UCI, se halló que el coeficiente de correlación r sería $r = -0,6369$. Debido a que r tiene un valor negativo, la relación lineal entre el número de personas encuestadas que contrajeron el coronavirus y las cantidades de familiares suyos fallecidos es negativa. Y como $|r|$ es

mayor a 0,3 y menor a 0,7, la intensidad de esta relación lineal es moderada. La matriz de correlación hallada en JMP es la siguiente:

Correlations		
	Familiares	Personas
Familiares	1.0000	-0.6369
Personas	-0.6369	1.0000

Figura XXIV: Matriz de correlación entre las personas encuestadas que contrajeron COVID-19 y las cantidades de familiares suyos fallecidos.

Mientras que la matriz del gráfico de dispersión entre ambas variables es la siguiente:

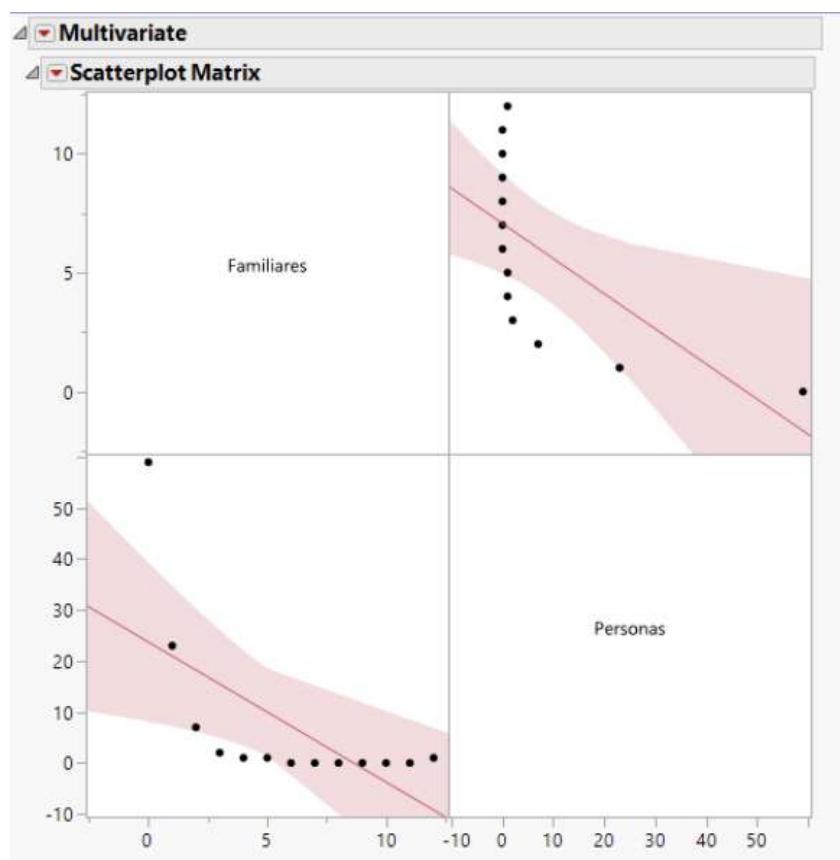


Figura XXV: Matriz del gráfico de dispersión de las personas encuestadas que contrajeron COVID-19 y las cantidades de familiares suyos fallecidos.

En este gráfico se pueden visualizar las posiciones de los datos y las líneas de ajuste para verificar de manera geométrica que las variables tienen una relación lineal moderada y negativa.

Al igual que en el caso de los familiares internados en camas UCI, en el diagrama de valores atípicos; en la siguiente figura se incluye el gráfico de las observaciones respecto a los datos predichos. Consecuentemente, el gráfico se ajusta de manera que la línea de ajuste tenga una pendiente cuyo valor sea igual a 1 y las distancias entre los datos basados en las observaciones mantengan las mismas distancias respecto a la línea de ajuste verticalmente.

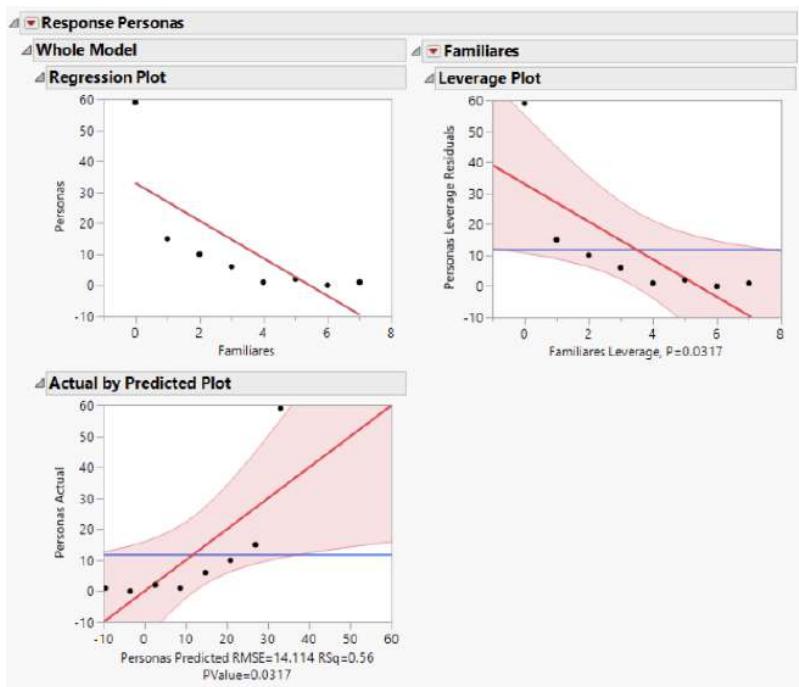


Figura XXVI: Diagramas de regresión, valores atípicos, y observaciones realizadas respecto a los datos predichos de las personas encuestadas que contrajeron COVID-19 y las cantidades de familiares suyos fallecidos.

En la imagen de la figura XXVII, se puede observar lo siguiente:

- El gráfico muestra los residuos respecto a las cantidades de personas predecidas.
- El resumen de ajuste muestra los siguientes datos:
 - El valor cuadrático del coeficiente de correlación es 0.405641.
 - El valor cuadrático del coeficiente de correlación ajustado es 0.351609; lo que quiere decir que se han agregado predictores al modelo que lo mejoraron menos de lo esperado, ya que este valor es menor al anterior.
 - La raíz del error cuadrático medio (RECM) o desviación estándar es 13.52668.
 - La media de las ordenadas de los datos es 7.230769.
 - En total hay 13 observaciones.
- En el análisis de la varianza se muestra lo siguiente:
 - Dado que en el modelo sólo se comparan dos variables, este tendrá $2 - 1 = 1$ grados de libertad.
 - El error tiene 11 grados de libertad, que corresponden a la diferencia entre el total de observaciones y el total de variables.
 - Debido a lo anterior, el número de grados de libertad totales es 12.
 - La suma de cuadrados entre las medias de los grupos y la gran media es 1373.6264.
 - La suma de cuadrados entre los datos y las medias de los grupos es 2012.6813.
 - La suma de cuadrados entre los n datos y la gran media es 3386.3077.
 - El valor obtenido por la estadística de prueba para verificar la hipótesis general es 7.5073.

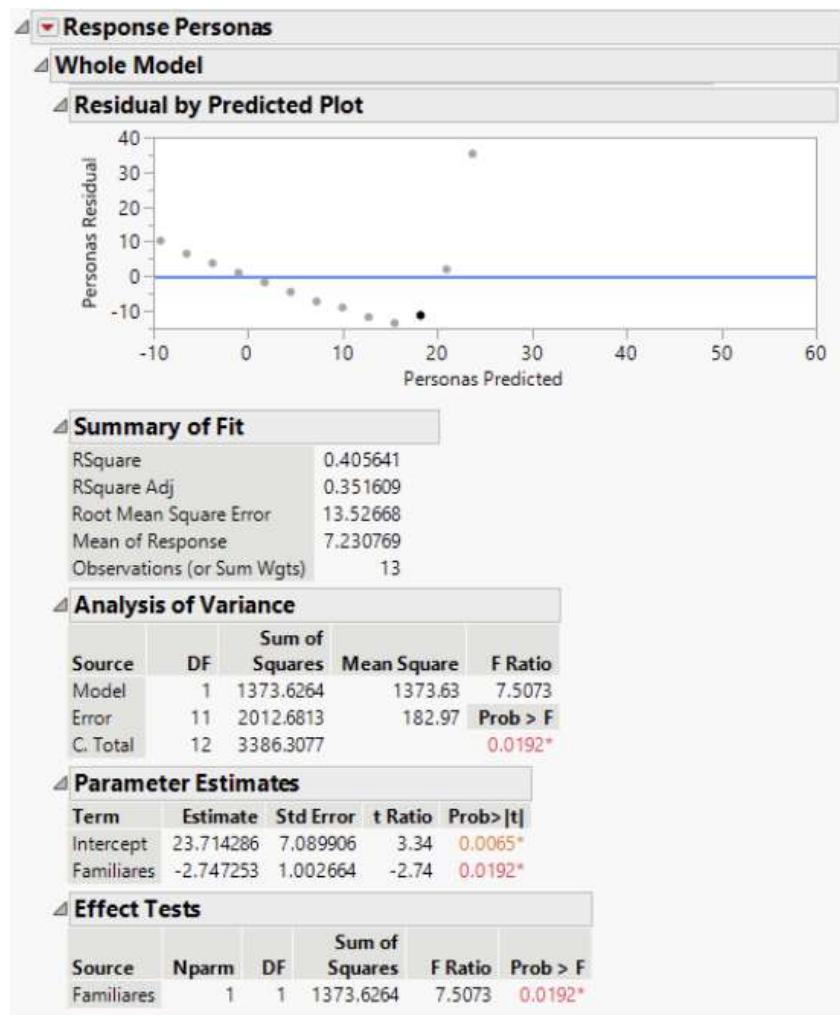


Figura XXVII: Datos estadísticos del modelo predictivo de las personas encuestadas que contrajeron COVID-19 y las cantidades de familiares suyos difuntos.

- Teniendo en cuenta los parámetros estimados:

- El modelo predictivo estaría dado por la ecuación:

$$\hat{y} = 23.7143 - 2.7473x \quad (15)$$

Donde x representa la cantidad de familiares fallecidos.

- Las desviaciones estándar del término independiente y de la pendiente son 7.089996 y 1.002664 respectivamente.
- El p -valor del término independiente es 0.0065 y el de la pendiente es 0.0192. Como ambos son mayores a 0.001 y menores a 0.025, hay evidencia fuerte o sustancial en contraste de la hipótesis nula en ambos términos.

6). Contagios de COVID-19 por mes y año

6).1. Resultados según la encuesta

A los encuestados se les preguntó en qué fechas contrajeron COVID-19, especificando el mes y el año; además, se les preguntó qué variante de COVID-19 habían contraído. De los

87 que respondieron, 29 indicaron que contrajeron la variante Alpha, 10 la variante Beta, 5 la variante Gamma, 8 la variante Delta y 42 la variante Omicron. Por lo tanto, el gráfico circular de porcentajes por variante que se obtuvo es el siguiente:

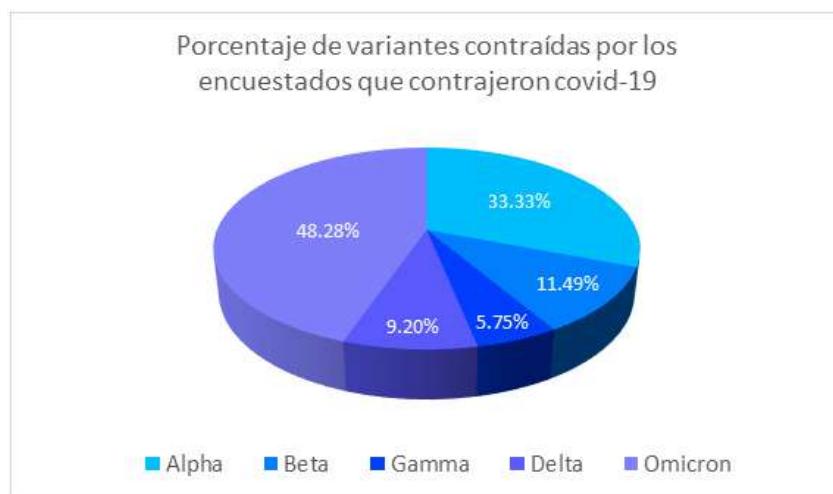


Figura XXVIII: Porcentajes de las variantes de COVID-19 contraídas por los encuestados.

En este gráfico se puede observar que la variante que ha tenido más casos es la Omicron, seguida por Alpha. Esto se debe a que, como se ha dicho varias veces, la variante Omicron es más contagiosa que las demás. En el caso de la variante Alpha, su alto porcentaje se debe a que fue la primera variante y las personas no habían desarrollado defensas contra el COVID-19. En cuanto a las fechas en las que contrajeron COVID-19, las cantidades de encuestados que lo contrajeron se muestran en el siguiente gráfico:

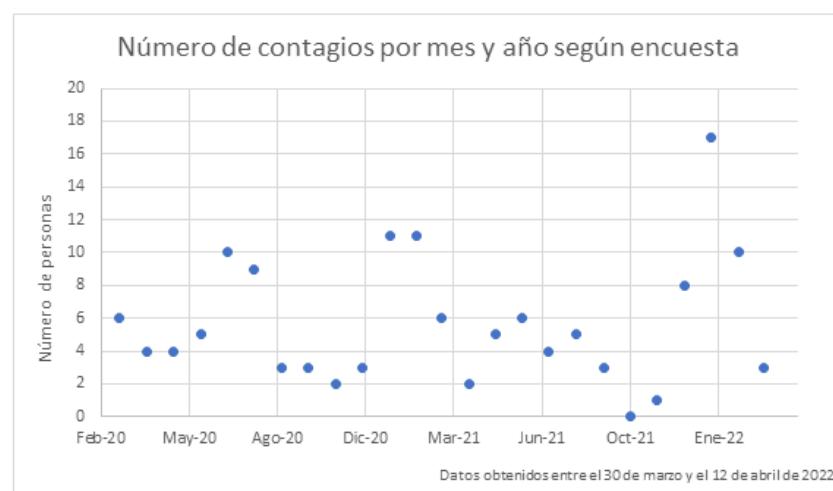


Figura XXIX: Gráfico del número de contagios por mes y año de los encuestados que contrajeron COVID-19.

Luego de haber obtenido estos datos, se realizó la técnica de oversampling en base al total de personas tomadas en cuenta para realizar este mismo análisis con los datos del MINSA para poder comparar los modelos predictivos obtenidos. Luego, se definieron la variable continua “periodo” y las variables indicadoras “verano”, “otoño”, “invierno” y “primavera” para ajustar la temporalidad en el modelo de regresión múltiple. Después, se halló el

modelo de regresión para obtener las personas predecidas y poder calcular los residuos. Al final, se construyeron modelos de correlación en serie en residuos para obtener pronósticos que nos permitan construir un modelo predictivo de mayor precisión. Los datos obtenidos se encuentran en la siguiente tabla:

TABLA IX

Tabla del número de contagios por mes y año de los encuestados que contrajeron COVID-19 luego de aplicar oversampling.

Fecha	Periodo	Verano	Otoño	Invierno	Primavera	Personas encuestadas	oversampling de personas	Personas predichas	Residuos	Residuos lag	Residuos predichos	Pronóstico de personas
03/2020	1	0	1	0	0	6	228878	174601	54276.571	-90145	164408	
04/2020	2	0	1	0	0	4	152585	173422	-20836.95	54276.571	565.316	172808
05/2020	3	0	1	0	0	4	152585	172243	-19657.86	-20836.95	565.316	172808
06/2020	4	0	0	1	0	5	190732	243489	-52757.61	-19657.86	414.938	243904
07/2020	5	0	0	1	0	9	343317	242310	101006.68	-52757.61	463643	246946
08/2020	6	0	0	1	0	8	305170	241131	64039.46	101006.68	-14974	226157
09/2020	7	0	0	0	1	3	114439	845462	29892.706	64039.46	-10260	742865
10/2020	8	0	0	0	1	3	114439	833671	31071.791	29892.706	-59047	774625
11/2020	9	0	0	0	1	2	76292.6	82188	-58954.25	31071.791	-6055	76133
12/2020	10	1	0	0	0	3	114439	357928	-243489.1	-58954.25	-13403	356588
01/2021	11	1	0	0	0	10	381463	356749	24714074	-243489.1	28962	385711
02/2021	12	1	0	0	0	10	381463	355570	25893.159	24714074	-52442	350326
03/2021	13	0	1	0	0	6	228878	160452	68425.592	25893.159	-53946	155058
04/2021	14	0	1	0	0	2	76292.6	159273	-82980.53	68425.592	-10619	148454
05/2021	15	0	1	0	0	5	190732	158094	32637.461	-82980.53	8491.01	166585
06/2021	16	0	0	1	0	6	228878	229340	-462.2915	32637.461	-62547	223085
07/2021	17	0	0	1	0	4	152585	228161	-75575.81	-462.2915	-2033.2	226128
08/2021	18	0	0	1	0	5	190732	226982	-36250.42	-75575.81	754662	234529
09/2021	19	0	0	0	1	3	114439	703972	44041.726	-36250.42	2531.13	729283
10/2021	20	0	0	0	1	0	0	69218.1	-69218.09	44041.726	-77092	615089
11/2021	21	0	0	0	1	1	381463	68039	-29892.71	-69218.09	6735.77	74774.8
12/2021	22	1	0	0	0	7	267024	343779	-76754.89	-29892.71	1720.27	345499
01/2022	23	1	0	0	0	16	610341	342600	267740.9	-76754.89	7697	350297
02/2022	24	1	0	0	0	9	343317	341421	1895.8786	267740.9	-36239	305181
03/2022	25	0	1	0	0	3	114439	146308	-31864.29	1895.8786	-2334	143969
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	-31864.29	1971.73	•

Se hallaron los coeficientes de correlación entre las variables, los cuales son los que se muestran en la siguiente tabla:

TABLA X

Tabla de los coeficientes de correlación de las variables utilizadas en el modelo predictivo de los encuestados que contrajeron COVID-19 por mes y año.

Multivariate	
Correlations	
Pronóstico de personas	1.0000
Periodo	0.0940
Verano	0.8204
Otoño	-0.2586
Primavera	-0.7233
Invierno	0.1748
Pronóstico de personas	1.0000
Periodo	0.0940
Verano	0.8204
Otoño	-0.2586
Primavera	-0.7233
Invierno	0.1748
Periodo	0.0940
Verano	0.3117
Otoño	-0.2224
Primavera	-0.3158
Invierno	-0.3158
Verano	1.0000
Otoño	-0.3504
Primavera	-0.3504
Invierno	1.0000
Otoño	0.0779
Primavera	-0.3504
Invierno	-0.3504
Primavera	1.0000
Invierno	-0.3158
Otoño	-0.3504
Verano	-0.3158
Invierno	1.0000

Se observa que entre las variables “pronóstico de personas” y “verano” hay una correlación positiva fuerte; entre “pronóstico de personas” y “periodo” la correlación es positiva y débil; y entre “verano” y “periodo” la correlación es positiva y moderada. En los demás casos, las correlaciones entre variables son negativas y débiles o moderadas, salvo por la correlación entre “primavera” y “pronóstico de personas” que es negativa y fuerte.

Las matrices de los gráficos de dispersión entre las variables son las siguientes:

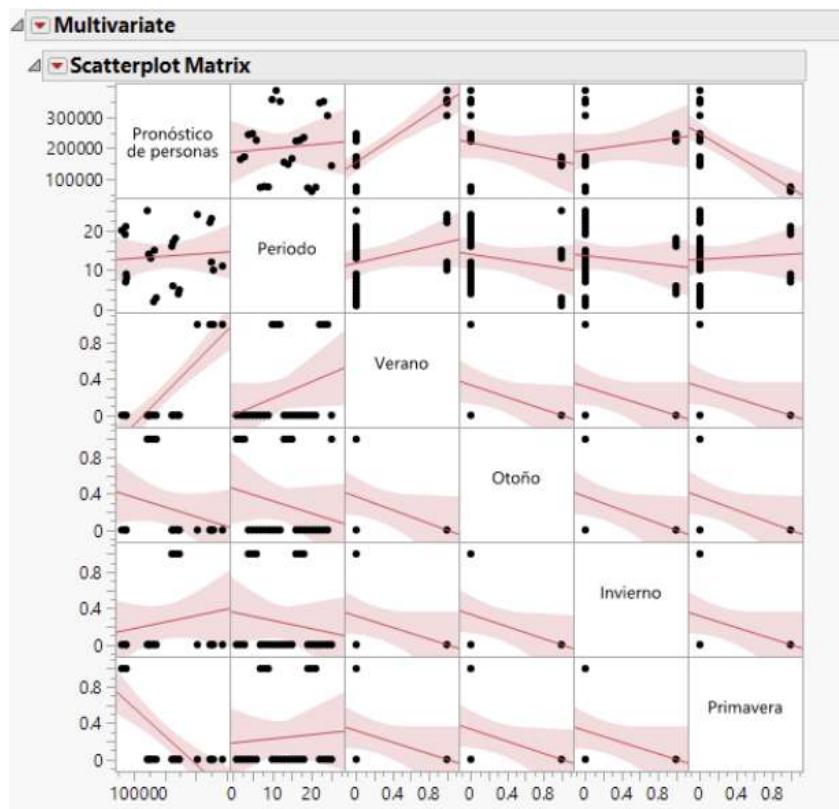


Figura XXX: Matriz de los gráficos de dispersión entre las variables utilizadas en el modelo predictivo de los encuestados que contrajeron COVID-19 por mes y año.

En estos gráficos se pueden visualizar las posiciones de los datos y las líneas de ajuste para verificar de manera geométrica que las variables tienen las relaciones lineales mencionadas en el párrafo en el que se analizan los valores de la tabla de coeficientes de correlación de estas variables.

Al realizar el modelo predictivo con las cantidades de las personas contagiadas por fecha, se obtuvieron los siguientes resultados:

TABLA XI

Tabla de datos del modelo predictivo de los encuestados que contrajeron COVID-19 por mes y año.

Response oversampling de personas					
Whole Model					
Residual by Predicted Plot					
Parameter Estimates					
Term		Estimate	Std Error	t Ratio	Prob> t
Intercept	Biased	369718.87	63252.38	5.85	<.0001*
Periodo		-1179.085	2896.272	-0.41	0.6883
Primavera	Biased	-276919.1	56821.93	-4.87	<.0001*
Invierno	Biased	-121513.4	58781.1	-2.07	0.0519
Otoño	Biased	-193938.6	57360.67	-3.38	0.0030*
Verano	Zeroed	0	0	.	.

Se observa que los *p*-valores del término independiente y de la variable “primavera” son

menores a 0.001, por lo que hay evidencia abrumadora en contraste de la hipótesis nula para esos casos. En el caso de la variable “otoño”, hay una evidencia fuerte en contraste de la hipótesis nula. Pero en los otros dos casos, hay poca o ninguna evidencia en contraste de la hipótesis nula. Sin embargo, los modelos de correlación en serie en residuos permiten hallar pronósticos para crear un modelo predictivo cuyos *p*-valores no indiquen que hay poca o ninguna evidencia en contraste de la hipótesis nula.

La ecuación de este modelo predictivo es:

$$\hat{y} = 369718.87 - 1179.085t - 193938.6x_1 - 121513.4x_2 - 276919.1x_3 \quad (16)$$

Donde t es la variable que representa el periodo, y x_1, x_2 y x_3 son las variables indicadoras de otoño, invierno y primavera respectivamente. El modelo asume que la temporada es de verano cuando todas las variables indicadoras toman el valor de cero.

Al reemplazar los valores de la tabla 11 en el modelo predictivo, se obtienen los valores predecidos de las cantidades de personas contagiadas por fecha. Esos valores están en la columna que dice “personas predichas”. Despues se hallan los residuos calculando las diferencias entre las cantidades de personas y las cantidades de personas predecidas. Luego, esos residuos pasan a ser los residuos lag de los datos del periodo posterior. Se construye un modelo predictivo cuya variable independiente es la que adopta los valores de los residuos lag y la variable dependiente la que toma los valores de los residuos. En este caso, el modelo tiene la siguiente ecuación:

$$\hat{e}_t = -2092.19 - 0.127538e_{t-1} \quad (17)$$

Donde \hat{e}_t y e_{t-1} son el residuo predecido y el residuo lag respectivamente de la cantidad de personas que contrajeron COVID-19 en el periodo t . Luego, sumamos los valores de las cantidades de personas contagiadas predecidas y los residuos predecidos para obtener los pronósticos de las cantidades de personas que contrajeron COVID-19 por periodo. Finalmente, se construye el modelo predictivo con los valores pronosticados respecto al periodo y las variables indicadoras que representan las temporadas.

En la siguiente imagen se incluye el gráfico de las observaciones realizadas respecto a los datos predichos:

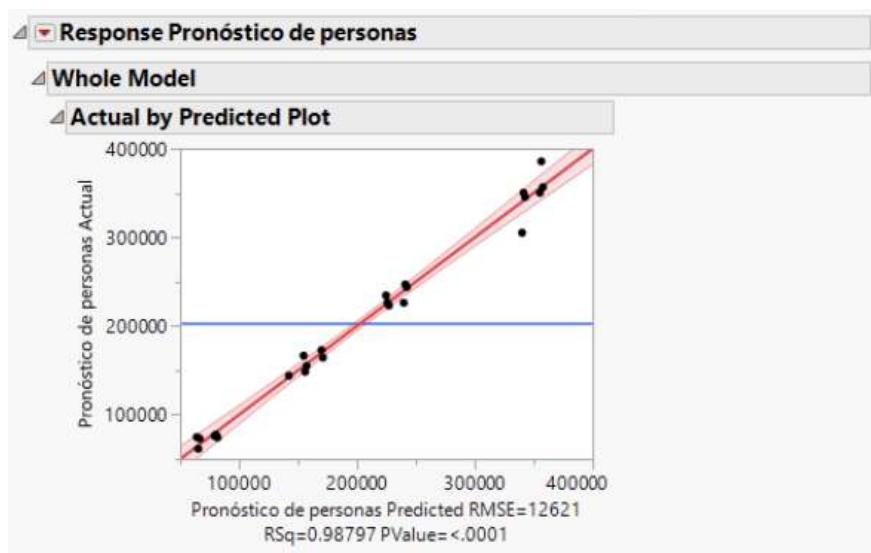


Figura XXXI: Diagrama de las observaciones realizadas respecto a los datos predichos del modelo predictivo de los encuestados que contrajeron COVID-19 por mes y año.

En la siguiente figura:

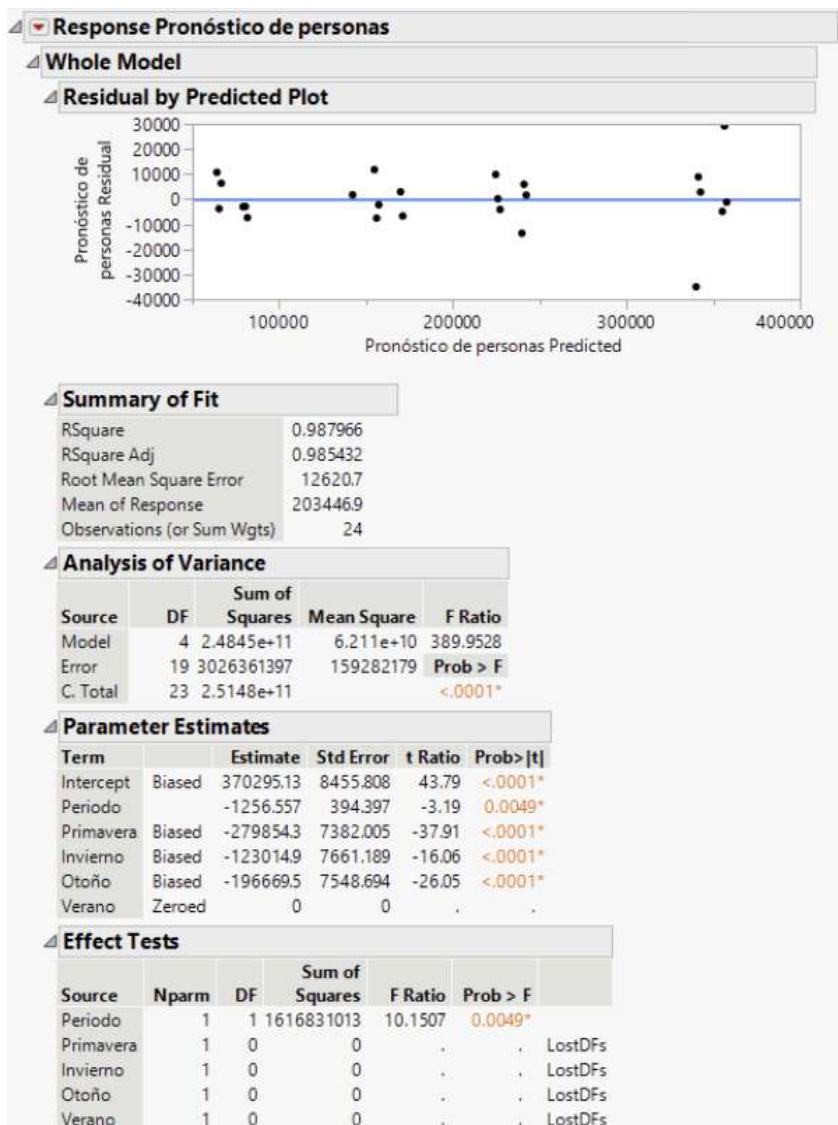


Figura XXXII: Datos estadísticos del modelo predictivo de las cantidades de personas encuestadas que contrajeron COVID-19 por mes y año.

Se puede observar lo siguiente:

- El gráfico muestra los residuos respecto a los pronósticos de las cantidades de personas predecidas.
- El resumen de ajuste muestra los siguientes datos:
 - El valor cuadrático del coeficiente de correlación es 0.987966.
 - El valor cuadrático del coeficiente de correlación ajustado es 0.985432; lo que quiere decir que se han agregado predictores al modelo que lo mejoraron muy ligeramente menos de lo esperado, ya que este valor es menor al anterior por menos de 3 milésimas.
 - La raíz del error cuadrático medio (RECM) o desviación estándar es 12620.7.
 - La media de las ordenadas de los datos es 203446.9.

- En total hay 24 observaciones.
- En el análisis de la varianza se muestra lo siguiente:
 - Dado que en el modelo se comparan cinco variables ya que el término "verano" se toma como base y no se representa mediante una variable en el modelo predictivo, este tendrá $5 - 1 = 4$ grados de libertad.
 - El error posee 19 grados de libertad debido a que equivalen a la diferencia entre el total de observaciones y el total de variables.
 - Debido a lo anterior, el número de grados de libertad totales es 23.
 - La suma de cuadrados entre las medias de los grupos y la gran media es $2.4845 \cdot 10^{11}$.
 - La suma de cuadrados entre los datos y las medias de los grupos es 3026361397.
 - La suma de cuadrados entre los n datos y la gran media es $2.5148 \cdot 10^{11}$.
 - El valor obtenido por la estadística de prueba para verificar la hipótesis general es 389.9528.

- Teniendo en cuenta los parámetros estimados:

- El modelo predictivo estaría dado por la ecuación:

$$\hat{y} = 370295.13 - 1256.557t - 196669.5x_1 - 123014.9x_2 - 279854.3x_3 \quad (18)$$

Donde t representa el periodo, y x_1, x_2 y x_3 son las variables indicadoras de "otoño", "invierno", y "primavera", tomando como base la temporada "verano".

- Las desviaciones estándar del término independiente y de la pendiente respecto al periodo son 8455.808 y 394.397 respectivamente; mientras que las de las variables indicadoras "otoño", "invierno" y "primavera" son 7548.694, 7661.189 y 7382.005 respectivamente.
- Como los p -valores del término independiente y de las variables indicadoras son menores a 0.001, hay evidencia abrumadora en contraste de la hipótesis nula en esos términos; y como el p -valor del periodo es mayor a 0.001 y menor a 0.025, hay evidencia fuerte o sustancial en contraste de la hipótesis nula en ese término.

7). Resultados según los datos del MINSA

Se registraron las cantidades de personas que contrajeron COVID-19 de la página web del MINSA [9] por mes y año. Esas cantidades están representadas en el siguiente gráfico:



Figura XXXIII: Gráfico del número de contagios por mes y año según los datos del MINSA.

Luego de haber obtenido estos datos, de manera similar que con los datos por mes y año de los encuestados, se definieron la variable continua “periodo” y las variables indicadoras “verano”, “otoño”, “invierno” y “primavera” para ajustar la temporalidad en el modelo de regresión múltiple. Después, se halló el modelo de regresión para obtener las personas predecidas y poder calcular los residuos. Al final, se construyeron modelos de correlación en serie en residuos para obtener pronósticos que nos permitan construir un modelo predictivo de mayor precisión.

Los datos obtenidos se encuentran en la siguiente tabla:

TABLA XII

Tabla del número de contagios por mes y año según los datos del MINSA.

Fecha	Periodo	Verano	Otoño	Invierno	Primavera	Personas	Personas predichas	Residuos	Residuos lag	Residuos predichos	Pronóstico de personas
03/2020	1	0	1	0	0	1323	85111.8	-83788.75	*	*	*
04/2020	2	0	1	0	0	39136	88616.1	-49480.14	-83788.75	12884.999	101501
05/2020	3	0	1	0	0	129580	92120.5	37459468	-49480.14	9289.4735	101410
06/2020	4	0	0	1	0	118438	88137.4	30300.563	37459468	178.2447	88315.7
07/2020	5	0	0	1	0	133706	91641.8	42064.173	30300.563	928.49448	92570.3
08/2020	6	0	0	1	0	234946	95146.2	139799.78	42064.173	-304.3261	94841.9
09/2020	7	0	0	0	1	161168	41458.4	119709.56	139799.78	-10546.97	30911.5
10/2020	8	0	0	0	1	86614	44962.8	41651.173	119709.56	-8441.525	36521.3
11/2020	9	0	0	0	1	60317	48467.2	11849.783	41651.173	-261.0439	48206.2
12/2020	10	1	0	0	0	51971	250234	-198263.3	11849.783	2862.1272	253096
01/2021	11	1	0	0	0	125517	253739	-128221.7	-198263.3	24881.873	278621
02/2021	12	1	0	0	0	190223	257243	-67020.05	-128221.7	17541.546	274785
03/2021	13	0	1	0	0	228784	127164	101619.57	-67020.05	11127.647	138292
04/2021	14	0	1	0	0	243192	130669	112523.18	101619.57	-6545.703	124123
05/2021	15	0	1	0	0	156172	134173	21998.789	112523.18	-7688.396	126485
06/2021	16	0	0	1	0	96467	130190	-33723.12	21998.789	1798.5163	131989
07/2021	17	0	0	1	0	55647	133695	-78047.51	-33723.12	7638.1449	141333
08/2021	18	0	0	1	0	36805	137199	-100393.9	-78047.51	12283.319	149482
09/2021	19	0	0	0	1	26315	83511.1	-57196.12	-100393.9	14625.21	98136.3
10/2021	20	0	0	0	1	25868	87015.5	-61147.51	-57196.12	10098.104	97113.6
11/2021	21	0	0	0	1	35653	90519.9	-54866.9	-61147.51	10512.208	101032
12/2021	22	1	0	0	0	63335	292287	-228951.9	-54866.9	9854.0027	302141
01/2022	23	1	0	0	0	960988	295791	665196.66	-228951.9	28098.032	323889
02/2022	24	1	0	0	0	256556	299296	-42739.73	665196.66	-65608.31	233687
03/2022	25	0	1	0	0	28885	169217	-140332.1	-42739.73	8583.0816	177800
*	*	*	*	*	*	*	*	*	-140332.1	18810.716	*

Se hallaron los coeficientes de correlación entre las variables, los cuales son los que se

muestran en la siguiente tabla:

TABLA XIII

Tabla de los coeficientes de correlación de las variables utilizadas en el modelo predictivo del número de contagios por mes y año según los datos del MINSA.

	Pronóstico de personas	Periodo	Verano	Otoño	Primavera	Invierno
Pronóstico de personas	1.0000	0.4888	0.9033	-0.1707	-0.5252	-0.1987
Periodo	0.4888	1.0000	0.3117	-0.2224	0.0779	-0.1559
Verano	0.9033	0.3117	1.0000	-0.3504	-0.3158	-0.3158
Otoño	-0.1707	-0.2224	-0.3504	1.0000	-0.3504	-0.3504
Primavera	-0.5252	0.0779	-0.3158	-0.3504	1.0000	-0.3158
Invierno	-0.1987	-0.1559	-0.3158	-0.3504	-0.3158	1.0000

Se observa que entre las variables “pronóstico de personas” y “verano” hay una correlación positiva fuerte; entre “pronóstico de personas” y “periodo”, y entre “verano” y “periodo” las correlaciones son positivas y moderadas. En los demás casos, las correlaciones entre variables son negativas y débiles o moderadas; entre las cuales, la correlación entre “primavera” y “pronóstico de personas” es la de mayor módulo.

Las matrices de los gráficos de dispersión entre las variables son las siguientes:

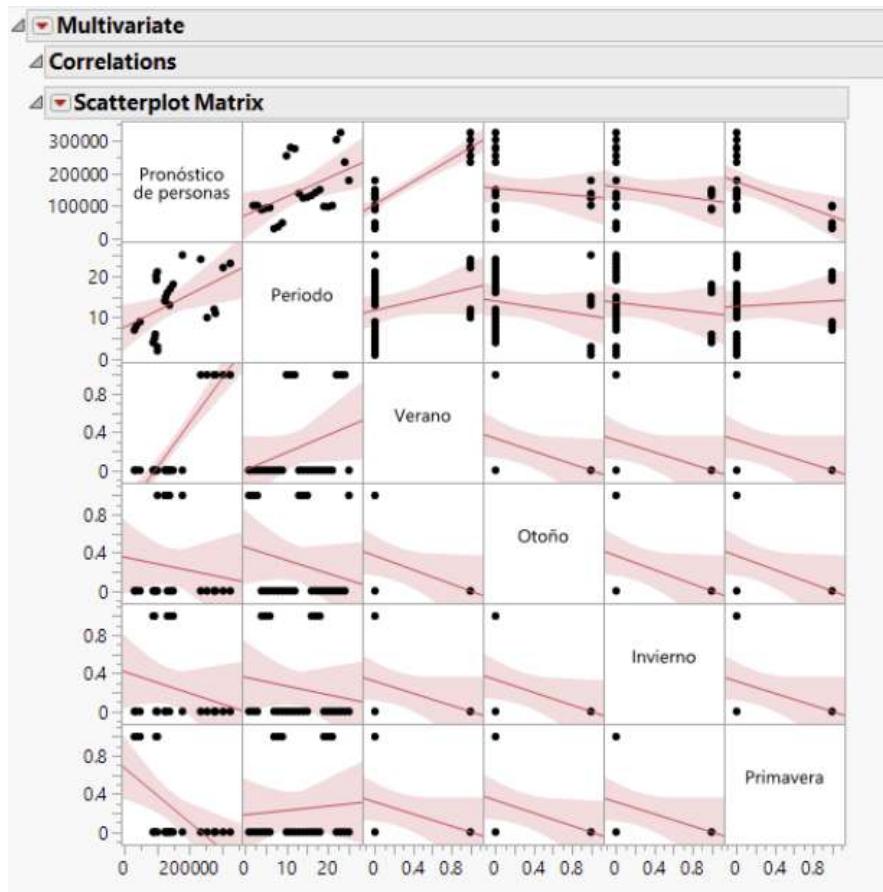


Figura XXXIV: Matriz de los gráficos de dispersión entre las variables utilizadas en el modelo predictivo del número de contagios por mes y año según los datos del MINSA.

En estos gráficos se pueden visualizar las posiciones de los datos y las líneas de ajuste para verificar de manera geométrica que las variables tienen las relaciones lineales men-

cionadas en el párrafo en el que se analizan los valores de la tabla de coeficientes de correlación de estas variables.

Al realizar el modelo predictivo con las cantidades de las personas contagiadas por fecha, se obtuvieron los siguientes resultados:

TABLA XIV

Tabla de datos del modelo predictivo del número de contagios por mes y año según los datos del MINSA.

Response Personas					
Whole Model					
Residual by Predicted Plot					
Parameter Estimates					
Term		Estimate	Std Error	t Ratio	Prob> t
Intercept	Biased	215190.37	119631.4	1.80	0.0872
Periodo		3504.3899	5477.821	0.64	0.5296
Primavera	Biased	-198262.7	107469.3	-1.84	0.0799
Invierno	Biased	-141070.5	111174.8	-1.27	0.2190
Otoño	Biased	-133583	108488.3	-1.23	0.2325
Verano	Zeroed	0	0	.	.

Se observa que todos los *p*-valores son mayores a 0.01. Por lo tanto, en todos los casos hay poca o ninguna evidencia en contraste de la hipótesis nula. Sin embargo, como ya se mencionó, los modelos de correlación en serie en residuos permiten hallar pronósticos para crear un modelo predictivo cuyos *p*-valores no indiquen que hay poca o ninguna evidencia en contraste de la hipótesis nula.

La ecuación de este modelo predictivo es:

$$\hat{y} = 215190.37 + 3504.3899t - 133583x_1 - 141070.5x_2 - 198262.7x_3 \quad (19)$$

Donde *t* es la variable que representa el periodo, y x_1 , x_2 y x_3 son las variables indicadoras de otoño, invierno y primavera respectivamente. El modelo asume que la temporada es de verano cuando todas las variables indicadoras toman el valor de cero.

Al igual que en el caso de las personas encuestadas, al reemplazar los valores de la tabla 14 en el modelo predictivo, se obtienen los valores predecidos de las cantidades de personas contagiadas por fecha. Esos valores están en la columna que dice “personas predichas”. Despues se hallan los residuos calculando las diferencias entre las cantidades de personas y las cantidades de personas predecidas. Luego, esos residuos pasan a ser los residuos lag de los datos del periodo posterior. Se construye un modelo predictivo cuya variable independiente es la que adopta los valores de los residuos lag y la variable dependiente la que toma los valores de los residuos. En este caso, el modelo tiene la siguiente ecuación:

$$\hat{e}_t = 4103.9787 - 0.1048e_{t-1} \quad (20)$$

Donde \hat{e}_t y e_{t-1} son el residuo predicho y el residuo lag respectivamente de la cantidad de personas que contrajeron COVID-19 en el periodo *t*. Luego, sumamos los valores de las cantidades de personas contagiadas predichas y los residuos predichos para obtener los pronósticos de las cantidades de personas que contrajeron COVID-19 por periodo. Finalmente, se construye el modelo predictivo con los valores pronosticados respecto al periodo y las variables indicadoras que representan las temporadas.

En la siguiente imagen se incluye el gráfico de las observaciones realizadas respecto a los datos predichos:

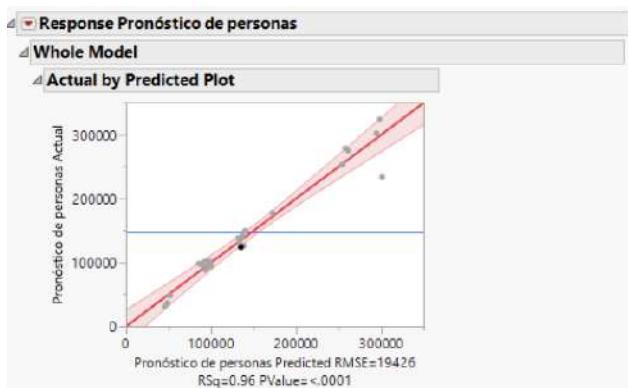


Figura XXXV: Diagrama de las observaciones realizadas respecto a los datos predichos del modelo predictivo del número de contagios por mes y año según los datos del MINSA.

En la siguiente imagen:

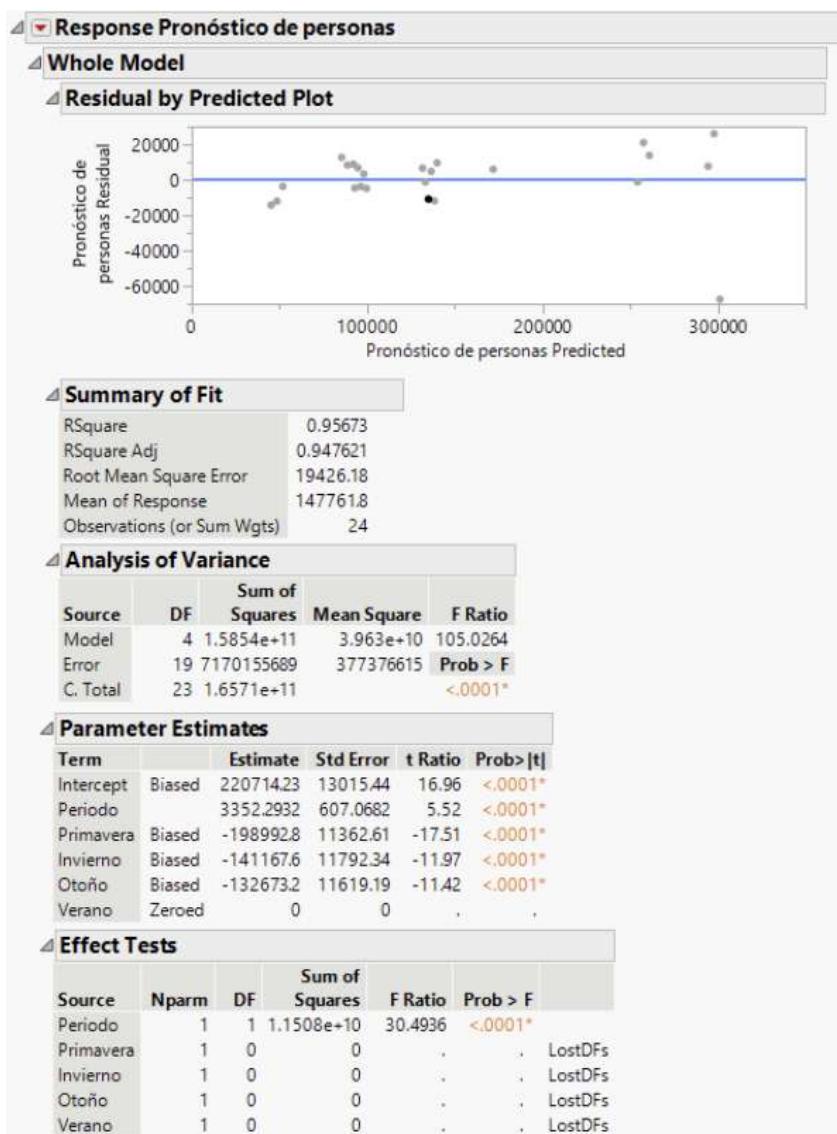


Figura XXXVI: Datos estadísticos del modelo predictivo del número de contagios por mes y año según los datos del MINSA.

Se puede observar lo siguiente:

- El gráfico muestra los residuos respecto a los pronósticos de las cantidades de personas predichas.
- El resumen de ajuste muestra los siguientes datos:
 - El valor cuadrático del coeficiente de correlación es 0.95673.
 - El valor cuadrático del coeficiente de correlación ajustado es 0.947621; lo que quiere decir que se han agregado predictores al modelo que lo mejoraron ligeramente menos de lo esperado, ya que este valor es menor al anterior por menos de 1 centésima.
 - La raíz del error cuadrático medio (RECM) o desviación estándar es 19426.18.
 - La media de las ordenadas de los datos es 147761.8.
 - En total hay 24 observaciones.
- En el análisis de la varianza se muestra lo siguiente:
 - Dado que en el modelo se comparan cinco variables ya que el término “verano” se toma como base y no se representa mediante una variable en el modelo predictivo, este tendrá $5 - 1 = 4$ grados de libertad.
 - El error posee 19 grados de libertad debido a que equivalen a la diferencia entre el total de observaciones y el total de variables.
 - Debido a lo anterior, el número de grados de libertad totales es 23.
 - La suma de cuadrados entre las medias de los grupos y la gran media es $1.5854 \cdot 10^{11}$.
 - La suma de cuadrados entre los datos y las medias de los grupos es 7170155689.
 - La suma de cuadrados entre los n datos y la gran media es $1.6571 \cdot 10^{11}$.
 - El valor obtenido por la estadística de prueba para verificar la hipótesis general es 105.0264.
- Teniendo en cuenta los parámetros estimados:
 - El modelo predictivo estaría dado por la ecuación:
$$\hat{y} = 220714.23 + 3352.3932t - 132673.2x_1 - 141167.6x_2 - 198992.8x_3 \quad (21)$$
Donde t representa el periodo y x_1, x_2 y x_3 son las variables indicadoras de “otoño”, “invierno” y “primavera” tomando como base la temporada de “verano”.
 - Las desviaciones estándar del término independiente y de la pendiente respecto al periodo son 13015.44 y 607.0682 respectivamente; mientras que las de las variables indicadoras “otoño”, “invierno” y “primavera” son 11619.19, 11792.34 y 11362.61 respectivamente.
 - Como los p -valores de todos los términos son menores a 0.001, hay evidencia abrumadora en contraste de la hipótesis nula en todos los casos.

8). Comparación entre los resultados según la encuesta y según los datos del MINSA

En la siguiente tabla se muestran las variaciones porcentuales entre las cantidades de personas contagiadas por mes y año según la encuesta, luego de haber realizado oversampling, y según el MINSA. Dado que algunos de los encuestados contrajeron COVID-19 más de una vez, a estos resultados se les multiplicó un factor de corrección equivalente al cociente entre el total de datos obtenidos del MINSA y el total de datos de los encuestados luego de haber realizado oversampling:

TABLA XV

Tabla de porcentajes de variación entre las cantidades de contagios por mes y año según la encuesta y según los datos del MINSA.

Fecha	Oversampling de personas encuestadas contagiadas	Multiplicación por el factor de corrección	Personas contagiadas según datos del MINSA	Variación porcentual
Mar-20	228878	158848	1323	11906.66%
Abr-20	152585	105898	39136	170.59%
May-20	152585	105898	129580	-18.28%
Jun-20	190732	132374	118438	11.77%
Jul-20	343317	238272	133706	78.21%
Ago-20	305170	211797	234946	-9.85%
Set-20	114439	79424	161168	-50.72%
Oct-20	114439	79424	86614	-8.30%
Nov-20	76293	52949	60317	-12.21%
Dic-20	114439	79424	51971	52.82%
Ene-21	381463	264747	125517	110.92%
Feb-21	381463	264747	190223	39.18%
Mar-21	228878	158848	228784	-30.57%
Abr-21	76293	52949	243192	-78.23%
May-21	190732	132374	156172	-15.24%
Jun-21	228878	158848	96467	64.67%
Jul-21	152585	105898	55647	90.30%
Ago-21	190732	132374	36805	259.66%
Set-21	114439	79424	26315	201.82%
Oct-21	0	0	25868	-100.00%
Nov-21	38146	26475	35653	-25.74%
Dic-21	267024	185323	63335	192.61%
Ene-22	610341	423595	960988	-55.92%
Feb-22	343317	238272	256556	-7.13%
Mar-22	114439	79424	28885	174.97%
Total	5111607	3547606	3547606	47.09%

Como se puede observar, los módulos de los porcentajes son menores en todos los casos, excepto en marzo de 2020, ya que 6 de los 93 encuestados respondieron que contrajeron el coronavirus en ese mes. Esto quizás se deba a que, como en ese mes la enfermedad recién estaba comenzando a ser diagnosticada en el Perú y las clínicas de nuestro país aún no estaban muy preparadas para atender los casos, es posible que haya un considerable número de personas que experimentaron los síntomas ese mes pero no lograron hacerse un diagnóstico. Para obtener la variación porcentual total, se sumaron los valores absolutos de las diferencias entre los casos por mes y se dividió el total obtenido entre el total de personas contagiadas según los datos del MINSA. La variación porcentual total es 47.09 %.

El modelo predictivo que se obtuvo según los datos de la encuesta luego de multiplicar sus términos por el factor de corrección es:

$$\hat{y} = 256595.80 - 818.32t - 134599.11x_1 - 84333.88x_2 - 192190.02x_3 \quad (22)$$

Y el modelo predictivo que se obtuvo según los datos del MINSA es:

$$\hat{y} = 215190.37 + 3504.3899t - 133583x_1 - 141070.5x_2 - 198262.7x_3 \quad (23)$$

Donde se tiene que t representa el periodo y x_1, x_2 y x_3 son las variables indicadoras de “otoño”, “invierno” y “primavera” tomando como base la temporada de “verano”. Por lo tanto, las variaciones porcentuales entre los coeficientes de los términos son las siguientes:

- **Término independiente:** $\frac{256595.80 - 215190.37}{215190.37} \cdot 100\% = 19.241\%$
- **Periodo:** $\frac{-818.32 - 3504.3899}{3504.3899} \cdot 100\% = -123.351\%$
- **Otoño:** $\frac{-134599.11 - (-133583)}{-133583} \cdot 100\% = 0.761\%$
- **Invierno:** $\frac{-84333.88 - (-141070.5)}{-141070.5} \cdot 100\% = -40.219\%$
- **Primavera:** $\frac{-192190.02 - (-198262.7)}{-198262.7} \cdot 100\% = -3.063\%$

Y para hallar la variación porcentual total, se toman en cuenta los datos desde que $t = 1$ hasta que $t = 26$. Por lo tanto, la variación porcentual total sería:

$$\frac{|256595.80 - 215190.37| \cdot 25 + |-818.32 - 3504.39| \cdot S + SD \cdot 6}{215190.37 \cdot 25 + 3504.39 \cdot S + (134599.11 + 141070.5 + 198262.7) \cdot 6} \cdot 100\% = 31.037\%$$

Donde: $S = 1 + 2 + 3 + \dots + 26$ y $SD = |-134599.11 - (-133583)| + |-84333.88 - (-141070.5)| + |-192190.02 - (-198262.7)|$

Por lo tanto, existe una variación considerable entre ambos modelos predictivos.

A los datos pronosticados de las cantidades de personas contagiadas por mes y año, respecto a la encuesta y respecto a los datos del MINSA, también se les multiplicó un factor de corrección equivalente al cociente de los totales de estas cantidades. En la siguiente tabla se muestran las variaciones porcentuales obtenidas:

TABLA XVI

Tabla de porcentajes de variación entre los pronósticos de las cantidades de contagios por mes y año según la encuesta y según los datos del MINSA.

Fecha	Pronóstico personas contagiadas según encuesta	Multiplicación por el factor de corrección	Pronóstico personas contagiadas según datos del MINSA	Variación porcentual
Mar-20				
Abr-20	164408	119408	101501	17.64%
May-20	172808	125509	101410	23.76%
Jun-20	243904	177145	88316	100.58%
Jul-20	246946	179355	92570	93.75%
Ago-20	226157	164256	94842	73.19%
Set-20	74287	53954	30912	74.54%
Oct-20	77463	56260	36521	54.05%
Nov-20	76133	55295	48206	14.70%
Dic-20	356588	258987	253096	2.33%
Ene-21	385711	280139	278621	0.54%
Feb-21	350326	254439	274785	-7.40%
Mar-21	155058	112617	138292	-18.57%
Apr-21	148454	107821	124123	-13.13%
May-21	166585	120989	126485	-4.34%
Jun-21	223085	162025	131989	22.76%
Jul-21	226128	164235	141333	16.20%
Ago-21	234529	170336	149482	13.95%
Set-21	72928	52967	98136	-46.03%
Oct-21	61509	44673	97114	-54.00%
Nov-21	74775	54308	101032	-46.25%
Dic-21	345499	250933	302141	-16.95%
Ene-22	350297	254418	323889	-21.45%
Feb-22	305181	221650	233687	-5.15%
Mar-22	143969	104563	177800	-41.19%
Total	4882727	3546283	3546283	12.27%

Como se puede observar, las variaciones porcentuales son menores que las de la tabla 15 en términos generales. La variación porcentual total es 12.27%; la cual es menor en 34,82% que la anterior. Por lo tanto, al efectuar los mecanismos para obtener los datos pronosticados, se redujeron de manera significativa las variaciones porcentuales obtenidas.

El modelo predictivo que se obtuvo según los datos pronosticados de la encuesta luego de multiplicar sus términos por el factor de corrección es:

$$\hat{y} = 256995.74 - 872.09t - 136494.09x_1 - 85375.97x_2 - 194227.14x_3 \quad (24)$$

Y el modelo predictivo que se obtuvo según los datos pronosticados del MINSA es:

$$\hat{y} = 220714.23 + 3352.3932t - 132673.2x_1 - 141167.6x_2 - 198992.8x_3 \quad (25)$$

Donde se tiene que t representa el periodo y x_1, x_2 y x_3 son las variables indicadoras de “otoño”, “invierno” y “primavera” tomando como base la temporada de “verano”. Por lo tanto, las variaciones porcentuales entre los coeficientes de los términos son las siguientes:

- **Término independiente:** $\frac{268942.20 - 220714.23}{220714.23} \cdot 100\% = 21.851\%$
- **Periodo:** $\frac{-912.63 - 3352.3932}{3352.3932} \cdot 100\% = -127.223\%$
- **Otoño:** $\frac{-142839.02 - (-132673)}{-132673} \cdot 100\% = 7.662\%$
- **Invierno:** $\frac{-89344.67 - (-141167.6)}{-141167.6} \cdot 100\% = -36.710\%$
- **Primavera:** $\frac{-203255.79 - (-198992.8)}{-198992.8} \cdot 100\% = -2.142\%$

Y para hallar la variación porcentual total, se toma en cuenta que estos modelos se construyeron en base a los pronósticos de las cantidades obtenidas; por lo que se toman en cuenta los datos desde que $t = 2$ hasta que $t = 26$. Por lo tanto, la variación porcentual total sería:

$$\begin{aligned} & \frac{|268942.20 - 220714.23| \cdot 25 + |-912.63 - 3352.39| \cdot S + SD \cdot 6}{220714.23 \cdot 25 + 3352.39 \cdot S + (132673 + 141167.6 + 198992.8) \cdot 6} \cdot 100\% \\ & = 32.493\% \end{aligned}$$

Donde: $S = 2+3+\dots+26$ y $SD = |-142839.02 - (-132673)| + |-89344.67 - (-141167.6)| + |-203255.79 - (-198992.8)|$.

Por lo tanto, si bien la variación en los datos disminuye bastante al hallar las cantidades pronosticadas, la variación en los modelos predictivos es incluso ligeramente mayor, debido en gran medida a que los coeficientes de los períodos de cada modelo predictivo tienen signos diferentes.

9). Cantidad de los encuestados que se realizaron diversas técnicas imagenológicas, los motivos y reacciones adversas

A los encuestados se les preguntó si se realizaron alguna técnica imagenológica. De los 261 que respondieron, 12 afirmaron haberse hecho tomografía computarizada, 19 colocaron haberse realizado resonancia magnética, 18 colocaron ambas, 11 pusieron otra y 201 marcaron ninguna. Por lo tanto, el gráfico circular que muestra los porcentajes de encuestados que realizaron cada una de estas técnicas imagenológicas es el siguiente:

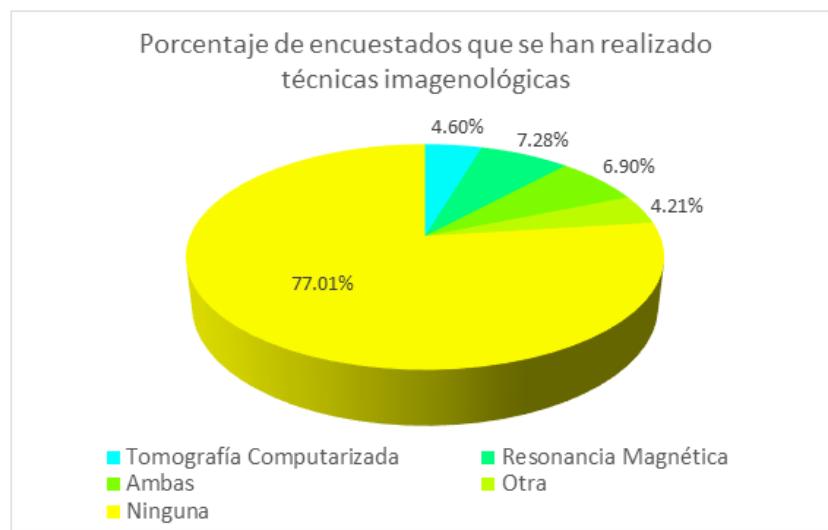


Figura XXXVII: Gráfico circular de los porcentajes de los encuestados que se realizaron cada técnica imagenológica.

Como se puede observar, más de tres de cada cuatro encuestados respondieron que nunca se han realizado alguna técnica imagenológica, alrededor del 18% respondió haberse hecho tomografía computarizada o resonancia magnética y sólo alrededor del 4% alguna otra.

También se les preguntó los motivos por los que se realizaron técnicas imagenológicas y se obtuvo la siguiente lista de respuestas:

- Debido a un síndrome
- Debido a un tumor cerebral
- Por una enfermedad crónica
- Por un menisco discoide
- Por un dolor de cabeza
- Debido a una uveítis bilateral
- Para un diagnóstico de enfermedad
- Para un chequeo general
- Para una consulta
- Por el corazón
- Debido a una lesión
- Debido a una fractura
- Por la vesícula
- Debido a cálculos renales
- Por un dolor de abdomen
- Por las rodillas, senos y paranasales

- Debido a una convulsión
- Por el maxilar
- Debido a una tendinitis
- Debido a un cáncer de tiroides y ganglios
- Para un tratamiento médico
- Debido a una bursitis
- No sabe el motivo

Teniendo en cuenta las diversas respuestas, se construyó un gráfico circular mostrando los porcentajes de los encuestados que brindaron algunas de estas respuestas. El gráfico es el siguiente:

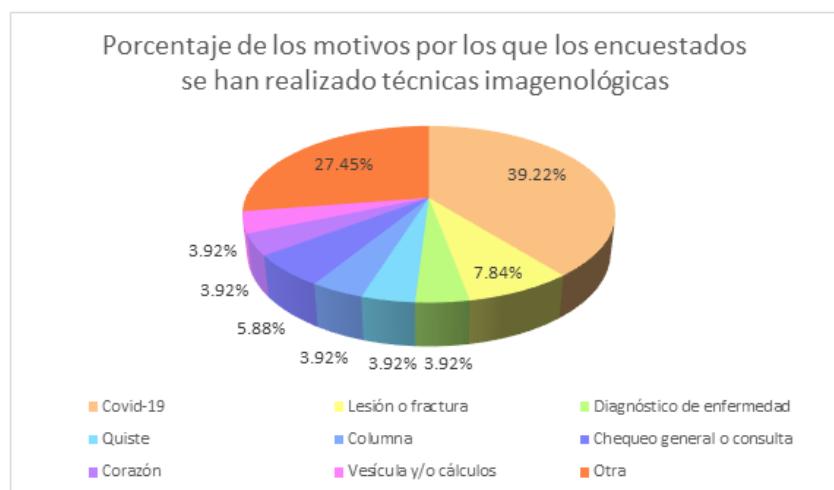


Figura XXXVIII: Gráfico circular de los porcentajes de los motivos por los que los encuestados se realizaron técnicas imagenológicas.

Como se puede visualizar, el principal motivo por el que los encuestados se han realizado técnicas imagenológicas es debido al COVID-19; casi 2 de cada 5 de los encuestados respondió que ese fue el motivo por el que se han realizado dichas técnicas. El segundo motivo principal por el que se han realizado estas técnicas es por una lesión o fractura. Y el tercer motivo principal es por la columna. También se puede observar que por cada 5 personas que se realizaron técnicas imagenológicas debido al COVID-19, una se realizó alguna de estas técnicas debido a una lesión o fractura. Por lo tanto, basándonos en los resultados de la encuesta, la pandemia aumentó significativamente la cantidad de personas que se han hecho una resonancia magnética, una tomografía computarizada o alguna otra técnica imagenológica.

Finalmente, a los encuestados se les consultó por las reacciones adversas que tuvieron luego de realizarse técnicas imagenológicas, y se obtuvieron los siguientes resultados:

Porcentajes de reacciones adversas a las técnicas
imagenológicas experimentadas por los encuestados

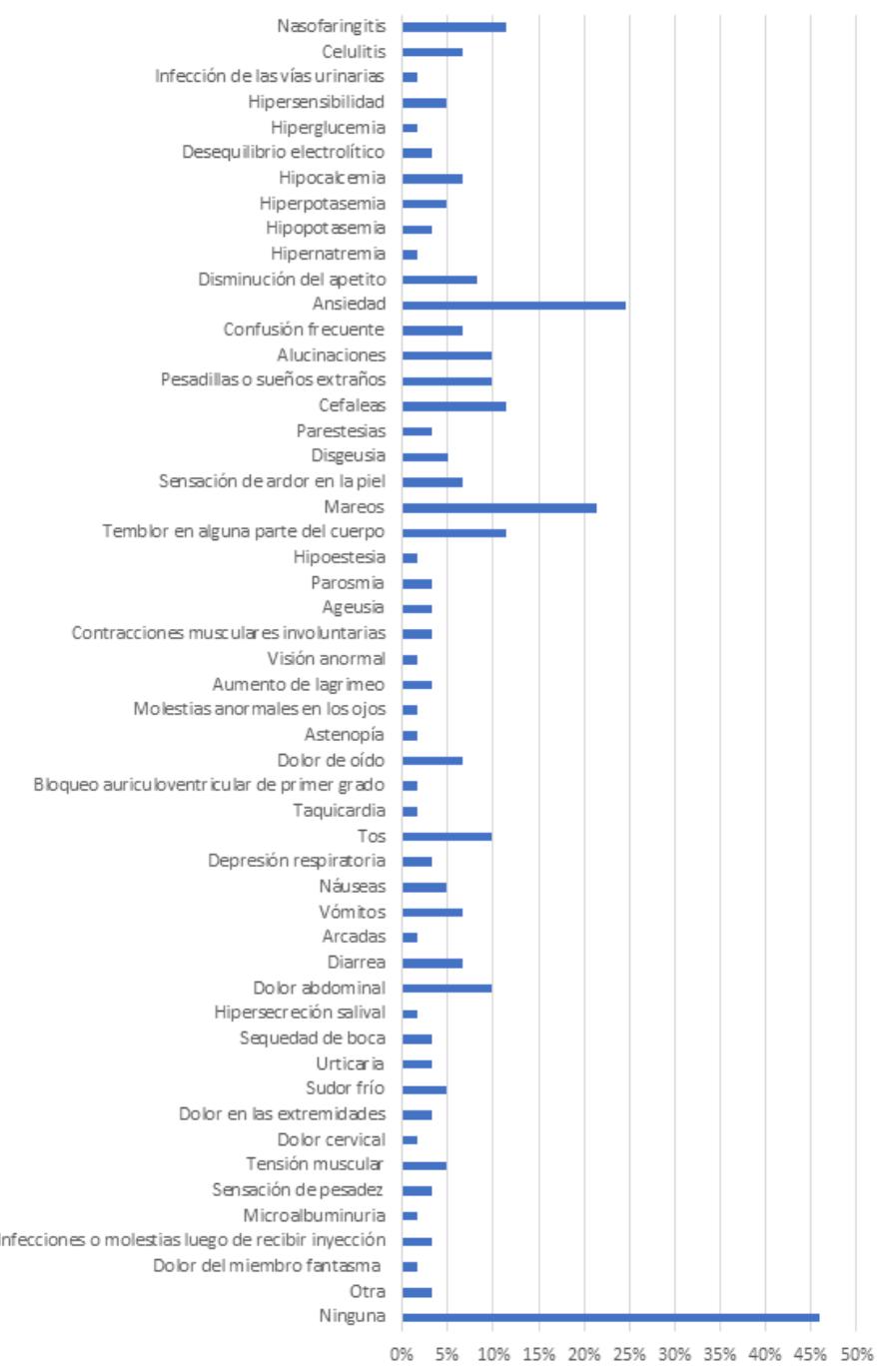


Figura XXXIX: Gráfico de barras de los porcentajes de las reacciones adversas a las técnicas imagenológicas experimentadas por los encuestados.

Como se puede visualizar, más del 50 % de los encuestados que se realizaron técnicas imagenológicas experimentó alguna reacción adversa a estas técnicas. La reacción adversa que más encuestados experimentaron es ansiedad; casi el 25 % colocó haber tenido esa reacción. La segunda reacción adversa que más encuestados experimentaron es mareos; alrededor del 21 % colocó haber tenido esa reacción. Las siguientes reacciones adversas

más frecuentes en los encuestados son temblor en alguna parte del cuerpo, cefaleas y nasofaringitis; cada una de estas reacciones fue experimentada por alrededor del 11 % de este grupo de encuestados. En total, los encuestados reportaron 50 diferentes reacciones adversas; y dos de los encuestados mencionaron haber tenido alguna otra que no estaba en la lista. Por lo tanto, los encuestados tuvieron en total entre 51 a 52 diferentes reacciones adversas a las técnicas imagenológicas. Basándonos en los resultados de la encuesta, es evidente que las técnicas imagenológicas pueden producir varias reacciones adversas en muchas personas.

Además, se halló que el promedio de la cantidad de reacciones adversas experimentadas por los encuestados del género masculino fue 1.682; mientras que en los encuestados del género femenino, este promedio fue 2.375. Por lo tanto, las mujeres son un poco más vulnerables a experimentar reacciones adversas luego de realizarse técnicas imagenológicas.

Los promedios de reacciones adversas según los rangos de edad se pueden visualizar en la siguiente tabla:

TABLA XVII

Tabla de los promedios de las cantidades de reacciones adversas a las técnicas imagenológicas experimentadas por los encuestados por rangos de edad.

Rango de edad en años	Promedio de reacciones adversas por persona
10 a 14	10,333
15	1,000
16	2,500
17	2,286
18 a 24	3,714
25 a 39	1,556
40 a 59	0,125
60 a más	1,875

Se puede visualizar que, según los datos de la encuesta, quienes tienen más reacciones adversas son las personas que tienen entre 10 a 14 años; y quienes tienen menos de estas reacciones son las personas que tienen entre 40 a 59 años. Se podría concluir que los niños son más vulnerables a los efectos de estas técnicas porque sus cuerpos son más delicados.

Y los promedios de reacciones adversas por rangos de índices de masa corporal (IMC) se encuentran en la tabla a continuación:

TABLA XVIII

Tabla de los promedios de las cantidades de reacciones adversas a las técnicas imagenológicas experimentadas por los encuestados según los rangos de índices de masa corporal.

Rango de IMC en kg / m^2	Promedio de reacciones adversas por persona
Menos de 18,5	3,200
18,5 a 22	2,579
22 a 26	1,500
26 a 30	3,800
30 a más	2,143

Aquí se puede visualizar que el grupo con mayor cantidad de reacciones adversas en términos proporcionales es el de los encuestados con un IMC entre $26\text{ kg}/m^2$ y $30\text{ kg}/m^2$; seguido por el de los encuestados con un IMC menor a $18.5\text{ kg}/m^2$. Por lo tanto, se podría concluir que el sobrepeso vuelve a las personas más vulnerables a los efectos de las técnicas imagenológicas; pero esto también sucede con quienes tienen peso muy bajo, solo que con una magnitud un poco menor. En el grupo de encuestados con un IMC mayor a 30, el promedio no fue tan alto debido a que sólo hubo 7 encuestados que se realizaron técnicas imagenológicas con un IMC dentro de ese rango y 3 de ellos colocaron no haber experimentado ninguna reacción adversa.

10). Clasificación de enfermedades como consecuencias de COVID-19

La clasificación de las enfermedades como consecuencia del post-COVID-19 varía constantemente, ya que los investigadores y médicos continúan descubriendo nuevos síntomas y efectos a largo plazo de la enfermedad. Sin embargo, las categorías principales que se han establecido en base a las afecciones observadas en algunos pacientes recuperados de COVID-19 hasta la fecha [20] son las siguientes:

- **Síndrome post-COVID-19 agudo:** Algunas personas experimentan síntomas persistentes después de haberse recuperado de la fase aguda de la infección por COVID-19. Estos síntomas pueden incluir fatiga extrema, dificultad para respirar, dolor en las articulaciones y los músculos, niebla mental, pérdida del olfato y el gusto, y depresión [21].
- **Problemas respiratorios crónicos:** Algunos pacientes pueden desarrollar enfermedades pulmonares crónicas como fibrosis pulmonar o disfunción pulmonar persistente después de una infección grave de COVID-19. Estas afecciones pueden causar dificultad respiratoria a largo plazo y requerir tratamiento médico continuo.
- **Complicaciones cardiovasculares:** Se ha observado que el COVID-19 puede dañar el sistema cardiovascular, lo que puede llevar a enfermedades cardíacas a largo plazo como miocarditis²², pericarditis²³ o problemas de ritmo cardíaco.
- **Problemas neurológicos:** Algunos pacientes pueden experimentar complicaciones neurológicas después de COVID-19, como dolores de cabeza intensos, mareos, neuropatía periférica, trastornos del sueño, problemas de memoria y dificultades de concentración.
- **Trastornos mentales y emocionales:** La pandemia de COVID-19 ha tenido un impacto significativo en la salud mental de muchas personas. Algunos pacientes pueden experimentar depresión, trastornos de ansiedad, trastorno de estrés postraumático (TEPT) u otros problemas de salud mental después de la infección por COVID-19.

La fibrosis pulmonar es una de las enfermedades post-COVID-19 más riesgosas. Un tipo de fibrosis pulmonar es la fibrosis pulmonar idiopática (FPI), cuya causa es desconocida y solo se puede diagnosticar mediante imágenes médicas. Los datos obtenidos de la encuesta realizada son útiles para determinar la influencia de la fibrosis pulmonar, ya que un estudio de cohorte sobre pacientes con COVID-19, que incluyó un seguimiento de seis meses después del alta, fue reportado por sus autores como el estudio de cohorte más grande y con mayor duración de seguimiento hasta la fecha para pacientes dados de alta.

²²inflamación del músculo cardíaco.

²³inflamación de la membrana que rodea el corazón.

Este estudio reveló que una proporción significativa de los participantes (entre el 22 % y el 56 %, dependiendo de la gravedad) presentaban algún grado de deterioro en la difusión pulmonar de monóxido de carbono (DLCO) seis meses después del inicio de los síntomas, según Pérez [22].

11). El protocolo médico y diagnóstico de la FPI

Teniendo en cuenta que la fibrosis pulmonar idiopática (FPI) es una enfermedad crónica y progresiva que afecta los pulmones, según Raghu [23], esta enfermedad puede tener un impacto significativo en la sociedad principalmente en los siguientes aspectos:

- **Protocolo médico:** La FPI es una enfermedad poco común y aún existen muchos aspectos que se desconocen. La investigación científica es crucial para comprender mejor la enfermedad, desarrollar tratamientos más efectivos y, en última instancia, encontrar una cura. Además, la concientización sobre la FPI es fundamental para promover una detección temprana, un acceso adecuado a la atención médica y la comprensión general de la enfermedad dentro de la sociedad. Para realizar un diagnóstico de esta enfermedad se utilizan imágenes médicas.
- **Salud y calidad de vida:** La FPI puede tener un impacto negativo en la salud y calidad de vida de las personas afectadas, según Kreuter y Swigris [24],[25]. Los síntomas comunes incluyen dificultad para respirar, tos seca y fatiga, lo que puede limitar la capacidad de las personas para realizar actividades diarias, trabajar y participar en actividades sociales. La enfermedad puede volverse incapacitante a medida que progresa, lo que puede requerir asistencia y cuidados especiales.
- **Economía y finanzas:** La FPI puede generar una carga económica significativa tanto para quienes la padecen como para el resto de la sociedad. Los costos de atención médica, que incluyen visitas al médico, pruebas de diagnóstico, medicamentos y posiblemente trasplante de pulmón, pueden ser elevados. Además, la disminución de la capacidad para trabajar y la posible incapacidad laboral pueden tener un impacto en los ingresos y la estabilidad financiera de los individuos y sus familias.
- **Familias:** La FPI no solo afecta a quienes la padecen, sino también a sus familias y cuidadores. La enfermedad puede requerir atención y apoyo constantes, lo que puede ser emocional y físicamente agotador para los cuidadores. Además, las personas con FPI pueden experimentar dificultades emocionales, como ansiedad y depresión, lo que resalta la importancia de brindar apoyo psicológico y servicios de atención social.

D. Problema de investigación: Detección y eliminación de errores en imágenes de FPI mediante técnicas de procesamiento de imágenes

En el presente trabajo nos centramos en analizar imágenes radiográficas y tomográficas de FPI para identificar errores de posicionamiento de la cámara, errores de almacenaje y errores de densidad. Estos errores serán corregidos mediante técnicas de calibración, amplificación, compresión y filtrado. Además, aplicaremos la técnica de resaltamiento virtual, empleando principalmente modelación matemática y simulación numérica en el procesamiento de imágenes para ubicar la verdadera zona afectada por la FPI. Esto contribuirá al mejoramiento del diagnóstico en pacientes con Fibrosis Pulmonar Idiopática (FPI), utilizando datos e imágenes obtenidas de pacientes con esta enfermedad. En la investigación, se

plantean y desarrollan modelos matemáticos basados en Ecuaciones Diferenciales Parciales Parabólicas No Lineales, Transformada Rápida de Fourier, Transformada Discreta de Coseno y Transformada Discreta de Wavelet.

1). Formulación matemática para la medición del oxígeno pulmonar y diagnóstico médico de la FPI mediante imágenes

1).1. Tipos de Fibrosis Pulmonar y desafíos en su diagnóstico

La fibrosis pulmonar idiopática (FPI) es una afección médica crónica caracterizada por una disminución gradual y constante de la función pulmonar. El término “fibrosis pulmonar” se refiere a la formación de cicatrices en el tejido pulmonar, lo que conlleva a una pérdida progresiva de la capacidad de los pulmones para funcionar de manera óptima. Por otro lado, el adjetivo “idiopático” se utiliza para indicar que la causa subyacente de esta enfermedad es, en gran medida, desconocida o inexplicada, lo que la distingue de otras formas de fibrosis pulmonar en las que la causa puede ser identificada [28]. Las formas más conocidas son:

- **Fibrosis pulmonar secundaria a enfermedades autoinmunes:** Se desarrolla como una complicación de enfermedades autoinmunes, como la artritis reumatoide, el lupus eritematoso sistémico o la esclerodermia. La inflamación crónica y la respuesta inmunitaria anormal pueden llevar a la cicatrización del tejido pulmonar.
- **Fibrosis pulmonar secundaria a exposición ambiental:** Ocurre mediante la inhalación constante de sustancias tóxicas, como el polvo, los productos químicos o las partículas en el aire. Por ejemplo, la exposición crónica al amianto o a la sílice puede causar daño pulmonar y fibrosis.
- **Fibrosis pulmonar asociada a medicamentos:** Algunos medicamentos, como ciertos fármacos de quimioterapia, pueden tener efectos secundarios que incluyen daño pulmonar y fibrosis.
- **Fibrosis pulmonar hereditaria:** En algunos casos, la fibrosis pulmonar puede tener una base genética. Esto significa que se hereda de alguno de los padres a través de mutaciones genéticas específicas que predisponen a la enfermedad.

Entonces, se puede decir que la fibrosis pulmonar idiopática (FPI) se diferencia de estas otras formas en que su causa no se atribuye a una enfermedad autoinmune, una exposición ambiental específica, un medicamento o una predisposición genética conocida. Por lo tanto, es un desafío mayor tanto para el diagnóstico como para el tratamiento.



Figura XL: Imagen obtenida de una tomografía computarizada de tórax en alta resolución que muestra un alto grado de fibrosis pulmonar [28].

Si bien las radiografías del tórax permiten realizar un adecuado seguimiento sistemático a los pacientes con FPI, no brindan un buen diagnóstico. Sin embargo, pueden revelar una reducción del volumen pulmonar, normalmente con marcas intersticiales reticulares sobre-salientes cerca de las bases pulmonares [28].



Figura XLI: Radiografía torácica de un paciente con FPI [28].

La evaluación radiológica mediante tomografías computarizadas de alta resolución (TCAR) es esencial para obtener un diagnóstico adecuado de la FPI. La TCAR se realiza con una cámara gamma tomográfica axial computarizada convencional sin la inyección de agentes de contraste que resalten estructuras anatómicas patológicas como los tumores y opacifiquen estructuras anatómicas normales como órganos o vasos. Los cortes de evaluación son muy finos, ya que miden entre 1 mm y 2 mm. Los focos de fibroblastos²⁴ son acumulaciones densas de miofibroblastos²⁵ y tejido cicatricial; los cuales, junto a la panalización formada por grupos de quistes con paredes finas, son los principales indicadores que permiten un diagnóstico de Neumonía intersticial usual (NIU)²⁶.

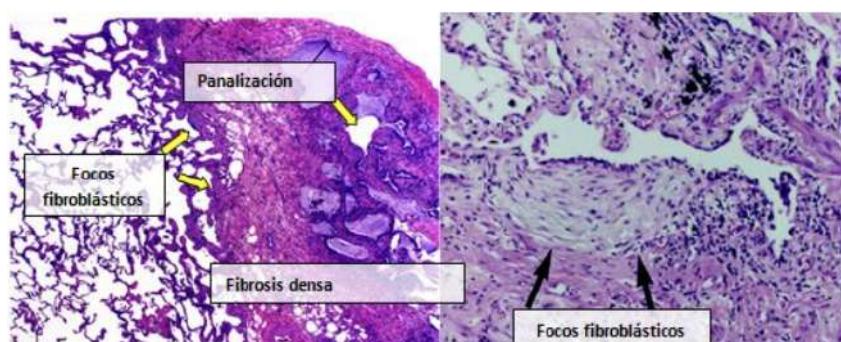


Figura XLII: Imagen tomográfica de FPI de un pulmón con miofibroblastos, tejido cicatricial y panalización [28]

Para complementar el diagnóstico de la fibrosis pulmonar idiopática (FPI), se puede recurrir a una técnica llamada espirometría, que proporciona una evaluación funcional de la capacidad respiratoria del paciente. La espirometría mide la cantidad y la rapidez con la que el

²⁴Son un tipo de células que se encuentran en los tejidos conectivos de nuestro cuerpo. Su trabajo principal es construir y mantener la estructura de estos tejidos, produciendo una proteína llamada colágeno, la cual actúa como un pegamento que mantiene unidos los diferentes componentes de esos tejidos. En pocas palabras, los fibroblastos son como los obreros que construyen y reparan los tejidos conectivos de nuestro cuerpo.

²⁵Son fibroblastos especializados que contribuyen a la reparación, cicatrización y regeneración de los tejidos en los órganos.

²⁶Constituye un diagnóstico radiológico derivado de los hallazgos de la anatomía patológica. Se trata de elementos de la fibrosis situados debajo de la pleura en la base de las formaciones orgánicas que forman una red con forma de panal, presentan bronquiectasias por tracción e impiden el flujo de luz en una proporción apreciable.

aire es inhalado y exhalado, lo que ayuda a identificar posibles obstrucciones en las vías respiratorias y a cuantificar la gravedad de la enfermedad pulmonar. Esta técnica, junto con los métodos de imagen como las tomografías computarizadas de alta resolución (TCAR), contribuye considerablemente al diagnóstico preciso y al seguimiento de la progresión de la FPI.

1).2. Técnica de la espirometría para el diagnóstico de la FPI

La espirometría es la técnica que mide los flujos y los volúmenes respiratorios útiles para el diagnóstico y seguimiento de patologías respiratorias [29]. La gráfica impresa por el espirómetro representa el volumen del flujo del aire en función del tiempo. Los valores positivos representan el grado de expiración y los negativos representan el grado de inspiración.



Figura XLIII: Realizando una espirometría [29].

En la espirometría forzada, se muestra la velocidad del flujo de aire en relación con el volumen pulmonar. Del proceso se desprenden los términos siguientes:

- **Volumen espiratorio forzado (VEF₁)**: Es la cantidad de aire espirado durante el primer segundo en el que se está haciendo la espiración total del aire inhalado durante una inspiración máxima.
- **Capacidad vital forzada (CVF)** Es el volumen máximo de aire que un paciente puede inspirar o espirar de manera forzada y con la máxima rapidez posible.
- **VEF₁/CVF** Es la relación porcentual entre el aire expulsado durante el primer segundo de la espiración total de la capacidad forzada y el total de aire exhalado en dicho proceso.
- **Flujo espiratorio forzado al p % de la capacidad vital forzada (FEF_p)**: Es el porcentaje de la línea de la espiración forzada total desde que comienza la espiración hasta el punto señalado en la figura XLIV con dichas siglas y dicho valor.
- **Interpretación**: Si el índice VEF₁/CVF es menor a 70 %, se considera que el paciente tiene un patrón respiratorio obstructivo; y si el CVF es mayor a 80 %, se considera que tiene un patrón respiratorio restrictivo. Una prueba broncodilatadora se considera positiva si después de la aplicación del broncodilatador (salbutamol) el VEF₁ basal aumenta un 12 % y 200 ml. Si el índice FEV₁/CVF es menor a 70 % y la CVF es menor a 80 %, el patrón es mixto (obstructivo y restrictivo). Lo normal es que el índice VEF₁/CVF sea por lo menos 70 % y la CVF, 80 %.

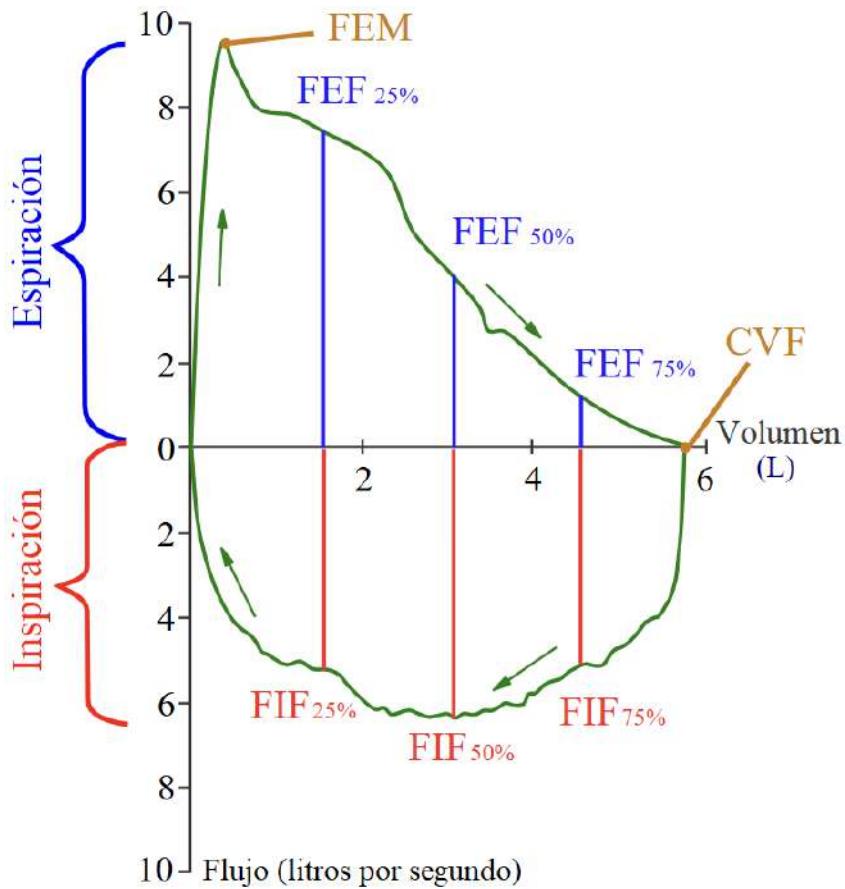


Figura XLIV: Curva de flujo-volumen que muestra una maniobra CVF exitosa. Inicialmente, tanto el flujo como el volumen son iguales a cero (lo que representa el volumen en el espirómetro y no del pulmón). Después del punto de partida, la curva asciende rápidamente a un pico (el flujo espiratorio máximo). El trazo se mueve en el sentido horario a medida que se efectúa la espiración seguida de la inspiración. (El valor de FEV₁ es arbitrario en este gráfico y solo se muestra para contribuir a la comprensión del lector) [29].

Indicaciones: Se debe evaluar la función pulmonar cuando se presenten síntomas respiratorios, realizar diagnósticos y seguimientos en pacientes con enfermedades respiratorias, evaluar el riesgo de procedimientos quirúrgicos, la respuesta terapéutica posterior a la administración de fármacos y llevar a cabo estudios epidemiológicos que incluyan patología respiratoria.

Contraindicaciones: No debe aplicarse en pacientes con algún tipo de discapacidad o deterioro mental o físico que les impida realizar adecuadamente una maniobra espiratoria forzada, como ancianos con Alzheimer o niños menores de 6 años. Tampoco debe aplicarse en pacientes con enfermedades que, además de una hipertensión torácica, impliquen un riesgo adicional, como neumotórax y desprendimiento de retina, ni en pacientes con abundantes secreciones, traqueostomía, hemoptisis o lesiones bucales.

Ventilación pulmonar: Es el efecto conjunto de procesos que generan el flujo de aire entre la atmósfera y los alvéolos pulmonares mediante la acción repetida de alternar la espiración y la inspiración [30].

Relación ventilación-perfusión: Es la relación entre la ventilación pulmonar por minuto y el flujo circulatorio pulmonar por minuto. Se suele expresar como V/Q , donde V es la ventilación pulmonar y Q el flujo o perfusión sanguínea. Cuando V y Q tienen valores normales,

los cuales oscilan alrededor de 4.2 L/min y entre 4 L/min a 5 L/min respectivamente, la relación tiene valores entre 0.8 y 1 [31].

Desigualdad de la relación ventilación-perfusión: Cuando el índice V/Q es menor a 0.8, existirá hipoxemia y riesgo de desarrollo de hipercapnia, dependiendo principalmente del grado de deterioro alveolar, por elevación de la presión parcial de oxígeno (P_aO_2) y el descenso de la presión parcial de dióxido de carbono (P_aCO_2) [32].

Volumen de cierre: Es la medida del cierre prematuro o estrechez de las vías respiratorias cuando las regiones más bajas del pulmón comienzan a cerrarse. Mide las diferencias topográficas de la función pulmonar que pueden ser medidas con xenón radiactivo, embolada de helio o interruptor de flujo [33].

Consumo de oxígeno: Es una prueba funcional que evalúa la integridad e interacción del sistema cardiovascular, respiratorio y muscular. Se puede obtener mediante la medición de la altura de la gráfica de la campana de Gauss teniendo en cuenta su sección transversal, analizando el oxígeno espirado e inspirado y la ventilación, y por el principio de Fick.

1).3. Comportamiento del Gasto Cardíaco (GC)

El comportamiento del Gasto Cardíaco (GC), se refiere al volumen de sangre bombeada por el corazón en una unidad de tiempo determinada. Si se toma el minuto como unidad de tiempo, el GC es el producto del volumen de sangre expulsado por el corazón en cada sístole y el número de contracciones por minuto. Si disminuye el GC en una persona, la sensación es de falta de aire, fatiga y debilidad muscular, lo cual significa que hay una hipotensión arterial, manifestándose en el paciente un color azulado de la piel. Este comportamiento es una manifestación de un edema agudo del pulmón donde destacan los síntomas de congestión y el shock cardiogénico, predominando la hipoperfusión tisular o disminución del GC (volumen de sangre que libera el ventrículo izquierdo en cada contracción). La disminución del GC genera el problema de insuficiencia cardíaca. Según los síntomas de la FPI, incluyen la falta de aire, cansancio extremo, dolor muscular o articular por los cambios que dificultan el paso del oxígeno al torrente sanguíneo.

Según Anestesiología [34], en 1870, un fisiólogo alemán, llamado Adolf Eugen Fick, presentó en la Sociedad Físico Médica de Würzburg el primer método para medir el Gasto Cardíaco (GC). Él se asombró de que este método no haya sido desarrollado antes y expresó la siguiente frase: "Es sorprendente que nadie haya llegado al siguiente método obvio con el que (el GC) podría ser determinado directamente..." .

Postuló que se puede calcular el GC teniendo en cuenta el oxígeno consumido por el organismo y la diferencia del volumen ocupado por moléculas de este tipo entre la sangre arterial y la venosa mixta. Este método se basa en la Ley de Conservación de la Masa, la cual consiste en que la tasa de flujo volumétrico de entrada de un fluido incompresible es la misma que la de salida.

El principio de Fick se puede explicar esquemáticamente de la siguiente manera: La sangre oxigenada de las arterias fluye a los órganos del cuerpo. Los órganos extraen un porcentaje del oxígeno. Esta sangre fluye por las venas con una concentración de oxígeno menor. Fick concluyó que el oxígeno consumido por los tejidos periféricos es equivalente al producto del flujo sanguíneo (GC) y la variación de concentración de oxígeno entre el sistema arterial y venoso (ΔO_2). Por lo tanto, el consumo de oxígeno (VO_2) se puede calcular mediante la siguiente fórmula:

$$VO_2 = GC \cdot \Delta O_2 \quad (26)$$

Este principio también puede ser aplicado con diferentes sustancias para determinar el gasto cardíaco. Por ejemplo, con el método de dilución del indicador, con termodilución y empleando el método de Fick directo. Un aspecto crucial en la evaluación del estado hemodinámico del paciente es el control del gasto cardíaco.

1).4. Formulación matemática para la medición del Gasto Cardíaco (GC)

Este método se obtiene teniendo en cuenta los siguientes conceptos, según [34]: Todo el GC pasa por los pulmones como se señala en la figura XLV. La cantidad q_1 de oxígeno (O_2) que reciben transferido por la arteria pulmonar es equivalente al producto entre la concentración de oxígeno $[O_2]_{ap}$ a este nivel y el flujo pulmonar equivalente a GC. De esta manera:

$$q_1 = GC[O_2]_{ap} \quad (27)$$

Al atravesar los capilares pulmonares desde los alvéolos se transfiere una cantidad extra q_2 de O_2 , que en estado de equilibrio coincide con la cantidad de oxígeno VO_2 consumido por los tejidos. La cantidad final q_3 de oxígeno que es transportada por las venas pulmonares hacia la circulación sistémica, en virtud de la Ley de Conservación de Masas, sería equivalente a la suma entre q_1 y q_2 . Dado que el flujo por las venas pulmonares también es equivalente a todo el GC, se tiene que:

$$q_3 = GC[O_2]_{vp} \quad (28)$$

Teniendo en cuenta que $q_3 = q_1 + q_2$, se tiene que:

$$GC[O_2]_{ap} + q_2 = GC[O_2]_{vp} \quad (29)$$

Despejando el flujo equivalente a GC , se obtiene la fórmula de medición para el GC:

$$GC = \frac{q_2}{([O_2]_{vp} - [O_2]_{ap})} \quad (30)$$

Donde q_2 en estado de equilibrio es equivalente al consumo de oxígeno (VO_2). Este se puede medir si un paciente respira durante un minuto por un espirómetro que contenga un determinado volumen de O_2 al 100 % y un absorbédo de CO_2 . La cantidad de oxígeno restante al final del proceso permite conocer el consumo producido.

Diversos autores han propuesto distintas fórmulas intentado simplificar la medición del VO_2 ; pero las estimaciones obtenidas diferían en más del 10 % de las mediciones directas del VO_2 .

La $[O_2]_{ap}$ o concentración venosa de oxígeno (CVO_2) debe ser medida a partir de una muestra de sangre venosa mixta obtenida mediante un catéter en la arteria pulmonar. La $[O_2]_{vp}$ equivale a la concentración arterial de O_2 (C_aO_2) y puede determinarse mediante una gasometría arterial²⁷.

²⁷Medición de la cantidad de oxígeno y dióxido de carbono presente en la sangre.

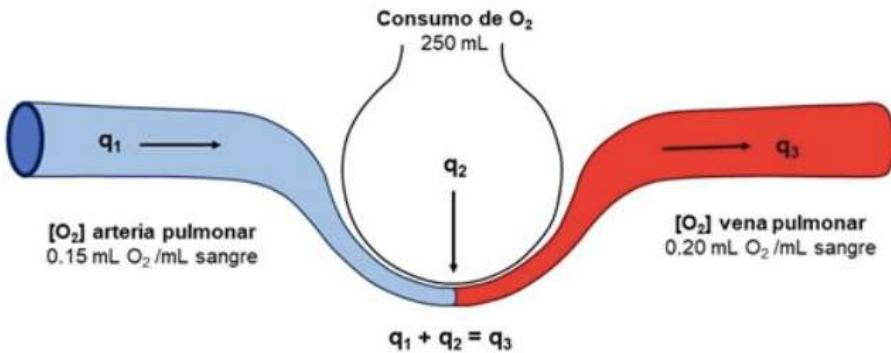


Figura XLV: Bases fisiológicas del principio de Fick [34].

2). Errores y defectos en las imágenes médicas

Debido a que existen varios tipos de fibrosis pulmonar, es necesario identificar y corregir los errores que se presentan en las imágenes de las radiografías que se usan para determinar el diagnóstico. La interpretación de imágenes médicas, especialmente en el contexto de la sospecha clínica de Fibrosis Pulmonar Idiopática (FPI), puede ser desafiante debido a la naturaleza inespecífica de los hallazgos en las radiografías de tórax, según Benegas [5]. Estas pruebas iniciales, aunque son útiles para la detección preliminar de anomalías, no proporcionan una caracterización precisa de la neumopatía intersticial. Los errores diagnósticos más comunes surgen de la incapacidad de la radiografía de tórax para identificar de manera definitiva la FPI, ya que los signos específicos, como la reticulación y opacidades lineales predominantemente basales, pueden ser sutiles o confundirse con otras condiciones.

El estudio por imágenes es un mecanismo que tienen los médicos para saber lo que está sucediendo dentro del cuerpo de una persona que se ha sometido a alguna técnica imagenológica para buscar indicios de una afección médica y obtener un diagnóstico. Estos estudios envían expresiones de energía como rayos X, ondas sonoras, partículas radiactivas o campos magnéticos a través del cuerpo del paciente y los tejidos cambian los patrones de energía para producir una imagen o fotografía. Estas imágenes permiten que los médicos vean el funcionamiento de los órganos internos y logren encontrar cambios en ellos que pudieran ser causados por enfermedades.

La transición hacia la Tomografía Computarizada de Alta Resolución (TCAR) se ha convertido en un estándar debido a su capacidad para ofrecer imágenes detalladas del pulmón, lo que facilita la evaluación precisa de la FPI. La TCAR volumétrica, con su adquisición multi-detector y alta resolución, permite una visualización más clara de los patrones radiológicos característicos de la FPI, como el panal, las bronquiectasias de tracción, la reticulación y el vidrio deslustrado. Sin embargo, incluso con esta tecnología avanzada, los errores diagnósticos persisten debido a la necesidad de una interpretación precisa y la variabilidad en la identificación de los hallazgos.

La identificación del panal, un marcador distintivo de la FPI, puede ser especialmente desafiante cuando los quistes son pequeños o escasos, lo que puede llevar a una subestimación o confusión con otras condiciones como el enfisema paraseptal o las bronquiectasias de tracción. La diferenciación entre estos hallazgos a menudo requiere el uso de técnicas adicionales, como la adquisición en decúbito prono o la interpretación de reconstrucciones multiplanares.

Las bronquiectasias de tracción, otro indicador importante de la FPI, también pueden ma-

interpretarse o pasarse por alto, especialmente en casos donde la distribución periférica de estas anomalías se superpone con otras patologías. La identificación precisa de estos hallazgos a menudo depende de la experiencia del radiólogo y el uso de herramientas avanzadas de procesamiento de imágenes.

Además, la reticulación y el vidrio deslustrado, aunque características de la FPI, pueden presentarse de manera variable y coexistir con otras condiciones como exacerbaciones agudas o infecciones, lo que complica aún más el diagnóstico diferencial.

Por lo tanto, los errores en la interpretación de imágenes médicas para hacer el diagnóstico de la FPI son comunes debido a la limitada capacidad de las radiografías de tórax y a la complejidad de los patrones radiológicos característicos. La adopción de tecnologías avanzadas como la TCAR ha mejorado significativamente la precisión diagnóstica, pero la interpretación experta y el uso de técnicas complementarias siguen siendo fundamentales para evitar errores y garantizar un diagnóstico preciso y oportuno. Sin embargo, estas imágenes pueden presentar los siguientes errores:

- **Errores de posicionamiento:** Se presentan cuando el cuerpo no se encuentra en una posición adecuada respecto a la placa radiográfica. Estos errores pueden ser de angulación, ubicación de la cámara y encuadre.
- **Errores de almacenaje:** Se presentan cuando existen fallas en el dispositivo que guarda la información de la imagen y esta información es distorsionada y, al ser impresas, las imágenes presentan puntos, manchas o rasguños.
- **Errores de densidad:** Se presentan cuando la escala de grises de una imagen obtenida de la interacción de los rayos X con el cuerpo humano no expresa la luminosidad adecuada que permita visualizar correctamente los órganos del cuerpo o el estado en el que se encuentran.

Según Gonza [35], se llevó a cabo un estudio con el propósito de determinar los errores en las tomas radiográficas periapicales realizadas por estudiantes de internado en estomatología de la Universidad Señor de Sipán de la ciudad de Chiclayo durante el año 2016, en el que se tuvo como unidad de análisis 1122 radiografías. De estas radiografías, sólo en 355 no se encontraba ninguno de los errores mencionados. Por lo tanto, según este estudio de más de mil muestras, se tiene que el 68.36 % de las radiografías presentan al menos un error.

Para corregir los errores de posicionamiento, se emplearán transformaciones geométricas y técnicas de interpolación. Para corregir los errores de almacenaje, se aplicarán técnicas de filtrado de una imagen basadas en la teoría de funciones de Fourier, funciones de wavelet y difusión anisotrópica; esta teoría también será útil para modificar las imágenes de manera que la zona afectada por la FPI sea más visible. En cuanto a los errores de densidad, se aplicarán técnicas basadas en operaciones aritméticas.

Este tema ha sido dirigido al diagnóstico de fibrosis pulmonar idiopática en el presente trabajo debido a que su causa es desconocida y con mayor razón es necesario brindar un diagnóstico adecuado. Según Torres-González [2], se tiene poco conocimiento respecto a las potenciales secuelas posteriores a la infección leve, moderada o severa por SARS-CoV-2, a pesar de los avances sobre la infección aguda. En un estudio de seguimiento temprano de pacientes con SARS, 15 de 24 pacientes evidenciaron fibrosis pulmonar (es decir, el 62.5 % de los pacientes).

II FUNDAMENTO MATEMÁTICO Y ESQUEMA ESTRUCTURAL DEL TRABAJO DE INVESTIGACIÓN

A. Espacios L^1

1). Definiciones generales

σ -álgebra: Una σ -álgebra sobre un conjunto X es una familia \mathcal{A} no vacía cerrada bajo complementos, uniones e intersecciones contables. Por lo tanto, una familia \mathcal{A} de subconjuntos de X es una σ -álgebra sobre X cuando cumple las siguientes condiciones:

- El conjunto vacío pertenece a la familia $\mathcal{A} : \emptyset \in \mathcal{A}$.
- Si el conjunto $E \in \mathcal{A}$, también se cumplirá que $E^c = X - E \in \mathcal{A}$.
- Si $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de conjuntos en \mathcal{A} , entonces $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \in \mathcal{A}$.

Conjunto medible: Un conjunto E será \mathcal{A} -medible si para todo conjunto $F \in \mathcal{A}$ se cumple que:

$$m(F) = m(F \cap E) + m(F - E) \quad (31)$$

Función medible: Una función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ es \mathcal{A} -medible si para todo conjunto medible $I \subseteq \mathbb{R}$ se tiene que $F = f^{-1}(I) \in \mathcal{A}$ y F es \mathcal{A} -medible.

Funciones iguales en casi todas partes (c.t.p.): Se dice que dos funciones $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ son iguales en c.t.p. si y sólo si:

$$\int_X |f - g| d\mu = 0 \quad (32)$$

Medida de un conjunto: La medida de un conjunto es un número real no negativo que expresa el tamaño o la longitud del conjunto. Para hallar la medida de un conjunto $E \subseteq \mathbb{R}^n$, se toma un conjunto F medible que cumpla que $E \subseteq F \subseteq \mathbb{R}^n$ y se define la función indicatriz $1_E : F \rightarrow \mathbb{R}$ por:

$$1_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in E \\ 0 & \text{si } x \notin E \end{cases} \quad (33)$$

De forma que la medida del conjunto E estará dada por la siguiente igualdad:

$$m(E) = \int_F 1_E(x) dx \quad (34)$$

Espacio de medida: Es una tripleta (X, \mathcal{A}, μ) conformada por un conjunto X no vacío, una σ -álgebra \mathcal{A} de subconjuntos de X y una medida μ en \mathcal{A} .

Norma de un espacio vectorial: Sea V un espacio vectorial. Una función $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ es denominada norma si y sólo si cumple los axiomas de norma expresados a continuación:

- $\|v\| \geq 0$, $\forall v \in V$ y $\|v\| = 0 \leftrightarrow v = 0$.
- $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$, $\forall v, w \in V$.
- $\|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ y $\forall v \in V$.

2). Funciones en L^1

Definición 1: Sean (X, \mathcal{A}, μ) un espacio de medida y $p \in [1, +\infty)$. Una función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ \mathcal{A} -medible pertenece al espacio vectorial pre-Lebesgue $\mathcal{L}^p(\mu)$ si y sólo si

$$\int_X |f|^p d\mu < \infty \quad (35)$$

En particular, una función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ \mathcal{A} -medible pertenece al espacio vectorial pre-Lebesgue $\mathcal{L}^1(\mu)$ si y sólo si

$$\int_X |f| d\mu < \infty \quad (36)$$

Ejemplo 1: Dado el conjunto $X = (0, 1)$, las funciones $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 5$ y $g(x) = 4x^3 + 6x$ pertenecen a $\mathcal{L}^1(\mu)$ ya que se cumplen las siguientes desigualdades:

$$\int_X |f| d\mu = \int_0^1 (2\mu + 5) d\mu = (\mu^2 + 5\mu)|_0^1 = 6 < +\infty$$

$$\int_X |g| d\mu = \int_0^1 (4\mu^3 + 6\mu) d\mu = (\mu^4 + 3\mu^2)|_0^1 = 4 < +\infty$$

En cambio, la función $h : X \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = x^{-1}$ no pertenece a $\mathcal{L}^1(\mu)$ ya que se cumple que:

$$\int_X |h| d\mu = \int_0^1 |\mu^{-1}| d\mu = \int_0^1 \mu^{-1} d\mu = \ln(\mu)|_0^1 = +\infty$$

Definición 2: Se define el conjunto de funciones en $\mathcal{L}^1(\mu)$ de medida nula por:

$$N^1(\mu) = \{f \in \mathcal{L}^1(\mu) : f = 0 \text{ en c.t.p.}\} \quad (37)$$

Definición 3: Dada la función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, si definimos la clase de equivalencia $\bar{f} = \{g \in \mathcal{L}^1(\mu) : g = f \text{ en c.t.p.}\}$, luego, se dice que $L^1(\mu)$ es el espacio vectorial que contiene a todas las clases de equivalencia definidas por las funciones en $\mathcal{L}^1(\mu)$. Por lo tanto, se cumple la siguiente igualdad:

$$L^1(\mu) = \mathcal{L}^1(\mu)/N^1(\mu) \quad (38)$$

3). Supremo esencial

Definición 4: Sea (X, \mathcal{A}, μ) un espacio de medida y f una función \mathcal{A} -medible. Si para cada $M > 0$ se definen los conjuntos $E_M = \{x \in X : |f(x)| > M\}$ y seguidamente el conjunto:

$$A = \{M > 0 : \mu(E_M) = 0\} = \{M > 0 : |f(x)| \leq M \text{ en c.t.p.}\} \quad (39)$$

El supremo esencial de f es definido por:

$$\|f\|_\infty = \begin{cases} +\infty & \text{si } A = \emptyset \\ \inf A & \text{si } A \neq \emptyset \end{cases} \quad (40)$$

Observación 1: Dado que f es \mathcal{A} -medible, si se define el conjunto I por $I = (-\infty, -M) \cup (M, +\infty)$, luego, se tiene que el conjunto $E_M = f^{-1}(I) \in \mathcal{A}$

Ejemplo 2: Sean $X = (-1, 1)$ y $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 5x^3$.

- Si $\|f\|_\infty < 5$, como $f'(x) = 15x^2 \geq 0, \forall x \in (-1, 1)$, entonces f es no decreciente en $(-1, 1)$. Por lo tanto, dado que $5(1)^3 = 5$, existe $x_0 \in (-1, 1)$ tal que $f(x_0) = \frac{5+\|f\|_\infty}{2} > \|f\|_\infty$. Luego, $\|f\|_\infty \geq 5$.
- Si $\|f\|_\infty > 5$, se tendría que $5x^3 < \frac{5+\|f\|_\infty}{2} < \|f\|_\infty, \forall x \in X$. Luego, $\|f\|_\infty \neq \inf A$.

Por lo tanto, $\|f\|_\infty = 5$.

Definición 5: El conjunto de funciones esencialmente acotadas está dado por:

$$\mathcal{L}^\infty(\mu) = \{f : X \rightarrow \mathbb{R} \text{ medible y } \|f\|_\infty < +\infty\} \quad (41)$$

Ejemplo 3: Dado el conjunto $X = (0, 1) \times (0, 1)$, si definimos las funciones $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ por $f(x, y) = 3(x^2 + y^2)$ y $g(x) = \ln(x + y)$, se cumple lo siguiente:

- Como $|\frac{\partial f}{\partial x}| = |6x| = 6x$ y $|\frac{\partial f}{\partial y}| = |6y| = 6y, \forall (x, y) \in X$, luego:

$$\|f\|_\infty = \lim_{(x,y) \rightarrow (1^-, 1^-)} f(x, y) = 3(1+1) = 6 < +\infty$$

- Como $|\frac{\partial g}{\partial x}| = |\frac{1}{x+y}| = \frac{1}{x+y}$ y $|\frac{\partial g}{\partial y}| = |\frac{1}{x+y}| = \frac{1}{x+y}, \forall (x, y) \in X$, luego:

$$\|g\|_\infty = \lim_{(x,y) \rightarrow (0^+, 0^+)} g(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0^+, 0^+)} \frac{1}{x+y} = +\infty$$

Por lo tanto, $f \in \mathcal{L}^\infty(\mu)$ pero $g \notin \mathcal{L}^\infty(\mu)$

4). La norma en L^1

Sea (X, \mathcal{A}, μ) un espacio de medida, y $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ una función \mathcal{A} -medible. Se define la función norma $\|\cdot\|_p : L^p(\mu) \rightarrow \mathbb{R}^+$ por:

$$\|\bar{f}\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p} \text{ con } 1 \leq p < +\infty \quad (42)$$

En particular, para $p = 1$ se tiene que:

$$\|\bar{f}\|_1 = \int_X |f| d\mu \quad (43)$$

Observación 2:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty \quad (44)$$

Sea f una función no nula (en el caso que f sea nula, la observación es obvia). Como f es \mathcal{A} -medible, para todo $\epsilon \in (0, \|f\|_\infty)$ se tiene que si $I_1 = (\|f\|_\infty - \epsilon, \|f\|_\infty)$ e $I_2 =$

$(-||f||_\infty, -||f||_\infty + \epsilon)$, se cumple que, para algún $i \in \{1, 2\}$, se tiene que $F = f^{-1}(I_i) \in \mathcal{A}$, es \mathcal{A} -medible y tiene medida no nula por ser I_i abierto. Luego:

$$||f||_\infty - \epsilon < |f(x)|, \forall x \in F \quad (45)$$

Por lo tanto:

$$(||f||_\infty - \epsilon)^p m(F) = \int_F (||f||_\infty - \epsilon)^p d\mu < \int_F |f|^p d\mu \quad (46)$$

Luego, si F posee un subconjunto F_1 de medida no nula tal que $f(F_1) \in (1, \infty)$, dado que mientras mayor sea un valor mayor a uno será mayor la rapidez con la que crece a medida que aumenta su exponente, existe p_0 suficientemente grande de manera que $\forall p > p_0$ se tiene que:

$$(||f||_\infty - \epsilon)^p (m(F) + m(X - F)) < \int_F |f|^p d\mu + \int_{X - F} |f|^p d\mu \quad (47)$$

Mientras que si F no posee un subconjunto con dichas características, entonces posee un subconjunto F_2 de medida no nula tal que $f(F_2) \in (0, 1]$. Luego, $||f||_\infty - \epsilon < 1$. Dado que mientras menor sea un valor positivo menor a uno será mayor la rapidez con la que su valor se aproxima a cero, también existe p_0 suficientemente grande de manera que $\forall p > p_0$ se cumple la desigualdad anterior. Elevando al exponente $1/p$ ambos lados de dicha desigualdad se obtiene:

$$(||f||_\infty - \epsilon)(m(F) + m(X - F))^{1/p} < \left(\int_F |f|^p d\mu + \int_{X - F} |f|^p d\mu \right)^{1/p} \quad (48)$$

Como ϵ es arbitrario, al tomar límite cuando $p \rightarrow +\infty$, se tiene que:

$$||f||_\infty \leq \lim_{p \rightarrow +\infty} \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p} \quad (49)$$

Además, como $\forall x \in X$ se tiene que $|f(x)| \leq ||f||_\infty$, luego:

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p} \leq \lim_{p \rightarrow +\infty} \left(\int_X ||f||_\infty^p d\mu \right)^{1/p} = \lim_{p \rightarrow +\infty} ||f||_\infty (m(X))^{1/p} = ||f||_\infty \quad (50)$$

Por lo tanto:

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p} = ||f||_\infty \quad (51)$$

Ejemplo 4: Dado el conjunto $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 25\}$, si definimos la función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ por $f(x, y) = 15 - 3\sqrt{x^2 + y^2}$, se cumple que:

$$||f||_1 = \int_X |f| d\mu = \int_0^5 \int_{-\sqrt{25-x^2}}^{\sqrt{25-x^2}} (15 - 3\sqrt{x^2 + y^2}) dy dx$$

Transformando a coordenadas polares, se tiene que:

$$||f||_1 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^5 (15 - 3\sqrt{r^2}) r dr d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{125}{2} \right) d\theta = \frac{125\pi}{2}$$

Definición 6: Dos números $p, q > 1$, tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, son denominados exponentes conjugados.

Teorema 1: Desigualdad de Young. Sean $p, q > 1$, tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dados $a, b \geq 0$, se cumple que:

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \quad (52)$$

Demostración: Si $a = 0$ o $b = 0$, el lado izquierdo de la desigualdad es cero y el lado derecho es no negativo; por lo que se cumple la desigualdad. Si $a > 0$ y $b > 0$ entonces, dado que la función exponencial es convexa, $\forall x, y \in \mathbb{R}$ se cumple que:

$$\exp\left(\frac{1}{p}x + \frac{1}{q}y\right) \leq \frac{1}{p}\exp x + \frac{1}{q}\exp y \quad (53)$$

Por lo tanto, al darle a x e y los valores de $x = p\ln(a)$ e $y = q\ln(b)$, se cumple la desigualdad.

Teorema 2: Desigualdad de Hölder. Sean (X, \mathcal{A}, μ) un espacio de medida, $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ \mathcal{A} -medibles y $p, q > 1$, tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Entonces:

$$\int_X |f||g|d\mu \leq \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{1/p} \left(\int_X |g|^q d\mu\right)^{1/q} \quad (54)$$

Demostración: Denotemos por I_f e I_g a los factores del lado derecho de la desigualdad:

$$I_f := \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{1/p} \quad I_g := \left(\int_X |g|^q d\mu\right)^{1/q} \quad (55)$$

Si alguno de estos valores definidos es cero, ambos lados de la desigualdad serían iguales a cero, ya que alguna de las funciones sería nula en *c.t.p.* Si estos valores son positivos y uno de ellos es $+\infty$, entonces el lado derecho de la desigualdad también es $+\infty$. Pero si $I_f, I_g \in (0, +\infty)$, al denotar las funciones u y v por:

$$u := \frac{f}{I_f} \quad v := \frac{g}{I_g}$$

Si para todo $x \in X$ aplicamos la desigualdad de Young a los números $u(x)$ y $v(x)$:

$$u(x)v(x) \leq \frac{u(x)^p}{p} + \frac{v(x)^q}{q} \quad (56)$$

E integramos ambos lados de la desigualdad sobre X respecto a la medida μ , se tiene:

$$\int_X uv d\mu \leq \frac{1}{p} \left(\frac{1}{I_f^p} \int_X |f|^p d\mu \right) + \frac{1}{q} \left(\frac{1}{I_g^q} \int_X |g|^q d\mu \right) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad (57)$$

Por lo tanto, se ha demostrado que:

$$\int_X |f||g|d\mu \leq I_f I_g = \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{1/p} \left(\int_X |g|^q d\mu\right)^{1/q} \quad (58)$$

Observación 3: Si dos funciones $f, g \in L^1(\mu)$, entonces se cumplen las siguientes propiedades:

- $f + g \in L^1(\mu)$; dado que: $|f + g| \leq |f| + |g|$.
- $f - g \in L^1(\mu)$; dado que: $|f - g| \leq |f| + |g|$.
- $f \cdot g \in L^1(\mu)$; dado que: $|f \cdot g| \leq |f| \cdot |g|$.

- Si $g \neq 0$ en c.t.p., $\frac{f}{g} \in L^1(\mu)$; dado que: $|\frac{f}{g}| \leq |f| \cdot |g|^{-1}$.

De la primera propiedad se deduce que $L^1(\mu)$ es un espacio vectorial. Y en general, para cualquier $p \in [1, +\infty)$ se tiene que $L^p(\mu)$ es un espacio vectorial dado que:

$$|f+g|^p \leq (|f|+|g|)^p \leq (2\max\{|f|, |g|\}) = 2^p \max\{|f|, |g|\} \leq 2^p(|f|^p + |g|^p) \quad (59)$$

Teorema 3: Desigualdad de Minkowski. Sean $1 \leq p \leq \infty$ y $f, g \in L^p(\mu)$. Entonces, $f+g \in L^p(\mu)$ y

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p \quad (60)$$

Demostración: $f+g \in L^p(\mu)$ por ser $L^p(\mu)$ un espacio vectorial. Para $p=1$ la demostración de la desigualdad es simple:

$$\int_X |f+g|d\mu \leq \int_X (|f|+|g|)d\mu = \int_X |f|d\mu + \int_X |g|d\mu \quad (61)$$

Si $p > 1$, si al menos uno de los sumandos del lado derecho es infinito, la desigualdad se cumple. Si ambos sumandos son finitos, luego $|f|^p$ y $|g|^p$ son integrables. Si definimos el siguiente conjunto:

$$Y = \{x \in X : |f(x)| \leq g(x)\} \quad (62)$$

Entonces, se tiene que:

$$\begin{aligned} \int_X |f+g|^p d\mu &= \int_Y |f+g|^p d\mu + \int_{X-Y} |f+g|^p d\mu \\ &\leq \int_Y (|f|+|g|)^p d\mu + \int_{X-Y} (|f|+|g|)^p d\mu \\ &\leq 2^p \int_Y |g|^p d\mu + 2^p \int_{X-Y} |f|^p d\mu \\ &\leq 2^p \int_X |g|^p d\mu + 2^p \int_X |f|^p d\mu < +\infty \end{aligned} \quad (63)$$

Dado que:

$$|f+g|^p = |f+g| |f+g|^{p-1} \leq |f| |f+g|^{p-1} + |g| |f+g|^{p-1}, \quad (64)$$

al integrar ambos lados de la desigualdad, aplicar la desigualdad de Hölder para cada término de la derecha de la desigualdad y factorizar $|f+g|^{p-1}$ se tiene lo siguiente:

$$\int_X |f+g|^p d\mu \leq \left(\left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p} + \left(\int_X |g|^p d\mu \right)^{1/p} \right) \left(\int_X |f+g|^{q(p-1)} d\mu \right)^{1/q} \quad (65)$$

Como p y q son exponentes conjugados, se tiene que $q(p-1) = p$ y que $1 - \frac{1}{q} = \frac{1}{p}$. Por lo tanto, al dividir ambos lados de la desigualdad por $(\int_X |f+g|^p)^{1/q}$ se obtiene la desigualdad de Minkowski.

Luego de haber demostrado la desigualdad de Minkowski, es posible probar que la función norma está bien definida en L^p , ya que cumple los axiomas de norma para cualquier par de funciones $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$:

- $\|\bar{f}\|_p \geq 0$; pues, $|f(x)| \geq 0, \forall x \in X$; y $\|\bar{f}\|_p = 0 \Leftrightarrow \bar{f} = 0$; pues, $\|\bar{f}\|_p = 0$ si y sólo si $|f| = 0$ en c.t.p. Y $|f| = 0$ en c.t.p. si y sólo si \bar{f} es la clase de equivalencia de las funciones nulas en c.t.p.; es decir, $\bar{f} = 0$.
- $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$, ya que es la desigualdad de Minkowski.

- $\|\alpha f\|_p = |\alpha| \|f\|_p, \forall \alpha \in \mathbb{R}$; pues, $(\int_X |\alpha f|^p d\mu)^{1/p} = (|\alpha|^p \int_X |f|^p d\mu)^{1/p} = |\alpha| (\int_X |f|^p d\mu)^{1/p}$

En particular, haciendo $p = 1$, se tiene que la norma en L^1 está bien definida.

Ejemplo 5: Sean $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0, |x + y| \leq 1\}$ y $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x, y) = 5x$ y $g(x, y) = 3y$. Se tiene lo siguiente:

- $\|f\|_1 = \int_{-1}^0 \int_0^{x+1} |4x| dy dx + \int_0^1 \int_0^{1-x} |4x| dy dx = -(-\frac{2}{3}) + \frac{2}{3} = \frac{4}{3} \geq 0$.
- $\|f + g\|_1 = \int_{-1}^0 \int_0^{x+1} |4x + 5y| dy dx + \int_0^1 \int_0^{1-x} |4x + 5y| dy dx = \frac{61}{27} \leq 3 = \frac{4}{3} + \frac{5}{3} = \|f\|_1 + \|g\|_1$.
- Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, se tiene que: $\|\alpha f\|_1 = \int_{-1}^0 \int_0^{x+1} |4\alpha x| dy dx + \int_0^1 \int_0^{1-x} |4\alpha x| dy dx = |\alpha|(\int_{-1}^0 \int_0^{x+1} |4x| dy dx + \int_0^1 \int_0^{1-x} |4x| dy dx) = |\alpha| \|f\|_1$.

B. Funciones de Fourier

Una función de Fourier es una manera de representar una función periódica como la suma o integral de funciones seno y coseno, llamadas armónicos. Este enfoque se basa en el hecho de que cualquier función periódica puede expresarse como una combinación de ondas sinusoidales. La transformada de Fourier se aplica a las funciones de Fourier como un medio para analizar y entender mejor estas funciones periódicas en términos de sus componentes de frecuencia. Esta representación revela la contribución de diferentes frecuencias a la función periódica original. En otras palabras, la transformada de Fourier descompone la función periódica en una serie de componentes sinusoidales con diferentes frecuencias y amplitudes. Al maniobrar en el dominio de la frecuencia, es posible aplicar técnicas como filtrado, atenuación o amplificación de ciertas frecuencias. Esto es útil en aplicaciones como procesamiento de señales y tratamiento de imágenes para corregir errores, eliminar ruido o resaltar características específicas.

1). Series de Fourier

Sea $f : I \subseteq [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ una función periódica cuyo dominio es el tiempo. Dado que esta función se puede expresar mediante la suma de otras funciones periódicas y las funciones “seno” y “coseno” son funciones periódicas, según Zygmund [41], la función f de periodo T_0 puede ser expresada mediante la siguiente ecuación:

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \cos(kw_0 t) + b_k \sin(kw_0 t)) \quad (66)$$

Donde:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} f(t) dt, \quad a_k = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} f(t) \cos(kw_0 t) dt, \\ b_k &= \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} f(t) \sin(kw_0 t) dt \quad y \quad w_0 = \frac{2\pi}{T_0}, \quad \forall k \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

2). Transformada de Fourier

Sea $x \in L^1(\mathbb{R})$, una señal integrable de frecuencia f y velocidad angular $\omega = 2\pi f$ en sentido Lebesgue; es decir, que cumpla lo siguiente:

$$\|x\|_{L^1(\mathbb{R})} = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt < +\infty \quad (67)$$

Se define la transformada de Fourier de x como la función $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, dada por:

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = F(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-2\pi i ft} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-i\omega t} d\omega \quad (68)$$

Teorema de la inversión: Si x y F son integrables en sentido Lebesgue, entonces, se cumple lo siguiente:

$$\mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{x(t)\}\} = F^{-1}[F(f)] = \int_{-\infty}^{+\infty} F(f) e^{2\pi i ft} df = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (69)$$

A F^{-1} se le denomina la transformada inversa de Fourier de F .

3). Propiedades de la transformada de Fourier

- **Linealidad:** Dados $a, b \in \mathbb{C}$, $f_1, f_2 \in L^1(\mathbb{R})$ y $F_1, F_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, si $F_1(\omega) = \mathcal{F}\{f_1(t)\}$ y $F_2(\omega) = \mathcal{F}\{f_2(t)\}$, entonces:

$$\mathcal{F}\{af_1(t) + bf_2(t)\} = a\mathcal{F}_1(\omega) + b\mathcal{F}_2(\omega)$$

- **Simetría:** Si $F(\omega)$ es la transformada de $f(t)$, la transformada de $F(t)$ es $f(-\omega)$.

- **Escalado en el tiempo:** Dados $a \in \mathbb{R}$, $x \in L^1(\mathbb{R})$ y $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, si $F(\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\}$, entonces:

$$\mathcal{F}\{x(at)\} = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

- **Desplazamiento en el tiempo:** Dados $t_0 \in \mathbb{R}$, $x \in L^1(\mathbb{R})$ y $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, si $F(\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\}$, entonces:

$$\mathcal{F}\{x(t - t_0)\} = e^{-i\omega t_0} F(\omega)$$

- **Desplazamiento en la frecuencia:** Dados $w_0 \in \mathbb{R}$, $x \in L^1(\mathbb{R})$ y $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, si $F(\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\}$, entonces:

$$\mathcal{F}\{e^{iw_0t} x(t)\} = F(\omega - \omega_0)$$

4). Teorema de convolución

Sean $x_1, x_2 \in L^1(\mathbb{R})$ dos señales y $F_1, F_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ sus respectivas transformadas de Fourier. Se define la convolución entre F y G por:

$$(F * G)(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\Omega) G(\omega - \Omega) d\Omega \quad (70)$$

Las representaciones de Fourier de $F(\omega)$ y $G(\omega - \Omega)$ son, respectivamente:

$$F(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t)e^{-i\Omega t} dt \quad (71)$$

$$G(\omega - \Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} x_2(\tau)e^{-i(\omega - \Omega)\tau} d\tau \quad (72)$$

Al sustituir las representaciones de Fourier en la integral de convolución, se tiene que:

$$(F * G)(\omega) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau x_1(t)x_2(\tau)e^{i\omega\tau} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\Omega(t-\tau)} d\Omega \right] \quad (73)$$

Teniendo en cuenta lo siguiente:

- $2\pi\delta(t - \tau) = 2\pi\delta(\tau - t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\Omega(t-\tau)} d\Omega$
- Propiedad de tamizado: $\int_{-\infty}^{+\infty} x_2(\tau)\delta(\tau - t)d\tau = x_2(t)$

Finalmente se tiene:

$$(F * G)(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t)x_2(t)e^{-i\omega t} dt \quad (74)$$

C. Espacio de Hilbert $L_\omega^2(\mathbb{R})$

Un espacio de Hilbert $L_\omega^2(\mathbb{R})$ es un espacio de funciones en la recta real \mathbb{R} , las cuales son cuadrado integrables con respecto a una función de peso $\omega(x)$; es decir, funciones $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tales que $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \omega(x) dx < \infty$. El producto interno en este espacio está dado por [45], [46], [47]:

$$(f, g)_{L_\omega^2(\mathbb{R})} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}\omega(x) dx \quad (75)$$

donde $\overline{g(x)}$ denota el conjugado complejo de $g(x)$.

El espacio de Hilbert $L_\omega^2(\mathbb{R})$ tiene propiedades similares al espacio de Hilbert $L^2(\mathbb{R})$, tales como completitud y la desigualdad de Cauchy-Schwarz, pero su estructura puede variar dependiendo de la elección de la función de peso $\omega(x)$. Por ejemplo, si $\omega(x) = 1$, entonces $L_\omega^2(\mathbb{R})$ es simplemente el espacio de Hilbert $L^2(\mathbb{R})$. Si $\omega(x) = \exp(-x^2)$, entonces el espacio de Hilbert $L_\omega^2(\mathbb{R})$ es el espacio de Hilbert asociado a la transformada de Fourier.

1). El producto interno en el espacio de Hilbert $L_\omega^2(\mathbb{R})$

Para demostrar que el producto interno $(f, g)_{L_\omega^2(\mathbb{R})} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}\omega(x) dx$ satisface los axiomas de producto interno, debemos verificar que cumple lo siguiente para cualesquiera $f, g, h \in L_\omega^2(\mathbb{R})$ y $c \in \mathbb{C}$:

1. $(f, g)_{L_\omega^2(\mathbb{R})} = \overline{(g, f)}_{L_\omega^2(\mathbb{R})}$
2. $(cf + g, h)_{L_\omega^2(\mathbb{R})} = c(f, h)_{L_\omega^2(\mathbb{R})} + (g, h)_{L_\omega^2(\mathbb{R})}$

3. $(f, f)L_\omega^2(\mathbb{R}) \geq 0$ y $(f, f)L_\omega^2(\mathbb{R}) = 0$ si y solo si $f = 0$

A continuación, demostraremos cada propiedad:

1. Para cualesquiera $f, g \in L_\omega^2(\mathbb{R})$, se tiene:

$$(f, g)L_\omega^2(\mathbb{R}) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}\omega(x)dx \quad (76)$$

$$\overline{(g, f)L_\omega^2(\mathbb{R})} = \overline{\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\overline{f(x)}\omega(x)dx} = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{g(x)f(x)}\omega(x)dx \quad (77)$$

Ya que, como $\omega(x)$ es una función real, se tiene que $\overline{\omega(x)} = \omega(x)$, por lo que $\overline{g(x)f(x)} = f(x)\overline{g(x)}$ y, por lo tanto:

$$(f, g)L_\omega^2(\mathbb{R}) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}\omega(x)dx = \overline{(g, f)L_\omega^2(\mathbb{R})} \quad (78)$$

2. Para cualesquiera $f, g, h \in L_\omega^2(\mathbb{R})$ y $c \in \mathbb{C}$, se tiene:

$$\begin{aligned} (cf + g, h)L_\omega^2(\mathbb{R}) &= \int_{-\infty}^{\infty} (cf(x) + g(x))\overline{h(x)}\omega(x)dx \\ &= c \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{h(x)}\omega(x)dx + \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\overline{h(x)}\omega(x)dx \end{aligned} \quad (79)$$

3. Para cualquier función $f \in L_\omega^2(\mathbb{R})$, se tiene:

$$(f, f)L_\omega^2(\mathbb{R}) = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\omega(x)dx \quad (80)$$

Como $\omega(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, se tiene que $|f(x)|^2\omega(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, lo que implica que la integral también es no negativa:

$$(f, f)L_\omega^2(\mathbb{R}) = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\omega(x)dx \geq 0 \quad (81)$$

Además, $(f, f)L_\omega^2(\mathbb{R}) = 0$ si y solo si $|f(x)|^2\omega(x) = 0$ para casi todo $x \in \mathbb{R}$ (es decir, en todo lugar excepto, posiblemente, en un conjunto de medida cero). Pero como $\omega(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, esto equivale a que $|f(x)|^2 = 0$ para casi todo $x \in \mathbb{R}$, lo que implica que $f(x) = 0$ para casi todo $x \in \mathbb{R}$ (nuevamente, en todo lugar excepto, posiblemente, en un conjunto de medida cero). Por lo tanto, $(f, f)L_\omega^2(\mathbb{R}) = 0$ si y sólo si $f = 0$ en $L_\omega^2(\mathbb{R})$.

Por lo tanto, hemos demostrado que el producto interno $(f, g)L_\omega^2(\mathbb{R}) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}\omega(x)dx$ satisface los axiomas de producto interno en $L_\omega^2(\mathbb{R})$.

2). Propiedades del espacio de Hilbert $L_\omega^2(\mathbb{R})$

- Completitud:** La completitud de $L_\omega^2(\mathbb{R})$ se sigue de la definición del espacio como el espacio de funciones cuadrado integrables con respecto a la función de peso $\omega(x)$. Cualquier sucesión de Cauchy de funciones en $L_\omega^2(\mathbb{R})$ converge a una función límite en $L_\omega^2(\mathbb{R})$, ya que la integral de la distancia al cuadrado entre la función límite y cualquier función de la sucesión se puede acotar por la integral del cuadrado de la distancia entre funciones sucesivas, lo que converge a cero por la propiedad de Cauchy de la sucesión.

2. **Espacio de Banach:** Para demostrar que $L_\omega^2(\mathbb{R})$ es un espacio de Banach, es necesario mostrar que es un espacio vectorial normado completo. La norma en este espacio se define como $|f|L\omega^2 = \sqrt{\langle f, f \rangle L\omega^2}$. Se puede demostrar que esta norma satisface las propiedades de una norma, y la completitud del espacio se sigue de la misma argumentación que en el caso de la completitud.
3. **Base ortonormal:** Para construir una base ortonormal en $L_\omega^2(\mathbb{R})$, se puede utilizar una técnica similar a la utilizada en el espacio de Hilbert $L^2(\mathbb{R})$. Es posible construir una base de funciones en $L_\omega^2(\mathbb{R})$ a partir de funciones de la forma e^{ikx} , donde k es un número real. Estas funciones no son normalizables en $L_\omega^2(\mathbb{R})$, pero es posible obtener una base ortonormal de funciones utilizando una función de peso adecuada. La base ortonormal se puede construir utilizando la fórmula de Parseval, que relaciona el producto interno de dos funciones en términos de sus coeficientes en la expansión de Fourier.
4. **Transformada de Fourier:** La transformada de Fourier en $L_\omega^2(\mathbb{R})$ se define de manera similar a la transformada de Fourier en $L^2(\mathbb{R})$, y se puede demostrar que es una transformación lineal unitaria que preserva la norma en el espacio. La inversa de la transformada de Fourier se define de manera similar a la inversa en $L^2(\mathbb{R})$, y también es una transformación lineal unitaria.
5. **Desigualdad de Plancherel:** La desigualdad de Plancherel se sigue de la propiedad de la transformada de Fourier como una transformación lineal unitaria que preserva la norma en el espacio. En particular, si f y \hat{f} son la función y su transformada de Fourier en $L_\omega^2(\mathbb{R})$, entonces $|f|L\omega^2 = |\hat{f}|L\omega^2$.
6. **Propiedad de incertidumbre:** La propiedad de incertidumbre en $L_\omega^2(\mathbb{R})$ se sigue de la desigualdad de Heisenberg en análisis de Fourier, que establece que la varianza de una función y la varianza de su transformada de Fourier están relacionadas. En particular, para cualquier función f en $L_\omega^2(\mathbb{R})$, se tiene que:

$$\sigma_x^2 \sigma_k^2 \geq \frac{1}{4} \quad (82)$$

donde σ_x^2 es la varianza de la función f y σ_k^2 es la varianza de su transformada de Fourier. La propiedad de incertidumbre indica que no es posible tener una función arbitrariamente localizada en el dominio y la frecuencia simultáneamente con varianzas pequeñas, ya que esta propiedad es una consecuencia del hecho de que una función y su transformada de Fourier son conjugadas una de la otra.

3). La norma en el espacio de Hilbert $L_\omega^2(\mathbb{R})$

Para demostrar que la norma $|f|L\omega^2 = \sqrt{\langle f, f \rangle L\omega^2}$ satisface los axiomas de norma, debemos verificar que cumple lo siguiente:

1. **No negatividad:** $|f|L\omega^2 \geq 0$ para cualquier función f en $L_\omega^2(\mathbb{R})$, y $|f|L\omega^2 = 0$ si y solo si $f = 0$ en $L_\omega^2(\mathbb{R})$.
2. **Homogeneidad:** $|\alpha f|L\omega^2 = |\alpha| |f|L\omega^2$ para cualquier constante α y cualquier función f en $L_\omega^2(\mathbb{R})$.
3. **Desigualdad triangular:** $|f+g|L\omega^2 \leq |f|L\omega^2 + |g|L\omega^2$ para cualquier par de funciones f y g en $L_\omega^2(\mathbb{R})$.

Demostración:

1. **No negatividad:** Sea f una función en $L_\omega^2(\mathbb{R})$. Como $\langle f, f \rangle L\omega^2 \geq 0$ por definición del producto interno, entonces $|f|L\omega^2 = \sqrt{\langle f, f \rangle L\omega^2} \geq 0$. Además, si $|f|L\omega^2 = 0$, entonces $\langle f, f \rangle L\omega^2 = 0$, lo que implica que $f = 0$ en $L_\omega^2(\mathbb{R})$. Por otro lado, si $f = 0$ en $L_\omega^2(\mathbb{R})$, entonces $\langle f, f \rangle L\omega^2 = 0$, lo que implica que $|f|L\omega^2 = 0$. Por lo tanto, la norma satisface la no negatividad y la identidad de elementos nulos.

2. **Homogeneidad:** Sea α una constante y f una función en $L_\omega^2(\mathbb{R})$. Entonces:

$$|\alpha f|L\omega^2 = \sqrt{\langle \alpha f, \alpha f \rangle L\omega^2} = \sqrt{\alpha^2 \langle f, f \rangle L\omega^2} = |\alpha| \sqrt{\langle f, f \rangle L\omega^2} = |\alpha| |f|L\omega^2 \quad (83)$$

Por lo tanto, la norma satisface la homogeneidad.

3. **Desigualdad triangular:** Sean f y g dos funciones en $L_\omega^2(\mathbb{R})$. Utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, se tiene:

$$\begin{aligned} (|f + g|L\omega^2)^2 &= \langle f + g, f + g \rangle (L\omega^2)^2 = (|f|L\omega^2)^2 + 2\operatorname{Re}\langle f, g \rangle L\omega^2 + (|g|L\omega^2)^2 \\ &\leq (|f|L\omega^2)^2 + 2|\langle f, g \rangle|L\omega^2 + (|g|L\omega^2)^2 \leq (|f|L\omega^2)^2 + 2|f||g|L\omega^2 + (|g|L\omega^2)^2 \quad (84) \\ &= (|f|L\omega^2 + |g|L\omega^2)^2 \end{aligned}$$

Donde se utilizó la definición del producto interno, la identidad $\langle f, g \rangle L\omega^2 = \operatorname{Re}\langle f, g \rangle L\omega^2 + i\operatorname{Im}\langle f, g \rangle L\omega^2$, la desigualdad de Cauchy-Schwarz y la definición de la norma. Tomando la raíz cuadrada en ambos lados de la desigualdad, se obtiene:

$$|f + g|L\omega^2 \leq |f|L\omega^2 + |g|L\omega^2 \quad (85)$$

Por lo tanto, la norma satisface la desigualdad triangular.

En conclusión, la norma $|f|L\omega^2 = \sqrt{\langle f, f \rangle L\omega^2}$ cumple con los axiomas de norma, por lo que es una norma válida para el espacio de Hilbert $L_\omega^2(\mathbb{R})$.

4). Polinomio ortogonal

Dos polinomios ortogonales son dos funciones polinómicas $p_m(x), p_n(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfacen la propiedad de ortogonalidad con respecto a una función de peso $\omega(x)$, es decir [48]:

$$\langle p_m(x), p_n(x) \rangle_\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} p_m(x)p_n(x)\omega(x)dx = c_n\delta(m, n) \quad (86)$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle_\omega$ es el producto escalar en el espacio $L_\omega^2(\mathbb{R})$ y $\delta : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \{0, 1\}$ es la delta de Kronecker:

$$\delta(m, n) = \begin{cases} 1; & m = n \\ 0; & m \neq n \end{cases} \quad (87)$$

Además, los polinomios ortogonales en $L_\omega^2(\mathbb{R})$ son completos, lo que significa que forman una base ortogonal del espacio. Esto implica que cualquier función $f \in L_\omega^2(\mathbb{R})$ se puede expresar de manera única como una serie de Fourier en términos de los polinomios ortogonales, es decir:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n p_n(x) \quad (88)$$

donde los coeficientes c_n están dados por:

$$c_n = \frac{\langle f(x), p_n(x) \rangle_\omega}{\langle p_n(x), p_n(x) \rangle_\omega}$$

D. Plano Escala-Frecuencia (II)

Una función de escala es una función matemática utilizada en el análisis de wavelet para aproximar señales continuas. La idea detrás de una función de escala es que se puede generar una familia de este tipo de funciones a diferentes escalas, cada una de las cuales proporciona una descripción aproximada de la señal original a diferentes resoluciones. En el análisis de wavelet, las funciones de escala se utilizan como base para construir las funciones de wavelet, que son utilizadas para descomponer una señal en diferentes niveles de detalle. En particular, las funciones de escala proporcionan una forma de aproximar la señal a diferentes escalas de resolución.

La función de escala $\phi : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se define recursivamente a partir de un filtro de análisis $h : A \rightarrow \mathbb{R}$ de longitud finita y un conjunto de polinomios ortogonales. El dominio de la función de análisis h depende del tipo de wavelet y del número de coeficientes utilizados en la descomposición wavelet. En general, el filtro de análisis h es una función finita y discreta que se aplica a una señal de igual longitud para obtener los coeficientes de detalle en la descomposición wavelet.

En la transformada de wavelet continua (CWT), el filtro de análisis h es una función continua y no tiene una longitud fija. En este caso, el dominio de la función de análisis h es el conjunto de números reales que representa las diferentes escalas y frecuencias en las que se descompone la señal conocido como el Plano Escala-Frecuencia, según Meyer II [49]. Si denotamos por S al conjunto de escalas y ω al conjunto de frecuencias, este plano estaría definido y denotado de la siguiente manera:

$$\Pi = S \oplus \omega \quad (89)$$

La función de escala, según Gonzalez [50], se usa para aproximar una función de imagen en distintos niveles de aproximación. Cada aproximación difiere en un factor de 2 de la aproximación en el nivel vecino más cercano. Es decir, las funciones de escala son funciones de expansión que están compuestas de traslaciones regidas por números enteros y escalas binarias contenidas en el conjunto $\{\phi_{j,k}(x)\}$. Las funciones de escala generales son:

$$\phi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \phi(2^j x - k) \quad (90)$$

Donde $j, k \in \mathbb{Z}$, y $\phi \in L^2_\omega(\mathbb{R})$. Los parámetros k y j determinan la posición y el ancho de $\phi_{j,k}$ a lo largo del eje X respectivamente [51]. Para un valor fijo j , el subespacio de un conjunto de expansión se suele expresar así:

$$V_j = \overline{\text{Span}_k \{\phi_{j,k}(x)\}} \quad (91)$$

El parámetro j es proporcional al tamaño de V_j . Hay cuatro requisitos fundamentales, según Gonzalez y Tzu-Heng [50], [52], del análisis de multiresolución (MRA) que las funciones de escala deben cumplir:

1. La función de escala $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}$ es ortogonal a su traslación regida por números enteros, es decir:

$$\int_I \phi(t-j) \phi(t-k) dt = 0 \quad \text{para } j \neq k \quad (92)$$

2. Los subespacios abarcados por la función de escala a bajas resoluciones están contenidos dentro de los abarcados a resoluciones más altas:

$$V_{-\infty} \subseteq \dots \subseteq V_{-1} \subseteq V_0 \subseteq V_1 \subseteq V_2 \subseteq \dots \subseteq V_{+\infty} \quad (93)$$

3. La única función que tienen en común todo V_j es $f(x) = 0$. Es decir:

$$V_{-\infty} = \{0\} \quad (94)$$

A esto se le llama la propiedad de completitud descendente, según Acharya [53].

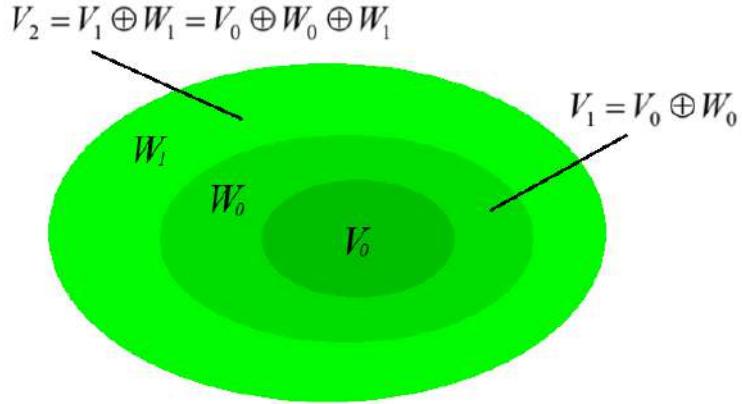


Figura XLVI: Relación espacial entre los espacios de funciones de escala y funciones de wavelet.

4. Cualquier función se puede representar con precisión arbitraria. A medida que el nivel de la función de expansión se aproxima al infinito, la función de expansión espacio $V : \mathbb{Z} \rightarrow L^2_\omega(\mathbb{R})$ definida por $V(j) = V_j$ contiene todos los subespacios. Es decir:

$$V_{+\infty} = L^2_\omega(\mathbb{R}) \quad (95)$$

A esto se le llama la propiedad de completitud ascendente, según Acharya [53]. Al cumplirse la igualdad de arriba, la suma ponderada de las funciones de expansión del subespacio V_{j+1} puede ser utilizada para expresar las funciones de expansión del subespacio V_j [50]:

$$\phi_{j,k}(x) = \sum_n \alpha_n \phi_{j+1,n}(x) \quad (96)$$

E. Las wavelets (ondas viajeras), tipos y propiedades

Las wavelets son funciones que sirven como una herramienta matemática para el análisis y procesamiento de señales en el tiempo y en la frecuencia. Una ondaleta o wavelet es una función matemática utilizada para descomponer una señal en componentes de diferentes escalas y frecuencias. Esta teoría se ha aplicado en diversas áreas, como el procesamiento de señales de audio y video, el análisis de datos en tiempo real, la compresión de imágenes y la detección de bordes. La compresión de imágenes wavelet se basa en la idea de que muchas imágenes contienen información redundante. Al utilizar la descomposición wavelet, se pueden identificar los detalles importantes de la imagen y los detalles que no lo son. De esta manera, se puede eliminar la información redundante y comprimir la imagen sin pérdida de calidad.

La teoría de wavelet también se ha utilizado en el procesamiento de imágenes. En este contexto, una imagen se puede ver como una señal bidimensional que se descompone en una serie de wavelets con diferentes escalas y orientaciones. Esta descomposición se realiza mediante la aplicación de un conjunto de wavelets en diferentes puntos de la imagen.

La descomposición wavelet se lleva a cabo en dos etapas: la primera es la descomposición en escalas, donde se separan los detalles finos de los detalles gruesos de la imagen. En la segunda etapa, se realiza la descomposición en orientaciones, donde los detalles finos se descomponen en diferentes direcciones. Esta descomposición en escalas y orientaciones permite una representación más compacta de la imagen y una mejor detección de características como bordes y texturas.

1). Definición de la función de wavelet

La función de wavelet [50], [52] es una función que está localizada tanto en el tiempo como en la frecuencia, lo que significa que es capaz de capturar tanto información de alta frecuencia como de baja frecuencia de una señal o imagen. La función de wavelet es un tipo de función de escala que satisface los cuatro requisitos del MRA para las funciones de escala descritas en la subsección anterior. La función de wavelet es análoga a la expresión de la función de escala general definida en la ecuación (90) Tanto la función de traslación regida por enteros como la función de escala binaria son incorporadas. La función de wavelet $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se define como:

$$\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\psi(2^j x - k) \quad (97)$$

para todo $k \in \mathbb{Z}$ que abarca el espacio W_j , donde:

$$W_j = \text{span}_k\{\psi_{j,k}(x)\}$$

La función de wavelet abarca la diferencia entre dos subespacios de escala adyacentes V_j y V_{j+1} , como se muestra en la figura XLVI. Por lo tanto, se deriva una ecuación general que describe la relación entre los espacios de funciones de escala y los espacios de funciones de wavelet:

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j \quad (98)$$

Esta expresión, según Tzu-Heng [52], puede ser extendida para expresar el espacio de todas las funciones medibles cuadrado-integrables:

$$L_\omega^2(\mathbb{R}) = V_0 \oplus W_0 \oplus W_1 \oplus \dots \quad (99)$$

Esta ecuación puede ser expresada sin el espacio de la función de escala:

$$L_\omega^2(\mathbb{R}) = \dots \oplus W_{-2} \oplus W_{-1} \oplus W_0 \oplus W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \quad (100)$$

La función de escala en el nivel de resolución más bajo, llamado V_0 , proporciona una aproximación a la función de la imagen $f \in L_\omega^2(\mathbb{R})$. Por otro lado, las funciones de wavelet en el nivel W_0 codifican la diferencia entre esta aproximación y la función real [50]. En otras palabras, las funciones de wavelet se utilizan para resaltar los detalles finos de la señal o imagen que no están incluidos en la aproximación proporcionada por la función de escala.

Cualquier función de wavelet puede expresarse como una suma ponderada de funciones de escala con doble resolución [50]; es decir, funciones de escala en un nivel de resolución más alto. Esto permite una representación más compacta de las funciones de wavelet y facilita su manipulación en el análisis de señales y procesamiento de imágenes:

$$\psi(x) = \sum_{k=0}^{n-1} h_\psi(k) \sqrt{2} \phi(2x - k) \quad (101)$$

Donde los $h_\psi(k)$ son los coeficientes de la función de wavelet y n el total de coeficientes [52]. El coeficiente $h_\psi(k)$ se puede relacionar al coeficiente $h_\phi(k)$ por:

$$h_\psi(k) = (-1)^k h_\phi(1 - k) \quad (102)$$

2). Tipos de wavelets

Existen diferentes tipos de funciones de wavelet. A continuación, se muestran las más utilizadas.

2).1. Wavelet de Haar

La wavelet de Haar, según Gutiérrez [54], es una de las funciones de wavelet más simples y es utilizada frecuentemente como una introducción al análisis de wavelets. Esta función de wavelet tiene una excelente resolución en el tiempo y es capaz de descomponer una señal en dos componentes de frecuencia baja y alta. Esta función $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ está definida de la siguiente manera:

$$\psi(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1/2 \\ -1, & 1/2 \leq t < 1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (103)$$

Donde t es la variable de tiempo.

La wavelet de Haar tiene una duración de un segundo (es decir, su soporte es de 1 segundo), y su valor es 1 en la primera mitad de su soporte y -1 en la segunda mitad. En la siguiente figura se muestra la gráfica de la wavelet de Haar:

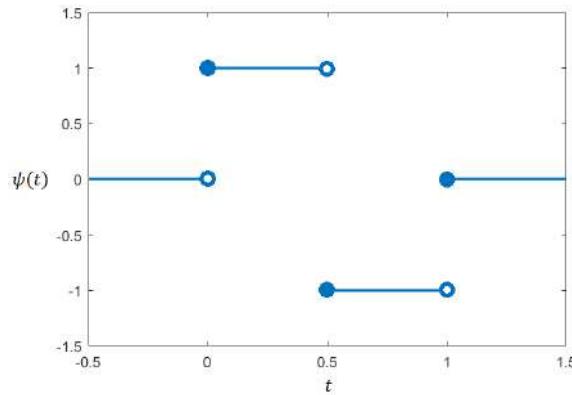


Figura XLVII: Gráfica de la wavelet de Haar.

2).2. Wavelet de Daubechies

Las wavelets de Daubechies, según Daubechies [51], [55] son una familia de funciones wavelet que se definen a partir de una función de escala $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y un conjunto de coeficientes $h(n)$, donde n es un número entero no negativo. La función de escala ϕ se utiliza para construir una base ortonormal de funciones que se usan para aproximar señales continuas. La versión más común de la función wavelet de Daubechies se conoce como la función Daubechies-4 y está definida de la siguiente manera:

$$\psi(t) = \sqrt{2}(h(0)\phi(2t) + h(1)\phi(2t-1) + h(2)\phi(2t-2) + h(3)\phi(2t-3)) \quad (104)$$

donde $h(n)$ son los coeficientes de la función de escala. Los coeficientes $h(n)$ se eligen de tal manera que la función wavelet tenga un soporte compacto y una alta regularidad. Estos coeficientes están definidos por:

$$h(0) = \frac{1 + \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \quad h(1) = \frac{3 + \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \quad h(2) = \frac{3 - \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \quad h(3) = \frac{1 - \sqrt{3}}{4\sqrt{2}} \quad (105)$$

La gráfica de la wavelet de Daubechies-4 se muestra a continuación:

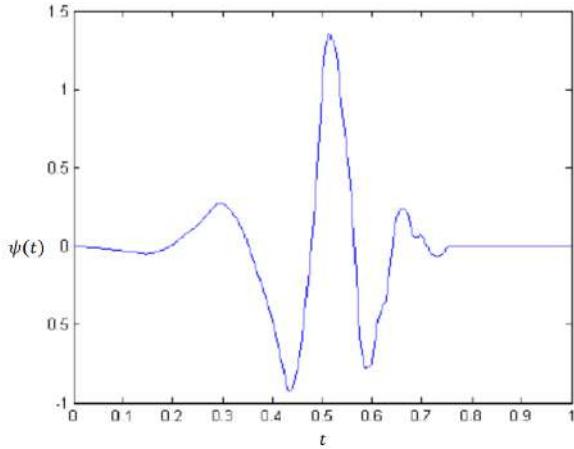


Figura XLVIII: Gráfica de la wavelet de Daubechies-4.

El valor “*n*” en la wavelet de Daubechies-*n* se refiere al número de coeficientes utilizados en la construcción de la wavelet. Los coeficientes se utilizan para filtrar una señal y separarla en diferentes escalas.

2).3. Wavelet de Coiflets

Las wavelets de Coiflets, según Daubechies [55], son una familia de wavelets ortogonales de soporte compacto. Las wavelets de Coiflets tienen algunas propiedades útiles, como la simetría y la regularidad; lo que las hace adecuadas para el análisis de señales y la compresión de datos. Una de las versiones más utilizadas es la Coiflets-2, la cual tiene alta precisión en detalles finos de la imagen. Esta wavelet contiene 10 coeficientes de filtro dado que tiene un filtro de escala de longitud 4 y un filtro de onda madre de longitud 6, y se define mediante la siguiente función:

$$\psi(t) = \sum_{k=0}^9 h(k)\phi(2t-k) \quad (106)$$

donde $h(k)$ son los coeficientes de la función de escala $\phi(x)$. Los coeficientes $h(k)$ en la función de escala de Coiflet-2 se definen de la siguiente manera:

$$h(0) = -0.00072, \quad h(1) = -0.00182, \quad h(2) = 0.00561, \quad h(3) = 0.02368,$$

$$h(4) = -0.05943, \quad h(5) = -0.07649, \quad h(6) = 0.04170, \quad h(7) = 0.81272,$$

$$h(8) = 0.38611, \quad h(9) = -0.06737$$

La gráfica de la wavelet de Coiflets-2 se muestra en la siguiente figura:

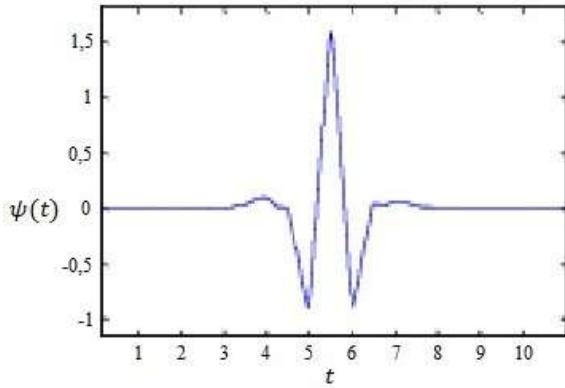


Figura XLIX: Gráfica de la wavelet de Coiflets-2.

2).4. Wavelets de Symlets

Las wavelets de Symlets, según Kaiser [56], son una familia de wavelets simétricas que se utilizan en el análisis y procesamiento de señales. Se pueden definir en términos de una función madre, que se utiliza para generar las diferentes escalas y desplazamientos de la wavelet.

La función wavelet de Symlets es una función simétrica, compacta y bien localizada tanto en el tiempo como en la frecuencia. Tiene un número finito de momentos, lo que significa que su energía está bien concentrada en un rango limitado de frecuencias y que puede ser usada para la compresión de señales con pérdida. La forma exacta de la función wavelet de Symlets depende del orden N , y cuanto mayor sea el orden, más suave y regular será la función. En general, las wavelets de Symlets de orden alto son más útiles para el análisis de señales suaves y continuas, mientras que las wavelets de orden bajo son más adecuadas para señales con discontinuidades o irregularidades.

Las wavelets de Symlets tienen propiedades interesantes que las hacen útiles en el análisis de señales, como la simetría y la regularidad en el tiempo y la frecuencia. Estas propiedades permiten una buena localización tanto en el tiempo como en la frecuencia, lo que las hace ideales para el análisis de señales no estacionarias, como las señales biológicas o de audio.

Una de las wavelet de Symlets que más se usa es la Symlets-6 debido a su alto grado de simetría y excelente capacidad de compresión. Esta wavelet se define mediante la siguiente ecuación:

$$\psi(t) = \sum_{k=0}^{11} h(k)\phi(2t - k) \quad (107)$$

donde ϕ es la función madre y los coeficientes de filtro $h(k)$ son:

$$h(0) = 0.01540, \quad h(1) = 0.00349, \quad h(2) = 0.11799, \quad h(3) = 0.04831,$$

$$h(4) = 0.49105, \quad h(5) = -0.78764, \quad h(6) = 0.33793, \quad h(7) = -0.07264,$$

$$h(8) = 0.02106, \quad h(9) = 0.04472, \quad h(10) = 0.00047, \quad h(11) = 0.00106$$

A continuación, se muestra la gráfica de la wavelet de symlets-6:

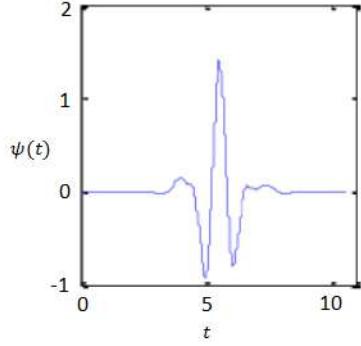


Figura L: Gráfica de la wavelet de Symlets-6.

2).5. Wavelets de Meyer

Las wavelets de Meyer, según Meyer [49], son una familia de wavelets que se caracterizan por tener un soporte compacto y una alta regularidad. La wavelet de Meyer es una wavelet simétrica ortogonal, es decir, sus coeficientes de wavelet y de escala son simétricos y cumplen con la propiedad de ortogonalidad. La wavelet de Meyer se define como:

$$\psi(t) = \sum_{k=0}^8 h(k)\phi(2t - k) \quad (108)$$

donde ϕ es la función de escala y $h(k)$ son los coeficientes de filtro, los cuales están definidos por:

$$h(0) = 0.02667, \quad h(1) = -0.01686, \quad h(2) = -0.07822,$$

$$h(3) = 0.26686, \quad h(4) = 0.60295, \quad h(5) = 0.26686,$$

$$h(6) = -0.07822, \quad h(7) = -0.01686, \quad h(8) = 0.02667$$

En la siguiente figura se muestra la gráfica de la wavelet de Meyer:

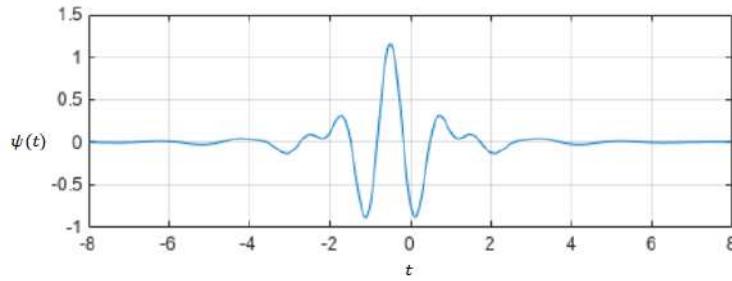


Figura LI: Gráfica de la wavelet de Meyer.

2).6. Wavelet de Morlet

La wavelet de Morlet, según Grossmann [57], es un tipo de función wavelet que está basada en una función compleja conocida como función de Morlet, la cual está definida de la siguiente manera:

$$\psi(t) = \pi^{-1/4} e^{i\omega t} e^{-t^2/2} \quad (109)$$

donde ω es la frecuencia angular, que determina la escala de la wavelet.

Esta función de Morlet es una onda sinusoidal modulada por una gaussiana, lo que significa que tiene una parte real y una parte imaginaria, y su forma se asemeja a una onda sinusoidal deformada.

Para construir la wavelet de Morlet, se debe dilatar y trasladar la función de Morlet a lo largo del eje temporal. La función wavelet resultante se define como:

$$\psi(s, t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{t - \tau}{s}\right) \quad (110)$$

donde s es la escala de la wavelet, que está relacionada con la frecuencia angular ω de la función de Morlet y τ es la traslación en el eje temporal.

La wavelet de Morlet es utilizada en análisis de señales para extraer información sobre la frecuencia y el tiempo de una señal. Al dilatar y trasladar la wavelet de Morlet a lo largo del eje temporal, se pueden detectar características en la señal que corresponden a diferentes escalas temporales y frecuencias angulares.

En la siguiente figura se muestra la gráfica de la wavelet de Morlet:

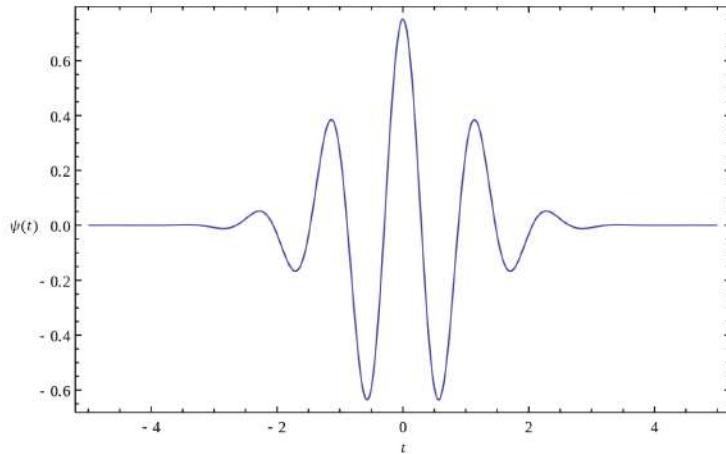


Figura LII: Gráfica de la wavelet de Morlet.

3). Condiciones de ortonormalidad de una wavelet

Las wavelets ortonormales, según Daubechies [58], son una familia de funciones que deben cumplir las siguientes condiciones:

- Ortogonalidad:** Las wavelets deben ser ortogonales entre sí; es decir, el producto interno entre dos wavelets diferentes debe ser cero:

$$\langle \psi_{j,k}, \psi_{j',k'} \rangle = \delta(j, j') \delta(k, k') \quad (111)$$

donde $\delta : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \{0, 1\}$ es la delta de Kronecker definida en la sección 1.5.4.

- Normalización:** Las wavelets deben estar normalizadas; es decir, su norma debe ser igual a uno:

$$\|\psi_{j,k}\|_{L^2_\omega} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_{j,k}(x)|^2 dx \right)^{1/2} = 1 \quad (112)$$

3. **Escala:** Las wavelets deben tener un comportamiento similar en diferentes escalas; es decir, deben ser dilataciones y traslaciones de una misma función madre ψ :

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{-j/2}\psi(2^{-j}t - k) \quad (113)$$

4. **Proyección:** Las wavelets deben ser capaces de proyectar una señal en diferentes frecuencias y resoluciones; es decir, deben ser capaces de detectar detalles finos y gruesos en una señal.

Algunas wavelet ortonormales son la wavelet de Haar y las wavelet de Daubechies. Las wavelet de Coiflets, Symlets y Meyer son ortogonales. La wavelet de Morlet no es ortogonal.

4). Transformada de wavelet integral

La transformada wavelet integral es una herramienta matemática utilizada para analizar señales y funciones en términos de su contenido de frecuencia en diferentes escalas y tiempos. Esta transformada se realiza a través del uso de wavelets, que son funciones matemáticas que permiten descomponer la señal original en componentes de diferentes frecuencias y escalas. La transformada wavelet integral general o continua [50], [52], [53], [59] se define como la integral de una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ multiplicada por una función llamada wavelet madre $\psi_{a,b} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, donde a y b son variables continuas y reales que están relacionadas con la función de escala y la función de traslación $T_b f(x) = f(x - b)$ respectivamente [58]. La wavelet madre se define como:

$$\psi_{a,b}(t) = |a|^{-1/2}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad (114)$$

Y la transformada wavelet se puede expresar como:

$$(W_\psi f)(a, b) = |a|^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\psi_{a,b}(t)dt \quad (115)$$

El parámetro a se refiere a la escala de la wavelet, que determina el ancho de la función. Cuando a es pequeño, la wavelet tiene una alta frecuencia y un ancho reducido, lo que permite detectar detalles finos en la señal. Por otro lado, cuando a es grande, la wavelet tiene una frecuencia baja y un ancho amplio, lo que permite detectar características más generales de la señal. El parámetro b se refiere a la traslación de la wavelet, que permite desplazar la función a lo largo del eje de tiempo. Esto permite analizar la señal en diferentes momentos y detectar cambios en la frecuencia a lo largo del tiempo.

Además, la función ψ y su transformada de Fourier $\hat{\psi}$ son funciones ventana con centros t^* y w^* , y radio Δ_ψ y $\Delta_{\hat{\psi}}$, respectivamente. El ancho y la altura de la ventana tiempo-frecuencia se definen como $2a\Delta_\psi$ y $2a^{-1}\Delta_{\hat{\psi}}$, respectivamente, y el área constante tiempo-frecuencia es $4\Delta_\psi\Delta_{\hat{\psi}}$ [50], [52].

Para que la transformada wavelet tenga la propiedad de ser inversible, se debe cumplir el criterio de admisibilidad [50], [52], [53], [59], que se expresa como:

$$C_\psi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\psi(\epsilon)|^2}{|\epsilon|} d\epsilon < \infty \quad (116)$$

donde ϵ es espacio y escala variable y $\psi(\epsilon)$ es la transformada de Fourier de $\psi(x)$. Si se cumple el criterio de admisibilidad, se puede construir la transformada inversa como:

$$f(x) = \frac{1}{C_\psi} \int_{a=-\infty}^{+\infty} \int_{b=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|a|^2} W(a, b) \psi_{a,b}(x) da db \quad (117)$$

5). Transformada de wavelet discreta (DWT)

La DWT se basa en la descomposición de una señal en diferentes escalas y frecuencias utilizando una función wavelet. En este texto se explican los parámetros necesarios para discretizar la función wavelet y obtener los coeficientes de la DWT. Los parámetros continuos de dilatación y traslación se deben expresar en términos de valores discretos para poder aplicar la DWT. Una forma popular de discretizar a y b , como sugieren Acharya y Ray [53], es expresando los parámetros como

$$a = a_0^j \quad y \quad b = kb_0 a_0^j \quad (118)$$

donde el parámetro j afecta la escala de la transformada wavelet y k está relacionado con la traslación de la función wavelet, según Tzu-Heng [52]. Como la distancia de traslación varía con respecto a la escala de la función wavelet, el parámetro b en dominio continuo debe tomar en cuenta el factor de escala. De ese modo, al multiplicar a_0^j a kb_0 se completa la discretización de b . Al sustituir a y b en la wavelet madre definida en la sección II.E.1), la función wavelet se puede representar por:

$$\psi_{a,b}(x) = a_0^{-j/2} \psi(a_0^{-j}x - kb_0) \quad (119)$$

De acuerdo al método de muestreo diádico, los valores de a_0 y b_0 son seleccionados como “2” y “1” respectivamente; y en general: $a = 2^j$ y $b = k2^j$. Por lo tanto, la función wavelet [53] en una base ortonormal se define como

$$\psi_{j,k}(x) = 2^{-j/2} \psi(2^{-j}x - k) \quad (120)$$

Los coeficientes de la wavelet discreta [50] pueden ser obtenidos expandiendo la función de la señal $f(x)$ como una secuencia de números [52]. Nótese que la función wavelet es análoga a la función wavelet definida en la sección II.E.1), con los signos negativos del parámetro de dilatación j . Al aplicar el principio de expansión de series, los coeficientes están definidos como:

$$W_\phi(j_0, k) = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{x=0}^{M-1} f(x) \phi_{j_0, k}(x) \quad (121)$$

$$W_\psi(j, k) = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{x=0}^{M-1} f(x) \psi_{j, k}(x) \quad (122)$$

para $j \geq j_0$, y $W_\phi(j_0, k)$ y $W_\phi(j, k)$ son los coeficientes de aproximación y coeficientes de detalle respectivamente. El parámetro M es una potencia de 2 con rangos del 0 al $J - 1$. Los coeficientes de la DWT nos permiten reconstruir la función de la señal $f(x)$ como:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_k W_\phi(j_0, k) \phi_{j_0, k}(x) + \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{j=j_0}^{+\infty} \sum_k W_\psi(j, k) \psi_{j, k}(x) \quad (123)$$

donde $\frac{1}{\sqrt{M}}$ actúa como un factor normalizador [50], [52]. La DWT es mejor que la transformada de Fourier discreta debido a que tiene mayor eficacia al localizar tanto el tiempo como la frecuencia. Esto hace que el proceso de compresión de la imagen sea más fácil de realizar, según Acharya [53].

Por otro lado, existe una única función $\psi^{j,k}$ que cumple lo siguiente:

$$f(x) = \sum_j \sum_k \langle \psi^{j,k}, f \rangle \psi_{j,k} \quad (124)$$

Si existe una función $\tilde{\psi} \in L^2_\omega(\mathbb{R})$ tal que:

$$\tilde{\psi}_{j,k} = \psi^{j,k} \quad (125)$$

entonces, se le denomina a $\tilde{\psi}$ como la wavelet dual de ψ .

6). Transformada rápida de wavelet (FWT)

La transformada rápida de wavelet (FWT) es un algoritmo utilizado para calcular la transformada wavelet de una señal de manera eficiente. La FWT se basa en el uso de filtros de paso bajo y paso alto, que permiten separar una señal en dos componentes: una de baja frecuencia y otra de alta frecuencia. Este proceso se repite iterativamente en cada componente de baja frecuencia, generando una descomposición en distintas escalas y frecuencias de la señal original.

La FWT tiene varias ventajas en comparación con otras técnicas de análisis de señales. En primer lugar, la FWT es más eficiente que la Transformada de Fourier, especialmente para señales que no son periódicas. Además, la FWT permite el análisis multiresolución, lo que significa que se puede analizar una señal en diferentes escalas de tiempo y frecuencia, lo cual puede ser útil para detectar patrones o eventos en diferentes escalas.

La FWT es similar al esquema de codificación de subbanda de dos bandas, que está también basado en la relación entre los coeficientes de la DWT en escalas adyacentes [52]. Primero, consideraremos la ecuación de multiresolución:

$$\phi(x) = \sum_n h_\phi(n) \sqrt{2} \phi(2x - n) \quad (126)$$

Mediante una escala de x por 2^j , traslación de x por k unidades y haciendo $m = 2k + n$, se tendría:

$$\phi(2^j x - k) = \sum_n h_\phi(n) \sqrt{2} \phi(2(2^j x - k) - n) = \sum_m h_\phi(m - 2k) \sqrt{2} \phi(2^{j+1} x - m) \quad (127)$$

Y análogamente:

$$\psi(2^j x - k) = \sum_m h_\psi(m - 2k) \sqrt{2} \psi(2^{j+1} x - m) \quad (128)$$

Una propiedad que involucra la convolución de una función de escala y un coeficiente de wavelet [52] se puede obtener mediante los siguientes pasos:

1. Empezamos considerando los coeficientes de la transformada de wavelet discreta definidos en la sección II.E.5). al aplicar el principio de expansión de series.

2. Al sustituir la función de escala general definida en la sección II.E.1), en la ecuación de coeficientes de la transformada de wavelet discreta, se tiene:

$$W_\psi(j, k) = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_x f(x) 2^{j/2} \psi(2^j x - k) \quad (129)$$

3. Reemplazar $\psi(2^j x - k)$ en la ecuación (129) con la expresión del lado derecho de la igualdad (128) obtenida al considerar la ecuación de multirresolución:

$$W_\psi(j, k) = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_x f(x) 2^{j/2} \left[\sum_m h_\psi(m - 2k) \sqrt{2} \phi(2^{j+1} x - m) \right] \quad (130)$$

4. Reorganizar la parte de la suma de la ecuación:

$$W_\psi(j, k) = \sum_m h_\psi(m - 2k) \left[\frac{1}{\sqrt{M}} \sum_x f(x) 2^{(j+1)/2} \phi(2^{j+1} x - m) \right] \quad (131)$$

Donde la expresión entre corchetes es idéntica a la expresión de la derecha de la igualdad (129) luego de reemplazar j y k por $j + 1$ y m respectivamente.

Por lo tanto,

$$W_\psi(j, k) = \sum_m h_\psi(m - 2k) W_\phi(j + 1, m) \quad (132)$$

Y similarmente, el coeficiente de aproximación DWT en la escala $j + 1$ puede ser expresado como:

$$W_\phi(j, k) = \sum_m h_\phi(m - 2k) W_\phi(j + 1, m) \quad (133)$$

Las ecuaciones (132) y (133) demuestran que tanto la aproximación como los coeficientes de detalle $W_\phi(j, k)$ y $W_\psi(j, k)$ en la escala j se pueden obtener convolucionando los coeficientes de aproximación $W_\phi(j + 1, k)$ en la escala $j + 1$, con la escala de tiempo invertida y los vectores de wavelet $h_\phi(-n)$ y $h_\psi(-n)$ seguidos del submuestreo subsiguiente. Estas ecuaciones pueden ser expresadas en los siguientes formatos de convolución:

$$W_\psi(j, k) = h_\psi(-n) \cdot W_\phi(j + 1, n) |_{n=2k, k \geq 0} \quad (134)$$

$$W_\phi(j, k) = h_\phi(-n) \cdot W_\phi(j + 1, n) |_{n=2k, k \geq 0} \quad (135)$$

La reconstrucción de la señal original $f(x)$ puede ser realizada mediante la transformada rápida de wavelet inversa, la cual emplea los vectores de wavelet y vectores de escala que son utilizados en la transformada rápida de wavelet hacia adelante con el nivel de aproximación j y los coeficientes de detalle [58]. Este proceso de síntesis genera los coeficientes de aproximación del nivel $j + 1$.

7). Espacio Escala-Frecuencia

La transformada de wavelet en dos dimensiones es una técnica matemática utilizada para analizar señales bidimensionales, como una imagen, y descomponerla en diferentes frecuencias y escalas.

7).1. Funciones de wavelet en dos dimensiones

Las funciones de wavelet en dos dimensiones son funciones matemáticas que están limitadas en el espacio y en la frecuencia. Estas funciones pueden ser ortogonales o biortogonales, dependiendo de los requerimientos del problema. La función de wavelet en dos dimensiones se utiliza para descomponer una imagen en diferentes escalas y direcciones, se denota por $\psi(x, y)$ y, según Fernández [60], se define como:

$$\psi(x, y) = \psi(x)\psi(y) \quad (136)$$

Esta función satisface las siguientes propiedades:

1. Tiene un ancho finito y está limitada en el tiempo y en el espacio; es decir, solo es necesario calcular y almacenar los valores de la función en una región finita del plano.
2. Su integral sobre todo el plano de su dominio espacial es igual a cero, es decir: $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x, y) dx dy = 0$.
3. Tiene energía finita, es decir: $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \psi^2(x, y) dx dy < \infty$.
4. Es ortogonal a las funciones de escala en ambas direcciones, es decir: $\int_k^{k+1} \psi(x, y) dx = 0$ y $\int_k^{k+1} \psi(x, y) dy = 0$ para todo $k \in \mathbb{Z}$.

7).2. Transformada wavelet en dos dimensiones discreta (DWT2)

La transformada de wavelet en dos dimensiones discreta se realiza mediante una serie de operaciones de filtrado y submuestreo. La imagen se divide en cuatro sub-bandas: LL (Low-Low), LH (Low-High), HL (High-Low) y HH (High-High), para representar diferentes aspectos de la imagen en diferentes escalas y direcciones. Las cuatro subbandas se obtienen mediante la aplicación de filtros de wavelet en dos dimensiones en la imagen original y luego se submuestrean para obtener la imagen de baja resolución y las tres subbandas de alta resolución, según Jain [61]. Las subbandas se pueden clasificar en tres categorías principales:

1. **Subbanda de aproximación (LL):** Esta subbanda contiene la parte de baja frecuencia y baja resolución de la imagen. Representa la aproximación general de la imagen original después de aplicar la transformación wavelet. Es decir, representa los aspectos de la imagen que son suaves y lentamente cambiantes, como las áreas homogéneas de la imagen.
2. **Subbandas horizontales (LH) y verticales (HL):** Contienen los detalles de alta frecuencia en las direcciones horizontal y vertical, respectivamente. Estas subbandas representan los bordes y las transiciones abruptas en la imagen.
3. **Subbanda diagonal (HH):** Contiene los detalles de alta frecuencia en ambas direcciones. Esta subbanda representa las características de la imagen que cambian rápidamente en todas las direcciones.

Sea $I_0 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una imagen o señal bidimensional discreta de tamaño $M \times N$. Al aplicar el principio de expansión de series, se obtienen los coeficientes de aproximación $W_\phi(j_0, k)$ y de detalle $W_\psi(j, k)$ respectivamente:

$$W_\phi(j_0, k, l) = \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} I_0(m, n) \phi_{j_0, k, l}(m, n)$$

$$W_\psi(j, k, l) = \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} I_0(m, n) \psi_{j,k,l}(m, n)$$

La DWT2 de I_0 se puede calcular mediante la siguiente ecuación:

$$I(m, n) = \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{N-1} \left(W_\phi(j_0, k, l) \phi_{j_0, k, l}(m, n) + \sum_{j=j_0}^{+\infty} W_\psi(j, k, l) \psi_{j, k, l}(m, n) \right) \quad (137)$$

donde:

- $\phi_{j,k,l}(m, n)$ representa la función de escala de la imagen en la escala j , y k y l son los índices que recorren las posiciones espaciales.
- $\psi_{j,k,l}(m, n)$ representa la función wavelet en la escala j y las posiciones espaciales k y l .
- $I(m, n)$ es la imagen resultante de aplicar la DWT2 a la imagen original I_0 .

La operación de convolución y submuestreo se puede expresar de forma matemática como:

$$I_s(m, n) = W_\psi(j, k, l) * I(m, n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} W_\psi(j, k) I(m - k, n - l) \quad (138)$$

La convolución wavelet es una técnica utilizada en el procesamiento de imágenes para extraer características específicas de la imagen, como bordes y texturas, a diferentes escalas y orientaciones. El filtro wavelet $W_\psi(j, k, l)$ actúa como una función de detección que responde a patrones específicos en la imagen.

El resultado final de la DWT2 es un conjunto de coeficientes $W(j, k, l)$ y una imagen de baja resolución $I_s(m, n)$. Estos coeficientes y la imagen de baja resolución se pueden utilizar para reconstruir la imagen original utilizando la transformada wavelet inversa.

F. Operador divergencia

La divergencia es un operador matemático que actúa sobre un campo vectorial y proporciona una medida local de la variación o “dispersión” de ese campo en un punto dado.

1). Definición del operador divergencia

Para un campo vectorial tridimensional $\mathbf{F} = \langle F_x, F_y, F_z \rangle$, la divergencia $\text{div}\mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F}$ se define matemáticamente como la suma de las derivadas parciales de las componentes del campo respecto a sus respectivas coordenadas. La expresión general para la divergencia, según Kaplan [62], es:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \quad (139)$$

Donde:

- $\frac{\partial F_x}{\partial x}$ es la derivada parcial de la componente F_x con respecto a x .

- $\frac{\partial F_y}{\partial y}$ es la derivada parcial de la componente F_y con respecto a y .
- $\frac{\partial F_z}{\partial z}$ es la derivada parcial de la componente F_z con respecto a z .

La divergencia de un campo vectorial $\mathbf{F}(x)$ en el punto x_0 se define como el flujo del campo vectorial por unidad de volumen a medida que el volumen alrededor del punto tiende a cero:

$$\operatorname{div} \mathbf{F}|_{x_0} = (\nabla \cdot \mathbf{F})|_{x_0} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{|V|} \iint_{S(V)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} \quad (140)$$

Donde S es una superficie cerrada que se reduce a un punto en el límite. El símbolo ∇ representa el operador nabla.

La divergencia proporciona información sobre cómo fluye o se expande un campo vectorial desde un punto específico. En la física, la divergencia tiene interpretaciones importantes, como en las ecuaciones de la física de fluidos y electromagnetismo.

En el contexto de la mecánica de fluidos, la divergencia de un campo vectorial V se asocia con la tasa de cambio local de la densidad de flujo Q en un punto dado. Un campo vectorial con divergencia positiva indica una fuente, es decir, un punto donde el flujo se origina; mientras que un campo con divergencia negativa indica un sumidero, donde el flujo converge; y si la divergencia es cero en un punto, el flujo es constante o no hay cambio de densidad de flujo en ese punto.

En el contexto del campo electromagnético, la divergencia del campo eléctrico E proporciona información sobre la distribución de las cargas eléctricas en un punto. La divergencia del campo magnético B en el vacío es siempre cero, lo que indica que no hay fuentes magnéticas monopolares²⁸.

Si se usa este operador sobre imágenes, se debe adaptar la definición a dos dimensiones; por lo tanto, para un campo vectorial bidimensional $\mathbf{F} = \langle F_x, F_y \rangle$, la expresión para la divergencia ($\nabla \cdot \mathbf{F}$) en dos dimensiones es:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} \quad (141)$$

Donde:

- $\frac{\partial F_x}{\partial x}$ es la derivada parcial de la componente F_x con respecto a x .
- $\frac{\partial F_y}{\partial y}$ es la derivada parcial de la componente F_y con respecto a y .

En dos dimensiones, la divergencia aún representa la tasa de cambio local de un campo vectorial; pero en este caso, no hay una componente en la dirección z como en el caso tridimensional. La interpretación física de la divergencia en dos dimensiones es similar a la interpretación en tres dimensiones y puede ser útil en contextos como la teoría del campo eléctrico y flujo de fluidos en dos dimensiones, entre otros.

2). Propiedades del operador divergencia

Las propiedades fundamentales del operador divergencia $\operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F}$ son las siguientes:

²⁸No existen cargas magnéticas aisladas.

1. **Linealidad:** Para campos vectoriales \mathbf{F} y \mathbf{G} , y escalares a y b :

$$\nabla \cdot (a\mathbf{F} + b\mathbf{G}) = a(\nabla \cdot \mathbf{F}) + b(\nabla \cdot \mathbf{G}) \quad (142)$$

2. **Regla del producto escalar:** Para un campo vectorial \mathbf{F} y un campo escalar u :

$$\nabla \cdot (u\mathbf{F}) = \nabla u \cdot \mathbf{F} + u(\nabla \cdot \mathbf{F}) \quad (143)$$

3. **Divergencia del rotacional es cero:** Para un campo vectorial \mathbf{F} :

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0 \quad (144)$$

4. **Divergencia de un gradiente es el laplaciano:** Para un campo escalar u :

$$\nabla \cdot (\nabla u) = \nabla^2 u \quad (145)$$

5. **Identidad rotacional:** Para campos vectoriales \mathbf{F} y \mathbf{G} en \mathbb{R}^3 :

$$\nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{G} - \mathbf{F} \cdot (\nabla \times \mathbf{G}) \quad (146)$$

3). Teorema de la Divergencia (Teorema de Gauss)

El Teorema de la Divergencia, según Kaplan [62], también conocido como Teorema de Gauss, establece una relación entre el flujo de un campo vectorial a través de una superficie cerrada y la integral de la divergencia de dicho campo en el interior del volumen encerrado por la superficie. Este resultado es significativo en aplicaciones relacionadas con la electrostática y la mecánica de fluidos.

Teorema: Sea $U \subset \mathbb{R}^3$ una región sólida acotada por una superficie cerrada S orientada por un vector normal unitario que apunta hacia el exterior de U . Si \mathbf{F} es un campo vectorial con derivadas parciales continuas en U , entonces se cumple:

$$\iint_{\partial U} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_U \nabla \cdot \mathbf{F} dV \quad (147)$$

Donde $S = \partial U$.

G. Filtro de difusión anisotrópica - EDP de difusión lineal

El filtro de difusión lineal, también conocido como filtro de difusión isotrópica, es una técnica utilizada en el procesamiento de imágenes para suavizar o difuminar una imagen. Este tipo de filtro es comúnmente aplicado en la reducción de ruido y la mejora de la apariencia visual de una imagen. La difusión lineal se basa en el concepto de difusión de calor, donde la información se propaga gradualmente desde los pixeles más intensos hacia los menos intensos.

1). Fundamento físico de los procesos de difusión

En la sección I.D.1., se explica cómo se obtiene el volumen de oxígeno (VO_2) extraído por los órganos del cuerpo; el cual se puede calcular mediante la siguiente ecuación:

$$VO_2 = GC \cdot \Delta O_2 \quad (147)$$

Donde GC es el flujo sanguíneo y (ΔO_2) es la variación de concentración de oxígeno entre el sistema arterial y venoso.

Dado que se puede expresar el gasto cardíaco (GC) como el producto de la permeabilidad (P) y el área transversal (A), entonces, se tiene que el Principio de Fick para el volumen de oxígeno se puede expresar de esta manera:

$$VO_2 = P \cdot A \cdot \Delta O_2 \quad (148)$$

Si ρ_{O_2} representa la densidad del oxígeno y \vec{r} el vector resultante de la diferencia entre la posición final e inicial del oxígeno, al multiplicar la ecuación (148) por el factor $\frac{\rho_{O_2}}{VO_2}$, se tiene que:

$$\rho_{O_2} = P \cdot \frac{\Delta O_2}{|\Delta \vec{r}|} \quad (149)$$

Mientras que para los procesos de difusión, se tiene que la densidad del flujo de masa está dada por:

$$\vec{J} = -D \nabla u \quad (150)$$

Donde D es el tensor de difusión, una matriz simétrica definida positiva, y ∇u es el gradiente de concentración del compuesto. A esta ecuación se le conoce como la forma general de la Ley de Fick, según Weickert [63].

Cuando \vec{J} y ∇u son paralelos, el proceso de difusión es isotrópico; si no son paralelos, el proceso es anisotrópico y la matriz D se reemplaza por un valor escalar positivo de difusividad g .

La ecuación de continuidad se obtiene a partir del hecho de que la difusión transporta masa sin destruirla ni crear más de ella:

$$\partial_t u = -\nabla \cdot \vec{J} \quad (151)$$

Donde t denota el tiempo.

Al introducir la ley de Fick en la ecuación de continuidad, obtenemos la ecuación de difusión:

$$\partial_t u = \nabla \cdot (D \cdot \nabla u) \quad (152)$$

Esta ecuación se utiliza muchas veces para resolver problemas relacionados al transporte físico. Si se emplea para medir la transferencia de calor, se le denomina ecuación del calor.

2). Fundamento del filtrado lineal de difusión

Se define el kernel gaussiano de ancho o desviación estándar $\sigma > 0$ por [63]:

$$K_\sigma(x) := \frac{1}{2\pi\sigma^2} \cdot \exp\left(-\frac{|x|^2}{2\sigma^2}\right) \quad (153)$$

Sea $I = (I_1, I_2, I_3)$ una imagen representada por un mapeo de valores reales $I_k \in L^1(\mathbb{R}^2)$, $k \in \{1, 2, 3\}$. Se define la convolución entre K_σ e I_k por:

$$(K_\sigma * I_k)(x) := \int_{\mathbb{R}^2} K(x, y) I_k(y) dy, \quad \forall k \in \{1, 2, 3\} \quad (154)$$

Las razones por las que esta convolución genera un excelente suavizado de la imagen son las siguientes:

- Dado que $K_\sigma \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, se obtiene que $K_\sigma * I_k \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, $\forall k \in \{1, 2, 3\}$; incluso cuando I_k , $k \in \{1, 2, 3\}$ es únicamente absolutamente integrable.
- Si se observa su comportamiento en el dominio de la frecuencia, al definir la transformada de Fourier \mathcal{F} por:

$$(\mathcal{F}I_k)(\omega) := \int_{\mathbb{R}^2} I_k(x, y) \exp(-i\langle \omega, x \rangle) dx dy, \quad k \in \{1, 2, 3\} \quad (155)$$

Se obtiene por el teorema de convolución que:

$$(\mathcal{F}(K_\sigma * I_k))(\omega) = (\mathcal{F}K_\sigma)(\omega) \cdot (\mathcal{F}I_k)(\omega), \quad k \in \{1, 2, 3\} \quad (156)$$

Dada una función acotada $f \in C(\mathbb{R}^2)$, el proceso de difusión lineal:

$$\begin{aligned} \partial_t u &= \Delta u, \\ u(x, 0) &= f(x) \end{aligned} \quad (157)$$

Posee la solución única:

$$u(x, t) = \begin{cases} f(x); & t = 0 \\ (K_{\sqrt{2t}} * f)(x); & t > 0 \end{cases} \quad (158)$$

Esta solución es única, siempre y cuando nos restrinjamos a funciones que satisfagan la siguiente desigualdad:

$$|u(x, t)| \leq M \exp(a|x|^2); \quad M, a > 0 \quad (159)$$

Además, depende de manera continua de la componente tomada de la imagen inicial $f = I_k$ para algún $k \in \{1, 2, 3\}$ con respecto a $\|\cdot\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}$; es decir, que cambios pequeños en f generan cambios pequeños en u ; y cumple con el principio del máximo-mínimo:

$$\inf_{\mathbb{R}^2} f \leq u(x, t) \leq \sup_{\mathbb{R}^2} f \quad \text{en } \mathbb{R}^2 \times [0, \infty) \quad (160)$$

Y observamos que el tiempo t corresponde con el ancho espacial $\sqrt{2t}$ del kernel gaussiano. Por lo tanto, suavizar estructuras de orden p requiere detener el proceso de difusión cuando $t = T$.

$$T = \frac{1}{2}\sigma^2 \quad (161)$$

Para entender la estructura de una imagen, debemos analizar las fluctuaciones en los valores de las componentes *RGB* de la imagen dentro de una vecindad de cada uno de sus pixeles, por lo que se requiere tener información sobre sus derivadas. Sin embargo, la diferenciación es un problema mal planteado en el sentido de Hadamard, según Torre [64], ya que pequeñas perturbaciones en la imagen original, y por ende, en sus componentes *RGB*, pueden generar fluctuaciones arbitrariamente grandes en las derivadas. Por lo tanto, surge la necesidad de emplear métodos de regularización. Una posibilidad para regularizar es convolucionar la imagen con una función gaussiana antes de diferenciar [64]; mediante la igualdad:

$$\partial_{x_1}^n \partial_{x_2}^m (K_\sigma * f) = K_\sigma * (\partial_{x_1}^n \partial_{x_2}^m f) = (\partial_{x_1}^n \partial_{x_2}^m K_\sigma) * f \quad (162)$$

De esta ecuación se puede observar y deducir que, al suavizar una imagen utilizando un filtro gaussiano, no solo se suaviza la propia imagen, sino también todas sus derivadas (como las derivadas parciales con respecto a las coordenadas espaciales). En otras palabras,

al aplicar un filtro gaussiano a una imagen, no solo se reduce el ruido o las variaciones en la intensidad de los píxeles, sino que también se suavizan las transiciones entre diferentes regiones de la imagen. Este proceso de suavizado gaussiano es equivalente a convolucionar la imagen con las derivadas de una función gaussiana. Esto se debe a la propiedad de la función gaussiana en el dominio de la frecuencia, donde la derivada de una función gaussiana en el dominio espacial es equivalente a la convolución de la gaussiana con la imagen original.

Cuando se aplica una derivada gaussiana a una imagen, puede ayudar a mejorar la calidad de la imagen al reducir el efecto de desenfoque. Estas derivadas pueden combinarse, a menudo de manera no lineal, para formar expresiones conocidas como invariantes diferenciales. Estas invariantes son propiedades de la imagen que permanecen constantes bajo ciertas transformaciones como rotaciones, por ejemplo: $|\nabla K_\sigma * u|$ o $\Delta K_\sigma * u$

3). Propiedades del espacio-escala

Cuando uno mira una imagen, a menudo hay detalles grandes y pequeños en ella. Por ejemplo, en una fotografía existen detalles finos como la textura de la piel y detalles más grandes como la forma general de la persona. Por lo tanto, esta imagen puede ser observada y analizada en diferentes niveles de detalle, desde lo más pequeño hasta lo más grande. Para hacer esto, usamos algo llamado “espacio de escalas”; lo cual representa una serie de versiones de la imagen I en una familia $\{T_t I / t \geq 0\}$, pero cada versión se va simplificando gradualmente, es decir, comenzamos con la imagen original y luego creamos versiones más y más suavizadas de ella.

La razón por la que queremos esto es porque, a veces, no sabemos de antemano qué detalles son importantes en una imagen. Al tener diferentes versiones suavizadas, podemos comparar las estructuras en diferentes escalas.

Una suposición arquitectónica importante es la recursividad; es decir, para $t = 0$, la representación en el espacio de escalas es la misma imagen original I , y el filtrado puede dividirse en una secuencia de bancos de filtros:

$$\begin{aligned} T_0 I &= I, \\ T_{t+sI} &= T_t(T_{sI}), \quad \forall s, t \geq 0. \end{aligned} \tag{163}$$

A esta propiedad a veces también se le denomina propiedad de semigrupo.

H. Filtro de difusión anisotrópica - EDP de difusión no lineal

El filtro de difusión no lineal es una técnica utilizada en procesamiento de imágenes para suavizar las imágenes mientras se preservan los bordes y detalles importantes. A diferencia de los filtros lineales convencionales, como el filtro gaussiano, el filtro de difusión no lineal adapta su comportamiento localmente según las propiedades de la imagen. Una formulación conocida de este enfoque fue presentada por Perona y Malik [65] en 1987, donde la difusión se modela mediante ecuaciones en derivadas parciales (PDE) que dependen de las características locales de la imagen. Este filtro puede extenderse a procesos anisotrópicos, empleando un tensor de difusión adaptado en lugar de una difusividad escalar, lo que permite una adaptación direccional para un suavizado más efectivo. Este método se ha convertido en una herramienta valiosa en el procesamiento de imágenes cuando se requiere un equilibrio preciso entre la eliminación de ruido y la conservación de detalles estructurales.

1). El modelo de Perona-Malik

Perona y Malik inventaron una forma especial de suavizar imágenes para que no se vuelvan borrosas y para que podamos ver bien los bordes y detalles importantes. En lugar de usar un proceso uniforme, usan uno llamado “anisotrópico”, que significa que se comporta de manera distinta en diferentes partes de la imagen. En las áreas donde hay más probabilidad de que haya bordes (como en los contornos de los objetos), reducen la cantidad de suavizado. Esta probabilidad se puede medir usando $|\nabla u|^2$. Por lo tanto, ellos utilizan:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(g(|\nabla u|^2)\nabla u) \quad (164)$$

Entre las difusividades que proponen, se tiene:

$$g(s^2) = \frac{1}{1 + s^2/\lambda^2}, \quad (\lambda > 0) \quad (165)$$

Este modelo es considerado isotrópico debido a que usa un valor de difusividad escalar y no un tensor de difusión.

Para entender cómo funciona el filtro de Perona-Malik en los bordes, sería conveniente imaginar que Timmy Turner, un personaje de una serie animada, que cuenta con un par de hadas que le cumplen deseos, les pide un borrador mágico que actúe en base a una fórmula que se obtiene al definir la función de flujo. Esta función se define por:

$$\Phi(s) := sg(s^2) \quad (166)$$

donde $\Phi'(s) \geq 0$ para $|s| \leq \delta$ y $\Phi'(s) < 0$ para $|s| > \lambda$, como se puede notar en la figura LIII.

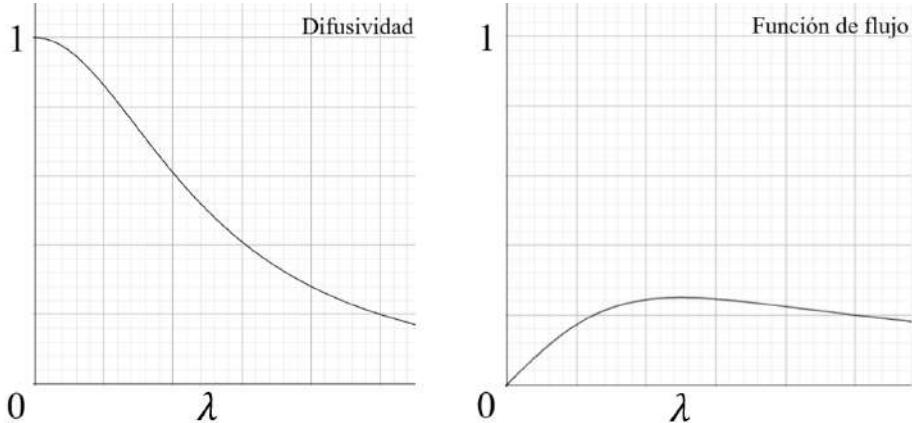


Figura LIII: Gráficas de la función de difusividad g y la función de flujo Φ .

Esta fórmula mágica $\Phi(s) = s \cdot g(s^2)$ le indica al borrador cómo debe comportarse. Si Timmy está borrando algo con muchos colores y cambios suaves, el borrador se extiende como si buscara colorear el papel, es decir, que el modelo de Perona-Malik será del tipo parabólico delantero; pero si está borrando algo contrastante, el borrador retrocede ligeramente intentando alejarse de la zona, por lo que dicho modelo será del tipo parabólico hacia atrás. Supongamos que además pidió un interruptor mágico regulable con el símbolo λ . Este interruptor define el parámetro que determina la magnitud del contraste necesaria para que el borrador varíe su comportamiento.

Dado que la fórmula de la divergencia de este modelo puede ser reescrita como $\partial_t u =$

$\Phi'(u_x)u_{xx}$, de aquí se observa que, a pesar de su difusividad no negativa, el modelo Perona-Malik es de tipo parabólico hacia adelante para $|u_x| \leq \lambda$ y de tipo parabólico hacia atrás para $|u_x| > \lambda$.

Se puede verificar sin dificultad que el filtro de “Perona-Malik” hace algo especial: aumenta la pendiente en los puntos de inflexión de los bordes de una región del tipo parabólico hacia atrás. Si existe una solución u suficientemente diferenciable, se cumple [63]:

$$\frac{\partial}{\partial t}(u_x^2) = 2u_x \frac{\partial}{\partial x}(u_t) = 2\Phi''(u_x)u_x u_{xx}^2 + 2\Phi'(u_x)u_x u_{xxx} \quad (167)$$

Un lugar x_0 donde u_x^2 es maximal en algún tiempo t se caracteriza por $u_x u_{xx} = 0$ y $u_x u_{xxx} \leq 0$. Por lo tanto,

$$\frac{\partial}{\partial t}(u_x^2)(x_0, t) \geq 0 \quad \text{para} \quad |u_x(x_0, t)| > 0 \quad (168)$$

con desigualdad estricta para $u_x u_{xxx} < 0$.

En el caso bidimensional, la fórmula de la divergencia de este modelo es reemplazada por [66], [67]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Phi'(\nabla u)u_{\eta\eta} + g(|\nabla u|^2)u_{\xi\xi} \quad (169)$$

Donde las coordenadas del indicador (ξ, η) denotan las direcciones perpendicular y paralela a ∇u respectivamente. Por lo tanto, al aplicar el filtro a la imagen respecto a una de las ternas *RGB*, se tiene difusión hacia adelante a lo largo de las líneas iso-fotas²⁹ combinada con difusión hacia adelante-atrás a lo largo de las líneas de flujo³⁰.

2). Modelos no lineales regularizados

Los modelos no lineales regularizados han demostrado ser efectivos en la práctica, a pesar de los problemas teóricos mencionados anteriormente en el proceso de Perona-Malik [63]. Se ha observado que las implementaciones prácticas de este proceso funcionan bien, lo que sugiere que los esquemas numéricos proporcionan regularizaciones implícitas que estabilizan el proceso. Como resultado, se propone introducir la regularización directamente en la ecuación continua para ser menos dependiente de la implementación numérica [68], [69].

La falta de unicidad demostrada por el resultado de Hollig indica que la dinámica de la solución puede depender críticamente del tipo de regularización. Por lo tanto, la regularización debe ajustarse específicamente al objetivo deseado de la ecuación de calor hacia adelante-atrás [70]. Se pueden aplicar regularizaciones espaciales o temporales (y, por supuesto, una combinación de ambas).

- Una tentativa inicial de regularización espacial fue propuesta por Posmentier, quien observó el efecto estabilizador del promedio del gradiente dentro de la difusividad [71]. Una formulación matemáticamente sólida de esta idea se presenta en el trabajo de Catte, Lions, Morel y Coll [68], quienes reemplazan la difusividad $g(|\nabla u|^2)$ del modelo Perona-Malik por $g(|\nabla u|^2)$ con $u := Ku$, obteniendo la ecuación $\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(g(|\nabla u|^2)\nabla u)$. Se ha establecido la existencia, unicidad y regularidad de una solución para $\theta > 0$ [68].
- P.-L. Lions demostró en comunicación privada con Mumford que el proceso unidimensional $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(g(v)\frac{\partial u}{\partial x})$ y $\frac{\partial v}{\partial t} = 1 - (|\frac{\partial u}{\partial x}|^2)v$ conduce a un filtro bien planteado [72].

²⁹líneas que mantienen el mismo valor *RGB*.

³⁰líneas de variación máxima en dicho valor *RGB*.

Aquí, v se interpreta como una regularización temporal de $|\frac{\partial u}{\partial x}|^2$, donde el parámetro $\theta > 0$ determina el retraso.

- En el contexto de flujos de corte, Barenblatt et al. [70] regularizaron la ecuación unidimensional de calor hacia adelante-atrás considerando la ecuación de tercer orden $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}((u_x)) + \frac{\partial^2}{\partial x \partial t}((u_x))$. Esta regularización se motivó físicamente al introducir un tiempo de relajación θ en la difusividad. Se demostró la existencia de una solución generalizada para el problema inicial y de contorno con condiciones de Neumann homogéneas, y se mostró que las soluciones suaves pueden volverse discontinuas en un tiempo finito, antes de converger finalmente a un estado constante por partes.

3). Modelos anisotrópicos no lineales

Todos los filtros de difusión no lineal que hemos investigado hasta ahora utilizan una difusividad g , que se adapta a la estructura subyacente de la imagen. Por lo tanto, son isotrópicos y el flujo $J = g\nabla u$ siempre es paralelo a ∇u . Sin embargo, en ciertas aplicaciones sería deseable rotar el flujo hacia la orientación de las características interesantes. Estas necesidades no pueden ser satisfechas por una difusividad escalar; se debe introducir un tensor de difusión que conduzca a filtros de difusión anisotrópicos [63]. Los filtros de difusión anisotrópica generalmente aplican estrategias de regularización espacial (una excepción es la regularización temporal de Cottet [73]).

- **Regularización Anisotrópica del Proceso Perona-Malik:**

En el interior de un segmento, la ecuación de difusión no lineal isotrópica se comporta casi como el filtro de difusión lineal, pero en los bordes la difusión está inhibida. Por lo tanto, este proceso no puede eliminar con éxito el ruido en los bordes. Para superar este problema, un método deseable debería preferir la difusión a lo largo de los bordes en lugar de la difusión perpendicular a ellos.

Los modelos anisotrópicos tienen en cuenta no solo el módulo del detector de bordes ∇u , sino también su dirección. Para lograr esto, se construye el sistema ortonormal de autovectores v_1, v_2 del tensor de difusión D de manera que reflejen la estructura de borde estimada:

$$v_1 \parallel \nabla u_\sigma, \quad v_2 \perp \nabla u. \quad (170)$$

Para preferir el suavizado a lo largo del borde en lugar del suavizado a través de él, Weickert [74], [75] propuso elegir los valores propios correspondientes λ_1 y λ_2 como:

$$\begin{aligned} \lambda_1(\nabla u_\sigma) &:= g(|\nabla u_\sigma|^2), \\ \lambda_2(\nabla u_\sigma) &:= 1. \end{aligned} \quad (171)$$

En general, ∇u no coincide con ninguno de los autovectores de D siempre que $\sigma > 0$; por lo tanto, este modelo se comporta realmente de manera anisotrópica. Si dejamos que el parámetro de regularización θ tienda a 0, terminamos con el proceso isotrópico de Perona-Malik.

- **Modelos Anisotrópicos para Suavizar Objetos Unidimensionales:**

Una segunda motivación para introducir anisotropía en procesos de difusión proviene del deseo de procesar características unidimensionales, como estructuras en forma

de línea. Cottet y Germain [76] construyeron un tensor de difusión con autovectores y valores propios correspondientes:

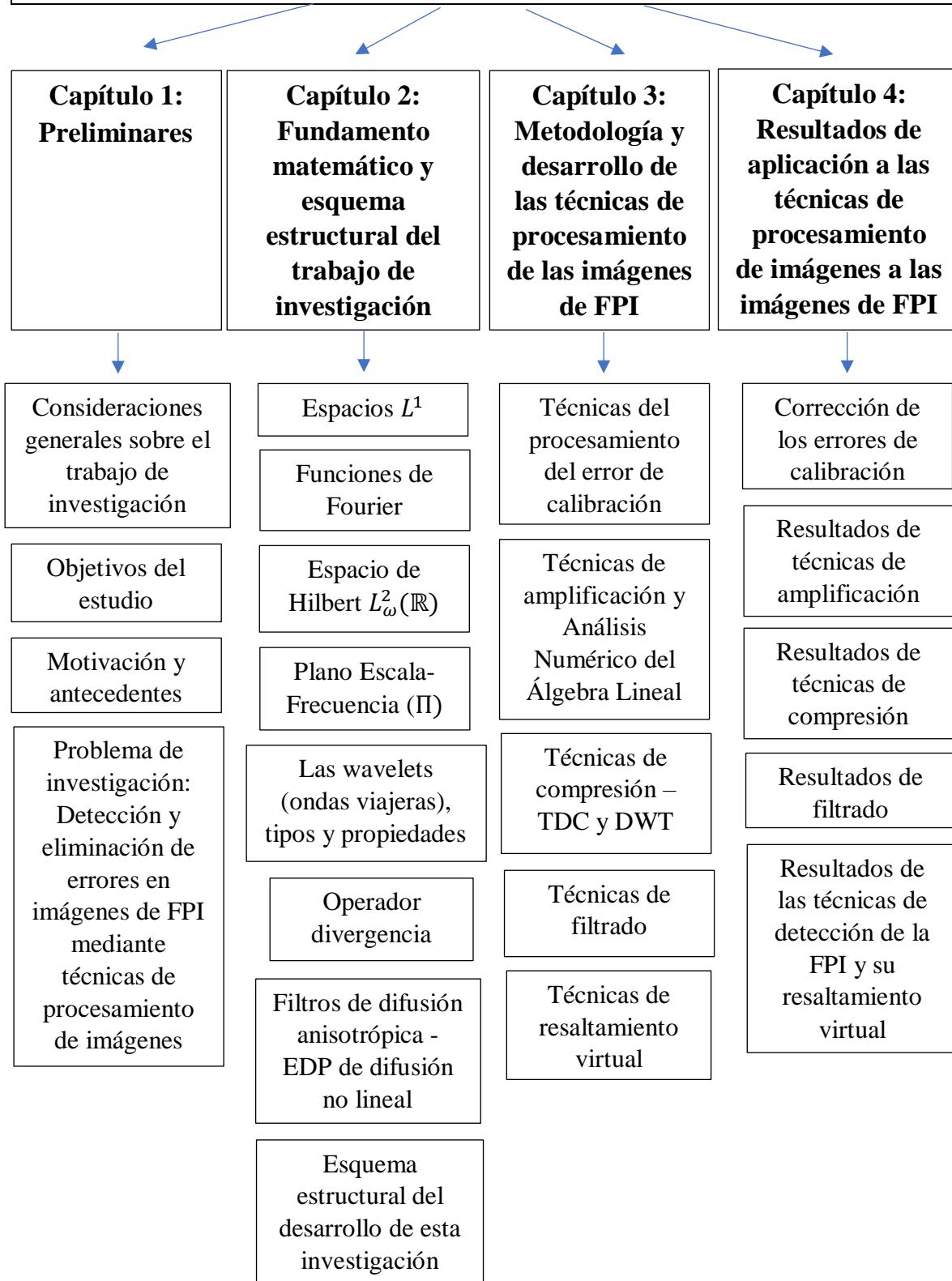
$$\begin{aligned}\lambda_1(\nabla u_\sigma) &:= 0, \\ \lambda_2(\nabla u_\sigma) &:= \frac{\eta |\nabla u_\sigma|^2}{1 + \left(\frac{|\nabla u_\sigma|}{\sigma}\right)^2}.\end{aligned}\quad (172)$$

Este es un proceso que difunde únicamente en la dirección perpendicular a ∇u_σ . Cuando $\sigma \rightarrow 0$, observamos que ∇u_σ se convierte en un autovector de D con valor propio correspondiente 0. Por lo tanto, el proceso se detiene por completo. En este sentido, el modelo Cottet-Germain no está destinado como una regularización anisotrópica de la ecuación Perona

I. Esquema estructural del desarrollo de esta investigación

En el esquema de la siguiente página, se presenta la estructura de este trabajo:

Modelación matemática y simulación numérica para mejorar el diagnóstico de la fibrosis pulmonar idiopática basadas en análisis de datos y procesamiento de imágenes



III METODOLOGÍA Y DESARROLLO DE LAS TÉCNICAS DE PROCESAMIENTO DE LAS IMÁGENES DE FPI

En este capítulo se explicará la metodología matemática de las técnicas de procesamiento espacial: posicionamiento, amplificación, compresión, filtrado y resaltamiento virtual. Estas técnicas operan mediante transformaciones sobre los valores *RGB* de los píxeles de una imagen. Sean $I_0, I_r : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ funciones que expresan el color de un pixel mediante sus valores *RGB* según su posición en la imagen original y en la imagen resultante respectivamente. Una transformación $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ opera sobre dichas imágenes de la siguiente manera:

$$I_r(x, y) = T(I_0(x, y)) \quad (173)$$

A. Técnicas del procesamiento del error de calibración

1). Operaciones aritméticas

Iniciaremos esta sección explicando sobre las operaciones aritméticas, ya que una de ellas se aplica para corregir la luminosidad de una imagen. Las operaciones aritméticas que se suelen usar para el procesamiento de imágenes son suma, resta, multiplicación y división [3]. Para poder realizar estas operaciones, es necesario que las imágenes sean del mismo tamaño; es decir, que tengan las mismas cantidades de píxeles de largo y ancho para que sea posible realizar las operaciones entre los píxeles de cada imagen que se encuentren en las mismas posiciones.

- Si a la imagen original I_0 se le suma otra imagen I_1 , la transformación T estaría dada por:

$$T(I_0(x, y)) = I_0(x, y) + I_1(x, y) \quad (174)$$

mediante el comando “imadd” en MATLAB. También se puede aumentar el brillo de una imagen sumando un vector constante a de valores iguales, a la imagen I_0 mediante la transformación:

$$T(I_0(x, y)) = I_0(x, y) + a \quad (175)$$

- Si a la imagen original I_0 se le resta la imagen I_1 , la transformación T estaría dada por:

$$T(I_0(x, y)) = I_0(x, y) - I_1(x, y) \quad (176)$$

mediante el comando “imssubtract” en MATLAB. También se puede reducir el brillo de una imagen restando un vector constante a de valores iguales, a la imagen I_0 mediante la transformación:

$$T(I_0(x, y)) = I_0(x, y) - a \quad (177)$$

- Si a la imagen original I_0 se le multiplica la imagen I_1 , la transformación T estaría dada por:

$$T(I_0(x, y)) = I_0(x, y) \cdot I_1(x, y) \quad (178)$$

mediante el comando “immultiply” en MATLAB. También se puede cambiar el brillo de una imagen a escala realizando un producto interno entre un vector a de valores iguales y los valores *RGB* de los píxeles de una imagen mediante la transformación:

$$T(I_0(x, y)) = a \cdot I_0(x, y) \quad (179)$$

la cual proporcionará mayor brillo a la imagen cuando $a > 1$ y menor brillo cuando $a < 1$.

- La división entre imágenes se suele utilizar para detectar cambios a escala entre dos imágenes. Si a la imagen original I_0 se le divide la imagen I_1 , la transformación estaría dada por:

$$T(I_0(x, y)) = I_0(x, y) \div I_1(x, y) \quad (180)$$

mediante el comando “imdivide” en MATLAB.

2). Operaciones lógicas

En segundo lugar, mencionaremos y describiremos las operaciones lógicas, ya que una de ellas se utiliza en una técnica para resaltar los bordes de los objetos de una imagen. Las operaciones lógicas en el tratamiento de imágenes, se aplican únicamente de forma binarizada; es decir, cuando los píxeles de la imagen o una subimagen³¹ muestren únicamente los colores blanco y negro.

Las operaciones lógicas que generalmente se aplican al procesamiento de imágenes son del tipo “and”, “or”, “xor”, “not”, “nand” y “nor”. A continuación, se muestra la formulación de cada operador lógico:

- Si $T(I_0(x, y)) = \text{and}(I_0(x, y), I_1(x, y))$, solamente aquellos píxeles de posiciones (x, y) que sean blancos en ambas imágenes permanecerán blancos en la imagen resultante y los demás píxeles serán negros.
- Si $T(I_0(x, y)) = \text{or}(I_0(x, y), I_1(x, y))$, sólamente aquellos píxeles de posiciones (x, y) que sean negros en ambas imágenes permanecerán negros en la imagen resultante y los demás píxeles serán blancos.
- Si $T(I_0(x, y)) = \text{xor}(I_0(x, y), I_1(x, y))$, los píxeles de posición (x, y) de la imagen resultante serán blancos cuando uno y sólo uno de los píxeles de posición (x, y) de las imágenes I_0 e I_1 sea blanco. Los demás píxeles de la imagen resultante serán negros.
- Si $T(I_0(x, y)) = \text{not}(I_0(x, y))$, los píxeles de posiciones (x, y) que sean negros en la imagen I_0 serán blancos en la imagen resultante y viceversa.
- Si $T(I_0(x, y)) = \text{nand}(I_0(x, y), I_1(x, y)) = \text{not}(\text{and}(I_0(x, y), I_1(x, y)))$, solamente aquellos píxeles de posiciones (x, y) que sean blancos en ambas imágenes serán negros en la imagen resultante y los demás píxeles serán blancos.
- Si $T(I_0(x, y)) = \text{nor}(I_0(x, y), I_1(x, y)) = \text{not}(\text{or}(I_0(x, y), I_1(x, y)))$, solamente aquellos píxeles de posiciones (x, y) que sean negros en ambas imágenes serán blancos en la imagen resultante y los demás píxeles serán negros.

3). Convolución bidimensional

El filtrado de imágenes y otros procesamientos tienen como base la convolución discreta bidimensional. En la convolución, los valores *RGB* de un pixel de la imagen resultante se calculan mediante la suma ponderada de los valores *RGB* de cierta cantidad de sus píxeles vecinos equivalente a un valor cuadrático. La convolución se realiza entre un par de funciones que representan a la imagen y una matriz para filtrar la imagen llamada

³¹Imagen creada por un algoritmo, que contiene información de la imagen original y que será utilizada posteriormente en la ejecución del algoritmo.

máscara. Para aplicar la convolución bidimensional a una imagen en MATLAB, teniendo en cuenta los $n \times n$ pixeles vecinos de cada pixel, se utiliza el comando “conv2”. Dadas $I = (I_1, I_2, I_3)$, $f = (f_1, f_2, f_3) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dos funciones que representan la imagen y su máscara respectivamente, la transformación $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que efectúa la convolución bidimensional a la imagen está dada por:

$$T(I(x, y)) = (f_1(x, y) * I_1(x, y), f_2(x, y) * I_2(x, y), f_3(x, y) * I_3(x, y)) \quad (181)$$

Donde:

$$f_k(x, y) * I_k(x, y) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} I_k(x + \frac{n-1}{2} - i, y + \frac{n-1}{2} - j) f_k(x - \frac{n-1}{2} + i, y - \frac{n-1}{2} + j),$$

$$\forall k \in \{1, 2, 3\}$$

Usualmente se realizan convoluciones de 3×3 elementos. Por lo tanto, en general se tendría que:

$$f_k(x, y) * I_k(x, y) = \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 I_k(x + 1 - i, y + 1 - j) f_k(x - 1 + i, y - 1 + j), \quad \forall k \in \{1, 2, 3\} \quad (182)$$

Por ejemplo, para la imagen inicial de la figura LIV, se tiene que $I(0, 0) = (240, 0, 0)$; $I(1, 0) = I(0, 1) = (240, 120, 0)$; $I(1, 1) = (240, 240, 0)$; $I(2, 0) = I(0, 2) = (0, 240, 0)$; $I(2, 1) = I(1, 2) = (240, 240, 240)$; e $I(2, 2) = (240, 0, 240)$. Si se define una máscara $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ por: $f(x, y) = (x/10, y/12, |x - y|/5)$, se tendría que si $T(I) = (T_1(I_1), T_2(I_2), T_3(I_3))$:

$$\begin{aligned} T_1(I_1(1, 1)) &= f_1(1, 1) * I_1(1, 1) = I_1(0, 0)f_1(2, 2) + I_1(0, 1)f_1(2, 1) \\ &\quad + I_1(0, 2)f_1(2, 0) + I_1(1, 0)f_1(1, 2) + I_1(1, 1)f_1(1, 1) \\ &\quad + I_1(1, 2)f_1(1, 0) + I_1(2, 0)f_1(0, 2) + I_1(2, 1)f_1(0, 1) \\ &\quad + I_1(2, 2)f_1(0, 0) = 240 \cdot 1/5 + 240 \cdot 1/5 + 0 \cdot 1/5 \\ &\quad + 240 \cdot 1/10 + 240 \cdot 1/10 + 240 \cdot 1/10 + 0 \cdot 0 + 240 \cdot 0 + \\ &\quad 240 \cdot 0 = 48 + 48 + 0 + 24 + 24 + 24 + 0 + 0 + 0 = 168 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_2(I_2(1, 1)) &= f_2(1, 1) * I_2(1, 1) = I_2(0, 0)f_2(2, 2) + I_2(0, 1)f_2(2, 1) \\ &\quad + I_2(0, 2)f_2(2, 0) + I_2(1, 0)f_2(1, 2) + I_2(1, 1)f_2(1, 1) \\ &\quad + I_2(1, 2)f_2(1, 0) + I_2(2, 0)f_2(0, 2) + I_2(2, 1)f_2(0, 1) \\ &\quad + I_2(2, 2)f_2(0, 0) = 0 \cdot 1/6 + 120 \cdot 1/12 + 240 \cdot 0 \\ &\quad + 120 \cdot 1/6 + 240 \cdot 1/12 + 240 \cdot 0 + 240 \cdot 1/6 + 240 \cdot 1/12 + \\ &\quad 0 \cdot 0 = 0 + 10 + 0 + 20 + 20 + 0 + 40 + 20 + 0 = 110 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_3(I_3(1, 1)) &= f_3(1, 1) * I_3(1, 1) = I_3(0, 0)f_3(2, 2) + I_3(0, 1)f_3(2, 1) \\ &\quad + I_3(0, 2)f_3(2, 0) + I_3(1, 0)f_3(1, 2) + I_3(1, 1)f_3(1, 1) \\ &\quad + I_3(1, 2)f_3(1, 0) + I_3(2, 0)f_3(0, 2) + I_3(2, 1)f_3(0, 1) \\ &\quad + I_3(2, 2)f_3(0, 0) = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1/5 + 0 \cdot 2/5 \\ &\quad + 0 \cdot 1/5 + 0 \cdot 0 + 240 \cdot 1/5 + 0 \cdot 2/5 + 240 \cdot 1/5 + \\ &\quad 240 \cdot 0 = 0 + 0 + 0 + 0 + 48 + 0 + 48 + 0 = 96 \end{aligned}$$

Por lo tanto, hemos obtenido que $T(I(1, 1)) = (168, 110, 96)$. Dado que $I(1, 1) = (240, 240, 0)$, hemos hecho la transformación que se muestra en la siguiente figura:

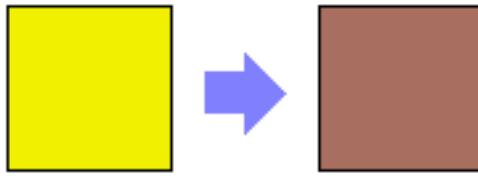


Figura LIV: Resultado de aplicar la convolución bidimensional al pixel de posición $(1, 1)$ de la imagen I .

Si se realiza la convolución en un pixel p que se encuentre en el borde de la imagen, se asume que existen los pixeles vecinos de p fuera de la imagen suficientes para poder realizar la convolución, cuyos valores RGB son iguales a cero.

El ajuste del contraste mejora la nitidez al aumentar la diferencia entre los pixeles adyacentes. Esto hace que los bordes sean más distintos y, por lo tanto, la imagen se vea más nítida. La detección de bordes puede ayudar a resaltar los detalles y los contornos en la imagen, lo que puede contribuir a una sensación de nitidez.

4). Transformaciones geométricas

Una transformación geométrica de una imagen es una transformación del sistema de coordenadas en el que la ubicación de sus pixeles está definida, por lo que modifica espacialmente la manera en que estos pixeles están relacionados [3],[77]. A continuación, se muestran las principales transformaciones geométricas:

Traslación de una imagen: Si se desea trasladar una imagen I , x' unidades en el eje X e y' unidades en el eje Y , como se muestra en la figura LV, la transformación $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ estaría definida por:

$$T(I(x, y)) = I(x + x', y + y') \quad (183)$$

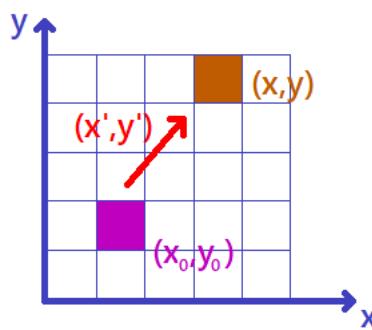


Figura LV: Traslación de un pixel de una imagen.

En coordenadas homogéneas, se tiene que, si (x_0, y_0) es la posición inicial de un pixel, al aplicarle la transformación T , su posición (x, y) estaría dada por [3]:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_0 \\ 0 & 1 & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} \quad (184)$$

Rotación de una imagen respecto al origen: La rotación de una imagen I respecto al origen se obtiene al realizar operaciones con segmentos paralelos a los ejes coordenados con las funciones trigonométricas “seno” y “coseno” luego de definir el ángulo de rotación, como se muestra en la figura LVI. Por lo tanto, si θ es el ángulo de rotación, la transformación $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ estaría dada por:

$$T(I(x, y)) = I(x\cos(\theta) - y\sin(\theta), x\sin(\theta) + y\cos(\theta)) \quad (185)$$

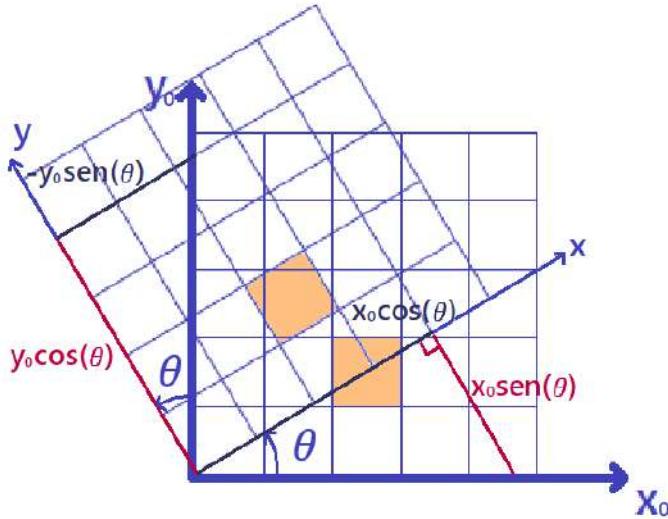


Figura LVI: Rotación de un pixel de una imagen.

En coordenadas homogéneas, se tiene que, si (x_0, y_0) es la posición inicial de un pixel, al aplicarle la transformación T , su posición (x, y) estaría dada por:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (186)$$

Rotación de una imagen respecto a un punto arbitrario: Para rotar una imagen respecto a un punto $z' = (x', y')$ distinto al origen, dado un punto inicial $z_0 = (x_0, y_0)$, se aplica la rotación del vector $z_0 - z'$ respecto al origen y al vector obtenido se le suma el vector z' para que recupere su posición. Por lo tanto, si θ es el ángulo de rotación, la transformación $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ estaría dada por:

$$T(I(x, y)) = I((x - x')\cos(\theta) - (y - y')\sin(\theta) + x', (x - x')\sin(\theta) + (y - y')\cos(\theta) + y') \quad (187)$$

En coordenadas homogéneas, se tiene que, si (x_0, y_0) es la posición inicial de un pixel, al aplicarle la transformación T , su posición (x, y) estaría dada por:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x' \\ 0 & 1 & y' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -x' \\ 0 & 1 & -y' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (188)$$

En MATLAB, esta operación se realiza con el comando “J=imrotate(I, alpha)”; donde I y J son

las imágenes inicial y resultante respectivamente, y α es el ángulo de rotación en sentido antihorario.

Transformación proyectiva de una imagen: Cuando la imagen sale distorsionada debido a una mala ubicación de la cámara, será necesario realizar una transformación proyectiva de la imagen para que pueda ser visualizada como si hubiese sido tomada desde la posición más óptima en el espacio. Para ello, según Hartley [77], se define la transformación $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ por:

$$T(I(x, y)) = I(u, v) \quad (189)$$

Donde dada una matriz de transformación proyectiva $H \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ se cumple que

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix} = H \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Para calcular la matriz de transformación H , se puede utilizar un enfoque basado en mínimos cuadrados:

Dado un conjunto de n puntos correspondientes entre dos imágenes (o planos de imagen), donde tenemos los puntos de origen $\mathbf{p}_i = (x_i, y_i, 1)^T$ en la imagen original y los puntos de destino $\mathbf{q}_i = (u_i, v_i, 1)^T$ en la imagen transformada, la relación entre ellos, bajo una transformación proyectiva, se puede expresar como:

$$\mathbf{q}_i \sim H\mathbf{p}_i \quad (190)$$

Donde \sim indica que los puntos \mathbf{q}_i y $H\mathbf{p}_i$ son equivalentes salvo una escala.

Cuando se dice que dos puntos \mathbf{q}_i y $H\mathbf{p}_i$ son equivalentes salvo una escala, significa que existe un factor de escala $\lambda \neq 0$ tal que:

$$\mathbf{q}_i = \lambda H\mathbf{p}_i \quad (191)$$

Esto implica que \mathbf{q}_i y $H\mathbf{p}_i$ representan la misma posición en el espacio, pero pueden diferir en escala. En el contexto de transformaciones proyectivas, esta propiedad es esencial porque no todas las transformaciones geométricas mantienen las proporciones y las líneas rectas de manera uniforme. Una transformación proyectiva puede deformar los objetos y las distancias de manera no uniforme, pero preserva la propiedad de que los puntos correspondientes se encuentran en la misma línea proyectiva.

Para calcular H , que es una matriz de 3×3 , utilizamos todos los pares de puntos correspondientes en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \vdots \\ u_n \\ v_n \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -u_1x_1 & -u_1y_1 \\ x_2 & y_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & -u_2x_2 & -u_2y_2 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & y_n & 1 & 0 & 0 & 0 & -u_nx_n & -u_ny_n \\ 0 & 0 & 0 & x_1 & y_1 & 1 & -v_1x_1 & -v_1y_1 \\ 0 & 0 & 0 & x_2 & y_2 & 1 & -v_2x_2 & -v_2y_2 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & x_n & y_n & 1 & -v_nx_n & -v_ny_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{11} \\ h_{12} \\ h_{13} \\ h_{21} \\ h_{22} \\ h_{23} \\ h_{31} \\ h_{32} \end{pmatrix} \quad (192)$$

$$\text{Donde } H = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & 1 \end{pmatrix}$$

Para encontrar H , resolvemos el sistema de ecuaciones lineales resultante $A\mathbf{h} = \mathbf{b}$, donde A es la matriz de coeficientes, \mathbf{b} es el vector de términos independientes (los componentes del conjunto de puntos $\{q_i\}_{i=1}^n$ apilados) y el vector $\mathbf{h} = (h_{11}, h_{12}, h_{13}, h_{21}, h_{22}, h_{23}, h_{31}, h_{32})^T$ contiene los elementos de la matriz H , los cuales se obtienen al resolver el sistema.

Después de obtener \mathbf{h} , se reorganiza en la matriz H , que luego se utiliza para realizar la transformación proyectiva entre las imágenes originales y transformadas, como se utiliza en la función “fitgeotrans” en MATLAB.

B. Técnicas de amplificación y Análisis Numérico del Álgebra Lineal

Mediante el Análisis Numérico del Álgebra Lineal, utilizaremos un tipo de transformación geométrica de la imagen a un sistema matricial, en el cual, se utilizarán diversas técnicas, tales como la transformación geométrica de amplificación basada en interpolación polinomial *RGB*, bilineal y bicúbica.

1). Interpolación polinomial

Es un proceso en el que se estiman los valores *RGB* de los pixeles de la imagen resultante I_r teniendo en cuenta los valores *RGB* de los pixeles de la imagen original I_0 , principalmente, cuando al aplicar la transformación T sobre la imagen original, el número de pixeles cambia como consecuencia del cambio del tamaño de la imagen [78]. Si m y n son las medidas de la imagen original en el sistema de coordenadas XY en el que la ubicación de sus pixeles está definida y $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es la función que realiza la interpolación, la ecuación que representa la interpolación de una imagen I_0 es la siguiente:

$$I_r(x, y) = T(I_0(x, y)) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n I_0(i, j) \cdot p(x - i, y - j) \quad (193)$$

En MATLAB, en el toolbox de “Image Processing” se encuentran implementados los siguientes métodos de interpolación:

- **Interpolación polinomial *RGB*:** Los pixeles de la imagen resultante I_r que no tengan un color definido, adquirirán el color del pixel más cercano que tenga un color definido luego de realizar la transformación de la imagen original I_0 .
- **Interpolación polinomial bilineal:** Los pixeles de la imagen resultante I_r que no tengan un color definido, adquirirán el color cuyos valores *RGB* sean el resultado de realizar una interpolación lineal en la dirección de cada eje con los valores *RGB* de los cuatro pixeles más cercanos que tengan un color definido. Es decir, dado un pixel p de color no definido, cuyo vector en el espacio *RGB* es denotado por v , si v_{11}, v_{12}, v_{21} y v_{22} son los vectores en dicho espacio de los pixeles de color definido, tales que v_{11} corresponde al pixel más cercano al origen de coordenadas, v_{22} corresponde al más lejano al origen, v_{12} corresponde al pixel cuya segunda componente es la misma que la de v_{11} y v_{21} corresponde al pixel cuya primera componente es la misma que la de v_{22} . Si d_x, d_y y d son la distancia entre v y la recta que contiene a los dos pixeles que se encuentran más cerca a la recta $x = 0$, la distancia entre v y la recta que contiene a los dos pixeles que se encuentran más cerca a la recta $y = 0$, y la distancia entre dos pixeles que se encuentren en alguna recta paralela a alguno de los ejes coordinados, respectivamente; el vector v estaría dado por:

$$v = \frac{v_{11}(d - d_x)(d - d_y) + v_{12}d_x(d - d_y) + v_{21}(d - d_x)d_y + v_{22}d_xd_y}{d^2} \quad (194)$$

- **Interpolación polinomial bicúbica:** Para un pixel p de color no definido y vector $v = (v_1, v_2, v_3)$ en el espacio RGB , se hallarán los dieciséis pixeles de color definido más cercanos a este pixel p . Si $\{v_{ij} = (v_{ij1}, v_{ij2}, v_{ij3}), i, j \in \{1, 2, 3, 4\}\}$ es el conjunto de vectores en el espacio RGB de estos pixeles, de manera que, la primera componente de estos vectores sea igual a uno para aquellos de estos vectores cuyos pixeles respectivos asociados sean los que se encuentren más cerca de la recta $x = 0$, seguidos por los pixeles cuya primera componente de sus vectores asociados sea igual a dos, los cuales, a su vez, están seguidos por los pixeles cuya primera componente de sus vectores asociados sea igual a tres y así sucesivamente, y la segunda componente de estos vectores sea igual a uno para aquellos de estos vectores cuyos pixeles respectivos asociados sean los que se encuentren más cerca de la recta $y = 0$, seguidos por los pixeles cuya segunda componente de sus vectores asociados sea igual a dos y así sucesivamente; y el pixel asociado a cada vector v_{ij} se encuentra en el punto (x_i, y_j) ; entonces, se cumple que: $\forall k \in \{1, 2, 3\}$:

$$(1 \ x_i \ x_i^2 \ x_i^3) \begin{pmatrix} a_{11k} & a_{12k} & a_{13k} & a_{14k} \\ a_{21k} & a_{22k} & a_{23k} & a_{24k} \\ a_{31k} & a_{32k} & a_{33k} & a_{34k} \\ a_{41k} & a_{42k} & a_{43k} & a_{44k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ y_j \\ y_j^2 \\ y_j^3 \end{pmatrix} = v_{ijk} \quad (195)$$

Dado que se han definido dieciséis vectores y cada vector tiene tres componentes, es posible hallar los 48 elementos a_{ijk} . Una vez hallados estos elementos, será posible hallar v y obtener los valores RGB del color del pixel $p = (x_0, y_0)$ mediante la siguiente ecuación:

$$v = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 a_{ijk} x_0^{i-1} y_0^{j-1} \quad (196)$$

Redimensionalización de una imagen: Esta transformación consiste en ampliar o reducir el tamaño de una imagen mediante el comando “imresize” en MATLAB. Este comando además de que permite especificar el tamaño de la imagen resultante, da la opción de elegir el método de interpolación y el filtro para evitar que se genere el efecto alias. El efecto alias se genera cuando se reduce una imagen y la imagen resultante contiene menos de aquellos pixeles cuyos colores representan la división entre dos objetos de la imagen y, por ende, estos colores suavizan la imagen dado que son parte del eje de color cuyos colores ubicados en los extremos de este eje son los colores de dichos objetos de la imagen.

Por ejemplo, dada una imagen $I : \{0, 1, 2, 3\} \times \{0, 1, 2, 3\} \rightarrow \mathbb{R}^3$, si definimos la transformación $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ por: $T(I(x, y)) = I(3x, 3y)$, se obtiene que esta transformación define colores en aquellos pixeles de la imagen resultante cuyas componentes son múltiplos de tres como se muestra en la siguiente figura:

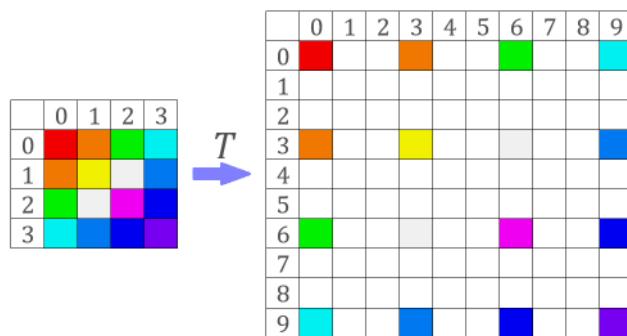


Figura LVII: Transformación geométrica de una imagen de dieciséis pixeles.

Para darle color a los demás pixeles, se usan los métodos de interpolación mencionados anteriormente. En las siguientes figuras, se muestran los colores que adquieren los pixeles descoloridos, según el método de interpolación aplicado:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	Red	Red	Orange	Orange	Orange	Green	Green	Green	Cyan	Cyan
1	Red	Red	Orange	Orange	Orange	Green	Green	Green	Cyan	Cyan
2	Orange	Orange	Yellow	Yellow	Yellow	White	White	White	Blue	Blue
3	Orange	Orange	Yellow	Yellow	Yellow	White	White	White	Blue	Blue
4	Orange	Orange	Yellow	Yellow	Yellow	White	White	White	Blue	Blue
5	Green	Green	White	White	White	Magenta	Magenta	Magenta	Blue	Blue
6	Green	Green	White	White	White	Magenta	Magenta	Magenta	Blue	Blue
7	Green	Green	White	White	White	Magenta	Magenta	Magenta	Blue	Blue
8	Cyan	Cyan	Blue	Blue	Blue	Blue	Blue	Blue	Magenta	Magenta
9	Cyan	Cyan	Blue	Blue	Blue	Blue	Blue	Blue	Magenta	Magenta

Figura LVIII: Interpolación por el vecino más próximo.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	Red	Orange	Yellow	Yellow	Yellow	Green	Green	Green	Cyan	Cyan
1	Red	Orange	Yellow	Yellow	Yellow	Green	Green	Green	Cyan	Cyan
2	Orange	Orange	Yellow	Yellow	Yellow	White	White	White	Blue	Blue
3	Orange	Orange	Yellow	Yellow	Yellow	White	White	White	Blue	Blue
4	Yellow	Yellow	Yellow	Yellow	Yellow	Pink	Pink	Pink	Purple	Purple
5	Green	Yellow	Yellow	Yellow	Yellow	Pink	Pink	Pink	Purple	Purple
6	Green	Green	Yellow	Yellow	Yellow	Pink	Pink	Pink	Purple	Purple
7	Green	Green	Green	Yellow	Yellow	Pink	Pink	Pink	Purple	Purple
8	Cyan	Cyan	Cyan	Blue	Blue	Purple	Purple	Purple	Dark Blue	Dark Blue
9	Cyan	Cyan	Cyan	Blue	Blue	Purple	Purple	Purple	Dark Blue	Dark Blue

Figura LIX: Interpolación bilineal.

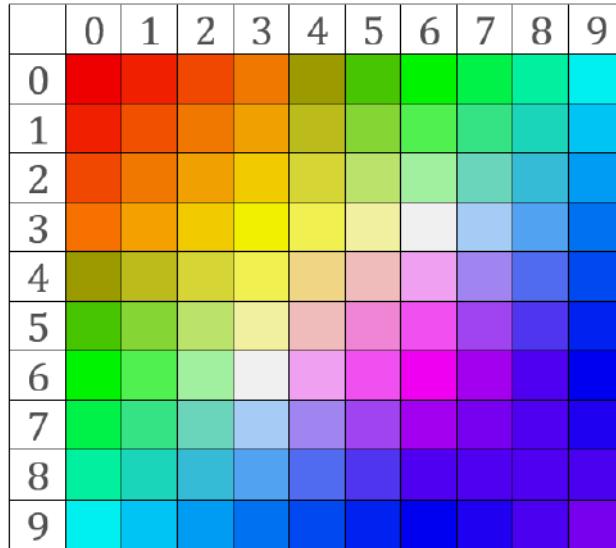


Figura LX: Interpolación bicúbica.

Correlación: La correlación es una operación en la que, al igual que la convolución, los valores *RGB* de un pixel de salida se calcula como la suma ponderada de sus pixeles vecinos mediante una matriz máscara. La diferencia radica en que esta matriz no se rota durante el cálculo. Dadas $I = (I_1, I_2, I_3)$, $f = (f_1, f_2, f_3) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dos funciones que representan la imagen y su máscara respectivamente, la transformación $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que efectúa la convolución bidimensional a la imagen está dada por:

$$T(I(x, y)) = (f_1(x, y) \circ I_1(x, y), f_2(x, y) \circ I_2(x, y), f_3(x, y) \circ I_3(x, y)) \quad (197)$$

Donde:

$$f_k(x, y) \circ I_k(x, y) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} I_k(x - \frac{n-1}{2} + i, y - \frac{n-1}{2} + j) f_k(x - \frac{n-1}{2} + i, y - \frac{n-1}{2} + j), \\ \forall k \in \{1, 2, 3\}$$

Dado que usualmente se realizan convoluciones de 3×3 elementos, en general, se tendría que:

$$f_k(x, y) \circ I_k(x, y) = \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 I_k(x - 1 + i, y - 1 + j) f_k(x - 1 + i, y - 1 + j), \quad \forall k \in \{1, 2, 3\} \quad (198)$$

Por ejemplo, para la imagen inicial y la máscara del ejemplo anterior, se tendría que si $T(I) = (T_1(I_1), T_2(I_2), T_3(I_3))$:

$$\begin{aligned} T_1(I_1(1, 1)) &= f_1(1, 1) \circ I_1(1, 1) = I_1(0, 0)f_1(0, 0) + I_1(0, 1)f_1(0, 1) \\ &\quad + I_1(0, 2)f_1(0, 2) + I_1(1, 0)f_1(1, 0) + I_1(1, 1)f_1(1, 1) \\ &\quad + I_1(1, 2)f_1(1, 2) + I_1(2, 0)f_1(2, 0) + I_1(2, 1)f_1(2, 1) \\ &\quad + I_1(2, 2)f_1(2, 2) = 240 \cdot 0 + 240 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \\ &\quad + 240 \cdot 1/10 + 240 \cdot 1/10 + 240 \cdot 1/10 + 0 \cdot 1/5 + 240 \cdot 1/5 + \\ &\quad 240 \cdot 1/5 = 0 + 0 + 0 + 24 + 24 + 24 + 0 + 48 + 48 = 168 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_2(I_2(1,1)) &= f_2(1,1) \circ I_2(1,1) = I_2(0,0)f_2(0,0) + I_2(0,1)f_2(0,1) \\
&\quad + I_2(0,2)f_2(0,2) + I_2(1,0)f_2(1,0) + I_2(1,1)f_2(1,1) \\
&\quad + I_2(1,2)f_2(1,2) + I_2(2,0)f_2(2,0) + I_2(2,1)f_2(2,1) \\
&\quad + I_2(2,2)f_2(2,2) = 0 \cdot 0 + 120 \cdot 1/12 + 240 \cdot 1/6 \\
&\quad + 120 \cdot 0 + 240 \cdot 1/12 + 240 \cdot 1/6 + 240 \cdot 0 + 240 \cdot 1/12 + \\
&\quad 0 \cdot 1/6 = 0 + 10 + 40 + 0 + 20 + 40 + 0 + 20 + 0 = 130
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_3(I_3(1,1)) &= f_3(1,1) \circ I_3(1,1) = I_3(0,0)f_3(0,0) + I_3(0,1)f_3(0,1) \\
&\quad + I_3(0,2)f_3(0,2) + I_3(1,0)f_3(1,0) + I_3(1,1)f_3(1,1) \\
&\quad + I_3(1,2)f_3(1,2) + I_3(2,0)f_3(2,0) + I_3(2,1)f_3(2,1) \\
&\quad + I_3(2,2)f_3(2,2) = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1/5 + 0 \cdot 2/5 \\
&\quad + 0 \cdot 1/5 + 0 \cdot 0 + 240 \cdot 1/5 + 0 \cdot 2/5 + 240 \cdot 1/5 + \\
&\quad 240 \cdot 0 = 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 48 + 0 + 48 + 0 = 96
\end{aligned}$$

Por lo tanto, hemos obtenido que $T(I(1,1)) = (168, 130, 96)$. Dado que $I(1,1) = (240, 240, 0)$, hemos hecho la transformación que se muestra en la siguiente figura:

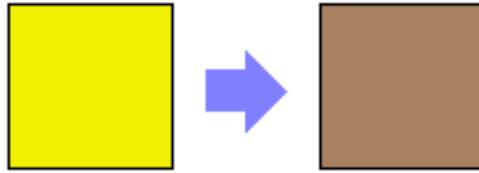


Figura LXI: Resultado de aplicar la correlación al pixel de posición $(1,1)$ de la imagen I .

2). Transformada de Fourier y el procesamiento en el dominio de la frecuencia

Una imagen representada en el dominio de las frecuencias es un conjunto de señales periódicas; es decir, la transformada de Fourier de una imagen es la representación de dicha imagen mediante una suma de exponentiales complejos de diferentes magnitudes, frecuencias y fases.

Teniendo en cuenta este concepto, se dice que la transformada directa de Fourier y su inversa son funciones continuas de orden exponencial, las cuales hemos definido con mayor detalle en la sección II.B.2), así como su transformada inversa.

En esta sección definiremos la transformada discreta de Fourier unidimensional, así como su inversa respectivamente. Así mismo, también definiremos las convolución discreta de funciones, las cuales expresamos a continuación:

$$\mathcal{F}\{x(n)\} = F(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-\frac{2\pi i}{N}kn}; \quad k \in \{0, 1, \dots, N-1\} \quad (199)$$

$$\mathcal{F}^{-1}\{F(k)\} = x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F(k)e^{\frac{2\pi i}{N}kn}; \quad k \in \{0, 1, \dots, N-1\} \quad (200)$$

Mientras que las transformadas discretas l -dimensionales son definidas respectivamente por:

$$\mathcal{F}\{x(n_1, \dots, n_l)\} = F(k_1, \dots, k_l) = \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \dots \sum_{n_l=0}^{N_l-1} x(n_1, \dots, n_l) \prod_{j=1}^l e^{-\frac{2\pi i}{N_j} k_j n_j}; \quad (201)$$

$$k_j \in \{0, 1, \dots, N_j - 1\}, \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, l\}$$

$$\mathcal{F}^{-1}\{F(k_1, \dots, k_l)\} = x(n_1, \dots, n_l) = \frac{1}{\prod_{j=1}^l N_j} \sum_{k_1=0}^{N_1-1} \dots \sum_{k_l=0}^{N_l-1} F(k_1, \dots, k_l) \prod_{j=1}^l e^{\frac{2\pi i}{N_j} k_j n_j}; \quad (202)$$

$$k_j \in \{0, 1, \dots, N_j - 1\}, \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, l\}$$

La transformada de Fourier en una dimensión se puede implementar en MATLAB mediante el comando “fft”; y en l dimensiones, mediante el comando “fftl”. La transformada inversa de Fourier en una dimensión se implementa mediante el comando “ifft”; y en l dimensiones, mediante el comando “ifftl”. La amplitud de aquella suma de señales solamente muestra que existe una estructura periódica dentro de la imagen, mientras que la fase obtenida mediante la transformada de Fourier brinda información esencial sobre la estructura de la imagen y nos ayuda a determinar la posición de los objetos de la imagen.

2).1. Convolución discreta de funciones

Una propiedad importante de la transformada de Fourier es que la multiplicación de las transformadas de Fourier de dos funciones espaciales asociadas es igual al producto de sus transformadas individuales [80]. Esta propiedad, combinada con la transformada rápida de Fourier, constituye el fundamento del algoritmo de la convolución. La convolución de Fourier discreta se expresa de la siguiente manera:

$$(F * G)(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_1(n)x_2(n)e^{-\frac{2\pi i}{N} kn}; \quad k \in \{0, 1, \dots, N - 1\} \quad (203)$$

Dadas dos matrices $A_{m \times n}$ y $B_{p \times q}$ que representen los valores de una de las componentes *RGB* de dos imágenes. El algoritmo de convolución entre dichas matrices se ejecuta mediante los siguientes pasos:

1. Se agregan ceros a A y B para que las dimensiones de la matriz resultante C de la convolución entre A y B sean de $(p + m - 1) \times (q + n - 1)$. Además, se suelen agregar ceros a A y B hasta que el número de elementos de cada matriz sea una potencia de dos, debido a que el comando de la transformada de Fourier en dos dimensiones “fft2”, que se utiliza en el paso siguiente, funciona más rápidamente cuando se aplica a elementos cuyo tamaño es una potencia de dos.
2. Se calculan las transformadas de Fourier bidimensionales de A y B mediante el comando “fft2”.
3. Se multiplica elemento a elemento la transformada de Fourier de A con la transformada de Fourier de B .
4. Se aplica la transformada inversa de Fourier bidimensional al producto obtenido en el paso anterior mediante el comando “ifft2”.

Por ejemplo, sean $A = A(x, y)$ y $B = B(x, y)$ definidas por:

$$A = \begin{pmatrix} 171 & 159 & 152 & 155 \\ 170 & 167 & 163 & 165 \\ 175 & 172 & 169 & 173 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 193 & 192 & 185 \\ 181 & 177 & 179 \end{pmatrix}$$

Definimos las matrices $A' = A'(x, y)$ y $B' = B'(x, y)$ de la siguiente manera:

$$A'(x, y) = \begin{cases} A(x, y); & 0 \leq i \leq 2, \quad 0 \leq j \leq 3 \\ 0; & 3 \leq i \leq 4, \quad 4 \leq j \leq 6 \end{cases}$$

$$B'(x, y) = \begin{cases} B(x, y); & 0 \leq i \leq 1, \quad 0 \leq j \leq 2 \\ 0; & 2 \leq i \leq 4, \quad 5 \leq j \leq 6 \end{cases}$$

Por lo tanto:

$$A' = \begin{pmatrix} 171 & 159 & 152 & 155 & 0 & 0 & 0 \\ 170 & 167 & 163 & 165 & 0 & 0 & 0 \\ 175 & 172 & 169 & 173 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad y$$

$$B' = \begin{pmatrix} 193 & 192 & 185 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 181 & 177 & 179 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego, al calcular las transformadas de Fourier bidimensionales de A' y B' , se obtienen las siguientes matrices:

$$F(A') = G = [G_1; G_2; G_3; G_4; G_5; G_6; G_7] \quad y$$

$$F(B') = H = [H_1; H_2; H_3; H_4; H_5; H_6; H_7]$$

Donde:

$$G_1 = \begin{pmatrix} 1.9910 + 0.0000i \\ 0.2851 - 1.0374i \\ 0.3119 + 0.2644i \\ 0.3119 - 0.2644i \\ 0.2851 + 1.0374i \end{pmatrix}, \quad G_2 = \begin{pmatrix} 0.2746 - 1.0751i \\ -0.5110 - 0.2855i \\ 0.1957 - 0.1313i \\ -0.0918 - 0.1953i \\ 0.6158 - 0.0115i \end{pmatrix},$$

$$G_3 = \begin{pmatrix} 2.7650 + 1.0993i \\ 1.0722 - 1.2833i \\ 0.3476 + 0.5047i \\ 0.6915 - 0.2068i \\ -0.1107 + 1.4922i \end{pmatrix}, \quad G_4 = \begin{pmatrix} 2.5938 - 3.1831i \\ -1.2223 - 1.7545i \\ 0.9004 - 0.1694i \\ 0.0308 - 0.8297i \\ 2.0985 + 0.8735i \end{pmatrix},$$

$$G_5 = \begin{pmatrix} 2.5938 + 3.1831i \\ 2.0985 - 0.8735i \\ 0.0308 + 0.8297i \\ 0.9004 + 0.1694i \\ -1.2223 + 1.7545i \end{pmatrix}, \quad G_6 = \begin{pmatrix} 2.7650 - 1.0993i \\ -0.1107 - 1.4922i \\ 0.6915 + 0.2068i \\ 0.3476 - 0.5047i \\ 1.0722 + 1.2833i \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}
G_7 &= \begin{pmatrix} 0.2746 + 1.0751i \\ 0.6158 + 0.0115i \\ -0.0918 + 0.1953i \\ 0.1957 + 0.1313i \\ -0.5110 + 0.2855i \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 1.1070 + 0.0000i \\ 0.7359 - 0.5107i \\ 0.1356 - 0.3156i \\ 0.1356 + 0.3156i \\ 0.7359 + 0.5107i \end{pmatrix}, \\
B_2 &= \begin{pmatrix} 5.2307 - 6.4337i \\ 0.5169 - 6.6638i \\ -1.1586 - 2.2518i \\ 2.5197 + 0.7051i \\ 6.4685 - 1.8795i \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} -0.3606 - 2.0181i \\ -1.1273 - 1.1755i \\ -0.5628 - 0.1859i \\ 0.5528 - 0.4170i \\ 0.6777 - 1.5494i \end{pmatrix}, \\
B_4 &= \begin{pmatrix} 2.6849 + 1.2448i \\ 2.3656 - 0.4577i \\ 0.6477 - 0.6801i \\ -0.0947 + 0.8850i \\ 1.1644 + 2.0746i \end{pmatrix}, \quad B_5 = \begin{pmatrix} 2.6849 - 1.2448i \\ 1.1644 - 2.0746i \\ -0.0947 - 0.8850i \\ 0.6477 + 0.6801i \\ 2.3656 + 0.4577i \end{pmatrix}, \\
B_6 &= \begin{pmatrix} -0.3606 + 2.0181i \\ 0.6777 + 1.5494i \\ 0.5528 + 0.4170i \\ -0.5628 + 0.1859i \\ -1.1273 + 1.1755i \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B_7 = \begin{pmatrix} 5.2307 + 6.4337i \\ 6.4685 + 1.8795i \\ 2.5197 - 0.7051i \\ -1.1586 + 2.2518i \\ 0.5169 + 6.6638i \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Después, al multiplicar las transformadas obtenidas, se tiene:

$$F(A') * F(B') = M = [M_1; M_2; M_3; M_4; M_5; M_6; M_7]$$

Donde:

$$\begin{aligned}
M_1 &= \begin{pmatrix} 2.2040 + 0.0000i \\ -0.3200 - 0.9091i \\ 0.1257 - 0.0626i \\ 0.1257 + 0.0626i \\ -0.3200 + 0.9091i \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} -5.4806 - 7.3905i \\ -2.1667 + 3.2576i \\ -0.5224 - 0.2885i \\ -0.0936 - 0.5568i \\ 3.9618 - 1.2319i \end{pmatrix}, \\
M_3 &= \begin{pmatrix} 1.2214 - 5.9765i \\ -2.7172 + 0.1864i \\ -0.1018 - 0.3487i \\ 0.2960 - 0.4027i \\ 2.2370 + 1.1828i \end{pmatrix}, \quad M_4 = \begin{pmatrix} 1.0927 - 0.5317i \\ -0.3694 - 0.3591i \\ 0.0468 - 0.0722i \\ 0.0731 + 0.0106i \\ 0.0631 + 0.5371i \end{pmatrix}, \\
M_5 &= \begin{pmatrix} 1.0927 + 0.5317i \\ 0.0631 - 0.5371i \\ 0.0731 - 0.0106i \\ 0.0468 + 0.0722i \\ -0.3694 + 0.3591i \end{pmatrix}, \quad M_6 = \begin{pmatrix} 1.2214 + 5.9765i \\ 2.2370 - 1.1828i \\ 0.2960 + 0.4027i \\ -0.1018 + 0.3487i \\ -2.7172 - 0.1864i \end{pmatrix}, \\
&\quad \text{y} \quad M_7 = \begin{pmatrix} -5.4806 + 7.3905i \\ 3.9618 + 1.2319i \\ -0.0936 + 0.5568i \\ -0.5224 + 0.2885i \\ -2.1667 - 3.2576i \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Finalmente, al aplicar la transformada inversa de Fourier bidimensional al producto de dichas transformadas se tiene:

$$\text{ifft2}(M) = \begin{pmatrix} 0.3300 & 0.6352 & 0.9150 & 0.8851 & 0.5788 & 0.2868 & 0.0000 \\ 0.6376 & 1.2392 & 1.8124 & 1.7746 & 1.1648 & 0.5827 & 0.0000 \\ 0.6454 & 1.2711 & 1.8751 & 1.8627 & 1.2286 & 0.6154 & 0.0000 \\ 0.3167 & 0.6211 & 0.9236 & 0.9201 & 0.6087 & 0.3097 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \end{pmatrix}$$

2).2. Amplificación de imágenes basada en interpolación bidimensional

La amplificación de imágenes basada en la interpolación bidimensional a través del dominio de la frecuencia se puede realizar mediante el siguiente método, según Mantilla [79]:

Se define una matriz de transformación $A_{J \times J}$ de la siguiente manera:

$$A_J = [a_{mn}^J]; \quad a_{mn}^J = \frac{1}{J} e^{\frac{-2\pi i}{J} mn}; \quad m, n = 0, 1, 2, \dots, J - 1 \quad (204)$$

Y se definen las matrices $P = A_M$ y $Q = A_N$. Sea $x : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función bidimensional, de manera que su transformada discreta de Fourier estaría dada por:

$$F = PxQ \quad (205)$$

Al expresar la igualdad anterior mediante sumatorias, se tiene que la transformada discreta de Fourier bidimensional está dada por:

$$F(u, v) = \frac{1}{MN} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} x(m, n) e^{-2\pi i (\frac{mu}{M} + \frac{nv}{N})}; \quad u = 0, 1, \dots, M - 1; \quad v = 0, 1, \dots, N - 1 \quad (206)$$

Al definir una matriz de transformación $B_{J \times J}$ por:

$$B_J = [b_{mn}^J]; \quad b_{mn}^J = e^{\frac{2\pi i}{J} mn}; \quad m, n = 0, 1, 2, \dots, J - 1 \quad (207)$$

Dado que se cumple que:

$$\sum_{m=0}^{J-1} e^{\frac{-2\pi i}{J} km} e^{\frac{-2\pi i}{J} mn} = \begin{cases} J; & k = n \\ 0; & k \neq n \end{cases} \quad (208)$$

Se puede deducir que:

$$B_J^{-1} = A_J \quad (209)$$

Por lo tanto, la transformada discreta de Fourier inversa está dada por:

$$x(m, n) = \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) e^{2\pi i (\frac{mu}{M} + \frac{nv}{N})}; \quad m = 0, 1, \dots, M - 1; \quad n = 0, 1, \dots, N - 1 \quad (210)$$

Finalmente, se procede a realizar el procedimiento para la amplificación de imágenes cuyas dimensiones sean potencias de 2 debido al cambio de dominio, como sigue [3]:

1. Colocar los valores de la primera componente *RGB* de cada pixel de la imagen en una matriz $Y_{M \times N} = [y_{ij}]$ según su posición en la imagen.
2. Aplicar la transformada discreta de Fourier bidimensional a la matriz $Y_{M \times N}$ y almacenar el resultado en una matriz $A_{M \times N} = [a_{ij}]$ asumiendo que $x(i-1, j-1) = y_{ij}$, y $F(i-1, j-1) = a_{ij}; \forall i = 1, \dots, M; j = 1, \dots, N$.
3. Sea α el valor del aumento proporcional de las dimensiones de la imagen. Se define la matriz A_α de dimensiones $\alpha M \times \alpha N$ por:

$$A_\alpha = [a_{ij}^\alpha] = \begin{cases} a_{ij}^\alpha = a_{ij}; & i \in \{1, \dots, \frac{M}{2}\} \cup \{(\alpha - \frac{1}{2})M + 1, \dots, M\}; \\ & j \in \{1, \dots, \frac{N}{2}\} \cup \{(\alpha - \frac{1}{2})N + 1, \dots, N\} \\ 0; & i \in \{\frac{M}{2} + 1, \dots, (\alpha - \frac{1}{2})M\}; \vee j \in \{\frac{N}{2} + 1, \dots, (\alpha - \frac{1}{2})N\} \end{cases} \quad (211)$$

4. Se aplica la transformada discreta de Fourier inversa a la matriz A_α y se obtiene la matriz Y_α de dimensiones $\alpha M \times \alpha N$.
5. Se multiplica cada elemento de la matriz Y_α por $\frac{1}{\alpha^2}$ para compensar el aumento de sus valores regido por la aplicación de la transformada inversa a la matriz A_α , cuyas dimensiones son α^2 veces las de la matriz A .
6. Se realizan los pasos anteriores con las otras dos componentes de cada pixel de la imagen.

En la siguiente figura, se muestra cómo se construye la matriz A_α a partir de la matriz A en el paso 3:

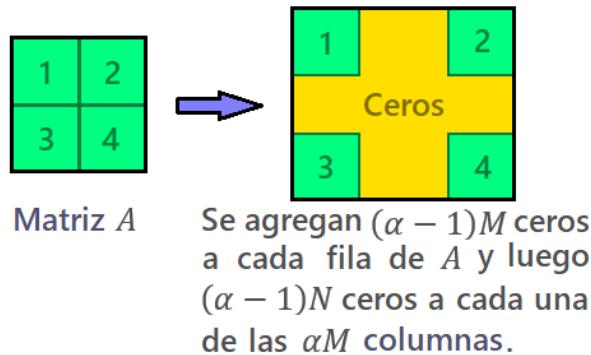


Figura LXII: Construcción de la matriz aumentada A_α a partir de la matriz A .

C. Técnicas de compresión - TDC y DWT

1). Transformada discreta coseno (TDC)

Otra técnica de procesamiento de imágenes basada en la interpolación espacial a través del dominio de la frecuencia es la transformada discreta coseno (TDC); la cual, expresa

los valores de la matriz que representa a una imagen mediante la suma de senoidales de diferentes amplitudes y frecuencias [3],[79],[81]. Se suele utilizar en la compresión de imágenes debido a que la mayor parte de la información visualmente significativa se concentra en sólo algunos coeficientes de la TDC. Dada una matriz $A = [a_{ij}]$ de dimensiones $M \times N$, los coeficientes b_{pq} ; $p = 0, 1, \dots, M$, $q = 0, 1, \dots, N$ de la transformada discreta coseno de A se obtienen de la siguiente manera:

$$b_{pq} = \alpha_p \alpha_q \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} a_{mn} \cos\left(\frac{(2m+1)\pi p}{2M}\right) \cos\left(\frac{(2n+1)\pi q}{2N}\right) \quad (212)$$

Donde los coeficientes α_p y α_q están definidos por:

$$\alpha_p = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{M}}; & p = 0 \\ \sqrt{\frac{2}{M}}; & 1 \leq p \leq M - 1 \end{cases} \quad \alpha_q = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{N}}; & q = 0 \\ \sqrt{\frac{2}{N}}; & 1 \leq q \leq N - 1 \end{cases} \quad (213)$$

Y los coeficientes a_{mn} ; $m = 0, 1, \dots, M$, $n = 0, 1, \dots, N$ de la transformada discreta coseno inversa de la matriz $B = [b_{ij}]$ de dimensiones $M \times N$ se obtienen al hacer:

$$a_{mn} = \sum_{p=0}^{M-1} \sum_{q=0}^{N-1} \alpha_p \alpha_q b_{pq} \cos\left(\frac{(2p+1)\pi m}{2M}\right) \cos\left(\frac{(2q+1)\pi n}{2N}\right) \quad (214)$$

2). Compresión basada en la transformada discreta de wavelets (DWT2)

La compresión de imágenes es una técnica importante para reducir la cantidad de pixeles de las imágenes sin comprometer su calidad, lo que es particularmente útil en el caso de las imágenes médicas, que pueden ser muy grandes y compleja, según Aristizábal [82]; ya que se ahorra espacio de almacenamiento y se reducen los tiempo de transmisión de estas imágenes, por lo que facilita la educación médica, ya que permite que los educadores almacenen varias imágenes de alta calidad y que los estudiantes accedan a ellas. Además, mejora la eficacia del diagnóstico al permitir que los profesionales de la salud vean los detalles más importantes de las imágenes, como dice Sáenz-Terrazas [83].

Este método de compresión de imágenes se basa en la transformada discreta de wavelet. La compresión se logra al reducir selectivamente la información en el nivel de aproximación, que representa las características generales de la imagen. Al multiplicar la aproximación original por un factor de compresión, se preserva solo una fracción de la información original, logrando así una imagen comprimida. Aunque esta aproximación es sencilla, refleja un enfoque común en la compresión de imágenes mediante la retención estratégica de los detalles más esenciales, mientras se reduce el tamaño del archivo. Dada una imagen $I : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de tamaño $M \times N$, este proceso se lleva a cabo de la siguiente manera:

1. Se aplica la transformada wavelet en dos dimensiones a la imagen $I(x, y)$ para obtener los coeficientes de aproximación $a_{k,l}^j$ y de detalle $d_{k,l}^j$ en el nivel de descomposición j mediante las siguientes fórmulas:

$$a_{k,l}^j = \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} I(m, n) \phi_{j,k,l}(m, n) \quad (215)$$

$$d_{k,l}^j = \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} I(m, n) \psi_{j,k,l}(m, n) \quad (216)$$

donde $\psi_{j,k,l}, \phi_{j,k,l} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ son la función de wavelet madre y la función de escala respectivamente.

2. Se almacenan los coeficientes de aproximación en una matriz $A^j = [a_{k,l}^j]$ y los coeficientes de detalle en una matriz $D^j = [d_{k,l}^j]$, de manera que la imagen aproximada I_a para un nivel de descomposición j se obtiene mediante la ecuación:

$$I_a(x, y) = \sum_{j=j_0}^J D^j(x, y) + A^{j_0}(x, y) \quad (217)$$

Donde j_0 es la etapa inicial de descomposición y J es el número total de etapas.

3. Se define el factor de compresión $r \in (0, 1)$ para comprimir la imagen aproximada I_a en un $r \cdot 100\%$ y obtener la imagen aproximada comprimida I_c :

$$I_c = (1 - r)I_a \quad (218)$$

4. Se obtiene la imagen reconstruida I_r a partir de la imagen aproximada I_a , y de la función de wavelet ψ y su función dual $\tilde{\psi}$:

$$I_r(m, n) = \sum_{j=j_0}^J \sum_{k=0}^{\overline{M}-1} \sum_{l=0}^{\overline{N}-1} \langle \tilde{\psi}_{j,k,l}, I_c \rangle \psi_{j,k,l}(m, n) \quad (219)$$

donde $\overline{M} = [|((1 - r)M)|]$ y $\overline{N} = [|((1 - r)N)|]$.

D. Técnicas de filtrado

El filtrado es una técnica que se utiliza para eliminar el ruido³² en las imágenes digitales y mejorar su nitidez, ya que, según Esqueda [3], permite atenuar o resaltar las características de una imagen según convenga. El filtrado toma en cuenta los colores de los píxeles vecinos de un pixel para determinar el color más adecuado para dicho pixel. Para los píxeles que se encuentran muy cerca del borde de la imagen, se asume que los píxeles cuya ubicación esté fuera de la imagen pero sean parte de la operación, tendrán valores *RGB* iguales a cero.

1). Filtros lineales espaciales

Son filtros que consisten en aplicar una máscara representada por una matriz W de coeficientes a una imagen I_0 para obtener una imagen filtrada I mediante la siguiente operación:

$$I(x, y) = \sum_{s=-a}^a \sum_{t=-b}^b W(s, t) I_0(x + s, y + t) \quad (220)$$

³²ver sección I.A.3).3.

1).1. Filtro de la media

Consiste en reducir las variaciones de color entre pixeles vecinos; es decir, reducir las distancias entre los vectores *RGB* de los pixeles vecinos. Para ello, los valores *RGB* de la imagen filtrada serán iguales al promedio de los valores *RGB* de los pixeles vecinos, incluyendo los valores del propio pixel. Por lo tanto, en este caso, $a = b = n$, para algún $n = 1, 2, \dots, N$; donde N debe ser lo suficientemente pequeño como para que no se pierda información esencial de la imagen. La matriz W tendrá dimensiones $(2n + 1) \times (2n + 1)$ y sus valores serán:

$$W(s, t) = \frac{1}{(2n + 1)^2}; \quad \forall s, t \in \{-n, \dots, -1, 0, 1, \dots, n\} \quad (221)$$

Mientras que la ecuación de la imagen estará dada por:

$$I(x, y) = \sum_{s=-n}^n \sum_{t=-n}^n \frac{1}{(2n + 1)^2} I_0(x + s, y + t) \quad (222)$$

Las desventajas de este filtro son que es bastante sensible a cambios locales y que puede crear matices que no aparecían en la imagen original.

1).2. Filtro gaussiano

Consiste en volver la imagen más borrosa y eliminar el ruido. La diferencia con el filtro anterior es que la magnitud con la que se vuelve la imagen más borrosa se controla mediante un parámetro $\sigma \in (0.1, 1.5)$ y presenta menos problemas al difuminar los bordes de la imagen. Al igual que en el filtro anterior, $a = b = n$, para algún $n = 1, 2, \dots, N$; donde N debe ser lo suficientemente pequeño como para que no se pierda información esencial de la imagen. La matriz W tendrá dimensiones $(2n + 1) \times (2n + 1)$; y en este caso, sus valores serán:

$$W(s, t) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{s^2+t^2}{2\sigma^2}}; \quad \forall s, t \in \{-n, \dots, -1, 0, 1, \dots, n\} \quad (223)$$

Por lo que la ecuación de la imagen estaría dada por:

$$I(x, y) = \sum_{s=-n}^n \sum_{t=-n}^n \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{s^2+t^2}{2\sigma^2}} I_0(x + s, y + t) \quad (224)$$

Las ventajas del filtro gaussiano son que, debido a la forma en que está definida la matriz W , los pixeles más periféricos de la máscara de filtro tienen un impacto mucho menor que el pixel central; por lo que, a diferencia del filtro de la media, aunque la máscara no tenga dimensiones pequeñas, los bordes prácticamente no se oscurecerán en más pixeles. Además, es separable³³ y produce un suavizado más uniforme que el filtro de la media.

2). Filtro de la mediana

El filtro de la mediana permite eliminar el ruido de “sal y pimienta” en la imagen; es decir, de puntos claros y oscuros que no pertenecen a la imagen. La mediana de un conjunto

³³Un filtro es separable cuando se pueden realizar dos convoluciones unidimensionales.

de números es un valor que cumple que tanto la cantidad de números de dicho conjunto que sean menores como la cantidad de números que sean mayores a ese valor, no pueden ser mayores al 50 % del total de datos. Si el número de datos es par y los valores centrales no son iguales, la mediana es el promedio de dichos valores. Dado un valor $n \in \mathbb{N}$ no muy grande, para cada componente RGB de cada pixel se toma la misma componente de cada uno de sus $(2n + 1)^2$ pixeles más cercanos, incluyendo dicho pixel. Luego, estos valores se ordenan de menor a mayor y la componente tomada de dicho pixel adquiere el valor central de ese conjunto de valores ordenados en la imagen resultante.

Por ejemplo, dado un pixel p cuyos nueve pixeles vecinos más cercanos son: $p, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7$ y p_8 , como se muestra en la figura LXIII. Sean $(193, 54, 111)$; $(188, 57, 113)$; $(195, 63, 117)$; $(191, 71, 119)$; $(179, 51, 108)$; $(198, 61, 114)$; $(175, 48, 105)$; $(184, 50, 110)$; y $(190, 55, 111)$ los valores de sus respectivas componentes RGB . Si se desea realizar el filtrado por la mediana de 3×3 , se ordenan estos valores de menor a mayor, y se tiene para R : 175, 179, 184, 188, 190, 191, 193, 195 y 198; para G : 48, 50, 51, 54, 55, 57, 61, 63 y 71; y para B : 105, 108, 110, 111, 111, 113, 114, 117 y 119. Como los valores centrales de R, G y B son 190, 55 y 111 respectivamente, el vector RGB del pixel p de la imagen resultante sería $(190, 55, 111)$.

p_1	p_2	p_3
p_4	p	p_5
p_6	p_7	p_8

Figura LXIII: Gráfico del ejemplo del filtro de la mediana de 3×3 .

Este proceso se repite con cada pixel de la imagen. Al igual que en el filtro de la media, mientras más grande es la máscara, los pixeles de la imagen tenderán a tener colores más similares a los pixeles de su entorno. La diferencia es que sólo los cuatro pixeles que se encuentran en las esquinas de la imagen adquieren valores RGB nulos luego de realizar el filtrado, mientras que ningún otro pixel se ve influenciado por los valores RGB nulos de los pixeles que se encuentran fuera de la imagen, ya que solamente los pixeles de las esquinas de la imagen tienen no menos de la mitad de sus pixeles vecinos fuera de la imagen.

3). Filtro paso bajo

Es un filtro suavizante que atenúa o elimina la ganancia de las componentes de alta frecuencia y sólo mantiene inalterables (“deja pasar”) las de bajas frecuencias. Este filtro define una función $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ en base a una frecuencia de corte D_0 que filtra los puntos del plano de frecuencias al evaluar sus distancias respecto al origen. Para ello, se define la función $D : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ por:

$$D(u, v) = \sqrt{u^2 + v^2} \quad (225)$$

Este filtro se ejecuta siguiendo los siguientes pasos:

1. En la entrada, se lee la imagen que se desea filtrar.
2. Se guarda el tamaño de la imagen de entrada en pixeles en la memoria del procesador.
3. Se realiza la transformada de Fourier de la imagen.
4. Se asigna un valor a la frecuencia de corte D_0 .
5. Se define la función de filtro de paso bajo H y previamente el mallado sobre el plano de frecuencias de la imagen en el cual estará definida.
6. Se realiza la convolución entre la transformada de Fourier de la imagen de entrada y la máscara de filtrado H .
7. Se efectúa la transformada de Fourier inversa de la imagen convolucionada.
8. En la salida, se muestra la imagen resultante.

3).1. Filtro ideal de paso bajo

Es el más sencillo. Este filtro permite el paso de las señales cuyas frecuencias sean menores o iguales que la frecuencia de corte y rechaza las que tengan señales con frecuencia mayores a la de la frecuencia de corte, según Alojamientos [84] y Greyrat [85]. La función H está dada por:

$$H(u, v) = \begin{cases} 1; & D(u, v) \leq D_0 \\ 0; & D(u, v) > D_0 \end{cases} \quad (226)$$

En la siguiente figura, se puede observar la gráfica de la función H respecto al mallado sobre la imagen y respecto a la distancia entre el punto en la imagen sobre el que se evalúa la función H y el origen de coordenadas del plano de frecuencias de la imagen.

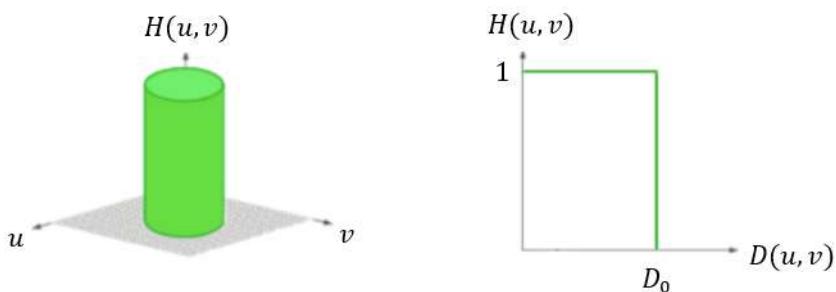


Figura LXIV: Gráfico de perspectiva de una función de transferencia de filtro ideal de paso bajo y la sección transversal radial del filtro.

Se puede observar en el gráfico de perspectiva de la figura LXIV que la función H bloquea todas las señales de los puntos del plano de frecuencias que se encuentran fuera de la circunferencia de radio D_0 centrada en el origen de dicho plano. En el gráfico de la sección transversal radial del filtro, se observa que la función H se mantiene con el valor de 1 si la distancia de la señal de un punto es menor o igual a la frecuencia de corte D_0 y se anula si es mayor a dicha frecuencia. Es importante tener en cuenta que este filtro es teórico y no es posible implementarlo en la práctica debido a la existencia de componentes electrónicos

que tienen una respuesta finita a las señales de alta frecuencia. En la práctica, se utilizan filtros de paso bajo con una respuesta finita que se aproximan al comportamiento ideal en un rango de frecuencias determinado.

3).2. Filtro Butterworth de paso bajo de orden n

Es un tipo de filtro de atenuación máxima suave, lo que significa que tiene una atenuación gradual en lugar de una atenuación brusca en las frecuencias que están por encima de la frecuencia de corte. Por lo tanto, produce una respuesta prácticamente constante hasta que se aproxima a la frecuencia de corte lo suficiente y comienza a disminuir a razón de $6n \text{ dB}$ por octava. Esto hace que el filtro sea adecuado para aplicaciones en las que se desea una transición suave entre las frecuencias pasadas y atenuadas. Este filtro se utiliza ampliamente en una variedad de aplicaciones, incluyendo el procesamiento de señales, el control de sistemas y la eliminación de ruido [84]. La función H está dada por:

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + (D(u, v)/D_0)^{2n}} \quad (227)$$

En la siguiente figura se puede observar la gráfica de la función H respecto al mallaado sobre la imagen.

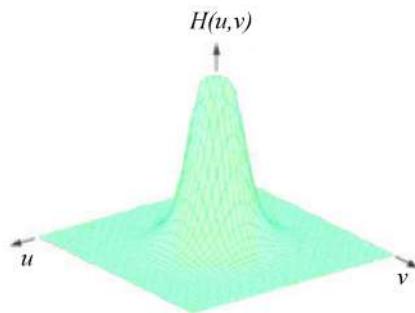


Figura LXV: Gráfico de perspectiva de una función de transferencia de filtro Butterworth de paso bajo de orden n .

Y en la figura LXVI, se puede observar la gráfica de la función H respecto a la distancia entre el punto en la imagen sobre el que se evalúa la función H y el origen de coordenadas del plano de frecuencias de la imagen para órdenes del 1 al 5.

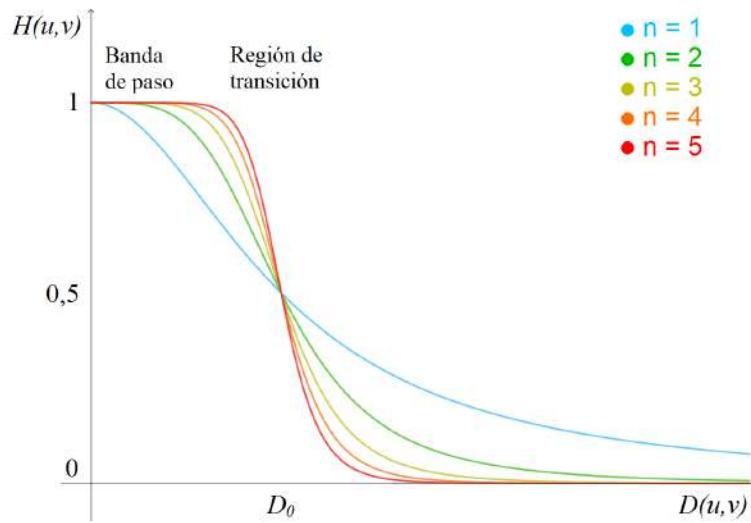


Figura LXVI: Gráfico de la sección transversal radial del filtro Butterworth de paso bajo de orden n .

Como se puede observar en la figura, a medida que aumenta el orden del filtro, la respuesta de atenuación se vuelve más pronunciada y el filtro puede atenuar de manera más efectiva las señales de alta frecuencia. Sin embargo, también hay un aumento de distorsión de fase a medida que aumenta el orden del filtro, lo que puede afectar la forma en que la señal de salida sigue la señal de entrada. Esto se debe a que, a medida que aumenta el orden del filtro, se añaden más polos y ceros al sistema³⁴, lo que permite una atenuación más pronunciada de las señales de alta frecuencia, pero también genera el aumento de la complejidad de la respuesta de fase del filtro y puede llevar a una mayor distorsión de fase. Esto sucede porque cada polo y cero agregado al sistema tiene un efecto en la respuesta de fase del filtro y, a medida que aumenta el número de polos y ceros, es más difícil predecir cómo la señal de salida seguirá la señal de entrada en términos de fase.

3).3. Filtro gaussiano de paso bajo

Este filtro se suele utilizar para suavizar una imagen. El filtro funciona al promediar los valores de intensidad de los píxeles en una imagen dentro de un cierto radio de vecindad alrededor de cada pixel. Esto tiene como resultado una imagen menos detallada y con menor ruido; aunque también puede hacer que la imagen se vea menos nítida. También se utiliza como un paso previo a otras operaciones de procesamiento de imágenes, como la detección de bordes y la segmentación de imágenes. Este filtro tiene una respuesta de frecuencia que es una función gaussiana y permite el paso de las bajas frecuencias y atenúa las más altas [84]. En este filtro, la función H está dada por:

$$H(u, v) = e^{-D^2(u,v)/(2D_0^2)} \quad (228)$$

En la siguiente figura, se puede observar la gráfica de la función H respecto al mallado sobre la imagen y respecto a la distancia entre el punto en la imagen sobre el que se evalúa la función H y el origen de coordenadas del plano de frecuencias de la imagen.

³⁴Los polos del filtro se refieren a las frecuencias donde la ganancia del filtro es infinita y los ceros, a las frecuencias donde la ganancia del filtro es cero

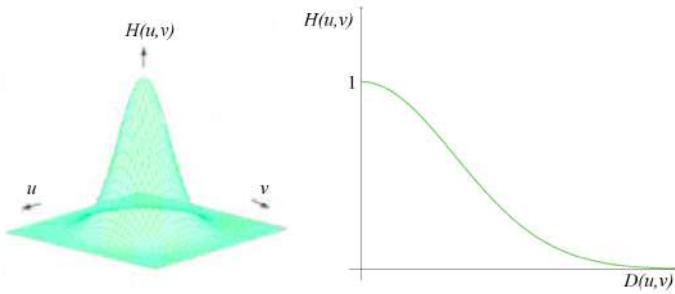


Figura LXVII: Gráfico de perspectiva de una función de transferencia de filtro gaussiano de paso bajo y la sección transversal radial del filtro.

La gráfica de este filtro tiene forma de campana, con una ganancia máxima en frecuencias más bajas y una ganancia decreciente a medida que aumentan las frecuencias. La altura de la campana determina la atenuación de las frecuencias altas. Esta gráfica se parece a la gráfica de la función gaussiana, con un pico en la frecuencia central y una atenuación decreciente a medida que nos alejamos de ese punto. La anchura de la campana será mayor si la frecuencia de corte D_0 es mayor.

4). Filtrado de paso alto para la localización de contornos

Es un filtro suavizante que atenúa o elimina la ganancia de las componentes de baja frecuencia y sólo mantiene inalterables (“deja pasar”) las de altas frecuencias. Este filtro define una función $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ en base a una frecuencia de corte D_0 que filtra los puntos del plano de frecuencias al evaluar sus distancias respecto al origen [84]. Para ello, se define la función $D : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ por:

$$D(u, v) = \sqrt{u^2 + v^2} \quad (229)$$

4).1. Filtro ideal de paso alto

Es el más sencillo. Este filtro permite el paso de las señales cuyas frecuencias sean mayores que la frecuencia de corte y rechaza las que tengan señales con frecuencia menores o iguales a la de la frecuencia de corte [84]. La función H está dada por:

$$H(u, v) = \begin{cases} 0; & D(u, v) \leq D_0 \\ 1; & D(u, v) > 0 \end{cases} \quad (230)$$

En la siguiente figura, se puede observar la gráfica de la función H respecto al mallado sobre la imagen y respecto a la distancia entre el punto en la imagen sobre el que se evalúa la función H y el origen de coordenadas del plano de frecuencias de la imagen.

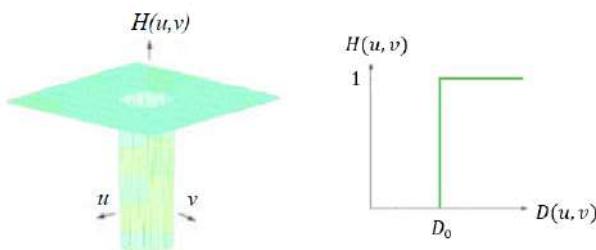


Figura LXVIII: Gráfico de perspectiva de una función de transferencia de filtro ideal de paso alto y la sección transversal radial del filtro.

Se puede observar en el gráfico de perspectiva de la figura LXVIII que la función H bloquea todas las señales de los puntos del plano de frecuencias que se encuentran dentro de la circunferencia de radio D_0 centrada en el origen de dicho plano. En el gráfico de la sección transversal radial del filtro, se observa que la función H se mantiene con el valor de 1 si la distancia de la señal de un punto es mayor a la frecuencia de corte D_0 y se anula si es menor o igual a dicha frecuencia. Es importante tener en cuenta que la gráfica de este filtro, al igual que la del filtro ideal de paso bajo, es sólo una representación teórica, ya que los filtros ideales no existen en la práctica. Sin embargo, esta gráfica es útil para entender el comportamiento teórico de un filtro de paso alto y para compararlo con la respuesta en frecuencia de filtros reales.

4)2. Filtro Butterworth de paso alto de orden n

Es un tipo de filtro de atenuación máxima suave, lo que significa que tiene una atenuación gradual en lugar de una atenuación brusca en las frecuencias que están por debajo de la frecuencia de corte. Por lo tanto, produce una respuesta prácticamente constante hasta que se aproxima a la frecuencia de corte lo suficiente y comienza a aumentar a razón de $6n\text{ dB}$ por octava. Se utiliza a menudo en aplicaciones en las que se desea eliminar el ruido o las señales no deseadas de baja frecuencia de una señal de entrada. Se caracteriza por tener una respuesta de frecuencia plana en el rango de frecuencias de paso alto y una atenuación suave y gradual a medida que la frecuencia disminuye [84]. La función H está dada por:

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + (D_0/D(u, v))^{2n}} \quad (231)$$

En la siguiente figura se puede observar la gráfica de la función H respecto al mallado sobre la imagen.

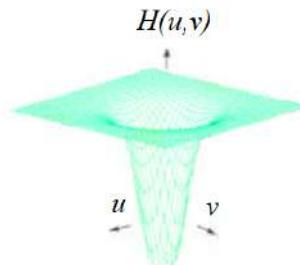


Figura LXIX: Gráfico de perspectiva de una función de transferencia de filtro Butterworth de paso alto de orden n .

Y en la figura LXIX se puede observar la gráfica de la función H respecto a la distancia entre el punto en la imagen sobre el que se evalúa la función H y el origen de coordenadas del plano de frecuencias de la imagen para órdenes del 1 al 5.

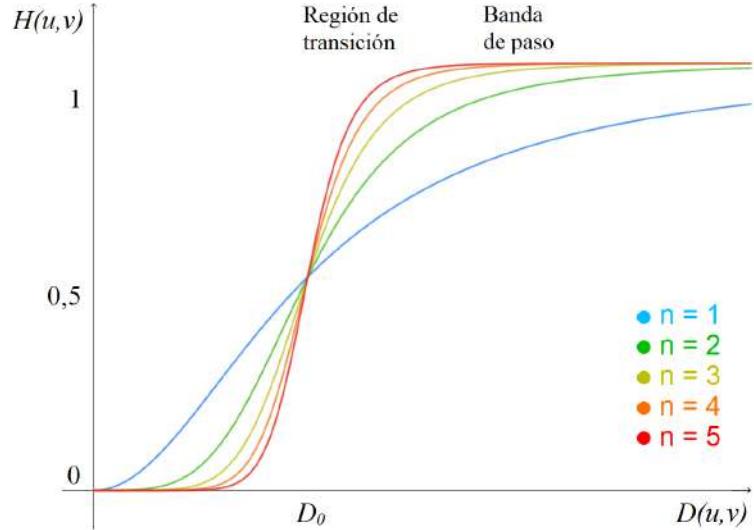


Figura LXX: Gráfico de la sección transversal radial del filtro Butterworth de paso alto de orden n .

Como se puede observar en la figura, a medida que aumenta el orden del filtro, la respuesta de atenuación se vuelve más pronunciada y el filtro puede atenuar de manera más efectiva las señales de baja frecuencia. Sin embargo, al igual que en el filtro Butterworth de paso bajo, también hay un aumento de distorsión de fase a medida que aumenta el orden del filtro, lo que puede afectar la forma en que la señal de salida sigue la señal de entrada. En este filtro, la señal de salida sigue de cerca a la señal de entrada en la banda de paso; es decir, en las frecuencias altas. Sin embargo, en la zona de corte, la señal de salida se atenúa rápidamente en comparación con la señal de entrada. Esto significa que las frecuencias bajas de la señal de entrada son atenuadas en la señal de salida.

4).3. Filtro gaussiano de paso alto

Es un filtro que resalta los detalles finos y las características de alta frecuencia de una imagen o señal. También puede ser utilizado para eliminar el ruido de baja frecuencia de una señal y resaltar las señales de alta frecuencia. Este filtro utiliza una función de distribución gaussiana para atenuar las señales de baja frecuencia y permitir pasar las señales de alta frecuencia. Esto se logra aplicando un peso mayor a las señales de alta frecuencia y un peso menor a las señales de baja frecuencia [84]. En este filtro, la función H está dada por:

$$H(u, v) = 1 - e^{-D^2(u,v)/(2D_0^2)} \quad (232)$$

En la siguiente figura, se puede observar la gráfica de la función H respecto al mallaado sobre la imagen y respecto a la distancia entre el punto en la imagen sobre el que se evalúa la función H y el origen de coordenadas del plano de frecuencias de la imagen.

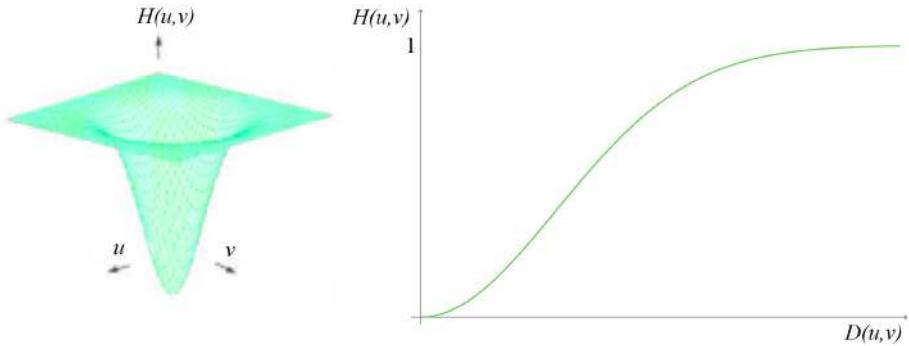


Figura LXXI: Gráfico de perspectiva de una función de transferencia de filtro gaussiano de paso alto y la sección transversal radial del filtro.

La gráfica de este filtro muestra una curva suave cuya atenuación disminuye a medida que el pixel de la imagen se encuentra a una distancia mayor al origen. Tiene una ganancia mínima en las frecuencias más altas y una ganancia creciente a medida que aumentan las frecuencias. El ancho de la campana será mayor si la frecuencia de corte D_0 es mayor.

5). Método de suavizado mediante la resolución numérica de la EDP de difusión anisotrópica no lineal

El suavizado de una imagen consiste en menguar los cambios abruptos entre los colores (valores RGB) de algunos píxeles vecinos con la finalidad de que la imagen se vea más natural. En diseño gráfico y fotografía, a veces se utiliza el suavizado como un efecto estético. Puede ayudar a crear transiciones más suaves entre diferentes áreas de la imagen y darle un aspecto más artístico. En algunos casos, suavizar una imagen puede disminuir la visibilidad de imperfecciones o detalles no deseados, como arrugas en la piel en retratos fotográficos. El suavizado por difusión utiliza algoritmos de difusión para propagar los valores de píxeles de manera suave a lo largo de la imagen. Este enfoque puede ser útil para preservar detalles finos mientras se mejora la estética de la imagen.

El método de suavizado mediante difusión anisotrópica es una técnica utilizada en el procesamiento de imágenes para eliminar ruido y detalles no deseados, preservando las estructuras importantes. A diferencia de los métodos isotrópicos, que aplican un grado uniforme de suavizado en todas las direcciones, la difusión anisotrópica adapta la cantidad de suavizado según la variación de intensidad local. Esto implica que en las regiones con bordes o estructuras definidas, el suavizado es mínimo, mientras que en áreas homogéneas se aplica un mayor grado de suavizado. Este enfoque permite conservar las características clave de la imagen, como los bordes y detalles relevantes, siendo especialmente útil en aplicaciones donde se necesita reducir el ruido sin comprometer la integridad de las estructuras importantes. Este método consiste en los siguientes pasos:

1. Se asigna un valor al número de iteraciones N , el paso de tiempo Δt y el parámetro $\kappa > 0$ constante.
2. Se inicia un bucle que realizará el suavizado de la imagen a lo largo de las N iteraciones. Este bucle contiene los pasos 3, 4, 5, 6 y 7.
3. Dada una imagen $I = (I_1, I_2, I_3)$, para cada $k \in \{1, 2, 3\}$, se define la magnitud del gradiente ∇I_k por:

$$\|\nabla I_k\| = \sqrt{I_{ix}^2 + I_{ky}^2} \quad (233)$$

donde I_{kx} e I_{ky} son las derivadas parciales de I_k respecto a x e y respectivamente:

$$I_x = \frac{\partial I}{\partial x} \quad I_y = \frac{\partial I}{\partial y}$$

4. La función de conductancia $c : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se define por:

$$c(\|\nabla I_k\|) = e^{-(\frac{\|\nabla I_k\|}{\kappa})^2}, \quad \forall k \in \{1, 2, 3\} \quad (234)$$

5. Se define la ecuación de difusión anisotrópica por:

$$\frac{\partial I_k}{\partial t} = \operatorname{div}(c(\|\nabla I_k\|)\nabla I_k) \quad (235)$$

donde $\frac{\partial I_k}{\partial t}$ es la tasa de cambio temporal de la intensidad de la imagen.

6. Se aplica diferencias finitas para discretizar la ecuación de difusión anisotrópica en el espacio y el tiempo:

$$\frac{\partial I_k}{\partial t} \approx \frac{I_k^{n+1} - I_k^n}{\Delta t} \quad (236)$$

Donde:

- I_k^{n+1} es la intensidad de la componente k de la imagen en el siguiente paso de tiempo.
- I_k^n es la intensidad de la componente k de la imagen en un instante t^n .
- $\Delta t = t^{n+1} - t^n$ es el paso de tiempo.

La expresión discretizada en tiempo, es la siguiente:

$$I_k^{n+1} = I_k^n + \Delta t \cdot \operatorname{div}(c(\|\nabla I_k^n\|)\nabla I_k^n) \quad (237)$$

7. Usando las propiedades de la divergencia y del gradiente, podemos simplificar el término de la divergencia. La divergencia de un vector gradiente se puede escribir como:

$$\operatorname{div}(c(\|\nabla I_k^n\|)\nabla I_k^n) = \nabla \cdot (c(\|\nabla I_k^n\|)\nabla I_k^n) = \frac{\partial}{\partial x}(c(\|\nabla I_k^n\|)I_{k_x}^n) + \frac{\partial}{\partial y}(c(\|\nabla I_k^n\|)I_{k_y}^n) \quad (238)$$

Para aproximar estas derivadas parciales, utilizamos diferencias finitas centradas en cada término:

$$\frac{\partial}{\partial x}(c(\|\nabla I_k^n\|)I_{k_x}^n) \approx \frac{(c(\|\nabla I_k^n\|)I_{k_x}^n)_{i+1,j} - (c(\|\nabla I_k^n\|)I_{k_x}^n)_{i-1,j}}{2} \quad (239)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(c(\|\nabla I_k^n\|)I_{k_y}^n) \approx \frac{(c(\|\nabla I_k^n\|)I_{k_y}^n)_{i,j+1} - (c(\|\nabla I_k^n\|)I_{k_y}^n)_{i,j-1}}{2} \quad (240)$$

Por lo tanto, definiendo los coeficientes $c_{i,j,k}^n = c(\|\nabla I_k^n(i, j)\|)$, $\forall (i, j) \in \{1, \dots, M_1\} \times \{1, \dots, M_2\}$, donde M_1 y M_2 son la cantidad de pixeles de longitud y altura de la imagen, respectivamente, se tiene que la expresión discretizada en el tiempo definida en el paso 6 es la siguiente:

$$I_k^{n+1} = I_k^n + \Delta t \cdot \frac{A_{i,j,k}^n + B_{i,j,k}^n}{2} \quad (241)$$

Donde:

- $A_{i,j,k} = c_{i+1,j,k}^n I_{k_x}^n(i+1, j) - c_{i-1,j,k}^n I_{k_x}^n(i-1, j)$
- $B_{i,j,k} = c_{i,j+1,k}^n I_{k_y}^n(i, j+1) - c_{i,j-1,k}^n I_{k_y}^n(i, j-1)$

8. Finalmente, se tiene que la imagen suavizada $I_s = (I_{s_1}, I_{s_2}, I_{s_3})$, está dada por:

$$I_{s_k} := I_k^{N+1}, \quad \forall k \in \{1, 2, 3\} \quad (242)$$

E. Técnicas de resaltamiento virtual

1). Técnica de “skeleton” para la detección de la escala de grises en la imagen y su binarización

El filtro “skeleton” en MATLAB utiliza el concepto de esqueleto matemático para reducir la dimensionalidad de una imagen binaria y extraer su esqueleto central. El esqueleto matemático de una imagen binaria es una línea que sigue la forma central de la imagen y elimina cualquier pixel que no afecte significativamente a la forma de la imagen.

Para construir el esqueleto, el filtro “skeleton” utiliza un algoritmo iterativo basado en la morfología matemática. La morfología matemática es una rama de la teoría de conjuntos que se utiliza para analizar y modificar la forma de los conjuntos en el espacio discreto. En el contexto de la imagen, la morfología matemática se puede utilizar para realizar operaciones de dilatación y erosión en la imagen, las cuales consisten en agregar o eliminar píxeles de la imagen para modificar su forma.

El algoritmo del filtro “skeleton” utiliza la morfología matemática para eliminar píxeles de la imagen de manera iterativa hasta que no se puedan eliminar más sin afectar significativamente la forma de la imagen. Según Serra [86], el resultado final es el esqueleto de la imagen, que es una línea que sigue la forma central de la imagen. A continuación se muestran las operaciones morfológicas que usa este filtro para eliminar píxeles de la imagen de forma iterativa:

1. **Dilatación:** Se añaden píxeles a la imagen I para aumentar su tamaño mediante un elemento estructurante J compuesto por un conjunto de píxeles cuya forma es lo más parecida posible a la de una circunferencia. La imagen dilatada I_d se obtiene de la dilatación de I por el elemento estructurante J y está definida por:

$$I_d = I \oplus J = \bigcup_{j \in J} I + \{j\} = \bigcup_{j \in J} \{i + j : i \in I\} \quad (243)$$

En la siguiente figura, se muestra la imagen dilatada I_d que se obtiene de este proceso:

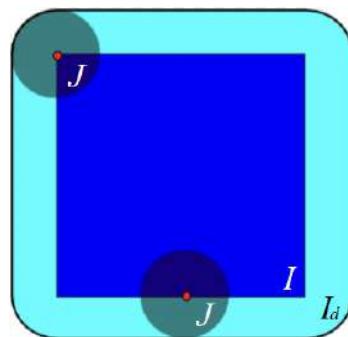


Figura LXXII: Diagrama de dilatación de una imagen I mediante un elemento estructurante J para obtener una imagen dilatada I_d .

2. **Resta:** A la imagen I se le resta la imagen dilatada I_d para eliminar los píxeles agregados y se obtiene la imagen resultante de la resta I_r .

$$I_r = I - I_d \quad (244)$$

3. **Erosión:** Se eliminan píxeles de la imagen I_r para reducir su tamaño mediante un elemento estructurante K compuesto por un conjunto de píxeles cuya forma es lo más parecida posible a la de una circunferencia. La imagen erosionada I_e se obtiene de la erosión de I_r por el elemento estructurante K y está definida por:

$$I_e = I_r \ominus K = \bigcap_{k \in K} I_r - \{k\} = \bigcap_{k \in K} \{i - k : i \in I_r\} \quad (245)$$

En la siguiente figura, se muestra la imagen erosionada I_e que se obtiene de este proceso:

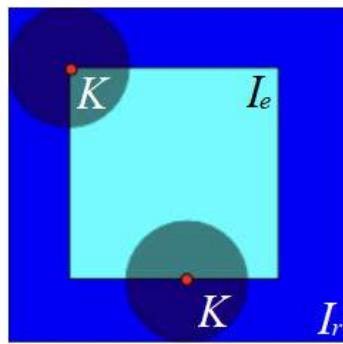


Figura LXXIII: Diagrama de erosión de la imagen I_r mediante un elemento estructurante K para obtener una imagen erosionada I_e .

4. **Intersección:** Se calcula la intersección entre la imagen I y la imagen erosionada I_e para obtener la imagen final del bucle I_f .

$$I_f = I \cap I_e \quad (246)$$

El proceso se repite hasta que no se puedan eliminar más píxeles sin afectar significativamente la forma de la imagen. Al final, el resultado es el esqueleto matemático de la imagen, que es una línea que sigue la forma central de la imagen.

2). Realce de detalles mediante el método de la DWT2

El método de la transformada de wavelet discreta en 2D es una técnica de procesamiento de imágenes que se usa para resaltar detalles importantes de una imagen y produce cuatro conjuntos de coeficientes cuyos elementos se ordenan en las matrices LL , LH , HL y HH de órdenes $M \times N$. La primera matriz contiene los coeficientes de aproximación, los cuales contienen la información de baja frecuencia; y las otras tres, los coeficientes de detalle, los cuales contienen la información de alta frecuencia. Dada una imagen $I : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de tamaño $M \times N$, este método se realiza de la siguiente manera:

1. Se definen las matrices LL , LH , HL y HH por:

$$LL(x, y) = \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} I(i, j) \phi(x - i, y - j) \quad (247)$$

$$LH(x, y) = \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} I(i, j) \psi(x - i, y - j) \quad (248)$$

$$HL(x, y) = \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} I(i, j) \phi(x - i, y - j) \psi(i, j) \quad (249)$$

$$HH(x, y) = \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} I(i, j) \psi(x - i, y - j) \psi(i, j) \quad (250)$$

donde $\psi, \phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ son la función de wavelet madre y la función de escala respectivamente.

2. Para cada $(x, y) \in \{1, \dots, M\} \times \{1, \dots, N\}$, se les asigna a los coeficientes de aproximación del $LL(x, y)$ un nuevo valor regido por los coeficientes de aproximación $LL_i(x, y)$ y de detalle del nivel de descomposición i dado por la siguiente ecuación:

$$LL(x, y) := \sum_{i=1}^N LL_i(x, y) + \alpha [LH_i(x, y) + HL_i(x, y) + HH_i(x, y)] \quad (251)$$

donde α es el factor de resaltado y N el número de niveles de descomposición.

3. Se reconstruye la imagen a partir de los coeficientes wavelet modificados utilizando la transformada de wavelet discreta inversa en 2D (IDWT2D). La imagen reconstruida I_r se obtiene de la siguiente ecuación:

$$I_r(x, y) = I_1(x, y) + I_2(x, y) + I_3(x, y) + I_4(x, y) \quad (252)$$

donde:

- $I_1(x, y) = \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} LL(i, j) \phi(x - i, y - j)$
- $I_2(x, y) = \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} LH(i, j) \psi(x - i, y - j)$
- $I_3(x, y) = \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} HL(i, j) \phi(x - i, y - j) \psi(i, j)$
- $I_4(x, y) = \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} HH(i, j) \psi(x - i, y - j) \psi(i, j)$

3). Método de la segmentación basado en funciones de wavelet

Este método consiste en dividir una imagen en varias partes, a menudo llamadas segmentos o regiones. Este método es muy útil para la detección de objetos en imágenes digitales, el reconocimiento de patrones y el análisis de imágenes médicas. Dada una imagen $I : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de tamaño $M \times N$, este proceso se realiza mediante los siguientes pasos:

1. Se definen las matrices LL , LH , HL y HH por:

$$LL(x, y) = \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} I(i, j) \phi(x - i, y - j) \quad (253)$$

$$LH(x, y) = \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} I(i, j) \psi(x - i, y - j) \quad (254)$$

$$HL(x, y) = \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} I(i, j) \phi(x - i, y - j) \psi(i, j) \quad (255)$$

$$HH(x, y) = \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} I(i, j) \psi(x - i, y - j) \psi(i, j) \quad (256)$$

donde $\psi, \phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ son la función de wavelet madre y la función de escala respectivamente.

2. Se normalizan los coeficientes de aproximación $cA(x, y)$ haciendo:

$$cA(x, y) = \frac{LL(x, y)}{510} \quad (257)$$

La elección de utilizar el doble del valor máximo de intensidad (255) de las componentes *RGB* en este caso se debe a que el cálculo de los coeficientes de la transformada wavelet implica una decimación. Por lo tanto, al descartar las muestras de la imagen de mayor frecuencia, el comando adapta la escala de intensidad de las componentes *RGB* de la muestra de coeficientes de aproximación de manera que los máximos valores sean equivalentes a los máximos valores de la imagen original. Como los valores máximos de las componentes *RGB* de las imágenes de los coeficientes de detalle son iguales a los de la imagen original, no se normalizan. Una vez normalizados estos coeficientes, pueden ser visualizados.

3. Se aplica la operación de umbralización a los coeficientes $c(x, y)$ de aproximación y de detalle obtenidos:

$$c(x, y) := \begin{cases} 0 & \text{si } |c(x, y)| < \lambda \\ c(x, y) & \text{si } |c(x, y)| \geq \lambda \end{cases} \quad (258)$$

Donde λ es el valor del umbral.

4. Se reconstruye la imagen a partir de los coeficientes wavelet modificados utilizando la transformada de wavelet discreta inversa en 2D (IDWT2D). La imagen reconstruida I_r se obtiene de la siguiente ecuación:

$$I_r(x, y) = I_1(x, y) + I_2(x, y) + I_3(x, y) + I_4(x, y) \quad (259)$$

Donde:

- $I_1(x, y) = \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} cA(i, j) \phi(x - i, y - j)$
- $I_2(x, y) = \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} cH(i, j) \psi(x - i, y - j)$
- $I_3(x, y) = \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} cV(i, j) \phi(x - i, y - j) \psi(i, j)$
- $I_4(x, y) = \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} cD(i, j) \psi(x - i, y - j) \psi(i, j)$

Donde $cA(i, j)$ son los coeficientes de aproximación, $cH(i, j) = LH(x, y)$ son los coeficientes de detalle horizontal, $cV(i, j) = HL(x, y)$ son los coeficientes de detalle vertical y $cD(i, j) = HH(x, y)$ son los coeficientes de detalle diagonal.

4). Método wavelet de detección de bordes

Este método consiste en resaltar los bordes entre las zonas o los objetos de una imagen. Su aplicación es útil en imágenes médicas porque permite visualizar mejor las estructuras de los órganos que se muestran en la imagen. Dada una imagen $I : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de tamaño $M \times N$, este proceso se realiza mediante los siguientes pasos:

1. Se definen los coeficientes de detalle horizontales cH , verticales cV y diagonales cD de la siguiente manera:

$$cH(x, y) = \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} I(i, j) \psi(x - i, y - j) \quad (260)$$

$$cV(x, y) = \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} I(i, j) \phi(x - i, y - j) \psi(i, j) \quad (261)$$

$$cD(x, y) = \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} I(i, j) \psi(x - i, y - j) \psi(i, j) \quad (262)$$

donde $\psi, \phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ son la función de wavelet madre y la función de escala respectivamente.

2. Se calcula la magnitud del vector de los coeficientes de detalle en cada punto de la imagen. Esto se puede considerar como la norma L^2 de los coeficientes de detalle. Para un determinado punto (x, y) en la imagen, se consideran los tres coeficientes de detalle: $cH(x, y)$ para la componente horizontal, $cV(x, y)$ para la vertical, y $cD(x, y)$ para la altura. La magnitud μ de este vector se puede calcular utilizando el teorema de Pitágoras, que se generaliza en tres dimensiones de la siguiente manera:

$$\mu(x, y) = \sqrt{cH^2(x, y) + cV^2(x, y) + cD^2(x, y)} \quad (263)$$

Este cálculo de magnitud se realiza porque un borde en la imagen original se manifestará como un cambio de intensidad en varias direcciones. Al calcular la magnitud de los coeficientes de detalle, se obtiene una medida de cuánto cambia la intensidad en cualquier dirección, lo cual es útil para detectar bordes.

3. Se muestra la imagen resultante I_r cuyos pixeles (x, y) expresan en escala de grises las luminosidades de magnitud $3\mu(x, y)/255$. Se coloca el factor 3 para compensar la descomposición en tres coeficientes de detalle y el factor $1/255$ para reducir la escala RGB de 0 a 255, a la escala de luminosidad de 0 a 1.

$$I_r(x, y) = \frac{3}{255} \mu(x, y) \quad (264)$$

5). Método de detección de bordes mediante la resolución numérica de la EDP de difusión anisotrópica no lineal

El método de detección de bordes mediante difusión anisotrópica es una técnica de procesamiento de imágenes que se centra en resaltar y localizar los límites o bordes entre diferentes regiones en una imagen. Utilizando el concepto de difusión anisotrópica, este método aplica un proceso de suavizado adaptativo, reduciendo el ruido en áreas homogéneas mientras preserva y resalta los bordes. Al ajustar la difusión según la dirección de mayor cambio en la intensidad de color en todos los pixeles, el método logra realzar de manera efectiva los bordes presentes en la imagen. Esta nueva alternativa de procesamiento facilita la identificación y segmentación de objetos y características específicas que se deseen resaltar, mientras conserva la información estructural relevante de cada pixel. Esta técnica es especialmente importante en el análisis de imágenes médicas, ya que permite un enfoque no invasivo para el procesamiento de las mismas. Esta técnica consiste en los siguientes pasos:

1. Sea C la matriz de coeficientes de difusión:

$$C(x, y) = \begin{pmatrix} c_x & 0 \\ 0 & c_y \end{pmatrix} \quad (265)$$

Donde c_x y c_y son los coeficientes de difusión. Se asigna un valor al número de iteraciones N , el paso de tiempo Δt y el parámetro constante $\kappa > 0$. Luego, se establece la ecuación de difusión anisotrópica:

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \nabla \cdot (C(x, y) \nabla I) \quad (266)$$

Ahora iniciamos un bucle que realiza la detección de bordes de la imagen a lo largo de las N iteraciones. Este bucle está conformado por los siguientes pasos:

2. Dada la imagen identificada con la variable $I = (I_1, I_2, I_3)$, se consideran los siguientes coeficientes de difusión:

$$c_x = \exp\left(-\frac{I_{kx}^2}{\kappa^2}\right) \quad y \quad c_y = \exp\left(-\frac{I_{ky}^2}{\kappa^2}\right), \quad \text{para cada } k \in \{1, 2, 3\} \quad (267)$$

Donde, κ es el parámetro que controla la cantidad de difusión. La función exponencial asegura que los coeficientes no excedan la escala de la intensidad del color, lo cual está representado por el gradiente de la variable intensidad del color (I_k).

3. Para cada componente $k \in \{1, 2, 3\}$ y para cada pixel (x, y) de la imagen, se discretiza la ecuación de difusión anisotrópica en una malla bidimensional mediante la siguiente aproximación:

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_k}{\partial t}(x, y) &= \nabla \cdot (c_x \frac{\partial I_k}{\partial x}, c_y \frac{\partial I_k}{\partial y}) \\ \frac{\partial I_k}{\partial t}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x}(c_x \frac{\partial I_k}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(c_y \frac{\partial I_k}{\partial y}) \end{aligned} \quad (268)$$

Aplicando diferencias finitas, se tiene para las direcciones x e y respectivamente:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(c_x \frac{\partial I_k}{\partial x} \right) \Big|_{i,j} \approx \frac{1}{\Delta x} \left(c_{x,i+1,j} \frac{(I_{i+1,j,k} - I_{i,j,k})}{\Delta x} - c_{x,i,j} \frac{(I_{i,j,k} - I_{i-1,j,k})}{\Delta x} \right) \quad (269)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(c_y \frac{\partial I_k}{\partial y} \right) \Big|_{i,j} \approx \frac{1}{\Delta y} \left(c_{y,i,j+1} \frac{(I_{i,j+1,k} - I_{i,j,k})}{\Delta y} - c_{y,i,j,k} \frac{(I_{i,j,k} - I_{i,j-1,k})}{\Delta y} \right) \quad (270)$$

Teniendo en cuenta que para cada pixel $p_{ij} = (x_i, y_j)$ se cumple que $x_i = i - 1$ e $y_j = j - 1$, $\forall (i, j) \in \{1, \dots, M_1\} \times \{1, \dots, M_2\}$, donde M_1 y M_2 son la cantidad de pixeles de longitud y altura de la imagen, respectivamente. Dado que $\Delta x = x_{i+1} - x_i$ e $\Delta y = y_{j+1} - y_j$, entonces, se tiene que $\Delta x = \Delta y = 1$. Por lo tanto, para cada iteración $n \in \{1, \dots, N\}$, se cumple:

$$\frac{\partial I_k^n}{\partial t}(x, y) \approx \frac{I_k^{n+1}(x, y) - I_k^n(x, y)}{\Delta t} = c_{x,i+1,j} \cdot L_k^n + c_{x,i,j} \cdot Q_k^n + c_{y,i,j+1} \cdot R_k^n + c_{y,i,j} \cdot U_k^n \quad (271)$$

Donde:

- I_k^{n+1} es la intensidad del pixel (x, y) de la componente k de la imagen en el siguiente paso de tiempo.
- I_k^n es la intensidad del pixel (x, y) de la componente k de la imagen en el tiempo actual.

- $\Delta t = t^{n+1} - t^n$ es el paso de tiempo.
 - $L_k^n(x, y) = I_k^n(x + 1, y) - I_k^n(x, y)$
 - $Q_k^n(x, y) = I_k^n(x - 1, y) - I_k^n(x, y)$
 - $R_k^n(x, y) = I_k^n(x, y + 1) - I_k^n(x, y)$
 - $U_k^n(x, y) = I_k^n(x, y - 1) - I_k^n(x, y)$
4. Se obtiene la imagen con bordes definidos $I_d = (I_{d1}, I_{d2}, I_{d3})$ ejecutando el siguiente comando iterativo, para cada $k \in \{1, 2, 3\}$:

$$I_{dk} := I_{dk} + \Delta t \cdot (c_{x,i+1,j} \cdot L_{dk} + c_{x,i,j} \cdot Q_{dk} + c_{y,i,j+1} \cdot R_{dk} + c_{y,i,j} \cdot U_{dk}) \quad (272)$$

Donde:

- I_{dk} es la intensidad del pixel (x, y) de la componente k de la imagen con bordes definidos.
- $L_{dk}(x, y) = I_{dk}(x + 1, y) - I_{dk}(x, y)$
- $Q_{dk}(x, y) = I_{dk}(x - 1, y) - I_{dk}(x, y)$
- $R_{dk}(x, y) = I_{dk}(x, y + 1) - I_{dk}(x, y)$
- $U_{dk}(x, y) = I_{dk}(x, y - 1) - I_{dk}(x, y)$

IV RESULTADOS DE APLICACIÓN DE LAS TÉCNICAS DE PROCESAMIENTO DE IMÁGENES A LAS IMÁGENES DE FPI

A. Corrección de los errores de calibración

En esta sección, se colocan y describen los resultados de las técnicas para corregir errores de posicionamiento en las imágenes, como de angulación, mala ubicación de la cámara y encuadre, así como su luminosidad.

1). Corrección del error de angulación

La imagen que vamos a corregir es la siguiente:

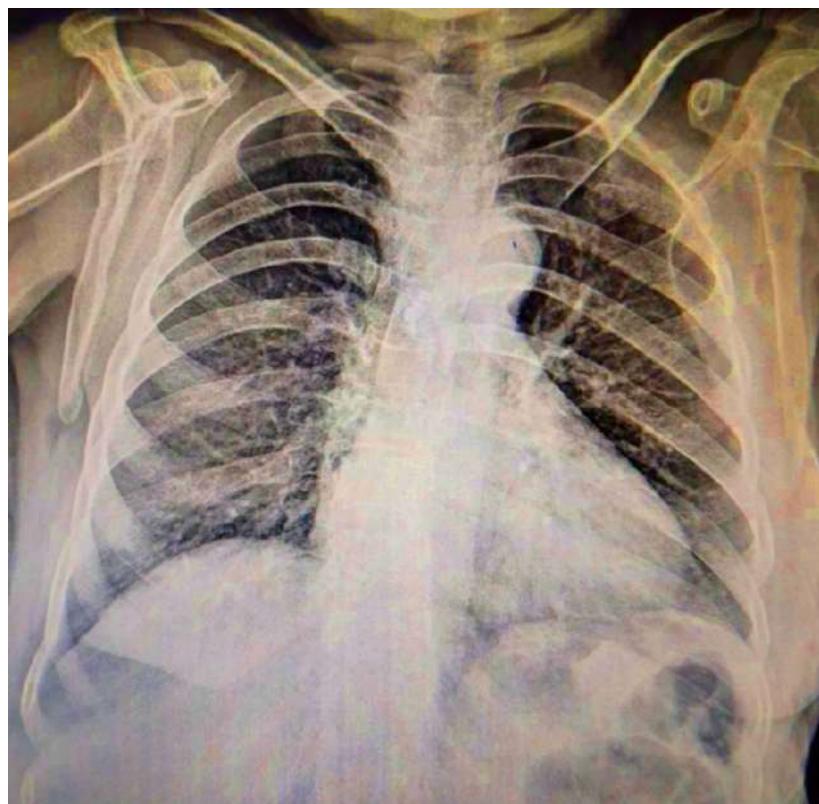


Figura LXXIV: Imagen original: Aquí se muestra el error de angulación en la dirección vertical de la columna vertebral de una radiografía de FPI obtenida mediante la colaboración de un hospital nacional.

Para corregir una imagen con una mala angulación en MATLAB, se utiliza la función “imrotate” seguida de la función “crop”, para girar la imagen y recortar cualquier borde blanco resultante respectivamente. Esta corrección se realiza mediante los siguientes pasos:

1. **Definición del ángulo de rotación:** se especifica el ángulo α en grados sexagesimales para la rotación de la imagen.
2. **Rotación del ángulo:** Se rota la imagen en el ángulo especificado α en sentido antihorario.

3. **Recorte de la imagen:** Despues de rotar la imagen, se recorta la imagen rotada segun cuatro valores especificados v_1 , v_2 , v_3 y v_4 . Estos valores determinan los pixeles de recorte desde los bordes de la imagen: v_1 y v_3 desde los bordes izquierdo y derecho, y v_2 y v_4 desde los bordes superior e inferior, respectivamente.

Al ejecutar el código de este algoritmo para corregir la angulación de una imagen, algunas zonas de la imagen resultante serán de color negro y probablemente la imagen permanezca un poco inclinada. Por lo tanto, será necesario tantear el ángulo unas cuantas veces hasta que la imagen quede derecha, así como los valores v_1 , v_2 , v_3 y v_4 para recortar la imagen en los lugares precisos si se desea eliminar las zonas de color negro.

A continuación, se muestra la imagen resultante de corregir la angulación de la imagen anterior, la cual tiene 734 pixeles de largo y 720 de alto, con un ángulo de 9° , y de aplicar un recorte con los valores $v_1 = 45$, $v_2 = 50$, $v_3 = 640$ y $v_4 = 625$:

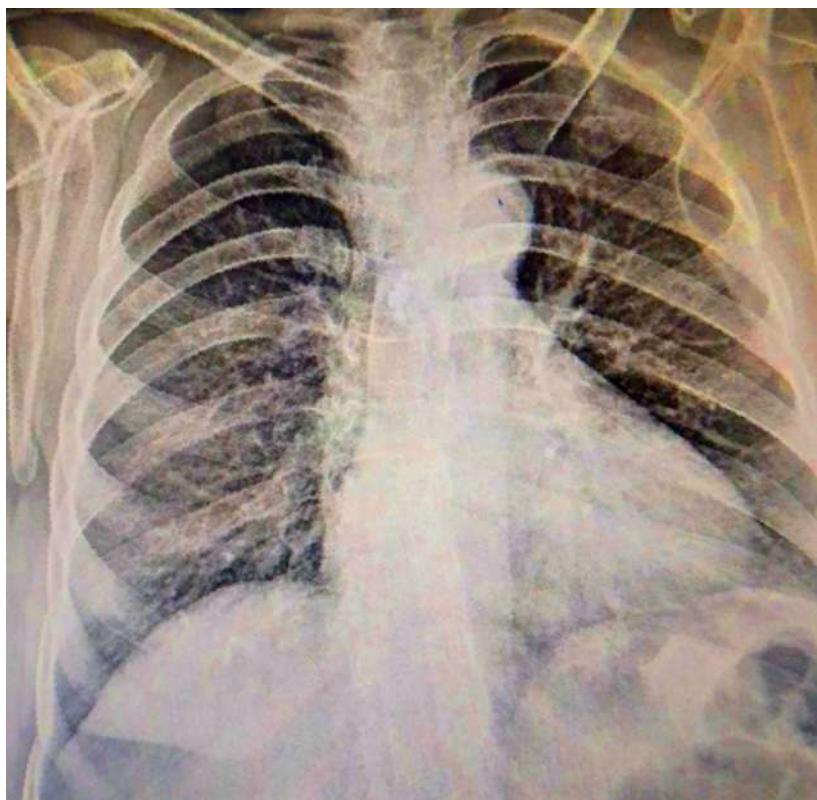


Figura LXXV: Elaboración propia: Aquí se muestra la corrección de la angulación de la radiografía de FPI anterior.

Como se puede notar, la imagen de los pulmones se enderezó ligeramente.

2). Corrección del error de la mala ubicación de la cámara

La imagen que se va a corregir es la siguiente:

Este algoritmo corrige la orientación de una imagen que representa una película radiográfica. La corrección se realiza mediante los siguientes pasos:

1. **Mostrar la imagen original:** Se muestra la imagen original en una ventana gráfica para que el usuario pueda interactuar visualmente con ella.



Figura LXXVI: Imagen original: Aquí se muestra el error de enfoque de la cámara sobre una radiografía de FPI obtenida mediante la colaboración de un hospital nacional.

2. **Seleccionar puntos del cuadrilátero:** Se utiliza la función `impoly` para permitir al usuario seleccionar manualmente los puntos que forman el cuadrilátero en la imagen que se desea corregir. Estos puntos deben estar en orden, usualmente en sentido horario o antihorario.
3. **Esperar a que el usuario ajuste los puntos:** Se muestra un mensaje indicando al usuario que ajuste los puntos del cuadrilátero y que realice un doble clic para finalizar la selección.

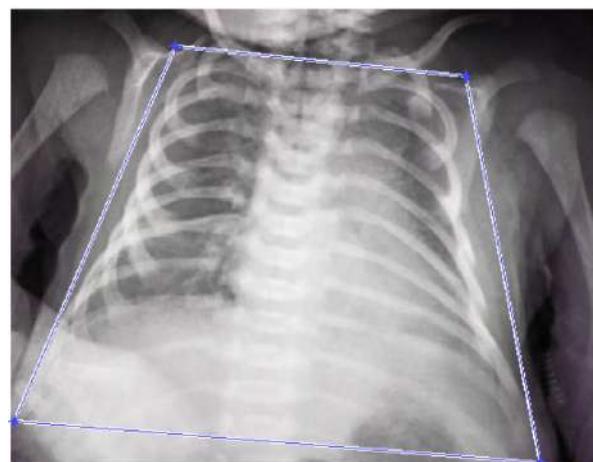


Figura LXXVII: Elaboración propia: aquí se muestra el cuadrilátero formado por los puntos elegidos para transformar la imagen.

4. **Definir los puntos destino para la transformación:** Se definen las coordenadas de los puntos destino que especifican cómo se debería ver el cuadrilátero después de la corrección de perspectiva. Normalmente, estos puntos forman un rectángulo en una posición deseada en la imagen final.
5. **Calcular la Transformación de Perspectiva:** Se utiliza la función “`fitgeotrans`” para calcular la transformación geométrica que mapea los puntos seleccionados del cuadrilátero en la imagen original a los puntos destino especificados.

6. Aplicar la transformación a la Imagen: Se utiliza la función “fitgeotrans” para calcular la transformación geométrica que mapea los puntos seleccionados del cuadrilátero en la imagen original a los puntos destino especificados.

Este algoritmo corrige las distorsiones o deformaciones de una imagen que se producen cuando la película no está alineada con el objetivo de la cámara o no está sujetada adecuadamente al marco de la cámara.

A continuación se muestra la imagen resultante de corregir la mala ubicación de la cámara de la imagen de la figura LXXV

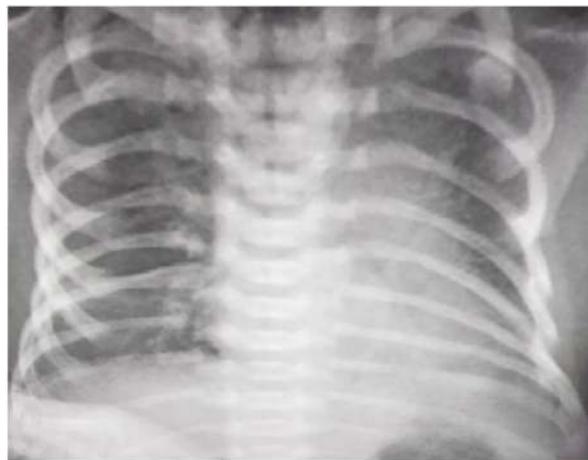


Figura LXXVIII: Elaboración propia: Aquí se muestra la corrección de la distorsión producida por la mala ubicación de la cámara de la imagen de la figura LXXV.

Se puede observar que la imagen se muestra mejor enfocada.

3). Corrección de la descentralización de la imagen

Para corregir una imagen con mal encuadre en MATLAB, se puede usar la función “imcrop” para recortar cualquier parte no deseada de la imagen o enmarcarla mejor. Para usar el comando “imcrop”, primero se debe seleccionar manualmente el área de la imagen que se desea conservar; esto se puede realizar dibujando un rectángulo alrededor de la región de interés con el cursor del mouse. Una vez que seleccionada el área de interés, se puede usar “imcrop” para recortar la imagen y guardar el resultado en una nueva imagen.

Por ejemplo, si se quiere recortar la imagen “I”, para eliminar todo excepto la región seleccionada se puede escribir en MATLAB la siguiente sentencia:

```
[J, rect] = imcrop(I);
```

La variable “J” contiene la imagen recortada y “rect” es un vector que contiene las coordenadas del rectángulo de recorte en la imagen original. Finalmente, se coloca la sentencia “imshow(J)” para obtener la imagen recortada.

A continuación, se muestran la radiografía de FPI de 1280 pixeles de largo y 1133 de alto con el rectángulo de recorte, y la imagen recortada con 1150 pixeles de largo y 857 de ancho:

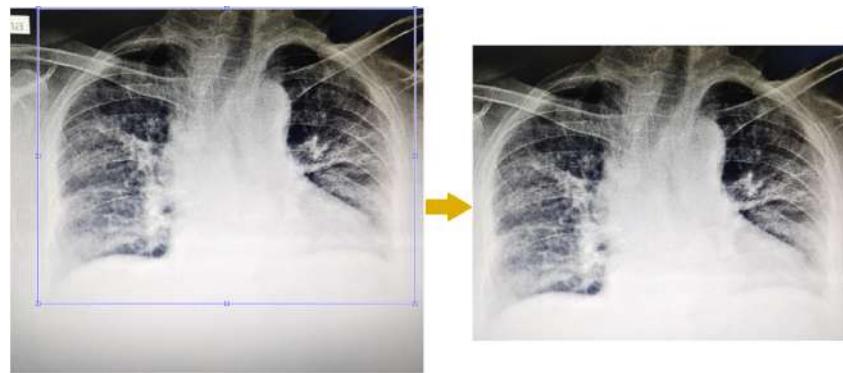


Figura LXXIX: Elaboración propia: Aquí se muestra la corrección de una radiografía de FPI con mal encuadre obtenida mediante la colaboración de un hospital nacional.

4). Corrección de la luminosidad de la imagen

Para corregir la luminosidad de una imagen en MATLAB, se puede usar la función “imadjust”. Esta función permite ajustar el contraste de una imagen y también puede ser utilizada para ajustar la luminosidad colocando el rango de luminosidad inicial seguido por el rango de luminosidad final. Los intervalos que definen estos rangos de luminosidad están dados por las variables “a”, “b”, “c” y “d”, de manera que los intervalos $[a, b]$ y $[c, d]$ representan los rangos de luminosidad inicial y final respectivamente. En las figuras LXXX y LXXXI, se muestra un cambio de luminosidad de una radiografía de FPI:

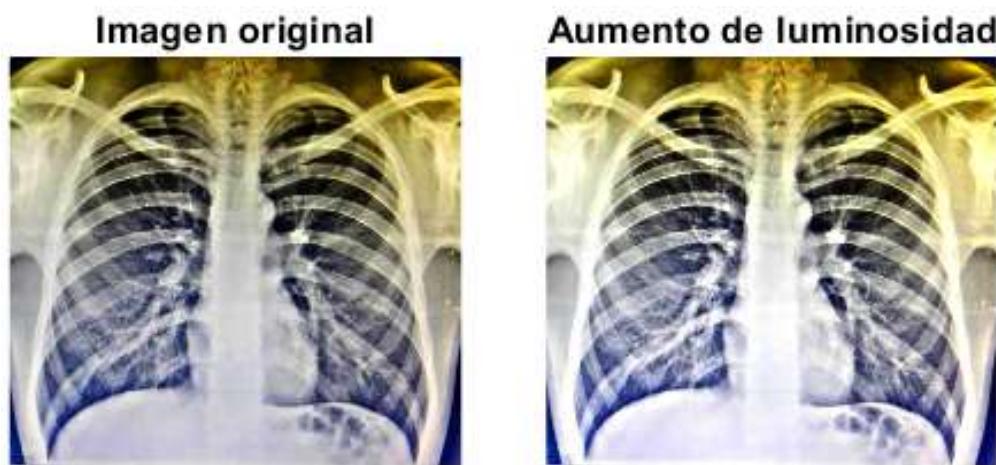


Figura LXXX: Elaboración propia: Aquí se puede ver el aumento de luminosidad de una radiografía de FPI con baja nitidez obtenida mediante la colaboración de un hospital nacional.



Figura LXXXI: Elaboración propia: Aquí se puede ver los cambios de luminosidad de la radiografía de FPI de la imagen izquierda de la figura anterior.

En la figura LXXX, la imagen izquierda es la imagen de entrada. Para obtener la imagen derecha, “a”, “b”, “c” y “d” han adoptado primeramente los valores 0, 0.85, 0 y 1 respectivamente para aumentar la luminosidad de la imagen un 18 %. Luego, han adoptado los valores 0.15, 1, 0 y 1 respectivamente para aumentar la opacidad de la imagen un 18 % y obtener la imagen izquierda de la figura LXXXI. Y finalmente, han adoptado los valores 0, 1, 0 y 0.75 respectivamente para disminuir la luminosidad de la imagen un 25 % y obtener la imagen derecha de dicha figura. Al aumentar la luminosidad o la opacidad de esta radiografía de FPI, se puede distinguir mejor las estructuras pulmonares. Al disminuir la luminosidad, sucede lo contrario. Esto se debe a que en los dos primeros casos, aumenta la diferencia de brillo entre las zonas más luminosas y menos luminosas mientras que en el último caso, esta diferencia se hace más pequeña.

B. Resultados de técnicas de amplificación

1). Amplificación de la imagen mediante la técnica *RGB*

El efecto que tiene esta interpolación sobre una radiografía de FPI con la finalidad de ampliarla se puede visualizar al comparar la figura LXXXII con la figura LXXXIII:



Figura LXXXII: Fuente: Aquí se muestra una imagen de una radiografía de FPI de pequeñas dimensiones obtenida por colaboración de un hospital nacional.

En la figura LXXXIII, se puede observar que la imagen pierde un poco de resolución debido a que esta técnica simplemente copia los colores de los píxeles que tienen un color asignado mediante la transformación asociada, a los píxeles vecinos.

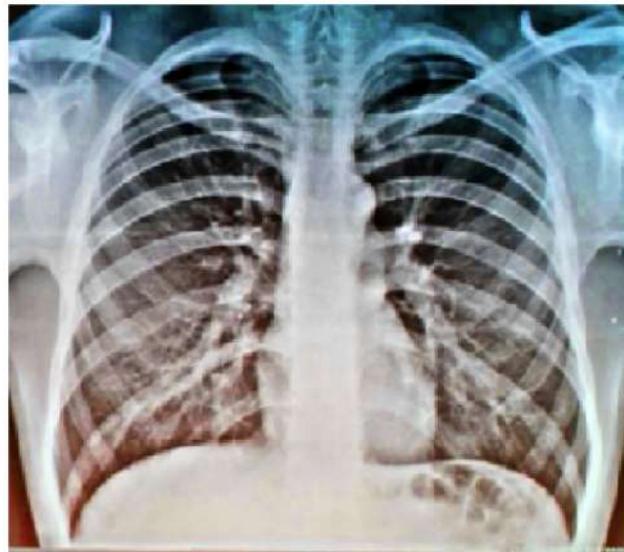


Figura LXXXIII: Elaboración propia: Aquí se muestra la imagen de la radiografía de FPI anterior amplificada mediante la interpolación *RGB* con factor de escala 3.

2). Amplificación de la imagen mediante interpolación polinomial bilineal

El efecto que tiene esta interpolación sobre una radiografía de FPI se puede visualizar al comparar la figura LXXXII con la figura LXXXIV. El resultado es una imagen ampliada que debería ser más suave y conservar mejor los detalles en comparación con el método anterior:

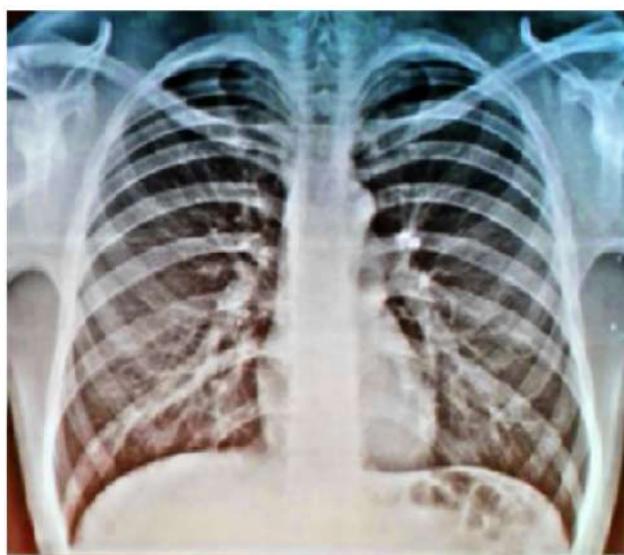


Figura LXXXIV: Elaboración propia: Aquí se muestra la imagen de la radiografía de FPI de la figura LXXXII amplificada mediante la interpolación bilineal con factor de escala 3.

3). Amplificación de la imagen mediante interpolación polinomial bicúbica

El efecto que tiene esta interpolación sobre una radiografía de FPI se puede visualizar al comparar la figura LXXXII con la figura LXXXV. Este resultado es muy similar al anterior

pero posee muy ligeramente una mayor resolución debido a que la transformación asociada es un polinomio de mayor grado:

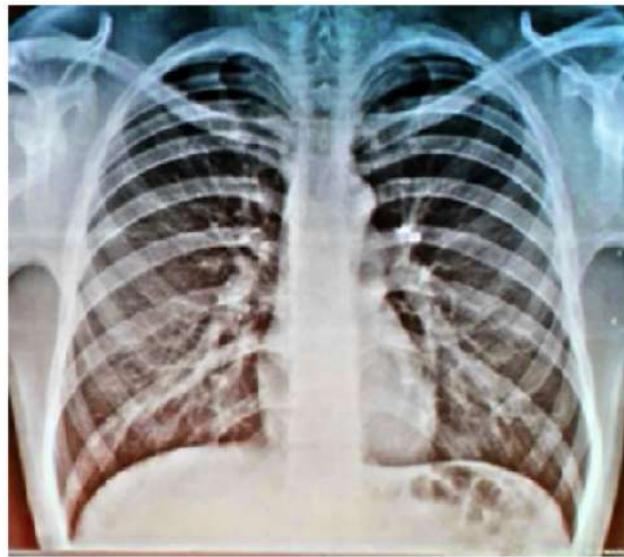


Figura LXXXV: Elaboración propia: Aquí se muestra la imagen de la radiografía de FPI de la figura LXXXII amplificada mediante la interpolación bicúbica con factor de escala 3.

4). Amplificación de la imagen mediante la transformada discreta de Fourier

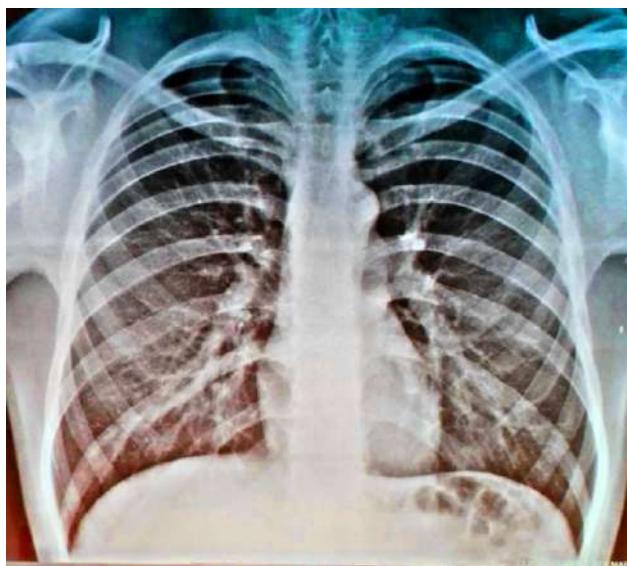


Figura LXXXVI: Elaboración propia: Aquí se muestra el resultado de aplicar la amplificación de imágenes basada en interpolación espacial usando el método de la transformada de Fourier a la imagen de la radiografía de FPI de la figura LXXXII.

Se puede notar que este método para amplificar una imagen es altamente efectivo para mantener su resolución debido a la nitidez de la figura LXXXVI.

C. Resultados de técnicas de compresión

1). Compresión de la imagen mediante la transformada discreta coseno (TDC)

Dada la radiografía de FPI que se muestra en la siguiente figura:



Figura LXXXVII: Imagen original: Aquí se muestra una radiografía de FPI con líneas casi verticales que no pertenecen a la imagen obtenida mediante la colaboración de un hospital nacional con un peso de 531.327 KB.

A continuación, se muestra el resultado de aplicar la técnica de compresión de imágenes basada en la TDC sobre la imagen de la radiografía de FPI de la figura anterior:



Figura LXXXVIII: Elaboración propia: Aquí se observa que las líneas que no pertenecen a la imagen han sido eliminadas al disminuir los coeficientes y se ha mantenido su resolución en alta medida, lo que resulta de aplicar la compresión de imágenes basada en la TDC a la imagen anterior, conservando 222 coeficientes. El peso de la imagen disminuyó de 531.327 KB a 96.318 KB.

2). Compresión de la imagen mediante la técnica de wavelet

Este método se usa principalmente para comprimir la imagen, pero también es bastante útil para resaltar los objetos y las estructuras de la imagen. Emplear funciones de wavelet para procesar tomografías es bastante útil porque las wavelets permiten una representación esparsa de la información, concentrando la energía de la señal en coeficientes significativos y facilitando así una compresión eficiente de imágenes. Esto significa que se puede lograr una reducción en el tamaño del archivo sin pérdida de la calidad perceptible de la imagen original. La tomografía, por su parte, proporciona secciones transversales detalladas de un objeto desde múltiples ángulos de observación, lo que combinado con las wavelets, permite analizar y visualizar los cambios estructurales con precisión. Además, la descomposición multi-resolución de las wavelets hace que el procesamiento de grandes volúmenes de datos tomográficos sea computacionalmente viable, facilitando así el análisis exhaustivo de imágenes médicas o científicas de manera eficiente y efectiva.

Al comparar la tomografía de la figura LXXXIX con las de las figuras XC, XCI, XCII, XCIII y XCIV, el lector podrá notar el efecto que tiene sobre la imagen aplicar distintos tipos de wavelets para la compresión.

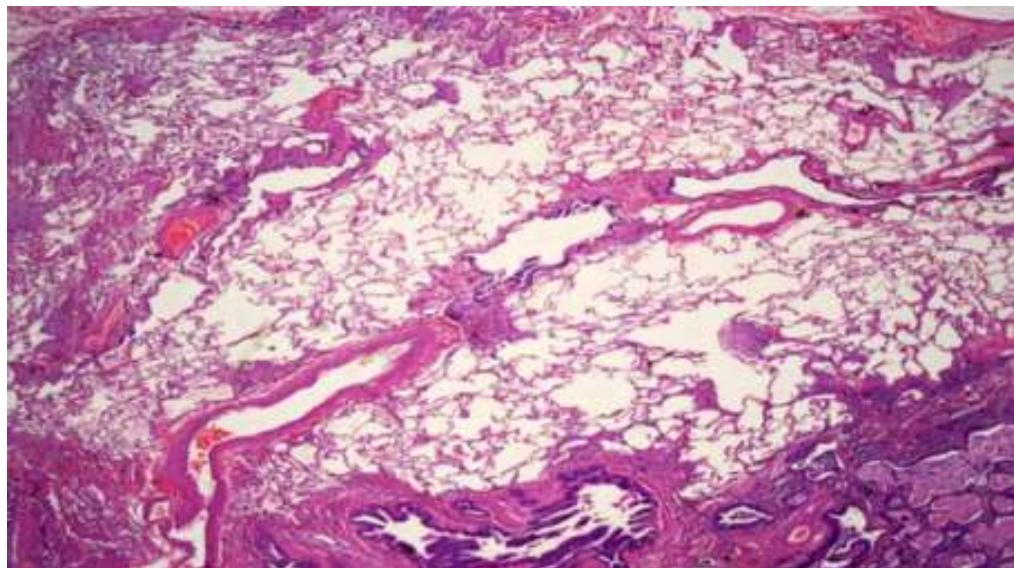


Figura LXXXIX: Imagen original: Aquí se muestra una tomografía computarizada de un paciente con FPI [87] de 263.144 KB de tamaño.

En las figuras XC y XCI, se puede notar que al aplicar este método con las wavelets de Daubechies-4 y Coiflets-2, las estructuras y objetos de la radiografía que se muestran en la figura LXXXIX aumentan su nitidez. Esto se debe a que la wavelet de Daubechies-4 tiene alta regularidad, es decir, sus derivadas son suaves, por lo que esta wavelet elige cuidadosamente los coeficientes de filtro; además, esta wavelet tiene propiedades de banda ancha, lo cual quiere decir que puede representar información en un amplio espectro de frecuencias, lo cual implica que es capaz de representar tanto componentes de baja frecuencia como de alta frecuencia con eficacia. Las wavelets de Coiflets, particularmente Coif-2, están diseñadas para ser suaves y tener propiedades de compresión superiores en comparación con algunas wavelets más ásperas. La suavidad se traduce en la capacidad de la wavelet para eliminar componentes de alta frecuencia innecesarios mientras retiene los detalles importantes.

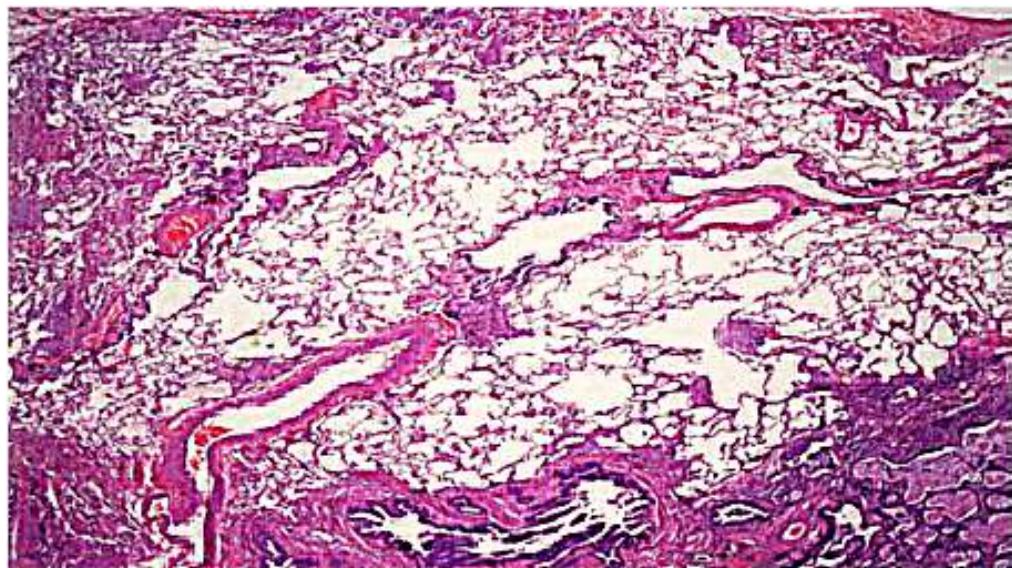


Figura XC: Elaboración propia: Aquí se muestra la compresión en un 70 % de la tomografía computarizada (TC) de FPI de la figura anterior mediante la wavelet de Haar de 56.436 KB de tamaño.

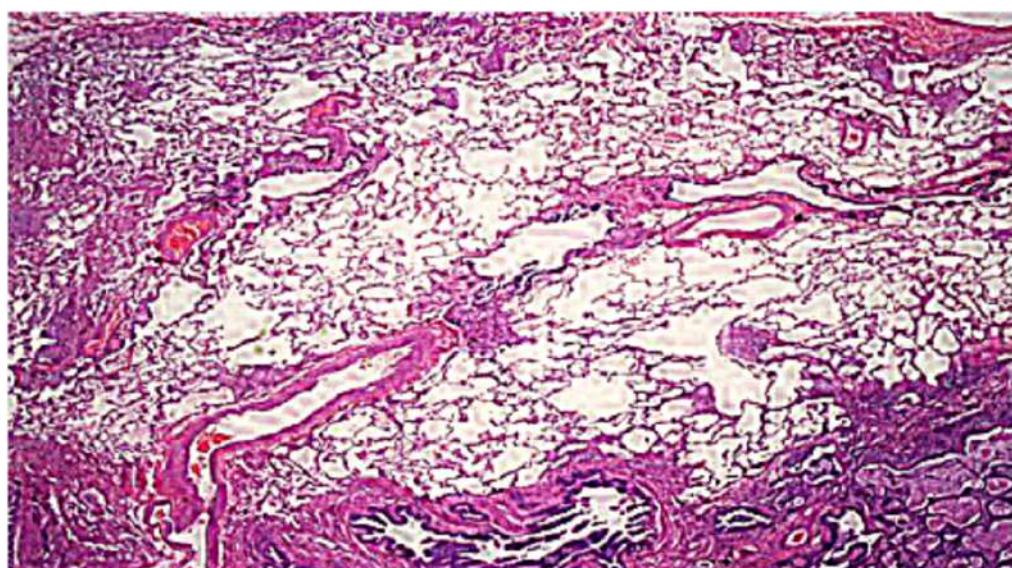


Figura XCI: Elaboración propia: Aquí se puede ver la compresión en un 70 % de la TC de FPI mediante la wavelet de Daubechies-4 de 54.413 KB de tamaño.

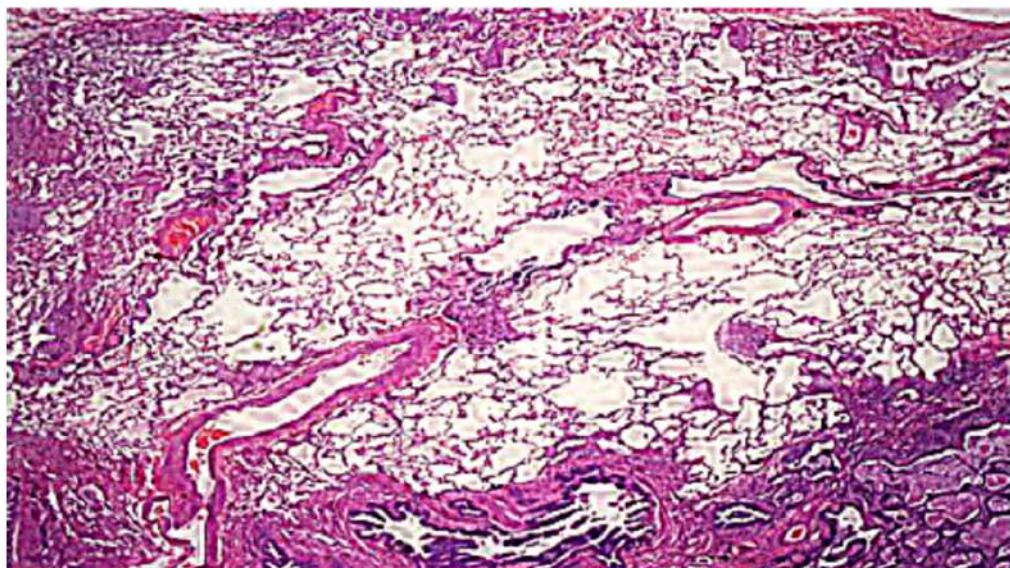


Figura XCII: Elaboración propia: Aquí se muestra la compresión en un 70 % de la TC de FPI mediante la wavelet de Coiflets-2 de 54.462 KB de tamaño.

Las wavelets de Symlets-6 y Meyer tienen un soporte más amplio que las demás, por lo que no toman los coeficientes de filtro más óptimos. A pesar de que la wavelet de Haar tiene el soporte más compacto, su regularidad es muy baja; por ello los objetos más pequeños de la imagen pierden resolución significativamente.

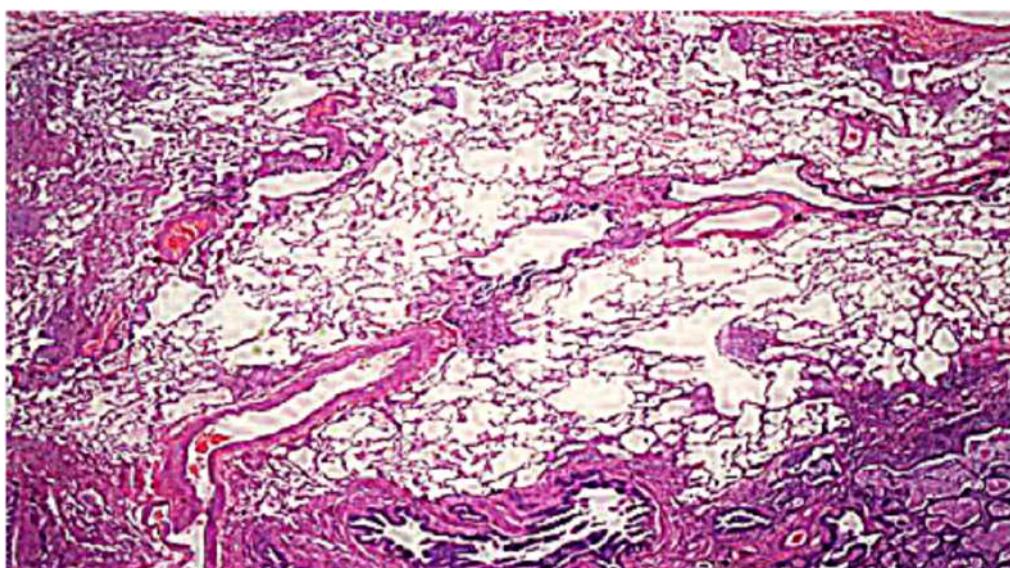


Figura XCIII: Elaboración propia: Aquí se observa la compresión en un 70 % de la TC de FPI mediante la wavelet de Symlets-6 de 54.369 KB de tamaño.

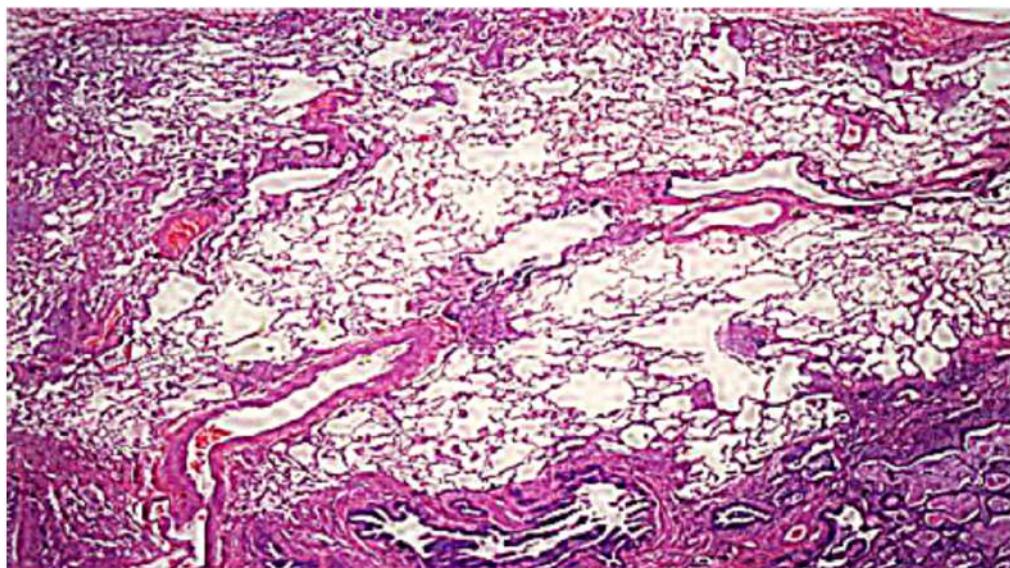


Figura XCIV: Elaboración propia: Aquí se puede ver la compresión de la TC de FPI en un 70 % mediante la wavelet de Meyer de 54.149 KB de tamaño.

D. Resultados de filtrado

A continuación se verán los resultados de aplicar los filtros lineales de la media y gaussiano, el de la mediana, los de paso bajo y paso alto, skeleton, y basados en funciones de wavelet a radiografías de FPI.

- 1). **Filtrado de ruidos de “sal y pimienta” (desaparecen altamente puntos claros y oscuros que no pertenecen a la imagen pero disminuye su resolución) mediante la técnica de la media estadística**

En la figura siguiente, se muestra el efecto que tiene el filtro de la media para una radiografía de FPI con el ruido de “sal y pimienta”:

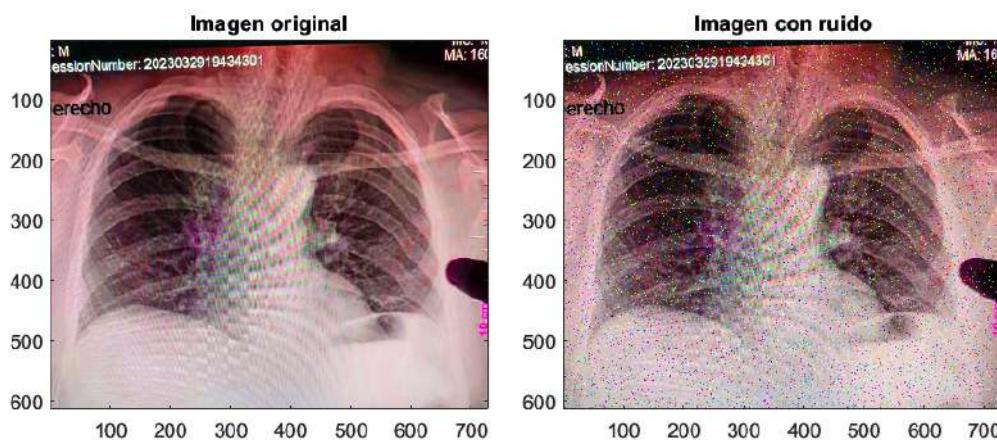


Figura XCV: Elaboración propia: En la imagen izquierda de esta figura, se muestra una radiografía de FPI obtenida mediante la colaboración de un hospital nacional; y a la derecha, el efecto de aplicarle el ruido de “sal y pimienta” a la imagen.

Al aplicar este filtro a la radiografía de FPI con el ruido de “sal y pimienta”, se obtienen los

siguientes resultados:

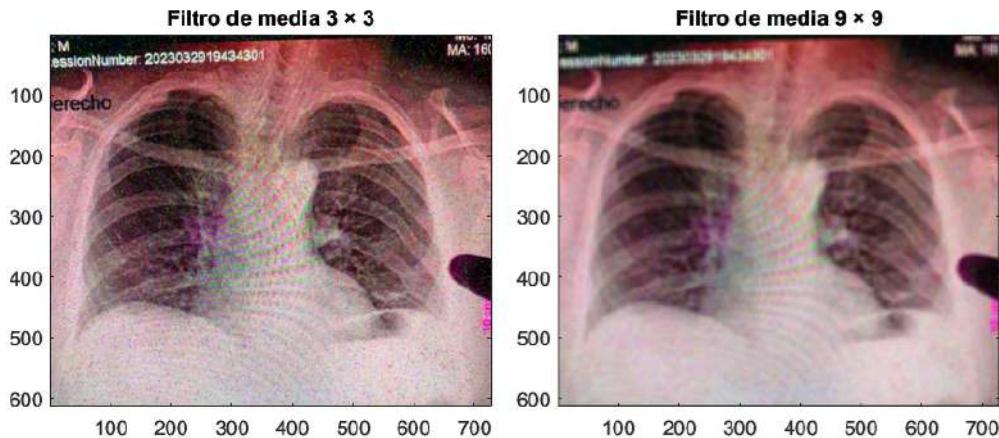


Figura XCVI: Elaboración propia: Aquí se muestra el efecto de aplicar el filtro de la media de 3×3 y 9×9 para la radiografía de FPI con ruido de “sal y pimienta”.

Como se puede observar al comparar la figura XCV con la figura XCVI, este filtro elimina casi todo el ruido que se puede notar a simple vista al usar una máscara de 3×3 y llega a eliminarlo prácticamente por completo con una máscara de 9×9 pero también elimina detalles importantes de la imagen.

2). Filtrado mejorado de los ruidos de “sal y pimienta” (desaparecen casi en su totalidad puntos claros y oscuros que no pertenecen a la imagen pero disminuye mínimamente su resolución)

En la figura siguiente, se muestra el efecto que tiene el filtro de la mediana para la radiografía de FPI de la figura XCV con el ruido de “sal y pimienta”:

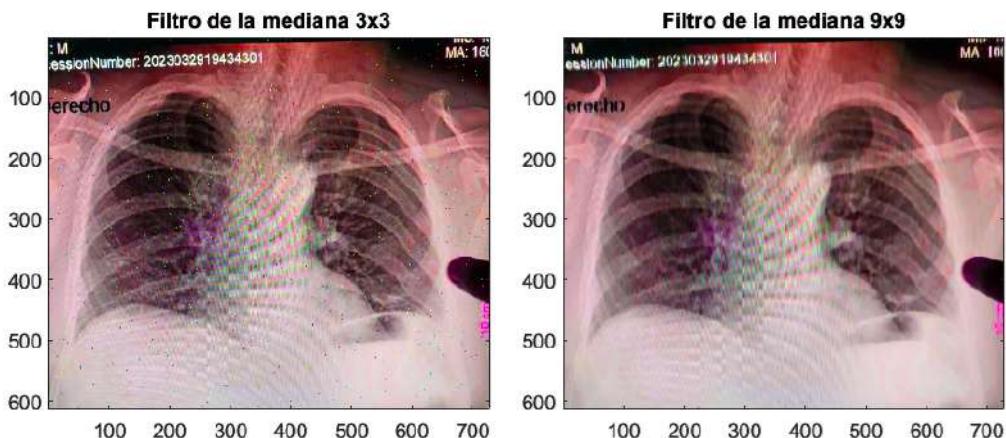


Figura XCVII: Elaboración propia: Aquí se muestra el efecto de aplicar el filtro de la mediana de 3×3 y 9×9 para la imagen con ruido de “sal y pimienta” de la figura XCV.

Como se puede visualizar, en este filtro conviene tomar no muy pocos pixeles vecinos para que en todos los conjuntos de valores de las componentes *RGB* de los pixeles vecinos, los valores de los pixeles que emiten el color del efecto del ruido no sean centrales al ordenarlos de menor a mayor y se filtren los colores del efecto de “sal y pimienta”. Sin embargo,

también hay que tomar en cuenta que las líneas muy delgadas de una imagen desaparecen si la máscara no es muy pequeña, como se puede ver en la imagen derecha.

3). Filtrado de un interlineado que no pertenece a la imagen mediante la técnica lineal gaussiana

Al comparar la figura XCIX con la figura XCIX, se puede percibir el efecto que tiene el filtro gaussiano con $\sigma = 0.5$ para la radiografía de FPI con ruido gaussiano:

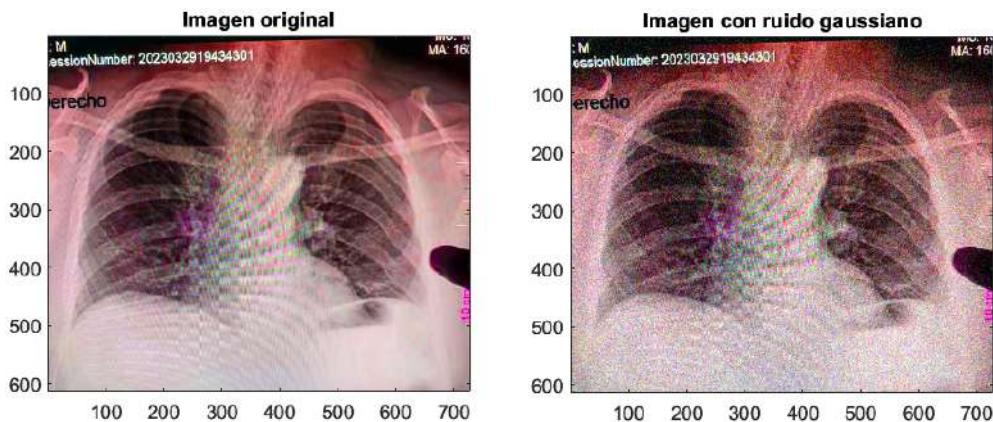


Figura XCIX: Elaboración propia: En la imagen izquierda de esta figura, se muestra una radiografía de FPI obtenida mediante la colaboración de un hospital nacional; y a la derecha, el efecto de aplicarle el ruido gaussiano a la imagen.

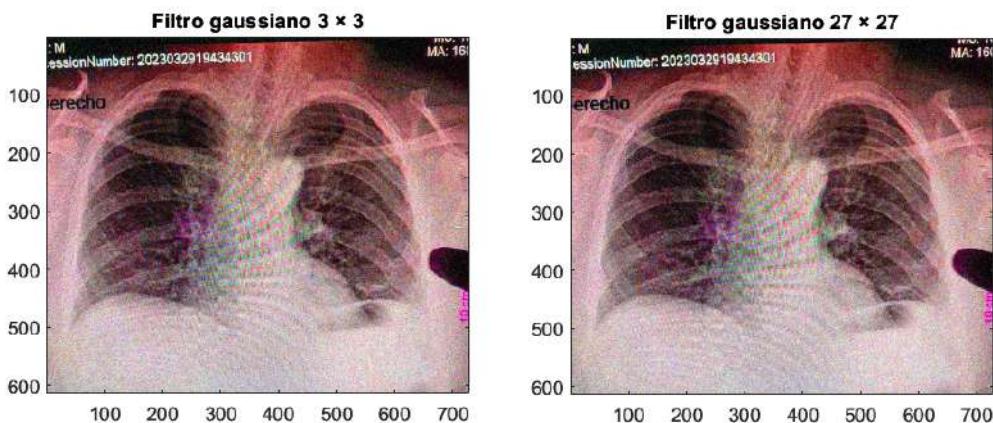


Figura XCIX: Elaboración propia: Aquí se muestra el efecto de aplicar el filtro gaussiano de 3×3 y 27×27 para una radiografía de FPI con ruido gaussiano.

Como se puede observar, este filtro es adecuado para eliminar manchas más pequeñas y dado que la ecuación de la máscara genera valores exponencialmente más altos para los pixeles que están más cerca del pixel central, el tamaño de la máscara prácticamente no afecta la nitidez de la imagen.

Se ha elegido el valor de 0.5 para σ por ser el más óptimo, ya que, debido a la definición de W , las imágenes resultan muy luminosas cuando su valor absoluto es menor a 0.5 y más opacas cuando es mayor a este número.

- 4). Filtrado de paso bajo de ruidos de “sal y pimienta” a la imagen (desaparecen totalmente puntos claros y oscuros que no pertenecen a la imagen pero se mantiene su resolución), mediante la transformada rápida de Fourier

4.1. Filtro ideal de paso bajo

En la figura C, se muestra el efecto que tiene el filtro ideal de paso bajo sobre una radiografía de FPI con ruido de “sal y pimienta” para valores de frecuencia de corte de 150 hz, 90 hz y 30 hz:

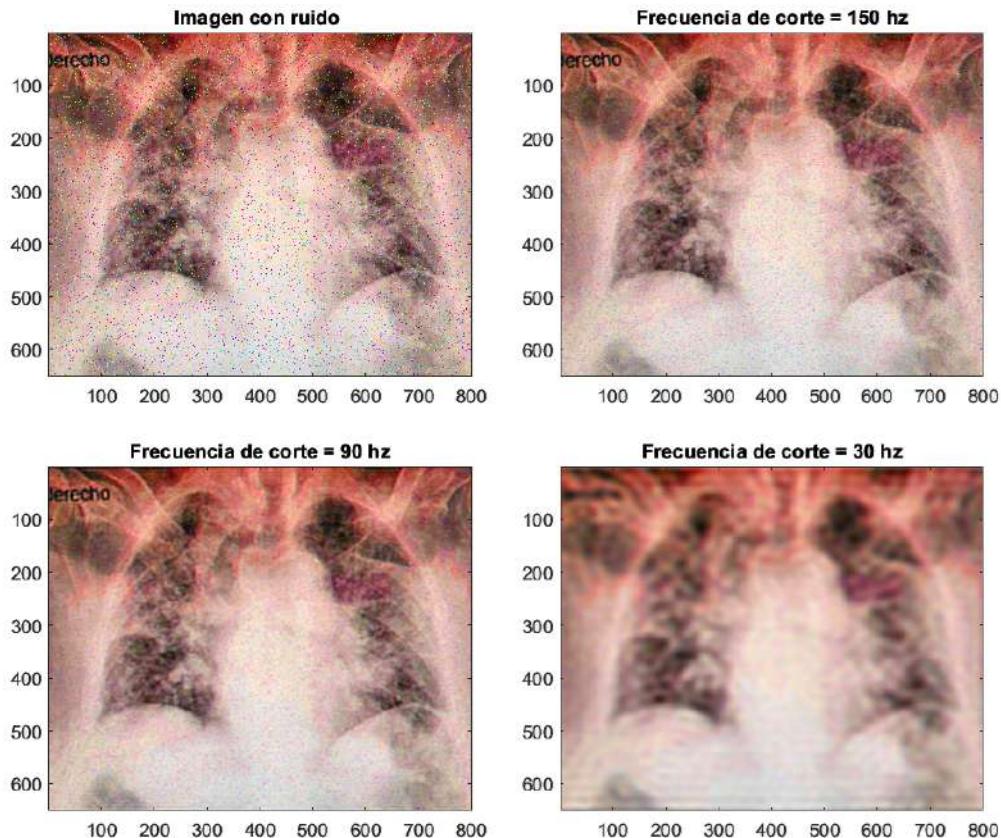


Figura C: Elaboración propia: Aquí se muestra el efecto de aplicar el filtro ideal de paso bajo sobre una radiografía de FPI obtenida mediante la colaboración de un hospital nacional con ruido de “sal y pimienta” para las frecuencias de corte de 150 hz, 90 hz y 30 hz.

Como se puede ver, este filtro es muy bueno para eliminar las manchas de una imagen; y ademá, permite elegir la frecuencia de corte más adecuada según los colores y el brillo de las manchas de la imagen. Se debe tratar de elegir la frecuencia de corte más alta que elimine prácticamente todas las manchas de la imagen para que la nitidez de la imagen se mantenga óptima y la imagen no se torne borrosa como la imagen inferior derecha de la figura.

4.2. Filtro Butterworth de paso bajo de orden uno

En la figura CI, se muestra el efecto que tiene el filtro Butterworth de paso bajo de orden uno sobre la radiografía de FPI de la figura C para valores de frecuencia de corte de 270 hz, 90 hz y 30 hz:

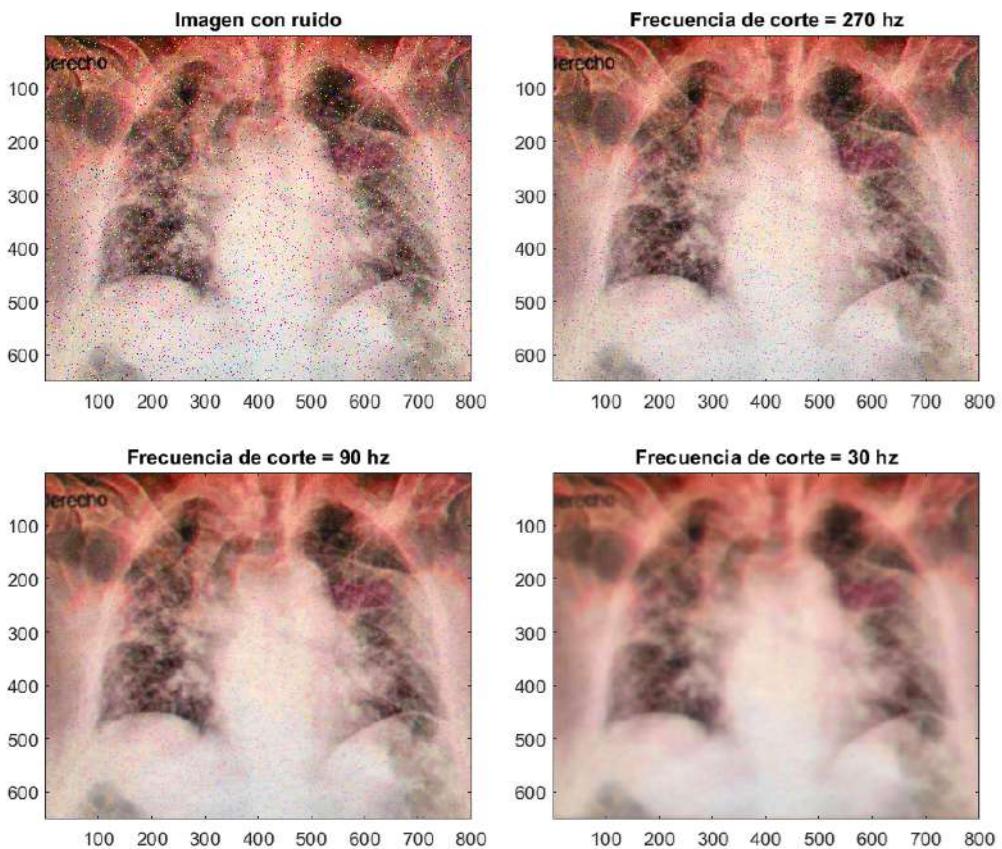


Figura CI: Elaboración propia: Aquí se observa el efecto de aplicar el filtro Butterworth de paso bajo de orden uno sobre la radiografía de FPI de la figura C con ruido de “sal y pimienta” para las frecuencias de corte de 270 hz, 90 hz y 30 hz.

En este filtro, hemos aumentado la frecuencia de corte de 150 hz a 270 hz y se observa que el filtro deja pasar ligeramente una mayor proporción de manchas. Cuando la frecuencia de corte es 90 hz, la imagen se sigue viendo nítida y bastante bien filtrada. Cuando la frecuencia de corte es 30 hz, la imagen se ve borrosa.

4).3. Filtro Butterworth de paso bajo de orden tres

En la figura CII, se muestra el efecto que tiene el filtro Butterworth de paso bajo de orden tres sobre la radiografía de FPI de la figura C para valores de frecuencia de corte de 270 hz, 90 hz y 30 hz:

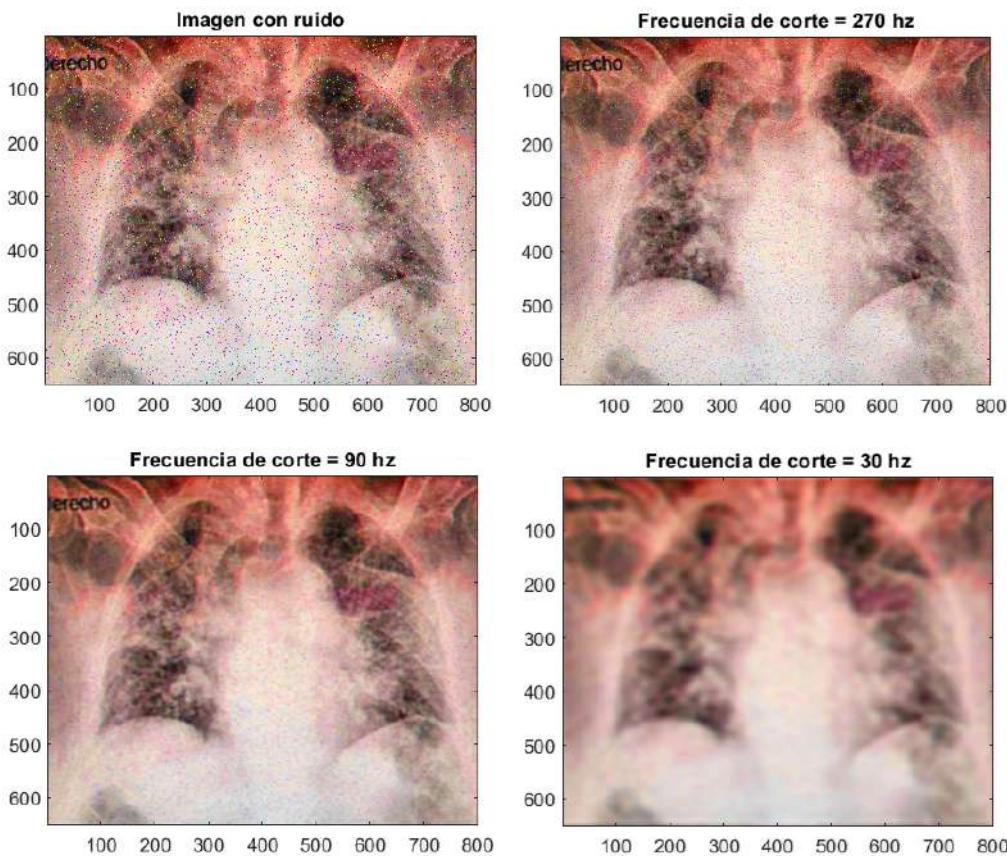


Figura CII: Elaboración propia: Aquí se muestra el efecto de aplicar el filtro Butterworth de paso bajo de orden tres sobre la radiografía de FPI de la figura C con ruido de “sal y pimienta” para las frecuencias de corte de 270 hz, 90 hz y 30 hz.

Se puede notar que, al aumentar el orden de este filtro, la nitidez de la imagen disminuye. En cuanto a la efectividad del filtro, es la misma que con el orden anterior.

4).4. Filtro gaussiano de paso bajo

Este filtro es tan eficaz como el filtro Butterworth al filtrar las manchas de la imagen; pero genera un efecto de enfoque, ya que suaviza más las zonas de baja frecuencia y menos las de alta frecuencia; es decir, algunas partes de la imagen aparecen más nítidas que otras; mientras que el filtro Butterworth realiza un filtrado más uniforme.

En la siguiente figura, se muestra el efecto que tiene el filtro gaussiano de paso bajo sobre la radiografía de FPI de la figura C para frecuencias de corte de 270 hz, 90 hz y 30 hz:

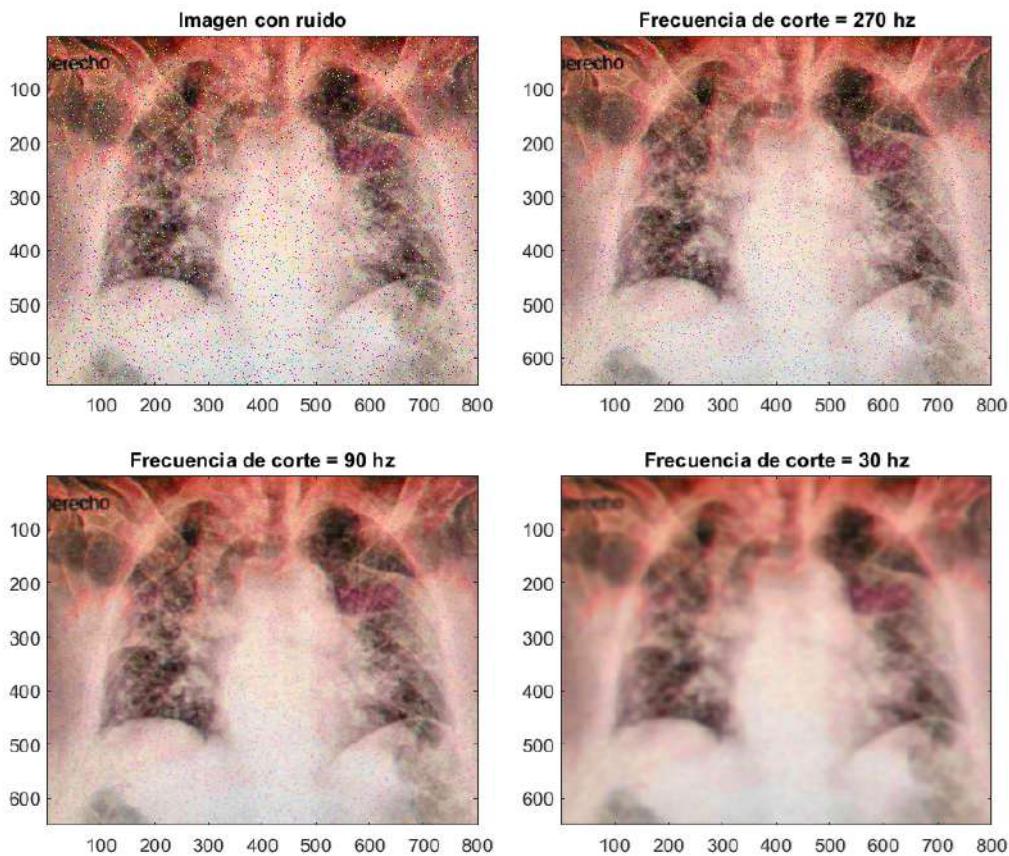


Figura CIII: Elaboración propia: Aquí se observa el efecto de aplicar el filtro gaussiano de paso bajo sobre la radiografía de FPI de la figura C. con ruido de “sal y pimienta” para frecuencias de corte de 270 hz, 90 hz y 30 hz.

- 5). **Filtrado de paso alto que quita objetos de la imagen que no son contornos, y resalta a aquellos donde existe brillo y textura; mediante la transformada rápida de Fourier**

5).1. **Filtro ideal de paso alto**

En la figura siguiente, se muestra el efecto que tiene el filtro ideal de paso alto sobre la radiografía de FPI de la figura C para valores de frecuencia de corte de 9.9 hz, 11.1 hz y 13.3 hz:

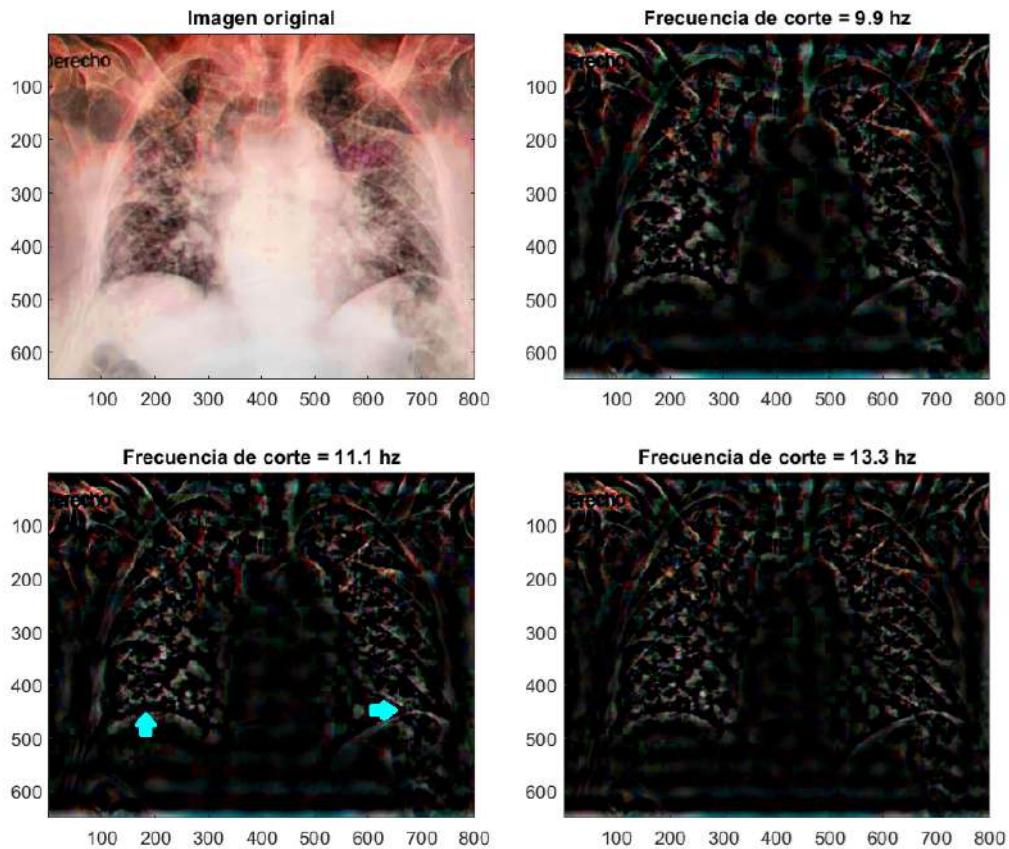


Figura CIV: Elaboración propia: Aquí se muestra el efecto de aplicar el filtro ideal de paso alto sobre la radiografía de FPI de la figura C para frecuencias de corte de 9.9hz, 11.1hz y 13.3hz. Las flechas de color cian señalan las zonas en las que se puede visualizar la fibrosis.

Como se puede ver, este filtro resalta las zonas de colores de mayor frecuencia de la radiografía y puede ayudar a identificar afecciones para tener un mejor diagnóstico.

5).2. Filtro Butterworth de paso alto de orden tres

Este filtro tiene una respuesta de frecuencia suave y se caracteriza por tener una atenuación gradual de las señales de baja frecuencia, en lugar de bloquearlas completamente. Por eso, oscurece la imagen con mayor suavidad.

En la figura siguiente, se muestra el efecto que tiene el filtro Butterworth de paso alto de orden tres sobre la radiografía de FPI de la figura C para valores de frecuencia de corte de 9.9hz, 11.1hz y 13.3hz:

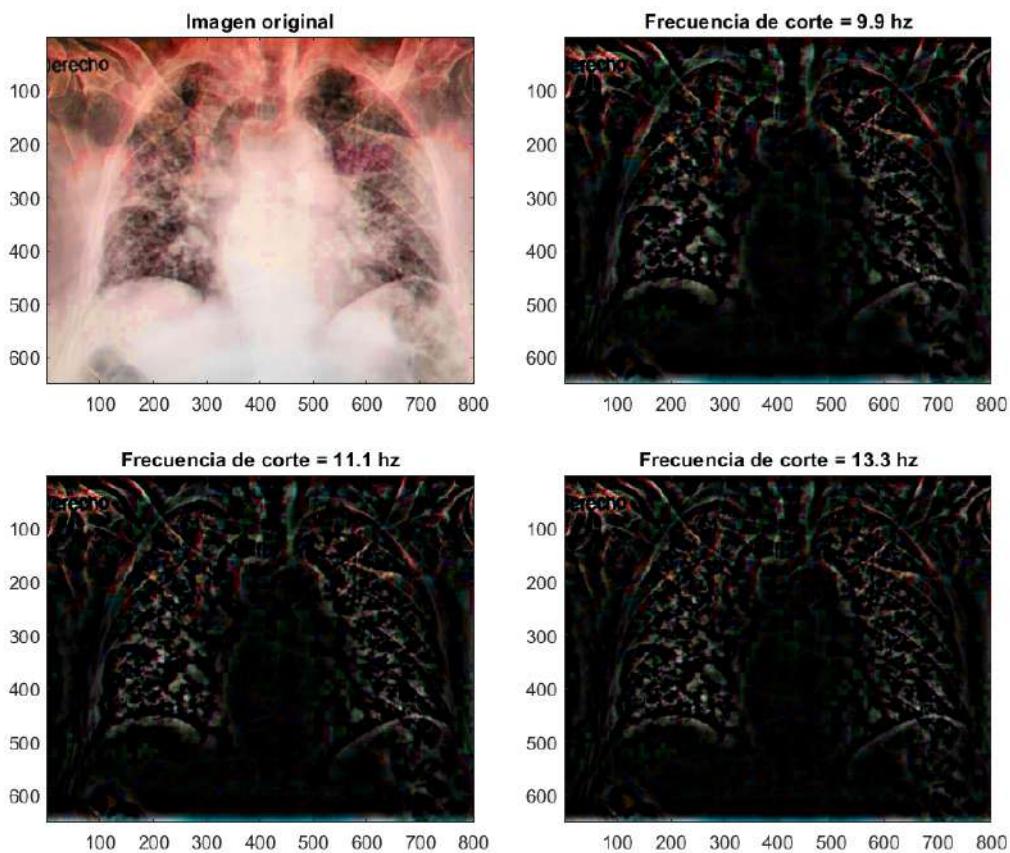


Figura CV: Elaboración propia: Aquí se puede observar el efecto de aplicar el filtro Butterworth de paso alto de orden tres sobre la radiografía de FPI de la figura C para frecuencias de corte de 9.9 hz, 11.1 hz y 13.3 hz.

5).3. Filtro gaussiano de paso alto

Este filtro atenúa las señales de baja frecuencia con mayor suavidad que el filtro Butterworth de paso alto. Sin embargo, este filtro no es adecuado para detectar una fibrosis pulmonar, debido a que solamente resalta las zonas más luminosas y no los pequeños detalles que grafican la fibrosis.

A continuación, se muestra el efecto que tiene el filtro gaussiano de paso alto sobre una radiografía de FPI para valores de frecuencia de corte de 9.9 hz, 11.1 hz y 13.3 hz:

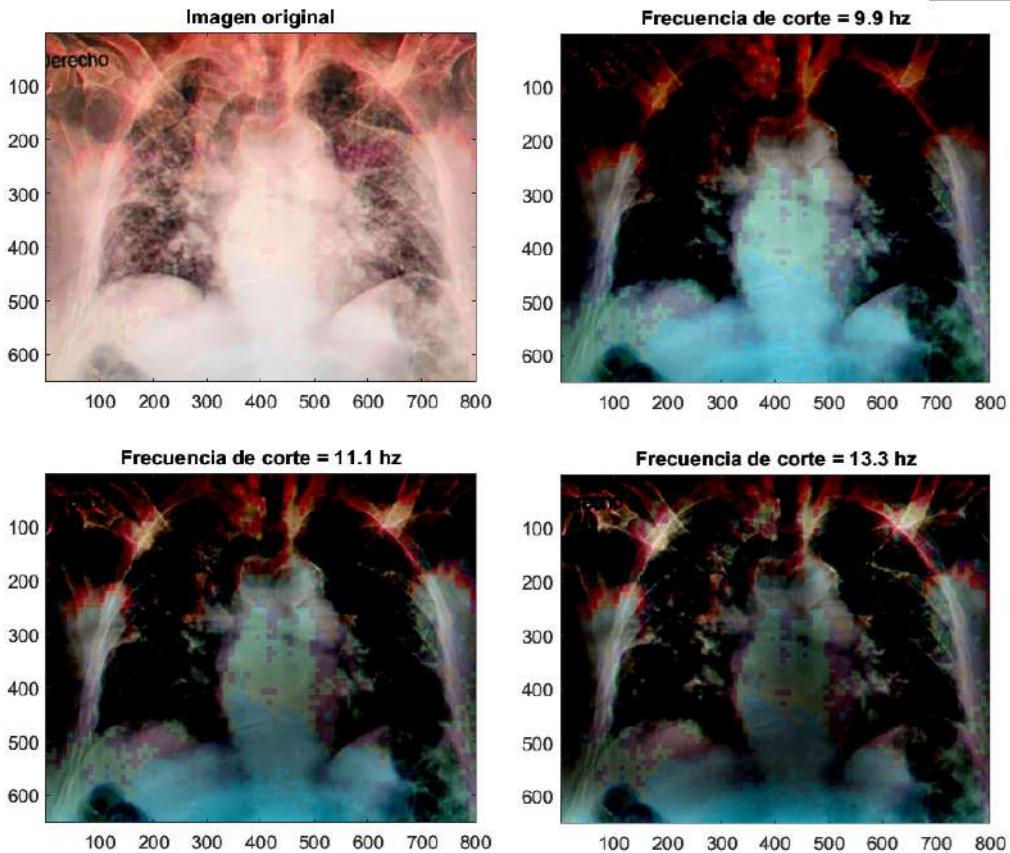


Figura CVI: Elaboración propia: Aquí se muestra el efecto de aplicar el filtro gaussiano de paso alto sobre una radiografía de FPI para frecuencias de corte de 9.9 hz, 11.1 hz y 13.3 hz.

6). Filtrado de los bordes en alto relieve y suavizado de la imagen, mediante las EDP de difusión anisotrópica

En la figura CVII, se muestra una radiografía de FPI con el defecto de cristalización; y en la figura CVIII, se muestra la radiografía corregida con este método. Al comparar las figuras, se puede notar que los contornos de los objetos de la imagen se ven más naturales luego de aplicarle el filtro.

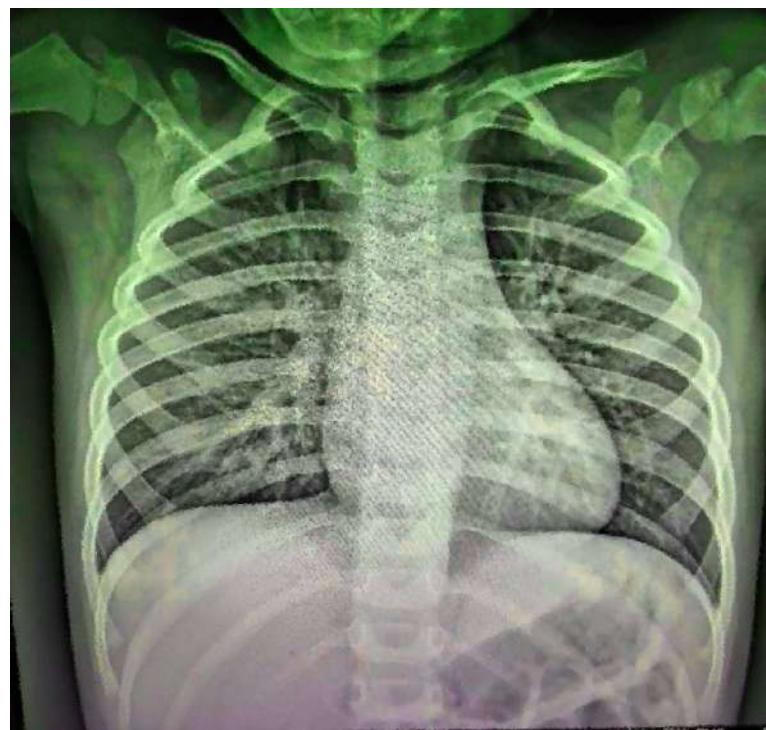


Figura CVII: Imagen original: Aquí se muestra una radiografía de FPI con defecto de cristalización obtenida mediante la colaboración de un hospital nacional.



Figura CVIII: Elaboración propia: Aquí se muestra la radiografía de FPI de la figura anterior suavizada mediante el método de difusión anisotrópica.

E. Resultados de las técnicas de detección de la FPI y su resaltamiento virtual

1). Detección de la escala de grises en la imagen y su binarización en “0” (negro) y “1” (blanco) mediante la técnica de “skeleton”

En la figura siguiente, se muestra el efecto del filtro “skeleton” sobre una tomografía computarizada de FPI:

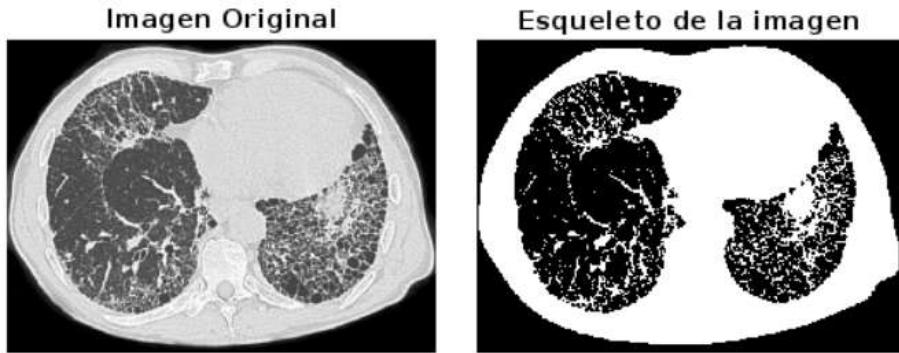


Figura CIX: Elaboración propia: Aquí se puede observar el efecto de aplicar el filtro “skeleton” sobre una tomografía computarizada de FPI [88].

Como se puede visualizar, este filtro ayuda a mejorar el contraste entre el tejido cicatricial causado por la fibrosis y los bronquios; lo que permite a los médicos ver mejor las estructuras internas y detectar cualquier anomalía como fracturas o tumores. Este filtro es útil solamente en imágenes de alto contraste; ya que de lo contrario, al binarizar la imagen, muchas de las fibras se tornarán de color negro.

2). Detección de indicadores de la FPI (en color rojo) y el resaltamiento de sus detalles mediante la DWT2

En la figura CX, se muestra una imagen de una tomografía computarizada (TC) de FPI; en la cual, figuran pequeñas áreas de color rojo. Estas áreas indican la presencia de colágeno y tejido conectivo engrosado, que son características de la fibrosis. En algunos casos, esto no llega a notarse en la superficie, por lo que se requiere de una técnica de realce que haga visible el tejido conectivo engrosado. En las figuras CXI, CXII, CXIII, CXIV y CXV se muestra la imagen resultante de aplicar la técnica de DWT2 a la TC de la figura CX utilizando las wavelets de Haar, Daubechies-4, Coiflets-2, Symlets-6 y Meyer respectivamente. Se puede visualizar que los contornos de los objetos de la imagen se vuelven más notorios en todos los casos pero la imagen se ve más nítida aplicando el método con la wavelet de Daubechies-4 seguida por la wavelet de Symlets-6 y se ve más borrosa al realizar el método con la wavelet de Haar. La wavelet de Haar suele ser más útil para imágenes o señales con cambios abruptos debido a la forma simple en que está definida. Por otro lado, las wavelets de Daubechies son más útiles para señales o imágenes suaves y poco regulares como esta; por lo que se puede ver en las zonas de la imagen donde el color blanco cambia ligeramente al rosa y es posible detectar que puede existir fibrosis en dichas zonas, que la resolución es mejor al aplicar la wavelet de Daubechies-4. Mientras que las wavelets de Coiflets y Symlets también son buenas para señales suaves, y proporcionan una resolución más detallada en imágenes de mayor regularidad.

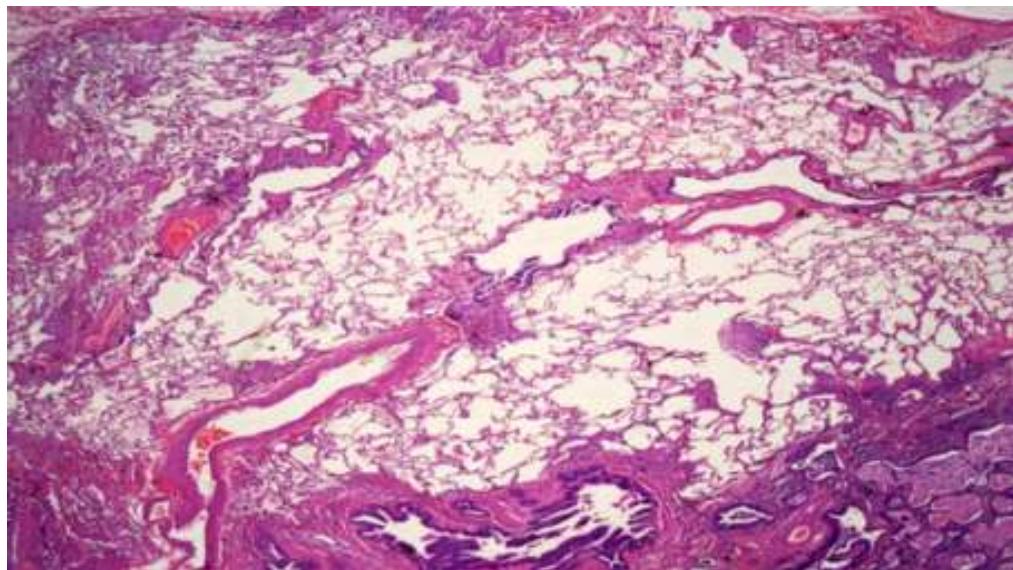


Figura CX: Imagen original: Aquí se muestra una tomografía computarizada de un paciente con FPI [87].

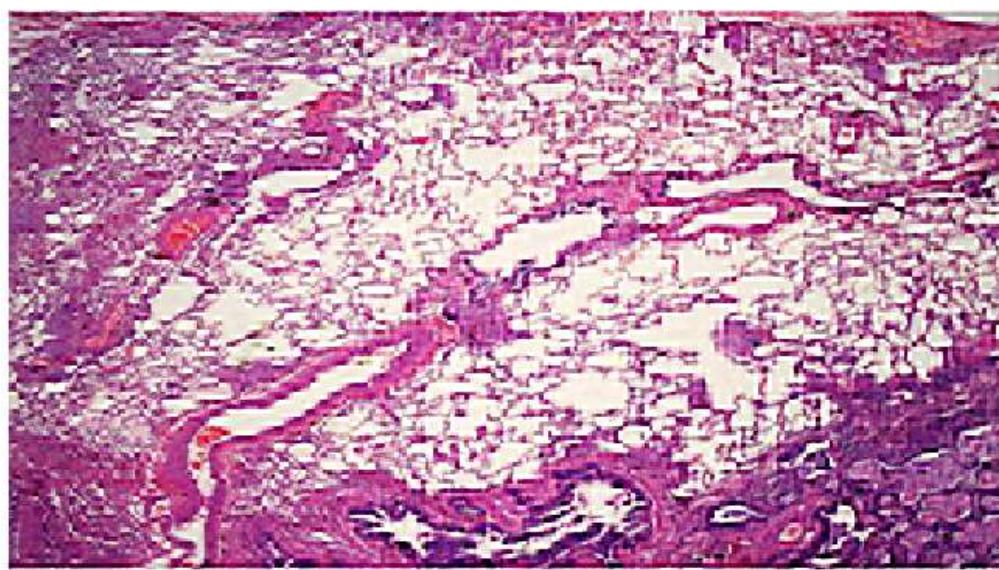


Figura CXI: Elaboración propia: Aquí se puede ver el realce de las estructuras de la fibrosis en la tomografía computarizada (TC) de la figura anterior con la técnica de wavelet de Haar discreta.

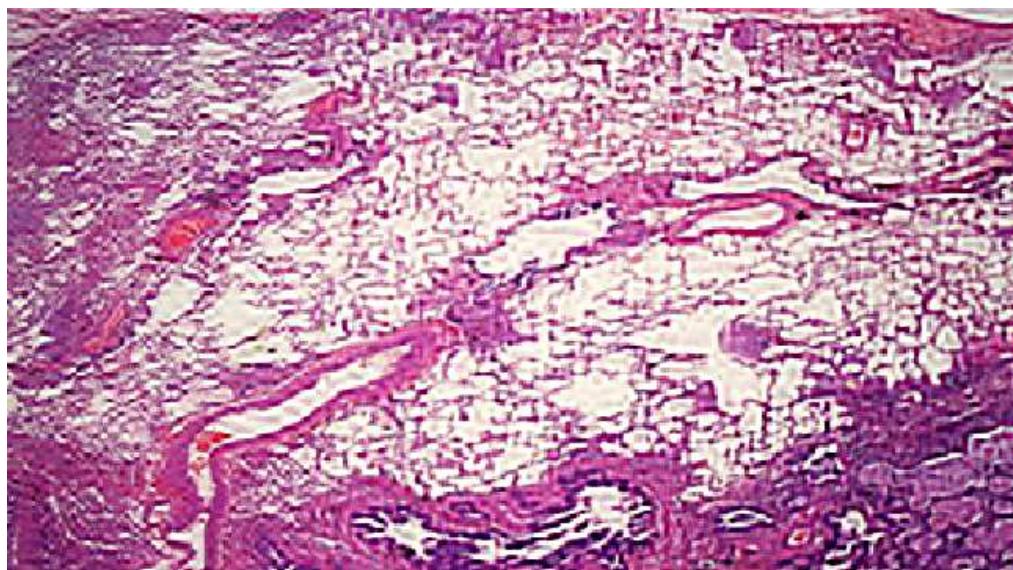


Figura CXII: Elaboración propia: Aquí se muestra el realce de las estructuras de la fibrosis en la TC de la figura CX con la técnica de wavelet de Daubechies-4 discreta.

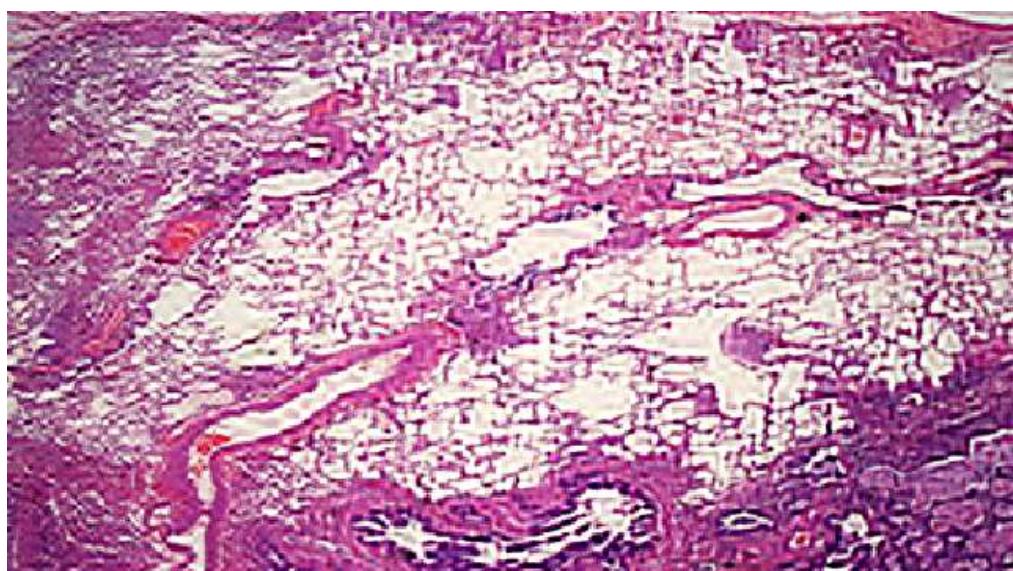


Figura CXIII: Elaboración propia: Aquí se puede ver el realce de las estructuras de la fibrosis en la TC de la figura CX con la técnica de wavelet de Coiflets-2 discreta.

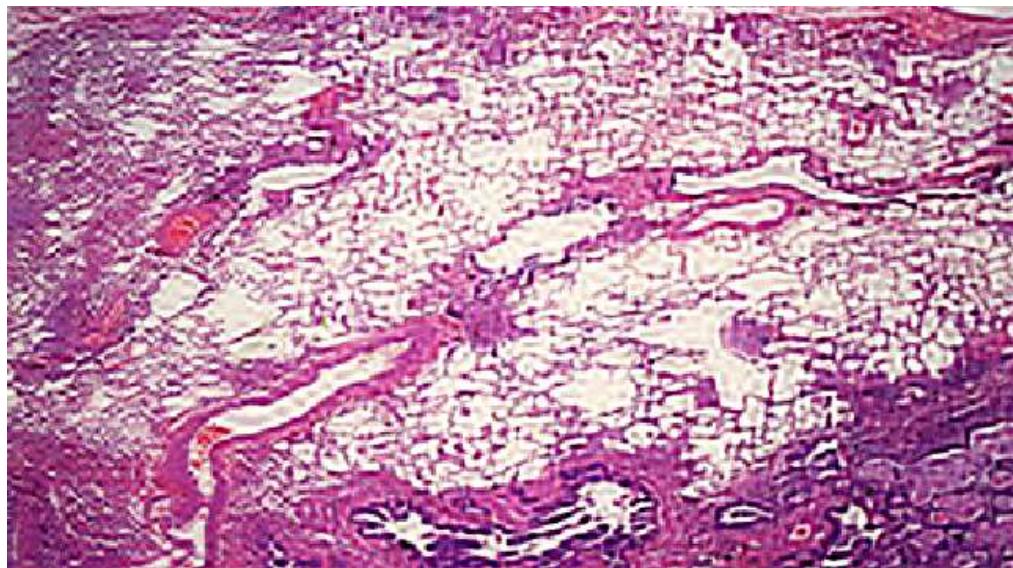


Figura CXIV: Elaboración propia: Aquí se puede observar el realce de las estructuras de la fibrosis en la TC de la figura CX con la técnica de wavelet de Symlets-6 discreta.

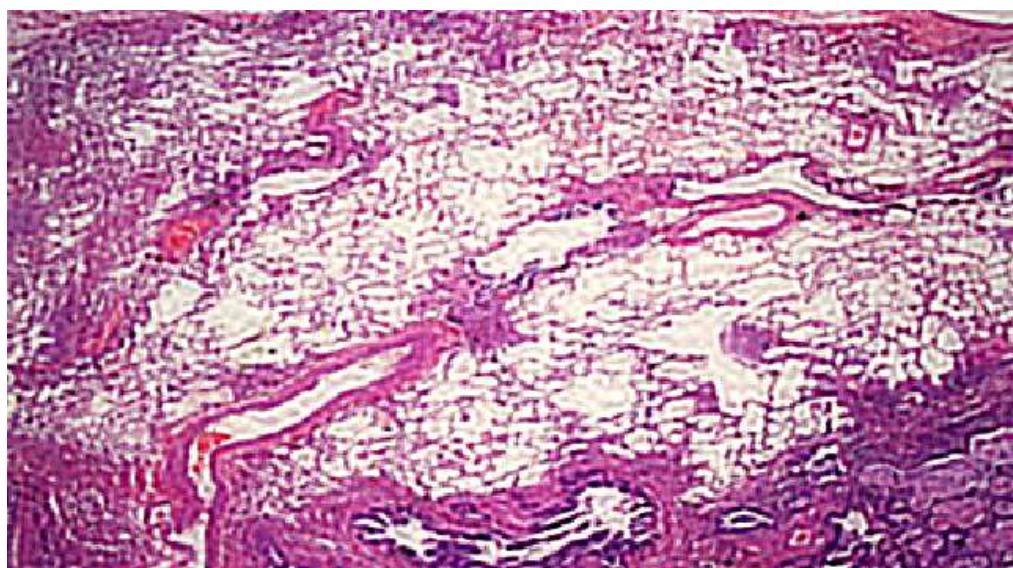


Figura CXV: Elaboración propia: Aquí se muestra el realce de las estructuras de la TC de la figura CX con la técnica de wavelet de Meyer discreta.

3). Detección de algunos indicadores que caracterizan a la FPI mediante la técnica de segmentación, la cual está basada en las funciones de wavelet

En las figuras CXVII, CXVIII, CXIX, CXX y CXXI, y CXXII, se muestra la segmentación de la imagen de la radiografía de FPI, la cual se puede ver en la figura CXVI, usando las wavelets de Haar, Daubechies-4, Coiflets-2, Symlets-6 y Meyer respectivamente. En cada una de estas figuras, en la esquina superior izquierda se muestra la imagen formada únicamente por los coeficientes de aproximación obtenidos al aplicar la transformada de wavelet discreta a la imagen de la radiografía de FPI. Mientras que en la esquina superior derecha, y en las esquinas inferiores izquierda y derecha, se muestra la imagen generada únicamente por los coeficientes de detalle obtenidos al aplicar la transformada de wavelet discreta a

la imagen de la figura CXVI.

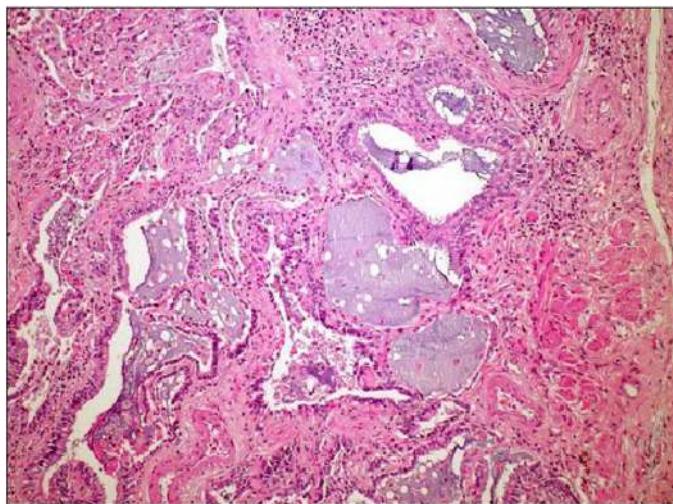


Figura CXVI: Imagen original: Aquí se muestra una TC de un paciente con FPI [89].

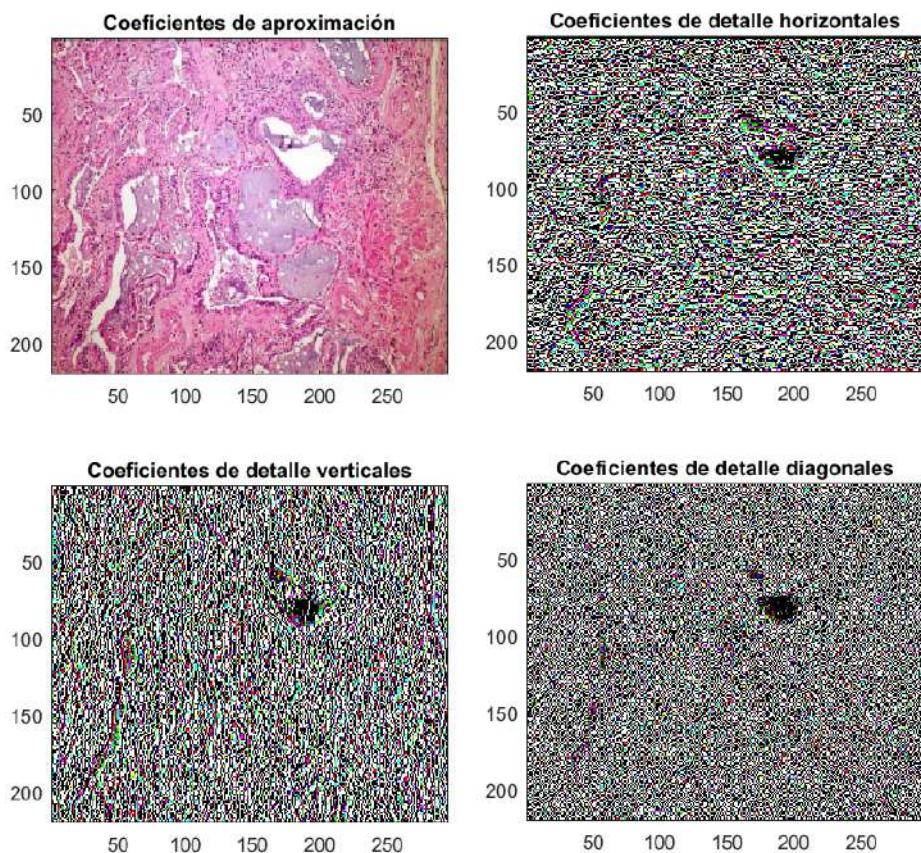


Figura CXVII: Elaboración propia: Aquí se muestra la TC de la figura CXVI segmentada en coeficientes de aproximación y de detalle con la wavelet de Haar.

En esta figura se puede notar que la imagen formada por los coeficientes de aproximación es prácticamente la misma, mientras que las imágenes generadas por los coeficientes de detalle muestran zonas opacas en los lugares donde la imagen original tiene un color más

claro y más uniforme. Incluso, en la imagen formada por los coeficientes de detalle diagonales, las zonas opacas aumentan muy ligeramente en lugares de la imagen que tiene un color un poco más claro y uniforme. Mientras más veces se manifieste una zona opaca o brillante en la misma ubicación en las imágenes que muestran los coeficientes de detalle, mayor es la probabilidad de hallar fibrosis en dicha zona. Esto se debe a que las áreas fibrosas en los pulmones tienden a presentar variaciones abruptas en la textura del tejido, las cuales son capturadas de manera efectiva por los coeficientes de detalle horizontales, verticales y diagonales. La persistencia de estas zonas opacas o brillantes a través de diferentes direcciones de detalle indica una anomalía consistente en la estructura del tejido, lo que sugiere la presencia de fibrosis. Por lo tanto, identificar y analizar estas áreas puede proporcionar una herramienta valiosa para el diagnóstico y monitoreo de la Fibrosis Pulmonar Idiopática.

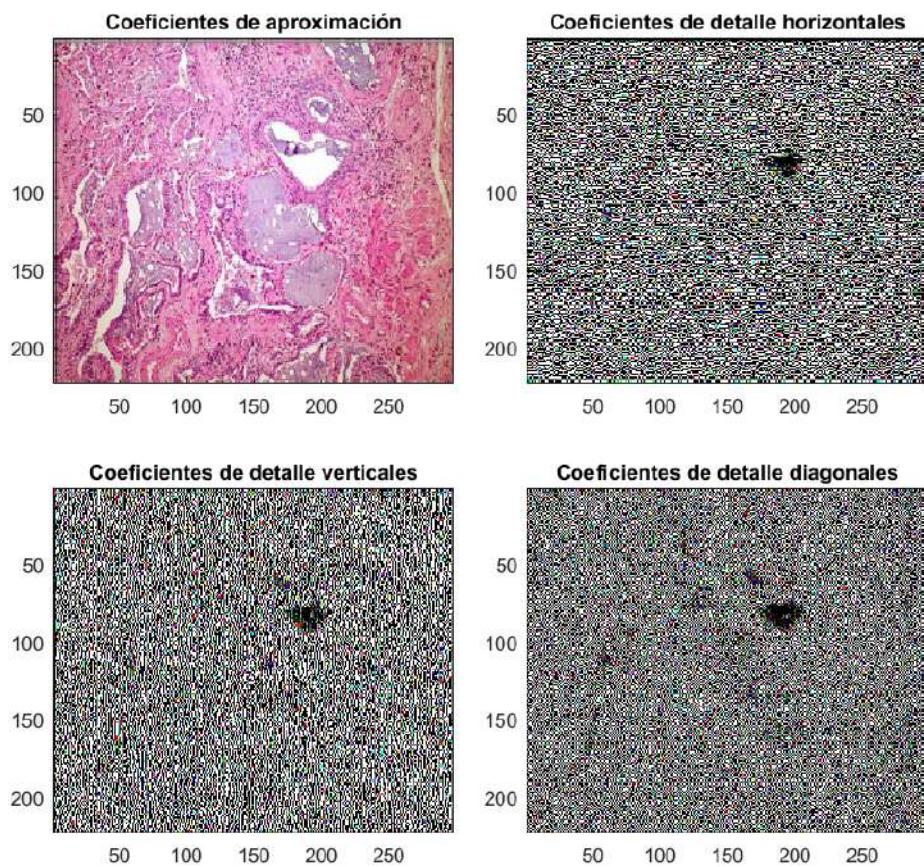


Figura CXVIII: Elaboración propia: Aquí se muestra la TC de FPI de la figura CXVI segmentada en coeficientes de aproximación y de detalle con la wavelet de Daubechies-4.

En esta figura se observa casi los mismos detalles que en la figura CXVII. La principal diferencia entre esta figura con la anterior es que las zonas opacas son más concentradas, es decir, tienen menos pixeles no opacos inmiscuidos en ellas debido a que la wavelet de Daubechies es más suave, por lo que emborrona menos la imagen que la wavelet de Haar.

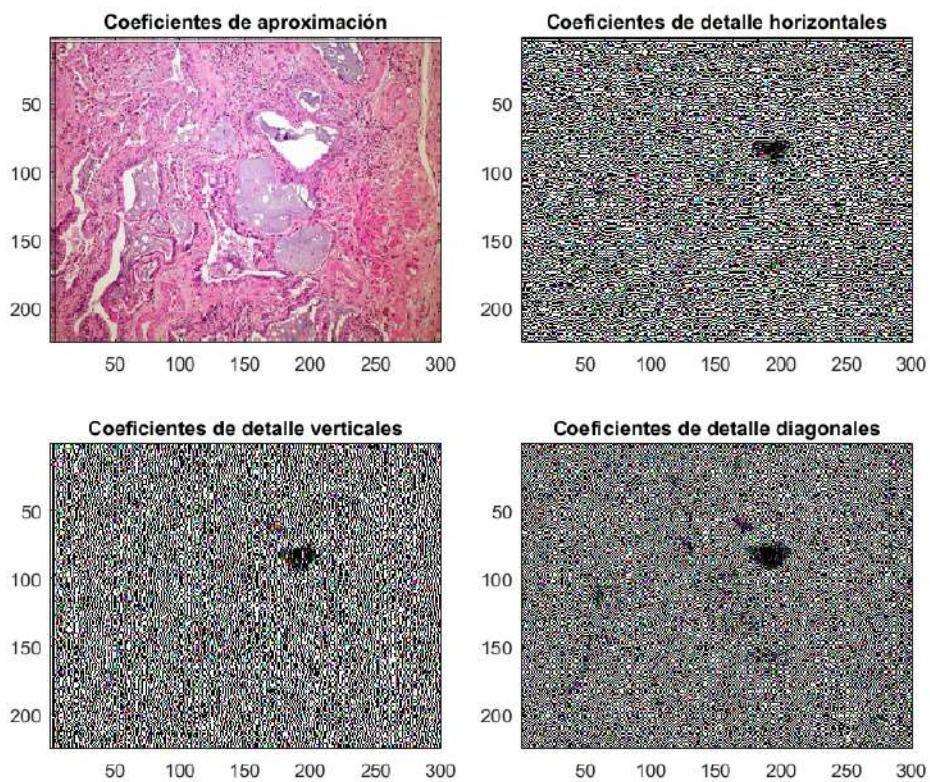


Figura CXIX: Elaboración propia: Aquí se puede observar la TC de la figura CXVI segmentada en coeficientes de aproximación y de detalle con la wavelet de Coiflets-2.

En esta figura, se puede visualizar prácticamente los mismos detalles que en la figura anterior, solamente que la forma de las zonas opacas cambia muy ligeramente; y que en la imagen producida por los coeficientes de detalle verticales, la zona opaca presenta unos cuantos pixeles más claros debido a la forma en que está definida.

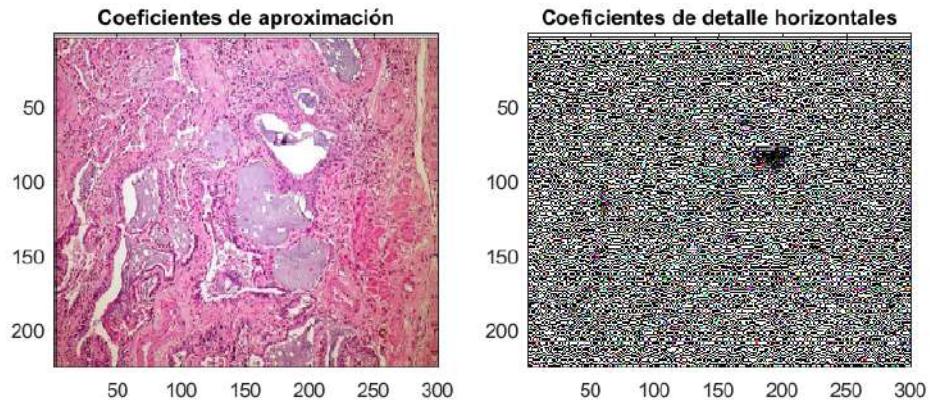


Figura CXX: Elaboración propia: Aquí se puede observar la TC de la figura CXVI segmentada en coeficientes de aproximación y de detalle con la wavelet de Symlets-6.

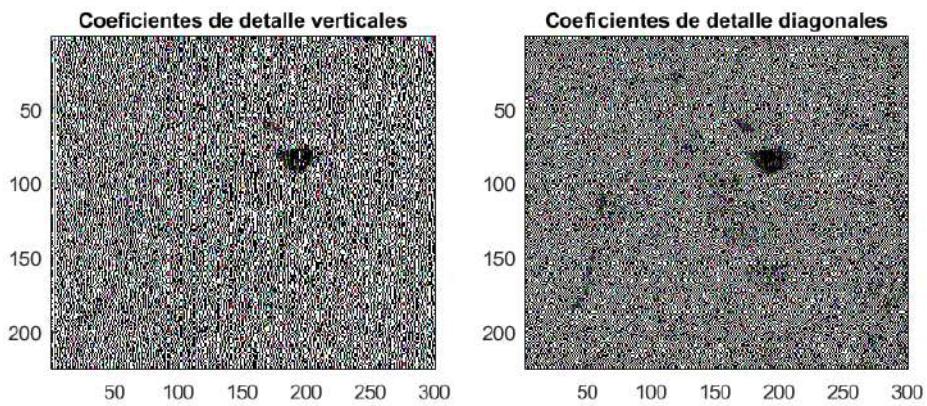


Figura CXXI: Elaboración propia: Aquí se puede observar la TC de la figura CXVI segmentada en coeficientes de detalle con la wavelet de Symlets-6.

En la figura CXX y la figura CXXI, se pueden visualizar prácticamente los mismos detalles que en la figura CXVII. Los únicos cambios que se observan es en la forma de las zonas opacas, lo cual tiene sentido debido a que las wavelets están definidas de diferente manera.

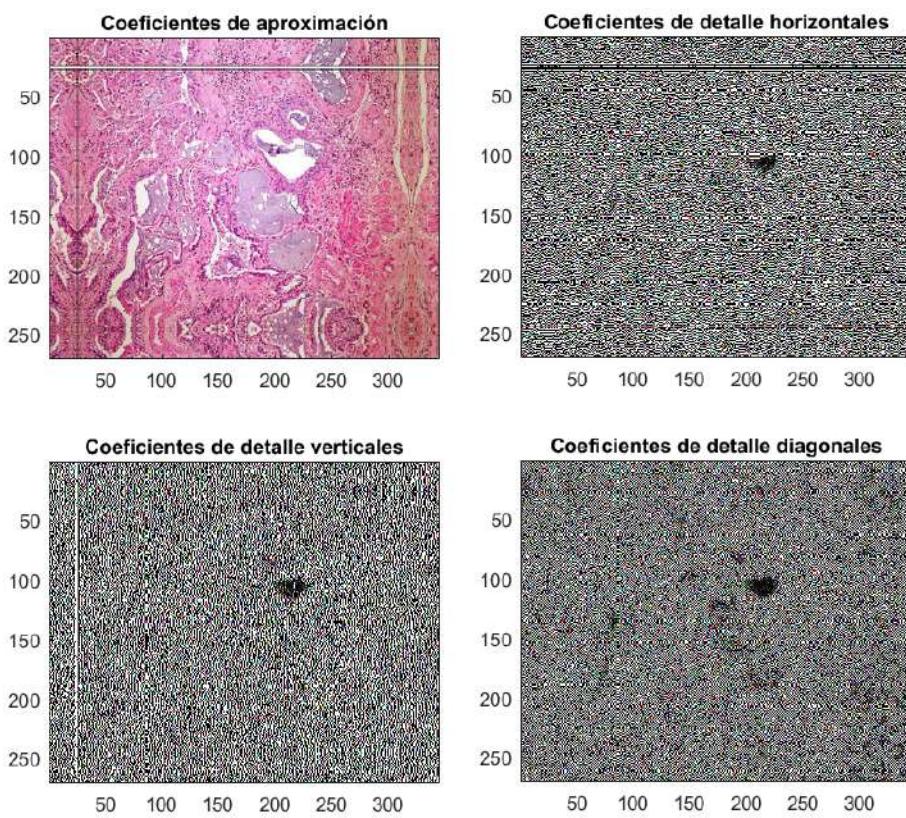


Figura CXXII: Elaboración propia: Aquí se puede observar la TC de la figura CXVI segmentada en coeficientes de aproximación y de detalle con la wavelet de Meyer.

En esta figura, se puede visualizar casi los mismos detalles que en la figura CXVII. Solamente se observan cambios en la forma de las zonas opacas y que se generan patrones en la imagen. La capacidad de la wavelet de Meyer para capturar estos patrones se debe

a su capacidad para preservar la información de localización mientras se realizan estas descomposiciones en el dominio de la frecuencia. Esto permite que las características de la imagen se conserven y se destaquen en los coeficientes de detalle, produciendo los patrones que se ven en las imágenes generadas.

Y en las figuras CXXIII, CXXIV, CXXV, CXXVI y CXXVII, se muestran la imagen de la radiografía de FPI reconstruida con este algoritmo usando las wavelets de Haar, Daubechies-4, Coiflets-2, Symlets-6 y Meyer respectivamente. Se aprecia que la resolución prácticamente se mantiene en todos los casos, pero esta disminución es mayor al usar la wavelet de Haar. Por lo tanto, esta técnica también puede ser útil para guardar o transferir las imágenes en un formato en el que tengan menor peso.

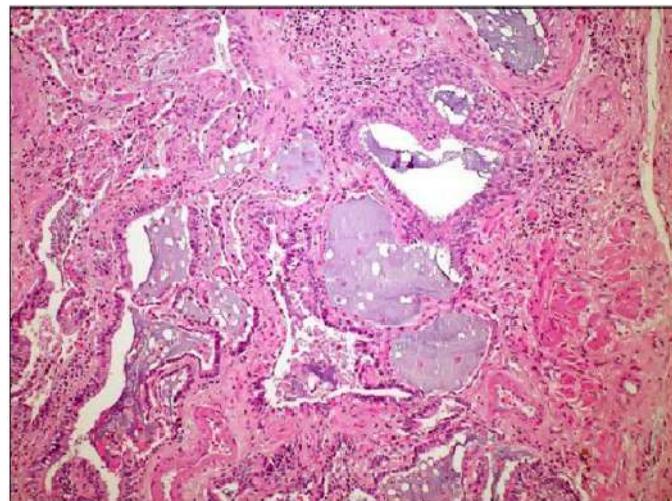


Figura CXXIII: Elaboración propia: Aquí se observa la TC de la figura CXVI reconstruida con la wavelet de Haar luego de ser segmentada.

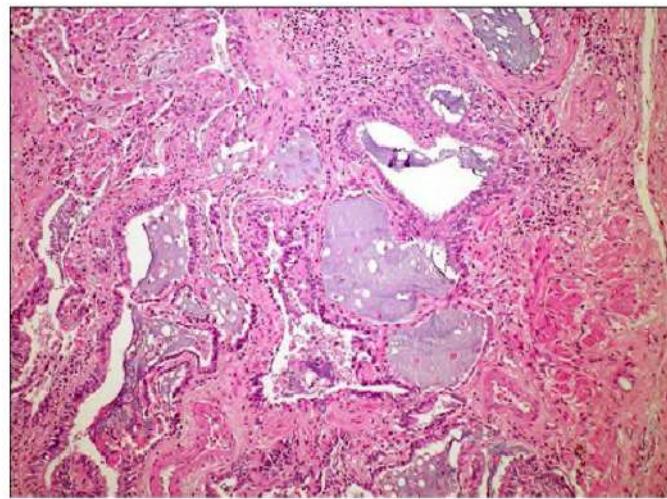


Figura CXXIV: Elaboración propia: Aquí se puede ver la TC de la figura CXVI reconstruida con la wavelet de Daubechies-4 luego de ser segmentada.

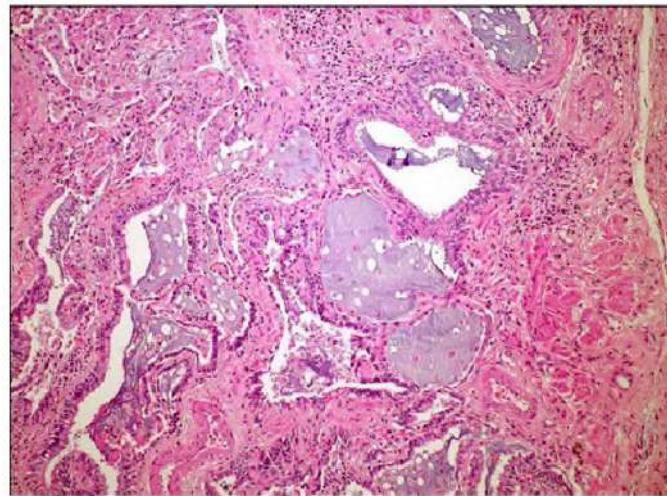


Figura CXXV: Elaboración propia: Aquí se muestra la TC de la figura CXVI reconstruida con la wavelet de Coiflets-2 luego de ser segmentada.

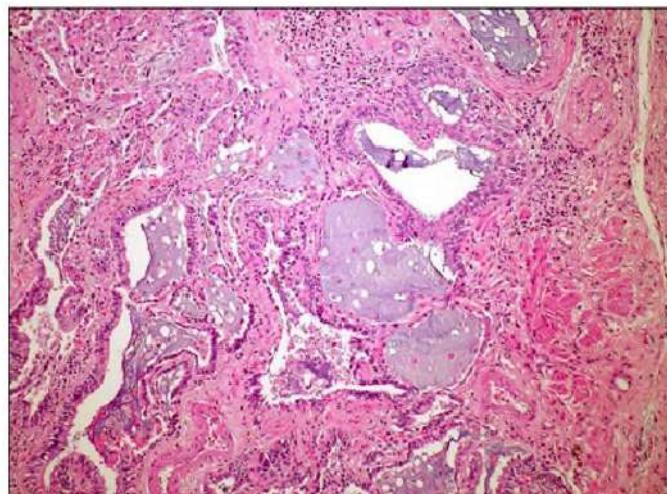


Figura CXXVI: Elaboración propia: Aquí se puede observar la TC de la figura CXVI reconstruida con la wavelet de Symlets-6 luego de ser segmentada.

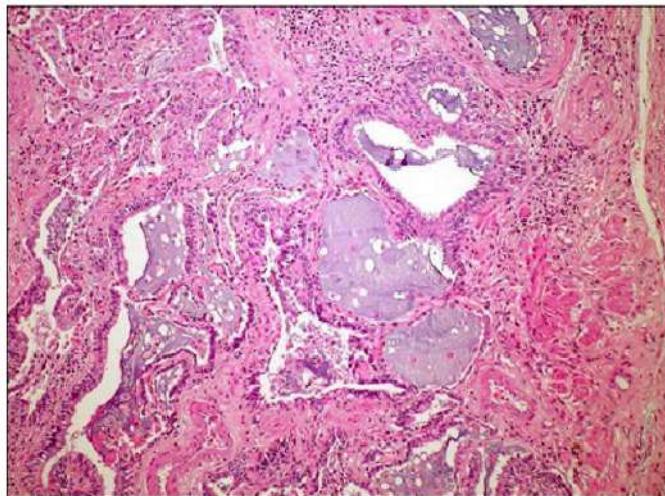


Figura CXXVII: Elaboración propia: Aquí se ve la TC de la figura CXVI reconstruida con la wavelet de Meyer luego de ser segmentada.

4). Detección de la FPI mediante la técnica wavelet de resaltamiento de bordes

En las figuras CXXVIII, CXXIX, CXXX, CXXXI y CXXXII se muestran los bordes entre los diversos objetos de la imagen de la radiografía de FPI que se muestra en la figura CXVI. Al aplicar esta técnica, las zonas con un exceso de bordes aparecerán muy brillantes, mientras que las áreas con tejido conectivo engrosado se mostrarán opacas. Por lo tanto, en la imagen resultante, la presencia de áreas significativamente brillantes u opacas puede indicar la posibilidad de fibrosis.

Se puede notar que, en la figura CXXVIII, al usar la wavelet de Haar, los bordes son más luminosos. Esto se debe a que esta wavelet es una función más abrupta, lo que provoca que los valores de los coeficientes de detalle sean mayores en las regiones de pixeles con cambios de color. Incluso, algunos pixeles se muestran de color verde resplandeciente debido a que el factor de conversión 3/255 genera un cambio significativo en una wavelet definida por una función abrupta, en una imagen predominantemente magenta donde la componente verde (G) del modelo RGB tiene valores muy bajos.

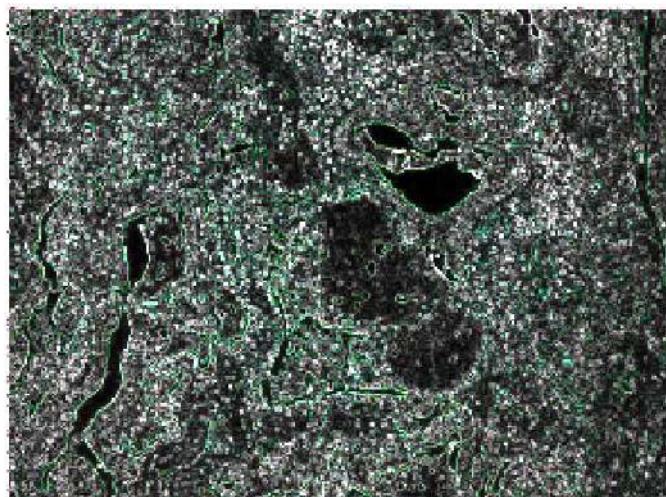


Figura CXXVIII: Elaboración propia: Aquí se puede ver los bordes detectados mediante la wavelet de Haar de la TC de la figura CXVI.

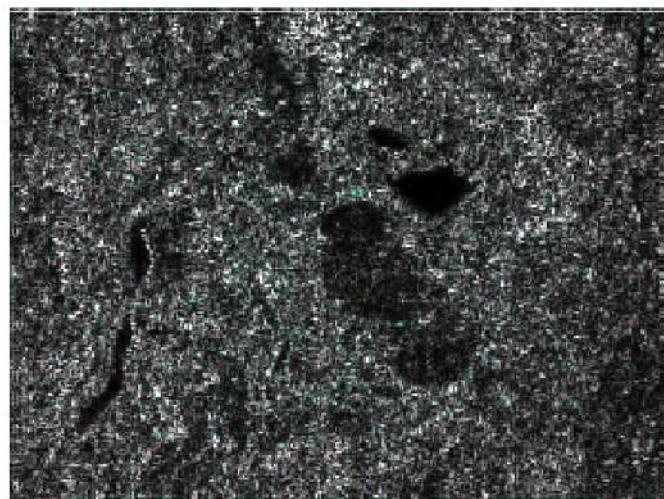


Figura CXXIX: Elaboración propia: Aquí se puede ver los bordes detectados de la FPI mediante la wavelet de Daubechies-4 de la TC de la figura CXVI.

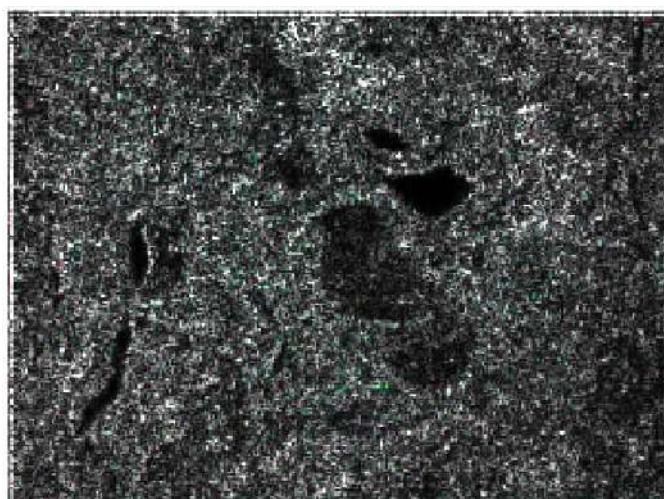


Figura CXXX: Elaboración propia: Aquí se observa los bordes detectados de la FPI mediante la wavelet de Coiflets-2 de la TC de la figura CXVI.

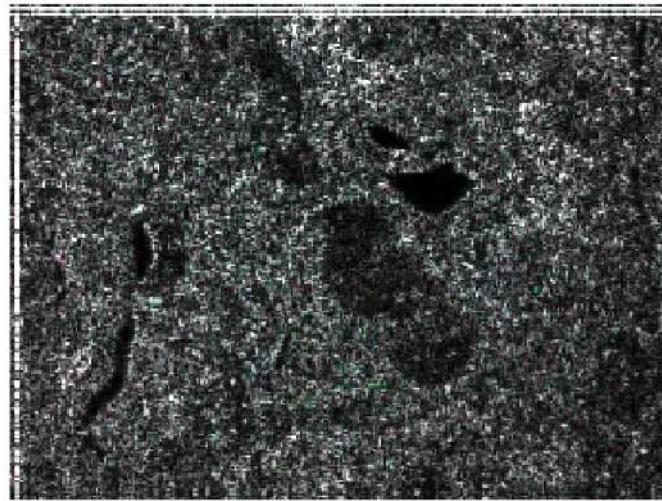


Figura CXXXI: Elaboración propia: Aquí se muestra los bordes detectados de la FPI mediante la wavelet de Symlets-6 de la TC de la figura CXVI.

En la figura CXXXII, así como en la imagen constituida por los coeficientes de aproximación de la figura CXXII, cuando se usa la wavelet de Meyer, se puede notar con facilidad que se agregan pixeles a la imagen como un espejo de los bordes izquierdo y superior debido a que esta wavelet emplea una técnica de extensión de señal para evitar problemas que ocurren en los bordes de la señal durante la transformada de wavelet. Esta técnica se utiliza para crear una señal continua que se puede descomponer de manera segura en una serie de componentes de frecuencia más baja y más alta utilizando la transformada de wavelet.

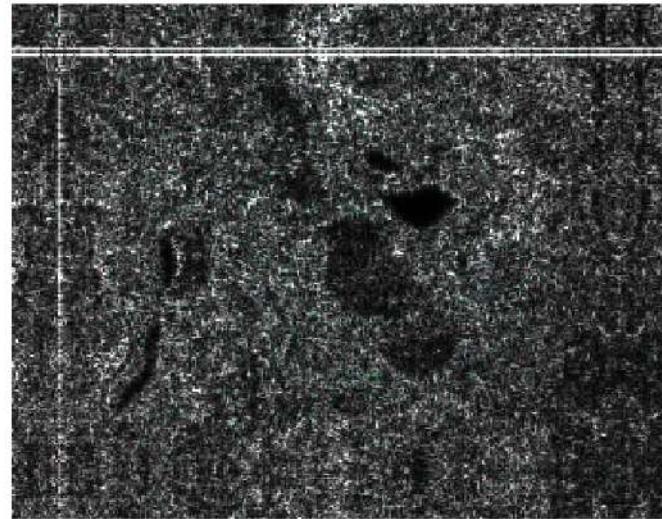


Figura CXXXII: Elaboración propia: Aquí se ven los bordes detectados de la FPI, mediante la wavelet de Meyer de la TC de la figura CXVI.

5). Detección y resaltamiento de la FPI (en forma de “panal de abejas”) mediante el modelo de la difusión anisotrópica

En la figura CXXXIII, se muestra una radiografía de un paciente con FPI:



Figura CXXXIII: Imagen original: Aquí se muestra una radiografía de un paciente con FPI obtenida mediante la colaboración de un hospital nacional, donde no se visualiza claramente la zona afectada por la FPI.

En la figura CXXXIV, se muestra el resultado de aplicar esta técnica realizando 250 iteraciones con paso de tiempo $\Delta t = 0,0015$ y parámetro $\kappa = 20$:



Figura CXXXIV: Elaboración propia: Aquí se puede visualizar la radiografía procesada con el método de la difusión anisotrópica con paso de tiempo $\Delta t = 0,0015$ y parámetro $\kappa = 20$, donde las zonas afectadas por la FPI, las cuales están indicadas con flechas rojas, se pueden ver en forma de “panal de abejas”.

Como se puede observar al comparar la figura CXXXIII y la figura CXXXIV, la estructura de “panal de abejas” que se forma en los pulmones cuando existe fibrosis pulmonar es mucho más notoria en la imagen procesada. Esto se debe a que se han seleccionado los coeficientes adecuados generados por funciones exponenciales de exponente negativo, los cuales penalizan los gradientes grandes y favorecen la difusión en regiones homogéneas, preservando detalles en los bordes. Además, se han realizado 250 iteraciones con un paso de tiempo muy pequeño para que la ecuación de difusión tenga un efecto significativo y, a pesar de ser discreta, presente un comportamiento muy similar a una continua.

Conclusiones

- Se logró corregir la angulación de una radiografía de fibrosis en los pulmones, como se muestra al comparar la figura LXXIV con la figura LXXV.
- Se logra corregir el efecto generado por la mala ubicación de la cámara al obtener una radiografía de FPI, como se muestra al comparar la figura LXXVI con la figura LXXVIII.
- Se logró corregir el encuadre de una radiografía de FPI, como se muestra en la figura LXXIX.
- Se consiguió obtener imágenes más nítidas de radiografías pulmonares al corregir su luminosidad, como se muestra en la figura LXXX y la figura LXXXI.
- Se consiguió amplificar una radiografía de FPI mediante la técnica *RGB*, interpolación bilineal e interpolación bicúbica, como se puede observar al comparar la figura LXXXII con las figuras LXXXIII, LXXXIV y LXXXV respectivamente.
- Se consiguió crear algoritmos basados en la transformada rápida de Fourier para corregir errores en imágenes digitales.
- Se logró amplificar una radiografía de FPI usando el método de la transformada discreta de Fourier bidimensional, como se puede notar al comparar la figura LXXXII y la figura LXXXVI.
- Se logró comprimir una radiografía de FPI mediante la transformada discreta coseno (TDC), como se puede observar al comparar la figura LXXXVII y la figura LXXXVIII.
- Se consiguió comprimir una tomografía computarizada (TC) de FPI y resaltar las estructuras y objetos de la TC con poca pérdida de resolución, como se puede ver al comparar la figura LXXXIX con las figuras XCIII y XCIV, y con prácticamente nula o muy poca pérdida de resolución, como se puede observar al compararla con las figuras XCI y XCII respectivamente. En la figura XC, la pérdida de resolución es alta.
- Se ha conseguido reducir el ruido de “sal y pimienta” en una radiografía de FPI mediante el uso del filtro lineal de la media estadística, como se puede observar al comparar las imágenes de las figuras XCV y XCVI.
- El ruido de “sal y pimienta” también se ha reducido con eficacia mediante el filtro de la mediana, como se muestra en la figura XCVII.
- El ruido gaussiano ha sido eficazmente reducido utilizando el filtro lineal gaussiano, lo cual se nota al comparar las imágenes de las figuras XCVIII y XCIX.
- El uso de filtros de paso bajo ha demostrado ser bastante eficaz en la reducción del ruido de “sal y pimienta”, como se puede apreciar en las figuras C, CI, CII y CIII.
- Se consigue resaltar aquellas partes de una radiografía de FPI cuyos pixeles emiten ondas de mayor frecuencia, mediante los filtros de paso alto, como se muestra en las figuras CIV, CV y CVI.
- Se logró suavizar una radiografía de FPI con defecto de cristalización mediante las EDP de difusión anisotrópica, como se puede ver al comparar la figura CVII y la figura CVIII.

- Se logra resaltar las estructuras internas del tejido pulmonar mediante el filtro “skeleton”, como se muestra en la figura CIX.
- Se consiguió crear algoritmos basados en la transformada de wavelet discreta para corregir errores en imágenes digitales.
- Se logró resaltar los detalles de una TC de FPI, como se puede notar al comparar la figura CX con las figuras CXI, CXII, CXIII, CXIV y CXV.
- Se consiguió segmentar la imagen de una TC de FPI para identificar zonas importantes donde se muestra la concentración de virus, bacterias u hongos causantes de la FPI; esto se observa al comparar la figura CXVI con las figuras CXVII, CXVIII, CXIX, CX, CXI y CXII; y luego, se reconstruye la imagen total con menor peso (cantidad de bytes) y con una buena resolución, como se puede ver al compararla con las figuras CXIII, CXIV, CXV, CXVI y CXVII.
- Con la técnica de detección de bordes basada en los diferentes tipos de wavelets estudiados, se logró resaltar las estructuras internas del tejido pulmonar de una TC de FPI, objetivo importante para la detección de la FPI, como se puede notar en las figuras CXVIII, CXIX, CX, CXI, CXII y CXIII.
- Se consiguió incrementar significativamente la nitidez de la estructura de “panal de abejas” de una radiografía de FPI al aplicar el método de detección de bordes mediante difusión anisotrópica, como se puede observar al comparar la figura CXIII con la figura CXIV.
- Se consiguió crear imágenes digitales mediante la aplicación de algoritmos en MATLAB sobre radiografías de FPI para poder realizar un mejor diagnóstico.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] Undurraga, P. Á. (2015). Fibrosis pulmonar idiopática. Revista Médica Clínica Las Condes, 26(3), 292-301. <https://doi.org/10.1016/j.rmclc.2015.06.006>
- [2] Torres-González JV, Botero JD, Celis-Preciado CA, Fernández MJ, Villaquirán C, García OM, Solarte I, Hidalgo-Martínez P, Bermúdez Gómez M. Fibrosis pulmonar en infección por SARS-CoV-2: ¿qué sabemos hasta hora? ¿Qué podemos esperar? Univ. Med. 2020;61(4). DOI: 10.11144/Javeriana.umed61-4.fibr
- [3] Esqueda, José J.; Palafox, Luis E.; “Fundamentos de procesamiento de imágenes”. Universidad Autónoma de Baja California, 2005.
- [4] Gonza, Ana F; Errores en las tomas radiográficas realizadas por estudiantes de interno estomatológico de la Universidad Señor de Sipán - Chiclayo. Universidad Señor de Sipán, 2016.
- [5] Benegas Urteaga, M., Ramírez Ruz, J., & Sánchez González, M. (2022). Fibrosis pulmonar idiopática [Idiopathic pulmonary fibrosis]. Radiología, 34(5), 230-235. <https://doi.org/10.1016/j.rx.2022.10.009>
- [6] Fleetwood, K., McCool, R., Glanville, J., Edwards, S. C., Gsteiger, S., Daigl, M., & Fisher, M. (2017). Systematic Review and Network Meta-analysis of Idiopathic Pulmonary Fibrosis Treatments. Journal of Managed Care & Specialty Pharmacy, 23(3-b). Retrieved from www.jmcp.org
- [7] Wu, L., Liu, Y., Zhang, Y. et al. Identification of PANoptosis-related genes for idiopathic pulmonary fibrosis by machine learning and molecular subtype analysis. Sci Rep 14, 24068 (2024). <https://doi.org/10.1038/s41598-024-76263-7>
- [8] Instituto Nacional de Enfermedades Respiratorias [internet]. Coni, Emilio: Mortalidad por Fibrosis Pulmonar Idiopática (FPI) en mayores de 40 años en Argentina. 1997-2015. Disponible en: https://bancos.salud.gob.ar/sites/default/files/2018-10/0000001013cnt-2017-09_boletin-actualizacion-mortalidad-fpi-2015.pdf
- [9] Sala Situacional COVID-19 Perú. (s.f.) Total de Casos Positivos por Departamento [Publicidad online]. Instituto Nacional de Salud y Centro Nacional de Epidemiología, Prevención y Control de Enfermedades - MINSA. Recuperado de: https://covid19.minsa.gob.pe/sala_situacional.asp [mayo, 2022].
- [10] PERÚ: POBLACIÓN 2022. (s.f.) PERÚ 2022: POBLACIÓN POR SEXO SEGÚN DEPARTAMENTOS [Publicidad online]. FUENTE: I.N.E.I. - Estimaciones y proyecciones de población en base al Censo 2017. Elaboración: Departamento de estadística - C.P.I. Recuperado de: <https://cpi.pe/images/upload/paginaweb/archivo/23/poblacion%202022.pdf> [mayo, 2022].
- [11] Data Commons Place Explorer (s.f.) Perú: DEMOGRAFÍA [publicidad online]. FUENTE: datacatalog.worldbank.org. - Tasa de fertilidad. Recuperado de: <https://datacommons.org/place/country/PER?category=Demographics&hl=es#Tasa-de-fertilidad>
- [12] Descriptores en Ciencias de la Salud: DeCS [Internet]. ed. 2017. Sao Paulo (SP): BIREME / OPS / OMS. 2017 [actualizado 2017 May 18]. Disponible en: <http://decs.bvsalud.org/E/homepage.htm>
- [13] Lowe J.S., Anderson P.G., Anderson S.I. (2020). «10: Aparato respiratorio». Stevens y Lowe. Histología humana (5a. edición). Elsevier Health Sciences. p. 168.

- [14] Driskell FF, Fiona MW. 2015. Understanding fibroblast heterogeneity in the skin. *Trends in cell biology*. 25: 2. DOI: 10.1016/j.tcb.2014.10.001
- [15] Donovan P, Gearhart J. The end of the beginning for pluripotent stem cells. *Nature*. 2001; 414: 92-7.
- [16] Ng PM, Lufkin T. Embryonic stem cells: protein interaction networks. *Biomol Concepts*. 2011; 2: 13-25.
- [17] Rodríguez Pardo, V. M. (2005). CÉLULAS MADRE: CONCEPTOS GENERALES Y PERSPECTIVAS DE INVESTIGACIÓN. *Universitas Scientiarum*, 10(1), 5–14. Retrieved from <https://revistas.javeriana.edu.co/index.php/scientarium/article/view/4932>
- [18] MedlinePlus. (2023). Enfermedad pulmonar intersticial: Enciclopedia médica de MedlinePlus. Recuperado de <https://medlineplus.gov/spanish/interstitiallungdiseases.html>
- [19] T. King, A. Pardo, M. Selman. Idiopathic Pulmonary Fibrosis. *Lancet*, 378 (2011), pp. 1949-1961
- [20] Carfi, A., Bernabei, R., Landi, F., & Gemelli Against COVID-19 Post-Acute Care Study Group. (2020). Persistent symptoms in patients after acute COVID-19. *JAMA*, 324(6), 603-605.
- [21] Nalbandian, A., Sehgal, K., Gupta, A., Madhavan, M. V., McGroder, C., Stevens, J. S., ... & Wan, E. Y. (2021). Post-acute COVID-19 syndrome. *Nature Medicine*, 27(4), 601-615.
- [22] Pérez Conde, L. (2021). Fibrosis pulmonar posneumonía causada por COVID-19: Reporte de 3 casos. *Revista Americana de Medicina Respiratoria**.
- [23] Raghu G, Remy-Jardin M, Myers JL, et al. Diagnosis of idiopathic pulmonary fibrosis: an Official ATS/ERS/JRS/ALAT Clinical Practice Guideline. *Am J Respir Crit Care Med*. 2018;198(5):e44-e68.
- [24] Kreuter M, Swigris J, Pittrow D, et al. The clinical course of idiopathic pulmonary fibrosis and its association to quality of life over time: longitudinal data from the INSIGHTS-IPF registry. *Respir Res*. 2019;20(1):59.
- [25] Swigris JJ, Stewart AL, Gould MK, et al. Patients' perspectives on how idiopathic pulmonary fibrosis affects the quality of their lives. *Health Qual Life Outcomes*. 2005;3:61.
- [26] Ley B., Collard H.R., King T.E. Jr. Clinical course and prediction of survival in idiopathic pulmonary fibrosis. *Am J Respir Crit Care Med*. 2011;183(4):431-440.
- [27] Raghu, G., Collard, H. R., Egan, J. J., Martinez, F. J., Behr, J., Brown, K. K., ... & Selman, M. (2011). An official ATS/ERS/JRS/ALAT statement: idiopathic pulmonary fibrosis: evidence-based guidelines for diagnosis and management. *American journal of respiratory and critical care medicine*, 183(6), 788-824.
- [28] Wikipedia [internet]; Fibrosis pulmonar idiopática. Disponible en: https://es.wikipedia.org/wiki/Fibrosis_pulmonar_idiop%C3%A1tica
- [29] Wikipedia. (2024, mayo 12). Espirometría. En Wikipedia, La enciclopedia libre. Recuperado el 29 de junio de 2024, de <https://es.wikipedia.org/wiki/Espiometr%C3%A1tica>
- [30] Wikipedia [internet]; Ventilación pulmonar. Disponible en: https://es.wikipedia.org/wiki/Ventilaci%C3%B3n_pulmonar

- [31] Wikipedia [internet]; Relación ventilación-perfusión. Disponible en: https://es.wikipedia.org/wiki/Relaci%C3%B3n_ventilaci%C3%B3n-perfusi%C3%B3n
- [32] UNINET [internet]; Fallo respiratorio agudo. Disponible en: https://uninet.edu/tratado/c02_0204.html
- [33] Wikipedia [internet]; Pruebas de función pulmonar. Disponible en: https://es.wikipedia.org/wiki/Pruebas_de_funci%C3%B3n_pulmonar
- [34] Anestesiart [internet]; Principio de Fick en la determinación del Gasto Cardíaco. Disponible en: <https://anestesiart.org/2021/principio-de-fick-en-la-determinacion-del-gasto-cardiaco/>
- [35] Gonza, Ana F; Errores en las tomas radiográficas realizadas por estudiantes de internado estomatológico de la Universidad Señor de Sipán - Chiclayo. Universidad Señor de Sipán, 2016.
- [36] Facultad de Ciencias Médicas de la UNA [internet]. Posiciones radiográficas y proyecciones radiológicas. Disponible en: https://fcm.aulavirtual.unc.edu.ar/pluginfile.php/257165/mod_resource/content/1/POSICIONES%20RADIOGR%C3%A1FICAS%20Y%20PROYECCIONES%20RADIOL%C3%A9GICAS.pdf
- [37] Medicine Plus [internet]. Diagnóstico por imágenes. Disponible en: <https://medlineplus.gov/spanish/diagnosticimaging.html#Spirometry>
- [38] Castillo, René E; Espacios L_p . Primera edición. Universidad Nacional de Colombia, 2014.
- [39] Chumpitaz M; Medida e integración. UNI, 1989.
- [40] Chumpitaz M; Teoría de la medida. UNI, 1991.
- [41] Zygmund, A. (2002). Trigonometric series (2nd ed.). Cambridge University Press.
- [42] Brigham, E. O. (1988). The fast Fourier transform and its applications. Prentice Hall.
- [43] Bracewell, R. N. (2000). The Fourier transform and its applications (3rd ed.). McGraw-Hill.
- [44] Titchmarsh, E. C. (1948). Introduction to the theory of Fourier integrals (2nd ed.). Oxford University Press.
- [45] Reed, M., & Simon, B. (1980). Methods of modern mathematical physics: Functional analysis (Vol. 1). Academic Press.
- [46] Stein, E. M., & Shakarchi, R. (2005). Real analysis: Measure theory, integration, and Hilbert spaces (Vol. 3). Princeton University Press.
- [47] Rudin, W. (1991). Functional analysis (Vol. 118). Tata McGraw-Hill Education.
- [48] Szegö, G. (1975). Orthogonal polynomials (Vol. 23). American Mathematical Soc.
- [49] Meyer, Y. (1992). Wavelets and operators (Vol. 37). Cambridge University Press.
- [50] R. C. Gonzalez and R. E. Woods, Digital Image Processing 2/E. Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, 2002, pp. 349-404.
- [51] Daubechies, I. (1992). Ten lectures on wavelets (Vol. 61). Society for Industrial and Applied Mathematics.

- [52] Tzu-Heng, L., & Henry, L. (2010). wavelet analysis for image processing. *Scientia Iranica*, 17(5), 367-372.
- [53] T. Acharya and A. K. Ray, *Image Processing: Principles and Applications*. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, 2005, pp. 79-104.
- [54] Gutiérrez, R. (2007). wavelets de Haar: una introducción. *Revista Colombiana de Matemáticas*, 41(2), 321-331.
- [55] Daubechies, I., & Sweldens, W. (1996). Factoring wavelet transforms into lifting steps. *Journal of Fourier Analysis and Applications*, 4(3), 247-269.
- [56] Kaiser, G. (1994). *A friendly guide to wavelets*. Birkhäuser.
- [57] Grossmann, A., & Morlet, J. (1984). Decomposition of Hardy functions into square integrable wavelets of constant shape. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 15(4), 723-736.
- [58] Daubechies, I. (1990). The wavelet transform, time-frequency localization and signal analysis. *IEEE Transactions on Information Theory*, 36(5), 961-1005. <https://doi.org/10.1109/18.57199>
- [59] L. Prasad and S. S. Iyengar, *wavelet Analysis with Applications to Image Processing*. Boca Raton, FL: CRC Press LLC, 1997, pp.101-115.
- [60] Fernández, J. L. R., & Ramírez, J. G. (2012). Transformada wavelet en dos dimensiones. *Revista de matemáticas: teoría y aplicaciones*, 19(2), 169-183. <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=51424052002>
- [61] Jain, A. K., & Farrokhnia, F. (1991). Unsupervised texture segmentation using Gabor filters. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 15(3), 116-123. <https://doi.org/10.1109/34.75534>
- [62] Kaplan, A. (1983). *Cálculo Avanzado*. México: C.E.C.S.A.
- [63] Weickert, J. (1998). *Anisotropic Diffusion in Image Processing*. ECMI Series, Teubner-Verlag, Stuttgart, Germany.
- [64] Torre, V., & Poggio, T. A. (1986). On edge detection. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 8, 148-163.
- [65] Perona, P., & Malik, J. (1987). Scale space and edge detection using anisotropic diffusion. In Proc. IEEE Comp. Soc. Workshop on Computer Vision (pp. 16-22). IEEE Computer Society Press.
- [66] Alvarez, L., Guichard, F., Lions, P.-L., & Morel, J.-M. (1993). Axioms and fundamental equations in image processing. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 123, 199-257.
- [67] You, Y.-L., Kaveh, M., Xu, W.-Y., & Tannenbaum, A. (1994). Analysis and design of anisotropic diffusion for image processing. In Proceedings of the First IEEE International Conference on Image Processing (ICIP-94) (pp. 496-501). IEEE Computer Society Press.
- [68] Catte, F., Lions, P.-L., Morel, J.-M., & Coll, T. (1992). Image selective smoothing and edge detection by nonlinear diffusion. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 29, 182-193.

- [69] Nitzberg, M., & Shiota, T. (1992). Nonlinear image filtering with edge and corner enhancement. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 14, 826-833.
- [70] Barenblatt, G. I., Bertsch, M., Dal Passo, R., & Ughi, M. (1993). A degenerate pseudoparabolic regularization of a nonlinear forward-backward heat equation arising in the theory of heat and mass exchange in stably stratified turbulent shear flow. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 24, 1414-1439.
- [71] Posmentier, E. S. (1977). The generation of salinity fine structure by vertical diffusion. *Journal of Physical Oceanography*, 7, 298-300.
- [72] Perona, P., Shiota, T., & Malik, J. (1994). Anisotropic diffusion. In B. M. ter Haar Romeny (Ed.), *Geometry-driven diffusion in computer vision* (pp. 72-92). Kluwer, Dordrecht.
- [73] Cottet, G.-H. (1994). Neural networks: Continuous approach and applications to image processing. Technical Report No. 113, LMC - IMAG, Université Joseph Fourier, B.P. 53, 38041 Grenoble Cedex 9, France. Submitted to Proc. 2nd Europ. Conf. on Mathematics Applied to Biology and Medicine (Lyon, Dec. 15–18, 1993).
- [74] Weickert, J. (1994). Abschlussbericht zum Projekt "Nichtlineare Diffusionsfilter". Abschlussbericht und Bericht über die wissenschaftliche Tätigkeit Januar 1992 bis Dezember 1993. Center for Applied Mathematics, Darmstadt-Kaiserslautern, 191-209.
- [75] Weickert, J. (1996). Theoretical foundations of anisotropic diffusion in image processing. En W. Kropatsch, R. Klette, F. Solina (Eds.), *Theoretical foundations of computer vision* (pp. 221-236). Computing Supplement 11, Springer, Wien.
- [76] Cottet, G.-H., & Germain, L. (1993). Image processing through reaction combined with nonlinear diffusion. *Mathematics of Computation*, 61, 659-673.
- [77] Hartley, R., Zisserman, A. (2004). *Multiple view geometry in computer vision* (2nd ed., pp. 89-94). Cambridge University Press.
- [78] Roncero García, A. (2019). La interpolación aplicada al procesamiento de imágenes digitales. Universitat Jaume I. pp. 31-42.
- [79] Mantilla, I., & Arce, M. (2023). Processing of Idiopathic Pulmonary Fibrosis images based on spatial interpolation using DFT, FFT, DCT and LPF. In 8th International Conference on Mathematics and Computers in Sciences and Industry (MCSI) (pp. 122-126). Athens, Greece. DOI: 10.1109/MCSI60294.2023.00027.
- [80] The Seg Wiki [internet]. Teorema de convolución. Disponible en: https://wiki.seg.org/wiki/Dictionary:Convolution_theorem/es
- [81] Pérez, H. J. (2012, Julio). Transformada discreta coseno. Universidad Nacional Experimental Politécnica de la Fuerza Armada Bolivariana, Maracay.
- [82] Aristizábal, D., Jiménez, G., Gómez, D., & Posada, E. (2013). Compresión de imágenes médicas para telemedicina: Una revisión. *Ingeniería y Ciencia*, 9(17), 169-186. Recuperado de <http://www.scielo.org.co/pdf/iyc/v9n17/v9n17a17.pdf>
- [83] Sáenz-Terrazas, M. A., Sánchez-Gutiérrez, M. R., & Rodríguez-Pérez, M. A. (2013). Compresión de imágenes médicas: una revisión. *Revista Ingeniería Biomédica*, 7(13), 17-28. Recuperado de http://www.scielo.org.co/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0120-41572013000100017&lng=en&nrm=iso

- [84] Alojamientos [internet]. Filtros digitales. Disponible en: <http://alojamientos.us.es/gtoca ma/pid/tema3-1.pdf>
- [85] Greyrat, R. (2022, July 5). MATLAB: Filtro de paso bajo ideal en el procesamiento de imágenes. Barcelona Geeks. <https://barcelonageeks.com/matlab-filtro-de-paso-bajo-ideal-en-el-procesamiento-de-imagenes/>
- [86] Serra, Jean; *Image Analysis and Mathematical Morphology*, 1982.
- [87] J. Molina, J.A. Trigueros, J.A. Quintano, E. Mascarós, A. Xaubet, J. Ancochea. Fibrosis pulmonar idiopática: un reto para la atención primaria, SEMERGEN - Medicina de Familia, Volume 40, Issue 3, 2014, Pages 134-142, ISSN 1138-3593. Figura: Patrón de neumonía intersticial usual en la biopsia pulmonar. Recuperado de: <https://www.elsevier.es/es-revista-medicina-familia-sem emergen-40-pdf-S1138359314000689>
- [88] Neumología peruana [internet]. Diagnóstico de Fibrosis Pulmonar Idiopática por Tomografía (TCAR). Figura: Fibrosis pulmonar idiopática: Ahora es posible realizar el diagnóstico por tomografía. Recuperado de: <https://www.neumologiaperuana.com/fibrosis-pulmonar/diagnostico-de-fibrosis-pulmonar-idiopatica/>
- [89] Xaubet, A., Ancochea, J., Bollo, E., Fernández-Fabrellas, E., Franquet, T., Molina-Molina, M., Montero, M. A., & Serrano-Mollar, A. (2013). Normativa sobre el diagnóstico y tratamiento de la fibrosis pulmonar idiopática. Archivos de Bronconeumología, 49(8), 343-353. Recuperado de: <https://doi.org/10.1016/j.arbres.2013.03.011>
- [90] Rincón, L. (2019). Una introducción a la estadística inferencial. Universidad Nacional Autónoma de México, Facultad de Ciencias. ISBN 978-607-30-2432-7.
- [91] Tapella, Esteban; "El mapeo de actores clave"; documento de trabajo; Universidad Nacional de Córdoba, 2007.
- [92] García Abad, Joaquín; "Comparativa de técnicas de balanceo de datos. Aplicación a un caso real para la predicción de fuga de clientes"; trabajo fin de Máster; Universidad de Oviedo, 2021.
- [93] Bowerman, O'Connell and Murphree. "Business Statistics in Practice". 7th Edition, McGraw-Hill Irwin, 2014.
- [94] Stine, Robert; Foster, Dean; "Statistics for Business: Decision Making and Analysis"; Wharton School of the University of Pennsylvania; Third Edition, 2017.
- [95] W.R. Padilla, J. García, J.M. Molina "Improving time series forecasting using information fusion in local agricultural markets Neurocomputing", 452 (2021), pp. 355-373
- [96] Du S., Li T., Yang Y., Horng S.-J. "Multivariate time series forecasting via attention-based encoder–decoder framework Neurocomputing", 388 (2020), pp. 269-279

Anexos

Anexo 1: Formulación de las encuestas para la creación de la base de datos post-COVID 1	
Anexo 2: Construcción de la base de datos y su tratamiento mediante la ciencia de datos	21
Anexo 2.1: Definiciones generales	21
Anexo 2.2: Mapeo de actores	23
Anexo 2.3: Técnicas de tratamiento de la ciencia de datos	24
Anexo 2.4: Modelos predictivos	35
Anexo 3: Módulo computacional de las técnicas de procesamiento de imágenes implementado en códigos de MATLAB	47
Anexo 3.1: Códigos para corregir errores de calibración	47
Anexo 3.2: Códigos para amplificar la imagen	48
Anexo 3.3: Códigos para comprimir la imagen	52
Anexo 3.4: Códigos para filtrar la imagen	54
Anexo 3.5: Códigos para resaltar virtualmente indicadores de la FPI en la imagen	60

Anexo 1: Formulación de las encuestas para la creación de la base de datos post-COVID-19

En este anexo se adjunta la encuesta realizada a nivel nacional, respondida por 266 usuarios, en la que se les preguntó su edad, su género, su rango de estatura y peso para obtener su índice de masa corporal (IMC) aproximado, el departamento en el que nacieron, el departamento y la ciudad o centro poblado en el que vivían, y si contrajeron COVID-19.

A los usuarios que marcaron “sí” en la última pregunta, se les pidió que indicaran los meses en los que contrajeron el COVID-19. Luego, se les solicitó que marcaran las variantes de COVID-19 que les fueron diagnosticadas. Después, se les preguntó cuántos familiares estuvieron en camas UCI, cuántos fallecieron debido al coronavirus y si el usuario fue internado.

A los usuarios que respondieron “sí” en esta última pregunta, se les preguntó el Centro de Salud en el que fueron internados y el departamento y la ciudad en que se ubica dicho Centro de Salud.

Al final, se les consultó a los usuarios qué técnicas imagenológicas se les habían realizado. A aquellos que no respondieron “ninguna” se les pidió que especificaran si estas técnicas fueron debido al COVID-19 o por otro motivo. Finalmente, a este grupo de usuarios, se les pidió que indicaran las reacciones adversas que experimentaron luego de someterse a las técnicas imagenológicas.

Estos datos fueron utilizados para determinar el nivel de vulnerabilidad al COVID-19 según la edad, el índice de masa corporal y la macrorregión, aplicando técnicas de tratamiento de la ciencia de datos. Además, se analizaron para obtener la cantidad de familiares de los encuestados internados en camas UCI y fallecidos, identificar los meses en los que los encuestados contrajeron el coronavirus y construir un modelo predictivo para compararlo con el modelo predictivo elaborado según los datos del MINSA. También se determinó el porcentaje de encuestados que, después de someterse a alguna técnica imagenológica, experimentaron reacciones adversas, así como las reacciones adversas más frecuentes y los grupos de edad e IMC más vulnerables a estas reacciones adversas.

Información Demográfica y Salud Relacionada

mihaelarce96@gmail.com [Cambiar cuenta](#)



No compartido

¿Qué edad tienes?

Tu respuesta

¿Cuál es tu género?

- Masculino
- Femenino
- Otros:

¿Cuánto mides (si sabes el número exacto, escríbelo en la opción "otra")?

- 1.30cm - 1.34cm
- 1.35cm - 1.39cm
- 1.40cm - 1.44cm
- 1.45cm - 1.49cm
- 1.50cm - 1.54cm
- 1.55cm - 1.59cm
- 1.60cm - 1.64cm
- 1.65cm - 1.69cm
- 1.70cm - 1.74cm
- 1.75cm - 1.79cm
- 1.80cm - 1.84cm
- 1.85cm - 1.89cm
- 1.90cm - 1.94cm
- 1.95cm - 1.99cm
- 2.00cm - 2.04cm
- 2.05cm - 2.09cm
- Otros:

¿Cuánto pesas (si sabes el número exacto, escríbelo en la opción "otra")?

30kg - 34kg

35kg - 39kg

40kg - 44kg

45kg - 49kg

50kg - 54kg

55kg - 59kg

60kg - 64kg

65kg - 69kg

70kg - 74kg

75kg - 79kg

80kg - 84kg

85kg - 89kg

90kg - 94kg

95kg - 99kg

100kg - 104kg

105kg - 109kg

110kg - 114kg

115kg - 119kg

120kg - 124kg

125kg - 129kg

Otros:

¿En qué departamento o región naciste?

- Tumbes
- Piura
- Lambayeque
- La Libertad
- Áncash
- Ciudad de Lima
- Lima provincias
- Callao
- Ica
- Arequipa
- Moquegua
- Tacna
- Cajamarca
- Huánuco
- Pasco
- Junín
- Huancavelica
- Ayacucho
- Apurímac
- Cuzco
- Puno
- Amazonas
- San Martín
- Loreto

Ucayali

Madre de Dios

Otros:

¿En qué ciudad o centro poblado naciste?

Tu respuesta

¿En qué departamento vives?

- Tumbes
- Piura
- Lambayeque
- La Libertad
- Áncash
- Ciudad de Lima
- Lima provincias
- Callao
- Ica
- Arequipa
- Moquegua
- Tacna
- Cajamarca
- Huánuco
- Pasco
- Junín
- Huancavelica
- Ayacucho
- Apurímac
- Cuzco
- Puno
- Amazonas
- San Martín
- Loreto

Ucayali

Madre de Dios

Otros:

En qué ciudad o centro poblado vives?

Tu respuesta

Has contraído COVID-19 alguna vez?

Sí

No

[Siguiente](#)

[Borrar formulario](#)

Nunca envíes contraseñas a través de Formularios de Google.

Google no creó ni aprobó este contenido. [Denunciar abuso](#) - [Condiciones del Servicio](#) - [Política de Privacidad](#)

Google Formularios

¿Cuándo te diagnosticaron COVID-19?

- Marzo 2020
- Abril 2020
- Mayo 2020
- Junio 2020
- Julio 2020
- Agosto 2020
- Septiembre 2020
- Octubre 2020
- Noviembre 2020
- Diciembre 2020
- Enero 2021
- Febrero 2021
- Marzo 2021
- Abril 2021
- Mayo 2021
- Junio 2021
- Julio 2021
- Agosto 2021
- Septiembre 2021
- Octubre 2021
- Noviembre 2021
- Diciembre 2021
- Enero 2022
- Febrero 2022
- Marzo 2022
- Abril 2022

¿Qué variante(s) de COVID-19 te diagnosticaron?

- Alfa
- Beta
- Gamma
- Delta
- Ómicron
- Déltacron

¿Cuántos familiares tuyos han estado en cama UCI?

- 0
- 1
- 2
- 3
- 4
- 5
- Otros:

¿Cuántos familiares tuyos han fallecido debido al COVID-19?

- 0
- 1
- 2
- 3
- 4
- 5
- Otros:

¿Fuiste internado en una cama UCI?

- Sí
- No

[Atrás](#)

[Siguiente](#)

[Borrar formulario](#)

Nunca envíes contraseñas a través de Formularios de Google.

Google no creó ni aprobó este contenido. [Denunciar abuso](#) - [Condiciones del Servicio](#) - [Política de Privacidad](#)

Google Formularios

Información Demográfica y Salud Relacionada

mihaelarce96@gmail.com [Cambiar cuenta](#)



No compartido

Detalles de la Hospitalización por COVID-19

¿En qué Centro de Salud te internaron?

Tu respuesta

¿En qué departamento o región se ubica ese Centro de Salud?

- Tumbes
- Piura
- Lambayeque
- La Libertad
- Áncash
- Ciudad de Lima
- Lima provincias
- Callao
- Ica
- Arequipa
- Moquegua
- Tacna
- Cajamarca
- Huánuco
- Pasco
- Junín
- Huancavelica
- Ayacucho
- Apurímac
- Cuzco
- Puno
- Amazonas
- San Martín
- Loreto

Ucayali

Madre de Dios

¿En qué ciudad se ubica ese Centro de Salud?

Tu respuesta

Atrás

Siguiente

Borrar formulario

Nunca envíes contraseñas a través de Formularios de Google.

Google no creó ni aprobó este contenido. [Denunciar abuso](#) - [Condiciones del Servicio](#) - [Política de Privacidad](#)

Google Formularios

Información Demográfica y Salud Relacionada

mihaelarce96@gmail.com [Cambiar cuenta](#)



No compartido

Técnicas Imagenológicas Realizadas

¿Cuál(es) de estas técnicas imagenológicas te han realizado?

- Resonancia Magnética
- Tomografía Computarizada
- Ambas
- Ninguna
- Otra...

[Atrás](#)

[Siguiente](#)

[Borrar formulario](#)

Nunca envíes contraseñas a través de Formularios de Google.

Google no creó ni aprobó este contenido. [Denunciar abuso](#) - [Condiciones del Servicio](#) - [Política de Privacidad](#)

Google Formularios



Información Demográfica y Salud Relacionada

mihaelarce96@gmail.com [Cambiar cuenta](#)



No compartido

Motivo y Experiencia con Técnicas Imagenológicas

¿Por qué te han realizado dichas técnicas imagenológicas?

- Debido al COVID-19
- Otros:

¿Tuviste alguna de estas reacciones adversas a las técnicas imagenológicas?

- Nasofaringitis (resfriado)
- Celulitis
- Infección de las vías urinarias
- Hipersensibilidad
- Hiperglucemia (azúcar alta en la sangre)
- Desequilibrio electrolítico (alteraciones del contenido de agua o electrolitos en el cuerpo)
- Hipocalcemia (baja concentración de calcio en la sangre)
- Hiperpotasemia (concentración plasmática de potasio superior a 5,5 mEq/L)
- Hipopotasemia (concentración sérica de potasio menor a 3,5 mEq/L)
- Hipernatremia (desequilibrio electrolítico con un nivel alto de sodio en la sangre)
- Disminución del apetito
- Ansiedad
- Confusión frecuente
- Alucinaciones
- Pesadillas o sueños extraños
- Cefaleas (dolores de cabeza recurrentes)
- Parestesias (sensación de hormigueo o pinchazos en alguna parte del cuerpo)
- Disgeusia (sensación continua de un sabor desagradable)
- Sensación de ardor en la piel o quemazón
- Mareos
- Temblor en alguna(s) parte(s) del cuerpo
- Hipoestesia (disminución de la intensidad de algunas sensaciones)
- Parosmia (distorsiones del sentido del olfato)
- Ageusia (pérdida total o casi total del sentido del gusto)
- Contracciones musculares involuntarias
- Visión anormal

- Aumento de lagrimeo
- Molestias anormales en los ojos
- Astenopía (cansancio ocular debido al esfuerzo visual)
- Dolor de oído
- Bloqueo auriculoventricular de primer grado (variación en el ritmo normal del corazón)
- Prolongación del intervalo QT del ECG (tiene síntomas como síncope, mareos o palpitaciones)
- Taquicardia
- Anomalías electrocardiográficas
- Vasodilatación (dilatación de los vasos sanguíneos)
- Isquemia miocárdica (reducción del flujo sanguíneo al corazón)
- Hipertensión (tensión excesivamente alta de la sangre)
- Frialdad periférica (corrupción de los vasos sanguíneos que irrigan las piernas y los pies)
- Flebitis (inflamación de las paredes venosas)
- Reacción anafilactoide (reacción a un químico que se ha convertido en una sustancia que puede ocasionar una reacción alérgica)
- Hipotensión (presión arterial baja)
- Arteriosclerosis (causa estrechamiento de las arterias)
- Disnea (dificultad para respirar)
- Tos
- Depresión respiratoria (dificultad de los pulmones para intercambiar dióxido de carbono y oxígeno)
- Náuseas
- Vómitos
- Arcadas
- Diarrea
- Dolor abdominal
- Dolor faringolaríngeo (dolor en las amígdalas, faringe o laringe)
- Flatulencias frecuentes

- Hipoestesia de los labios (adormecimiento de los labios)
- Hipersecreción salival (muy alta producción de saliva)
- Disepsia (indigestión o empacho)
- Sequedad de boca
- Prurito anal (irritación anal)
- Prurito en la piel (irritación de la piel)
- Urticaria, exantema cutáneo o eritema (inflamación en la piel en forma de círculos o elipses)
- aumento de la sudoración
- Sudor frío
- Hinchazón de la cara
- Dolor en las extremidades
- Dolor cervical (dolor en la nuca)
- Espasmos o calambres musculares
- Tensión muscular
- Sensación de pesadez
- Hematuria (sangre en la orina)
- Microalbuminuria (presencia de albúmina en la orina)
- Glucosuria (presencia de glucosa en la orina a niveles elevados)
- Urgencia miccional frecuente
- Dolor renal
- Aumento de la frecuencia urinaria
- Prurito genital (irritación genital)
- Dolor pélvico
- Infecciones, molestias o dolores en la zona de administración luego de recibir una inyección
- Dolor del miembro fantasma (dolor que surge en la extremidad que falta después de la amputación)
- Otra...
- Ninguna

Atrás

Enviar

Borrar formulario

Nunca envíes contraseñas a través de Formularios de Google.

Google no creó ni aprobó este contenido. [Denunciar abuso](#) - [Condiciones del Servicio](#) - [Política de Privacidad](#)

Google Formularios

Anexo 2: Construcción de la base de datos y su tratamiento mediante la ciencia de datos

Anexo 2.1: Definiciones generales

Conceptos elementales

Población: Es un conjunto de seres vivos, objetos o eventos con determinadas características que sean de interés para realizar un estudio, según Rincón [90].

En un estudio estadístico, es importante especificar de manera adecuada la población. Para ello, hay que tomar en cuenta lo que se desea estudiar y la forma en que se pueda medir las características de interés para poder realizar dicho estudio. Algunos ejemplos de poblaciones son:

- El conjunto de personas que viven en Perú y usan redes sociales.
- El conjunto de plantas coníferas de Canadá
- El conjunto de ciudades con una población no menor a un millón de habitantes.
- El conjunto de fechas en las que hubo sismos de magnitud superior a 7° en la escala de Richter en Chile durante el actual milenio.

Se puede apreciar en estos ejemplos que el concepto de población es muy amplio, por lo que es conveniente definir claramente las unidades de observación al realizar un estudio estadístico.

Unidad de observación: Es un conjunto de elementos que son parte de una población cuya información ya se tiene o está al alcance [90].

La unidad de observación se determina en función del estudio que se desea realizar y del método que se utilizará para obtener la información. Por ejemplo, al visitar una tienda de instrumentos musicales de primera mano para comprar uno, cada instrumento sería considerado una unidad de observación. En este caso, se evaluaría el timbre del sonido que emiten y se consideraría el precio para la elección. En cambio, al visitar una tienda de instrumentos musicales de segunda mano, especialmente con instrumentos de cuerda como la guitarra, el violín o el piano, cada cuerda o tecla podría ser considerada una unidad de observación para evaluar la calidad de afinación del instrumento.

Muestra: Es un subconjunto de la población sobre el cual se efectúa el estudio. El tamaño de la muestra es el número de elementos de la muestra [90].

Las muestras suelen tomarse de manera aleatoria; sin embargo, cuando el mecanismo empleado para obtener los datos recolecta más información en algunos sectores de la población de manera significativa que en otros, es preferible seleccionar una muestra que sea igualmente representativa de cada sector. En algunos estudios, se incorpora la variable tiempo para analizar cómo cambia una característica de las unidades de observación.

Variables y su clasificación

Variable: Es una característica de interés que posee cada elemento de una población y que se puede medir [90].

Las variables representan preguntas y los valores que adquieren representan respuestas a esas preguntas. Si se desea obtener la temperatura media de la ciudad de Cuzco durante el día, se puede considerar la variable o pregunta: “¿Cuál es la temperatura en Cuzco a las 11 AM?” Y obtener como respuesta “11 °C”, “13 °C”, “14 °C”, “15 °C”, etc.

Variable cualitativa: Una variable es cualitativa si sus valores representan una cualidad,

atributo o categoría. También se les llama variables categóricas [90].

A dichas cualidades se les atribuye un valor numérico que las represente. Algunos ejemplos de variables cualitativas son el color de cabello, la nacionalidad de una persona, el tipo de compuesto metálico, el tipo de flor, la marca de un lápiz, etc. En estos casos, como las variables cualitativas no pueden ser ordenadas en una escala, se les puede atribuir cualquier valor numérico; es decir, sus valores son etiquetas o atributos y no existe un orden entre ellos. A esta escala de medición se le denomina escala nominal.

En cambio, si la variable representa, por ejemplo, la capa atmosférica en la que se localiza un cohete, existe un orden en el que se ubican dichas capas. Por lo tanto, si se desea ordenarlas ascendenteamente, se asignarían los valores “0”, “1”, “2”, “3” y “4” a la tropósfera, estratosfera, mesósfera, termósfera y exósfera respectivamente; y viceversa si se decide ordenarlas descendenteamente. En este caso, existe un orden en los valores de la variable. A esta escala de medición se le denomina escala ordinal.

Variable cuantitativa: Una variable es cuantitativa si adquiere valores numéricos y estos representan cantidades [90].

Estos valores numéricos pueden ser cantidades como las naranjas que tiene un árbol o las estrellas que se ven desde un observatorio, o magnitudes físicas como la velocidad de un avión o la distancia entre dos planetas. En estos casos, la variable cuantitativa se mide mediante una escala de razón debido a que tienen un sentido físico y se puede definir un cero absoluto.

En cambio, cuando existe distancia entre los valores de una variable cuantitativa pero no se pueden realizar operaciones numéricas entre los datos y no necesariamente existe un cero absoluto, la variable se mide mediante una escala de intervalo. Por ejemplo, la medición del coeficiente intelectual se calcula en base a una distribución normal con un promedio de 100 y una desviación estándar de 15; por lo tanto, aunque hay distancia entre los valores, no se pueden realizar operaciones con ellos y no tienen una proporción definida.

Existen dos tipos de variables cuantitativas: discretas y continuas.

- **Variable cuantitativa discreta:** Una variable cuantitativa es discreta cuando la cantidad de valores que puede tomar es finito o es infinito pero cada valor posible puede ser asociado a un número natural.

Por ejemplo, la cantidad de valores que puede tomar una variable que representa el número de hijos de una pareja es finita; mientras que una variable que representa el número primo más bajo que divide a un número puede tomar infinitos valores, pero se puede asociar cada valor a un número natural, ya que el conjunto de números primos está incluido en el conjunto de números naturales.

- **Variable cuantitativa continua:** Una variable cuantitativa es continua si existe un intervalo abierto (a, b) que está incluido dentro del conjunto de posibles valores que puede tomar dicha variable.

Las variables que miden magnitudes físicas son de este tipo. Esta definición es equivalente a la de una variable cuantitativa cuyos posibles valores no pueden ser asociados a un número natural cada uno. Esto se debe a que si asociamos cada número natural n a un elemento a_n del intervalo (a, b) , si definimos un elemento c que se encuentre en dicho intervalo y cuyo n -ésimo decimal sea distinto al n -ésimo decimal de a_n para cada $n \in \mathbb{N}$, no sería posible asociar un número natural a dicho número c .

Agrupamiento de valores

Clase: Una clase es una agrupación de valores de una variable.

En el caso de las variables cualitativas, se puede considerar como valores a las categorías

definidas y consecuentemente, como clases a grupos de estas categorías. Mientras que los valores de las variables cuantitativas se agrupan en intervalos o conjuntos exhaustivos y excluyentes cuando son continuas o discretas respectivamente; es decir, cada valor se encuentra en un solo intervalo o conjunto.

Un ejemplo usando variables cualitativas sería el siguiente: si se tienen témperas de colores rojo, anaranjado, amarillo, verde, azul, violeta, blanco y negro, se pueden agrupar en clases a las que se les denominará colores cálidos, colores fríos y colores neutros. En la primera clase estarán las témperas de colores rojo, anaranjado y amarillo; en la segunda clase, las de colores verde, azul y violeta; y en la tercera clase, las de colores blanco y negro.

En el caso de variables cuantitativas se puede usar el siguiente ejemplo: si se tiene en un conjunto de datos la estatura de varias personas y la menor y mayor estatura son 1.45 cm y 1.98 cm respectivamente, se puede considerar al conjunto de intervalos $\{[1.30 + 10i, 1.40 + 10i], i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$ como clases.

Marca de clase: Una marca de clase es un dato que representa una clase.

En la mayoría de casos, las clases suelen ser intervalos $[a, b] \in \mathbb{R}$ y sus marcas de clase mayormente están dadas por $\frac{a+b}{2}$. Sin embargo, si nuestros datos son, por ejemplo, las frecuencias de las notas musicales de un piano afinado en $A = 432$ hz; es decir, que la nota “la” de la octava central tenga esa frecuencia, cada marca de clase estaría dada por 432 multiplicado por 2 elevado a un número entero que represente el número de octavas de diferencia entre la octava que es representada por dicha clase y la octava central. En el caso de la octava central, el intervalo de la clase que la representa sería $[256.87, 513.74]$ mientras que su marca de clase sería 432; y sin embargo, $(\frac{256.87+513.74}{2}) = 385.30 \neq 432$.

Anexo 2.2: Mapeo de actores

En primer lugar, es crucial realizar un análisis preliminar de la información disponible con respecto al proyecto en desarrollo y del contexto social donde se lleva a cabo. Este análisis implica la identificación de posibles obstáculos relacionados con el proyecto, la revisión de antecedentes locales que podrían afectar los resultados del mapeo, y la elaboración de escenarios tanto positivos (de baja conflictividad) como negativos (de alta conflictividad). Estos escenarios se basan en variables económicas, sociales y otras relevantes que podrían influir en los resultados del proyecto. De esta manera, podemos tener una idea clara de la información necesaria que debemos obtener de los actores involucrados, quienes podrían tener un impacto significativo en los resultados del proyecto.

Luego de realizar este análisis, será posible definir los objetivos del mapeo, dado que tendremos claridad sobre la información que se busca obtener y con qué propósito. Con los datos obtenidos, podremos identificar características comunes, circunstancias compartidas y diferencias entre los actores involucrados. Esto nos permitirá comprender las razones por las cuales se encuentran en la situación respecto a los temas que se investigan en el proyecto.

Después de haber definido los objetivos, para determinar las causas del estado situacional de los actores, es necesario identificar las variables relevantes que contribuirán a la elaboración del mapeo. Algunas variables comunes incluyen:

- **Sectorial:** Incluye los diferentes sectores en los que operan los actores, como público o privado, posición socioeconómica, nivel educativo, ocupación, entre otros.
- **Jurisdiccional:** Considera los diferentes niveles jurisdiccionales que pueden tener impacto en el proyecto, como regional, nacional, provincial y local.
- **Nivel de poder:** Indica la influencia que un actor puede ejercer sobre un tema o problema abordado en el proyecto.

- **Posicionamiento:** Evalúa el acceso del actor a información relevante para el mapeo y su capacidad de influencia en base a su popularidad o círculo social.
- **Variables generales:** Incluyen características como género, edad, ubicación urbana o rural, y otros factores relevantes para el mapeo.

Una vez definidas las variables a utilizar, se procede a realizar un gráfico del mapeo de actores, siguiendo la metodología de Tapella [91]. En este gráfico, se representan los resultados de estas variables y se posicionan a los actores según corresponda. A medida que se incluyan más variables, puede ser necesario elaborar múltiples matrices de datos. Basándonos en la información recopilada de los actores en este proyecto, el mapeo puede visualizarse de la siguiente manera:

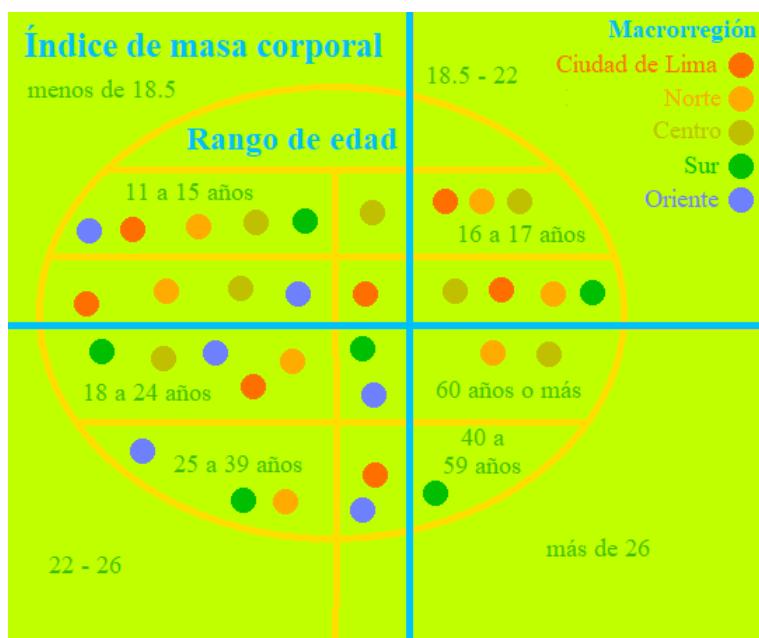


Figura CXXXV: Gráfico de un mapeo de actores por rango de edad, IMC y macrorregión

Una vez diseñado el gráfico del mapeo, se procede a emplear métodos para recolectar la información deseada. Algunos de estos métodos incluyen:

- Realización de encuestas en el terreno donde se desarrollará el proyecto.
- Revisión de documentos oficiales como DNI, pasaportes, convenios, entre otros.
- Utilización de internet para obtener información a través de blogs o redes sociales.
- Observación directa en eventos locales con o sin participación activa.
- Combinación de métodos, como realizar encuestas a través de redes sociales.

En varios casos, será necesario descartar algunos métodos de recolección de información debido a circunstancias específicas. Por ejemplo, si se requiere información de pacientes que estuvieron en camas UCI, no se podrá acceder a los registros privados de las clínicas que contengan estos datos. Por lo tanto, la selección de métodos debe considerar las vías disponibles para recolectar la información y analizar si son adecuados para obtener los datos necesarios para llevar a cabo el proyecto. Finalmente, una vez elaborado el mapeo de actores, se analiza la viabilidad del proyecto en función del nivel de apoyo obtenido.

Anexo 2.3: Técnicas de tratamiento de la ciencia de datos

Métodos y técnicas de balanceo de datos

Debido al desbalance de datos al clasificar a los encuestados por edad, género, índice de masa corporal, entre otros, donde hay más mujeres que hombres y más menores de edad que mayores, será necesario utilizar enfoques para corregir los efectos del desbalance de clases en la clasificación de datos. Para ello, son útiles las técnicas de resampling, según García [92], las cuales se aplican directamente a los datos para modificar las distribuciones de las clases. Estas técnicas pueden incluir undersampling u oversampling.

- **Undersampling:** Consiste en eliminar instancias de la clase mayoritaria.
- **Oversampling:** Consiste en replicar instancias de la clase minoritaria o generar nuevas instancias.

Las técnicas también pueden ser heurísticas y no heurísticas; es decir, cuyos procesos sean controlados o aleatorios respectivamente. En el primer caso, se controla la pérdida o el replicado de información; mientras que en el segundo caso, estos riesgos se mantienen latentes. Otra manera de clasificar las técnicas es teniendo en cuenta si el algoritmo de resampling balancea las clases hasta igualar el número de casos de cada una o siguiendo otros criterios como filtrar los casos recurrentes. Algunas técnicas de resampling son:

- **Undersampling aleatorio**
Consiste en seleccionar aleatoriamente ejemplos de la clase mayoritaria y eliminarlos del conjunto de datos con la finalidad de igualar su número de instancias con el de la clase minoritaria. La desventaja de esta técnica es que a veces descarta datos potencialmente útiles para un proceso de clasificación posterior.
- **Oversampling aleatorio**
Consiste en seleccionar aleatoriamente ejemplos de la clase minoritaria y duplicarlos con la finalidad de igualar su número de instancias con el de la clase mayoritaria. La desventaja de esta técnica es que genera información que no está incluida en los datos y podría alterar significativamente resultados obtenidos a partir de otros tipos de clasificaciones.
- **Condensed nearest neighbours**
Es un algoritmo diseñado para reducir la información del conjunto de datos de una clasificación de k -vecinos. En la regresión de k -vecinos, el dato adquiere el valor del promedio de valores de los k datos más próximos. Si se usa para clasificación de datos, el dato adquiere la clasificación que tienen la mayoría de los k datos más cercanos.
Se toma el conjunto de datos $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, en el que cada instancia x_i tiene su respectiva clase asociada $y_i, \forall i \in \{1, \dots, n\}$; del cual se tomarán algunas instancias para construir un conjunto condensado U mediante el siguiente proceso iterativo:
 - Se toma aleatoriamente un elemento $x_0 \in X$ y se añade a U ; de manera que, $U = \{x_0\}$.
 - Mediante la regla de los k -vecinos más cercanos para $k = 1$, se añade una nueva instancia a U cuando su clase y la clase de la instancia en U no coincida; es decir, se toma la instancia más próxima a x_0 del conjunto de instancias cuyas clases son distintas a la de x_0 y se añade a U .

- Las instancias cercanas en $k = 1$ cuyas clases coinciden con la de x_0 serán eliminadas. Estas instancias se considerarán recurrentes y no estarán incluidas en el conjunto de datos U .

Este proceso se efectúa con cada elemento de X . Si llamamos prototipo a la instancia incluida en U en el segundo paso del proceso iterativo, los prototipos serían los puntos que dibujan la frontera de decisión entre clases; es decir, la curva que separa las clases. La desventaja de esta técnica es que se toma de manera aleatoria un elemento en el primer paso del proceso iterativo; y que el porcentaje de instancias que se eliminan respecto al total de instancias suele ser alto, por lo que los resultados pueden variar significativamente dependiendo del orden en el que se les realiza este proceso a los elementos de X .

■ NearMiss

Es una técnica que busca equilibrar la distribución de clases eliminando aleatoriamente algunos datos de las clases mayoritarias. Cuando las instancias de dos clases diferentes se encuentran muy próximas, se eliminan instancias de la clase mayoritaria en base a k -vecinos para aumentar los espacios entre las clases. Tiene varias versiones cuyos algoritmos se centran en la elección de los vecinos para la eliminación de dichas instancias.

- **Versión 1:** Sea n el número de instancias de la clase minoritaria. Para cada instancia de la clase mayoritaria, se miden las distancias entre la instancia y sus tres vecinos más cercanos y se halla el promedio de las tres distancias. Se conservan las n instancias de la clase mayoritaria cuyos promedios sean menores.
- **Versión 2:** Sea n el número de instancias de la clase minoritaria. Para cada instancia de la clase mayoritaria, se miden las distancias entre la instancia y sus tres vecinos más lejanos, y se halla el promedio de las tres distancias. Se conservan las n instancias de la clase mayoritaria cuyos promedios sean menores.
- **Versión 3:** Sea n el número de instancias de la clase minoritaria. Se seleccionan las m instancias de la clase mayoritaria más cercanas a las instancias de la clase minoritaria, donde m es un número aleatorio mayor a n . Para cada una de las m instancias, se miden las distancias entre la instancia y sus tres vecinos más cercanos, y se halla el promedio de las tres distancias. Se conservan las n instancias de la clase mayoritaria cuyos promedios sean mayores.

■ SMOTE + Tomek Links

SMOTE es un método de sobremuestreo que sintetiza nuevos ejemplos plausibles en la clase minoritaria sobre las líneas de unión de sus k -vecinos más cercanos. El proceso iterativo es el siguiente:

- Se computan los k -vecinos del conjunto de instancias de la clase minoritaria.
- Se computan las instancias sintéticas, generadas de la siguiente forma:

$$s_j^i = x_i + \lambda(x_j^i - x_i), \quad j \in \{1, \dots, k\} \quad (273)$$

Donde s_j^i es la instancia que se está generando, x_i es la instancia de la clase minoritaria sobre la que se computan sus x_j^i , $j \in \{1, \dots, k\}$ vecinos y λ es un número aleatorio del intervalo $[0, 1]$.

Mediante las iteraciones se va formando una malla de líneas hasta obtener el número de instancias deseado.

Tomek Links es un método para identificar pares de vecinos más cercanos en un conjunto de datos que tienen diferentes clases. La eliminación de uno o ambos ejemplos en estos pares (como los ejemplos en la clase mayoritaria) tiene el efecto de hacer que la división entre clases en el conjunto de datos sea menos ambiguo. Sean x_i y x_j este par de vecinos, X el conjunto de instancias y $d : X \rightarrow \mathbb{R}$ una función que mide las distancias entre las instancias. Si no existe una tercera instancia x_l que cumpla:

$$d(x_i, x_l) < d(x_i, x_j) \vee d(x_j, x_l) < d(x_i, x_j) \quad (274)$$

La instancia de la clase mayoritaria será eliminada; ya que la distancia entre las instancias x_i y x_j se llama enlace de Tomek, y los enlaces de Tomek deben cumplir que las instancias que los forman deben ser de clases distintas y una debe ser la vecina más próxima de la otra y viceversa. La desventaja de esta técnica es que al eliminar instancias próximas a otras de diferente clase, las de la clase minoritaria adquieren una mayor importancia; principalmente en que varias podrían pasar a formar parte de la frontera entre clases y el verdadero límite de decisión sería desconocido.

■ Adaptative synthetic sampling

Es una técnica que utiliza una distribución ponderada para diferentes ejemplos de clases minoritarias añadiendo una distorsión a los datos para hacerlos más realistas. Esta distorsión parte de la introducción de una proporción entre los k vecinos que pertenecen a la clase mayoritaria y los k vecinos de una instancia de la clase minoritaria. Para cada instancia x_i de dicha clase, se computan su k vecinos y se calcula una proporción r_i de la siguiente forma:

$$r_i = \frac{k_i}{k} \quad (275)$$

Donde k_i se el número de k vecinos más próximos de la instancia x_i que pertenecen a la clase mayoritaria. Por lo tanto, $k_i \leq k$; y consecuentemente, $r_i \in [0, 1]$. Luego de ello, se normalizan los r_i mediante la siguiente expresión:

$$\hat{r}_i = \frac{r_i}{\sum_{j=1}^n r_j} \quad (276)$$

Donde n es el número de instancias de la clase minoritaria y $\{\hat{r}_1, \hat{r}_2, \dots, \hat{r}_n\}$ es una distribución de probabilidad que cumple que $\sum_{j=1}^n \hat{r}_j = 1$.

Después, se calcula el número s de instancias sintéticas obtenidas mediante el método SMOTE para cada instancia x_i . Luego, se aplica la siguiente distorsión:

$$g_i = r_i \cdot s \quad (277)$$

Donde g_i es el número de instancias que se están generando por cada x_i .

Teniendo en cuenta si sus procesos son aleatorios o no y la forma de balancear las clases, estas técnicas pueden ser clasificadas de la siguiente manera:

TABLA XIX

Técnicas de resampling.

Técnica	Algoritmo	Tipo de método	Tipo de modificación
Undersampling	Undersampling aleatorio	No heurístico	Igualar la cantidad de casos en clases
	Condensed Nearest Neighbours	Heurístico	Eliminar las instancias recurrentes
	NearMiss	Heurístico	Eliminar las instancias recurrentes
Oversampling	Oversampling aleatorio	No heurístico	Igualar la cantidad de casos en clases
	Adaptative Synthetic Sampling	Heurístico	Igualar la cantidad de casos en clases
Híbridos	SMOTE + Tomek Links	Heurístico	Igualar la cantidad de casos en clases

La tendencia central

Una medida de tendencia central es un valor típico de una población o muestra y un valor único que intenta describir un conjunto de datos identificando la posición central dentro de ese conjunto de datos. Nos ayuda a encontrar el promedio de un conjunto de datos. Las tres medidas más comunes de tendencia central, según Bowerman [93], son la moda, la mediana y la media:

- **Moda:** Es el valor que aparece con mayor frecuencia en los datos. Es posible que haya más de una moda si las cantidades de valores que aparecen con mayor frecuencia son iguales. Si hay dos modas, los datos son bimodales; y si hay más de dos, son multimodales.
- **Mediana:** Es el valor central de la lista de datos ordenada de menor a mayor; es decir, tanto la cantidad de datos menores como la cantidad de mayores a ese valor no pueden ser mayores al 50 % del total de datos. Si el número de datos es par y los valores centrales no son iguales, la mediana es el promedio de dichos valores.
- **Media:** Es el resultado que se obtiene al promediar todos los datos. Es decir, que si tenemos N datos X_1, X_2, \dots, X_N de la población, la media poblacional μ estaría dada por:

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^N X_i}{N} \quad (278)$$

Y si tenemos n datos x_1, x_2, \dots, x_n de la muestra, la media muestral \bar{x} estaría dada por:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad (279)$$

Medias ponderadas

Cuando algunas mediciones tienen mayor importancia que otras, se les asigna “pesos” numéricos a los datos. La media ponderada otorga distintos pesos a los valores sobre los que se calcula. Si se tienen n valores, la media ponderada estaría dada por:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n w_i x_i}{\sum_{i=1}^n w_i} \quad (280)$$

Por ejemplo, si una persona tiene una mina de la que extrae metales como oro, plata, cobre, plomo, hierro y uranio, y las variables x_i ($i \in \{1, \dots, 6\}$) miden el precio de cada metal por kilo; entonces, para saber cuánto dinero obtiene por cada kilo de metales que extrae, se tendrán que agregar las variables w_i ($i \in \{1, \dots, 6\}$) que midan el peso extraído de cada metal y resolver la siguiente ecuación:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^6 w_i x_i}{\sum_{i=1}^6 w_i}$$

Medidas de variación

Conocer las medidas de tendencia central no es suficiente para extraer la información necesaria de un conjunto de datos que nos permita conocer su gráfica de manera aproximada. Las modas y medianas de los datos de las muestras siguientes son $mo = me = 15$ y sus medias son $\bar{x} = 15.68$.

13	13	14	14	14
14	15	15	15	15
15	15	15	16	16
16	16	16	17	17
17	18	18	19	19

10	11	11	12	12
13	14	14	15	15
15	15	16	16	16
17	17	18	18	18
19	19	20	20	21

Figura CXXXVI: Conjuntos de datos numéricos.

Sin embargo, las gráficas en las que se muestran las distribuciones de los datos no son muy similares; en el segundo caso, los datos están distribuidos de una manera más amplia que en el primero:

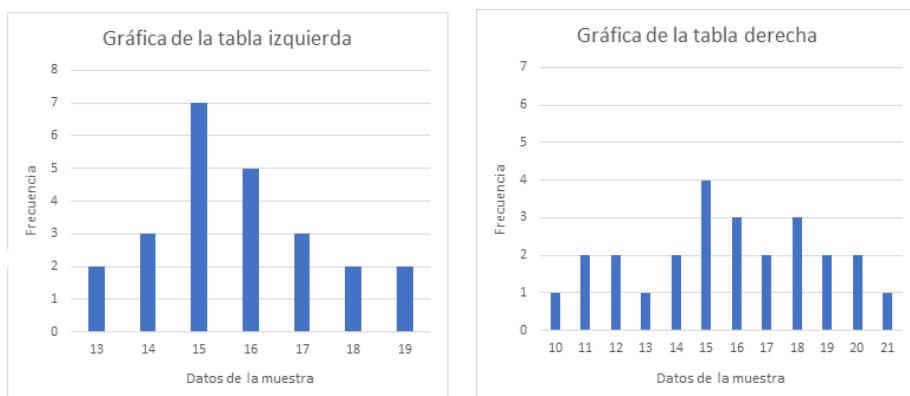


Figura CXXXVII: Gráficas de los datos de las muestras.

Rango: Es la diferencia entre la medida más alta y la medida más baja.

Varianza: Es el promedio de las desviaciones cuadráticas de las medidas individuales de un conjunto de datos respecto a la media de dicho conjunto de datos. Se definen dos tipos de varianza:

- **Varianza poblacional** (σ^2): Es el promedio de las desviaciones cuadráticas de las medidas individuales de la población respecto a la media poblacional μ . Para una

población de tamaño N , la varianza poblacional σ^2 es:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^2}{N} \quad (281)$$

- **Varianza muestral (s^2)**: Es el promedio de las desviaciones cuadráticas de las medidas individuales de la muestra respecto a la media muestral \bar{x} . Para una muestra de tamaño n , la varianza muestral s^2 es:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n - 1} \quad (282)$$

Desviación estándar: La desviación estándar es la raíz cuadrada positiva de la varianza. Por lo tanto, la desviación estándar poblacional (σ) es la raíz cuadrada de la varianza poblacional y la desviación estándar muestral (s) es la raíz cuadrada de la varianza muestral.

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^2}{N}}, \quad s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}} \quad (283)$$

Coeficiente de variación: Es una medida de variabilidad relativa que mide en términos porcentuales el valor de la desviación estándar respecto al valor de la media. Se usa para comparar las variabilidades de los valores respecto a la media, y la variabilidad relativa de poblaciones o muestras con medias diferentes y distintas desviaciones estándar. Los coeficientes de variación poblacional y muestral son, respectivamente:

$$CV_\mu = \frac{\sigma}{\mu} \cdot 100 \% \quad CV_{\bar{x}} = \frac{s}{\bar{x}} \cdot 100 \% \quad (284)$$

Datos agrupados en intervalos

Hay casos en los que no se conoce el valor exacto de los datos cuantitativos sino que pertenecen a un intervalo de una escala numérica. Para organizar este tipo de datos, se crea la tabla siguiente:

TABLA XX

Tabla de datos agrupados en intervalos.

Intervalo	x_i	f_i	$x_i f_i$	F_i
$[a_1, b_1]$	$\frac{a_1 + b_1}{2}$	f_1	$\frac{a_1 + b_1}{2} * f_1$	f_1
$[a_2, b_2]$	$\frac{a_2 + b_2}{2}$	f_2	$\frac{a_2 + b_2}{2} * f_2$	$f_1 + f_2$
.
.
.
$[a_n, b_n]$	$\frac{a_n + b_n}{2}$	f_n	$\frac{a_n + b_n}{2} * f_n$	$\sum_{i=1}^n f_i$

Donde:

- n es el número de datos
- a_i, b_i ($i \in \{1, \dots, n\}$) son los valores extremos de los intervalos
- x_i es el valor central del i -ésimo intervalo
- f_i es la frecuencia relativa y representa el número de datos cuyos valores se encuentran en el i -ésimo intervalo.
- F_i es la frecuencia acumulada y representa el número de datos cuyos valores se encuentran entre el primer y el i -ésimo intervalo.

Moda en intervalos agrupados: Dado que no siempre es posible determinar el valor exacto que más se repite, la moda se aproxima considerando el intervalo con mayor frecuencia de valores. Se calcula la proporción entre la diferencia de la cantidad de valores en el intervalo con mayor frecuencia relativa y la suma de las cantidades de valores en los intervalos adyacentes. Luego, esta proporción se multiplica por la amplitud del intervalo para obtener la moda. Si suponemos que el intervalo de mayor frecuencia relativa es $[a_i, b_i]$, la moda m_o se obtiene de cualquiera de las siguientes maneras:

$$\begin{aligned} m_o &= a_i + \frac{f_i - f_{i-1}}{(f_i - f_{i-1}) + (f_i - f_{i+1})}(b_i - a_i) \\ m_o &= b_i - \frac{f_i - f_{i+1}}{(f_i - f_{i-1}) + (f_i - f_{i+1})}(b_i - a_i) \end{aligned} \quad (285)$$

Mediana en intervalos agrupados: La mediana se obtiene aproximando el valor central de los datos ordenados de menor a mayor. Para calcularla, se determina el intervalo que contiene este valor central. Se considera la cantidad de datos en ese intervalo, las frecuencias absolutas de dicho intervalo y del intervalo anterior. Luego, se calcula la proporción entre la diferencia de la posición del valor central respecto al menor o mayor valor del intervalo, y la cantidad total de valores en dicho intervalo. Esta proporción se multiplica por la amplitud del intervalo para obtener la mediana. Si suponemos que n es el número total de datos y que $F_{i-1} < \frac{n}{2} \leq F_i$, la mediana m_e se obtiene de las siguientes maneras:

$$\begin{aligned} m_e &= a_i + \frac{\frac{n}{2} - F_{i-1}}{f_i}(b_i - a_i) \\ m_e &= b_i - \frac{F_i - \frac{n}{2}}{f_i}(b_i - a_i) \end{aligned} \quad (286)$$

Evidentemente, si $\frac{n}{2} = F_i$, entonces $m_e = b_i$

Media en intervalos agrupados: La media se obtiene asumiendo que todos los valores de cada intervalo son iguales al valor central del intervalo. Por lo tanto, la media muestral se obtiene de esta forma:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i f_i}{\sum_{i=1}^n f_i} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i f_i}{n} \quad (287)$$

Análogamente, para N datos, la media poblacional se obtiene así:

$$\sigma = \frac{\sum_{i=1}^N x_i f_i}{\sum_{i=1}^N f_i} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i f_i}{N} \quad (288)$$

Varianza en intervalos agrupados: Al igual que la media, se asume que todos los valores de cada intervalo son iguales al valor central del intervalo; por lo que la varianza poblacional y varianza muestral son, respectivamente:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^N f_i(x_i - \mu)^2}{N}, \quad s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n f_i(x_i - \bar{x})^2}{n-1} \quad (289)$$

Desviación estándar en intervalos agrupados: Como la desviación estándar es la raíz cuadrada de la varianza, la desviación estándar poblacional y la desviación estándar muestral son, respectivamente:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N f_i(x_i - \mu)^2}{N}}, \quad s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n f_i(x_i - \bar{x})^2}{n-1}} \quad (290)$$

Descripción de la forma

La distribución normal refleja en cierta medida cómo se distribuyen los datos de una población o muestra, pero no de manera completa, ya que para que esto ocurriera, la media, la mediana y la moda deberían tener el mismo valor, algo que raramente sucede. Por esta razón, también es importante considerar una característica conocida como oblicuidad del gráfico en la distribución de un conjunto de datos.

Oblicuidad: Es una medida de asimetría de la distribución de un conjunto de datos que describe la forma de la distribución y nos dice dónde hay mayor concentración de datos.

Coeficiente de oblicuidad de Pearson: Para hallar el grado de asimetría de dicha distribución se define el coeficiente de oblicuidad de Pearson como el valor de la diferencia entre la media y la moda respecto al valor de la desviación estándar. Los coeficientes de oblicuidad de Pearson poblacional y muestral son, respectivamente:

$$SK_\sigma = \frac{\mu - M_o}{\sigma}, \quad SK_s = \frac{\bar{x} - m_o}{s} \quad (291)$$

En el caso que el conjunto de datos sea multimodal y no tenga una moda bien definida, se usa la relación empírica entre la moda, la mediana y la media; es decir, una relación basada en la observación entre dichas medidas para reemplazar la moda mediante la siguiente igualdad:

$$m_o = 3m_e - 2\bar{x} \quad (292)$$

Por lo tanto, los coeficientes de oblicuidad de Pearson poblacional y muestral usando la mediana serían, respectivamente:

$$SK_\sigma = \frac{3(\mu - M_e)}{\sigma}, \quad SK_s = \frac{3(\bar{x} - m_e)}{s} \quad (293)$$

Oblicuidad positiva: Una distribución de datos tiene oblicuidad positiva cuando el coeficiente de oblicuidad de Pearson es positivo y, consecuentemente, la mayoría de datos están agrupados alrededor del extremo izquierdo de dicha distribución. En este tipo de distribuciones, generalmente se tiene que $m_o < m_e < \bar{x}$.

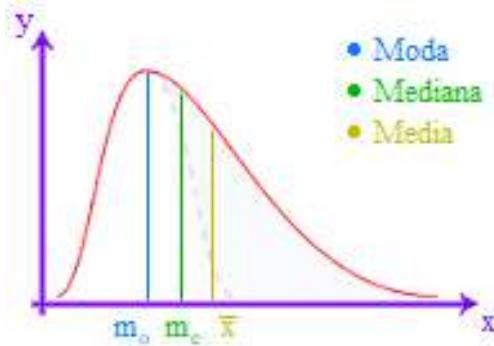


Figura CXXXVIII: Gráfica de una distribución de datos con oblicuidad positiva.

Oblicuidad negativa: Una distribución de datos tiene oblicuidad negativa cuando el coeficiente de oblicuidad de Pearson es negativo y, consecuentemente, la mayoría de datos se encuentran agrupados alrededor del extremo izquierdo de dicha distribución. En este tipo de distribuciones, generalmente se tiene que $m_o > m_e > \bar{x}$.

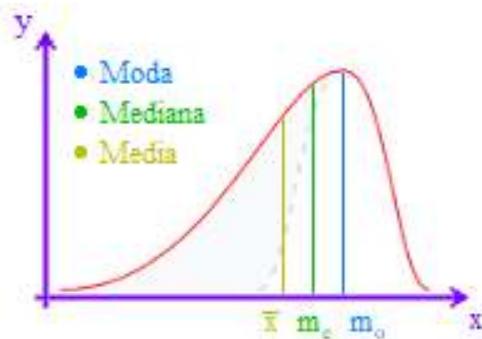


Figura CXXXIX: Gráfica de una distribución de datos con oblicuidad negativa.

Distribución simétrica: Cuando la distribución es simétrica, la moda, la media y la mediana se encuentran en el centro de la distribución; y por ende, se tiene que $m_o = m_e = \bar{x}$.

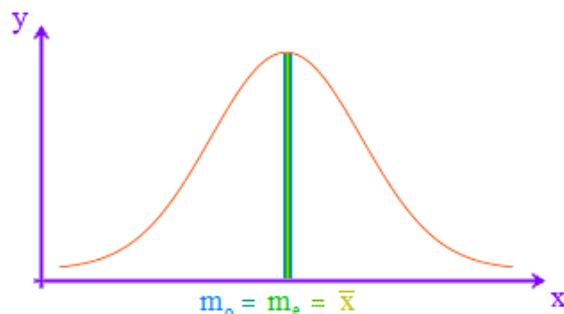


Figura CXL: Gráfica de una distribución de datos simétrica.

Curtosis: Es una medida que determina el grado de concentración de datos en la zona central de la distribución; y por ende, mide la agudeza del pico y el grosor de las colas laterales de la gráfica de la distribución. La curtosis poblacional y muestral son respectivamente:

$$K = \frac{\sum_{i=1}^N (X_i - \mu)^4}{N\sigma^4}, \quad k = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^4}{(n-1)s^4} \quad (294)$$

- Si $k = 3$, la gráfica de distribución es mesocúrtica.
- Si $k < 3$, la gráfica de distribución es platicúrtica.
- Si $k > 3$, la gráfica de distribución es leptocúrtica.

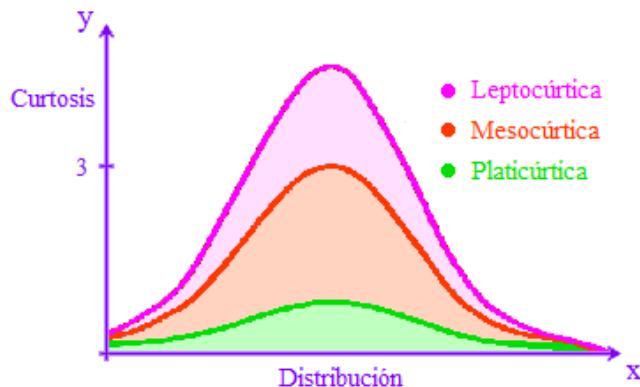


Figura CXLI: Tipos de gráficas de distribución según su curtosis.

Aproximación de datos

Para aproximar los datos en una gráfica de distribución, se definen los siguientes conceptos:

- **Percentiles y cuantiles:** Para un conjunto de mediciones organizadas en orden creciente, el i -ésimo percentil es un valor que indica que la cantidad de datos menores a ese valor no puede ser mayor al $i\%$ del total de datos y la cantidad de datos mayores a ese valor no puede ser menor al $(100 - i)\%$ del total de datos.
 - El primer cuartil Q_1 es el 25^{to} percentil.
 - El segundo cuartil Q_2 es el 50^{mo} percentil y también es la mediana m_e .
 - El tercer cuartil Q_3 es el 75^{to} percentil.
 - El rango intercuartil RIC es $Q_3 - Q_1$.

- **Cálculo de percentiles:** Para calcular el i -ésimo percentil de un conjunto de n datos, se colocan las mediciones x_1, x_2, \dots, x_n en orden creciente y se define la siguiente función:

$$X(j) = x_{[j]} + (j - [j]) \cdot (x_{[j]+1} - x_{[j]}) \quad (295)$$

Luego de eso, se calcula el i -ésimo percentil P_i , igualando: $P_i = X((n+1)i/100)$.

- **El valor z :** El valor z es la diferencia entre el valor de la componente x de un dato (x, y) y el valor de la media, respecto a la desviación estándar. Por lo tanto, para un valor x de un dato (x, y) de una población o muestra, sus respectivos valores Z y z serían, respectivamente:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}, \quad z = \frac{x - \bar{x}}{s} \quad (296)$$

Se puede observar que el valor z es negativo si x está a la izquierda de la media, y es positivo cuando x está a la derecha de la media.

■ **Teorema de Chebyshev:** Sean μ y σ la media y la desviación estándar de una población respectivamente. Luego, para cualquier valor $Z > 1$, se cumple:

- Al menos $100(1 - 1/Z^2)\%$ de las mediciones de la población se encuentran en el intervalo $[\mu - Z\sigma, \mu + Z\sigma]$.
- Solamente se aplica para distribuciones de población que no sean extremadamente asimétricas.

■ **La regla empírica para poblaciones normales:** Cuando una población tiene media μ y desviación estándar σ , y está descrita por una curva normal, se cumple lo siguiente:

- El 68.26 % de las mediciones de la población se encuentran a una desviación estándar de la media como máximo; es decir, dentro del intervalo $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$.
- El 95.44 % de las mediciones de la población se encuentran a dos desviaciones estándar de la media como máximo; es decir, dentro del intervalo $[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]$.
- El 99.73 % de las mediciones de la población se encuentran a tres desviaciones estándar de la media como máximo; es decir, dentro del intervalo $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$.

La distribución de mediciones de población en el gráfico de la curva normal se puede visualizar en la siguiente imagen:

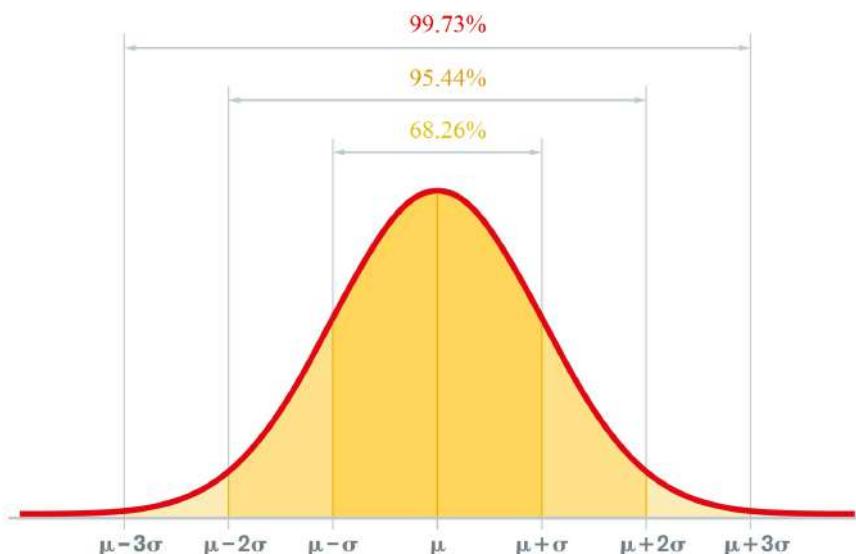


Figura CXLII: Gráfica de una distribución de datos según la regla empírica.

Anexo 2.4: Modelos predictivos

Definiciones previas

Parámetro: Es un resumen numérico de la población que describe uno de sus aspectos más importantes.

Estadística: Es un resumen numérico de una muestra que describe una de sus características.

En la siguiente tabla, se muestran algunas notaciones básicas:

TABLA XXI

Tabla de parámetros y estadísticas.

	Parámetro		Estadística
μ	Promedio de la población	\bar{x}	Promedio de la muestra
β_1	Pendiente de la población	b_1	Pendiente de la muestra
σ	Desviación estándar de la población	s	Desviación estándar de la muestra

Análisis de regresión lineal simple

Coeficiente de correlación r : Es una medida numérica que mide la intensidad y dirección de una relación lineal.

- Los valores de r se encuentran en el intervalo $[-1, 1]$.
- La intensidad es débil cuando $|r| \in [0, 0.3)$, moderada cuando $|r| \in [0.3, 0.7)$, y fuerte cuando $|r| \in [0.7, 1]$.
- La dirección es positiva cuando $r > 0$, negativa cuando $r < 0$, y no se indica dirección alguna cuando $r \approx 0$.
- El coeficiente de correlación se obtiene al realizar la siguiente operación:

$$r = \frac{\sum(x - \bar{x})(y - \bar{y})}{(n - 1)s_x s_y} \quad (297)$$

donde n es la cantidad de datos, y s_x y s_y son las desviaciones estándar de las componentes x e y respectivamente de los datos usados.

Modelo estadístico para elegir las variables de estudio en una población: Utilizaremos una expresión simple de regresión lineal para relacionar las variables de estudio en una población conformada por un cierto número de personas encuestadas, donde x representa el número de encuestados e y representa la respuesta generada por cada encuestado. Según Stine [94], las regresiones lineales que utilizaremos son las siguientes:

$$\mu_y = \beta_0 + \beta_1 x \quad \vee \quad y = \beta_0 + \beta_1 x + \epsilon \quad (298)$$

- x : Representa a la persona encuestada.
- y : Valor actual de la respuesta de la persona encuestada.
- μ_y : Valor medio que relaciona y en población para un valor fijo de x .
- β_0 : Intersección de la población.
- β_1 : Pendiente de la población.
- ϵ : Error de la respuesta de la población: $\epsilon = y - \mu_y$.

Modelo estimado o predictivo de la población: Para nuestro estudio, estimaremos los parámetros utilizando una muestra de la población. Sustituiremos β_0 por b_0 y β_1 por b_1 en nuestro modelo estimado de la población, el cual describe la relación estimada entre las variables x e y . La expresión de este modelo es la siguiente:

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x \quad (299)$$

Los coeficientes b_0 y b_1 representan las estadísticas en el modelo lineal. Estas estimaciones numéricas se hallan usando regresión de mínimos cuadrados. Por lo tanto, estos coeficientes se obtienen mediante las siguientes ecuaciones:

$$b_1 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \sum_{i=1}^n y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^n x_i)^2}{n}} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n-1}}{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} = \frac{s_{xy}}{s_x^2} \quad (300)$$

$$b_0 = \bar{y} - b_1 \bar{x}$$

Donde:

- n es la cantidad de personas encuestadas
- $\{x_i\}_{i=1}^n$ es el conjunto de personas encuestadas
- $\{y_i\}_{i=1}^n$ es el conjunto de valores de las respuestas de cada persona x_i encuestada.
- s_{xy} es la covarianza muestral entre x e y
- \bar{x} y \bar{y} son los promedios de los valores que representan algún aspecto de las personas encuestadas y de sus respuestas, respectivamente.

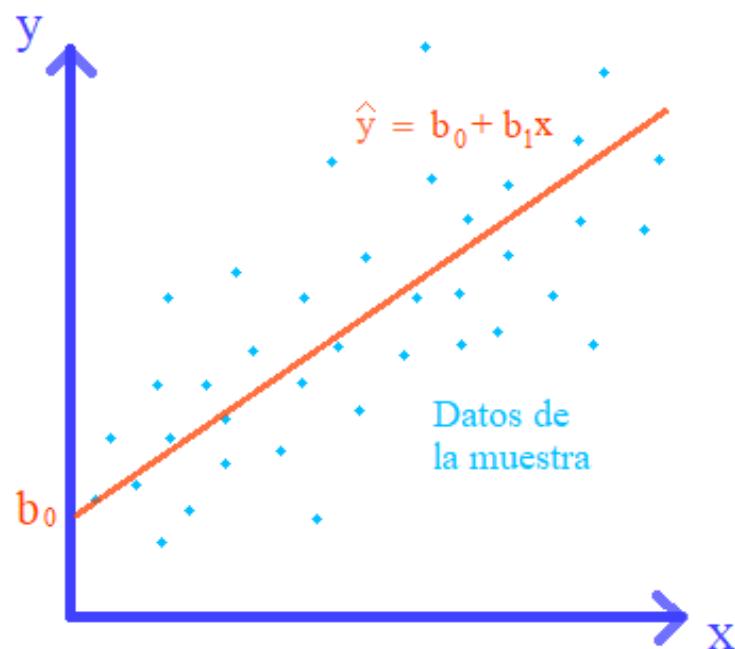


Figura CXLIII: Gráfica del modelo predictivo.

El residuo e es la estimación del error y se obtiene así: $e = y - \hat{y}$

Los cuatro supuestos del modelo de regresión lineal simple: Son cuatro condiciones que deben cumplir los modelos para que se puedan hacer inferencias válidas. Estos supuestos son:

- **Muestra aleatoria simple:** Los valores de y deben ser independientes unos de otros.
- **Forma del modelo:** Debe existir una relación lineal entre μ_y y x .
- **Varianza constante:** Para cada valor de x , la varianza de los valores de y debe ser constante.

- **Normalidad:** Para cada valor de x , la distribución de los valores de y debe ser aproximadamente normal. Esto se verifica evaluando si los residuos del modelo están aproximadamente normalmente distribuidos.

Inferencias de regresión: Son herramientas como el uso de intervalos de confianza o pruebas de hipótesis que se utilizan para comprobar si la relación lineal entre x e y se mantiene para la población entera.

Intervalos de confianza: Es una técnica de estimación que permite acotar un par o varios pares de valores entre los cuales se estima que estará cierto valor desconocido respecto de un parámetro poblacional con un determinado nivel de confianza. Los límites de confianza se obtienen al resolver la siguiente ecuación:

$$b_i \pm t^* E S_{b_i} \quad (301)$$

donde b_i ($i \in \{0, 1\}$) son los coeficientes de la ecuación que representa la relación estimada entre las variables x e y , t es la cantidad de grados de libertad respecto al porcentaje del nivel de confianza que se desea, $E S_{b_i} = \frac{s_{b_i}}{\sqrt{n}}$ es la desviación estándar o error estándar correspondiente a b_i , y n es la cantidad de datos de la muestra.

Prueba de hipótesis para una relación lineal entre x e y : Se realiza para probar si existe evidencia entre x e y ; para ello, evaluamos la hipótesis nula H_0 y la hipótesis alternativa H_a :

$$H_0 : \beta_i = 0 \quad vs. \quad H_a : \beta_i \neq 0 \quad (i \in \{0, 1\}) \quad (302)$$

Luego, se realiza la estadística de prueba: $t_{b_i} = \frac{b_i}{s_{b_i}}$

Después, se halla el p-valor resolviendo la siguiente ecuación:

$$p = \frac{|b_i - \beta_i|}{\sqrt{\frac{\beta_i(1-\beta_i)}{n}}} \quad (303)$$

Donde los β_i son los coeficientes de la ecuación que representa el modelo de población.

Finalmente, concluimos lo siguiente:

- Si $p > 0.1$, hay poca o ninguna evidencia en contraste de la hipótesis nula.
- si $p \in (0.05, 0.1]$, hay evidencia débil en contraste de la hipótesis nula.
- si $p \in (0.025, 0.05]$, hay evidencia moderada en contraste de la hipótesis nula.
- si $p \in (0.001, 0.025]$, hay evidencia fuerte o sustancial en contraste de la hipótesis nula.
- si $p \leq 0.001$, hay evidencia abrumadora en contraste de la hipótesis nula.

Análisis de regresión múltiple

El análisis de regresión múltiple consiste en desarrollar un proceso para predecir el resultado de la variable y en función de dos o más variables x_i , $i \in \{1, 2, \dots\}$, según Stine [94]. Se usa cuando un resultado depende de más de un solo factor.

Por ejemplo, el precio de una oveja no depende únicamente de su peso sino también de su edad; ya que el precio será mayor mientras la oveja pese más kilos y será menor mientras tenga más años de edad. Podemos llamar x_1 a la variable que mida el peso de la oveja, y x_2 a la que mida su edad.

Modelo teórico de regresión múltiple: La ecuación que representaría el modelo teórico de regresión múltiple o modelo de población de regresión múltiple para el ejemplo mencionado sería:

$$\mu_y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 \quad (304)$$

Donde β_1 es positivo y β_2 es negativo.

De manera general, tenemos que si y depende de m variables denominadas x_1, x_2, \dots, x_m , el modelo estaría representado por la siguiente ecuación:

$$\mu_y = \beta_0 + \sum_{i=1}^m \beta_i x_i \quad \vee \quad y = \beta_0 + \sum_{i=1}^m \beta_i x_i + \epsilon \quad (305)$$

Donde:

- μ_y es el valor medio de y .
- β_0 es el valor de la línea de ajuste cuando se intersepta con el eje y .
- Los β_i ($i \in \{1, \dots, m\}$) son los coeficientes que reflejan la contribución de las variables x_i respectivamente sobre el valor de y .
- ϵ es el error que representa la diferencia entre el valor de y para un x fijo según la observación y la media del modelo de población. $\epsilon \sim N(0, \sigma)$, ya que $\epsilon = y - \mu_y$.

Los cuatro supuestos del modelo de regresión múltiple: Luego de estimar un error con un residuo $e = y - \hat{y}$, se comprobarán los mismos supuestos que en el modelo de regresión lineal simple usando técnicas similares. Los supuestos y sus respectivas técnicas son:

- **Muestra aleatoria simple:** Se toma un subconjunto aleatorio de la población para que cada miembro de ella tenga la misma probabilidad de ser elegido y la muestra no represente más a un sector de la población que a otro.
- **Forma adecuada del modelo:** Se verifica con un diagrama en el que se comparan residuos con los valores previstos.
- **Varianza constante:** Se verifica con el mismo diagrama del ítem anterior.
- **Normalidad de los errores:** Se verifica usando un diagrama cuantil normal de los residuos.

Raíz del error cuadrático medio: Dado que cada punto en la población puede ser expresado como la suma del valor de la línea de regresión de la población μ_y sumado al error ϵ , cuya distribución normal $N(0, \sigma)$ tiene una varianza σ^2 en el modelo de regresión, definimos el error de regresión estándar o raíz del error cuadrático medio (RECM) por $s = \sqrt{s^2}$, el cual es una estimación de σ , donde:

$$s^2 = ECM = \frac{SEC}{n - \#\beta} = \frac{SEC}{n - (m + 1)} = \frac{\sum (y_i - \hat{y}_i)^2}{n - m - 1} \quad (306)$$

Donde:

- ECM es el error cuadrático medio.
- SEC es la suma de errores cuadráticos.
- n es el número de datos de la muestra.

- $\#\beta$: es el número de parámetros β_j estimados.
- m es la cantidad de variables del modelo teórico $\hat{y} = \beta_0 + \sum_{j=1}^m \beta_j x_j$.
- $y_i = \beta_0 + \sum_{j=1}^m \beta_j x_j + \epsilon_i$, donde $\epsilon_i = y_i - \hat{y}_i$

Interpretación de la RECM: Al usar la distribución normal y el contexto de los datos de la muestra, se espera que aproximadamente el 68 %, 95 % y 99.7 % de los valores de y de todas las observaciones estén dentro de los intervalos $[\mu_y - s, \mu_y + s]$, $[\mu_y - 2s, \mu_y + 2s]$ y $[\mu_y - 3s, \mu_y + 3s]$ respectivamente.

Por ejemplo, si sacamos una muestra de la población de ovejas del ejemplo anterior, y se calcula que el valor medio de y es $\mu_y = 95$ y la raíz del error cuadrático medio es $s \approx 0,5951$, se esperaría que el 95 % de los valores de y se encuentren en el intervalo [93.81, 96.19].

Inferencia para regresión múltiple: La inferencia para parámetros de regresión individuales es similar a la inferencia para la regresión lineal simple mediante intervalos de confianza o pruebas de hipótesis. Para el i -ésimo parámetro de regresión múltiple o coeficiente β_i , los valores extremos del intervalo de confianza están dados por:

$$b_i \pm t^* E S_{b_i} \quad (307)$$

Donde t^* está basado en una t -distribución con $n - m - 1$ grados de libertad; y $E S_{b_i} = \frac{s_{b_i}}{\sqrt{n}}$ es la desviación estándar o error estándar correspondiente a b_i , la estimación de β_i .

Prueba de hipótesis para β_i ($i \in \{0, 1, 2, \dots, m\}$): Luego de haber verificado que se cumplan los cuatro supuestos mencionados arriba, se procede a realizar los siguientes pasos:

- Establecer la hipótesis:

$$H_0 : \beta_i = 0 \quad vs. \quad H_a : \beta_i \neq 0 \quad (308)$$

- Obtener el valor de la estadística de prueba:

$$t_{b_i} = \frac{b_i}{E S_{b_i}} \quad (309)$$

- Hallar el p-valor:

$$p\text{-valor} = 2 \cdot P(T > |t_{b_i}|) \quad (310)$$

Donde P es la función probabilidad y $P(T > |t_{b_i}|)$ mide el porcentaje del área rosa con respecto al área total debajo de la curva de la distribución normal de la siguiente gráfica:

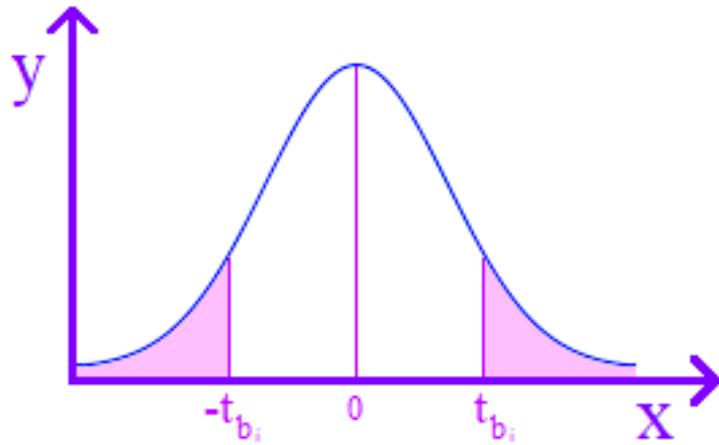


Figura CXLIV: Áreas bajo la gráfica de una distribución normal en las que $P(T > |t_{b_i}|)$.

- Concluimos que, si luego de hacer la hipótesis alternativa $H_a : \beta_i \neq 0$ obtenemos que $p \leq 0.1$, los datos sugieren que la variable y y la variable x_i se encuentran linealmente relacionadas cuando todas las demás variables x_j ($j \in \{0, 1, 2, \dots, m\} - \{i\}$) se mantienen constantes. Mientras que, si luego de hacer la hipótesis nula $H_0 : \beta_i = 0$ se tiene que $p \leq 0.1$, tendremos las siguientes posibilidades:
 - No hay relación entre y y x_i .
 - Existe relación entre y y x_i , pero no es lineal sino más compleja.
 - Hay una relación entre y y x_i ; sin embargo, esta relación ya ha sido tomada en cuenta por otra variable x_j o conjunto de variables $\{x_j, j \in \{0, 1, 2, \dots, m\} - \{i\}\}$.

Prueba estadística global: Además de las pruebas anteriores efectuadas sobre cada β_i en particular, también se puede realizar una prueba global que abarque todos los β_i , $i \in \{0, 1, 2, \dots, m\}$ y evaluar la siguiente hipótesis general:

$$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_m = 0 \quad vs. \quad \beta_i \neq 0 \text{ para algún } i \in \{0, 1, 2, \dots, m\} \quad (311)$$

Por lo tanto, se puede deducir lo siguiente:

- H_0 asume que ninguna de las variables x_i están linealmente relacionadas a y , y que el modelo no es útil.
- H_a asume que al menos una de las variables x_i está relacionada linealmente a y .
- H_a asume que el modelo es útil en describir los valores de y .
- H_a no evalúa qué tan útil es el modelo, sólo que lo es.
- Bajo H_a no se puede determinar cuántas de las variables x_i están linealmente relacionadas a y .

Construcción de la estadística de prueba: La estadística de prueba para verificar la hipótesis general se llama F -estadística y se calcula mediante la siguiente fórmula:

$$F = \frac{CMR}{ECM} \quad (312)$$

Donde:

- CMR es el cuadrado medio dependiente de la regresión. Su fórmula es:

$$CMR = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y})^2}{m} \quad (313)$$

- ECM es el error cuadrático medio.
- El p -valor representa la probabilidad de observar un F -valor mayor que el valor calculado por la F -estadística.
- Si la hipótesis nula H_0 es verdadera, F sigue la llamada distribución F con m y $n - m - 1$ grados de libertad.
- Una variable aleatoria X tiene una distribución F con m y l grados de libertad ($X \sim F_{m,l}$) si su función densidad está dada por:

$$f(x) = \frac{\Gamma(\frac{m+l}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{l}{2})} \left(\frac{m}{l}\right)^{\frac{m}{2}} \frac{x^{\frac{m-2}{2}}}{(1 + \frac{mx}{l})^{\frac{m+l}{2}}} \quad (314)$$

Coeficiente de correlación R : Mide qué tan bien nuestro modelo se ajusta a los datos. Como en regresión lineal múltiple se tienen varias variables (supongamos que son p variables), tendremos un coeficiente de correlación general resultante de p coeficientes de correlación respecto a cada variable x_i , cuyas fórmulas son:

$$r_i = \frac{\sum (x_i - \bar{x}_i)(y - \bar{y})}{(n - 1)s_{x_i}s_y} \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, p\} \quad (315)$$

Y la fórmula del coeficiente de correlación R es:

$$R = \sqrt{1 - \prod_{i=1}^p (1 - r_i^2)} \quad (316)$$

Variables categóricas

Modelos con variables categóricas: Los modelos también pueden incluir variables categóricas cualitativas. Las variables cualitativas no pueden ser medidas usando una escala numérica; por lo tanto, es necesario darle un código numérico a sus valores. A estos valores codificados se les llama niveles. A las variables cualitativas codificadas se les suele llamar variables ficticias o variables indicadoras, ya que los números asignados para cada nivel son arbitrarios.

Por ejemplo, el color de ojos de una persona depende de los genes de dos pares de cromosomas de ambos padres. En el par 19 se definen las matrices entre el verde, el azul y el gris; mientras que en el par 15 se definen las matrices entre el color resultante del par 19 y el marrón. Por lo tanto, el color de ojos de la persona dependería de cuatro variables que representen el gen responsable del color de ojos de cada cromosoma. Si denominamos por x_{11} y x_{12} a las variables que representen a los genes responsables del color de ojos de los cromosomas del par 15, y x_{21} y x_{22} a las de los cromosomas del par 19, tendremos que brindarles los códigos numéricos 0 y 1 a las dos primeras variables, y que estos códigos representen si el pigmento marrón está presente en el código genético; mientras que a las variables x_{21} y x_{22} se les asignaría los códigos 0, 1 y 2. En este caso, podíamos definir las variables x_{11}, x_{12}, x_{21} y x_{22} de la siguiente manera:

- x_{11} : Gen del color de ojos del cromosoma del par 15 heredado por el padre.
- x_{12} : Gen del color de ojos del cromosoma del par 15 heredado por la madre.
- x_{21} : Gen del color de ojos del cromosoma del par 19 heredado por el padre.
- x_{22} : Gen del color de ojos del cromosoma del par 19 heredado por la madre.

De manera que la codificación se definiría de la siguiente forma:

$$x_{11} = \begin{cases} 0 & \text{Si el pigmento marrón no está presente en el código genético} \\ 1 & \text{Si el pigmento marrón está presente en el código genético} \end{cases}$$

$$x_{12} = \begin{cases} 0 & \text{Si el pigmento marrón no está presente en el código genético} \\ 1 & \text{Si el pigmento marrón está presente en el código genético} \end{cases}$$

$$x_{21} = \begin{cases} 0 & \text{Si los pigmentos verde y azul no están presentes en el código genético} \\ 1 & \text{Si el pigmento azul está presente en el código genético} \\ 2 & \text{Si el pigmento verde está presente en el código genético} \end{cases}$$

$$x_{22} = \begin{cases} 0 & \text{Si los pigmentos verde y azul no están presentes en el código genético} \\ 1 & \text{Si el pigmento azul está presente en el código genético} \\ 2 & \text{Si el pigmento verde está presente en el código genético} \end{cases}$$

Nivel base: Las variables categóricas reciben el valor cero como nivel base ya que el modelo predictivo no las estaría tomando en cuenta al reemplazar ese valor en las variables. Por lo tanto, los valores de y sólo estarían siendo modificados por las variables categóricas cuando adquieren valores diferentes de cero.

Modelos con variables categóricas y cuantitativas: Es posible incluir ambos tipos de variables en un modelo. Por ejemplo, supongamos que el pago que recibe una persona por hacer una propaganda depende de su color de ojos, de la forma de su nariz y de su dentadura. Si definimos las variables x_3 y x_4 de manera que midan la curvatura de la nariz y la calidad de la dentadura según el puntaje colocado por un observador, el modelo de regresión se expresaría mediante la siguiente ecuación:

$$\mu_y = \beta_0 + \beta_1 x_{11} + \beta_2 x_{12} + \beta_3 x_{21} + \beta_4 x_{22} + \beta_5 x_3 + \beta_6 x_4$$

Término de interacción: Si la relación entre μ_y y una variable x_i dependen de los valores de otros x_j ($j \neq i$), los modelos de regresión de primer orden ya no serían apropiados para predecir y . Para incorporar este detalle al modelo, construimos un producto cruz llamado el término de interacción para dos o más x_i .

Por ejemplo, si en el caso anterior agregáramos una variable que mida cuánto empeora el aspecto de una persona por tener alguna patología en los ojos como las cataratas. Si esta variable es denotada por x_5 , el modelo predictivo sería:

$$\mu_y = \beta_0 + \sum_{j=1}^2 \sum_{i=1}^2 \beta_{2i+j-2} x_{ij} + \sum_{i=3}^5 \beta_{i+2} x_i + \sum_{j=1}^2 \sum_{i=1}^2 \beta_{2i+j+5} x_{ij} x_5$$

Evidentemente, los β_i ($i \in \{7, 8, \dots, 11\}$) son negativos, ya que una patología visible sería desfavorable en el aspecto de una persona.

Análisis de series de tiempo y pronóstico

El análisis de series de tiempo desarrolla modelos que permiten la correlación entre las observaciones secuencialmente tomadas a lo largo del tiempo y muestran cómo se pueden utilizar estos modelos para pronosticar la respuesta de interés en un futuro próximo.

Serie de tiempo: Una serie de tiempo S se puede describir como una secuencia de valores (x_1, x_2, \dots, x_n) , obtenidos en determinados tiempos conocidos (t_1, t_2, \dots, t_n) , registrados en orden cronológico. El análisis de series temporales permite extrapolar o interpolar sobre la fuente de datos con diversos grados de confianza mientras predice el comportamiento de la serie S en el futuro mediante el pronóstico o la extrapolación. Por lo tanto, una serie de tiempo es una colección de datos obtenida luego de observar el comportamiento de la variable y en puntos regulares en el tiempo. Se denota por:

$$y_t = \text{respuesta de interés en el momento } t \quad (317)$$

En particular, el análisis de modelos de series de tiempo generalmente implica la evaluación de las siguientes componentes:

- **Evaluación de tendencias:** Observar si la serie de tiempo tiende a crecer o decrecer a lo largo de un periodo de tiempo.
- **Contabilización de la temporada:** El cambio de temporada genera fluctuaciones en las series de tiempo que vuelven a ocurrir durante periodos de tiempo conocidos específicos.
- **Explotación de la correlación en serie:** Correlación entre los residuos de series temporales en distintos puntos en el tiempo luego de haber eliminado la tendencia, la temporalidad y componentes cíclicos.

Los datos de series temporales suelen ser secuencias de valores (en formato discreto o forma continua) medidas a lo largo del tiempo. La actualización dinámica, la incertidumbre y la alta dimensionalidad de las series temporales las hacen diferentes de otros datos como imágenes, texto, etc.

Modelo de series de tiempo: El modelo general de series de tiempo está dado por:

$$Y_t = T_t + S_t + R_t \quad (318)$$

Donde:

- T_t representa la componente de la tendencia
- S_t representa la componente de variación generada por el cambio de temporada
- R_t representa el efecto residual

La clave para el modelado de series de tiempo es diseñar métodos de representación de características efectivas para datos de series temporales dinámicas, que es un tema desafiante y se enfrenta a problemas tales como alta dimensión, dinámica e incertidumbre.

Modelamiento de la tendencia T_t usando mínimos cuadrados: Si en una serie de tiempo

se presenta una tendencia lineal, un modelo de regresión lineal simple puede ser apropiado para modelar la componente de tendencia T_t . Este modelo estaría dado por el siguiente modelo de tendencia lineal:

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 t + R_t \quad (319)$$

donde t corresponde al periodo de tiempo.

Los periodos de tiempo suelen ser codificados de muchas formas; sin embargo, se suelen codificar de manera que el primer periodo de tiempo tome el valor de 1 ($t = 1$); el segundo periodo, el valor de 2 ($t = 2$); y así sucesivamente. Si es apropiado, la componente de tendencia también puede ser ajustada usando modelos de tendencia de órdenes mayores a 1, como el modelo de tendencia cuadrático.

Uso de variables indicadoras en el modelo de regresión múltiple para ajustar la temporalidad: Se usa el modelo de regresión múltiple para describir el comportamiento general o tendencia de la serie de tiempo y se usan variables indicadoras para ajustar el modelo teniendo en cuenta los cambios de temporada. Si hay k temporadas, se necesitarán $k - 1$ variables indicadoras para cada periodo t .

$$x_{j,t} = \begin{cases} 1 & \text{Si el periodo } t \text{ es de la temporada } j \\ 0 & \text{Otro caso} \end{cases} \quad (320)$$

Al incluirlas en el modelo de regresión múltiple, tendríamos:

$$\hat{y}_t = b_0 + b_1 t + \sum_{j=1}^{k-1} b_{j+1} x_{j,t} \quad (321)$$

El término residual: El término residual R_t contiene lo que resta en la serie de tiempo luego de eliminar los términos de temporalidad y el término de tendencia. Se consideran dos posibilidades:

- Los residuos R_t tienen una dispersión aleatoria. Esto quiere decir que toda la información de importancia se encuentra en el término de tendencia y los términos de temporalidad.
- Los residuos R_t no tienen una dispersión aleatoria pero pueden ser dependientes con el tiempo.

Uso de correlación serial en errores para mejorar las predicciones: Cuando los residuos R_t son dependientes a lo largo del tiempo, según Padilla [95] y Du [96], decimos que los residuos exhiben una autocorrelación o correlación en serie. En este caso, se puede mejorar las predicciones para Y_t si se incorpora información sobre el patrón de dependencia entre los residuos R_t . Un modelo importante para la correlación en serie es el modelo autorregresivo de primer orden o modelo $AR(1)$:

$$R_t = \alpha_0 + \alpha_1 R_{t-1} + ea \quad (322)$$

Donde ea es el error aleatorio.

El modelo muestra que el residuo R_t depende del residuo previo R_{t-1} en la serie de tiempo. Esto significa que la correlación en serie permite predecir con efectividad un residuo dado

R_t mediante residuos previos. A pesar de que no se pueden llegar a ver los residuos R_t directamente, se pueden estimar al observar los residuos de los datos de la muestra:

$$e_t = y_t - \hat{y}_t \quad (323)$$

Donde los residuos estimados e_t siguen un modelo de regresión para ajustar las componentes de temporalidad y la tendencia \hat{y}_t .

Un buen indicador para la correlación en serie es un diagrama de residuos, ya que suelen haber errores en este diagrama luego de que el modelo de regresión sea ajustado para dichas componentes. Otra opción es trazar los pares (e_{t-1}, e_t) de residuos estimados para verificar una relación lineal.

Modelos de correlación en serie en residuos: Si se desea encontrar una relación lineal en un diagrama (e_{t-1}, e_t) de residuos, se puede trazar una línea de ajuste entre los puntos (e_{t-1}, e_t) . Es decir, se hallaría una línea de regresión con los residuos estimados:

$$\hat{e}_t = a_0 + a_1 e_{t-1}$$

Esto resulta de sustituir los residuos estimados e_t por los residuos R_t que aparecen en el modelo de autorregresión $AR(1)$. Y gracias a ello, se pueden predecir residuos futuros \hat{e}_t y tener pronósticos de “tendencia + residuos” \hat{y}_t . Por lo tanto, la predicción para y_t en un periodo futuro es:

$$\text{Pronóstico para } y_t = \hat{y}_t + \hat{e}_t \quad (324)$$

Anexo 3: Módulo computacional de las técnicas de procesamiento de imágenes implementado en códigos de MATLAB

En este anexo se colocan los códigos de los algoritmos de las técnicas de procesamiento que se utilizaron en MATLAB para obtener los resultados.

Anexo 3.1: Códigos para corregir errores de calibración

Código para corregir el error de angulación

El código para realizar esta operación es el siguiente:

```
1 % Cargar la imagen
2 I = imread(['nombre de la imagen].[formato de la imagen]');
3
4 % Especifica el ángulo de rotación en sentido antihorario en grados
5 % sexagesimales
6 angulo = alpha;
7
8 % Girar la imagen en el ángulo alpha deseado utilizando la función
9 % imrotate "
10 Ir = imrotate(I, angulo, 'crop');
11
12 % Recortar la imagen colocando los valores v1, v2, v3 y v4 que representan
13 % las cantidades de pixeles entre uno de los bordes de la imagen y la posición
14 % de recorte (bordes izquierdo y derecho para los valores v1 y v3
15 % respectivamente, y bordes superior e inferior para los valores v2 y v4
16 % respectivamente)
17 Irr = imcrop(Ir, [v1 v2 v3 v4]);
18
19 % Muestra la imagen rotada
20 imshow(Irr);
```

Código para corregir el error de la mala ubicación de la cámara

El código para realizar esta operación es el siguiente:

```
1 % Cargar la imagen
2 img = imread(['nombre de la imagen].[formato de la imagen]');
3
4 % Mostrar la imagen
5 figure;
6 imshow(img);
7 title('Selecciona los puntos del cuadrilátero y ajusta su posición');
8
9 % Crear un cuadrilátero interactivo
10 h = impoly(gca, [50 50; 200 50; 200 200; 50 200]);
11
12 % Esperar a que el usuario ajuste los puntos
13 disp('Ajusta los puntos del cuadrilátero y doble clic para finalizar');
14 position = wait(h);
15
16 % Definir las coordenadas de los puntos destino para la transformación
17 % Esto normalmente sería un rectángulo, por ejemplo:
18 fixedPoints = [1 1; size(img, 2) 1; size(img, 2) size(img, 1); 1 size(img, 1)];
19
20 % Ajustar la transformación de perspectiva
21 tform = fitgeotrans(position, fixedPoints, 'projective');
22
23 % Aplicar la transformación a la imagen
24 outputImage = imwarp(img, tform, 'OutputView', imref2d(size(img)));
25
```

```

26 % Mostrar la imagen original y la corregida
27 figure;
28 subplot(1, 2, 1);
29 imshow(img);
30 title('Imagen Original');
31
32 subplot(1, 2, 2);
33 imshow(outputImage);
34 title('Imagen Corregida');

```

Código para corregir la descentralización de la imagen

El código para realizar esta operación es el siguiente:

```

1 % Cargar la imagen en MATLAB
2 I = imread('[nombre de la imagen].[formato de la imagen]');
3
4 % Recortar la imagen ajustada manualmente
5 [J, rect] = imcrop(I);
6
7 % Mostrar la imagen recortada
8 figure;
9 imshow(J);
10 title('Imagen Recortada');

```

Código para corregir la luminosidad de la imagen

El código para realizar esta operación es el siguiente:

```

1 % Cargar la imagen en MATLAB
2 I = imread('[nombre de la imagen].[formato de la imagen]');
3
4 % Ajustar la luminosidad de la imagen
5 I_ajustada = imadjust(I, [a; b], [c; d]);
6 %Donde "a" y "b" son valores entre 0 y 1 que representan los valores extremos
    del rango de luminosidad de la imagen de entrada, y "c" y "d" los que
    representan los valores extremos del rango de luminosidad de la imagen de
    salida.
7
8 % Mostrar la imagen ajustada
9 imshow(I_ajustada);

```

Anexo 3.2: Códigos para ampliar la imagen

Código para ampliar la imagen mediante interpolación *RGB*

Para ampliar una imagen mediante interpolación *RGB*, se utiliza un código en MATLAB que contiene un bucle en el cual, para cada pixel en la imagen ampliada, se calcula su posición correspondiente en la imagen redimensionada y se asigna el valor del pixel más cercano. El código es el siguiente:

```

1 % Cargar la imagen
2 imagen_original = imread('[nombre de la imagen].[formato de la imagen]');
3
4 % Factor de escala
5 factor_escala = (escribir el factor de escala);
6
7 % Redimensionar la imagen original antes de la ampliación
8 imagen_redimensionada = imresize(imagen_original, 1/factor_escala);

```

```

9
10 % Obtener dimensiones de la imagen redimensionada
11 [filas, columnas, canales] = size(imagen_redimensionada);
12
13 % Calcular nuevas dimensiones después de la ampliación
14 nuevas_filas = round(filas * factor_escala);
15 nuevas_columnas = round(columnas * factor_escala);
16
17 % Inicializar la imagen ampliada
18 imagen_ampliada = zeros(nuevas_filas, nuevas_columnas, canales);
19
20 % Calcular el factor de escala inverso
21 factor_escala_inverso = 1 / factor_escala;
22
23 % Bucle sobre cada pixel en la imagen ampliada
24 for i = 1:nuevas_filas
25     for j = 1:nuevas_columnas
26         % Calcular la posición correspondiente en la imagen redimensionada
27         x_redimensionada = round(i * factor_escala_inverso);
28         y_redimensionada = round(j * factor_escala_inverso);
29
30         % Asegurarse de que las coordenadas estén dentro de los límites
31         x_redimensionada = max(1, min(x_redimensionada, filas));
32         y_redimensionada = max(1, min(y_redimensionada, columnas));
33
34         % Asignar el valor del pixel correspondiente en la imagen
            redimensionada
35         imagen_ampliada(i, j, :) = imagen_redimensionada(x_redimensionada,
36                                         y_redimensionada, :);
37     end
38 end
39
40 % Mostrar la imagen original
41 figure;
42 imshow(imagen_redimensionada);
43 title('Imagen Original');
44
45 % Mostrar la imagen ampliada por el vecino más cercano
46 figure;
47 imshow(imagen_ampliada / 255);
48 title('Imagen Ampliada por Vecino Más Cercano');

```

Código para amplificar la imagen mediante interpolación bilineal

Para agrandar una imagen mediante interpolación bilineal, se usa un código en MATLAB en el que para cada pixel en la imagen ampliada, se calculan sus coordenadas correspondientes en la imagen redimensionada y se realiza la interpolación bilineal para obtener su valor. El código es el siguiente:

```

1 % Cargar la imagen
2 imagen_original = imread('[nombre de la imagen].[formato de la imagen]');
3
4 % Factor de escala
5 factor_escala = (escribir el factor de escala);
6
7 % Redimensionar la imagen original antes de la ampliación
8 imagen_redimensionada = imresize(imagen_original, 1/factor_escala);
9
10 % Obtener dimensiones de la imagen redimensionada
11 [filas, columnas, canales] = size(imagen_redimensionada);
12
13 % Calcular nuevas dimensiones después de la ampliación

```

```

14 nuevas_filas = round(filas * factor_escala);
15 nuevas_columnas = round(columnas * factor_escala);
16
17 % Inicializar la imagen ampliada
18 imagen_ampliada = zeros(nuevas_filas, nuevas_columnas, canales);
19
20 % Calcular el factor de escala inverso
21 factor_escala_inverso = 1 / factor_escala;
22
23 % Bucle sobre cada píxel en la imagen ampliada
24 for i = 1:nuevas_filas
25     for j = 1:nuevas_columnas
26         % Calcular las coordenadas en la imagen redimensionada
27         x_redimensionada = i * factor_escala_inverso;
28         y_redimensionada = j * factor_escala_inverso;
29
30         % Coordenadas enteras más cercanas
31         x0 = floor(x_redimensionada);
32         y0 = floor(y_redimensionada);
33
34         % Coordenadas fraccionarias
35         dx = x_redimensionada - x0;
36         dy = y_redimensionada - y0;
37
38         % Asegurarse de que las coordenadas estén dentro de los límites
39         x0 = max(1, min(x0, filas - 1));
40         y0 = max(1, min(y0, columnas - 1));
41
42         % Interpolación bilineal
43         valor_pixel = (1 - dx) * (1 - dy) * double(imagen_redimensionada(x0,
44             y0, :)) + ...
45             dx * (1 - dy) * double(imagen_redimensionada(x0 + 1, y0
46                 , :)) + ...
47                 (1 - dx) * dy * double(imagen_redimensionada(x0, y0 +
48                     1, :)) + ...
49                     dx * dy * double(imagen_redimensionada(x0 + 1, y0 + 1,
50                         :));
51
52         % Asignar el valor del píxel interpolado en la imagen ampliada
53         imagen_ampliada(i, j, :) = uint8(valor_pixel);
54     end
55 end
56
57 % Mostrar la imagen original
58 figure;
59 imshow(imagen_redimensionada);
60 title('Imagen Original')
61
62 % Mostrar la imagen ampliada por interpolación bilineal
63 figure;
64 imshow(imagen_ampliada/255);
65 title('Imagen Ampliada por Interpolación Bilineal');

```

Código para amplificar la imagen mediante interpolación bicúbica

Para ampliar una imagen mediante interpolación bicúbica, se emplea un código en MATLAB en el que se ajusta una función cúbica a los valores conocidos de los píxeles vecinos. Esta función cúbica se utiliza para estimar los valores de píxeles en posiciones intermedias entre los píxeles originales. El código es el siguiente:

```

1 % Cargar la imagen
2 imagen_original = imread('[nombre de la imagen].[formato de la imagen]');

```

```

3 % Factor de escala
4 factor_escala = (escribir el factor de escala);
5
6 % Redimensionar la imagen original antes de la ampliación
7 imagen_redimensionada = imresize(imagen_original, 1/factor_escala);
8
9 % Redimensionar la imagen original usando imresize para interpolación bicú
10 bica
11 imagen_ampliada = imresize(imagen_redimensionada, factor_escala, 'bicubic');
12
13 % Mostrar la imagen original
14 figure;
15 imshow(imagen_redimensionada);
16 title('Imagen Original');
17
18 % Mostrar la imagen ampliada por interpolación bicúbica
19 figure;
20 imshow(imagen_ampliada);
21 title('Imagen Ampliada por Interpolación Bicúbica');

```

Código para amplificar la imagen mediante la DFT

El código en MATLAB para ampliar imágenes usando la transformada discreta de Fourier bidimensional es el siguiente:

```

1 % Cargar la imagen
2 I = imread(['[nombre de la imagen].[formato de la imagen]']);
3
4 % Calcular la transformada de Fourier de la imagen
5 for i=1:3
6     F(:,:,i) = fft2(I(:,:,i));
7 end
8
9 % Definir el factor de amplificación
10 a = "valor de amplificación";
11
12 % Crear una hipermatriz cuyas submatrices adyacentes a sus esquinas contengan
13 % los valores RGB de la imagen y llenar el resto de valores de la
14 % hipermatriz con ceros.
15 F_amplified = zeros(size(F,1)*a, size(F,2)*a, size(F,3));
16 F_amplified(1:size(F,1)/2,1:size(F,2)/2,1:size(F,3)) = F(1:size(F,1)/2,1:size(F,2)/2,1:size(F,3));
17 F_amplified(size(F,1)*a-size(F,1)/2+1:size(F,1)*a,1:size(F,2)/2,1:size(F,3)) =
18 F(size(F,1)/2+1:size(F,1),1:size(F,2)/2,1:size(F,3));
19 F_amplified(1:size(F,1)/2,size(F,2)*a-size(F,2)/2+1:size(F,2)*a,1:size(F,3)) =
20 F(1:size(F,1)/2,size(F,2)/2+1:size(F,2),1:size(F,3));
21 F_amplified(size(F,1)*a-size(F,1)/2+1:size(F,1)*a,size(F,2)*a-size(F,2)/2+1:
22 size(F,2)*a,1:size(F,3)) = F(size(F,1)/2+1:size(F,1),size(F,2)/2+1:size(F,
2),1:size(F,3));
23
24 % Calcular la transformada inversa de Fourier de la imagen amplificada
25 for i=1:3
26     I_amplified(:,:,i) = a^2*ifft2(F_amplified(:,:,i))/255;
27 end
28
29 % Mostrar la imagen original y la imagen amplificada.
30 figure;
31 imshow(I);
32 title('Imagen original');
33 figure;

```

```

30 imshow(I_amplified, 'InitialMagnification', a*100);
31 title('Imagen amplificada');

```

Anexo 3.3: Códigos para comprimir la imagen

Código para comprimir la imagen mediante la TDC

El código en MATLAB para comprimir imágenes usando la transformada discreta coseno (TDC) es el siguiente:

```

1 % Cargar la imagen
2 I = imread('[nombre de la imagen].[formato de la imagen]');
3
4 % Guardar la imagen original en un archivo temporal
5 imwrite(I, '[nombre de la imagen]_temp.[formato de la imagen]');
6
7 % Obtener información sobre el archivo de la imagen original
8 info_original = dir('[nombre de la imagen]_temp.[formato de la imagen]');
9
10 % Mostrar el peso del archivo original en KB
11 fileSizeOriginalBytes = info_original.bytes;
12 fileSizeOriginalKB = fileSizeOriginalBytes / 1024;
13 disp(['El tamaño de la imagen original es: ', num2str(fileSizeOriginalKB), ' KB']);
14
15 % Calcular la TDC de la imagen
16 for i=1:3
17     D(:,:,i) = dct2(I(:,:,i));
18 end
19
20 % Definir el número de coeficientes de la TDC que se van a conservar
21 n_coef = 222;
22
23 % Establecer los coeficientes restantes a cero
24 D(n_coef+1:end, :, :) = 0;
25 D(:, n_coef+1:end, :) = 0;
26
27 % Calcular la transformada inversa de la DCT de la imagen comprimida
28 for i=1:3
29     I_comp(:,:,:,i) = idct2(D(:,:,:,i));
30 end
31
32 % Convertir la imagen comprimida a un formato apropiado (uint8)
33 I_comp_uint8 = uint8(I_comp);
34
35 % Guardar la imagen comprimida en formato JPEG
36 imwrite(I_comp_uint8, 'Rad5_compressed.jpg', 'Quality', 90);
37
38 % Obtener información sobre el archivo de imagen comprimida
39 info_compressed = dir('Rad5_compressed.jpg');
40
41 % Mostrar el tamaño del archivo comprimido en KB
42 fileSizeCompressedBytes = info_compressed.bytes;
43 fileSizeCompressedKB = fileSizeCompressedBytes / 1024;
44 disp(['El tamaño de la imagen comprimida es: ', num2str(fileSizeCompressedKB), ' KB']);
45
46 % Mostrar las imágenes original y comprimida
47 figure;
48 imshow(I);
49 title('Imagen original');
50

```

```

51 figure;
52 imshow(I_comp_uint8);
53 title('Imagen comprimida');

```

Código para comprimir la imagen mediante la técnica de wavelet

El código en MATLAB para comprimir una imagen mediante la técnica de wavelet es el siguiente:

```

1 % Directorio temporal
2 tempDir = tempname;
3 mkdir(tempDir);
4
5 % Cargar imagen
6 img = imread(['nombre_de_la_imagen].[formato_de_la_imagen]');
7
8 % Guardar la imagen original en un archivo temporal
9 originalPath = fullfile(tempDir, 'original_temp.png');
10 imwrite(img, originalPath);
11
12 % Obtener información sobre el archivo de la imagen original
13 info_original = dir(originalPath);
14
15 % Mostrar el tamaño del archivo original en KB
16 fileSizeOriginalBytes = info_original.bytes;
17 fileSizeOriginalKB = fileSizeOriginalBytes / 1024;
18 disp(['El tamaño de la imagen original es: ', num2str(fileSizeOriginalKB), ' KB']);
19
20 % Descomposición wavelet
21 [c, l] = wavedec2(img, 2, 'nombre_de_la_wavelet');
22
23 % Obtener imagen aproximada
24 app = appcoef2(c, l, 'nombre_de_la_wavelet', 2);
25
26 % Reducir la aproximación en un 70%
27 compression_ratio = 0.7;
28 app_compressed = (1-compression_ratio) * app;
29
30 % Asignar la aproximación comprimida de nuevo a los coeficientes
31 c(1:length(app_compressed(:))) = app_compressed(:);
32
33 % Reconstruir imagen
34 reconstructed = uint8(waverec2(c, l, 'nombre_de_la_wavelet'));
35
36 % Guardar la imagen reconstruida en un archivo temporal
37 compressedPath = fullfile(tempDir, 'compressed_temp.jpg');
38 imwrite(reconstructed, compressedPath, 'Quality', 90);
39
40 % Obtener información sobre el archivo de la imagen reconstruida
41 info_compressed = dir(compressedPath);
42
43 % Mostrar el tamaño del archivo comprimido en KB
44 fileSizeCompressedBytes = info_compressed.bytes;
45 fileSizeCompressedKB = fileSizeCompressedBytes / 1024;
46 disp(['El tamaño de la imagen comprimida es: ', num2str(fileSizeCompressedKB), ' KB']);
47
48 % Mostrar la lista de archivos en el directorio temporal
49 disp('Lista de archivos en el directorio temporal:');
50 listing = dir(tempDir);
51 disp({listing.name});

```

```

52 % Mostrar las imágenes original y comprimida
53 figure;
54 imshow(img);
55 title('Imagen original');
56
57
58 figure;
59 imshow(reconstructed/(1-compression_ratio));
60 title('Imagen procesada (70% comprimida)');

```

Anexo 3.4: Códigos para filtrar la imagen

Código para filtrar la imagen mediante el filtro lineal de la media

El código en MATLAB para emplear este filtro es el siguiente:

```

1 % Se lee la imagen y se guarda en una hipermatriz im de dimensiones MxNx3;
  donde M es la cantidad de columnas de pixeles de la imagen y N la cantidad
  de filas, y cada elemento guarda el valor del 0 al 255 de la intensidad
  de la luz R, G o B cuando K vale 1, 2 o 3 respectivamente.
2 im = imread(['nombre de la imagen].[formato de la imagen']);
3
4 % Se crea una hipermatriz fn cuyos valores representen la imagen inicial con
  el efecto de ruido "sal y pimienta".
5 fn = imnoise(im, 'salt & pepper', 0.05);
6
7 % Se definen las variables que ejecuten el filtro de la media con máscaras de
  3x3 y 9x9 respectivamente.
8 h1 = fspecial('average');
9 h2 = fspecial('average', [9, 9]);
10
11 % Se definen las hipermatrizes que representen las imágenes resultantes del
  filtro de la media.
12 media1 = imfilter(fn, h1);
13 media2 = imfilter(fn, h2);
14
15 % Se escriben los comandos que muestren las imágenes original y con ruido, y
  las resultantes de aplicarle el filtro de la media de 3x3 (n=1) y 9x9 (n
  =4) a la imagen con ruido respectivamente. Los números que aparezcan en
  los ejes de las imágenes son la cantidad de pixeles entre el origen y la
  posición del número.
16 subplot(2,2,1), subimage(im), title('Imagen original');
17 subplot(2,2,2), subimage(fn), title('Imagen con ruido');
18 subplot(2,2,3), subimage(media1), title('Filtro de media 3x3');
19 subplot(2,2,4), subimage(media2), title('Filtro de media 9x9');

```

Código para filtrar la imagen mediante el filtro de la mediana

El código en MATLAB para aplicar este filtro es el siguiente:

```

1 % Se almacena la hipermatriz I que representa la imagen.
2 I = imread(['nombre de la imagen].[formato de la imagen']);
3
4 % Se almacenan las dimensiones de la imagen.
5 [M, N] = size(I(:,:,1));
6
7 % Se crea la imagen con ruido.
8 fn = imnoise(I, 'salt & pepper', 0.05);
9
10 % Se crean hipermatrizes con la finalidad de que contengan la imagen con
    ruido "fn" en el centro y los bordes mantengan los valores nulos para
    poder crear las máscaras de 3x3 y 9x9 respectivamente.

```

```

11 J1 = zeros(M+2, N+2, 3);
12 J2 = zeros(M+8, N+8, 3);
13
14 % Se llenan los valores de las hipermatrices J1 y J2 con los valores RGB de
15 % la imagen con ruido fn y los bordes se mantienen con valores nulos según
16 % el ancho de la máscara que se aplicará sobre la hipermatriz.
17 % Hipermatriz J1 cuya máscara aplicada será de 3x3:
18 for i = 2:M+1
19     for j = 2:N+1
20         for k = 1:3
21             J1(i, j, k) = fn(i-1, j-1, k);
22         end
23     end
24 end
25
26 % Hipermatriz J2 cuya máscara aplicada será de 9x9:
27 for i = 5:M+4
28     for j = 5:N+4
29         for k = 1:3
30             J2(i, j, k) = fn(i-4, j-4, k);
31         end
32     end
33 % Se define la hipermatriz H1 que contendrá los valores RGB de la imagen
34 % resultante para la máscara de filtrado 3x3.
35 H1 = zeros(M, N, 3);
36 for k = 1:3
37     for i = 1:M
38         for j = 1:N
39             A1 = zeros(3, 3);
40             for s = 1:3
41                 for t = 1:3
42                     A1(s, t) = J1(i+s-1, j+t-1, k);
43                 end
44             end
45             B1 = sort(A1(:));
46             H1(i, j, k) = B1(5);
47         end
48     end
49 end
50 % Se define la hipermatriz H2 que contendrá los valores RGB de la imagen
51 % resultante para la máscara de filtrado 9x9.
52 H2 = zeros(M, N, 3);
53 for k = 1:3
54     for i = 1:M
55         for j = 1:N
56             A2 = zeros(9, 9);
57             for s = 1:9
58                 for t = 1:9
59                     A2(s, t) = J2(i+s-1, j+t-1, k);
60                 end
61             end
62             B2 = sort(A2(:));
63             H2(i, j, k) = B2(41);
64         end
65     end
66 end
67 % Se multiplican las hipermatrices H1 y H2 por el factor de corrección 1/255
68 % para ajustar la escala RGB a la escala del programa.
69 output_image1 = H1 / 255;

```

```

69 output_image2 = H2 / 255;
70
71 % Se escriben los comandos que muestren las imágenes original y con ruido, y
    las resultantes de aplicarle el filtro de mediana 3x3 (n=1) y 9x9 (n=4) a
    la imagen con ruido respectivamente.
72 subplot(2, 2, 1), subimage(I), title('Imagen original');
73 subplot(2, 2, 2), subimage(fn), title('Imagen con ruido');
74 subplot(2, 2, 3), subimage(output_image1), title('Filtro de la mediana 3x3');
75 subplot(2, 2, 4), subimage(output_image2), title('Filtro de la mediana 9x9');

```

Código para filtrar la imagen mediante el filtro lineal gaussiano

El código en MATLAB para emplear este filtro es el siguiente:

```

1 % Se almacena la hipermatriz I que representa la imagen.
2 I = imread('[nombre de la imagen].[formato de la imagen]');
3
4 % Se almacenan las dimensiones de la imagen.
5 [M, N] = size(I(:,:,1));
6
7 % Se crea la imagen con ruido.
8 fn = imnoise(I, 'gaussian');
9
10 % Se define el valor de sigma.
11 sigma = 0.5;
12
13 % Se crean hipermatrizes con la finalidad de que contengan la imagen con
    ruido fn en el centro y los bordes mantengan los valores nulos para poder
    crear las máscaras de 3x3 y 27x27 respectivamente.
14 J1 = zeros(M+2, N+2, 3);
15 J2 = zeros(M+26, N+26, 3);
16
17 % Creación de la máscara K1 de 3x3:
18 for i = 1:3
19     for j = 1:3
20         K1(i,j) = exp(-((i-2)^2 + (j-2)^2)^2 / (2 * sigma^2)) / (2 * pi *
            sigma^2);
21     end
22 end
23
24 % Creación de la máscara K2 de 27x27:
25 for i = 1:27
26     for j = 1:27
27         K2(i,j) = exp(-((i-14)^2 + (j-14)^2)^2 / (2 * sigma^2)) / (2 * pi *
            sigma^2);
28     end
29 end
30
31 % Se llenan los valores de las hipermatrizes J1 y J2 con los valores RGB de
    la imagen con ruido fn y los bordes se mantienen con valores nulos según
    el ancho de la máscara que se aplicará sobre la hipermatriz.
32 % Hipermatriz J1 cuya máscara aplicada será de 3x3:
33 for i = 2:M+1
34     for j = 2:N+1
35         for k = 1:3
36             J1(i, j, k) = fn(i-1, j-1, k);
37         end
38     end
39 end
40
41 % Hipermatriz J2 cuya máscara aplicada será de 27x27:
42 for i = 14:M+13

```

```

43    for j = 14:N+13
44        for k = 1:3
45            J2(i, j, k) = fn(i-13, j-13, k);
46        end
47    end
48 end
49
50 % Aplicación de la máscara K1 de 3x3 a la hipermatriz J1
51 for k = 1:3
52     for i = 1:M
53         for j = 1:N
54             sum = 0;
55             for s = 1:3
56                 for t = 1:3
57                     sum = sum + K1(s, t) * J1(i-1+s, j-1+t, k);
58                 end
59             end
60             G1(i, j, k) = sum;
61         end
62     end
63 end
64
65 % Aplicación de la máscara K2 de 27x27 a la hipermatriz J2
66 for k = 1:3
67     for i = 1:M
68         for j = 1:N
69             sum = 0;
70             for s = 1:27
71                 for t = 1:27
72                     sum = sum + K2(s, t) * J2(i-1+s, j-1+t, k);
73                 end
74             end
75             G2(i, j, k) = sum;
76         end
77     end
78 end
79
80 % Se multiplican las hipermatrices G1 y G2 obtenidas de las convoluciones
  entre las máscaras K1 y K2, y las hipermatrices G1 y G2 respectivamente,
  por el factor de corrección 1/255 para ajustar la escala RGB a la escala
  del programa.
81 output_image1 = G1 / 255;
82 output_image2 = G2 / 255;
83
84 % Se escriben los comandos que muestren las imágenes original y con ruido, y
  las resultantes de aplicarle el filtro de gaussiano de 3x3 (n=1) y 27x27 (n=13)
  a la imagen con ruido respectivamente.
85 subplot(2, 2, 1), subimage(I), title('Imagen original');
86 subplot(2, 2, 2), subimage(fn), title('Imagen con ruido gaussiano');
87 subplot(2, 2, 3), subimage(output_image1), title('Filtro gaussiano 3x3');
88 subplot(2, 2, 4), subimage(output_image2), title('Filtro gaussiano 27x27');

```

Código para filtrar una imagen mediante los filtros de paso bajo

El código en MATLAB para aplicar este filtro a una imagen con frecuencias de corte de a_{hz} , b_{hz} y c_{hz} , es el siguiente:

```

1 % Paso 1
2 input_image = imread('[nombre de la imagen].[formato de la imagen]');
3
4 % Se crea la imagen con ruido para este caso de demostración.
5 fn = imnoise(input_image, 'salt & pepper', 0.05);

```

```

6
7 % Paso 2: se almacenan los valores de las dimensiones de la imagen para
8 % realizar el mallado.
9 [M, N] = size(input_image(:,:,1));
10
11 % Paso 3
12 for i=1:3
13     FT_img(:,:,i) = fft2(fn(:,:,i));
14 end
15
16 % Paso 4
17 D01 = a;
18 D02 = b;
19 D03 = c;
20
21 % Paso 5: Definición del mallado.
22 u = 0:(M-1);
23 idx = find(u>M/2);
24 u(idx) = u(idx)-M;
25 v = 0:(N-1);
26 idy = find(v>N/2);
27 v(idy) = v(idy)-N;
28 [V, U] = meshgrid(v, u);
29
30 % Paso 5: Definición de la función de filtro H.
31 D = sqrt(U.^2 + V.^2);
32 H1 = f1;
33 H2 = f2;
34 H3 = f3;
35
36 % Paso 6
37 for i=1:3
38     G1(:,:,i) = H1 .* FT_img(:,:,i);
39     G2(:,:,i) = H2 .* FT_img(:,:,i);
40     G3(:,:,i) = H3 .* FT_img(:,:,i);
41 end
42
43 % Paso 7
44 output_image1 = real(ifft2(G1))/255;
45 output_image2 = real(ifft2(G2))/255;
46 output_image3 = real(ifft2(G3))/255;
47
48 % Paso 8
49 subplot(2,2,1), subimage(fn), title('Imagen con ruido');
50 subplot(2,2,2), subimage(output_image1), title('Frecuencia de corte = a Hz');
51 subplot(2,2,3), subimage(output_image2), title('Frecuencia de corte = b Hz');
52 subplot(2,2,4), subimage(output_image3), title('Frecuencia de corte = c Hz');
53
54 % Para ejecutar el filtro ideal de paso bajo en MATLAB, se escribe el código
55 % de arriba y para cada i=1,2,3; reemplazamos fi por (D<=D0i).
56
57 % Para ejecutar el filtro Butterworth de paso bajo en MATLAB, se escribe el c
58 % ódigo de arriba y para cada i=1,2,3; reemplazamos fi por 1./(1+ (D/D0i)
59 % .^(2.*n)) luego de agregar el valor de $n$ en el código.
60
61 % Para ejecutar el filtro gaussiano de paso bajo en MATLAB, se escribe el c
62 % ódigo de arriba y para cada i=1,2,3; reemplazamos fi por exp(-D.^2./(2.*D0i
63 % .^2))$.

```

Código para filtrar una imagen mediante los filtros de paso alto

Este filtro se ejecuta siguiendo los mismos pasos que los del filtro de paso bajo. La diferen-

cia está en la definición de la función de filtro H . Debido a ello, el código en MATLAB de este filtro es muy similar al del filtro de paso bajo. La diferencia está en que en el paso 7, se le multiplica el factor de corrección $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ al elemento de la derecha de la igualdad; por lo que tenemos que para cada $j = 1, 2, 3$, colocamos el comando que se muestra al final del párrafo. Este factor de corrección se agrega cuando se aplica este filtro a imágenes a color debido a que el ojo humano es más sensible a las frecuencias que son bloqueadas por este filtro y cada canal de color *RGB* (rojo, verde y azul) se ve afectado por el filtro, y a que en el espacio *RGB* la distancia del color blanco al origen es $\sqrt{3}$ veces la distancia de los colores rojo, verde y azul al origen. El factor $\frac{3}{2}$ es para aumentar la luminosidad de la imagen en un 50%.

```

1 output_imagej = sqrt(3)*real(ifft2(Gj))/170;
2
3 %Para ejecutar el filtro ideal de paso alto en MATLAB, se escribe el código
4 %de arriba y para cada i=1,2,3; reemplazamos fi por (D>D0i).
5
6 % Para ejecutar el filtro Butterworth de paso alto en MATLAB, se escribe el c
7 %ódigo de arriba y para cada i=1,2,3; reemplazamos fi por 1./(1+ (D0i/D)
8 %.^(2.*n)) luego de agregar el valor de n en el código.
9
10 % Para ejecutar el filtro gaussiano de paso alto en MATLAB, se escribe el c
11 %ódigo de arriba y para cada i=1,2,3; reemplazamos fi por 1-exp(-D.^2./(2.*
12 %D0i.^2)).
```

Código para filtrar los bordes en alto relieve de una imagen mediante las EDP de difusión anisotrópica

El código en MATLAB para efectuar este filtro es el siguiente:

```

1 % Leer la imagen y convertirla a tipo de datos double
2 imagen = imread('[nombre de la imagen].[formato de la imagen]');
3 imagen = im2double(imagen);
4
5 % Parámetros para el proceso de difusión anisotrópica
6 iteraciones = 25;          % Número de iteraciones
7 delta_t = 0.1;            % Paso de tiempo
8 kappa = 20;               % Parámetro de suavizado
9
10 % Inicializar la imagen corregida con la imagen original
11 imagen_corregida = imagen;
12
13 % Bucle principal de iteraciones
14 for iter = 1:iteraciones
15     % Calcular los gradientes en cada canal de color
16     [Ix1, Iy1] = gradient(imagen_corregida(:,:,1));
17     [Ix2, Iy2] = gradient(imagen_corregida(:,:,2));
18     [Ix3, Iy3] = gradient(imagen_corregida(:,:,3));
19
20     % Calcular la magnitud del gradiente en cada canal
21     magnitud_gradiente1 = sqrt(Ix1.^2 + Iy1.^2);
22     magnitud_gradiente2 = sqrt(Ix2.^2 + Iy2.^2);
23     magnitud_gradiente3 = sqrt(Ix3.^2 + Iy3.^2);
24
25     % Calcular el coeficiente de difusión
26     c1 = exp(-(magnitud_gradiente1 / kappa).^2);
27     c2 = exp(-(magnitud_gradiente2 / kappa).^2);
28     c3 = exp(-(magnitud_gradiente3 / kappa).^2);
29
30     % Calcular la divergencia en cada canal
31     divergencia1 = divergence(c1 .* Ix1, c1 .* Iy1);
```

```

32    divergencia2 = divergence(c2 .* Ix2, c2 .* Iy2);
33    divergencia3 = divergence(c3 .* Ix3, c3 .* Iy3);
34
35    % Actualizar la imagen corregida usando el método de difusión anisotró-
36    % pica
37    imagen_corregida(:,:,:1) = imagen_corregida(:,:,:1) + delta_t *
38        divergencia1;
39    imagen_corregida(:,:,:2) = imagen_corregida(:,:,:2) + delta_t *
40        divergencia2;
41    imagen_corregida(:,:,:3) = imagen_corregida(:,:,:3) + delta_t *
42        divergencia3;
43
44 end
45
46 % Muestra la imagen original y la imagen corregida en una figura
47 figure;
48 subplot(1, 2, 1); imshow(imagen); title('Imagen original');
49 subplot(1, 2, 2); imshow(imagen_corregida); title('Imagen mejorada');

```

Anexo 3.5: Códigos para resaltar virtualmente indicadores de la FPI en la imagen

Código para efectuar la técnica de “skeleton”

El código en MATLAB de la función “skeleton” basado en el algoritmo descrito en la sección III.E.1). es el siguiente:

```

1 % Se define la función      skeleton      para una imagen binaria      I .
2 function skel = skeleton(I)
3
4     % Asegurarse de que es una imagen binaria
5     I = logical(I);
6
7     % Crear la imagen del esqueleto
8     skel = zeros(size(I));
9
10    % Realizar bucles hasta que la imagen deje de cambiar
11    while 1
12        % Dilatar la imagen
13        Idilate = imdilate(I, [0 1 0; 1 1 1; 0 1 0]);
14
15        % Restar la imagen dilatada de la imagen original
16        I = I - Idilate;
17
18        % Erosionar la imagen
19        Ierode = imerode(I, [0 1 0; 1 1 1; 0 1 0]);
20
21        % Hallar la intersección entre la imagen inicial      I      y la imagen
22        % erosionada      Ierode      .
23        I = I & Ierode;
24
25        % Adir la imagen obtenida de la intersección a la imagen del
26        % esqueleto.
27        skel = skel | I;
28
29        % Si la imagen deja de cambiar, salir del bucle.
30        if all(I(:) == 0)
31            break;
32        end
33    end
34 end

```

Y el código en MATLAB para aplicar la técnica de “skeleton” sobre una imagen es:

```
1 % Cargar imagen
2 imagen = imread('[nombre de la imagen].[formato de la imagen]');
3
4 % Convertir imagen a escala de grises
5 imagen_gris = rgb2gray(imagen);
6
7 % Binarizar imagen
8 umbral = graythresh(imagen_gris);
9 imagen_binaria = im2bw(imagen_gris, umbral);
10
11 % Encontrar esqueleto
12 esqueleto = bwmorph(imagen_binaria, 'skeleton');
13
14 % Mostrar imagen original y su esqueleto
15 subplot(1,2,1); imshow(imagen); title('Imagen Original');
16 subplot(1,2,2); imshow(esqueleto); title('Esqueleto de la imagen');
```

Código para detectar indicadores de la FPI y resaltar sus detalles mediante la DTW2

El código en MATLAB para indicadores de la FPI y resaltar sus detalles mediante la DTW2 es el siguiente:

```
1 % Leer la imagen
2 original_image = imread('[nombre de la imagen].[formato de la imagen]');
3
4 % Parámetros de la DWT
5 wavelet_type = 'nombre de la wavelet';
6
7 % Número de niveles de descomposición
8 level = 2;
9
10 % Inicializar la imagen con detalles resaltados
11 rescaled_image = zeros(size(original_image));
12
13 % Aplicar la DWT en 2D a cada canal de color
14 for channel = 1:3
15     % Obtener el canal actual
16     current_channel = original_image(:, :, channel);
17
18     % Aplicar la DWT en 2D al canal actual
19     [c, s] = wavedec2(current_channel, level, wavelet_type);
20
21     % Resaltar los detalles (coeficientes de alta frecuencia)
22     for i = 1:level
23         start_idx = sum(prod(s(1:i, :))) + 1;
24         end_idx = start_idx + prod(s(i, :)) - 1;
25         c(start_idx:end_idx) = 3 * c(start_idx:end_idx); % Se puede ajustar
26             el factor de resaltado
27     end
28
29     % Reconstruir el canal con detalles resaltados
30     rescaled_image(:, :, channel) = waverec2(c, s, wavelet_type);
31 end
32
33 % Mostrar la imagen original y la imagen con detalles resaltados
34 figure;
35
36 subplot(1, 2, 1);
37 imshow(original_image);
38 title('Imagen Original');
```

```

38 subplot(1, 2, 2);
39 imshow(rescaled_image / 255); % Normalizar para mostrar correctamente
40 title('Imagen con Detalles Resaltados');

```

Código para detectar indicadores que caracterizan a la FPI mediante la técnica de segmentación basada en funciones de wavelet

El código en MATLAB para detectar indicadores que caracterizan a la FPI mediante la técnica de segmentación basada en funciones de wavelet es el siguiente:

```

1 % Carga de la imagen
2 I = imread('[nombre de la imagen].[formato de la imagen]');
3 I = double(I);
4
5 % Aplicar Transformada wavelet 2D
6 [cA, cH, cV, cD] = dwt2(I, 'tipo de wavelet');
7
8 % Visualizar los coeficientes
9 figure;
10 subplot(2, 2, 1);
11 imagesc(cA / 510);
12 title('Coeficientes de aproximación');
13
14 subplot(2, 2, 2);
15 imagesc(cH);
16 title('Coeficientes de detalle horizontales');
17
18 subplot(2, 2, 3);
19 imagesc(cV);
20 title('Coeficientes de detalle verticales');
21
22 subplot(2, 2, 4);
23 imagesc(cD);
24 title('Coeficientes de detalle diagonales');
25
26 % Seleccionar umbral
27 umbral = 20;
28
29 % Aplicar umbral a los coeficientes
30 cA(abs(cA) < umbral) = 0;
31 cH(abs(cH) < umbral) = 0;
32 cV(abs(cV) < umbral) = 0;
33 cD(abs(cD) < umbral) = 0;
34
35 % Reconstruir la imagen
36 I_reconstruida = idwt2(cA, cH, cV, cD, 'tipo de wavelet');
37
38 % Mostrar la imagen original y la reconstruida
39 figure;
40 subplot(1, 2, 1);
41 imshow(I / 255, []);
42 title('Imagen original');
43
44 subplot(1, 2, 2);
45 imshow(I_reconstruida / 255, []);
46 title('Imagen reconstruida');

```

Código para detectar la FPI mediante la técnica wavelet de resaltamiento de bordes

El código en MATLAB para detectar la FPI mediante la técnica wavelet de resaltamiento de bordes es el siguiente:

```
1 % 1. Cargar imagen
2 img = imread(['[nombre de la imagen].[formato de la imagen]']);
3
4 % 2. Descomposición wavelet
5 [CA, CH, CV, CD] = dwt2(img, 'tipo de wavelet');
6 % Tipo de wavelets: Haar, Daubechies, Coiflets, Symlets y Meyer
7
8 % 3. Combina las matrices de coeficientes de detalle para obtener una imagen
9 % de bordes
10 edge_img = sqrt(CH.^2 + CV.^2 + CD.^2);
11
12 % 4. Mostrar resultados
13 figure;
14 subplot(1, 2, 1); imshow(img, []); title('Imagen original');
15 subplot(1, 2, 2); imshow(edge_img * (3 / 255), []); title('Detección de
16 bordes de la FPI');
```

Código para detectar y resaltar la FPI (en forma de “panal de abejas”) mediante el modelo de la difusión anisotrópica

El código en MATLAB de la función de difusión anisotrópica basado en el algoritmo descrito en la sección III.E.5). es el siguiente:

```
1 % Se define la función de difusión anisotrópica
2 function resultado = difusion_anisotropica(imagen, iteraciones, delta_t,
3 kappa)
4 % imagen: Imagen de entrada
5 % iteraciones: Número de iteraciones
6 % delta_t: Paso de tiempo
7 % kappa: Parámetro de difusión
8
9 imagen = double(imagen);
10 [filas, columnas] = size(imagen);
11 resultado = imagen;
12
13 for iter = 1:iteraciones
14 % Calcular gradientes
15 [Ix, Iy] = gradient(resultado);
16
17 % Calcular coeficientes de difusión
18 cx = exp(-(Ix.^2) / kappa^2);
19 cy = exp(-(Iy.^2) / kappa^2);
20
21 % Aplicar difusión anisotrópica
22 resultado = resultado + delta_t * (cx .* circshift(resultado, [-1,
23 0]) - resultado + ...
24 cy .* circshift(resultado, [1, 0])
25 - resultado + ...
26 cx .* circshift(resultado, [0,
27 -1]) - resultado + ...
28 cy .* circshift(resultado, [0, 1])
29 - resultado);
30
31 end
32
33 % Convertir la imagen de nuevo a tipo uint8
34 resultado = uint8(resultado);
35 end
```

Y el código en MATLAB para detectar y resaltar la FPI mediante el modelo de la difusión anisotrópica es el siguiente:

```
1 % Cargar la imagen
2 imagen_original = imread('[nombre de la imagen].[formato de la imagen]');
3 iteraciones = 250;
4 delta_t = 0.0015;
5 kappa = 20;
6
7 imagen_procesada = difusion_anisotropica(imagen_original, iteraciones,
     delta_t, kappa);
8
9 % Mostrar la imagen original y la imagen procesada
10 figure;
11 subplot(1, 2, 1);
12 imshow(imagen_original);
13 title('Imagen Original');
14
15 subplot(1, 2, 2);
16 imshow(imagen_procesada);
17 title('Imagen Procesada con Difusión Anisotrópica');
```