

Universidad Nacional de Ingeniería

Facultad de Ingeniería Civil



TESIS

Modelo de elementos discretos de barras para el análisis no-lineal de estructuras de concreto armado

Para obtener el título profesional de ingeniero civil.

Elaborado por

Miguel Angel Torres Matos

 [0000-0002-0915-073X](https://orcid.org/0000-0002-0915-073X)

Asesor

Dr. Hugo Víctor Luís Scaletti Farina

 [0000-0001-6479-1508](https://orcid.org/0000-0001-6479-1508)

LIMA - PERÚ

2025

Citar/How to cite	Torres Matos [1]
Referencia/Referente	[1] M.A. Torres Matos, “ <i>Modelo de elementos discretos de barras para el análisis no-lineal de estructuras de concreto armado</i> ” [Tesis de pregrado]. Lima (Perú): Universidad Nacional de Ingeniería, 2025.
Estilo/Style: IEEE (2020)	

Citar/How to cite	(Torres, 2025)
Referencia/Referente	Torres, M.A. (2025). <i>Modelo de elementos discretos de barras para el análisis no-lineal de estructuras de concreto armado</i> . [Tesis de pregrado, Universidad Nacional de Ingeniería]. Repositorio institucional Cybertesis UNI.
Estilo/Style: APA (7ma ed.)	

Dedicatoria

A mi madre, doña Paulina Matos.

A la memoria de mi padre, don Alejandro Torres.

A mi esposa, Karla Marina Armendáriz.

A mi hijo, Valentino.

A mis hermanos: Carlos, Flor de María, Angélica, Amparo, Laura,

Ninfa Rosario, Alejandro, Álvaro, Leonor.

Y en memoria de mi hermanito Miguel Ángel.

Agradecimientos

A Dios, que nos da la oportunidad de estar vivos en medio de todo el vasto universo.

A mis amados padres, Paulina y Alejandro, por su ejemplo y amor incondicional.

A mis queridos hermanos, por alentarme siempre.

A mi amada esposa, Karla, por estar a mi lado en toda circunstancia.

A mi hijo, Valentino, quien es el impulso que me motiva para seguir adelante y la alegría de mi hogar.

Al Dr. Hugo Scaletti Farina, por el tiempo y paciencia dedicados a la asesoría de esta tesis, a quien considero maestro e ingeniero a carta cabal y con seguridad soy uno de muchos que le guardan admiración, respeto y estima.

A mi alma mater, la Facultad de Ingeniería Civil de la Universidad Nacional de Ingeniería, por todo lo aprendido.

A mis compañeros, amigos, profesores y a cada persona que, de manera directa o indirecta, intervino en la realización de esta tesis.

Resumen

En esta tesis se ha implementado un programa de cómputo basado en un modelo de elementos discretos de barras, para realizar el análisis no-lineal de estructuras de concreto armado. Los modelos convencionales usualmente emplean articulaciones plásticas concentradas en los extremos de elementos, mientras que en la zona intermedia suponen comportamiento elástico-lineal. Los modelos de comportamiento para las secciones donde se concentran las rotaciones inelásticas comúnmente son de tipo elasto-plástico o bilineal; sin embargo, la curva de comportamiento observada en ensayos puede ser algo distinta de los tipos mencionados. El comportamiento esencialmente no-lineal del concreto armado sugiere que las simplificaciones mencionadas influyen en la respuesta de la estructura.

El programa desarrollado permite considerar la distribución discreta de la no linealidad del comportamiento del material. Los modelos de comportamiento empleados para elementos de la estructura a nivel de sección, fueron representados mediante diagramas momento-curvatura, para los que se desarrolló expresiones, tipo Ramberg-Osgood, en función de las propiedades más relevantes de las secciones y materiales.

Una aplicación práctica del programa fue para estudiar la redistribución de momentos en vigas continuas de concreto armado, debido a que se requiere realizar análisis no lineales para obtener la variación de los momentos en las secciones de las vigas, en el intervalo de comportamiento no lineal. Se verificó analíticamente que es posible una redistribución de 30 %, como lo sugiere el Eurocódigo-2, que es mayor que la máxima redistribución, 20 %, recomendada por las normas NTE.E60 y el ACI 318-19.

Palabras clave – Análisis no-lineal, elementos barra, modelo Ramberg-Osgood, concreto armado, diagramas momento-curvatura, redistribución de momentos.

Abstract

In this thesis, a computer program based on a discrete element model of bars was implemented to perform the nonlinear analysis of reinforced concrete structures. Conventional models usually employ plastic hinges concentrated at the ends of elements, while assuming linear-elastic behavior in the intermediate zone. Behavior models for sections where inelastic rotations are concentrated are commonly elasto-plastic or bilinear; however, the behavior curve observed in tests may differ somewhat from these types. The essentially nonlinear behavior of reinforced concrete suggests that the aforementioned simplifications influence the structural response.

The developed program allows for the discrete distribution of nonlinearities in material behavior to be considered. The behavior models used for structural elements at the section level were represented by moment-curvature diagrams, for which Ramberg-Osgood-type expressions were developed based on the most relevant section and material properties.

A practical application of the program was to study moment redistribution in continuous reinforced concrete beams, since nonlinear analyses are required to obtain the variation of moments at beam sections within the range of nonlinear behavior. It was analytically verified that a 30 % redistribution is possible, as suggested by Eurocode 2, which is greater than the maximum redistribution of 20 % recommended by NTE.E60 and ACI 318-19 standards.

Keywords – Nonlinear analysis, bar elements, Ramberg-Osgood model, reinforced concrete, moment-curvature diagrams, moment redistribution.

Tabla de contenido

Resumen	v
Abstract	vi
Prólogo	xx
Capítulo I. Introducción	1
1.1 Generalidades	1
1.2 Descripción del problema de investigación	2
1.3 Objetivo general	3
1.3.1 <i>Objetivos específicos</i>	3
1.4 Antecedentes.....	4
Capítulo II. Marco teórico y conceptual	6
2.1 Análisis no lineal de estructuras	6
2.2 No linealidad geométrica y no linealidad del material	6
2.3 Formulación variacional para el análisis no lineal	8
2.4 Modelos constitutivos para el análisis no lineal	12
2.4.1 <i>Modelo Elastoplástico</i>	13
2.4.2 <i>Modelos bilineal</i>	13
2.4.3 <i>Modelos de Ramberg-Osgood</i>	14
2.5 Modelos para el análisis no lineal de estructuras de concreto	16
2.5.1 <i>Modelo de una componente</i>	16
2.5.2 <i>Modelo de doble componente y multi-componente</i>	19
2.5.3 <i>Modelo de flexibilidad distribuida</i>	22
2.5.4 <i>Modelo de resortes rotacionales discretos</i>	23
2.5.5 <i>Modelo multi-resorte</i>	27
2.5.6 <i>Modelo de fibras</i>	28
2.6 Propiedades mecánicas de los materiales	29
2.6.1 <i>Curva esfuerzo-deformación para el concreto</i>	29
2.6.2 <i>Curva esfuerzo-deformación para el acero</i>	41
2.7 Diagramas momento-curvatura	47
2.7.1 <i>Limitaciones para la capacidad de curvatura</i>	50
2.7.2 <i>Relaciones momento-curvatura de tipo cíclica y pseudo-cíclica</i>	51
Capítulo III. Análisis estático no lineal con cargas monotónicas	55
3.1. Procedimiento numérico para el análisis no lineal estático incremental	55
3.2. Descripción del esquema general del programa	58
3.2.1 <i>Matriz de rigidez de los elementos</i>	60
3.2.2 <i>Esquema de ensamble de la matriz de la estructura</i>	61
3.2.3 <i>Factorización de la matriz de rigidez</i>	62
3.2.4 <i>Vector de fuerzas</i>	63
3.2.5 <i>Vector de desplazamientos</i>	65
3.2.6 <i>Esquema de solución del análisis no lineal</i>	65
3.3. Diagrama momento-curvatura para secciones típicas de concreto armado	65
3.4. Diagrama momento-curvatura paramétrico de tipo Ramberg-Osgood	66
3.4.1 <i>Algoritmo de solución de las ecuaciones para el modelo de tipo Ramberg-Osgood</i>	72
3.5. Análisis paramétrico para obtener la rigidez efectiva de las secciones de vigas continuas de concreto armado	72
3.5.1 <i>Limitaciones para las expresiones obtenidas</i>	72

3.6.	Análisis paramétrico para obtener la curvatura de fluencia aparente ...	75
3.7.	Análisis paramétrico para obtener la resistencia probable a flexión de secciones rectangulares.....	79
3.7.1	<i>Diagrama momento curvatura simplificado</i>	81
3.7.2	<i>Influencia de las propiedades de los materiales en el diagrama momento-curvatura</i>	83
3.8.	Análisis no lineal de viga en voladizo	91
Capítulo IV. Redistribución de momentos en vigas continuas de concreto armado		95
4.1	Propósito de la redistribución de momentos	95
4.2	Limitaciones establecidas en los códigos de diseño	96
4.3	Casos estudiados	96
4.3.1.	<i>Viga de un tramo, caso experimental</i>	96
4.3.2.	<i>Viga continua de dos tramos, caso experimental</i>	100
4.4	Modelos numéricos empleados para el análisis no lineal	109
4.5	Redistribución calculada y experimental	110
4.5.1.	<i>Redistribución de momentos según el tipo de carga</i>	113
Conclusiones		132
Recomendaciones.....		138
Referencias bibliográficas		140

Lista de Tablas

Tabla 3.1: Análisis no lineal de viga en voladizo con rigidez variable y carga distribuida incremental constante.....	93
Tabla 3.2: Análisis no lineal de viga en voladizo con rigidez constante y carga distribuida incremental constante.....	93
Tabla 4.1: Propiedades del refuerzo de la viga B1.....	101
Tabla 4.2: Características del acero de refuerzo Bagge et al. (2014).....	102

Lista de Figuras

Figura 2.1: Viga en voladizo con no linealidad geométrica	7
Figura 2.2: Curvas esfuerzo deformación de materiales.....	7
Figura 2.3: Diagrama momento versus curvatura y la energía potencia interna... 9	
Figura 2.4: Esquema de discretización nodal de una barra.	11
Figura 2.5: Modelo elastoplástico.....	13
Figura 2.6: Modelo bilineal.	14
Figura 2.7: Modelo tipo Ramberg Osgood.	15
Figura 2.8: Distribución típica de fisuras en una viga de concreto armado.....	16
Figura 2.9: Cálculo de la rotación del extremo del elemento.	17
Figura 2.10: Modelo de una componente, adaptado de Giberson (1967).....	17
Figura 2.11: Relación momento-rotación en los extremos del elemento.	18
Figura 2.12: Rotación inelástica en extremos para diferente distribución de momento.	19
Figura 2.13: Modelo de doble componente.....	20
Figura 2.14: Modelo de doble componente.....	21
Figura 2.15: Modelo de varias componentes.	22
Figura 2.16: Modelo de flexibilidad distribuida.	23
Figura 2.17: Modelo de elementos discretos por resortes rotacionales y segmentos rígidos.	24
Figura 2.18: Modelo de elementos discretos por dovelas.	25
Figura 2.19: Coordenadas locales de una dovela.	25
Figura 2.20: Compatibilidad y equilibrio de nudos.....	26
Figura 2.21: Corrección de fuerzas desequilibradas.	26
Figura 2.22: Modelo multi-resorte.....	27
Figura 2.23: Modelo de fibras para un elemento de concreto armado.....	28
Figura 2.24: Modelo esfuerzo-deformación para el concreto a compresión según Hognestad (1951).....	30
Figura 2.25: Modelo esfuerzo-deformación para el concreto a compresión según Kent y Park (1971).	32
Figura 2.26: Modelo esfuerzo-deformación del concreto confinado.....	34
Figura 2.27: Modelo esfuerzo-deformación, Kent y Park modificado, para el concreto a compresión, según Kent y Park (1982).	35
Figura 2.28: Modelo esfuerzo-deformación para el concreto, para el concreto confinado y no confinado, según Mander (1988).	36
Figura 2.29: Núcleo efectivamente confinado, Mander (1988).....	37
Figura 2.30: Curvas de esfuerzos de confinamiento lateral y la resistencia de confinamiento en secciones rectangulares, Mander (1988).....	40
Figura 2.31: Curva esfuerzo deformación experimental, adimensional, del acero.	42
Figura 2.32: Curva esfuerzo deformación del acero, en tracción y compresión, en coordenadas de tipo "ingenieril".	43
Figura 2. 33: Curva esfuerzo deformación experimental del acero (1-1/4"), en tracción y compresión.	45
Figura 2.34: Curvas analíticas esfuerzo-deformación, monotónicas con desplazamiento y cíclicas, del acero de refuerzo HD16.....	46
Figura 2.35: Diagrama momento-curvatura adimensional de una sección confinada de concreto armado.....	48
Figura 2.36: Relación entre la distribución de deformaciones unitarias y la curvatura.	49

Figura 2.37: Relación entre la distribución de deformaciones unitarias y la curvatura máxima asociada al pandeo del acero longitudinal.....	51
Figura 2. 38: Distribución de deformaciones de una sección y la curva esfuerzo-deformación monotónica y pseudocíclica.	54
Figura 3.1: Esquema de la jerarquía de los elementos empleados a distintos niveles del modelo de la estructura.	56
Figura 3.2: Esquema de la jerarquía de los elementos empleados a distintos niveles del modelo de la estructura, sin dovelas.	57
Figura 3.3: Diagrama de flujo para el análisis no lineal.....	59
Figura 3.4: Esquema de numeración de viga continua.	60
Figura 3.5: Esquema de numeración de la matriz de rigidez de la estructura con ancho de banda constante.	62
Figura 3.6: Esquemas de solución mediante el método de Newton-Raphson....	66
Figura 3.7: Curvas de tipo Ramberg-Osgood para distintos valores de los parámetros α y γ	68
Figura 3.8: Curva adimensional paramétrica de tipo Ramberg-Osgood.	70
Figura 3.9: Rigidez efectiva, adimensional, contra la resistencia a compresión del concreto.	74
Figura 3.10: Relación entre el cálculo riguroso y el aproximado, de la rigidez efectiva a flexión contra la resistencia a compresión del concreto.....	75
Figura 3.11: Curvatura de fluencia, adimensional, contra la resistencia a compresión del concreto.	76
Figura 3.12: Relación entre el cálculo riguroso y aproximado, de la curvatura de fluencia contra la resistencia a compresión del concreto.	77
Figura 3.13: Profundidad de la resultante en compresión del concreto, adimensional, contra la resistencia a compresión del concreto.	78
Figura 3.14: Relación entre el cálculo riguroso y aproximado, de la profundidad de la resultante en compresión del concreto, contra la resistencia a compresión del concreto.	78
Figura 3.15: Modelo de fuerzas internas resistentes y fuerzas aplicadas en columnas con refuerzo simétrico, Restrepo y Rodríguez (2013).	80
Figura 3.16: Comparación de diagramas momento curvatura calculados con el modelo de Mander, Ramberg-Osgood y una aproximación bilineal.....	83
Figura 3.17: Diagrama momento curvatura de una sección rectangular, sin considerar el efecto de confinamiento de los estribos.....	84
Figura 3.18: Diagrama momento curvatura de una sección rectangular, comparación del diagrama de referencia, VM, versus diagramas con distinta resistencia a compresión del concreto y con aporte de la tracción del concreto.	86
Figura 3.19: Diagrama momento curvatura de una sección rectangular, comparación del diagrama de referencia, VM, versus diagramas con distinto esfuerzo de fluencia del acero, f_y , y con aporte de la tracción del concreto. ...	87
Figura 3.20: Diagrama momento curvatura de una sección rectangular, con distinta resistencia a compresión del concreto, con tracción y sin tracción del concreto.....	89
Figura 3.21: Diagrama momento curvatura de una sección rectangular, con distinto esfuerzo de fluencia del acero y con tracción y sin tracción del concreto.	90
Figura 3.22: Diagrama momento curvatura con modelo de tipo Ramberg-Osgood, de una sección rectangular, de 200mmx240mm.....	92
Figura 3.23: Desplazamiento vs número de elementos.	94

Figura 4.1: Esquema de ensayo de viga de un tramo empotrado-articulado.....	97
Figura 4.2: Diagrama momento-curvatura de la sección VA-03, para el momento positivo.....	98
Figura 4.3: Diagrama momento-curvatura de la sección VA-03, para el momento negativo.....	99
Figura 4.4: Diagrama momento-curvatura de la sección VA-03, tipo Ramberg-Osgood.....	100
Figura 4.5: Esquema y secciones de viga continua, de dos tramos, con carga puntual.....	101
Figura 4.6: Diagrama momento-curvatura de la sección A-A para el momento positivo.....	103
Figura 4.7: Diagrama momento-curvatura de la sección B-B para el momento positivo.....	104
Figura 4.8: Diagrama momento-curvatura de la sección B-B, para el momento negativo.....	105
Figura 4.9: Diagrama momento-curvatura de la sección B-B, para el momento negativo, comparación con resultados experimentales, Bagge et al (2014), y calculados.....	106
Figura 4.10: Diagrama momento-curvatura de la sección B-B, para el momento negativo, comparación con resultados experimentales, Bagge et al.(2014), y calculados.....	107
Figura 4.11: Modelo Ramberg-Osgood del diagrama momento curvatura de la sección A-A para el momento positivo y negativo, sin tracción del concreto....	108
Figura 4.12: Modelo Ramberg-Osgood del diagrama momento curvatura de la sección B-B para el momento positivo y negativo, sin tracción del concreto....	108
Figura 4.13: Modelos de la viga continua de dos tramos.....	110
Figura 4.14: Redistribución de momentos con modelo de vigas de dos tramos vs experimental.....	112
Figura 4.15: Redistribución de momentos con modelo de vigas de tres tramos vs experimental.....	113
Figura 4.16: Secciones de vigas de un tramo.....	114
Figura 4.17: Diagrama momento-curvatura sección de viga VA-01.....	115
Figura 4.18: Diagrama momento-curvatura sección de viga VA-02.....	116
Figura 4.19: Diagrama momento-curvatura sección de viga VA-03.....	117
Figura 4.20: Diagrama momento-curvatura sección de viga VA-03.....	118
Figura 4.21: Diagrama carga-desplazamiento para las vigas de un tramo.....	119
Figura 4.22: Diagrama carga-desplazamiento para las vigas de un tramo.....	120
Figura 4.23: Diagrama carga-desplazamiento para la viga de un tramo VA-02.....	121
Figura 4.24: Diagrama carga-desplazamiento para la viga de un tramo VA-03.....	122
Figura 4.25: Diagrama momento-carga para la viga de un tramo VA-01.....	123
Figura 4.26: Diagrama momento-carga para la viga de un tramo VA-02.....	124
Figura 4. 27: Diagrama momento-carga para la viga de un tramo VA-02.....	125
Figura 4.28: Secciones de vigas de un tramo con redistribución de momentos para el caso de carga distribuida constante.....	126
Figura 4.29: Diagrama momento-curvatura para la viga de un tramo DA-01...	127
Figura 4.30: Diagrama momento-curvatura para la viga de un tramo DA-02...	127
Figura 4.31: Diagrama momento-curvatura para la viga de un tramo DA-03...	128
Figura 4.32: Diagrama carga-desplazamiento para las vigas de un tramo con carga distribuida.....	129

Figura 4.33: Diagrama momento-carga para la viga de un tramo DA-01 con carga distribuida.	130
Figura 4.34: Diagrama momento-carga para la viga de un tramo DA-02 con carga distribuida.	131
Figura 4.35: Diagrama Momento-carga para la viga de un tramo DA-03 con carga distribuida.	131

Lista de símbolos y siglas

ACI: Instituto americano del concreto, por sus siglas en inglés.

A_e : Área del núcleo de concreto efectivamente confinado.

A_{cc} : Área del núcleo de concreto confinado.

$b_i(z_k)$: Término i -ésimo de la función de interpolación asociada a la curvatura evaluada en el punto de integración Gauss-Legendre, z_k .

$\underline{B}$: Matriz de funciones de interpolación asociada a la curvatura.

$\mathbf{B}(x)$: Matriz de funciones de interpolación basado en un modelo de fibras.

B1, B2, B3, B4: Especímenes de vigas ensayados, cada una de dos tramos.

b_c, d_c : mayor y menor dimensión de una sección confinada rectangular.

C_s : Fuerza en compresión del acero del lecho en compresión de sección de columna, para el modelo Restrepo-Rodríguez.

C_c : Fuerza en compresión del concreto de sección de columna, para el modelo Restrepo-Rodríguez.

d_s : Diámetro del zuncho de confinamiento, medido a eje de la varilla.

DA-01, DA-02, DA-03: Vigas estudiadas con carga distribuida y redistribución.

E.060: Norma de concreto armado del reglamento nacional de edificaciones.

E_P : Energía potencial elástica.

EI : Rigidez elástica a flexión de una sección.

EI_T : Rigidez a flexión tangente de una sección.

EI_{ef} : Rigidez efectiva a flexión de una sección de concreto armado.

EI_g : Rigidez bruta a flexión de una sección de concreto armado.

E_s : Módulo elástico del acero.

E_{sh} : Módulo tangente al inicio de la etapa de endurecimiento del acero.

E_{sec} : Módulo secante del concreto confinado.

E_c : Módulo elástico del concreto.

E_P^n : Energía potencial acumulada en la n -ésima etapa de carga.

e_r : Error relativo de la fuerza desequilibrada respecto de las fuerzas totales.

F, F_u : Fuerzas empleadas en el modelo Ramberg-Osgood.

$\underline{f}_{n+1}$: Vector de fuerzas externas en la $n+1$ -ésima etapa carga.

F_y : Fuerza de fluencia.

f_c : Esfuerzo del concreto simple.

f'_c : Resistencia a compresión del concreto simple.

$\hat{f}_c$: Resistencia a compresión experimental del concreto.

f''_c : Resistencia a compresión del concreto simple, según Hognestad.

f'_{cc} : Resistencia a compresión del concreto confinado.

f_{co} : Esfuerzo del concreto sin confinar, según Mander.

f_y : Esfuerzo de fluencia del acero.

$\hat{f}_y$: Esfuerzo de fluencia experimental del acero.

f_{su} : Esfuerzo último en tracción del acero.

f_{sh1} : Esfuerzo asociado al endurecimiento del acero.

f_{sc} : Esfuerzo en compresión del acero.

f_{yh} : Esfuerzo de fluencia de estribos o zunchos.

f'_l : Presión de confinamiento lateral efectiva.

f'_{lx} : Presión de confinamiento lateral efectiva en la dirección x.

f'_{ly} : Presión de confinamiento lateral efectiva en la dirección y.

f'_{l1}, f'_{l2} : Esfuerzos principales de confinamiento en una sección rectangular.

f_l : Presión lateral del refuerzo transversal, en una sección confinada.

f_{si} : Esfuerzo en la i-ésima área de acero.

f_{ci} : Esfuerzo en la i-ésima área de concreto.

$\|f_D\|$: Norma euclidiana de las fuerzas desequilibradas de una estructura.

$\|f\|$: Norma euclidiana de las fuerzas totales de una estructura.

k_1 y k_2 : Parámetros adimensionales para el modelo de Mander.

k : Rigidez elástica.

αk : Rigidez pos elástica.

$[k_j]$: Matriz de rigidez del j-ésimo elemento.

$[K_m^t]$: Matriz de rigidez para un elemento basado en un modelo de fibras.

$[K_s^t]$: Matriz de rigidez de sección basado en un modelo de fibras.

K_T : Matriz de rigidez tangente de un elemento.

k_e : Coeficiente de efectividad del confinamiento.

$k^{(e)}$: Matriz de rigidez de un elemento.

k_{ij} : Término de la fila i y columna j de la matriz de rigidez de un elemento.

$\hat{k}$: Curvatura adimensional para el modelo tipo Ramberg-Osgood.

k_{ef} : Rigidez efectiva elástica adimensional para el modelo tipo Ramberg-Osgood.

L : Longitud de un elemento.

$M_{elástico}$: Momento elástico en la sección de referencia de la redistribución.

$M_{inelástico}$: Momento inelástico en la misma sección de la redistribución.

$M_{máx}$: Resistencia a flexión máxima.

M_{cd} : Resistencia a flexión creíble.

M_n : Resistencia a flexión nominal.

M_{pr} : Resistencia a flexión probable.

M_y : Resistencia a flexión de fluencia.

M_n : Momento resistente de una sección para la n -ésima etapa de carga.

$\hat{M}$: Momento adimensional para el modelo tipo Ramberg-Osgood.

$M(\phi, \epsilon_o)$: Momento generalizado en una sección de concreto armado.

$N(\phi, \epsilon_o)$: Carga axial generalizada en una sección de concreto armado.

$\underline{N}$: Matriz de funciones de interpolación de desplazamiento.

P : Carga axial en una columna para el modelo Restrepo-Rodríguez.

P : Parámetro adimensional para el modelo de Mander para el acero.

q : Función de la carga externa distribuida actuante.

q_n : Función de la carga externa distribuida para la n -ésima etapa de carga.

q_{n+1} : Función de carga externa distribuida para la n -ésima etapa de carga.

r : Parámetro adimensional, relación de módulos, para el modelo de Mander.

$\underline{R}_n$: Vector de fuerzas internas en la etapa carga n -ésima.

r_{ni} : Componente i -ésima del vector de fuerzas internas.

rk_{ef} : Rigidez efectiva inelástica adimensional, para el modelo tipo Ramberg-Osgood.

s : separación de estribos o zunchos medido a ejes de la varilla.

s' : Separación de estribos o zunchos a cara de la varilla.

s/d_b : Relación de esbeltez entre el espaciamiento a centro de estribos y el diámetro de la barra longitudinal.

T_i : Fuerza de tracción del acero de lecho intermedio de una sección de columna, según el modelo Restrepo-Rodríguez.

T_s : Fuerza de tracción del acero de lecho en tracción de una sección de columna, según el modelo Restrepo-Rodríguez.

$\underline{u}$: Vector de desplazamientos nodales.

$\underline{u}^T$: Traspuesta del vector de desplazamientos nodales.

$\underline{u}_n$: Vector de desplazamientos nodales en la n -ésima etapa de carga.

$\underline{u}_{n+1}$: Vector de desplazamientos nodales en la $n+1$ -ésima etapa de carga.

VA-01, VA-02, VA-03, VA-04: Especímenes de vigas ensayados, de un tramo.

v : Función de desplazamiento.

v'' : Segunda derivada de la función de desplazamiento.

v_n : Función de desplazamiento en la n -ésima etapa de carga.

v_{n+1} : Función de desplazamiento en la $n+1$ -ésima etapa de carga.

$w(z_k)$: Peso de integración Gauss-Legendre correspondiente al punto z_k .

W_f : Trabajo de las fuerzas externas aplicadas.

W_f^n : Trabajo de las fuerzas externas para la n -ésima etapa de carga.

W_f^{n+1} : Trabajo de las fuerzas externas para la $n+1$ -ésima etapa de carga.

x : Parámetro adimensional, cociente de deformaciones en el modelo de Mander.

x_c : Centroide de la resultante de la fuerza en compresión del concreto.

Z : Pendiente de la curva de descenso para el modelo de Kent y Park.

α, γ : Parámetros reales para el modelo Ramberg-Osgood.

$\delta\Pi_P$: Primera variacional del funcional de la energía potencial.

Δq : Función de incremento de carga externa distribuida actuante.

$\Delta \mathbf{q}_n$: Función de carga incremental para la n-ésima etapa de carga.

$\{\Delta D_{j+1}\}$: Vector de desplazamiento incremental en el elemento j+1-ésimo.

ΔE_p^n : Incremento de la energía potencial al n-ésimo paso.

$\{\Delta F_{j+1}\}$: Vector de fuerza incremental en el elemento j+1-ésimo.

$\{\Delta p_i^*\}$: Vector de fuerzas desbalanceadas en los nudos intermedios dentro de un elemento.

$\{\Delta p_e^*\}$: Vector de fuerzas desbalanceadas en los nudos de los extremos de un elemento.

Δy : Desplazamiento de fluencia.

$\Delta \mathbf{e}(x)$: Vector generalizado de incrementos de deformación basado en fibras.

$\Delta \theta$: Vector de incremental de desplazamiento en los extremos de un elemento basado en fibras.

$\Delta \mathbf{u}_n$: Vector de desplazamiento nodal incremental en la n-ésima etapa de carga.

$\Delta \mathbf{v}_n$: Función de desplazamiento incremental en la n-ésima etapa de carga.

ϵ_{50u} : Parámetro de deformación para el modelo de Kent y Park

ϵ_{cc} : Deformación del concreto bajo presión de confinamiento hidrostático f_1 .

ϵ_o : Deformación unitaria del concreto no confinado asociada a la resistencia del concreto.

ϵ_{su} : Deformación última del acero.

ϵ_s : Deformación unitaria del acero en tracción.

ϵ_{sc} : Deformación unitaria del acero en compresión.

ϵ_y : Deformación unitaria de fluencia del acero en tracción.

ϵ_{sh} : Deformación unitaria en tracción asociada al inicio del endurecimiento del acero.

ϵ_{yc} : Deformación unitaria de fluencia en compresión del acero.

ϵ_{shc} : Deformación unitaria en compresión asociada al inicio del endurecimiento del acero.

ϵ_{cu} : Deformación de aplastamiento del concreto.

ϵ : Deformación unitaria de sección a cierta distancia, y , respecto del centroide.

ϵ_o : Deformación unitaria del centroide de la sección.

ϵ_{st} : Deformación unitaria en tracción del acero.

ε_{oi} : Deformación del centroide de una sección de CA en i-ésimo paso.

$\Delta\varepsilon_{oi}$: Deformación incremental del centroide de una sección de CA en i-ésimo paso.

ε_p^* : Deformación de pandeo inelástico del acero.

ϕ : Curvatura de una sección.

ϕ_P : Curvatura de pandeo para una sección de concreto armado.

ϕ_{cd} : Curvatura asociada a la resistencia a flexión creíble, M_{cd} .

ϕ_i : Curvatura de una sección de concreto armado en el i-ésimo paso.

$\Delta\phi_i$: Curvatura incremental de una sección de CA en el i-ésimo paso.

ε_{sc} : Deformación unitaria en compresión del acero.

γh : Distancia entre centros de lecho superior e inferior de una sección de concreto armado.

κ_i : Curvatura de la sección para el enésimo incremento de carga.

$\Delta\kappa$: Incremento de curvatura en una longitud diferencial.

Π_P : Funcional de la energía potencial.

ρ_L : Cuantía longitudinal de una sección confinada.

ρ_x : Cuantía de refuerzo de sección confinada, en la mayor dirección.

ρ_y : Cuantía de refuerzo de sección confinada, en la menor dirección.

ρ_s : Cuantía volumétrica de refuerzo transversal.

ρ : Cuantía de refuerzo de lecho en tracción de viga de concreto armado.

ρ' : Cuantía de refuerzo de lecho en compresión de una viga de concreto armado.

ρ_{si} : Cuantía de refuerzo del lecho intermedio de una viga de concreto armado.

η : Redistribución de momento en %.

$\{\Delta m_A \Delta m_B \Delta p_{AB}\}^T$: Vector de fuerzas para un modelo de fibras.

$\{\Delta \theta_A \Delta \theta_B \Delta e_{AB}\}^T$: Vector de deformaciones para un modelo de fibras.

Prólogo

En esta tesis se ha desarrollado un procedimiento de análisis no lineal de estructuras de concreto armado. En contraste con la formulación de no linealidad concentrada (con rótulas plásticas) que se encuentra en diversos programas comerciales o en el tratamiento de la no linealidad a nivel puntual, como en algunos programas de elementos finitos, la no linealidad ha sido tratada al nivel de las relaciones entre las fuerzas resultantes de sección (como son los momentos flectores) y las correspondientes medidas de deformación (curvaturas). Las mismas ideas pueden aplicarse a situaciones en que las fuerzas axiales o cortantes tengan efectos importantes.

Las hipótesis básicas para definir el comportamiento de las secciones son las habituales en el diseño de elementos de concreto armado, pero en la tesis se han incluido consideraciones adicionales, como el efecto del confinamiento del concreto, el endurecimiento del refuerzo o el eventual pandeo del mismo. Las expresiones que definen el comportamiento de las secciones pueden ser simplificadas, con expresiones del tipo Ramberg-Osgood, dependientes de pocos parámetros, lo que posibilita un análisis simple a la vez que bastante realista.

Como aplicación del procedimiento desarrollado, se ha analizado la redistribución de momentos en vigas continuas de concreto armado, comparando lo obtenido numéricamente con algunos resultados experimentales disponibles, con lo cual se validaron los resultados numéricos obtenidos. Los resultados teóricos y experimentales, tomados de las referencias, confirman la posibilidad de lograr una redistribución de momentos mayor que la estipulada en las normas referidas en esta tesis. Lo que lleva a considerar que, en los casos de vigas diseñadas según lo previsto por estas normas, es factible un mayor ahorro y, por lo tanto, descongestionamiento del acero longitudinal, sin sufrir pérdida de capacidad, de carga y deformación.

Dr. Hugo Scaletti Farina
Asesor de la tesis

Capítulo I. Introducción

1.1 Generalidades

En esta tesis, se desarrollaron las formulaciones que permiten implementar un programa de cómputo para el análisis estático no-lineal de estructuras planas de concreto armado.

Aunque es posible realizar análisis no-lineal de forma manual, para casos sencillos; sin embargo, es necesario realizar hipótesis que simplifiquen el análisis, lo cual es relativamente factible para estructuras simples y de escasa cantidad de elementos. El análisis no-lineal generalmente requiere del empleo de una computadora, para llevar a cabo los numerosos cálculos numéricos que son requeridos.

El análisis no-lineal de estructuras, en la actualidad, ha tenido importantes avances y es cada vez mayor su empleo en la evaluación y diseño estructural, además de la investigación.

Existen distintos modelos para representar elementos de concreto armado. Los más conocidos son los elementos de barras con articulaciones plásticas en los extremos, útiles para realizar análisis dinámico no-lineal. En la actualidad hay programas para análisis no-lineal, de propósito general, que emplean las formulaciones de elementos finitos, pero estos requieren de gran cantidad de recursos de cómputo. Alternativamente, existen formulaciones basadas en elementos discretos, tipo dovela, más sencillos para representar estructuras de barras, los cuales son más económicos y fáciles de usar. Además, los resultados obtenidos con estos elementos son bastante buenos, comparados con resultados experimentales y otros resultados analíticos.

La aplicación práctica del programa desarrollado se orientó al estudio de la redistribución de momentos en vigas continuas de concreto armado. Se consideró la acción de cargas estáticas incrementales sobre una viga continua, de concreto armado, definida por elementos discretos, tipo dovelas, donde se

distribuyen las fuerzas internas siguiendo el patrón de un modelo de comportamiento no-lineal preestablecido.

1.2 Descripción del problema de investigación

El estudio analítico del comportamiento de estructuras de concreto armado requiere de herramientas de análisis no lineal, debido al comportamiento que exhiben los materiales que conforman a los elementos de este tipo de estructuras. Además de la no linealidad del material está la de tipo geométrico, que suelen presentar cierto tipo de elementos y estructuras. Las hipótesis empleadas en el estudio del comportamiento de las estructuras de concreto armado son, en algunos aspectos, distintas a las que habitualmente se suponen para el diseño, en el que se suele realizar análisis elástico y lineal. La incorporación de las relaciones esfuerzo-deformación del concreto o del acero implica introducir curvas no lineales para realizar el análisis, a diferencia del análisis elástico lineal que emplea relaciones lineales esfuerzo-deformación, según la ley de Hooke.

Un problema que es factible estudiar con esta herramienta es la redistribución de momentos en vigas continuas. Aunque no es un problema nuevo, se quiere revisar aspectos relacionados con el porcentaje máximo de redistribución. Es posible que dicha redistribución realmente pueda ser mayor que lo establecido en las normas y reglamentos de construcción. La redistribución de momentos en vigas continuas ocurre cuando, a medida que se incrementan las cargas actuantes, algunas secciones alcanzan el intervalo de comportamiento inelástico y son capaces de desarrollar deformación inelástica sin incremento relevante de los momentos flectores; entonces las fuerzas internas se redistribuyen para equilibrar el incremento de las cargas actuantes provocando que en las otras secciones disminuya o se incremente la demanda de flexión.

Los alcances de esta tesis son el desarrollar un programa de análisis no-lineal estático para estructuras planas, que pueden ser vigas continuas o pórticos planos.

Dentro de los alcances de esta tesis se contempla únicamente la no linealidad del material. Se emplean modelos teóricos para describir la curva de comportamiento de los materiales, con los que se construyen diagramas de momento versus la curvatura de las secciones, con los cuales se definirá el comportamiento a nivel de sección.

Se realiza una aplicación práctica, la cual consiste en el análisis de la redistribución de momentos de algunos casos de vigas de concreto armado, las que fueron estudiadas experimentalmente por otros autores. Se comparan los resultados experimentales de estas investigaciones con las obtenidas con el programa desarrollado en esta tesis.

1.3 Objetivo general

El objetivo de esta tesis es desarrollar un programa de análisis estático no lineal basado en modelos discretos de barras que sirva de herramienta para el estudio del comportamiento de estructuras de concreto armado, bajo acciones de carga de tipo monotónica incremental.

1.3.1 Objetivos específicos

- Implementar un código en C++ para el análisis no lineal estático incremental.
- Proponer ecuaciones paramétricas para los diagramas momento-curvatura, necesarios para describir el comportamiento a nivel de sección de los elementos de barras.
- Comparar los resultados calculados contra los obtenidos en ensayos disponibles en la bibliografía, para el caso de vigas continuas de concreto armado, con la finalidad de validar el programa de análisis no lineal desarrollado.

- Estudiar algunos casos la redistribución de momentos de vigas continuas para estimar el porcentaje de redistribución de momentos que ocurren sobre el máximo recomendado por distintas normas tales como la NTE.E060 y el ACI318-19.

1.4 Antecedentes

Los modelos discretos de barras son empleados ampliamente en el análisis no lineal de estructuras de concreto armado, debido a su relativo bajo costo computacional en comparación con modelos más refinados de elementos finitos, además de mostrar resultados bastante satisfactorios con respecto a resultados experimentales. Algunos de los primeros modelos de este tipo fueron planteados por Clough et al. (1965) y Giberson (1967). Estos modelos fueron únicos en su tiempo, cuando se analizaban pórticos solamente para una condición elastoplástica. Estos modelos concentran el comportamiento inelástico en los extremos de las barras y consideran comportamiento elástico, con rigidez constante, en la zona intermedia. En la actualidad existen notables avances respecto a distintos modelos discretos para el análisis no lineal, en los que se puede distribuir de forma discreta, por dovelas, el comportamiento inelástico y la rigidez a flexión de barras. Además, se han desarrollado una gran cantidad de curvas de comportamiento no lineal del material. La mayoría de programas tienen incorporada la no linealidad geométrica.

Recientemente, se han realizado investigaciones sobre el comportamiento de estructuras de concreto en las que se han aplicado distintos modelos de análisis no lineal. En el contexto local se han empleado técnicas de elementos finitos comparadas con resultados experimentales (Beas, 2016), vigas hiperestáticas de tramo simple (Seminario, 2018), además de estudiar el comportamiento de vigas en pórticos de concreto armado con el acero de refuerzo peruano (Seminario, 2017).

Hace falta implementar trabajos experimentales y teóricos a fin de corroborar resultados, para la obtención de curvas esfuerzo deformación del concreto y del acero de refuerzo, fabricados en el país. Estos son necesarios para calcular, con menor incertidumbre, parámetros de diseño como la resistencia probable a flexión de vigas y columnas, la rigidez de las secciones que dependen directamente del módulo elástico del material y del nivel de agrietamiento, lo cual influye también en la estimación realista de la redistribución de momentos flectores en estructuras de concreto armado. Se pueden obtener resultados útiles para la práctica de diseño mediante el estudio de la redistribución de momentos flectores en vigas continuas, de manera que se pueda establecer un margen entre el límite sugerido por la NTE. E060, que es conservadora, y lo obtenido mediante análisis no lineales. Se puede incluir el efecto de confinamiento de los estribos en la respuesta no lineal de la estructura, la variación de la cuantía de refuerzo longitudinal, la calidad del acero y del concreto.

Capítulo II. Marco teórico y conceptual

2.1 Análisis no lineal de estructuras

En la práctica habitual del análisis y diseño de estructuras es común realizar análisis lineal para obtener las demandas de fuerzas y desplazamientos, con fines de diseño; sin embargo, en la actualidad es cada vez más común que los ingenieros empleen el análisis no lineal para evaluar el comportamiento de las estructuras de manera más realista. Existen dos tipos de no linealidad a tenerse en cuenta, no linealidad geométrica y no linealidad del material.

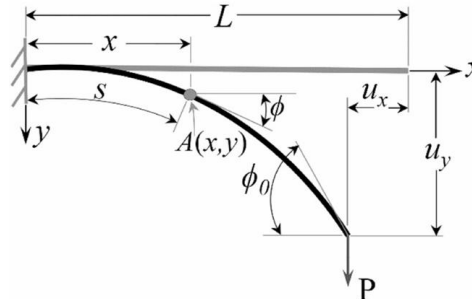
2.2 No linealidad geométrica y no linealidad del material

La no linealidad geométrica se refiere a aquella originada por desplazamientos suficientemente grandes; caso en el que es necesario plantear las ecuaciones de equilibrio en el estado deformado. Lo cual implica modificar la rigidez inicial y considerar una nueva rigidez con los cambios en la geometría de los elementos de la estructura. Ver Figura 2.1. Algunos ejemplos prácticos donde se suele considerar la no linealidad geométrica son: puentes colgantes y atirantados, membranas con carga a presión, voladizos, columnas largas.

Adicionalmente, puede considerarse la no linealidad geométrica de contorno o contacto, la cual se refiere al cambio en las condiciones de contorno de alguna estructura y puede ocurrir; por ejemplo, en el choque entre edificios, en elementos con conexiones especiales como el caso de muros híbridos postensados.

Figura 2.1

Viga en voladizo con no linealidad geométrica

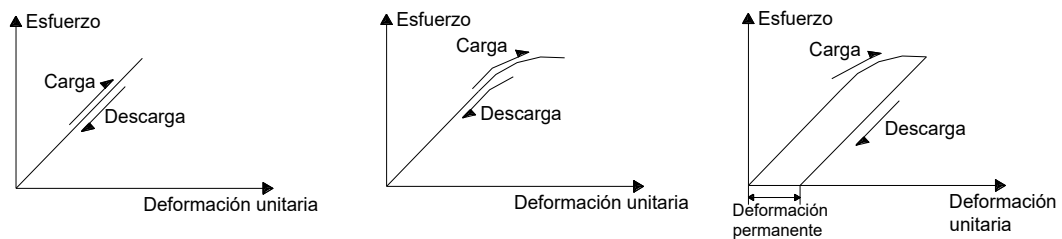


Nota: Fuente <https://www.midasoft.com/latinoamerica/learning/bridge/explicaci%C3%B3n-de-an%C3%A1lisis-no-lineal-b%C3%A1sico>.

La no linealidad del material está referida al análisis en el que se considera una relación no-lineal entre el esfuerzo y la deformación de los materiales. La Figura 2.2, muestra algunas curvas esfuerzo deformación para algunos materiales, donde se observan comportamiento lineal y no-lineal.

Figura 2.2

Curvas esfuerzo deformación de materiales.



(a) Lineal elástico

(b) No-lineal elástico

(c) No lineal e inelástico

La mayoría de materiales tienen una relación esfuerzo-deformación no-lineal. Tal es el caso del concreto y del acero; sin embargo, para fines de diseño se suele considerar, por simplicidad, que esta relación es lineal. En caso de que se quiera estudiar el comportamiento de la estructura de forma más realista, se puede emplear análisis que incluya no linealidad del material. Adicionalmente, es factible incluir la no linealidad geométrica.

Las relaciones esfuerzo-deformación, para materiales como el concreto, tienen una curva distinta en compresión que en tracción. Generalmente se considera que estos materiales tienen una baja resistencia a tracción y se desprecia su contribución a la resistencia a flexión y a cortante, mientras que su resistencia a compresión es relevante. Se definen curvas esfuerzo deformación que describen distintos intervalos de comportamiento, como el representado por el modelo de Park et. al. (1982). Por otra parte, los materiales como el acero estructural describen curvas esfuerzo-deformación en tracción y compresión, que por simplicidad se suele suponer similares; sin embargo, bajo la definición habitual, de esfuerzo y deformación, la curva en compresión no es igual que la de tracción.

2.3 Formulación variacional para el análisis no lineal

Un enfoque igualmente válido y equivalente a plantear las ecuaciones de equilibrio de una estructura, es emplear el principio variacional o formulación débil del problema. La cual es una forma alternativa de las ecuaciones diferenciales, a las que conduce las condiciones de equilibrio, que se describen en su forma integral o funcional. Físicamente se puede interpretar como un balance de la energía, escrito en términos del desplazamiento y sus derivadas. El problema consiste en obtener una aproximación suficiente del desplazamiento que minimice el balance de energía.

La formulación variacional, para el caso lineal, parte del funcional (Π_P) que representa el balance de la energía potencial elástica (E_P) y el trabajo de las fuerzas externas aplicadas (W_f), ver la Ecuación 2.1.

$$\Pi_P = E_P - W_f \quad (2.1)$$

En el caso particular de una viga con comportamiento lineal y elástico, donde se considera únicamente las deformaciones por flexión, es descrita por la Ecuación 2.2. La solución del problema es encontrar el desplazamiento (v) que establezca el balance de energía, Π_P , lo que implica igualar a cero la primera variacional ($\delta\Pi_P$). El desplazamiento obtenido (v), que es solución al problema,

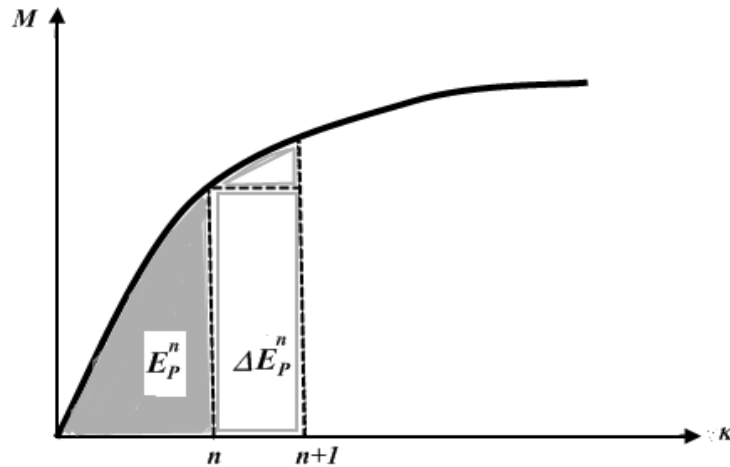
hace que el balance de energía se estabilice y representa el equilibrio entre la fuerza interna y la carga aplicada.

$$\Pi_P = \int_L \frac{1}{2} EI (v'')^2 dx - \int_L v q dx \quad (2.2)$$

Para el problema no-lineal el planteamiento es similar, con la diferencia que se tendrán en cuenta los incrementos de carga (Δq) y desplazamiento (Δv). La solución del problema se expresa en los incrementos de desplazamiento (Δv_n) que se calculan en cada incremento de la carga externa aplicada (Δq_n). La Figura 2.3 muestra el área bajo la curva del diagrama momento-curvatura, que representa la energía potencial desarrollada por las fuerzas internas de una viga con comportamiento no-lineal.

Figura 2.3

Diagrama momento versus curvatura y la energía potencia interna.



En la enésima etapa de carga, para el caso no-lineal, el balance de energía está dado en términos del siguiente funcional, que en principio es similar al mencionado en la Ecuación 2.1.

$$\Pi_P = (E_P^n + \Delta E_P^n) - W_f^{n+1} \quad (2.3)$$

donde:

E_P^n : la energía potencial acumulada al n-ésimo paso

$$E_P^n = \int_L M_n \kappa_n dx : \quad (2.4)$$

ΔE_P^n : el incremento de la energía potencial al n-ésimo paso

$$\Delta E_P^n = \int_L M_n \Delta \kappa dx + \int_L \frac{1}{2} EI_T (\Delta \kappa)^2 dx \quad (2.5)$$

W_f^{n+1} : el trabajo de las fuerzas externas para el siguiente paso

$$W_f^{n+1} = \int_L v_{n+1} q_{n+1} dx \quad (2.6)$$

En las ecuaciones anteriores M_n es el momento resistente de la viga para el enésimo incremento de carga, $\Delta \kappa$ es el incremento de curvatura en una longitud diferencial, EI_T es la rigidez tangente a flexión.

El desplazamiento siguiente al n -ésimo paso de los sucesivos, está dado por la Ecuación 2.7.

$$v_{n+1} = v_n + \Delta v_n \quad (2.7)$$

Y el incremento de las cargas por la Ecuación 2.8

$$q_{n+1} = q_n + \Delta q_n \quad (2.8)$$

La primera variación del funcional mostrado en la Ecuación 2.3, escrito en términos del desplazamiento v y la curvatura v'' , resulta lo siguiente.

$$\delta \Pi_P = \delta \int_L (\Delta v'')^T M_n dx + \delta \int_L \frac{1}{2} (\Delta v'')^T EI_T (\Delta v'') dx - \delta \int_L (\Delta v_n)^T q_n dx - \delta \int_L (\Delta v_n)^T \Delta q_n dx \quad (2.9)$$

En la formulación se emplearon como parámetros de discretización a los desplazamientos nodales de la viga, en la enésima etapa de carga, denotados por u_n y sus correspondientes incrementos, Δu_n . Entonces u_{n+1} puede escribirse de la siguiente manera.

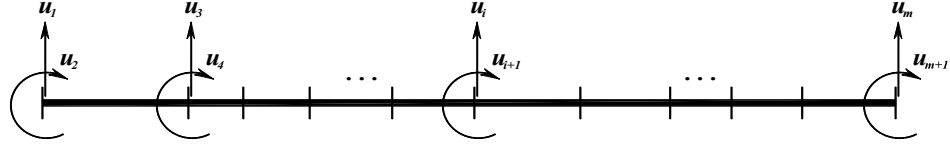
$$u_{n+1} = u_n + \Delta u_n \quad (2.10)$$

La Figura 2.4 muestra un esquema de discretización para una viga, donde se ignoran las deformaciones axiales y se consideran únicamente las de flexión, en función a los desplazamientos nodales, u , que están representados por el vector de desplazamiento siguiente.

$$\underline{u}^T = \{u_1 \quad u_2 \quad \cdots \quad u_i \quad u_{i+1} \quad \cdots \quad u_m \quad u_{m+1}\} \quad (2.11)$$

Figura 2.4

Esquema de discretización nodal de una barra.



El desplazamiento, $\mathbf{v}$, está relacionado con los parámetros de discretización nodal, $\underline{u}$, mediante las funciones de interpolación $\underline{N}$, Ecuación 2.12.

$$\mathbf{v} = \underline{N} \underline{u} \quad (2.12)$$

La curvatura, $\mathbf{v}''$, está dada por la Ecuación 2.13.

$$\mathbf{v}'' = \underline{B} \underline{u} \quad (2.13)$$

De forma análoga, los correspondientes incrementos, $\Delta \mathbf{v}$ y $\Delta \mathbf{v}''$, también están relacionados de la siguiente manera.

$$\Delta \mathbf{v} = \underline{N} \Delta \underline{u} \quad (2.14)$$

$$\Delta \mathbf{v}'' = \underline{B} \Delta \underline{u} \quad (2.15)$$

Los incrementos anteriores, escritos en términos de los parámetros nodales, $\Delta \underline{u}$, y sus funciones de interpolación correspondientes, $\underline{N}$ y $\underline{B}$, se reemplazan en la Ecuación 2.9 y se aplica la condición para que el balance de energía sea mínimo o estable, lo cual ocurre cuando la primera variación, Ecuación 2.9, se iguala a cero.

$$\delta \Pi_P = 0 \quad (2.16)$$

De donde se obtiene la ecuación que relaciona el incremento de los desplazamientos nodales, $\Delta \underline{u}$, con las fuerzas en desequilibrio.

$$\left(\int_L \frac{1}{2} \tilde{B}^T \mathbf{E} \tilde{B} dx \right) \Delta \tilde{u} = \int_L \tilde{N}^T (\mathbf{q}_n + \Delta \mathbf{q}_n) dx - \int_L \tilde{B}^T \mathbf{M}_n dx \quad (2.17)$$

De donde:

$\int_L \frac{1}{2} \tilde{B}^T \mathbf{E} \tilde{B} dx$, rigidez tangente.

$\int_L \tilde{N}^T \mathbf{q}_n dx$, carga aplicada en la enésima etapa de carga.

$\int_L \tilde{N}^T \Delta \mathbf{q}_n dx$, incremento actual de la carga aplicada.

$\int_L \tilde{B}^T \mathbf{M}_n dx$, fuerza interna en desequilibrio con la carga aplicada.

Por simplicidad se puede renombrar los términos de la Ecuación 2.17

$$\tilde{K}_T = \int_L \frac{1}{2} \tilde{B}^T \mathbf{E} \tilde{B} dx \quad (2.18)$$

$$\tilde{f}_{n+1} = \int_L \tilde{N}^T (\mathbf{q}_n + \Delta \mathbf{q}_n) dx \quad (2.19)$$

$$\tilde{R}_n = \int_L \tilde{B}^T \mathbf{M}_n dx \quad (2.20)$$

Finalmente, se obtiene una expresión en términos simples:

$$\tilde{K}_T \Delta \tilde{u} = \tilde{f}_{n+1} - \tilde{R}_n \quad (2.21)$$

La Ecuación 2.21 representa la forma en la que se calculan los incrementos de los desplazamientos nodales, $\Delta \tilde{u}$, producidos por las fuerzas externas, $\tilde{f}_{n+1}$, en desequilibrio con las fuerzas internas, $\tilde{R}_n$.

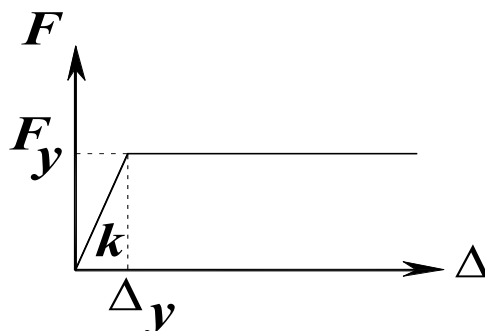
2.4 Modelos constitutivos para el análisis no lineal

A continuación, se describe brevemente algunos modelos constitutivos más empleados en el análisis no lineal de estructuras. Existen una gran variedad de modelos constitutivos para el análisis de estructuras de concreto armado y otros materiales, cada cual con características apropiadas para describir ciertos fenómenos particulares, que se desea representar. Los modelos que a continuación se describen constituyen los modelos más básicos del análisis no lineal de estructuras de concreto. Un estudio detallado de las características de modelos constitutivos más elaborados se puede consultar en Carr (2010).

2.4.1 Modelo Elastoplástico

Posiblemente sea el modelo más empleado para realizar análisis no lineales con una computadora. Este modelo representa el intervalo de comportamiento elástico y el límite de este intervalo está definido por la deformación de fluencia, Δ_y , que está asociada a la resistencia de fluencia, F_y . Más allá de este intervalo de deformación la resistencia se mantiene constante e igual a la resistencia de fluencia; este es conocido como el intervalo de comportamiento plástico. Ver Figura 2.5. Este modelo no toma en cuenta el fenómeno de endurecimiento por deformación del material. Este modelo inicialmente empleado para representar materiales dúctiles como el acero, donde el esfuerzo de fluencia está definido.

Figura 2.5
Modelo elastoplástico.

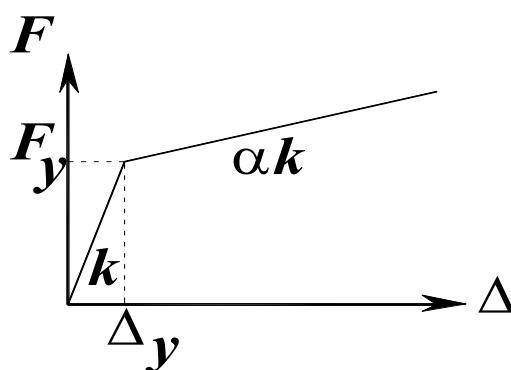


2.4.2 Modelos bilineal

Este modelo surge posteriormente al modelo elastoplástico. A diferencia del método predecesor, considera el endurecimiento por deformación del material. Este modelo representa el intervalo de comportamiento elástico, con pendiente k , donde el límite de este intervalo está definido por la deformación de fluencia, Δ_y , asociada a la resistencia de fluencia, F_y . Para deformaciones mayores que la de fluencia, la resistencia varía linealmente con la deformación, con una pendiente αk . De esta forma toma en cuenta el endurecimiento por

deformación que es típico en materiales como el acero de refuerzo convencional. Por lo general esta segunda pendiente es menor que la del intervalo elástico. Ver Figura 2.6.

Figura 2.6
Modelo bilineal.



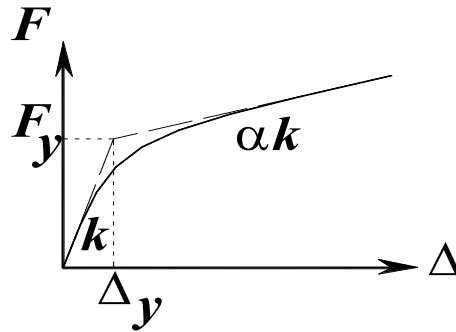
Una extensión del modelo bilineal es el modelo de Takeda, el cual incluye variantes tales como la degradación de la rigidez y resistencia. Este modelo fue creado para representar elementos de concreto armado y fue validado con especímenes ensayados en laboratorios. En la actualidad existen variantes del modelo original de Takeda; se puede consultar Carr (2010). El modelo de Takeda es empleado principalmente para realizar análisis no lineal de estructuras de concreto reforzado bajo la acción de cargas de tipo cíclicas e incluso acciones dinámicas de tipo sísmicas.

2.4.3 Modelos de Ramberg-Osgood

Debido a que algunos tipos de acero y otros metales, tales como los cables de presfuerzo o alambres estructurales con bajo contenido de carbono, exhiben curvas esfuerzo-deformación sin un punto de fluencia definido, Ramberg propuso una curva teórica para evaluar la curva esfuerzo deformación de este tipo particular de material. Los modelos existentes no representaban la forma de esta curva, por lo que, posteriormente se ha empleado para caracterizar las

curvas de otros materiales diferentes al acero. Algunas variantes de este modelo se pueden emplear para representar, mediante curvas monotónicas, el comportamiento de materiales como el concreto. Es posible asociar a la curva Ramberg-Osgood una curva bilineal como envolvente, ver Figura 2.7. Conocida la pendiente elástica, k , el punto de fluencia, dado por Δ_y y F_y , la pendiente poselástica, αk , del modelo bilineal. El parámetro α es algún valor escalar positivo.

Figura 2.7
Modelo tipo Ramberg Osgood.



La ecuación de tipo Ramberg – Osgood empleada es la siguiente:

$$\left(\frac{\Delta}{\Delta_u} \right) = \left(\frac{F}{F_u} \right) \cdot \left(\frac{1 + \alpha \cdot \left| \frac{F}{F_u} \right|^{\gamma-1}}{1 + \alpha} \right) \quad (2.22)$$

La ecuación tipo Ramberg-Osgood es de tipo implícita y está en términos de los parámetros reales α y γ . En esta ecuación, el parámetro α , no es el mismo que el indicado para el factor α del modelo bilineal. Un aspecto importante de esta ecuación, a diferencia de los demás modelos descritos, es

que se requiere una sola expresión para definir la curva monotónica de comportamiento.

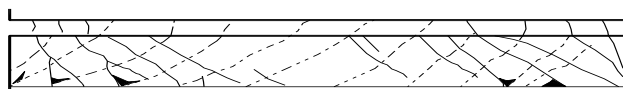
2.5 Modelos para el análisis no lineal de estructuras de concreto

La modelación de estructuras de concreto armado, mediante métodos de análisis tan refinados como el método de los elementos finitos, permite modelar con detalle la geometría y las propiedades de los materiales. En décadas pasadas, se han realizado grandes progresos en el campo de los modelos constitutivos para el concreto armado bajo la acción de carga en múltiples direcciones. La modelación elemento por elemento es lo normalmente empleado en el análisis no lineal de estructuras de concreto armado, Otani (2006).

Algunos procedimientos empleados para el análisis no lineal consideran, para el intervalo no lineal de comportamiento, que la rigidez es constante en cada sub-intervalo de carga y cambia donde más se desarrolla el daño a lo largo del elemento, ver Figura 2.8. Algunos modelos representan la distribución de la rigidez a lo largo del elemento reflejando la distribución del daño. Para estos modelos la matriz de rigidez del elemento necesita ser recalculada y reformulada con el desarrollo del daño.

Figura 2.8

Distribución típica de fisuras en una viga de concreto armado.



Nota: fuente adaptada de Otani (2006)

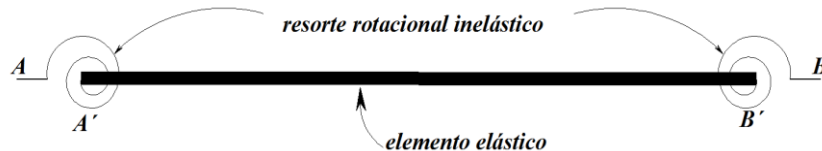
2.5.1 Modelo de una componente

Una estructura puede ser analizada mediante barras conectadas en sus extremos con elementos tipo resorte rotacional, con comportamiento rígido plástico, por ejemplo. Los cuales se suponen concentran toda la deformación

inelástica de la barra; en el resto de la barra se supone comportamiento perfectamente elástico, ver Figura 2.9. Este modelo de una componente fue generalizado por Giberson (1967).

Figura 2.9

Cálculo de la rotación del extremo del elemento.



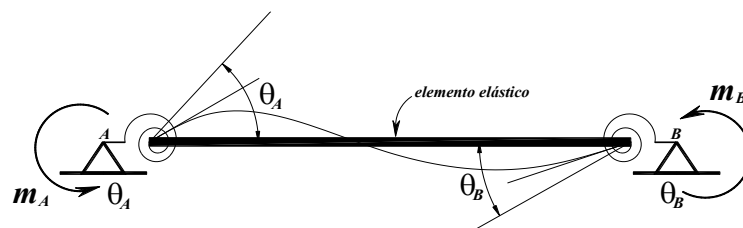
Nota: fuente adaptada de Giberson (1967)

La mayor ventaja práctica de estos modelos radica en que la deformación en los extremos de los elementos depende únicamente del momento actuante en esos extremos. Lo que implica que se puede emplear cualquier modelo asignado al resorte. Sin embargo, este hecho puede ser una debilidad del modelo, porque la rotación de los extremos del elemento debería ser dependiente de la distribución de la curvatura a lo largo del elemento, por lo tanto, dependiente de los momentos de ambos extremos.

Las propiedades de rigidez son función de la rigidez del resorte rotacional, los cuales se obtienen en función a las propiedades del material, y de las propiedades geométricas del elemento. Para la obtención de la matriz de flexibilidad de un elemento simplemente apoyado, ver Figura 2.10, se supone que la rotación de los extremos está dada por la suma de la rotación del elemento elástico y la rotación inelástica del resorte rotacional.

Figura 2.10

Modelo de una componente, adaptado de Giberson (1967)

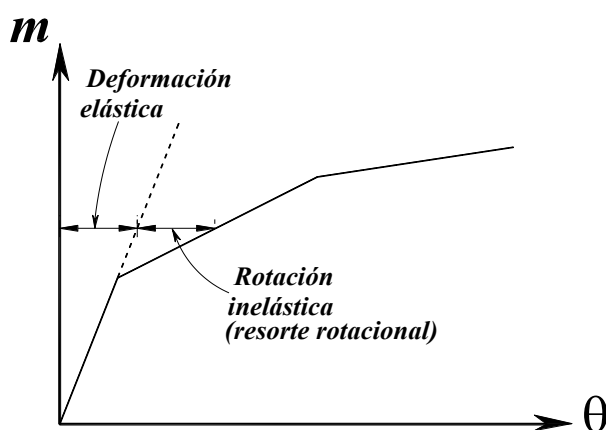


Nota: fuente adaptada de Giberson (1967)

La relación entre el momento y la rotación total en los extremos de un elemento se ilustra en la Figura 2.11; la deformación elástica está representada por la línea con mayor pendiente y las componentes de la rotación inelástica están dadas por las líneas con menor pendiente. Estas líneas son propiedades de los resortes rotacionales.

Figura 2.11

Relación momento-rotación en los extremos del elemento.



Nota: fuente adaptada de Giberson (1967)

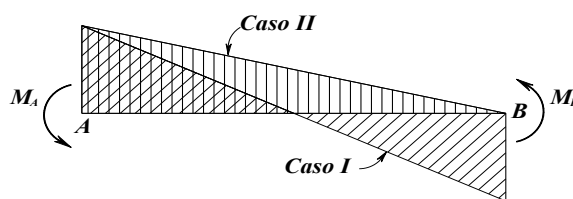
La rigidez del resorte rotacional inelástico, por lo general, es definida bajo la suposición de una distribución asimétrica del momento a lo largo del elemento y que el punto de inflexión se ubica en la mitad del mismo. Esta suposición es una simplificación del modelo, debido a que la rotación de los extremos del elemento debe depender de la distribución de la curvatura a lo largo del elemento. En el ejemplo siguiente, el caso I muestra una distribución de curvatura con el punto de inflexión supuesto a la mitad del elemento; en el caso II el punto de inflexión se ubica en un extremo del elemento, ver Figura 2.12. En este segundo caso la rotación inelástica, debida a la demanda sísmica, es mayor que la del caso I. Este ejemplo muestra que, con el modelo de una componente, las secciones críticas no siempre se representan adecuadamente.

Suko y Adams (1971), sugieren que durante un terremoto la localización inicial del punto de inflexión no difiere mucho de la ubicación inicial elástica. Sin embargo, cuando se desarrolla la fluencia en un extremo, el momento en el otro extremo debe aumentar para resistir un esfuerzo mayor, lo cual mueve el punto de inflexión al centro del elemento. Al mismo tiempo, se inicia una gran concentración de rotación cerca de la sección crítica.

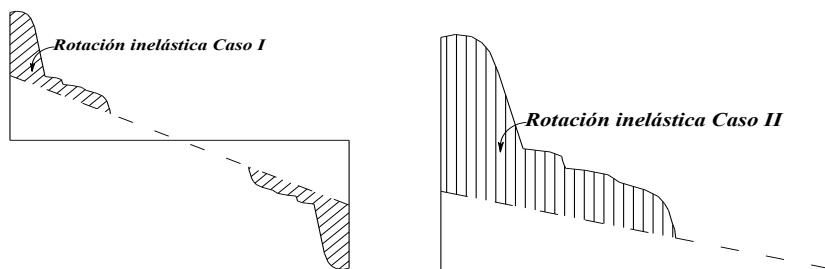
A pesar de las críticas razonables a modelos simples, se ha observado que con los modelos de una componente se han obtenido resultados razonablemente buenos en edificios de poca altura, en los que el punto de inflexión ocurre aproximadamente a la mitad de la altura de columnas.

Figura 2.12

Rotación inelástica en extremos para diferente distribución de momento.



a) Distribución de momentos



b) Distribución de rotación inelástica

Nota: fuente adaptada de Otani (2006)

2.5.2 Modelo de doble componente y multi-componente

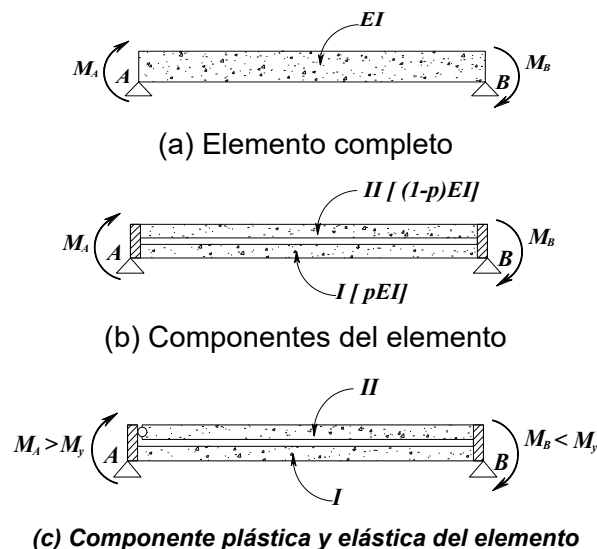
En un esfuerzo por realizar análisis inelásticos de pórticos planos en el intervalo inelástico de comportamiento, bajo acciones sísmicas, Clough et al.

(1965) propusieron un modelo de doble componente, ver Figura 2.13.a, que consiste en dividir en dos elementos paralelos imaginarios; el primer elemento, con comportamiento elastoplástico, sirve para representar el fenómeno de fluencia, y el segundo es un elemento totalmente elástico, que sirve para representar el comportamiento con endurecimiento por deformación. La suma de la rigidez flexional de ambos elementos es igual a la rigidez inicial elástica a flexión, EI , ver Figura 2.13.b. Los dos elementos son conectados rígidamente en ambos extremos; el momento en los extremos del elemento completo es la suma de los momentos de los dos elementos. Cuando el momento en uno de los extremos del elemento completo alcanza la fluencia, se coloca una rótula plástica en el extremo del elemento elastoplástico, ver Figura 2.13.c. Al descargar el extremo del elemento, con incursión en el intervalo inelástico, la rótula plástica se retira del extremo en fluencia. La rotación en los extremos del elemento depende de ambos momentos de cada extremo.

Estos modelos fueron únicos en su tiempo, cuando se analizaban pórticos solamente para una condición elastoplástica.

Figura 2.13

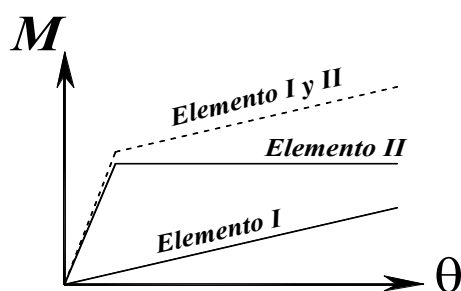
Modelo de doble componente.



Nota: fuente adaptada de Clough et al. (1965)

El comportamiento debido al endurecimiento por deformación podía ser representado por este modelo, ver Figura 2.14. En muchos casos puede ser suficiente una representación bilineal del comportamiento no lineal, como es el caso de las vigas y columnas de concreto con relativa baja carga axial, es decir deformación neta mayor que 0.005; sin embargo, en casos donde se requiera representar la degradación de resistencia, en la etapa inelástica, como es el caso de columnas con carga axial que produzca deformación neta menor que 0.002, en tales casos este modelo no sería capaz de representar la tal degradación de resistencia que se presenta luego de alcanzar la resistencia a flexión.

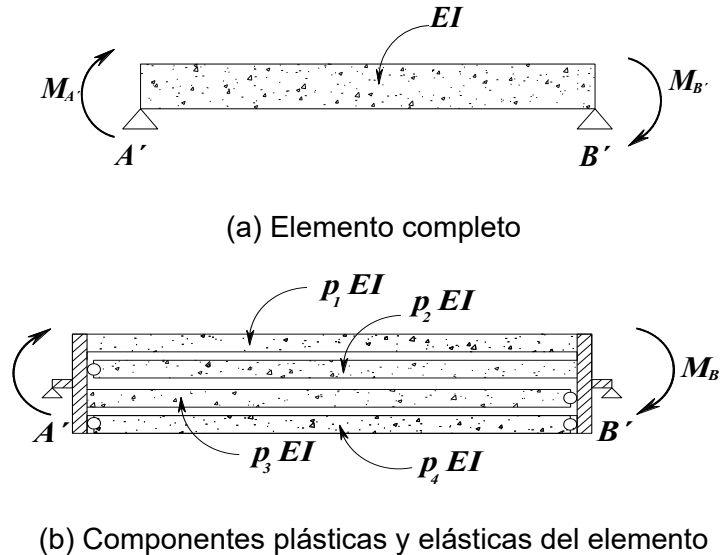
Figura 2.14
Modelo de doble componente.



Nota: fuente adaptada de Clough et al. (1965)

Aoyama y Sugano (1968) adaptaron el modelo de doble componente, crearon un modelo de varias componentes, en el que emplearon cuatro elementos en paralelo para tener en cuenta la fisuración por flexión. Diferentes momentos de fluencia en ambos extremos del elemento, además de considerar endurecimiento por deformación. La compatibilidad de la deformación de los componentes imaginarios era satisfecha solamente en los extremos, ver Figura 2.15.

Figura 2.15
Modelo de varias componentes.



Nota: fuente adaptada de Aoyama y Sugano (1968)

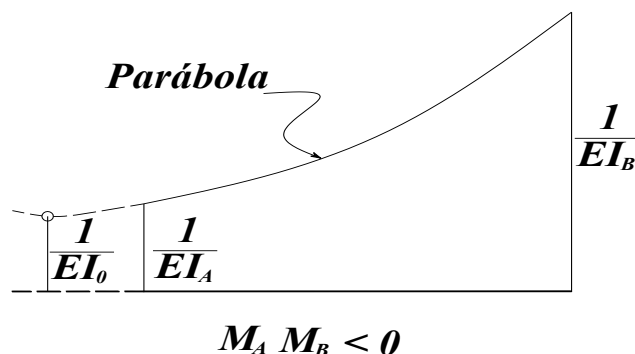
2.5.3 Modelo de flexibilidad distribuida

Debido al desarrollo de fisuras a lo largo de un elemento, la distribución de la rigidez a lo largo del mismo tiene una distribución no uniforme. Takizawa (1973, 1976) desarrolló un modelo que supone un patrón prescrito de la distribución de la flexibilidad a flexión de las secciones transversales (recíproco de la rigidez a flexión EI) a lo largo de la longitud del elemento.

Se supone una distribución parabólica de la flexibilidad a flexión ($1/EI(x)$) en toda la longitud del elemento, dada en términos de dos valores conocidos en los extremos, $1/EI(0)$ y $1/EI(L)$, además de un valor mínimo intermedio $\min\{1/EI(x)\}$. El punto de inflexión de dicha distribución puede estar dentro o fuera de la longitud del elemento. Las pequeñas flexibilidades por flexión pueden ser supuestas iguales a los valores elásticos iniciales. Para elementos con momentos en los extremos, la flexibilidad por flexión en el extremo del elemento puede ser evaluada sobre la base de una relación momento-curvatura. Ver Figura 2.16.

Figura 2.16

Modelo de flexibilidad distribuida.



Nota: fuente adaptada de Takizawa (1973)

El método descrito es un concepto interesante en el análisis de elementos inelásticos. Sin embargo, algunas veces la distribución parabólica de la flexibilidad no describe la concentración de deformación en la sección crítica, lo cual normalmente ocurre en los extremos de los elementos, debido a la fluencia por flexión y la deformación atribuible al deslizamiento del refuerzo longitudinal en la conexión viga-columna. El empleo de resortes inelásticos en estas zonas de concentración de deformaciones en conjunto con los modelos descritos puede dar soluciones útiles.

2.5.4 Modelo de resortes rotacionales discretos

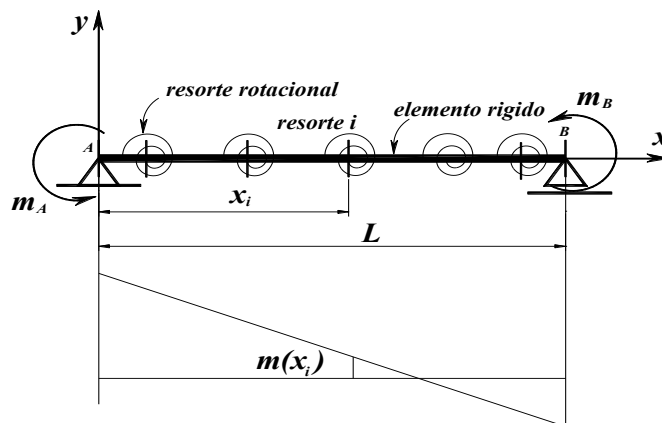
Con la finalidad de superar la dificultad en el tratamiento de rigidez variable, a lo largo de un elemento, es posible sub-dividir dicho elemento en segmentos cortos a lo largo de la longitud y asignar las características de rigidez no lineales a cada segmento. La rigidez no lineal puede ser asignada dentro de un segmento, o a los resortes rotacionales flexibles, ubicados en la conexión de dos segmentos adyacentes. Un modelo simplificado para el análisis no lineal fue basado en segmentos rígidos conectados por resortes rotacionales, ver Figura 2.17, con flexibilidad f_i , el cual fue presentado por Wen y Janssen (1965) para el análisis no lineal de pórticos planos, los cuales consistían en segmentos con comportamiento elastoplástico. La flexibilidad y la masa de los elementos fueron

concentradas en los nudos que conectan a los segmentos. Powell (1975) sugirió emplear un modelo de histéresis con rigidez degradante para los resortes rotacionales, además de emplear segmentos más cortos en la zona de mayores momentos flectores y segmentos más largos en zonas de menor momento flector.

Los giros y los momentos, incrementales, se relacionan en términos de la matriz de flexibilidad de un elemento simplemente apoyado consistente de segmentos rígidos y resortes rotacionales en los nudos internos.

Figura 2.17

Modelo de elementos discretos por resortes rotacionales y segmentos rígidos.



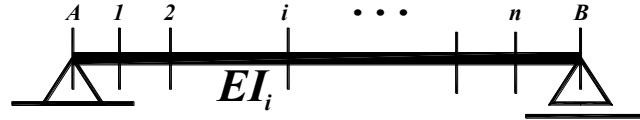
Nota: fuente adaptada de Wen y Janssen (1965)

2.5.4 Modelo de elementos discretos de tipo segmentales

El elemento es dividido en segmentos pequeños o dovelas, cada segmento "i" con una rigidez a flexión EI_i que varía con la historia de esfuerzos del segmento, ver Figura 2.18. La variación de la rigidez a lo largo del elemento, entre los extremos A y B, puede ser fácilmente formulada con este modelo en función de la rigidez a flexión estimada para cada segmento.

Figura 2.18

Modelo de elementos discretos por dovelas.

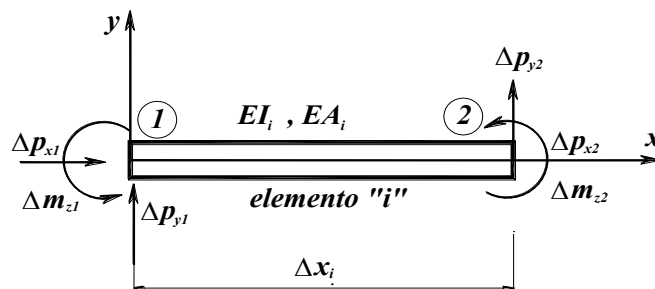


Nota: fuente adaptada de Otani (2006)

El elemento es subdividido en $(n+1)$ elementos; en el que el i -ésimo elemento tiene una rigidez a flexión uniforme, EI_i , y una longitud, Δx_i . Es posible emplear un sistema de coordenadas locales en cada dovela en común para todo el elemento, ver Figura 2.19. A continuación se indica la matriz de rigidez para cada elemento, " i ", en el sistema de coordenadas locales común, ver Ecuación 2.26.

Figura 2.19

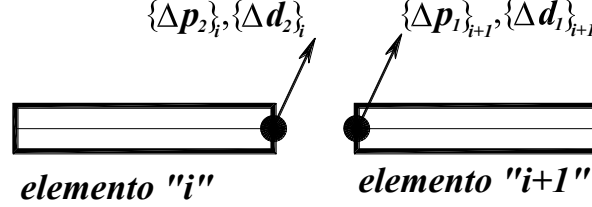
Coordenadas locales de una dovela.



Nota: fuente adaptada de Otani (2006)

En cada nudo están conectados dos elementos de la barra, se emplea las condiciones de compatibilidad de desplazamientos y el equilibrio de las fuerzas en los extremos de cada dovela, ver Figura 2.20. Se puede formular un sistema de ecuaciones que representan la matriz de rigidez del elemento $[k]$, el vector de fuerza incremental $\{\Delta p\}$ y el vector de desplazamientos incrementales $\{\Delta d\}$.

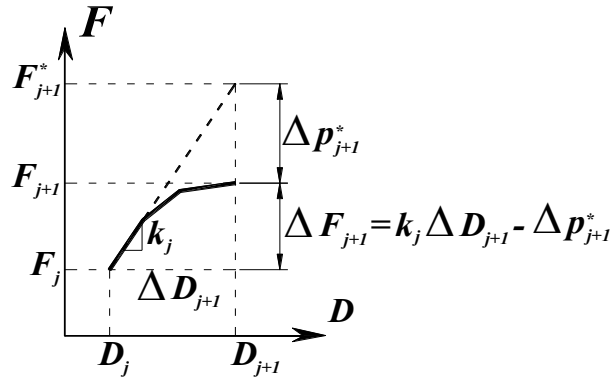
Figura 2.20
Compatibilidad y equilibrio de nudos.



Nota: fuente adaptada de Otani (2006)

En el análisis no lineal se supone que para pequeños incrementos de fuerzas la rigidez se mantiene constante; sin embargo, esta suposición lleva a que se produzca un desequilibrio en las fuerzas internas, las mismas que son función de alguna relación constitutiva no lineal del material. La corrección de las fuerzas desequilibradas se realiza mediante la aplicación de una fuerza imaginaria externa, $\{\Delta p_{j+1}^*\}$. Esto es normalmente empleado para corregir las fuerzas desequilibradas en el elemento, de acuerdo con la relación constitutiva correspondiente, ver Figura 2.21.

Figura 2.21
Corrección de fuerzas desequilibradas.



Nota: fuente adaptada de Otani (2006)

La fuerza incremental, $\{\Delta F_{j+1}\}$, se calcula mediante la ecuación siguiente.

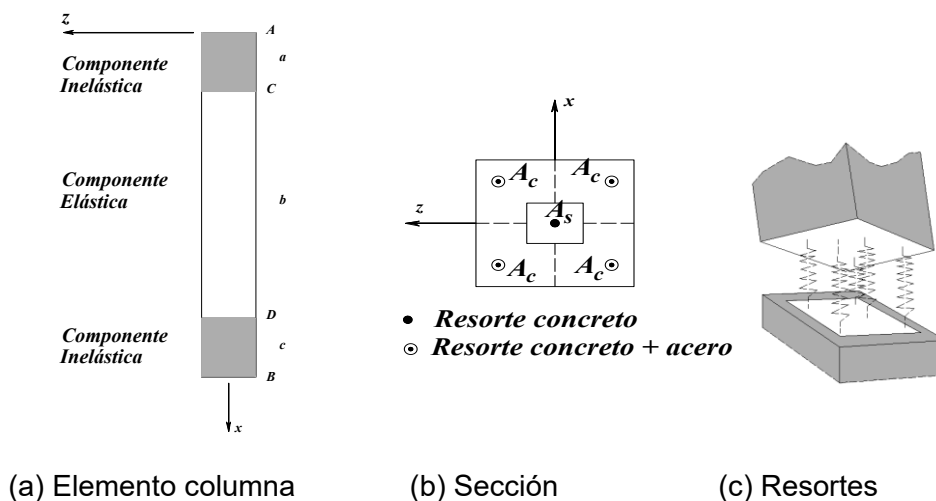
$$\{\Delta F_{j+1}\} = [k_j] \{\Delta D_{j+1}\} - \{\Delta p_{j+1}^*\} \quad (2.23)$$

La condensación estática de las fuerzas desbalanceadas en los nudos intermedios $\{\Delta p_i^*\}$ dentro de un elemento y las correspondientes de los extremos $\{\Delta p_e^*\}$ se llevan a cabo mediante procedimientos habituales, con algunos términos adicionales en el proceso de la condensación.

2.5.5 Modelo multi-resorte

Un modelo analítico apropiado para realizar análisis tridimensional bajo acciones bidireccionales horizontales y verticales del sismo, sería el planteado por Lai et al. (1984), denominado multi-resorte, MS, ver Figura 2.22. Este modelo puede simular el comportamiento de columnas de concreto armado bajo carga axial variable y cargas laterales bidireccionales reversibles. Una columna puede ser modelada con un elemento lineal con longitud igual a la altura libre y dos elementos multi-resorte de longitud cero en los extremos del elemento lineal. El elemento multi-resorte modela de forma similar que el modelo laminar (fibras), pero la sección no es dividida en varios elementos; las propiedades de la sección transversal son representadas por cuatro resortes para modelar el acero y cinco resortes para el concreto. Todas las deformaciones por flexión se han supuesto concentradas en los elementos multi-resorte localizados en los extremos de los elementos (modelos de una componente).

Figura 2.22
Modelo multi-resorte.



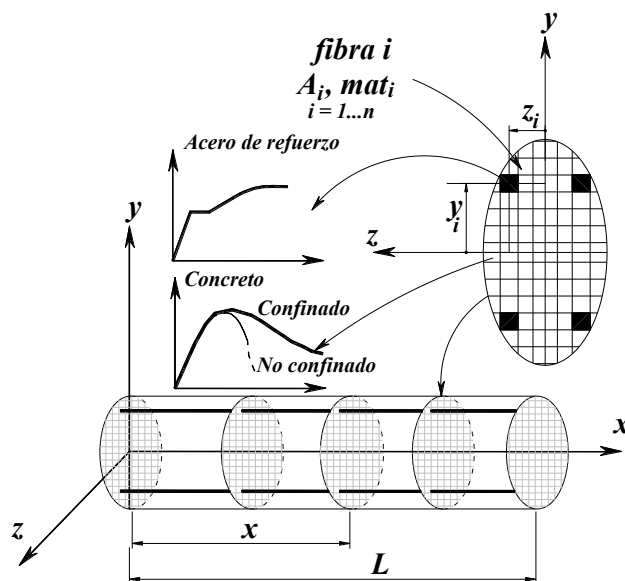
Nota: fuente adaptada de Lai et al. (1984)

2.5.6 Modelo de fibras

El elemento es dividido en segmentos pequeños y a su vez estos segmentos son subdivididos en elementos más pequeños. En los bordes de las secciones adyacentes se considera válida la hipótesis de Bernoulli, de las secciones planas permanecen planas después de la deformación, con las que se formulan las condiciones cinemáticas. La rotación alrededor de dos ejes y la elongación del centroide son representadas por los grados de libertad de la sección. Estos modelos son denominados "modelos de fibra" y son empleados para representar el comportamiento por flexión de los elementos. Ver Figura 2.23. Normalmente las deformaciones por cortante son ignoradas en esta formulación.

Figura 2.23

Modelo de fibras para un elemento de concreto armado.



Nota: fuente adaptada de Otani (2006)

La matriz de rigidez tangente de un elemento, sin carga intermedia, está relacionada con las fuerzas y desplazamientos de los extremos mediante la expresión siguiente.

$$\begin{Bmatrix} \Delta m_A \\ \Delta m_B \\ \Delta p_{AB} \end{Bmatrix} = [K_m^t] \begin{Bmatrix} \Delta \theta_A \\ \Delta \theta_B \\ \Delta e_{AB} \end{Bmatrix} \quad (2.24)$$

Donde la matriz de rigidez del elemento, $[K_m^t]$, se obtiene mediante la integración de la matriz de rigidez tangente de la sección $[K_s^t]$ en toda la longitud del elemento, según la expresión siguiente.

$$[K_m^t] = \int_L \mathbf{B}(x)^T [K_s^t] \mathbf{B}(x) dx \quad (2.25)$$

Donde $\mathbf{B}(x)$ es la matriz que relaciona el vector generalizado de incrementos de deformación, en una sección cualquiera del elemento, con el vector de incrementos de desplazamiento en los extremos del elemento.

$$\Delta \mathbf{e}(x) = \mathbf{B}(x) \Delta \theta \quad (2.26)$$

2.6 Propiedades mecánicas de los materiales

El comportamiento mecánico de los materiales puede ser representado mediante curvas esfuerzo-deformación. En este acápite se revisan modelos propuestos por diversos investigadores para el concreto y para el acero de refuerzo.

Refiriéndose al concreto en un estado de esfuerzos uniaxial, se hace mención a algunos de los modelos más empleados, como el de Hognestad (1951), Desayi y Krishnan (1964), Kent y Park (1971), Mander et al. (1988), por mencionar algunos de ellos.

Por otra parte, para la curva correspondiente al acero, además del modelo elastoplástico o bilineal, existen modelos que representan el endurecimiento por deformación inelástica del acero. Algunos de los modelos considerados son el de Mander (1984), Dodd y Restrepo (1995).

2.6.1 Curva esfuerzo-deformación para el concreto

Los modelos para representar el concreto simple o no confinado se iniciaron con Suenson (1912), quien planteó un bloque rectangular de esfuerzos

similar al propuesto por Whitney (1937). Posteriormente se desarrollaron modelos que mostraban una mayor similitud con los resultados experimentales. Algunos de los más representativos fueron el propuesto por Hognestad (1951), y posteriormente el de Desayi y Krishnan (1964), Kent y Park (1971), entre otros.

El modelo propuesto por Hognestad (1951) está formado por dos curvas. La primera es una parábola de segundo grado, ver Ecuación 2.27, que representa la parte inicial de la curva, correspondiente al comportamiento elástico e inicio del intervalo de comportamiento inelástico, hasta un esfuerzo de $0.85f'_c$. Desde ese punto la rama descendente es una recta con pendiente negativa que muestra una pérdida de la resistencia igual a $0.15f''_c$. Ver Figura 2.24.

$$f_c = f''_c \left[2 \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} - \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right)^2 \right] \quad (2.27)$$

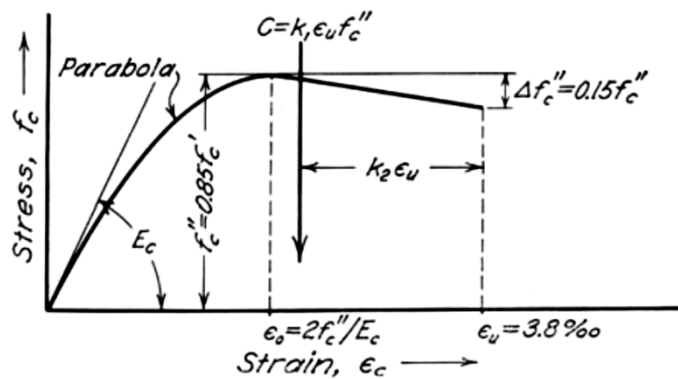
Donde:

$$f''_c = 0.85f'_c \quad (2.27.1)$$

$$\varepsilon_0 = 2f''_c / E_c \quad (2.27.2)$$

Figura 2.24

Modelo esfuerzo-deformación para el concreto a compresión según Hognestad (1951).



Nota: fuente adaptada de Hognestad (1951)

El modelo de Desayi y Krishnan (1964) es representado por una sola ecuación, Ecuación 2.28, que muestra el comportamiento en todo el intervalo desde la etapa elástica inicial hasta la etapa inelástica.

$$f_c = E_c \left[\frac{\varepsilon}{1 + \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right)^2} \right] \quad (2.28)$$

Donde
$$\varepsilon_0 = \frac{2f_c''}{E_c} \quad (2.28.1)$$

Una generalización del modelo de Hognestrand (1951) fue el propuesto por Kent y Park (1971), que además presenta un modelo para el concreto confinado, con cierta deficiencia, el cual, en una primera versión, no incluyó el efecto del confinamiento en el incremento de resistencia del concreto, Ecuación 2.29. Este modelo reemplaza el parámetro, f_c'' , por la resistencia a compresión del concreto, f_c' , y considera que la deformación asociada a la resistencia, ε_0 , es igual a 0.002. Ver Figura 2.25.

$$f_c = f_c' \left[2 \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} - \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right)^2 \right] \quad (2.29)$$

Para la rama descendente se emplea una recta similar a la del modelo original.

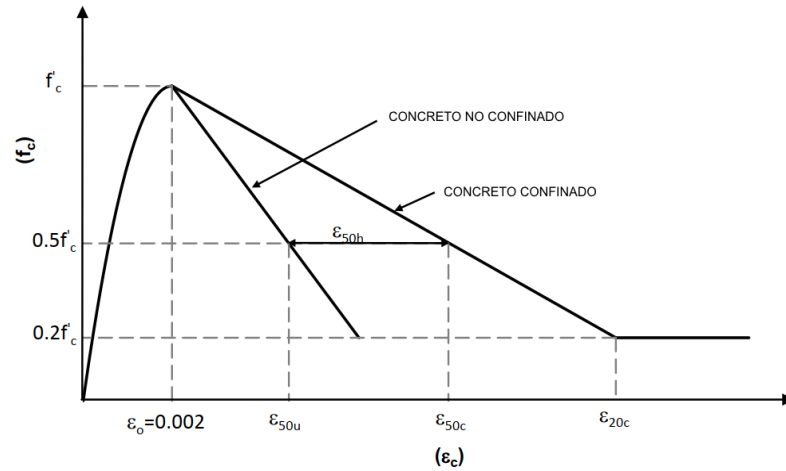
$$f_c = f_c' \left[1 - Z(\varepsilon - \varepsilon_0) \right] \quad (2.30)$$

Donde:
$$Z = \frac{0.5}{\varepsilon_{50u} - \varepsilon_0} \quad (2.30.1)$$

$$\varepsilon_{50u} = \frac{3 + 0.29 f_c'}{145 f_c' - 1000} \quad (f_c' \text{ en MPa}) \quad (2.30.2)$$

Figura 2.25

Modelo esfuerzo-deformación para el concreto a compresión según Kent y Park (1971).



Nota: fuente adaptada de Kent y Park (1971)

Para representar la curva del concreto confinado diversos investigadores demostraron que la relación entre la resistencia del concreto confinado y la correspondiente deformación longitudinal es función de una presión de tipo hidrostática, mediante ecuaciones del tipo siguiente:

$$f'_{cc} = f'_{co} + k_1 f_l \quad (2.31)$$

$$\epsilon_{cc} = \epsilon_{co} \left(1 + k_2 \frac{f_l}{f'_{co}} \right) \quad (2.32)$$

Donde:

f'_{cc} : Esfuerzo máximo del concreto, bajo presión de confinamiento hidrostático f_l .

ϵ_{cc} : Deformación máxima del concreto bajo presión de confinamiento hidrostático f_l .

f'_{co} : Esfuerzo del concreto sin confinar.

ϵ_{co} : Deformación del concreto sin confinar.

f_l : Presión de confinamiento hidrostático.

k_1 y k_2 : coeficientes que son función de la mezcla de concreto y la presión lateral.

Richart (1928), encontró experimentalmente los valores promedio de k_1 igual a 4.1 y k_2 igual a $5k_1$. Posteriormente Balmer (1949) obtuvo para k_1 un intervalo de variación entre 4.5 y 7.0, con un promedio de k_1 igual a 5.6; los valores elevados ocurren a presiones laterales inferiores. Por otro lado, Richart (1928) encontró que la resistencia del concreto con presión lateral activa de confinamiento (fluido) o de tipo hidrostático, fue similar a la observada en probetas de concreto con confinamiento pasivo de espirales con espaciamiento cercano.

Las investigaciones realizadas por Mander (1984), Scott (1982), Sheikh y Uzumeri (1980), Vellenas et al. (1977), mediante numerosos ensayos con especímenes de tamaño real, han demostrado que el confinamiento mejora el comportamiento del concreto si:

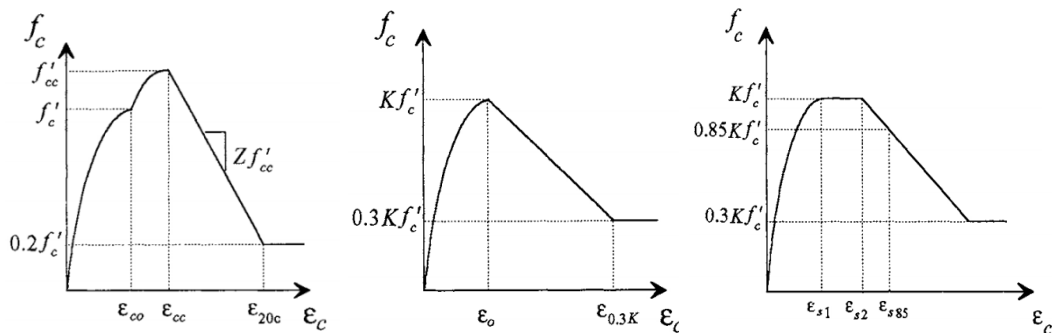
- a) El refuerzo transversal es ubicado a espaciamientos relativamente cercanos.
- b) Se tienen estribos adicionales superpuestos o ganchos con muchos brazos que crucen la sección.
- c) Las barras longitudinales están bien distribuidas alrededor del perímetro.
- d) La relación entre el volumen del refuerzo transversal y el volumen del núcleo del concreto o el esfuerzo de fluencia del acero transversal se incrementan.
- e) Se emplean espirales o estribos circulares en lugar de estribos rectangulares y ganchos suplementarios.

Las primeras investigaciones del comportamiento de concreto confinado fueron llevadas a cabo a escalas relativamente pequeñas, con especímenes cargados concéntricamente, a tasas de deformación cuasi estáticas. El modelo de esfuerzo-deformación de Kent y Park (1971) para concreto confinado mediante refuerzo transversal rectangular fue basado en los resultados de los ensayos de Roy y Sozen (1969) y otros disponibles en ese momento. Ese primer modelo no tenía en cuenta el incremento de la resistencia del concreto, pero sí el incremento de la ductilidad debido al acero de confinamiento. Posteriormente Scott (1982) y Park (1982) ensayaron especímenes a escala real y modificaron las ecuaciones esfuerzo-deformación de Kent y Park (1971). En el nuevo modelo tomaron en cuenta la resistencia del concreto y la mayor ductilidad debida al

confinamiento, además del efecto de la velocidad de deformación. Una de las primeras ecuaciones esfuerzo-deformación para concreto confinado mediante refuerzo transversal tipo espiral fue propuesta por Park y Leslie (1974). Ver Figura 2.26.

Figura 2.26

Modelo esfuerzo-deformación del concreto confinado.



(a) Park y Leslie (1974) (b) Vallenias, Bertero y Popov (1977) (c) Sheikh y Uzumeri (1980)

Nota: fuente adaptada de Kent y Leslie (1974), Vallenias et al. (1977) y Sheik y Uzumeri(1980)

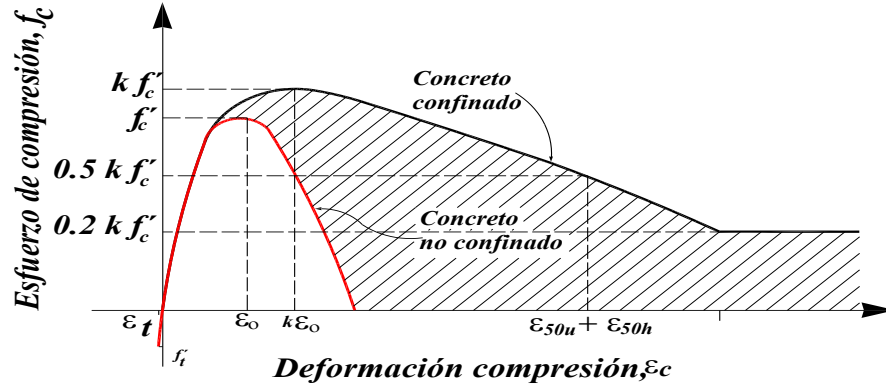
La resistencia a la flexión y la ductilidad de las secciones de concreto confinado, calculadas con las ecuaciones esfuerzo-deformación mencionadas, muestran diferencias relativamente importantes. En particular las ecuaciones se agrupan en aquellas aplicables a formas rectangulares de confinamiento y otras aplicables a formas circulares.

Es evidente que se requiere de una aproximación unificada aplicable a todas las secciones, con refuerzos transversales, circulares y rectangulares, que también incluyan los efectos de cargas cíclicas y velocidad de deformación.

La Figura 2.27 muestra dos curvas. La curva del concreto no confinado es la que representa típicamente a las curvas descritas por las probetas de concreto simple, obtenidas en ensayos. La otra curva representa al concreto confinado, según el modelo de Kent y Park modificado (1982); por lo general muestra un incremento de la resistencia y de manera más notoria un incremento en la capacidad de deformación, que son función del detallado de refuerzo de confinamiento dado por el espaciamiento y la configuración de los estribos.

Figura 2.27

Modelo esfuerzo-deformación, Kent y Park modificado, para el concreto a compresión, según Kent y Park (1982).



Nota: fuente adaptada de Kent y Park (1982),

Mander (1984) propuso una aproximación unificada para formas circulares y rectangulares, basada en la ecuación propuesta por Popovic (1973). Para una lenta (cuasi estática) velocidad de deformación y carga monotónica, el esfuerzo de compresión del concreto está dado por:

$$f_{cc} = \frac{f'_{cc} x^r}{r - 1 + x^r} \quad (2.33)$$

$$\varepsilon_{cc} = \varepsilon_o \left[1 + 5 \left(\frac{f'_{cc}}{f'_{co}} - 1 \right) \right] \quad (2.34)$$

Donde :

$x = \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{cc}}$ es un parámetro adimensional que relaciona las deformaciones

f'_{cc} es la resistencia a compresión del concreto confinado

ε_c es la deformación de concreto comprimido

f'_{co} y ε_o , la resistencia del concreto sin confinar y su correspondiente deformación (generalmente se supone ε_o igual a 0.002), y

$$r_c = \frac{E_c}{E_c - E_{sec}} \quad (2.35)$$

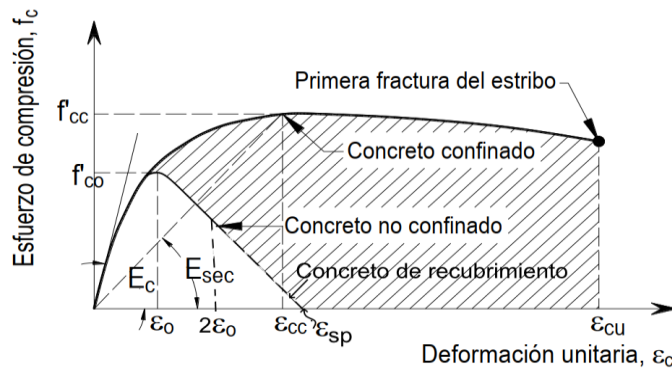
Donde, E_c el módulo de elasticidad tangente del concreto y el módulo secante

$$E_{sec} = \frac{f'_{cc}}{\epsilon_{cc}} \quad (2.36)$$

Para definir el comportamiento esfuerzo deformación del recubrimiento del concreto (fuera del núcleo del concreto confinado) en la rama descendente, región donde ϵ_c es mayor que $2\epsilon_0$, se supone que es una línea recta que alcanza el esfuerzo igual a cero cuando se desprende el concreto a una deformación igual a ϵ_{sp} . Ver Figura 2.28.

Figura 2.28

Modelo esfuerzo-deformación para el concreto, para el concreto confinado y no confinado, según Mander (1988).

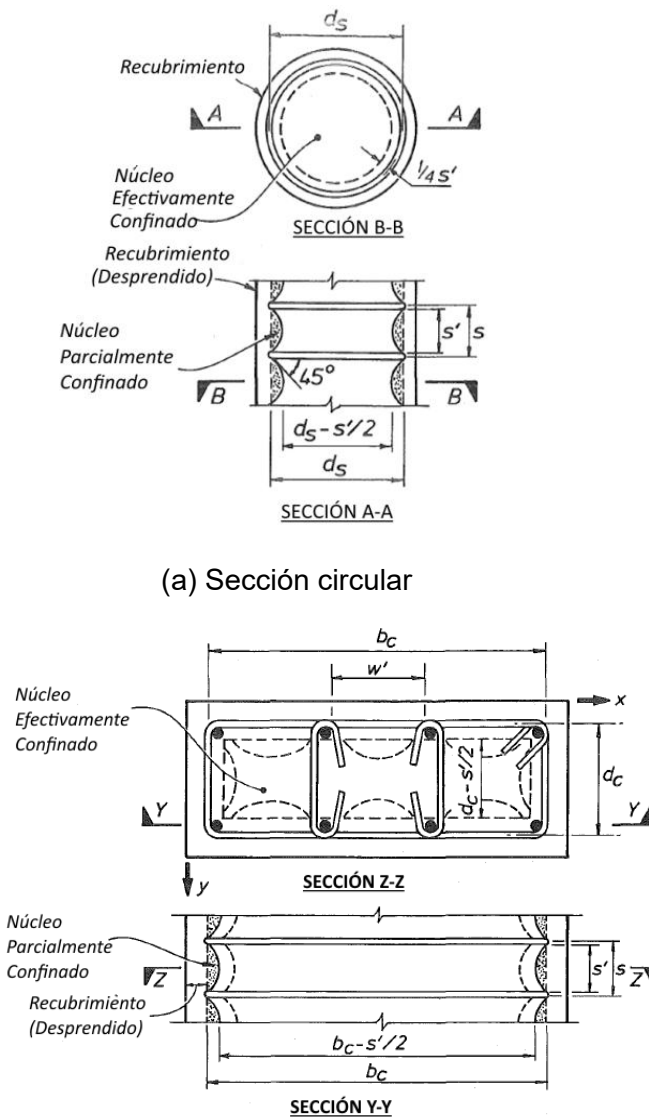


Nota: fuente adaptada de Mander (1988),

El modelo de Mander (1988) emplea un enfoque similar al utilizado por Sheikh y Usumeri (1980) para determinar la presión de confinamiento lateral efectiva de la sección de concreto. La presión lateral máxima de confinamiento del acero de confinamiento es eficiente en el núcleo del concreto, donde el

esfuerzo del concreto se desarrolla debido al confinamiento. La Figura 2.29 muestra la acción de arco parabólico que se supone ocurre entre los niveles de refuerzo transversal para secciones de forma circular y en secciones rectangulares con estribos y ganchos.

Figura 2.29
Núcleo efectivamente confinado, Mander (1988).



(b) Sección rectangular

Nota: fuente adaptada de Mander (1988),

La presión de confinamiento lateral efectiva f'_l , se calcula mediante la expresión.

$$f'_l = k_e f_l \quad (2.37)$$

Donde:

f_l : es la presión lateral del refuerzo transversal, que se supone distribuida uniformemente sobre la superficie del núcleo de concreto.

k_e : es el coeficiente de efectividad del confinamiento, definido mediante:

$$k_e = \frac{A_e}{A_{cc}} \quad (2.38)$$

Donde:

A_e : el área del núcleo de concreto efectivamente confinado.

A_{cc} : el área del núcleo de concreto.

El coeficiente de efectividad del confinamiento para secciones con estribos circulares.

$$k_e = \frac{\left(1 - \frac{s'}{2d_s}\right)^2}{1 - \rho_L} \quad (2.39)$$

De manera similar, para secciones con espirales circulares.

$$k_e = \frac{\left(1 - \frac{s'}{2d_s}\right)}{1 - \rho_L} \quad (2.40)$$

Ahora en secciones circulares, si ρ_s es la relación entre el volumen de acero de confinamiento transversal y el volumen de núcleo de concreto confinado.

$$\rho_s = \frac{4A_{sp}}{d_s s} \quad (2.41)$$

El esfuerzo de confinamiento lateral efectivo sobre el concreto es:

$$f'_l = \frac{1}{2} k_e \rho_s f_{yh} \quad (2.42)$$

Donde: f_{yh} es el esfuerzo de fluencia de la armadura transversal.

En el caso de secciones rectangulares, el coeficiente de efectividad del confinamiento para estribos rectangulares es:

$$k_e = \frac{\left(1 - \sum_{i=1}^n \frac{(w_i')^2}{6b_c d_c}\right) \left(1 - \frac{s'}{2b_c}\right) \left(1 - \frac{s'}{2d_c}\right)}{1 - \rho_L} \quad (2.43)$$

Es posible que los elementos rectangulares de concreto armado tengan diferentes cantidades de acero de confinamiento transversal en las direcciones X e Y. Entonces las cuantías de refuerzo transversal en cada dirección se calculan mediante:

$$\rho_x = \frac{A_{sx}}{s d_c} \quad y \quad (2.44)$$

$$\rho_y = \frac{A_{sy}}{s b_c} \quad (2.45)$$

Donde:

A_{sx} y A_{sy} , son el área total de las barras transversales en las direcciones X e Y, respectivamente.

Los esfuerzos de confinamiento laterales efectivos en las direcciones X e Y son:

$$f'_{ly} = k_e \rho_y f_{yh} \quad (2.46)$$

$$f'_{lx} = k_e \rho_x f_{yh} \quad (2.47)$$

Los esfuerzos principales f'_{11} y f'_{12} , se calculan en función a f'_{lx} y f'_{ly} , ver Figura 2.30. Para mayores detalles consultar la investigación de Mander (1984).

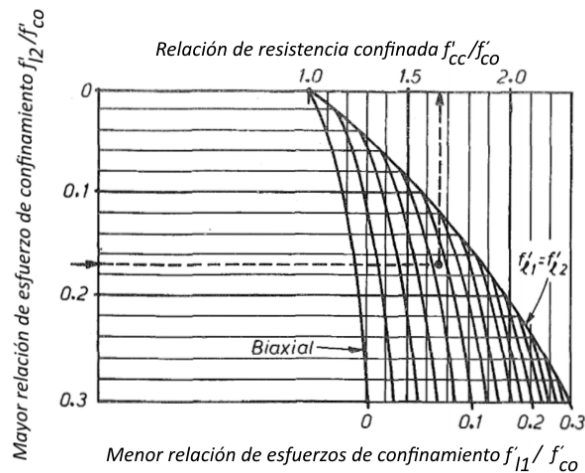
Cuando el núcleo de concreto confinado se coloca en compresión triaxial con esfuerzos de confinamiento laterales efectivos iguales f'_l de espirales o estribos circulares, se puede demostrar, mediante modelos de plasticidad para materiales como el concreto, que la resistencia a la compresión confinada es:

$$f'_{cc} = f'_{co} \left(-1.254 + 2.254 \sqrt{1 + \frac{7.94 f'_l}{f'_{co}}} - 2 \frac{f'_l}{f'_{co}} \right) \quad (2.48)$$

En el caso de secciones rectangulares, cuando se tiene una presión lateral de confinamiento, en ambas direcciones, puede calcularse el valor de la resistencia a compresión confinada, f'_{cc} , con ayuda del modelo propuesto por Schickert y Winkler (1977). Para calcular la superficie última de esfuerzos, Mander (1988) obtuvo una gráfica, basada en este modelo de plasticidad, para el caso de secciones rectangulares cualquiera.

Figura 2.30

Curvas de esfuerzos de confinamiento lateral y la resistencia de confinamiento en secciones rectangulares, Mander (1988).



Nota: fuente adaptada de Mander (1988),

Por otro lado, Paulay y Priestley (1992) propusieron el límite de deformación máxima del concreto confinado, asociado a la fractura de los estribos que confinan la sección, al que denominaron la deformación última de

compresión para el concreto confinado, calculada mediante la expresión siguiente.

$$\varepsilon_{cu} = 0.004 + \frac{1.4 \rho_s f_{yh} \varepsilon_{su}}{f_{cc}} \quad (2.49)$$

Donde:

ρ_s es la cuantía volumétrica ($\rho_s = \rho_x + \rho_y$)

ε_{su} es la deformación asociada a la resistencia en tracción del acero

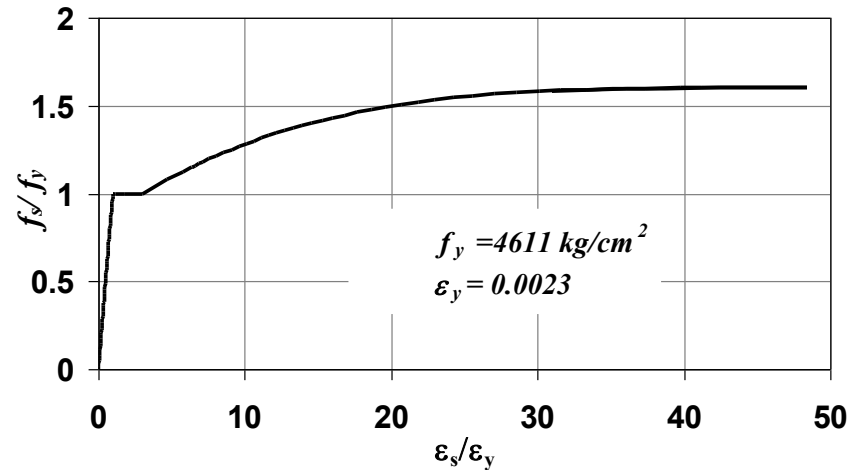
Los valores típicos de esta deformación varían entre 0.012 a 0.05, lo que es de 4 a 16 veces mayor que los valores típicos supuestos para el concreto no confinado.

2.6.2 Curva esfuerzo-deformación para el acero

La curva esfuerzo deformación del acero bajo la acción de cargas monotónicas de tracción, tiene zonas definidas de comportamiento. La Figura 2.31 muestra una curva adimensional típica para el acero corrugado, en la que se identifica tres zonas, la primera de comportamiento elástico con pendiente constante, la segunda donde se presentan las deformaciones plásticas y una tercera zona donde se desarrolla el endurecimiento por deformación inelástica del acero. En la determinación de esta curva esfuerzo deformación se ha considerado la definición "ingenieril" de las coordenadas que definen la deformación unitaria y el esfuerzo, lo cual significa que la sección transversal de la barra de acero ensayada se ha supuesto constante y que la distribución de la deformación unitaria es constante en toda la longitud de la barra. Estas hipótesis no son estrictamente correctas debido a que la sección de la barra no permanece constante y la deformación unitaria tiene una distribución no uniforme en la longitud de la barra; con estas consideraciones las coordenadas definidas así para el esfuerzo y la deformación se denominan espacio de coordenadas "naturales".

Figura 2. 31

Curva esfuerzo deformación experimental adimensional, del acero.



Nota: fuente adaptada de Torres (2013),

Generalmente la curva del acero es descrita con la curva en tracción de la misma, sin mencionarse la definición empleada para su determinación. Además se considera que la curva en compresión es igual a la descrita para cargas monotónicas en tracción, lo cual no es estrictamente correcto si se emplea la definición en el espacio de coordenadas del tipo "ingenieril". Sin embargo, si se emplea la definición más estrictamente cercana a lo observado de forma experimental, el espacio de coordenadas "naturales", la curva de compresión y de tracción deben ser iguales. Con esta premisa es posible relacionar la curva de tracción con la curva en compresión en el espacio de coordenadas de tipo "ingenieril".

La Figura 2.32 muestra la descripción de la curva virgen en compresión y tracción para el acero de refuerzo corrugado, descrita en coordenadas de tipo "ingenieril".

En la etapa elástica los esfuerzos, f_s , puede ser calculado mediante una relación lineal con las deformaciones del material, ϵ_s , y el módulo de Young, E_s .

$$f_s = E_s \varepsilon_s \quad (2.50)$$

$$0 \leq \varepsilon_s < \varepsilon_y \text{ (en tracción)}$$

$$\varepsilon_{yc} < \varepsilon_s \leq 0 \text{ (en compresión)}$$

En la etapa plástica el esfuerzo, f_s , es igual al esfuerzo de fluencia del material

$$f_s = f_y \text{ (en tracción)} \quad (2.51)$$

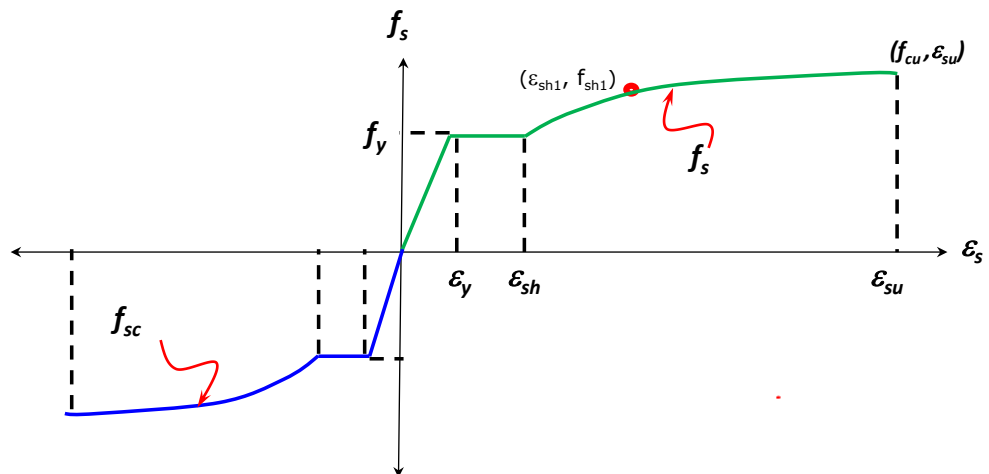
$$\varepsilon_y \leq \varepsilon_s \leq \varepsilon_{sh}$$

$$f_s = f_{yc} \text{ (en compresión)} \quad (2.52)$$

$$\varepsilon_{shc} \leq \varepsilon_s \leq \varepsilon_{yc}$$

Figura 2.32

Curva esfuerzo deformación del acero, en tracción y compresión, en coordenadas de tipo “ingenieril”.



Nota: fuente adaptada de Mander (1984),

El modelo propuesto por Mander (1984) para describir el comportamiento del acero en la etapa de endurecimiento por deformación es descrito en términos de los parámetros que describen el comportamiento en tracción del acero, el

esfuerzo de fluencia, f_y , la resistencia a tracción, f_{su} , la deformación última, ε_{su} , la deformación al inicio del endurecimiento, ε_{sh} , el parámetro P .

$$f_s = f_{su} + (f_y - f_{su}) \left(\frac{\varepsilon_{su} - \varepsilon_s}{\varepsilon_{su} - \varepsilon_{sh}} \right)^P \quad (2.53)$$

$$\varepsilon_{sh} \leq \varepsilon_s \leq \varepsilon_{su}$$

El módulo al inicio del endurecimiento por deformación, E_{sh} , fue definido mediante la expresión siguiente.

$$E_{sh} = \frac{df_s}{d\varepsilon_s} \quad (2.54)$$

Mander (1984) propuso el cálculo del parámetro P en función del módulo al inicio del endurecimiento por deformación, E_{sh} ; sin embargo, los valores que se obtienen mediante esta expresión muestran una gran variabilidad, por lo que no es recomendable su empleo.

$$P = E_{sh} \frac{\varepsilon_{su} - \varepsilon_{sh}}{f_{su} - f_y} \quad (2.55)$$

Alternativamente, es posible calcular el parámetro P en función a valores experimentales en la zona de endurecimiento por deformación de esfuerzo y deformación, f_{sh1} y ε_{sh1} ; respectivamente. El valor del parámetro P se obtendría mediante la expresión siguiente:

$$P = \frac{\ln \left(\frac{f_{su} - f_{sh1}}{f_{su} - f_y} \right)}{\ln \left(\frac{\varepsilon_{su} - \varepsilon_{sh1}}{\varepsilon_{su} - \varepsilon_{sh}} \right)} \quad (2.56)$$

La curva esfuerzo-deformación del acero en compresión se puede calcular en términos de los datos de la curva en tracción del acero, propuesto por Dodd y Restrepo (1995). La Figura 2.33 muestra en el cuadrante positivo la curva en tracción del acero, en coordenadas de tipo "ingenieril", propuesta por Mander (1984) y la curva correspondiente en compresión, en el tercer cuadrante con las ecuaciones propuestas por Dodd y Restrepo (1995).

Los esfuerzos en compresión del acero se calculan mediante la expresión:

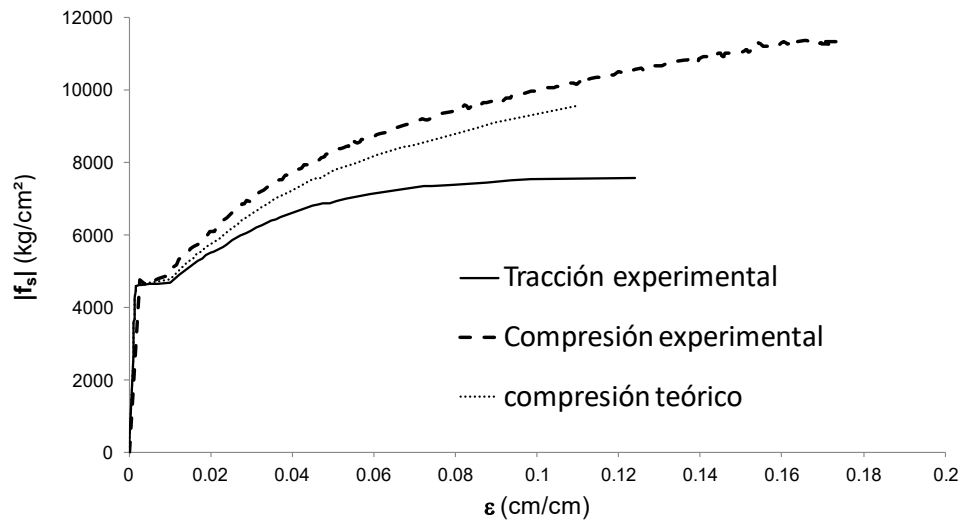
$$f_{sc} = f_s(1 + \varepsilon_s)^2 \quad (2.57)$$

y las deformaciones correspondientes en compresión mediante:

$$\varepsilon_{sc} = \varepsilon_s / (1 + \varepsilon_s) \quad (2.58)$$

Figura 2. 33

Curva esfuerzo deformación experimental del acero (1-1/4"), en tracción y compresión.



Nota: fuente adaptada de Rodríguez y Botero (1996),

Dodd y Restrepo (1995) propusieron un modelo para predecir el comportamiento cíclico del acero de refuerzo, a partir de la curva monotónica en tracción, calibrada para los aceros fabricados en Nueva Zelanda de los grados 300 y 430. El acero de grado 300, es un acero producido en Nueva Zelanda de esfuerzo de fluencia nominal igual a 300 MPa, mientras que el acero de grado 430 es de esfuerzo de fluencia nominal igual a 430 MPa, es similar al acero A615 de grado 60 producido en el país.

Se ha demostrado que este modelo proporciona una buena predicción para pruebas experimentales con estos dos grados de acero.

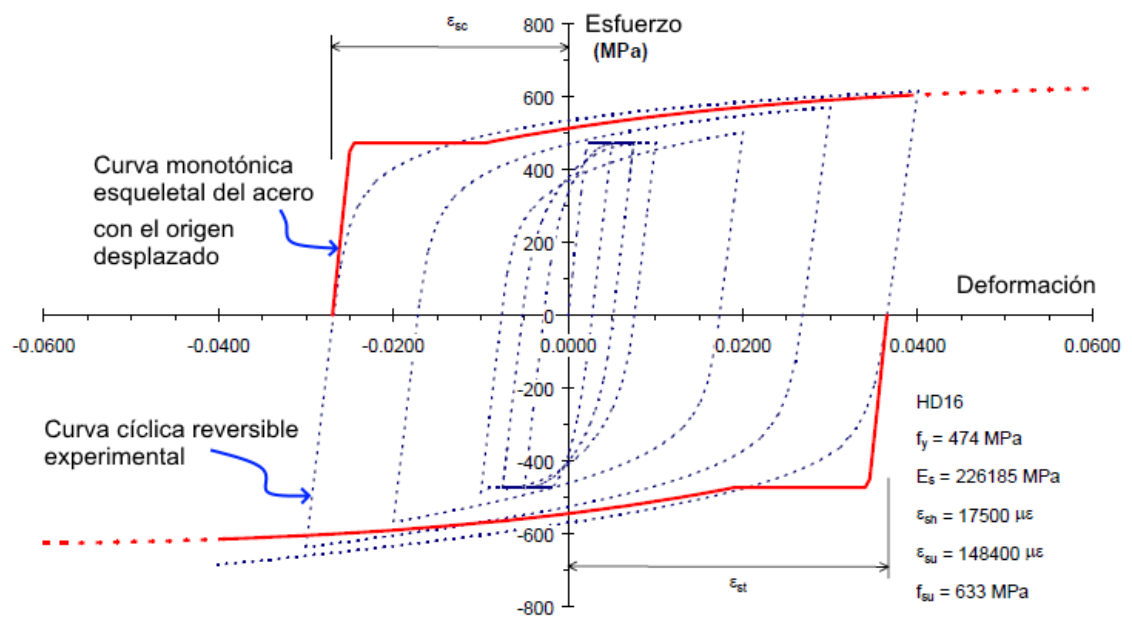
Los resultados analíticos que utilizaron para compararlos con este modelo, se contrastan con las curvas esqueléticas monotónicas desplazadas, ver la Figura 2.34, donde se puede ver que el comportamiento esfuerzo-deformación cíclico se corresponde estrechamente con la curva monotónica desplazada sobre la región de tracción (positiva).

Como la curva de esfuerzo-deformación monotónica en compresión se toma como igual y opuesta a la curva esfuerzo-deformación por tracción, la diferencia entre la respuesta cíclica y la curva monotónica desplazada es algo mayor.

Un análisis pseudocíclico consiste en desplazar la curva monotónica para considerar, aproximadamente, la sobrerresistencia por efecto de la acción de tipo cíclica, descrita anteriormente.

Figura 2. 34

Curvas analíticas esfuerzo-deformación, monotónicas con desplazamiento y cíclicas, del acero de refuerzo HD16.



Nota: fuente adaptada de Watson (1989).

2.7 Diagramas momento-curvatura

Los diagramas momento curvatura permiten comprender el comportamiento no lineal a nivel de sección de los elementos de concreto armado. A distintos niveles de curvatura se asocian momentos que corresponden, por ejemplo, al agrietamiento de la sección, la primera fluencia del acero de refuerzo, el aplastamiento del concreto de recubrimiento, la deformación asociada al pandeo del refuerzo longitudinal, la fractura del acero de confinamiento, o el aplastamiento del concreto confinado.

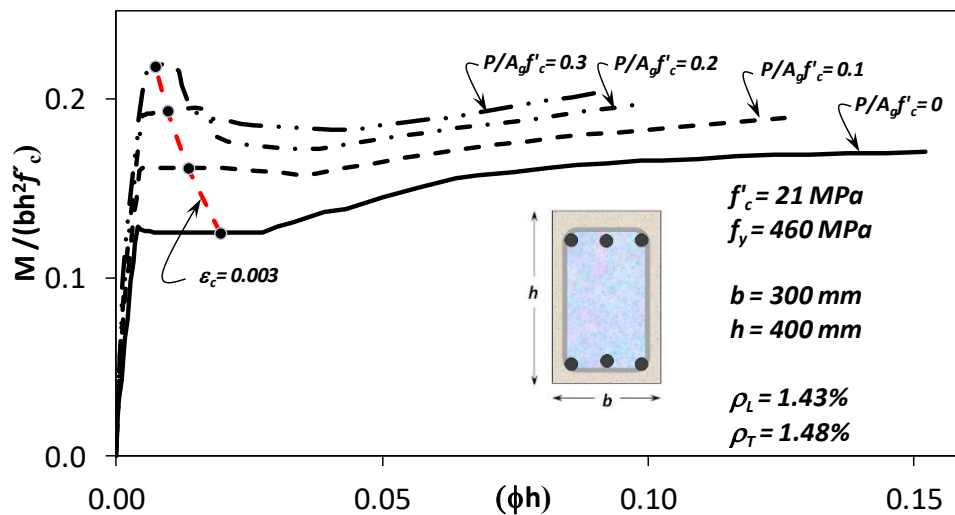
Los diagramas momento-curvatura son empleados en el análisis no lineal para calcular las rotaciones y desplazamientos de los elementos asociados a ciertos niveles de carga. Para el caso de cargas incrementales estáticas es suficiente calcular el diagrama para cargas monotónicas; sin embargo, es de interés que las deformaciones estén asociadas, además de las acciones estáticas, a demandas de tipo sísmicas y por consiguiente las limitaciones en la capacidad de deformación debe ser relacionada con la capacidad de deformación ante sollicitaciones cíclicas. La Figura 2.35 muestra un diagrama momento - curvatura típico para una columna con relación de carga axial (P/Agf'_c) menor que 0.1, que es semejante al de una viga. El criterio para determinar la curvatura última de la sección está asociado principalmente al pandeo del refuerzo principal de la sección. Dicho criterio se establece con base en la demanda de carga, la cual es de tipo cíclico cuando se consideran acciones sísmicas; sin embargo, existen otros criterios como el propuesto por Paulay y Priestley (1992) de la deformación última del concreto confinado, que está asociado a la fractura del refuerzo transversal.

La resistencia nominal a flexión está generalmente asociada a una deformación del concreto igual a 0.003, para la fibra extrema en compresión de la sección. Se puede notar que las secciones tienen una capacidad de deformación de curvatura mayor que la asociada a la resistencia nominal, siempre y cuando la sección tenga suficiente confinamiento. Esta observación da indicio para considerar que es posible una redistribución de momentos mayor que la permitida por algunos reglamentos de diseño, como es el caso de la

NTE E060, que limita la redistribución de momentos a un máximo de 20%. Como se sabe, la redistribución de momentos depende en gran medida de la capacidad de deformación inelástica de las secciones, en términos de ductilidad de curvatura; entre más ductilidad tenga la sección podrá haber una mayor redistribución de momento. La redistribución estaría limitada por la condición de equilibrio estable del sistema en el intervalo de comportamiento inelástico.

Figura 2.35

Diagrama momento-curvatura adimensional de una sección confinada de concreto armado.



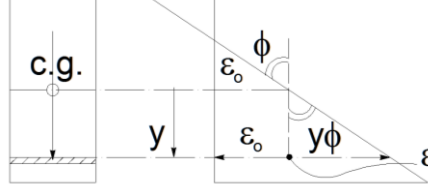
La llamada hipótesis de Bernoulli simplifica el análisis y proporciona una distribución lineal de la deformación longitudinal a lo alto de la sección con deformación nula en el eje neutro. La ubicación del eje neutro de la sección está determinada por el equilibrio de la fuerza axial que actúa en la sección. El análisis se realiza bajo el sistema de coordenadas centroidales. La Figura 2.36 muestra la relación entre la deformación unitaria " ε " a una distancia " y " del centroide para una curvatura determinada ϕ .

La deformación unitaria " ε " a una distancia " y " del centroide de la sección es escrita de la siguiente forma.

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + y\phi \quad (2.59)$$

Figura 2.36

Relación entre la distribución de deformaciones unitarias y la curvatura.



El momento y la fuerza axial resistente de la sección en función de la curvatura, ϕ , y la deformación centroidal, ϵ_0 , escrita en términos de los esfuerzos del concreto y el acero de refuerzo de la sección, se basan en establecer el equilibrio en la sección. Teniendo en cuenta las coordenadas centroidales es posible obtener las ecuaciones siguientes, para el momento y la fuerza axial, respectivamente.

$$M(\phi, \epsilon_0) = \int_{A_g} f_c y dA + \sum_i (f_{si} - f_{ci}) y_{si} A_{si} \quad (2.60)$$

$$N(\phi, \epsilon_0) = \int_{A_g} f_c dA + \sum_i (f_{si} - f_{ci}) A_{si} \quad (2.61)$$

En forma matricial, se establece la relación entre las fuerzas incrementales asociadas a los incrementos de deformaciones y curvaturas, correspondientes a cada paso, de la siguiente forma.

$$\begin{Bmatrix} \Delta M_i(\phi, \epsilon_0) \\ \Delta N_i(\phi, \epsilon_0) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial M(\phi, \epsilon_0)}{\partial \phi} & \frac{\partial M(\phi, \epsilon_0)}{\partial \epsilon_0} \\ \frac{\partial N(\phi, \epsilon_0)}{\partial \phi} & \frac{\partial N(\phi, \epsilon_0)}{\partial \epsilon_0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \phi_i \\ \Delta \epsilon_{oi} \end{Bmatrix} \quad (2.62)$$

Las deformaciones y curvaturas, correspondientes del sucesivo paso, se calculan mediante la ecuación siguiente.

$$\begin{Bmatrix} \phi_{i+1} \\ \epsilon_{oi+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \phi_i \\ \epsilon_{oi} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \Delta \phi_i \\ \Delta \epsilon_{oi} \end{Bmatrix} \quad (2.63)$$

Las ecuaciones anteriores son una forma general de los desarrollos de modelos de fibras y similares. Se describe el caso plano únicamente; sin embargo, es posible su generalización para el caso de flexión biaxial.

2.7.1 Limitaciones para la capacidad de curvatura

Para establecer las limitaciones de la capacidad de curvatura de una sección, con fines de limitar el diagrama momento-curvatura, se ha tomado en cuenta el criterio del pandeo de las barras longitudinales bajo acciones cíclicas, de acuerdo con las investigaciones realizadas por Rodriguez et al. (1999) y las de Kowalsky et al. (2015). En concordancia con esas investigaciones, basándose en la deformación asociada con el inicio del pandeo de la barra longitudinal, Rodriguez sugiere emplear las expresiones siguientes:

$$\varepsilon_p^* = \begin{cases} 0.06 & \text{si } \left(\frac{s}{d_b}\right) < 2 \\ \frac{11 - \left(\frac{s}{d_b}\right)}{150} & \text{si } 2 \leq \left(\frac{s}{d_b}\right) \leq 8 \\ 0.02 & \text{si } \left(\frac{s}{d_b}\right) > 8 \end{cases} \quad (2.64)$$

Donde: s/d_b es la relación de esbeltez de la barra de acero, en términos del espaciamiento entre centro de estribos, s , y el diámetro de la barra principal, d_b .

De acuerdo con la propuesta de Rodriguez et al. (1999) la deformación de pandeo, ε_p^* , con las deformaciones del acero en tracción y compresión se calcula con la ecuación siguiente.

$$\varepsilon_p^* = |\varepsilon_{st}| + |\varepsilon_{sc}| \quad (2.65)$$

De acuerdo con la distribución de deformaciones, ver Figura 2.37, la curvatura máxima, ϕ_p , estaría dada por

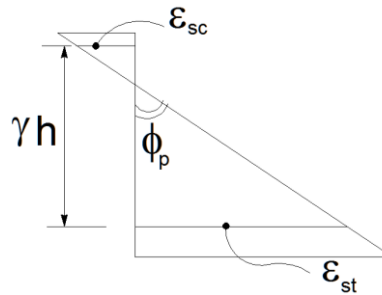
$$\phi_p = \frac{|\varepsilon_{st}| + |\varepsilon_{sc}|}{\gamma h} \quad (2.66)$$

Con base en lo anterior, la curvatura estaría limitada a un valor máximo, ϕ_p , asociada a la deformación de pandeo, ε_p^* . La relación entre estos parámetros sería de acuerdo a la expresión siguiente.

$$\phi_p = \frac{\varepsilon_p^*}{\gamma h} \quad (2.67)$$

Figura 2. 37

Relación entre la distribución de deformaciones unitarias y la curvatura máxima asociada al pandeo del acero longitudinal.



Otro criterio a seguir es la consideración de la máxima deformación del concreto confinado propuesta por Paulay y Priestley (1992) asociada a la fractura de los estribos que confinan la sección, como descrito anteriormente, ver la Ecuación 2.49.

Un límite superior práctico es considerar la máxima deformación de pandeo igual a 0.06, como sugiere la Ecuación 2.64. Este límite práctico puede relacionarse como la mitad de la deformación última, $\frac{1}{2} \varepsilon_{su}$, para varillas con deformación última, ε_{su} , igual a 0.12.

2.7.2 Relaciones momento-curvatura de tipo cíclica y pseudo-cíclica

La carga cíclica-reversible en una sección rectangular de concreto armado, bajo comportamiento predominante a flexión, puede conducir a esfuerzos en el acero de refuerzo longitudinal mayores que los que se tendrían en pruebas experimentales monotónicas de tracción o compresión. Debido al efecto Bauschinger y al endurecimiento por deformación, la tracción desarrollada

en el acero a una deformación dada, en una sección cargada cíclicamente, puede ser mayor que la tracción dada por la respuesta esfuerzo-deformación monotónica a la misma deformación, si el eje neutro está a una profundidad cercana al eje centroidal de la sección. La carga cíclica también influye en el comportamiento esfuerzo-deformación del concreto confinado, aunque es razonable suponer que la curva monotónica formará una envolvente a la respuesta esfuerzo-deformación de la carga cíclica.

También se puede suponer que la curva monotónica, esfuerzo-deformación, del acero es una curva esquelética para la respuesta de la carga cíclica. Al cambiar el origen de la curva monotónica para que se tenga en cuenta el historial de carga cíclica.

Los análisis cíclicos momento-curvatura pueden realizarse incorporando las relaciones cíclicas esfuerzo-deformación tanto para el concreto como para el acero. El análisis momento-curvatura se realiza de manera similar al especificar el historial de deformación para la fibra de compresión extrema, estableciendo el equilibrio de las fuerzas internas y externas mediante la determinación de las tensiones en el concreto y el acero a partir de sus respectivas relaciones esfuerzo-deformación, de tipo cíclicas.

Para modelar los efectos de la carga cíclica, en la mejora de la resistencia a la flexión de una sección, se puede considerar los resultados de un análisis momento-curvatura pseudocíclico.

La relación tensión-deformación del acero propuesta por Mander (1984), por simplicidad, se puede utilizar suponiendo que el comportamiento en compresión es igual y opuesto al comportamiento a la tracción.

Para tener en cuenta el aumento de la tensión debido al efecto Bauschinger y el endurecimiento por deformación, el origen de la relación monotónica tensión-deformación se puede desplazar en una cantidad correspondiente a la deformación plástica residual que queda en la barra.

Bajo inversiones de carga cíclica, el acero del extremo a tracción está sujeto a tensiones de compresión durante el ciclo invertido. Al suponer que en el ciclo inverso es el mismo esfuerzo del acero en compresión que el del ciclo

original, el acero en tracción se descargará del esfuerzo alcanzado durante el ciclo original y estará sujeto al esfuerzo de compresión resultante del perfil de esfuerzo del ciclo inverso. Esto se ilustra en la Figura 2.38.a con el perfil de deformación para el ciclo original e inverso que se muestra.

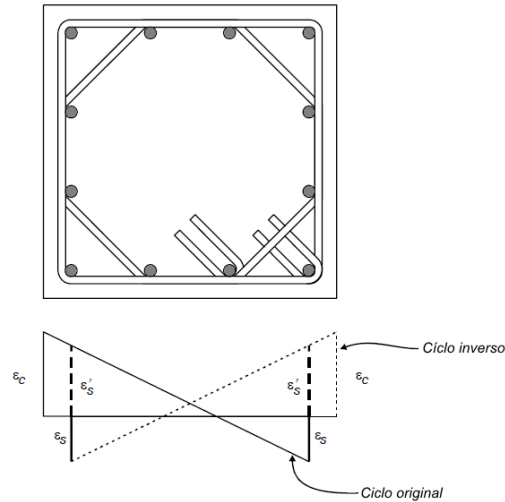
Se supone que la descarga de la tracción es lineal, con una pendiente equivalente al módulo elástico inicial del acero. La curva monotónica solo cambia si las tensiones en el acero, por la carga durante el primer ciclo, han excedido la tensión de fluencia. Una vez que se ha excedido el límite elástico, se evalúa el límite residual restante en el acero y se agrega al límite resultante de un ciclo equivalente en la dirección inversa. Luego, el acero se somete a una tensión de compresión que se alcanza siguiendo la relación monotónica de compresión del acero, que se ha compensado por la cantidad de tensión residual que queda en el acero después del primer ciclo.

El desplazamiento del origen de las curvas monotónicas, de tensión-deformación, en una cantidad equivalente a la deformación plástica residual en el acero, después de la descarga, determina la deformación pseudocíclica. Esta es una aproximación de las deformaciones logradas en el refuerzo como resultado de la carga cíclica.

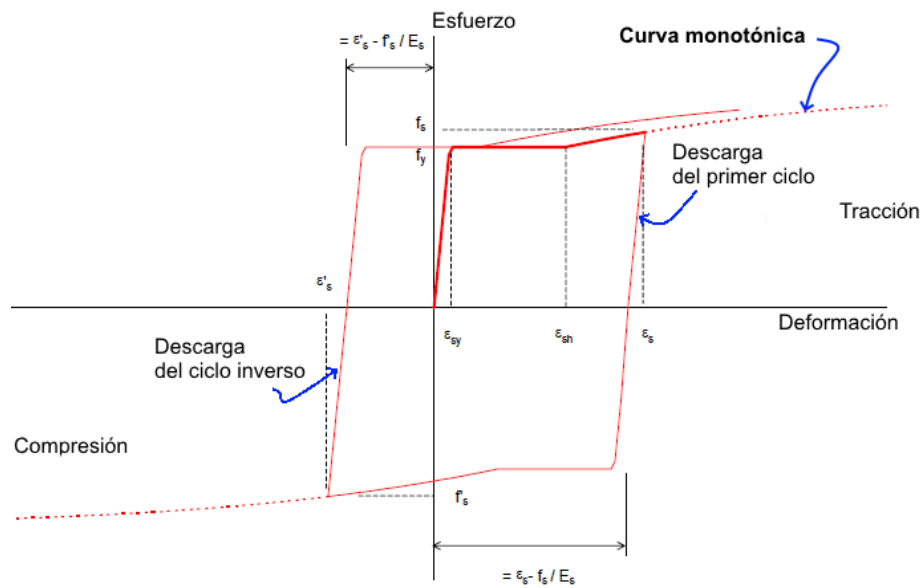
Al incorporar relaciones esfuerzo-deformación pseudocíclicas, para el refuerzo longitudinal en una sección de columna, los efectos de la respuesta cíclica del acero longitudinal se pueden incluir en un análisis de momento-curvatura. Este análisis de momento-curvatura, pseudocíclico, que evalúa los esfuerzos en el refuerzo longitudinal utilizando las tensiones pseudocíclicas, proporciona una buena aproximación del aumento de la resistencia a la flexión que resulta de la carga cíclica de la sección.

Figura 2. 38

Distribución de deformaciones de una sección y la curva esfuerzo-deformación monotónica y pseudocíclica.



(a) Perfil de deformaciones para una sección



(b) Curvas esfuerzo-deformación monotónicas y pseudo cíclicas del acero

Nota: fuente adaptada de Restrepo y Rodríguez (2013).

Capítulo III. Análisis estático no lineal con cargas monotónicas

3.1. Procedimiento numérico para el análisis no lineal estático incremental

El procedimiento numérico para el análisis estático incremental no lineal es similar al empleado en los procedimientos convencionales de análisis estructural para el caso lineal, en el que se ensambla una matriz de rigidez de toda la estructura y un vector de fuerzas. Sin embargo, para el caso no lineal se emplean incrementos del vector de fuerzas, lo que lleva a obtener los correspondientes incrementos de desplazamiento. Es posible emplear distintos esquemas para la solución numérica del problema no-lineal. En esta investigación se empleó una variante del método de Newton-Raphson.

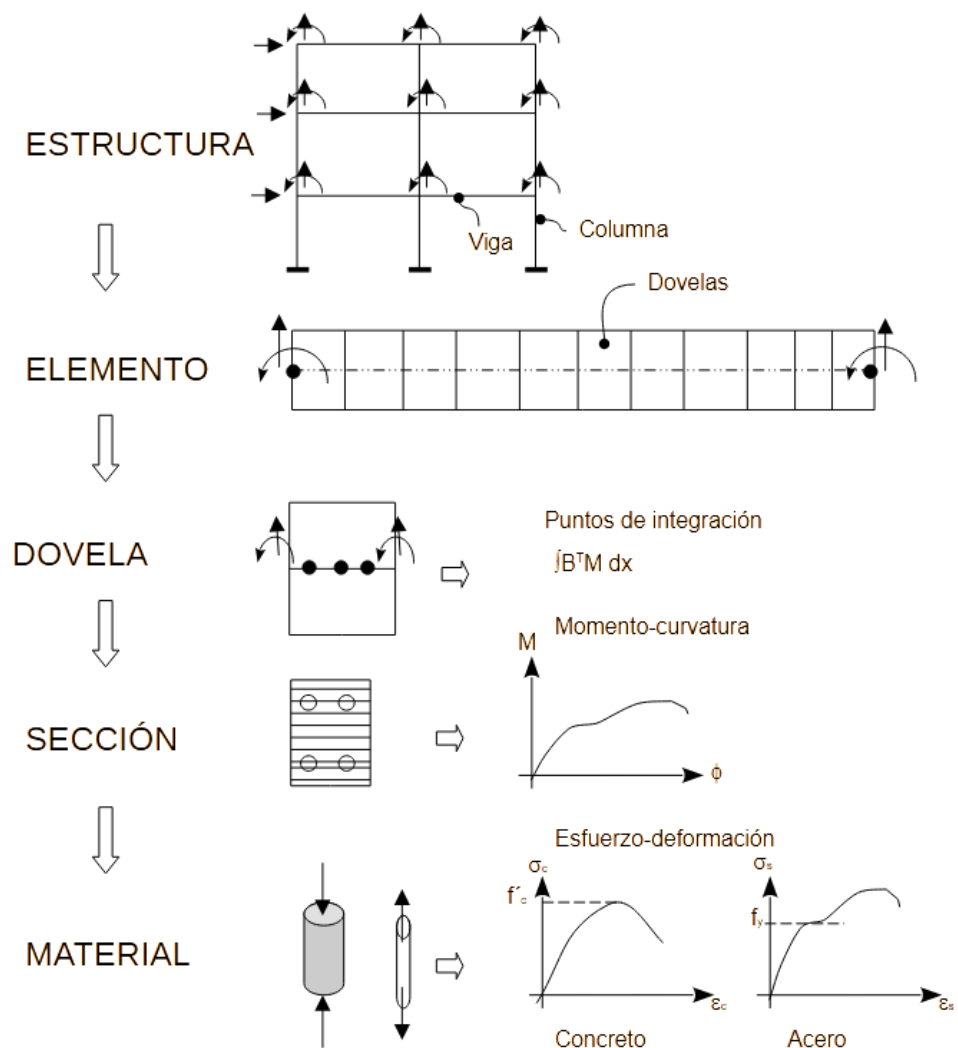
El método planteado para realizar el análisis no-lineal se basa en el empleo de elementos discretos de barras. Una opción consiste en que los elementos de barras de la estructura se subdividen por dovelas. Estas dovelas tienen comportamiento no-lineal definido a nivel de la sección. Es posible definir otras instancias de la sección, lo cual consiste en subdividirla por fibras. Finalmente, las fibras tienen descritas las propiedades de los materiales, ver Figura 3.1. A partir de las curvas esfuerzo-deformación, estas se integran sobre la sección de las dovelas y se obtiene la respuesta a nivel de sección. La respuesta de la sección se integra, sobre la longitud de la dovela, mediante el método de Gauss-Legendre, con puntos de integración apropiados. Se recomienda al menos tres puntos de integración. Las fuerzas internas en desequilibrio con las fuerzas externas producen los incrementos de desplazamiento de la estructura. La respuesta a nivel de los desplazamientos externos, en los extremos de vigas o columnas, se obtienen mediante la condensación estática de los desplazamientos internos a nivel de cada dovela.

El proceso iterativo se realiza hasta que la fuerza en desequilibrio sea suficientemente pequeña para finalizar la etapa de carga externa. Luego se incrementa la carga externa y se vuelve a realizar las iteraciones con las fuerzas en desequilibrio. Las fuerzas externas se incrementan en cada etapa de carga,

se repite el proceso iterativo anterior en cada una de las etapas de carga. Aunque este proceso podría desarrollarse manteniendo la rigidez inicial como constante en todas las iteraciones y en cada etapa de carga, esto en general es inconveniente, porque podrían requerirse muchas iteraciones para lograr el equilibrio en cada incremento de carga y en algunos casos podría no lograrse la convergencia.

Figura 3.1

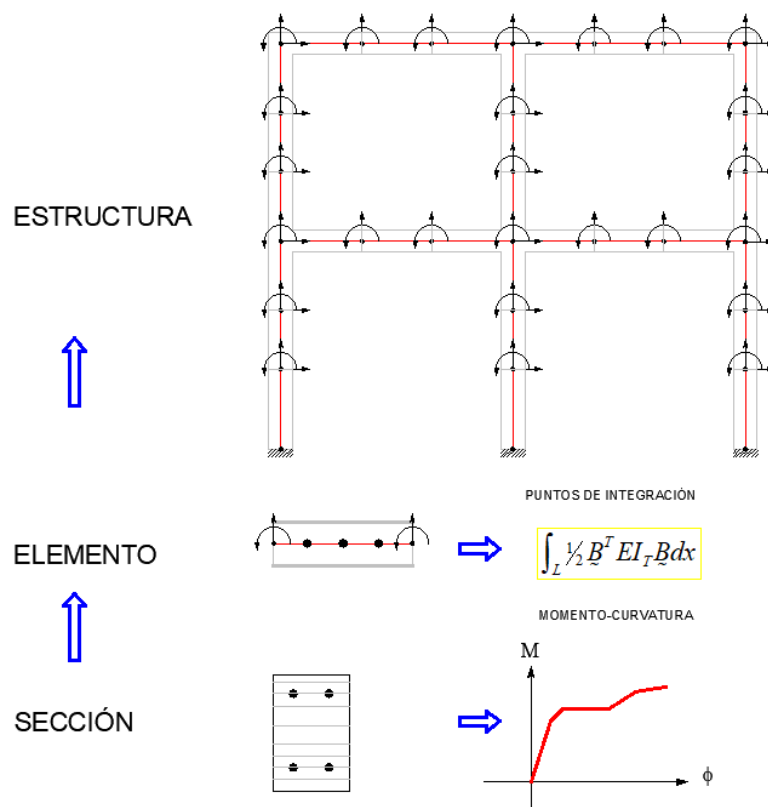
Esquema de la jerarquía de los elementos empleados a distintos niveles del modelo de la estructura.



Otra opción, es subdividir la estructura en elementos de barras con la matriz de rigidez constante o variable, sin considerar dovelas, ver la Figura 3.2. Con la diferencia que en este modelo se emplean más grados de libertad para ensamblar las matrices de rigidez y de fuerzas de la estructura. El proceso de solución se realiza con el método de Newton-Raphson modificado, para el que en cada incremento de carga se considera rigidez tangente constante; sin embargo, es posible actualizar la rigidez en cada etapa de carga, de manera que las iteraciones en cada etapa se realicen con una rigidez constante actualizada, lo que hace el proceso más eficiente.

Figura 3.2

Esquema de la jerarquía de los elementos empleados a distintos niveles del modelo de la estructura, sin dovelas.



3.2. Descripción del esquema general del programa

El programa de cómputo inicia con la lectura de datos. Se ingresan las propiedades geométricas de la estructura, tales como las longitudes de los elementos, y las características geométricas de las secciones, rectangulares y se definen las propiedades elásticas de los materiales. Luego se describen, para cada punto de integración, los parámetros de la ecuación tipo Ramberg-Osgood para definir las curvas momento-curvatura correspondientes a la sección.

En la opción con elementos interiores, tipo dovela, el ensamble de la matriz de rigidez de la estructura se realiza luego de la condensación estática de los grados de libertad internos, con las matrices de rigidez reducidas asociadas a los grados de libertad de los extremos de los elementos.

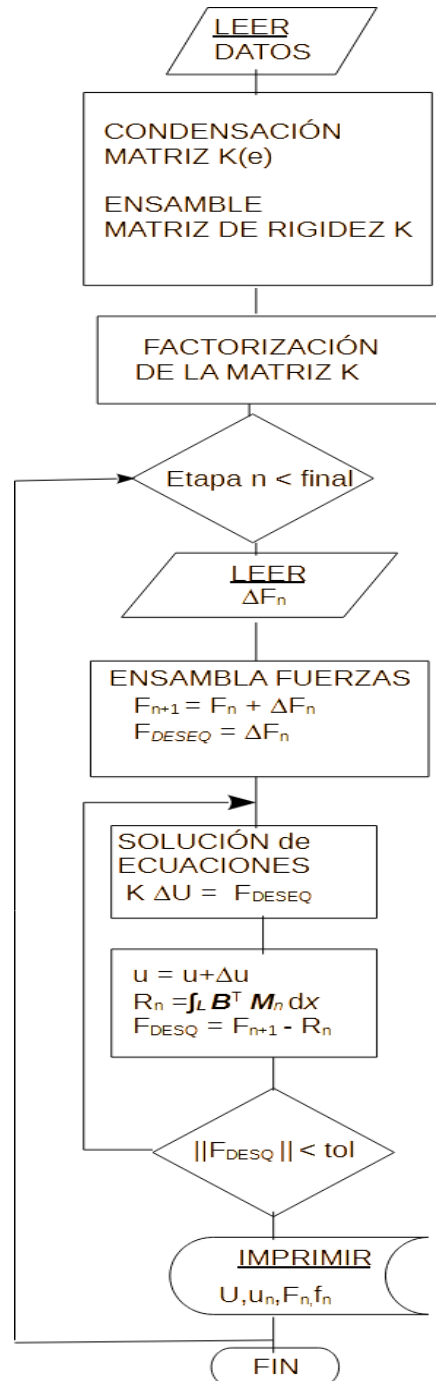
Se inicia las etapas de carga. En cada etapa se leen los incrementos de las fuerzas y se suma a la carga previa sobre las dovelas de cada elemento, se realiza la condensación estática del vector de fuerzas y se procede con el ensamble del vector de fuerzas de toda la estructura.

En el siguiente proceso se resuelve el sistema de ecuaciones, de donde se obtiene los incrementos de desplazamiento. Se actualizan los desplazamientos totales de la estructura, con los desplazamientos se evalúan las fuerzas internas y se obtienen las fuerzas desequilibradas. Este proceso continuo hasta que la norma de la fuerza desequilibrada sea menor que una cierta tolerancia prefijada.

Estos procesos continúan hasta completar todas las etapas de carga consideradas. Ver Figura 3.3.

Figura 3.3

Diagrama de flujo para el análisis no lineal.

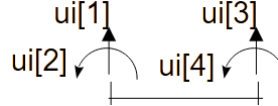


3.2.1 Matriz de rigidez de los elementos

La matriz de rigidez de un elemento de viga, con los grados de libertad considerados según la Figura 3.4, tiene la forma siguiente, ver Ecuación 3.2.

Figura 3.4

Esquema de numeración de viga continua.



$$k^{(e)} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_4 & k_7 \\ & k_3 & k_5 & k_8 \\ & & k_6 & k_9 \\ & & & k_{10} \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

En el caso general, la rigidez tangente, EI_T , es variable y equivalente a $(dM/d\phi)$, de donde los términos de la matriz de rigidez, $k^{(e)}$, se calculan por integración numérica, mediante el procedimiento de Gauss-Legendre, en el que se hace un cambio de variable, $z = x/L$, definido en el intervalo $[0,1]$.

$$k^{(e)} = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}L\right) [\underline{B}(z)]^T \left(\frac{dM}{d\phi}\right) [\underline{B}(z)] dz \quad (3.2.1)$$

Donde la matriz $\underline{B}(z)$ es la siguiente:

$$\underline{B}(z) = \begin{bmatrix} \frac{6}{L^2}(2z-1) & \frac{2}{L}(3z-2) & \frac{6}{L^2}(1-2z) & \frac{2}{L}(3z-1) \end{bmatrix}$$

El término general de la matriz de rigidez variable, con la integración Gauss-Legendre, se puede obtener de la siguiente manera.

$$k_{ij} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2}L\right) w(z_k) b_i(z_k) b_j(z_k) \frac{dM(z_k)}{d\phi} \quad (3.2.2)$$

Donde:

$w(z_k)$: son los pesos de integración Gauss-Legendre correspondientes a los puntos de integración, z_k .

$b_i(z_k)$: son las segundas derivadas de las funciones de interpolación evaluadas en los puntos de integración, z_k .

$\frac{dM(z_k)}{d\phi}$: es la rigidez tangente por flexión evaluada en el punto de integración, z_k .

3.2.2 Esquema de ensamble de la matriz de la estructura

La matriz de rigidez de la estructura se obtiene por el ensamble de las submatrices de cada elemento, obtenidas con el procedimiento descrito anteriormente. La contribución de cada elemento de la estructura genera una matriz rigidez total de forma simétrica. Se aprovecha la simetría de la matriz de rigidez. Dado que los términos por fuera del ancho de banda de la matriz son iguales a cero, solamente se almacenan los términos de la diagonal y codiagonales del semiancho de banda.

El esquema siguiente, ver Figura 3.5, muestra la forma en que se almacenan los términos de la matriz de la estructura.

La contribución de cada elemento se indica en bloques sombreados de distinto tono.

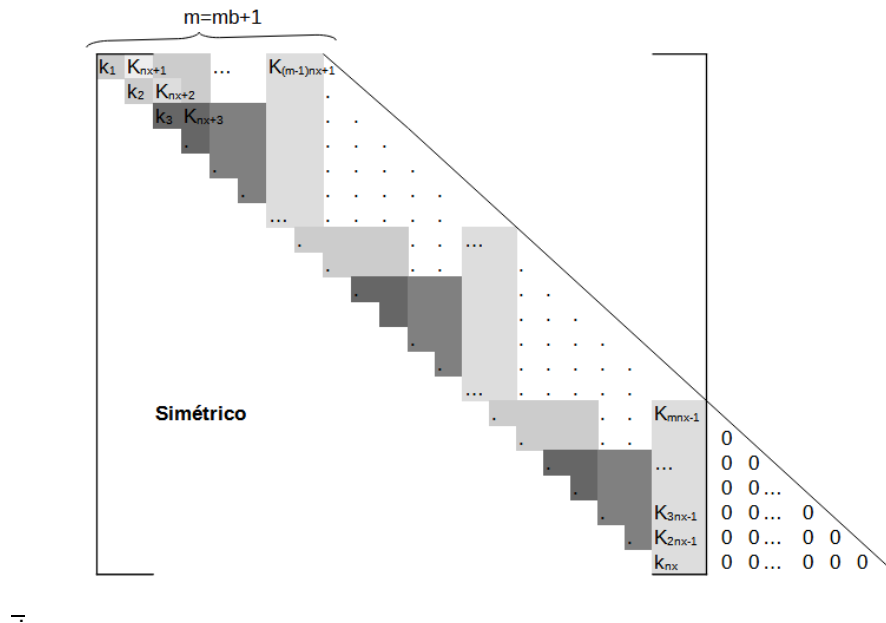
En el caso de pórticos, las submatrices de vigas son submatrices de orden cuatro y las de columnas son de orden seis. Donde el ancho de banda de la matriz de la estructura dependerá del número de pisos.

En el caso de vigas continuas, la contribución de las submatrices, de orden dos, producen matrices banda tridiagonales.

La matriz de la estructura se almacena en un arreglo unidimensional, $K[*]$, de dimensión igual a $n \times m$, donde n es número de grados de libertad de la estructura, m es el semiancho, de la matriz simétrica, más uno.

Figura 3.5

Esquema de numeración de la matriz de rigidez de la estructura con ancho de banda constante.



3.2.3 Factorización de la matriz de rigidez

Luego de realizar el ensamble de la matriz de rigidez, se realiza la factorización o solución parcial del sistema de ecuaciones, que se obtiene por el equilibrio de las fuerzas entre elementos o equivalentemente a partir del principio variacional. Este procedimiento es conveniente cuando se resuelve muchas veces un sistema de ecuaciones, con el vector de términos independientes variable. En este caso es el vector de fuerzas el que cambia en cada etapa de carga. Para el análisis estático no lineal, este vector se va incrementando sucesivamente. Se puede mantener constante la matriz de rigidez de la estructura durante todo el proceso o hacerla variable. Sin embargo, existe una notable ventaja en emplear la matriz de rigidez variable, porque permite un ahorro considerable de iteraciones durante el proceso de solución, en cada etapa de carga. Donde se pueden reducir, en cada etapa, decenas de miles de iteraciones a órdenes de algunas decenas de iteraciones.

3.2.4 Vector de fuerzas

En cada etapa de carga, se actualiza el vector de carga de manera incremental, el cual se va acumulando hasta llegar a la resistencia de la estructura. En el programa desarrollado en esta tesis las cargas son uniformemente distribuidas, en cada tramo de viga. Las cargas distribuidas en todos los tramos son incrementadas en cada paso de análisis.

Las fuerzas externas actuantes, incluyendo el incremento de carga en la n -ésima etapa de carga se calcula con base en la Ecuación 2.19. Es posible obtener estas fuerzas empleando un esquema de integración Gauss-Legendre; en su defecto se pueden emplear las fuerzas de empotramiento de barras.

$$\underline{f}_{n+1} = \int_0^1 L \underline{N}^T (\underline{q}_n + \Delta \underline{q}_n) dz \quad (3.3)$$

Las fuerzas internas en desequilibrio se calculan con base en la Ecuación 2.20. Es posible emplear el esquema de integración numérica de Gauss-Legendre, con un cambio de variable, $z = x/L$, sobre el intervalo $[0,1]$.

$$\underline{R}_n = \int_0^1 L \underline{B}^T \underline{M}_n dz \quad (3.4)$$

En términos del esquema de integración Gauss-Legendre se tiene:

$$r_{ni} = \sum_{k=1}^n w(z_k) b_i(z_k) M_n(z_k) \quad (3.5)$$

Los términos del esquema de integración evaluados en el punto z_k , para n puntos de integración, el peso de integración, $w(z_k)$, la segunda derivada de las funciones de interpolación, $b_i(z_k)$, el momento para alguna etapa de carga, $M_n(z_k)$.

Las fuerzas desequilibradas, $\underline{f}_D$, se obtienen de la forma siguiente.

$$\underline{f}_D = \underline{f}_{n+1} - \underline{R}_n \quad (3.6)$$

Las fuerzas desequilibradas, $\underline{f}_D$, se calculan en cada paso de iteración, hasta que estas fuerzas sean suficientemente pequeñas. Para lo cual se define

el error relativo, en términos de la norma euclidiana, de las fuerzas desequilibradas con respecto a la norma de las fuerzas totales, $\tilde{f}$.

La norma euclidiana de las fuerzas desequilibradas se calcula con la expresión siguiente.

$$\|f_D\| = \sqrt{\sum_1^{nx} f_{Dj}^2} \quad (3.6.4)$$

La norma euclidiana de las fuerzas totales, se calcula de igual manera, mediante.

$$\|\tilde{f}\| = \sqrt{\sum_1^{nx} f_j^2} \quad (3.6.5)$$

El error relativo de la fuerza desequilibrada respecto de las fuerzas totales, es calculado en cada iteración, con la expresión siguiente.

$$e_r = \frac{\|f_D\|}{\|\tilde{f}\|} \quad (3.7)$$

La condición de convergencia de las fuerzas internas se establece con respecto al error relativo, de manera que las iteraciones se realizarán hasta que el error relativo, e_r , sea menor que una tolerancia prefijada, tol .

En cada elemento se realiza la integración numérica para calcular las fuerzas internas, con el esquema de integración Gauss-Legendre. El número de puntos de integración puede definirse de forma general. El programa emplea por defecto tres puntos de integración.

El cálculo del momento flector, con el que se estima la respuesta de la estructura, emplea un modelo tipo Ramberg-Osgood. Más adelante, se comenta con más detalle algunos aspectos relativos al modelo Ramberg-Osgood empleado en el programa.

Por otro lado, para obtener el momento flector con el modelo de tipo Ramberg-Osgood se requiere resolver una ecuación no lineal, dada una curvatura conocida. Lo cual es resuelto con el algoritmo de Newton-Rapson. Más adelante se comenta la implementación del procedimiento empleado en el programa.

3.2.5 Vector de desplazamientos

El vector de desplazamiento es obtenido en cada paso por solución del sistema de ecuaciones resultante, luego se obtienen las fuerzas internas en función al desplazamiento actualizado, en cada paso.

3.2.6 Esquema de solución del análisis no lineal

El procedimiento de solución para el análisis no lineal de la estructura, bajo carga monotónica incremental, fue el método de Newton Rapson modificado, en el que la matriz de rigidez se cambia en cada etapa de carga, y se mantiene constante durante las iteraciones de la etapa de carga, ver Figura 3.6. La otra opción es considerar la matriz constante en todas las etapas de carga. Este esquema, aunque no es el más eficiente, compensa el hecho de no recalcular la matriz de rigidez en cada paso de análisis, como lo realiza el método original. Pero, tiene la desventaja que el procedimiento no converja en caso que exista un deterioro de la resistencia. Este procedimiento es suficiente para el caso de análisis no lineales con cargas monotónica creciente.

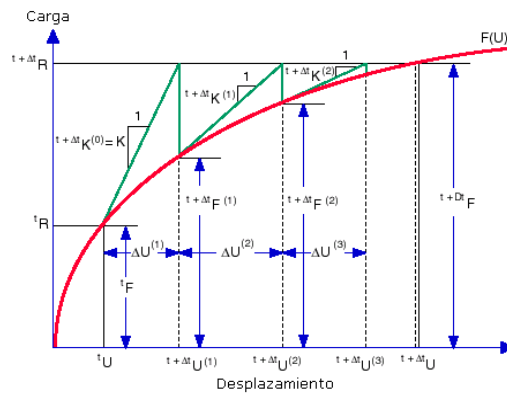
3.3. Diagrama momento-curvatura para secciones típicas de concreto armado

Los tipos de estructuras para realizar el análisis no-lineal, son de tipo pórtico plano con elementos ortogonales de vigas y columnas, de concreto armado. Un caso particular es realizar análisis de vigas continuas, que es la aplicación práctica que se desarrolló. En el modelo de vigas continuas, se emplea las curvas momento-curvatura asociada a cada sección. Típicamente, las vigas no tienen carga axial externa y es posible obtener curvas paramétricas

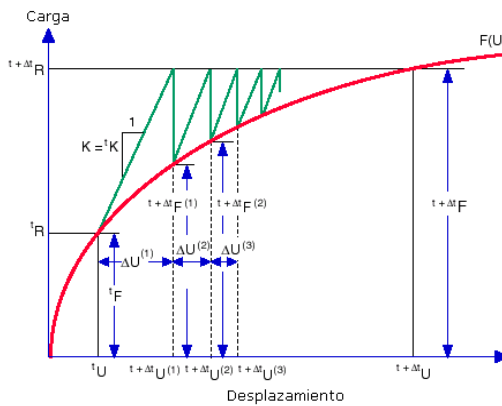
para definir el diagrama momento-curvatura tipo Ramberg-Osgood a partir de diagramas calculados con base en modelos de comportamiento de los materiales. Para la esta tesis se empleó el modelo de Mander (1988) para el concreto confinado, parcialmente confinado y no confinado.

Figura 3.6

Esquemas de solución mediante el método de Newton-Raphson.



a) Newton-Raphson



b) Newton-Raphson modificado

Nota: fuente

<https://help.solidworks.com/2021/Spanish/SolidWorks/cworks/c Iterative Solution Methods for Nonlinear Studies.htm>

3.4. Diagrama momento-curvatura paramétrico de tipo Ramberg-Osgood

Es posible realizar el análisis a partir de la información a nivel de sección, de manera que el diagrama momento curvatura sea un dato predefinido. El cual

puede ser obtenido por integración de las curvas esfuerzo-deformación de los materiales, de manera externa, con la ventaja que se necesitaría menos parámetros para definir las propiedades de la sección. Para definir la curva momento-curvatura, para el programa, se emplea una función paramétrica de tipo Ramberg-Osgood, en términos de la resistencia a flexión, la curvatura correspondiente a la resistencia a flexión, los parámetros adimensionales α y γ , para la flexión positiva y negativa.

La ecuación 3.8 representa el diagrama momento-curvatura, donde γ y α son los parámetros empíricos en función a parámetros con significado físico y con ello obtener una ecuación momento curvatura que pueda representar el comportamiento de las secciones de vigas de concreto armado, en este caso particular.

$$\left(\frac{\kappa}{\kappa_u} \right) = \left(\frac{M}{Mu} \right) \cdot \left(\frac{1 + \alpha \cdot \left| \frac{M}{Mu} \right|^{\gamma-1}}{1 + \alpha} \right) \quad (3.8)$$

La Figura 3.7.a muestra la variación de la curva tipo Ramberg-Osgood para un valor constante del parámetro α igual a 10 y valores para el parámetro γ entre 1 y 250. El parámetro γ influye en la forma de la curva; la tangente con respecto al origen es constante, excepto para γ igual a 1 correspondiente a una línea recta, los demás casos comparten la misma pendiente inicial; sin embargo, la curva denota comportamiento cuasi elastoplástico para valores de γ mayores que 50.

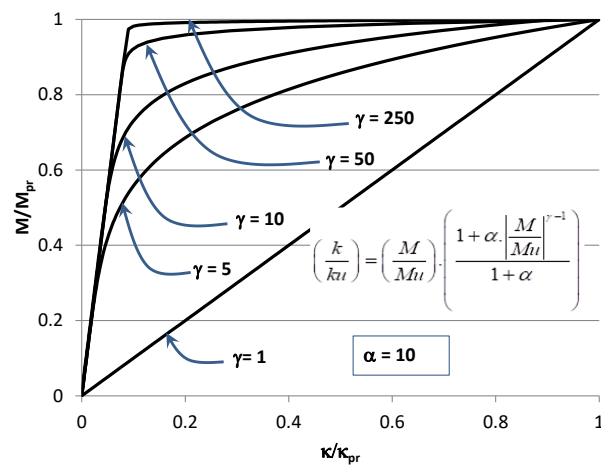
Por otra parte, si se mantiene γ constante e igual, por ejemplo, a 50 la curva tiene la forma de una recta cuando α es igual a 0. Para los demás casos en el que α varía entre 5 y 200 la tangente con respecto al origen varía en función a la variación de este parámetro, manteniendo la forma cuasi elastoplástica de la curva dado por el parámetro γ igual 50. Ver Figura 3.7.b.

La forma de la curva tipo Ramberg-Osgood, se aproxima a la forma observada de las curvas de comportamiento de secciones de concreto armado, propiamente de los diagramas momento-curvatura. La ventaja de emplear este

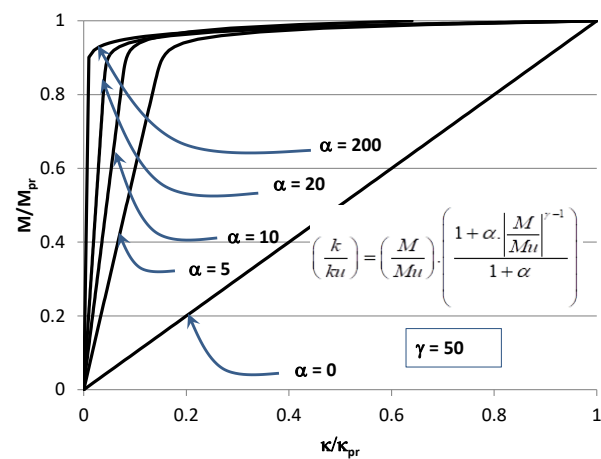
tipo de aproximación es la de representar el comportamiento a flexión con una sola ecuación, para las que hay que determinar los valores apropiados para los parámetros α y γ . Además se muestra más adelante que este tipo de modelos presentan una buena convergencia para la aplicación de métodos de solución del tipo Newton-Rapson.

Figura 3.7

Curvas de tipo Ramberg-Osgood para distintos valores de los parámetros α y γ .



(a)



(b)

Para obtener las ecuaciones para los parámetros α y γ se realizaron algunas manipulaciones algebraicas a la ecuación de tipo Ramberg-Osgood, de manera que se pueda relacionar con las propiedades físicas de los materiales que forman el concreto armado, principalmente representados por la resistencia a compresión del concreto, f'_c , el esfuerzo de fluencia del acero de refuerzo, f_y , las cuantías de refuerzo longitudinal en tracción, ρ , y en compresión, ρ' . La relación de carga axial, en el caso de columnas, es un parámetro relevante; sin embargo, en el caso de vigas de concreto armado este parámetro no es considerado en el análisis de la sección. Debido a que la carga axial en vigas de concreto armado suele ser en la mayor parte de casos poco importante. Sin embargo, esta suposición no es necesariamente cierta en todos los casos, por ejemplo para la transferencia de acciones de tipo sísmicas por medio de las losas, hacia las vigas y luego hacia las columnas y muros, las losas introducen fuerzas axiales de magnitud variable en las vigas, lo que lleva a tener un comportamiento en flexo-tracción o en flexo-compresión, que usualmente se ha ignorado, pero actualmente se han empezado a introducir para el diseño de diafragmas en algunos reglamentos del mundo.

Para el análisis generalizado de las secciones empleando un análisis no lineal, es conveniente emplear una forma adimensional de la ecuación 3.8, con los cambios de variables siguientes:

$$\hat{\kappa} = \left(\frac{k}{ku} \right) \text{ y } \hat{M} = \left(\frac{M}{Mu} \right) \quad (3.9)$$

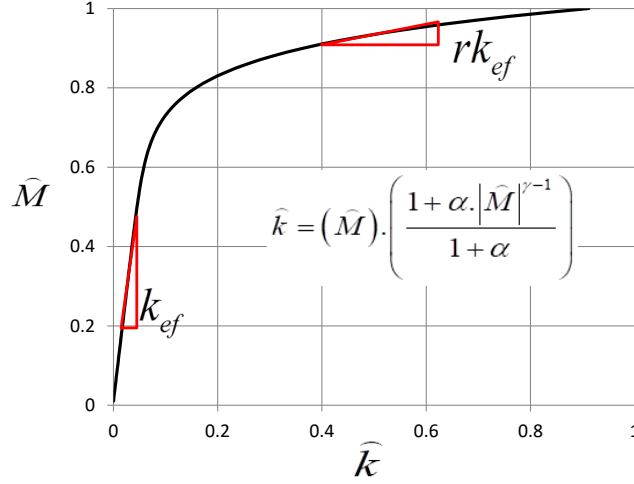
De acuerdo con la hipótesis que las cargas sean monotónicas y crecientes, es posible suponer que $\hat{M}$ sea mayor que cero; entonces la ecuación de tipo Ramberg – Osgood, puede escribirse en la forma siguiente:

$$\hat{\kappa} = \hat{M} \left(\frac{1 + \alpha \hat{M}^{\gamma-1}}{1 + \alpha} \right) \quad (3.10)$$

La Figura 3.8 muestra la curva paramétrica adimensional de tipo Ramberg-Osgood, para la que se deducen los parámetros que describen la

forma de la curva, la pendiente en el intervalo elástico, k_{ef} , y la pendiente poselástica, rk_{ef} en términos de los parámetros que describen la curva, α y γ .

Figura 3.8
Curva adimensional paramétrica de tipo Ramberg-Osgood.



La derivada implícita respecto de $\hat{\kappa}$, en la ecuación anterior, es:

$$1 = \frac{d\hat{M}}{d\hat{\kappa}} \left(\frac{1 + \alpha \hat{M}^{\gamma-1}}{1 + \alpha} \right) + \hat{M} \left(\frac{\alpha(\gamma-1)\hat{M}^{\gamma-2}}{1 + \alpha} \left(\frac{d\hat{M}}{d\hat{\kappa}} \right) \right) \quad (3.11)$$

Para obtener los parámetros de la ecuación de tipo Ramberg-Osgood, se consideró que la pendiente de la etapa inicial, es decir en el intervalo de comportamiento elástico lineal, es una constante igual a la rigidez efectiva a flexión, adimensional, k_{ef} .

$$\frac{d\hat{M}}{d\hat{\kappa}} = k_{ef} \quad (3.12)$$

Y en el intervalo poselástico la pendiente es rk_{ef} , donde r es un factor adimensional menor que uno, respecto de la pendiente elástica.

$$\frac{d\hat{M}}{d\hat{\kappa}} = rk_{ef} \quad (3.13)$$

El parámetro α se obtiene a partir de la condición con la pendiente elástica, Ecuación 3.12, sustituyendo la Ecuación 3.12 en la Ecuación 3.11 y evaluada en el origen se obtiene lo siguiente.

$$\alpha = k_{ef} - 1 \quad (3.14)$$

Además, el parámetro γ se obtiene de manera análoga en el intervalo poselástico, se sustituye la Ecuación 3.13 en la Ecuación 3.11 y se evalúa para un punto conocido de dicho intervalo, $(\hat{\kappa}_p, \hat{M}_p)$, de donde se obtiene la ecuación 3.15.

$$\gamma = 1 + \left(\frac{\frac{1}{rk_{ef}} - \frac{\hat{\kappa}_p}{\hat{M}_p}}{\frac{\hat{\kappa}_p}{\hat{M}_p} - \frac{1}{1+\alpha}} \right) \quad (3.15)$$

En esta última ecuación, a medida que el factor r tiende a cero o es muy pequeño, entonces el parámetro γ crece y se convierte en un número muy grande lo que lleva a cierta inestabilidad de dicho parámetro. Sin embargo, en ese caso es posible obtener este parámetro a partir de la ecuación 3.10, en el que se sustituye los datos correspondientes a un punto conocido de la curva, $(\hat{\kappa}_p, \hat{M}_p)$ de donde se obtiene la expresión siguiente.

$$\gamma = 1 + \frac{Ln \left(\frac{\frac{\hat{\kappa}_p}{\hat{M}_p} (1+\alpha) - 1}{\alpha} \right)}{Ln(\hat{M}_p)} \quad (3.16)$$

Sin embargo, una mejor forma de calcular el parámetro γ es buscar una curva de igual área que la aproximación bilineal o la curva deseada.

3.4.1 Algoritmo de solución de las ecuaciones para el modelo de tipo Ramberg-Osgood

Dada la curvatura κ , mediante el algoritmo de Newton se calcula el correspondiente momento, M . El método de Newton tiene en general una rápida convergencia, requiriendo apenas entre 5 a 20 iteraciones.

Se define la función $F(\hat{\kappa}, \hat{M})$ de la siguiente manera:

$$F(\hat{M}, \hat{\kappa}) = \alpha \hat{M}^\gamma + \hat{M} - (1 + \alpha) \hat{\kappa} \quad (3.17)$$

La derivada respecto a la variable $\hat{M}$ es:

$$\partial F(\hat{M}, \hat{\kappa}) / \partial \hat{M} = 1 + \alpha \gamma \hat{M}^{\gamma-1} \quad (3.18)$$

De acuerdo con el algoritmo de Newton, cada iteración se calcula con:

$$\hat{M}_{i+1} = \hat{M}_i - F(\hat{M}_i, \hat{\kappa}_0) / (\partial F(\hat{M}_i, \hat{\kappa}_0) / \partial \hat{M}_i) \quad (3.19)$$

Sustituyendo las expresiones correspondientes se obtiene

$$\hat{M}_{i+1} = \hat{M}_i - (\alpha \hat{M}_i^\gamma + \hat{M}_i - (1 + \alpha) \hat{\kappa}_0) / (1 + \alpha \gamma \hat{M}_i^{\gamma-1}) \quad (3.20)$$

3.5. Análisis paramétrico para obtener la rigidez efectiva de las secciones de vigas continuas de concreto armado

El procedimiento consiste en realizar el cálculo de los diagramas momento-curvatura a nivel de sección de una viga de concreto armado a la que se le ha variado la resistencia a compresión especificada del concreto, f'_c , la cuantía de refuerzo longitudinal del lecho en tracción, que se supone es el lecho inferior, ρ , finalmente la relación de cuantías de refuerzo longitudinal del lecho en compresión, ρ' , que se supone es el lecho superior, entre la cuantía de refuerzo longitudinal del lecho inferior, ρ'/ρ .

3.5.1 Limitaciones para las expresiones obtenidas

Las ecuaciones obtenidas son válidas para la resistencia a compresión del concreto, f'_c , entre 17 a 56 MPa. Además, la cuantía de refuerzo longitudinal,

ρ , del lecho en tracción de vigas en el intervalo comprendido entre 0.0023 a 0.009. También, la relación de cuantía de lecho en compresión entre lecho en tracción, ρ'/ρ , entre 0.0 a 2.0

Para el análisis paramétrico se ha tomado en cuenta el modelo de Mander, para el comportamiento del concreto confinado y no confinado, el cual considera el aporte de los estribos en la resistencia y capacidad de deformación del concreto. Además del modelo para el acero, que toma en cuenta el endurecimiento por deformación, descrito anteriormente. En el modelo no se consideró el aporte de tracción del concreto.

Una vez obtenidos los resultados, se calcularon el promedio de los resultados en función a los parámetros relevantes, los cuales fueron principalmente la resistencia del concreto, f'_c , la razón de cuantías, ρ'/ρ , y la cuantía de refuerzo del lecho en tracción, ρ .

La rigidez efectiva a flexión se obtiene con base en la pendiente del diagrama momento-curvatura de la sección. La etapa elástica muestra un comportamiento lineal hasta la primera fluencia. La rigidez efectiva es definida por la pendiente de la recta que une el punto de primera fluencia de la sección con el origen de la curva. Este procedimiento se realiza para todos los casos y en función a los parámetros explicados anteriormente.

La ecuación obtenida con base en el análisis paramétrico es la siguiente.

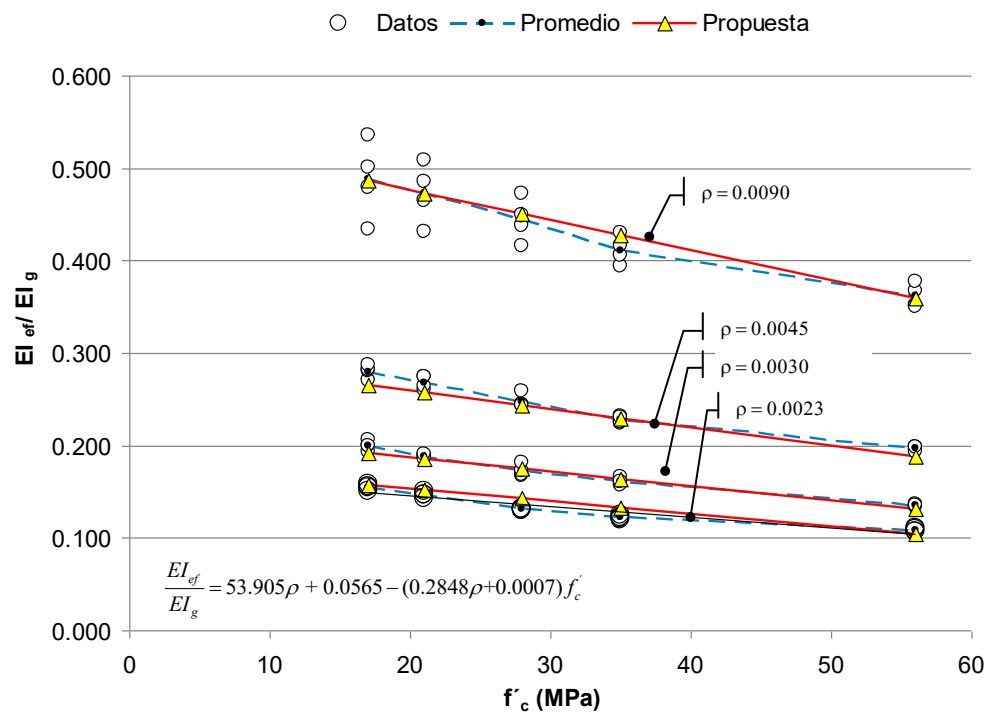
$$\frac{EI_{ef}}{EI_g} = 53.905\rho + 0.0565 - (0.2848\rho + 0.0007)f'_c \quad (3.21)$$

La Figura 3.9 muestra resultados para la relación de la rigidez efectiva respecto de la rigidez bruta, EI_{ef}/EI_g , en función a la resistencia del concreto, f'_c , y la cuantía de refuerzo longitudinal, del lecho en tracción, ρ . Los resultados obtenidos mediante cálculos, se indican como datos con símbolo circular, por cada cuantía de refuerzo del lecho en tracción, ρ , se calculan las correspondientes rigideces con respecto a la relación de cuantías, ρ'/ρ . Se puede concluir que la relación de cuantías, ρ'/ρ , no es relevante para el cálculo de la rigidez efectiva. Con los datos mencionados se calcula el valor promedio de la

rigidez y esta se compara con la ecuación propuesta. Se puede observar que la ecuación propuesta tiene similitud con los datos y valores promedio de la relación de rigideces, ρ'/ρ .

Figura 3.9

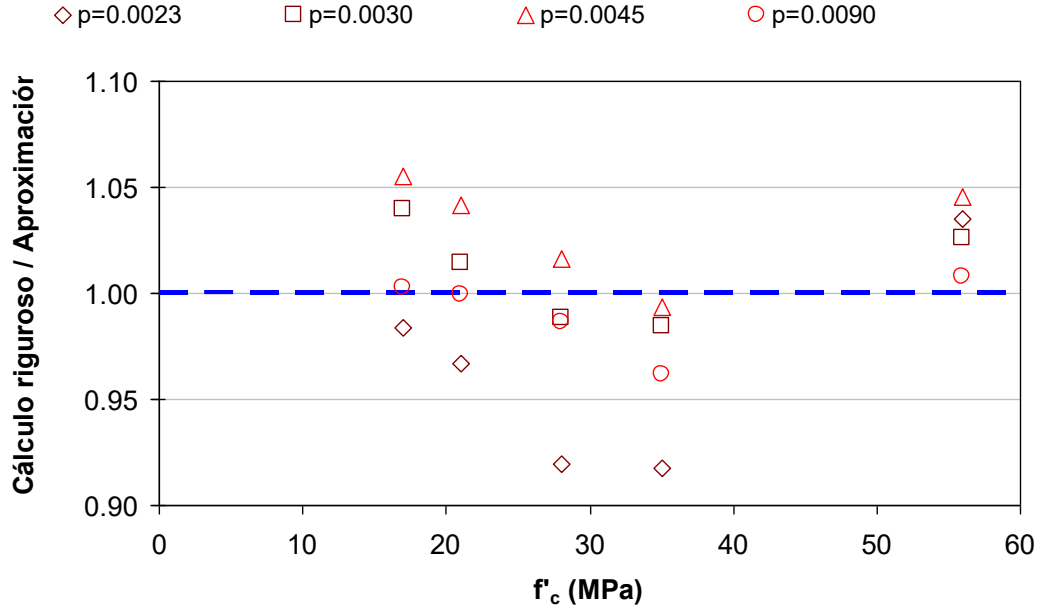
Rigidez efectiva, adimensional, contra la resistencia a compresión del concreto.



La aproximación de la rigidez efectiva muestra errores, entre el promedio del cálculo riguroso y la aproximación propuesta, menores que +/- 6%, La Figura 3.10 muestra con varios símbolos los valores correspondientes a las distintas cuantías de refuerzo. La línea horizontal punteada indica la igualdad entre el valor promedio calculado y la aproximación propuesta.

Figura 3.10

Relación entre el cálculo riguroso y el aproximado, de la rigidez efectiva a flexión contra la resistencia a compresión del concreto.



3.6. Análisis paramétrico para obtener la curvatura de fluencia aparente

Para obtener una relación de la curvatura de fluencia en función a los parámetros más relevantes, se procedió de manera similar que en el caso anterior. Los parámetros relevantes en este caso son: la relación de cuantías de refuerzo, ρ'/ρ , y la resistencia a compresión del concreto, f'_c , en MPa. La resistencia nominal, M_n , calculada con las expresiones del ACI318-19 o en su defecto la E060. La expresión que se muestra a continuación indica la relación adimensional de la curvatura de fluencia.

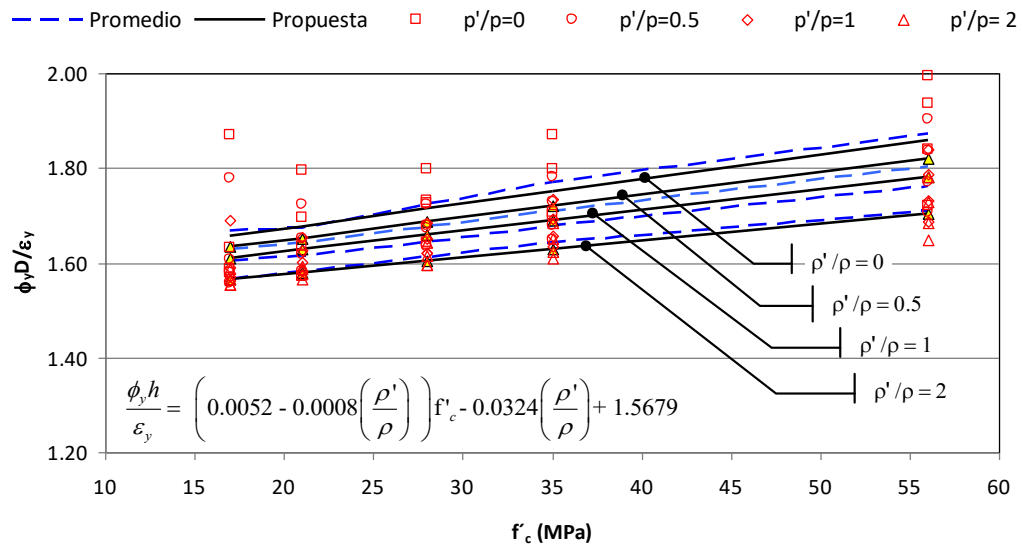
$$\frac{\phi_y h}{\varepsilon_y} = \text{Menor} \left(\left(0.0052 - 0.0008 \left(\frac{\rho'}{\rho} \right) \right) f'_c - 0.0324 \left(\frac{\rho'}{\rho} \right) + 1.5679; \frac{M_n}{EI_{ef}} \left(\frac{\varepsilon_y}{h} \right) \right) \quad (3.22)$$

La aproximación propuesta se comparó con el promedio de los resultados calculados rigurosamente. La Figura 3.11 muestra, con línea discontinua, el promedio de cálculos rigurosos. La aproximación propuesta, con línea continua oscura, para distintas relaciones de cuantías, ρ'/ρ , se superpone

aceptablemente sobre las curvas promedio. La escala vertical; de la Figura 3.11, se indica entre 1.2 y 2.0, de forma que se distinga las curvas promedio y la aproximación propuesta.

Figura 3.11

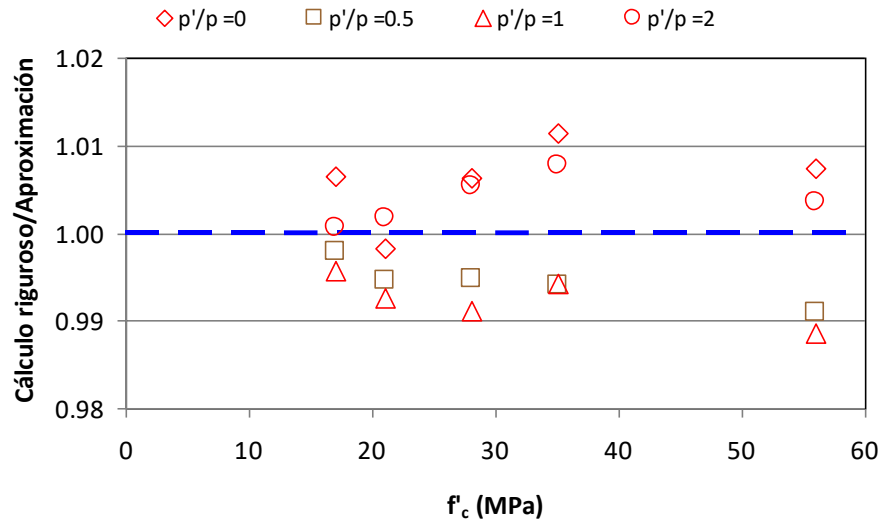
Curvatura de fluencia, adimensional, contra la resistencia a compresión del concreto.



La aproximación de la curvatura muestra errores, entre el cálculo riguroso y la aproximación propuesta, menores que 1.14%. La Figura 3.12 muestra con distintos símbolos, asociados a distintas relaciones de cuantías, ρ'/ρ , la comparación de los valores obtenidos con el cálculo riguroso entre la aproximación.

Figura 3.12

Relación entre el cálculo riguroso y aproximado, de la curvatura de fluencia contra la resistencia a compresión del concreto.



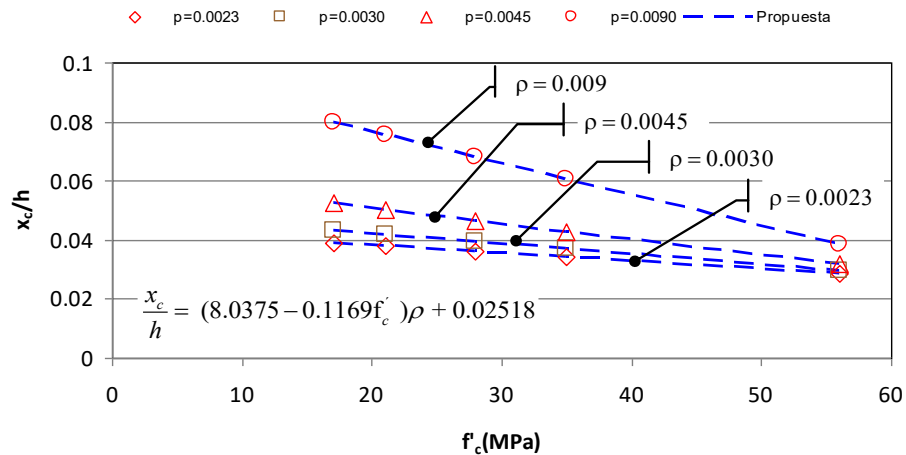
Se ha obtenido, de manera similar a los casos anteriores, una aproximación para calcular la profundidad de la resultante de la fuerza en compresión, x_c , del concreto. Este parámetro se hace adimensional con respecto al peralte, h , de la sección. La expresión obtenida para estimar la relación descrita, x_c/h , es la siguiente.

$$\frac{x_c}{h} = (8.0375 - 0.1169f'_c)\rho + 0.02518 \quad (3.23)$$

La Figura 3.13 muestra la comparación entre el promedio de los valores calculados rigurosamente y la aproximación propuesta, para distintas cuantías del lecho en tracción, ρ .

Figura 3.13

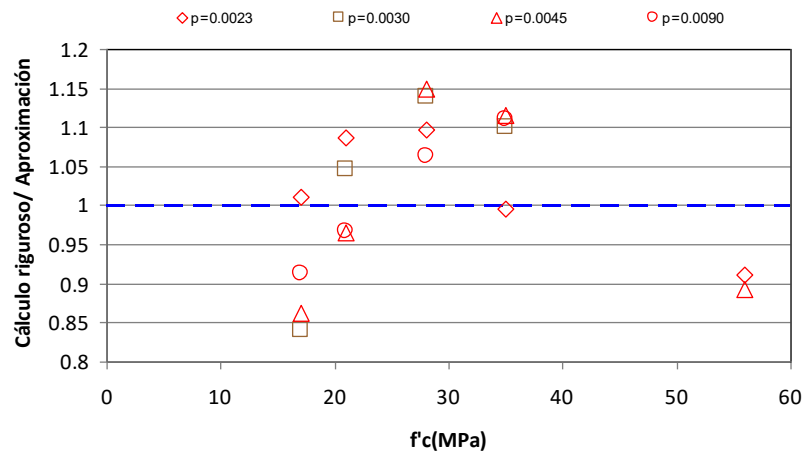
Profundidad de la resultante en compresión del concreto, adimensional, contra la resistencia a compresión del concreto.



La aproximación de la profundidad de la resultante de fuerzas en compresión del concreto, muestra errores, entre el cálculo riguroso y la aproximación propuesta, menores que 17%. La Figura 3.14 muestra con distintos símbolos, asociados a distintas cuantías del lecho en tracción, ρ , la comparación de los valores obtenidos con el cálculo riguroso entre la aproximación.

Figura 3.14

Relación entre el cálculo riguroso y aproximado, de la profundidad de la resultante en compresión del concreto, contra la resistencia a compresión del concreto.



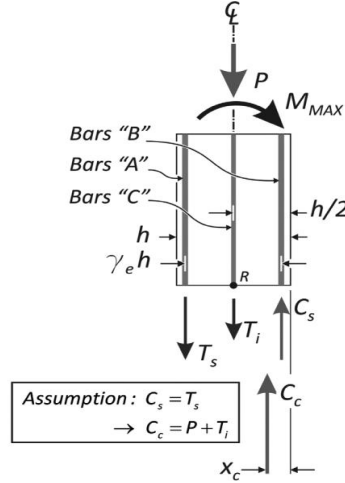
3.7. Análisis paramétrico para obtener la resistencia probable a flexión de secciones rectangulares

Para calcular la resistencia probable a flexión de vigas rectangulares, fue tomada como base la investigación de Restrepo y Rodríguez (2013), donde se refieren a la resistencia probable de columnas rectangulares y circulares de concreto armado, con armado simétrico. En dicha investigación se explica la diferencia entre la resistencia probable calculada con las recomendaciones del ACI318 y los resultados observados en distintos ensayos de columnas, bajo acciones de tipo cíclicas reversibles. Restrepo y Rodríguez (2013) muestran, en esa investigación, que la resistencia probable a flexión, calculada con el procedimiento sugerido por el ACI318, puede estar del lado de la inseguridad, cuando la carga axial es mayor que $0.3A_gf'_c$. Además, propusieron expresiones para el cálculo de la resistencia probable, las que muestran errores menores que 15%, con una media del error del orden de 1%, respecto de los resultados experimentales estudiados. La Figura 3.15 muestra el modelo empleado por los autores mencionados, en el que se destacan las barras en tracción, A, las barras en compresión, B, las barras en el lecho intermedio o centroidal, C, el peralte de la sección, h , la distancia entre centros de las barras de refuerzo en tracción y compresión, $\gamma_e h$, la profundidad de la fuerza resultante en compresión del concreto, x_c , la fuerza axial, P , el momento flector de la sección, M_{max} , la fuerza de las barras en tracción, T_s , la fuerza de las barras en compresión, C_s , la fuerza de las barras del lecho intermedio en tracción, T_i , la fuerza resultante en compresión del concreto, C_c .

La hipótesis más relevante de esa investigación sugiere que, bajo acciones de tipo cíclicas reversibles, el acero en compresión desarrolla esfuerzos mayores que los esfuerzos de fluencia, en el intervalo de endurecimiento por deformación inelástica, lo que lleva a considerar, en el caso de columnas con refuerzo simétrico, que la fuerza desarrollada por el refuerzo en compresión, C_s , es aproximadamente igual que la fuerza que desarrolla el refuerzo en tracción, T_s .

Figura 3.15

Modelo de fuerzas internas resistentes y fuerzas aplicadas en columnas con refuerzo simétrico, Restrepo y Rodríguez (2013).



Nota: fuente Restrepo y Rodríguez (2013)

La expresión obtenida por Restrepo y Rodríguez (2013), con base en las hipótesis mencionadas, las que se explican con mayor detalle en la publicación, en un escenario ideal, en el que la resistencia a flexión máxima, $M_{máx}$, es igual a la resistencia a flexión creíble, M_{cd} .

$$M_{cd} = T_s \gamma_e h + (P + T_i) \left(\frac{h}{2} - x_c \right) \quad (3.24)$$

Con base en lo descrito, se formuló una expresión para el caso de una sección rectangular, con refuerzo no simétrico, lo que implica que C_s es diferente a T_s . Sin embargo, el esfuerzo en compresión del acero puede suponerse que es mayor que el esfuerzo de fluencia, lo que significa esfuerzos en el intervalo de endurecimiento por deformación. A partir del equilibrio y tomando momentos respecto del punto R, se puede obtener la expresión siguiente.

$$M_{cd} = C_s \left(x_c - \frac{1}{2} (h - \gamma_e h) \right) + T_i \left(\frac{h}{2} - x_c \right) + T_s \left(\frac{h}{2} - x_c + \frac{\gamma_e h}{2} \right) + P \left(\frac{h}{2} - x_c \right) \quad (3.25)$$

La expresión anterior, con las fuerzas en las barras de refuerzo, se puede reescribir en términos de las propiedades medidas, del esfuerzo de fluencia, $\hat{f}_y$, la resistencia a compresión del concreto, $\hat{f}_c$, el factor de sobrerresistencia por endurecimiento, λ , la cuantía de refuerzo longitudinal en tracción, ρ , la cuantía de refuerzo longitudinal en compresión, ρ' , la cuantía longitudinal del lecho intermedio, ρ_{si} , en la forma siguiente.

$$\frac{M_{cd}}{bh^2\hat{f}_c} = \left(\frac{\lambda\hat{f}_y}{\hat{f}_c} \right) \left((\rho_s + \rho_{sc}) \frac{\gamma}{2} + (\rho + \rho_{si} - \rho') \left(\frac{1}{2} - \frac{x_c}{h} \right) \right) + \left(\frac{P}{bh\hat{f}_c} \right) \left(\frac{1}{2} - \frac{x_c}{h} \right) \quad (3.26)$$

Para el caso de vigas con refuerzo en doble lecho, se elimina la carga axial, P, de donde se obtiene.

$$\frac{M_{cd}}{bh^2\hat{f}_c} = \left(\frac{\lambda\hat{f}_y}{\hat{f}_c} \right) \rho \left(\left(1 + \left(\frac{\rho'}{\rho} \right) \right) \frac{\gamma}{2} + \left(1 - \left(\frac{\rho'}{\rho} \right) \right) \left(\frac{1}{2} - \frac{x_c}{h} \right) \right) \quad (3.27)$$

Cabe hacer énfasis en que la resistencia a flexión máxima, $M_{m\acute{a}x}$, se obtiene de forma experimental. La resistencia creíble a flexión, M_{cd} , se calcula con los valores experimentales de las propiedades de los materiales y la resistencia probable a flexión, M_{pr} , se calcula con las propiedades nominales de los materiales.

3.7.1 Diagrama momento curvatura simplificado

Se compararon diagramas momento curvatura, un primer caso calculado de forma rigurosa mediante el modelo de Mander, sin considerar la tracción, su correspondiente aproximación tipo Ramberg-Osgood; una aproximación bilineal en la que se emplearon las expresiones mencionadas anteriormente. Se estudió una sección de 200 mm por 240 mm, con una cuantía de refuerzo en tracción igual a 0.0031 y en compresión de 0.0021, lo que da una razón de cuantías, ρ'/ρ , igual a 0.669, separación de estribos igual a 150mm. La resistencia a compresión del concreto de 36.4 MPa, esfuerzo de fluencia, f_y , igual a 557 MPa. Para el factor de sobrerresistencia del acero λ , se empleó un valor igual a 1.15.

La Figura 3.16 muestra los diagramas momento curvatura calculados. La curva obtenida con el modelo de Mander se indica con línea continua y símbolo de triángulo, el modelo tipo Ramberg-Osgood con línea continua y símbolo circular oscuro y la aproximación bilineal, con línea continua y símbolo de rombo.

Los resultados muestran una resistencia a flexión creíble, M_{cd} , con el modelo de Mander y con la aproximación bilineal de 19.6 kN-m y 19.7 kN-m, respectivamente. Cabe notar que el modelo Ramberg-osgood, muestra una curva muy similar a la obtenida con el modelo de Mander, con los parámetros α y γ iguales a 8.5 y 12, respectivamente, además de emplear la misma resistencia creíble, M_{cd} , y la curvatura correspondiente, ϕ_{cd} .

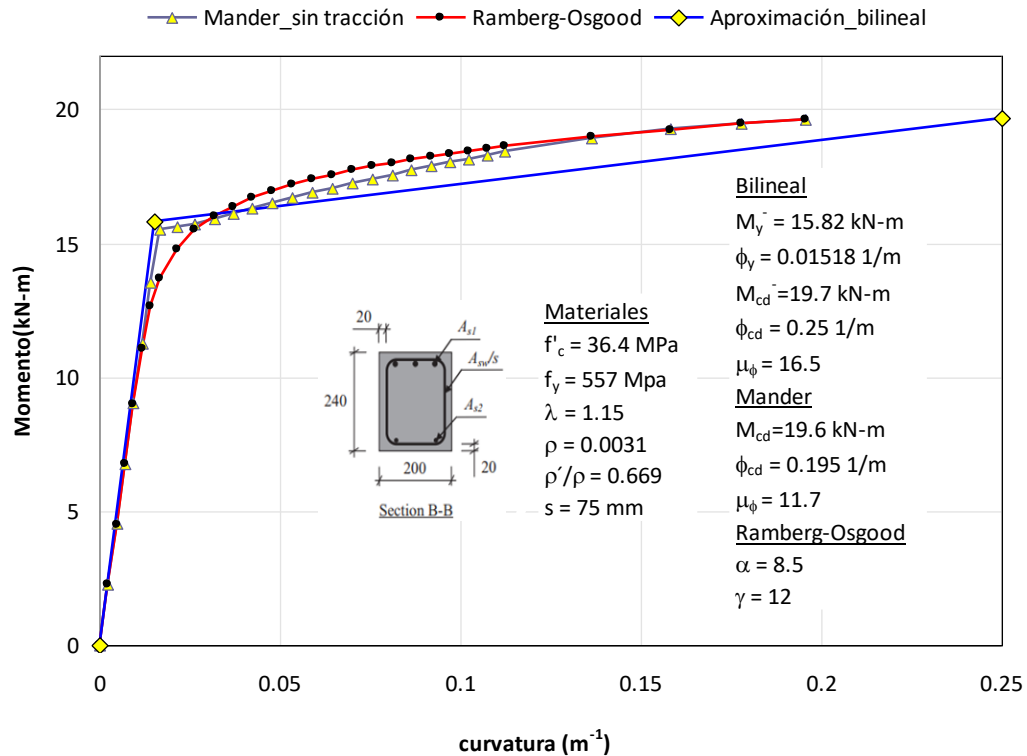
Por otro lado, la curvatura asociada a la resistencia creíble, ϕ_{cd} , obtenida con el modelo de Mander es igual a 0.195 m^{-1} , mientras que en el caso de la aproximación bilineal es 0.25 m^{-1} . Esta diferencia se debe a que la aproximación bÍlineal emplea un límite superior para la deformación del acero en tracción, el cual está asociado a la máxima deformación por pandeo inelástico de la barra, $\frac{1}{2} \varepsilon_{su}$, mientras que, en el caso del modelo riguroso de Mander, este emplea el criterio general, más restrictivo, expuesto en el capítulo II sección 2.6.1., el cual presenta tres posibles límites: la deformación por aplastamiento del concreto confinado, ε_{ccu} , asociado a la fractura del estribo, el pandeo de la barra, ε_p^* , y el deterioro de la resistencia, $0.8M_{cd}$.

En el intervalo de comportamiento elástico, en todos los casos, los diagramas muestran una superposición que indica una buena aproximación entre los modelos. Mientras que, en el intervalo inelástico, hay diferencias en la resistencia, menores que 6 %, y en la curvatura máxima calculada, menores que 30 %; sin embargo, para propósitos prácticos pueden ser útiles.

La aproximación bilineal muestra resultados aceptables para cálculos prácticos. Posiblemente se pueda modificar la curvatura asociada a la resistencia creíble a flexión, ϕ_{cd} , en función a los criterios generales anteriormente mencionados.

Figura 3.16

Comparación de diagramas momento curvatura calculados con el modelo de Mander, Ramberg-Osgood y una aproximación bilineal.



3.7.2 Influencia de las propiedades de los materiales en el diagrama momento-curvatura

Se estudiaron algunos casos para una sección de 300mm por 600mm, que podría ser una sección de viga convencional, elegida arbitrariamente, para la que se calcularon diagramas momento curvatura, con distintas propiedades de los materiales. Se calculó el diagrama momento curvatura con las propiedades nominales de los materiales y sin considerar el efecto de confinamiento de los estribos.

La Figura 3.17 muestra un diagrama momento curvatura para una sección de 300mm por 600mm, con 4 varillas de 5/8" de refuerzo en lecho inferior, con propiedades nominales del acero, de esfuerzo de fluencia igual a 412 MPa (4200 kgf/cm²) y resistencia del concreto, f'_c , igual a 20.6 MPa (210

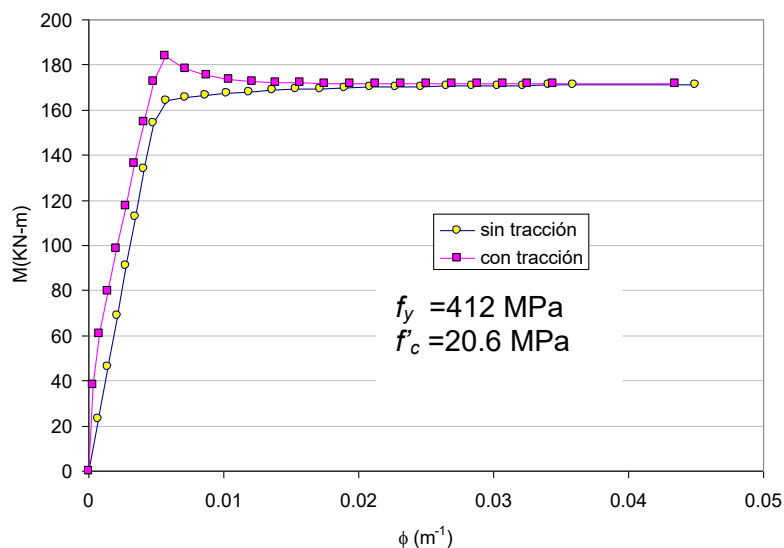
kgf/cm²). La curvatura máxima se obtiene cuando la fibra extrema del concreto alcanza la deformación de aplastamiento del concreto no confinado, ε_{cu} , igual a 0.003, lo que lleva a obtener, también, la resistencia nominal a flexión. Se analizan dos casos, en el primero no se considera la tracción de concreto, indicado con línea continua y marcador circular, mientras que en el segundo caso es considerada la tracción del concreto, indicado con línea continua y marcador cuadrado. No se considera el efecto del confinamiento del concreto en ningún caso de los anteriormente mencionados.

El caso con tracción del concreto, muestra mayor rigidez en la etapa elástica del comportamiento con respecto al caso sin tracción. Ambos casos muestran la misma resistencia nominal, M_n , cuando se produce el aplastamiento del concreto del recubrimiento, concreto no confinado.

El diagrama momento curvatura, sin tracción del concreto, en adelante VM, tiene una forma muy similar a un modelo elastoplástico. Esta curva será comparada con otros casos analizados, en los que se consideró el efecto del concreto confinado.

Figura 3.17

Diagrama momento curvatura de una sección rectangular, sin considerar el efecto de confinamiento de los estribos.



El diagrama momento curvatura de referencia, VM, antes mencionado se compara con diagramas momento curvatura para distintos valores de la resistencia a compresión del concreto, entre 20.6 MPa a 54.9 MPa.

La Figura 3.18 muestra diagramas momento curvatura para distintos valores de la resistencia a compresión del concreto, f'_c . Se ha empleado el modelo de Mander para el concreto confinado, que incrementa la resistencia y deformación del concreto no confinado por efecto del confinamiento, y también para el acero; donde toma en cuenta el endurecimiento por deformación. También, se ha considerado el aporte de la tracción del concreto. El diagrama con línea continua es para f'_c igual a 20.6 MPa (210 kgf/cm²), con línea discontinua 34.3 MPa (350 kgf/cm²) y con línea y punto discontinuo 54.9 MPa (560 kgf/cm²).

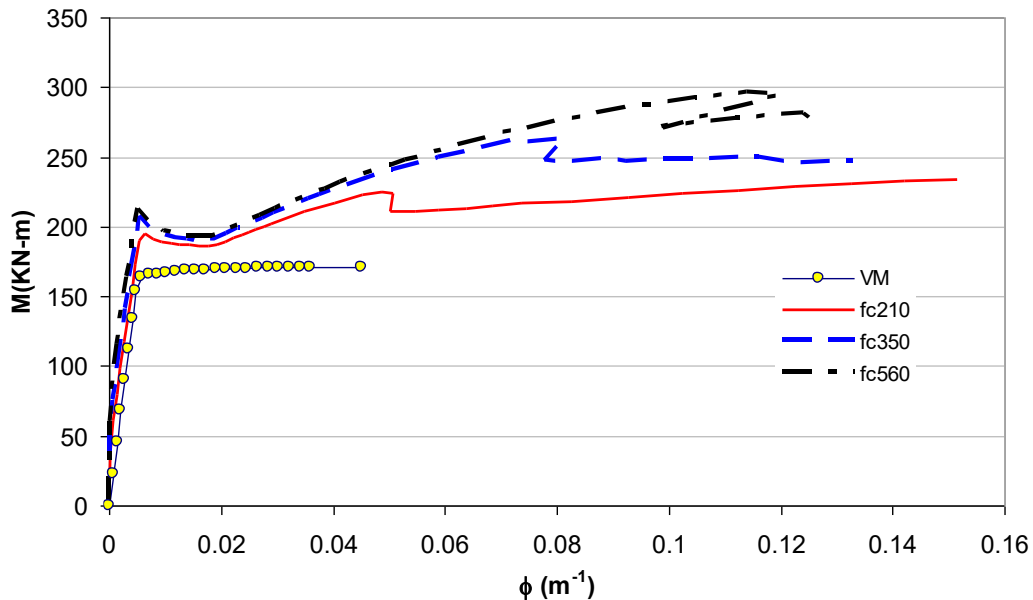
Para obtener la máxima curvatura se tuvo en cuenta el criterio de Paulay y Priestley (1992) referido al aplastamiento del concreto confinado, el mismo que está relacionado con la fractura de los estribos y el criterio del pandeo de la barra de acero longitudinal dado por Rodríguez et al. (1999), el que ocurra primero de ambos criterios.

Se puede observar que la curva de referencia, VM, calculada con datos nominales, sin tracción del concreto y sin considerar el confinamiento de los estribos, muestra menor resistencia y menor capacidad de curvatura, con respecto a los calculados con el modelo de Mander, en los que se consideró el efecto del confinamiento, la tracción del concreto y el endurecimiento por deformación del acero de refuerzo longitudinal.

A mayor resistencia a compresión del concreto, f'_c , los diagramas muestran mayor pendiente pos elástica y mayor resistencia a flexión. Sin embargo, a mayor resistencia del concreto muestran una relativa menor capacidad de curvatura, aunque la diferencia es poco relevante. La capacidad de curvatura inelástica de estos modelos es tres veces mayor que la capacidad del caso de referencia, VM.

Figura 3.18

Diagrama momento curvatura de una sección rectangular, comparación del diagrama de referencia, VM, versus diagramas con distinta resistencia a compresión del concreto y con aporte de la tracción del concreto.



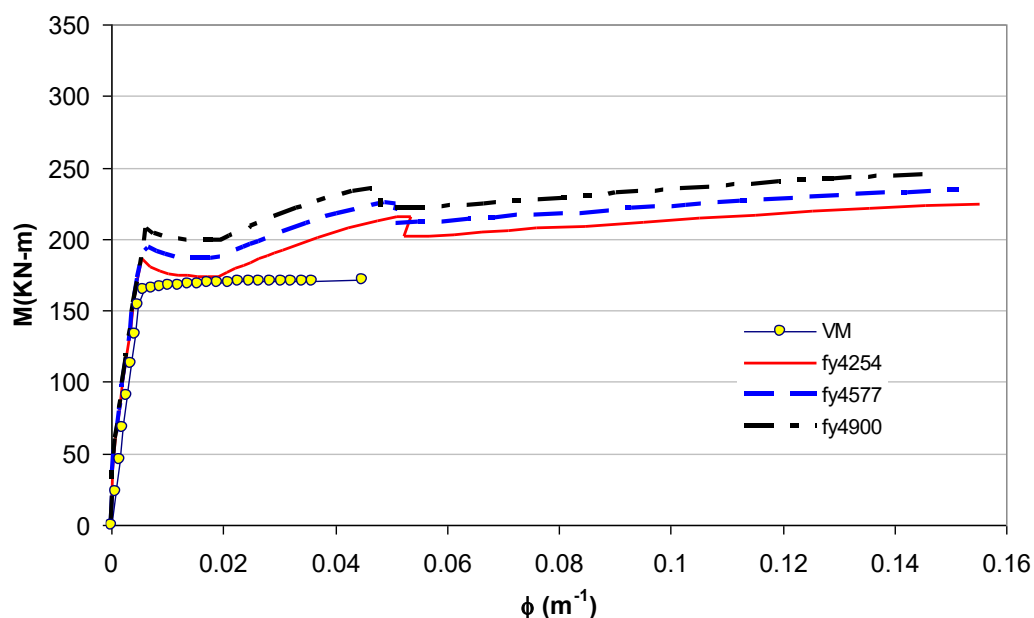
De manera similar y con el mismo procedimiento, se compara el diagrama de referencia, VM, con diagramas momento curvatura para distintos valores del esfuerzo de fluencia, f_y , con línea continua para esfuerzo de fluencia de 417 MPa (4254 kgf/cm²), con línea discontinua 449 MPa (4577 kgf/cm²) y con línea discontinua y punto 481 MPa (4900 kgf/cm²).

La Figura 3.19 muestra diagramas momento curvatura para distintos valores del esfuerzo de fluencia, f_y . A mayor esfuerzo de fluencia se obtiene mayor resistencia a flexión, pero la rigidez pos elástica se mantiene casi inalterada. Por otra parte, a mayor esfuerzo de fluencia se observa una menor curvatura, pero con diferencias poco relevantes.

Las capacidades de curvatura inelástica, de los casos calculados con el modelo de Mander, son tres veces la capacidad de curvatura inelástica del caso de referencia, VM.

Figura 3.19

Diagrama momento curvatura de una sección rectangular, comparación del diagrama de referencia, VM, versus diagramas con distinto esfuerzo de fluencia del acero, f_y , y con aporte de la tracción del concreto.



El caso de referencia, VM, muestra resultados que pueden significar menor capacidad resistente y de deformación. Lo que lleva a suponer que existe un margen de seguridad. Sin embargo, en el caso de la resistencia a flexión la sobrerresistencia no siempre representa un margen de seguridad. Desde el punto de vista de la demanda de fuerza cortante, puede significar una demanda excesiva de cortante por capacidad a flexión, dado que las secciones críticas pueden desarrollar cortante en función a la capacidad por flexión de las secciones correspondientes, bajo comportamiento inelástico.

Se compararon los mismos diagramas momento curvatura anteriores, para los que se consideraron los casos con tracción del concreto y sin tracción del concreto.

La Figura 3.20 muestra la comparación de diagramas momento curvatura para distintas resistencias a compresión del concreto, además de considerar los sub casos con tracción y sin tracción del concreto. En todos los casos, cuando

es considerada la tracción del concreto, la rigidez es mayor en el intervalo de comportamiento elástico. Los casos sin tracción, muestran una curva con pendiente uniforme en dicho intervalo, secante a la curva en la que se considera la tracción del concreto. El momento asociado al límite de comportamiento elástico, en el caso de considerar la tracción del concreto, es mayor que el caso que no se considera la tracción.

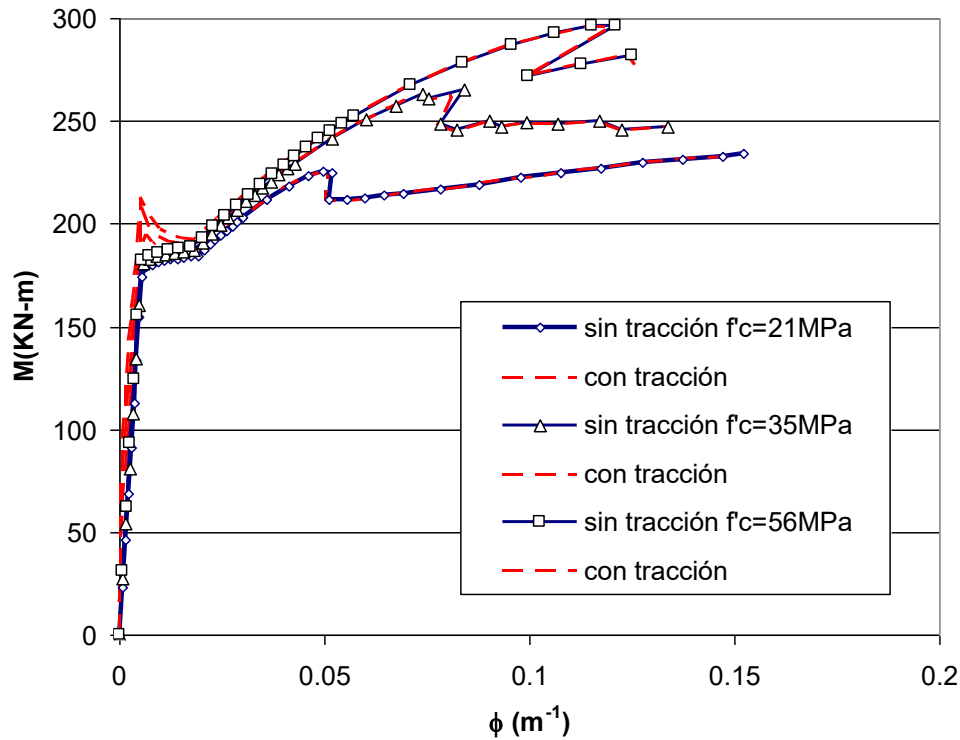
El incremento de la resistencia a compresión del concreto, f'_c , influye en el incremento de la rigidez a flexión, en el intervalo de comportamiento elástico e inelástico. A mayor resistencia a compresión del concreto, f'_c , se incrementa la rigidez en ambos intervalos de comportamiento. A mayor resistencia del concreto, se obtiene menor capacidad de curvatura.

Cuando el acero incursiona en el intervalo de comportamiento inelástico, con endurecimiento por deformación, se presenta un incremento de la resistencia a flexión, hasta que se produce el desprendimiento del concreto de recubrimiento, a $5000\mu\epsilon$. Es cuando ocurre una reducción de la resistencia a flexión, sin embargo, a medida que se incrementa la curvatura, se sigue incrementando la resistencia a flexión hasta recuperar y en algunos casos superar la resistencia alcanzada antes del desprendimiento del concreto de recubrimiento.

En los casos en que la resistencia nominal del concreto es mayor que 21 MPa, la resistencia creíble a flexión, M_{cd} , ocurre cuando se desprende el concreto de recubrimiento. En los otros casos, la sección desarrolla una mayor resistencia creíble a flexión, limitada por los criterios indicados en el Capítulo II sección 2.7.1.

Figura 3.20

Diagrama momento curvatura de una sección rectangular, con distinta resistencia a compresión del concreto, con tracción y sin tracción del concreto.



La Figura 3.21 muestra la comparación de diagramas momento curvatura para distintos esfuerzos de fluencia del acero, además de considerar los sub casos con tracción y sin tracción del concreto.

El incremento del esfuerzo de fluencia del acero de refuerzo, f_y , influye principalmente en el intervalo de comportamiento inelástico. En el intervalo de comportamiento elástico, la pendiente de la curva o rigidez a flexión, para efectos prácticos es igual en todos los casos.

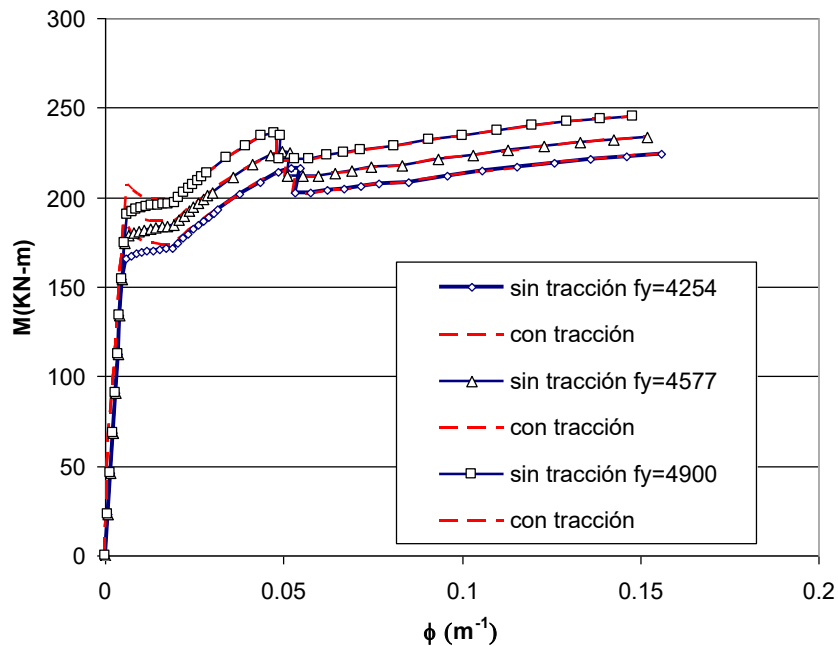
La resistencia creíble a flexión, M_{cd} , en estos casos está directamente relacionada con la sobre resistencia que alcanza el acero de refuerzo, λf_y , la cual está relacionada con la resistencia del acero, f_{su} .

El incremento del esfuerzo de fluencia del acero, f_y , no influye en el incremento de la rigidez en el intervalo de comportamiento elástico e inelástico.

La curvatura asociada a la resistencia creíble a flexión, ϕ_{cd} , disminuye con el incremento del esfuerzo de fluencia, f_y .

Figura 3.21

Diagrama momento curvatura de una sección rectangular, con distinto esfuerzo de fluencia del acero y con tracción y sin tracción del concreto.



Los resultados muestran que considerar la tracción del concreto influye principalmente en el intervalo de comportamiento elástico, mientras que en el intervalo inelástico no se aprecia una diferencia significativa.

En estudios donde se tiene información de los valores medios de las propiedades de los materiales, resistencia a compresión del concreto, f'_c , el esfuerzo de fluencia del acero de refuerzo, f_y , entre otras propiedades, es posible que existan diferencias entre los diagramas momento curvatura medidos y los calculados con los valores medios de las propiedades de los materiales. De acuerdo a los cálculos realizados, existe diferencia en la resistencia creíble a flexión, M_{cd} , del orden de 30%. Mientras que en la curvatura asociada a la resistencia creíble a flexión, ϕ_{cd} , pueden tenerse diferencias del orden de 20%.

3.8. Análisis no lineal de viga en voladizo

En este acápite se realiza el análisis no lineal de una viga en voladizo, de 1m de longitud, para estudiar el efecto del tamaño y subdivisión de los elementos de la viga en la respuesta de desplazamientos y fuerzas.

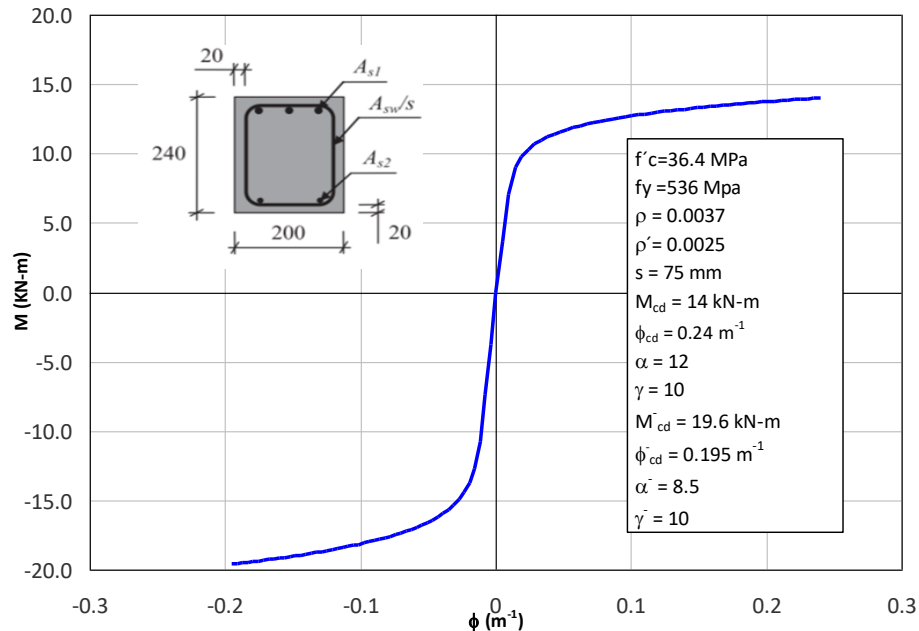
Para la viga en voladizo, se supondrá la misma sección en toda la longitud del elemento, así también, el empotramiento se supondrá perfecto. Esto último implica que no se tendrá en cuenta el desplazamiento por efecto de la rotación fija del apoyo, el cual existe debido a la deformación por deslizamiento de las barras ancladas en el interior del empotramiento. La relación de esbeltez efectiva, $2L/h$, igual a 8.3, implica un comportamiento predominante a flexión, lo que lleva a ignorar las deformaciones de cortante y la interacción flexión-cortante.

Se realizaron análisis con modelos que emplean 3 y 5 puntos de integración de Gauss-Legendre. Además, fueron considerados distintos tipos de subdivisiones, con un solo elemento en voladizo, varios segmentos de igual longitud (2, 3 y 5 segmentos) y el caso con varios segmentos de longitud variable. Se consideraron análisis con la matriz de rigidez variable y constante, a fin de ver la ventaja numérica de ambos modelos.

Se consideró una sección de 200mmx 240mm, que fue la empleada en la investigación de Bagge et al. (2014), la resistencia a compresión del concreto, f'_c , igual a 36.4 MPa, el esfuerzo de fluencia del acero, f_y , igual a 536 MPa, área del acero de lecho superior 151mm² y del lecho inferior 101mm², espaciamiento de estribos de 75mm, el módulo de elasticidad del concreto 2.69×10^7 kN/m². Con los datos indicados se calculó el diagrama momento curvatura de la sección, tipo Ramberg-Osgood, sin considerar la tracción del concreto, ver Figura 3.22. El diagrama momento curvatura obtenido es asimétrico, tiene momento creíble positivo, 14kN-m, menor que el momento creíble negativo, 19.6kN-m. La capacidad de curvatura a momento negativo, 0.195m⁻¹, que es menor que la capacidad de curvatura a momento positivo, 0.24 m⁻¹, aunque esta diferencia es poco significativa.

Figura 3.22

Diagrama momento curvatura con modelo de tipo Ramberg-Osgood, de una sección rectangular, de 200mmx240mm.



Los resultados muestran una ventaja considerable respecto del número de iteraciones, con el método de la rigidez variable. El número de iteraciones es mucho menor que el empleado por el método de la rigidez constante. Los resultados mostrados son solamente para la última etapa de carga; si se tomara el número de iteraciones totales realizadas en cada etapa de carga la diferencia del número total de iteraciones sería aún mayor. Ver tablas 3.1 y 3.2.

Por otra parte, los resultados en fuerzas y desplazamientos esencialmente son los mismos en ambos métodos. La diferencia de resultados principalmente se da por el número de subdivisiones de elementos del mismo tamaño y en la relación de longitudes de los elementos con tamaños distinto. Se observaron menores diferencias en los resultados, con el número de puntos de integración, estos convergen a los mismos resultados cuando se aumenta el número de elementos de igual tamaño, ver Figura 3.23; sin embargo, cuando se emplean elementos de distinto tamaño con dimensiones menores, donde hay un

mayor incremento de fuerzas internas, los resultados convergen a los mismos valores independientemente del número de puntos de integración.

Tabla 3.1

Análisis no lineal de viga en voladizo con rigidez variable y carga distribuida incremental constante.

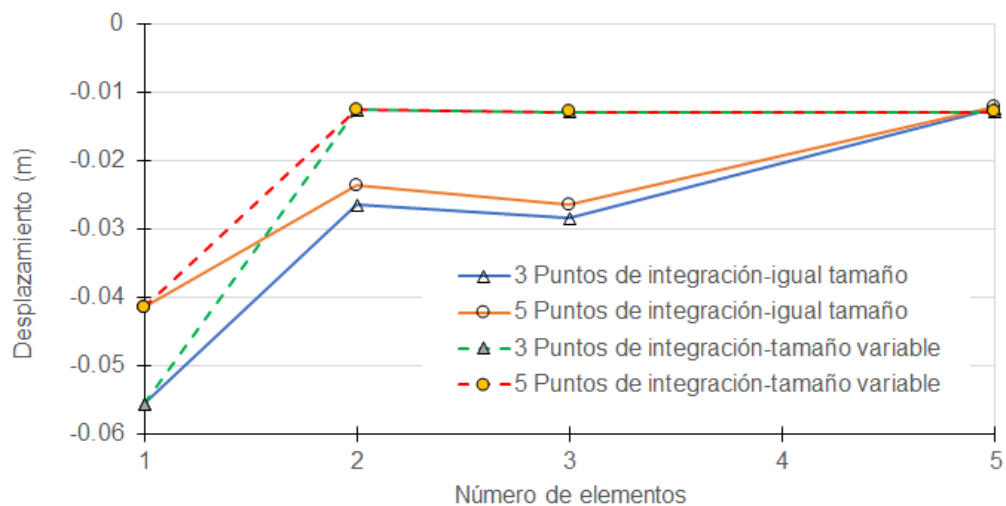
voladizo	w								
# elementos	# pto. int.	ratio	V apoyo	M empotrado	δ	θ	error V	error M	iteraciones
1	3	1	67.2	-33.6	-5.56E-02	7.50E-02	71%	71%	18
2	3	0.5 0.5	48	-24	-2.65E-02	3.18E-02	22%	22%	26
3	3	0.34 0.33 0.33	45.98	-22.762	-2.84E-02	3.27E-02	17%	16%	29
5	3	0.2 0.2 0.2 0.2 0.2	39.2	-19.6	-1.23E-02	1.44E-02	0%	0%	27
1	5	1	63.2	-31.6	-4.15E-02	5.21E-02	61%	61%	20
2	5	0.5 0.5	48	-24	-2.37E-02	2.84E-02	22%	22%	28
3	5	0.34 0.33 0.33	45.98	-22.762	-2.64E-02	3.06E-02	17%	16%	27
5	5	0.2 0.2 0.2 0.2 0.2	39.2	-19.6	-1.22E-02	1.43E-02	0%	0%	26
2	3	0.88 0.12	39.2	-19.6	-1.25E-02	1.45E-02	0%	0%	28
3	3	0.64 0.24 0.12	39.2	-19.6	-1.28E-02	1.49E-02	0%	0%	28
5	3	0.294 0.293 0.293 0.06 0.06	39.2	-19.6	-1.29E-02	1.50E-02	0%	0%	28
2	5	0.88 0.12	39.2	-19.6	-1.25E-02	1.45E-02	0%	0%	27
3	5	0.64 0.24 0.12	39.2	-19.6	-1.28E-02	1.49E-02	0%	0%	27
5	5	0.294 0.293 0.293 0.06 0.06	39.2	-19.6	-1.29E-02	1.50E-02	0%	0%	28

Tabla 3.2

Análisis no lineal de viga en voladizo con rigidez constante y carga distribuida incremental constante.

voladizo	w								
# elementos	# pto. int.	ratio	V apoyo	M empotrado	δ	θ	error V	error M	iteraciones
1	3	1	67.2	-33.6	-5.56E-02	7.50E-02	71%	71%	5113
2	3	0.5 0.5	48	-24	-2.65E-02	3.18E-02	22%	22%	4192
3	3	0.34 0.33 0.33	45.98	-22.762	-2.84E-02	3.27E-02	17%	16%	6602
5	3	0.2 0.2 0.2 0.2 0.2	39.2	-19.6	-1.23E-02	1.44E-02	0%	0%	3721
1	5	1	63.2	-31.6	-4.15E-02	5.21E-02	61%	61%	4050
2	5	0.5 0.5	48	-24	-2.37E-02	2.84E-02	22%	22%	3291
3	5	0.34 0.33 0.33	45.98	-22.762	-2.64E-02	3.06E-02	17%	16%	5623
5	5	0.2 0.2 0.2 0.2 0.2	39.2	-19.6	-1.22E-02	1.43E-02	0%	0%	3450
2	3	0.88 0.12	39.2	-19.6	-1.25E-02	1.45E-02	0%	0%	5628
3	3	0.64 0.24 0.12	39.2	-19.6	-1.28E-02	1.49E-02	0%	0%	5678
5	3	0.294 0.293 0.293 0.06 0.06	39.2	-19.6	-1.29E-02	1.50E-02	0%	0%	8043
2	5	0.88 0.12	39.2	-19.6	-1.25E-02	1.45E-02	0%	0%	5483
3	5	0.64 0.24 0.12	39.2	-19.6	-1.28E-02	1.49E-02	0%	0%	5531
5	5	0.294 0.293 0.293 0.06 0.06	39.2	-19.6	-1.29E-02	1.50E-02	0%	0%	8022

Figura 3.23
Desplazamiento vs número de elementos.



Capítulo IV. Redistribución de momentos en vigas continuas de concreto armado

4.1 Propósito de la redistribución de momentos

El propósito de la redistribución de momentos en vigas de concreto armado está referido a la reducción de momentos de diseño a lo largo de toda la viga; sin que esta condición signifique una reducción en el margen de seguridad. Lo que lleva a que la mayor parte de las secciones a lo largo de la viga desarrollen comportamiento inelástico, cuando las vigas desarrollan una capacidad de carga cercana al colapso. Sin embargo, si se diseñaran las secciones con los valores de momentos obtenidos de un análisis lineal elástico estas tendrían una resistencia en exceso que no se aprovecharía, en términos de cantidad de acero de refuerzo sería menos eficiente no emplear dicha reducción.

Dada la naturaleza de la redistribución de momentos, es posible reducir la cantidad de acero de refuerzo en las secciones de vigas, lo que lleva a obtener secciones con el acero de lecho inferior y superior de cuantías similares. Realizar una redistribución de momentos flectores de forma rigurosa, mediante análisis no lineal, implica una inversión de tiempo que no se realiza en la práctica común; sin embargo, los códigos de diseño permiten realizar la redistribución de los momentos flectores a partir de los momentos obtenidos del análisis elástico lineal, para lo cual establecen limitaciones en dicha redistribución.

Para realizar la redistribución de los momentos flectores, se supone que las secciones tienen suficiente resistencia a cortante, como para que no se produzca falla a cortante antes que la falla a flexión. Además, las secciones deben tener capacidad suficiente de rotación inelástica para que se desarrolle la redistribución, cuando las secciones críticas estén cercanas a la resistencia de colapso. Lo cual supondría un comportamiento dúctil, principalmente para las secciones críticas. Lo contrario supondría una falla de tipo frágil y con la consecuencia de que no ocurra una redistribución.

4.2 Limitaciones establecidas en los códigos de diseño

El código ACI318, desde su versión de 1971, ha establecido limitaciones que tienen implícitamente un enfoque conservador, del lado de la seguridad, para la redistribución de momentos, el cual limitaba la cuantía a valores menores que $0.5\rho_b$. En las versiones recientes, del ACI318-19, se permite la redistribución de momentos siempre que la deformación neta en tracción del acero de refuerzo sea mayor que $1000\varepsilon_t$, sin exceder una redistribución del 20%. Este último requisito se ha mantenido desde las primeras versiones en que se admite una redistribución de momentos.

4.3 Casos estudiados

Los casos estudiados fueron referidos a los trabajos experimentales realizados por Noriega (2018) y Bagge et al. (2014). El primero de los casos, consiste en una viga de un tramo con un extremo empotrado y otro articulado, con carga puntual, desarrollado por Noriega (2018). Mientras que el segundo caso, fue una viga continua de dos tramos, con apoyos simples y carga puntual en cada tramo, desarrollado por Bagge et al. (2014).

Los estudios realizados consistieron en obtener resultados de modelos numéricos, basados en los modelos ensayados por los autores antes mencionados. Se realizó una comparación de los resultados experimentales, obtenidos por los autores referidos, contra los resultados obtenidos con el programa desarrollado en esta investigación. A continuación, se detallan los estudios realizados.

4.3.1. Viga de un tramo, caso experimental

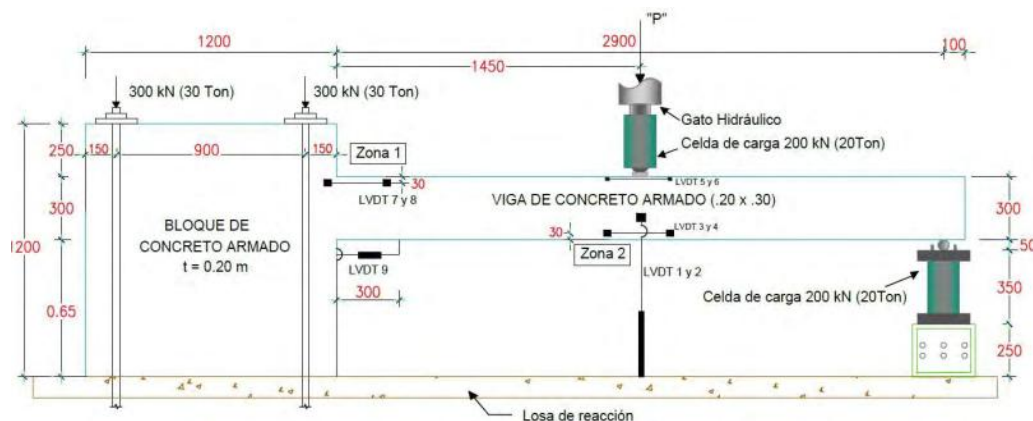
Se estudiaron los resultados de la redistribución de momentos, obtenidos experimentalmente por Noriega (2018), para el caso de una viga de un tramo, con un extremo empotrado y el otro articulado. La Figura 4.1 muestra el esquema del ensayo de una viga típica. Del total de cuatro casos investigados por este autor, se analizó uno de ellos, denominado espécimen VA-03. La longitud de la viga es 2900mm, la sección típica es de 200mm de base por

300mm de peralte. En el lecho inferior emplearon tres varillas y en el lecho superior dos varillas, en ambos casos el diámetro de las varillas es de 5/8". Los estribos son varillas de 6mm de diámetro, espaciadas a cada 100mm, en promedio.

La carga actuante es de tipo puntual, aplicada sobre una placa metálica de apoyo, que tiene un ancho aproximado de 100mm. Esta dimensión es supuesta, al no tener el dato preciso.

Figura 4.1

Esquema de ensayo de viga de un tramo empotrado-articulado.

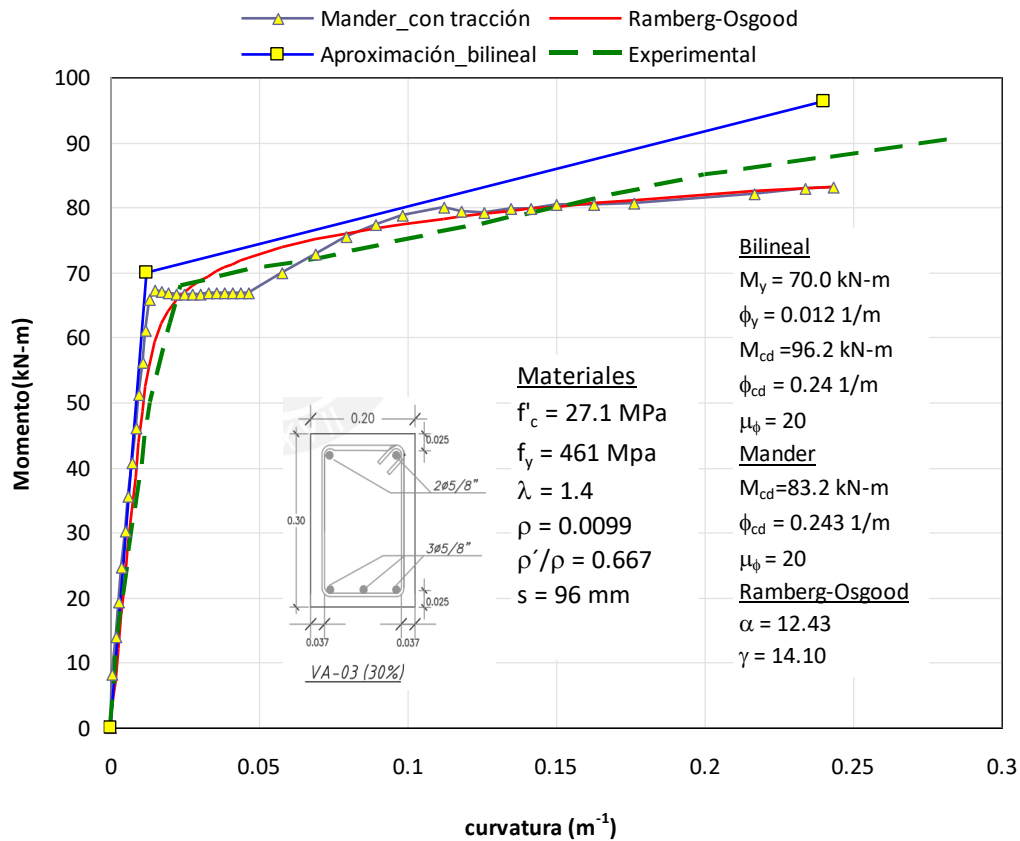


Nota: fuente adaptada de Noriega (2018)

La Figura 4.2 muestra el diagrama momento-curvatura de la sección VA-03. Con línea continua oscura y marcador de triángulo, se indica la curva obtenida con el modelo de Mander, para el que se consideró adicionalmente la tracción del concreto, y una aproximación bilineal se indica con línea continua de color azul y marcador de cuadrado. Se observa una buena aproximación en la región de comportamiento elástico lineal. Con línea roja continua, se indica la aproximación de tipo Ramberg-Osgood, la cual se obtuvo con base en la curva obtenida con el modelo de Mander. Por otra parte, la curva experimental se muestra con línea discontinua verde, que muestra una resistencia del orden de 90 KN-m, que difiere de los modelos numéricos en un orden de 8%.

Figura 4.2

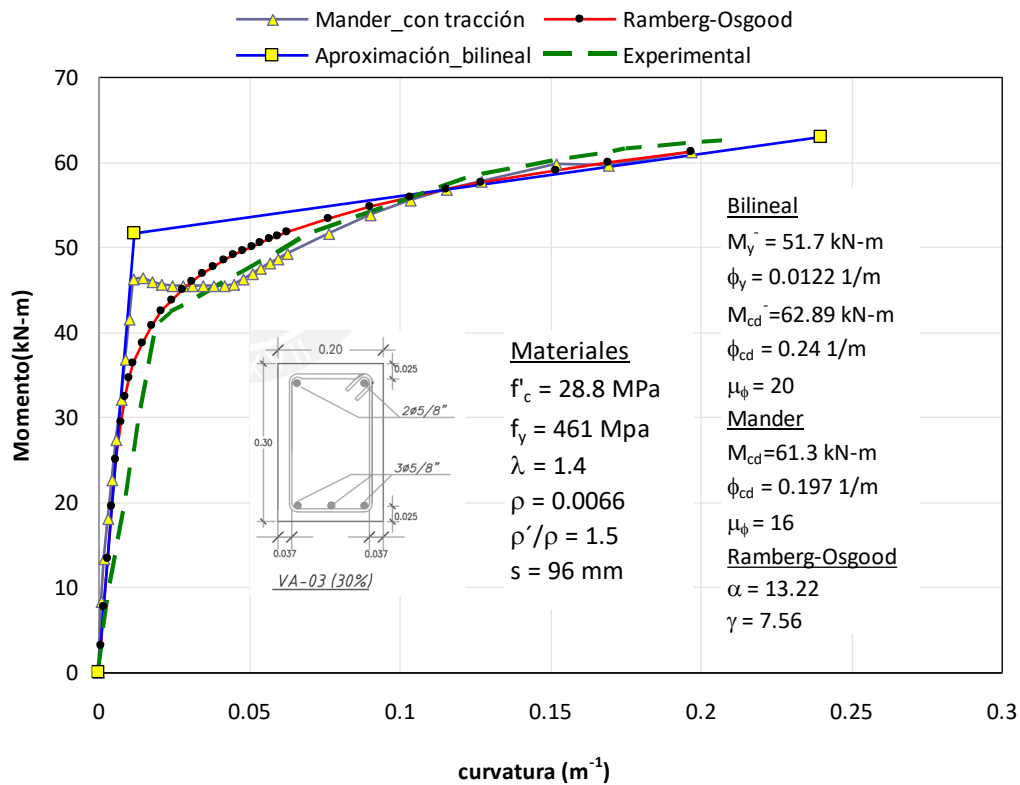
Diagrama momento-curvatura de la sección VA-03, para el momento positivo.



La Figura 4.3 muestra el diagrama momento-curvatura de la sección VA-03, para el momento negativo, las líneas y marcadores son iguales al diagrama anterior, con la diferencia que en el caso del modelo tipo Ramberg-Osgood se agregaron marcadores circulares oscuros. Por otra parte, la curva experimental, con línea discontinua verde, muestra una resistencia del orden de 62 KN-m, que difiere de los modelos numéricos en un orden de 1.4%.

Figura 4.3

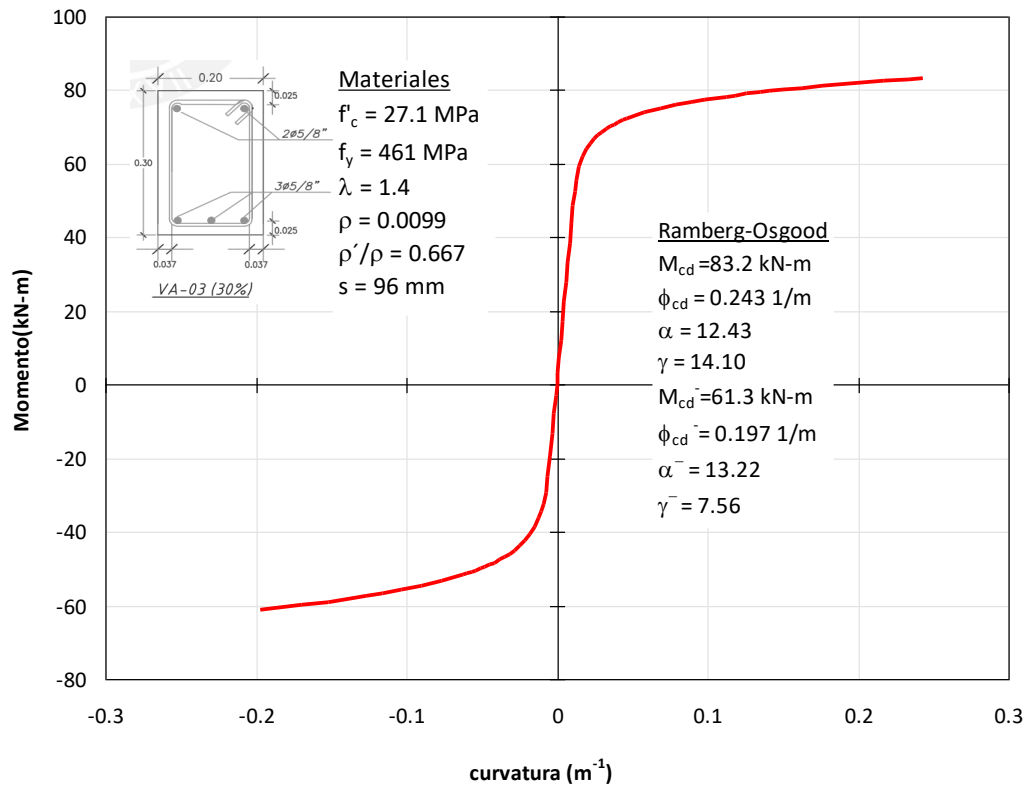
Diagrama momento-curvatura de la sección VA-03, para el momento negativo.



La Figura 4.4 muestra el diagrama momento-curvatura de tipo Ramberg-Osgood de la sección VA-03, para el momento negativo y positivo, indicado con línea continua de color rojo. El diagrama obtenido es asimétrico, en momento y en curvatura.

Figura 4.4

Diagrama momento-curvatura de la sección VA-03, tipo Ramberg-Osgood.



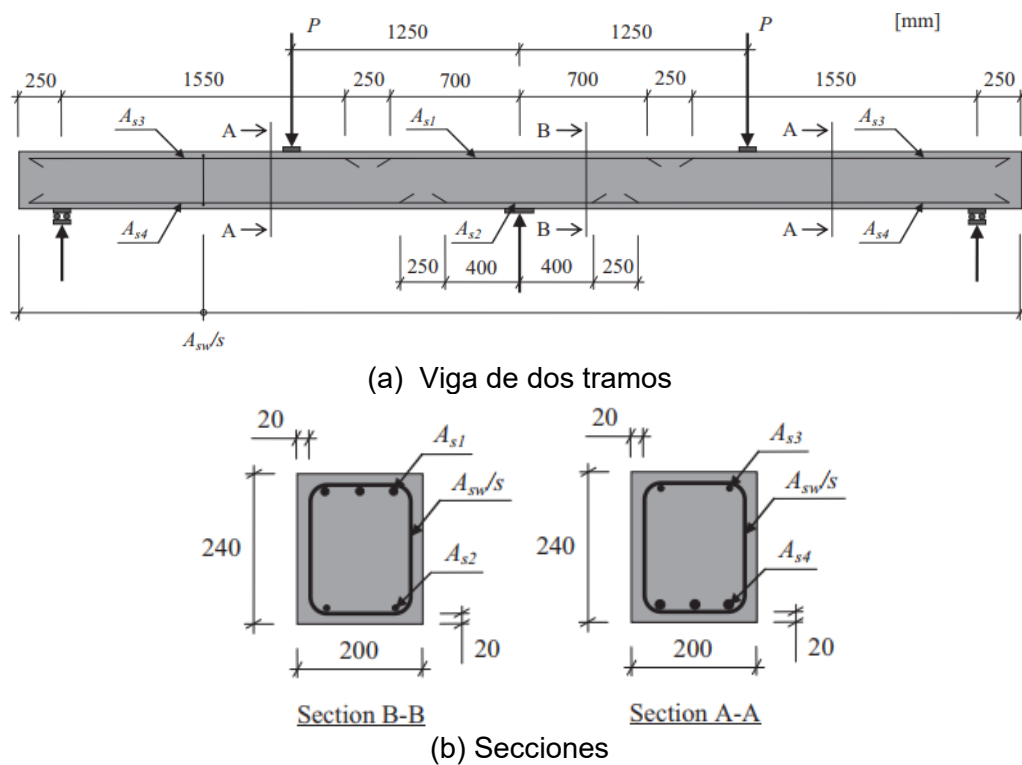
4.3.2. Viga continua de dos tramos, caso experimental

Los resultados obtenidos por Bagge et al. (2014), quienes estudiaron vigas continuas de dos tramos, reportan resultados de redistribución de momentos mayores que los admitidos por algunas normas de diseño, tales como el ACI318 y la E060. La Figura 4.5 muestra un esquema de vigas de dos tramos, con carga puntual aplicada en el centro de cada tramo de viga. Las secciones de vigas son de 200mm de base y 240mm de peralte. El caso de referencia que se estudió fue el B1. La Tabla 4.1 muestra las áreas del refuerzo empleado en el refuerzo longitudinal y transversal, además de los diámetros de varillas, correspondientes.

Tabla 4.1
Propiedades del refuerzo de la viga B1.

Caso	A_{s1}	A_{s2}	A_{s3}	A_{s4}	A_{sw}/s	$f_{cm}(\text{MPa})$
B1	151(3 $\varnothing$ 8mm)	101	101(2 $\varnothing$ 8mm)	942(3 $\varnothing$ 20mm)	1.34	36.4

Figura 4.5
Esquema y secciones de viga continua, de dos tramos, con carga puntual.



Nota: fuente adaptada de Bagge et al. (2014)

Las propiedades de los materiales empleados en el análisis son valores medios reportados en el artículo de Bagge et al. (2014). La Tabla 4.3 muestra las propiedades medidas del acero de refuerzo para distintos diámetros.

Tabla 4.2

Características del acero de refuerzo Bagge et al. (2014)

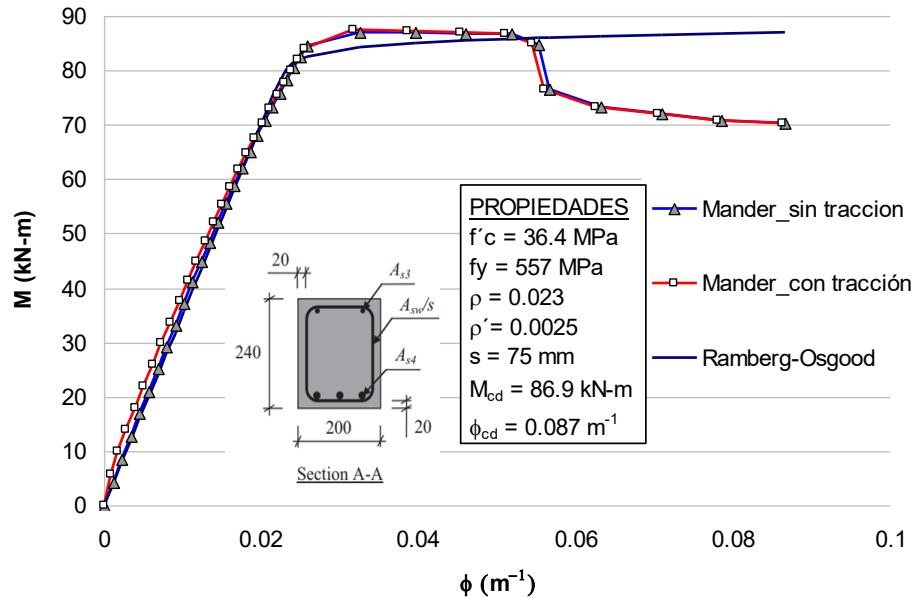
Φ (mm)	f_y (MPa)	f_t (MPa)	ϵ_{su} (%)
8	536	657	9.5
10	545	663	11.0
12	565	656	11.6
16	560	656	11.1
20	557	662	12.6

Nota: fuente adaptada de Bagge et al. (2014)

Los diagramas momento-curvatura de las secciones A-A y B-B se calcularon con base en los valores medios de las propiedades medidas de los materiales empleados en el ensayo, mencionadas anteriormente. La Figura 4.6 muestra el diagrama momento-curvatura de la sección A-A, para el momento positivo de la sección. La curva correspondiente al diagrama momento-curvatura, para el que se usó el modelo de Mander y se consideró la tracción del concreto, es indicada con línea continua y con marcador cuadrado. El caso sin tracción del concreto, se indica con línea continua y marcador de triángulo. Una aproximación de tipo Ramberg-Osgood es la que se indica con línea continua oscura. El caso con tracción del concreto presenta una mayor rigidez y resistencia, en la etapa de comportamiento elástico. En la etapa inelástica, el aporte de la resistencia en tracción del concreto es poco apreciable; la aproximación Ramberg-Osgood no detecta el deterioro de la rigidez y resistencia. En la leyenda se indica, además de las propiedades de los materiales, la resistencia creíble a flexión, M_{cd} , igual a 86.9 kN-n, calculada con datos experimentales a diferencia de la resistencia probable, M_{pr} , que se calcula con valores nominales de los materiales.

Figura 4.6

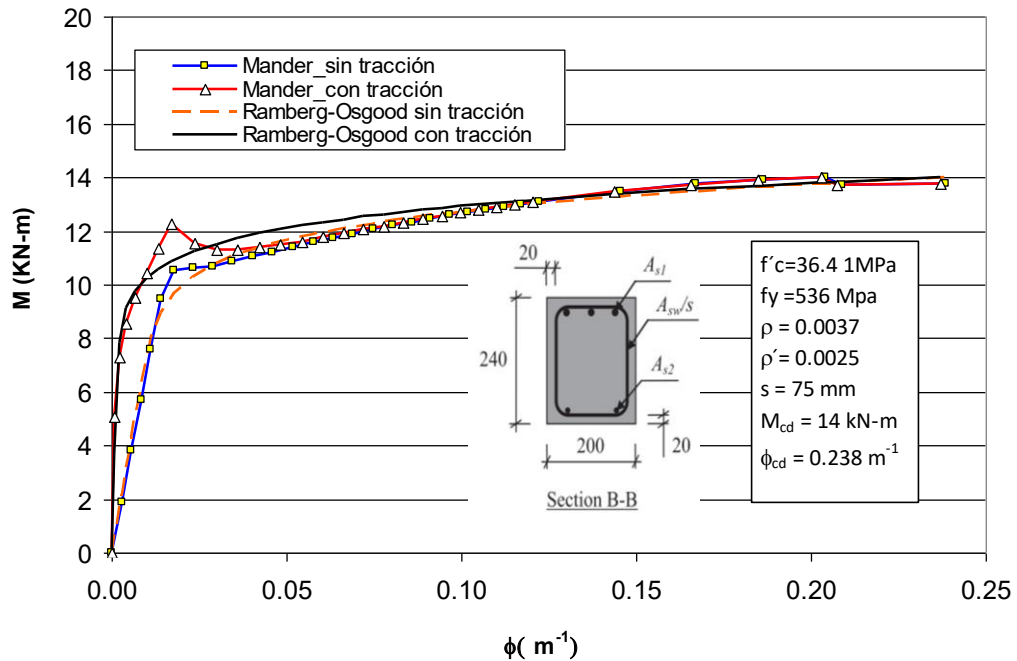
Diagrama momento-curvatura de la sección A-A para el momento positivo.



La Figura 4.7 muestra el diagrama momento-curvatura para la sección B-B, para el momento positivo, en el que se consideró en un caso el aporte de tracción del concreto y en otro caso sin aporte de la tracción del concreto. El caso con tracción del concreto se indica con línea continua, de color rojo, con símbolo de triángulo. Mientras que el caso sin tracción se indica con línea continua, de color azul, con símbolo cuadrado. Las correspondientes curvas aproximadas, de tipo Ramberg-Osgood, se indican con línea continua, de color negro, y línea discontinua, de color rojo; respectivamente.

Figura 4.7

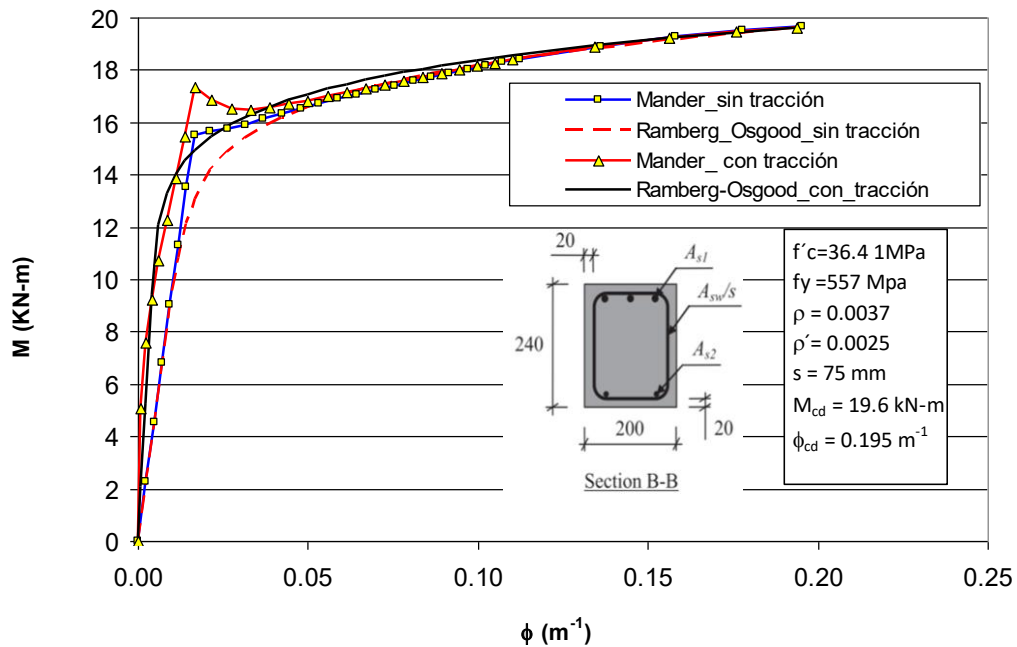
Diagrama momento-curvatura de la sección B-B para el momento positivo.



De forma análoga, la Figura 4.8 muestra el diagrama momento-curvatura para la sección B-B, para el momento negativo, en el que se consideró en un caso el aporte de tracción del concreto y en otro caso sin aporte de la tracción del concreto. El caso con tracción del concreto se indica con línea continua, de color rojo, con símbolo de triángulo. Mientras que el caso sin tracción se indica con línea continua, de color azul, con símbolo cuadrado. Las correspondientes curvas aproximadas, de tipo Ramberg-Osgood, se indican con línea continua, de color negro, y línea discontinua, de color rojo; respectivamente.

Figura 4.8

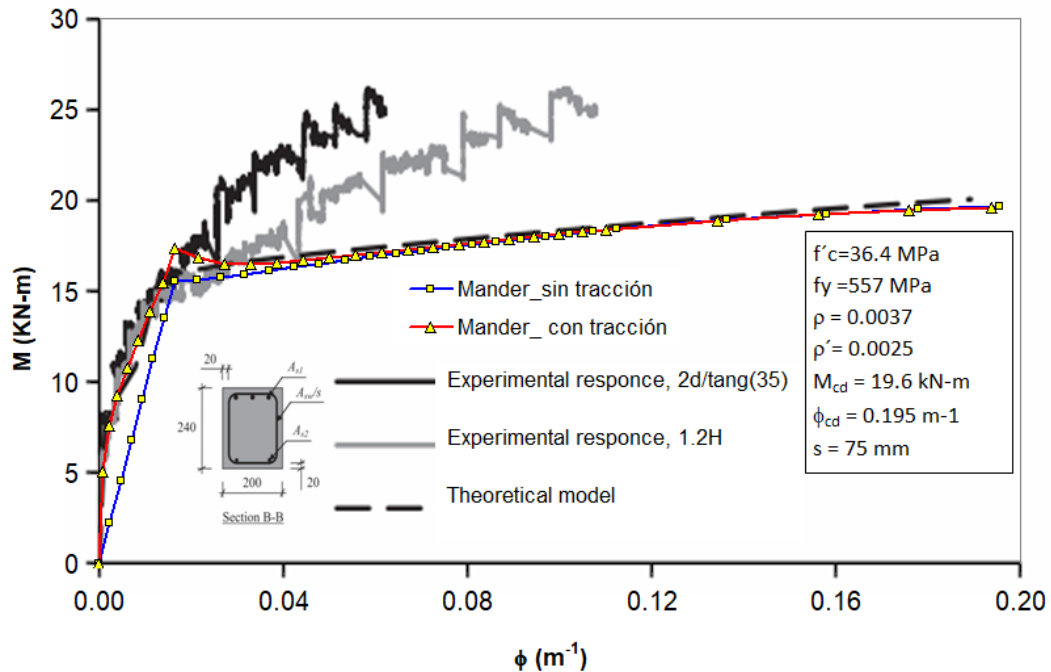
Diagrama momento-curvatura de la sección B-B, para el momento negativo.



La Figura 4.9 muestra una comparación del diagrama momento curvatura experimental y calculado. Las curvas calculadas con los modelos de Mander, fueron realizadas con base en la media de los datos experimentales reportados por Bagge et al. (2014). La curva calculada, considerando la tracción del concreto, con el modelo de Mander e indicada con línea continua y marcador de triángulo, muestra similitud con los resultados experimentales, indicados con línea continua gris, en la etapa de comportamiento elástico. Mientras que, en la etapa de comportamiento inelástico, la curva muestra una menor pendiente y menor resistencia, respecto de la curva experimental. Además, la curva calculada, sin considerar la tracción del concreto, e indicada con línea continua y marcador circular, muestra una recta secante en el intervalo de comportamiento elástico, mientras que en la etapa inelástica la pendiente y la resistencia son similares al caso en el que se considera la tracción del concreto. Sin embargo, ambos casos coinciden con el diagrama momento curvatura teórico, calculado por Bagge et al. (2014) e indicado con línea discontinua.

Figura 4.9

Diagrama momento-curvatura de la sección B-B, para el momento negativo, comparación con resultados experimentales, Bagge et al (2014), y calculados.

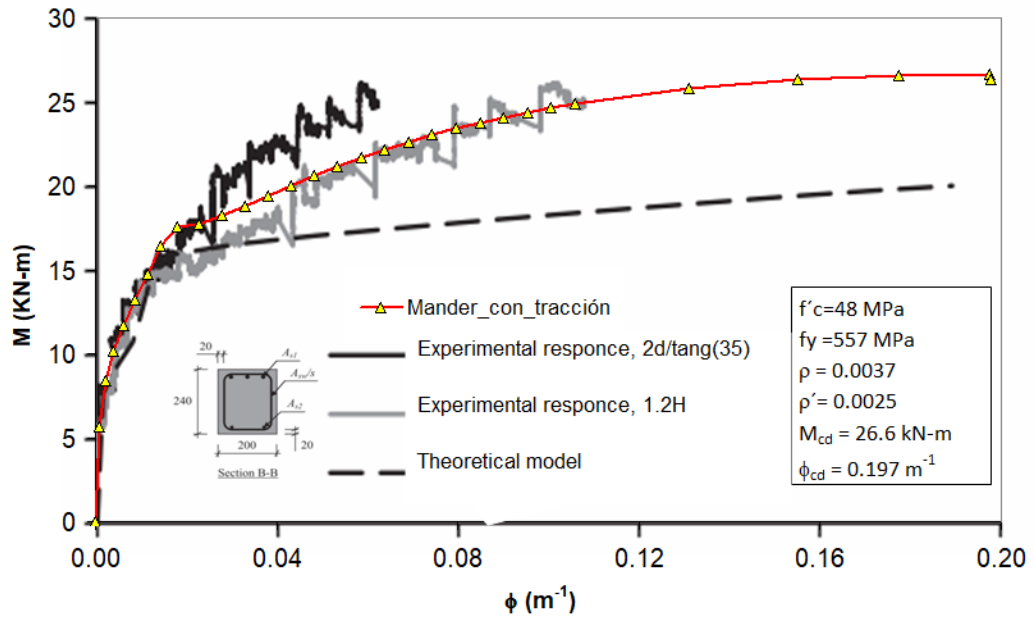


La Figura 4.10 muestra la comparación de los resultados experimentales obtenido por Bagge et al. (2014), indicado con línea continua gris, contra un modelo de Mander, en el que se considera la tracción del concreto. En este caso, se ha considerado una resistencia a compresión del concreto mayor que la media señalada en la publicación, debido a que la resistencia en compresión del concreto con que se fabricó el espécimen pudo ser mayor que el valor promedio que se consigna en el reporte, se ha supuesto arbitrariamente un incremento de la resistencia del concreto, del orden del 32%, lo que lleva a obtener una resistencia a compresión del concreto igual a 48 MPa. Este incremento de la resistencia del concreto lleva a un incremento de la rigidez poselástica y, también, de la resistencia a flexión. Se sabe que la tracción del concreto sólo influye en la etapa de comportamiento elástico, en la etapa de comportamiento inelástico la inclusión de la tracción del concreto no influye. La curva calculada con el modelo de Mander y con la tracción del concreto, tiende a la forma de la curva experimental. Sin embargo, no se tienen la información precisa sobre la

resistencia del concreto del espécimen correspondiente, para el día en que se realizó el ensayo.

Figura 4.10

Diagrama momento-curvatura de la sección B-B, para el momento negativo, comparación con resultados experimentales, Bagge et al. (2014), y calculados.



Las propiedades reales del concreto no necesariamente son iguales a los valores medios reportados por Bagge et al. (2014)

La Figura 4.11 muestra la aproximación Ramberg-Osgood para el diagrama momento-curvatura de la misma sección A-A, para el momento positivo y negativo, sin considerar la tracción del concreto. El diagrama momento curvatura, de la sección para momento positivo y negativo, resulta ser asimétrico.

La figura 4.12 muestra el diagrama momento-curvatura de la sección B-B, para el momento positivo y negativo, sin considerar la tracción del concreto.

Figura 4. 11

Modelo Ramberg-Osgood del diagrama momento curvatura de la sección A-A para el momento positivo y negativo, sin tracción del concreto.

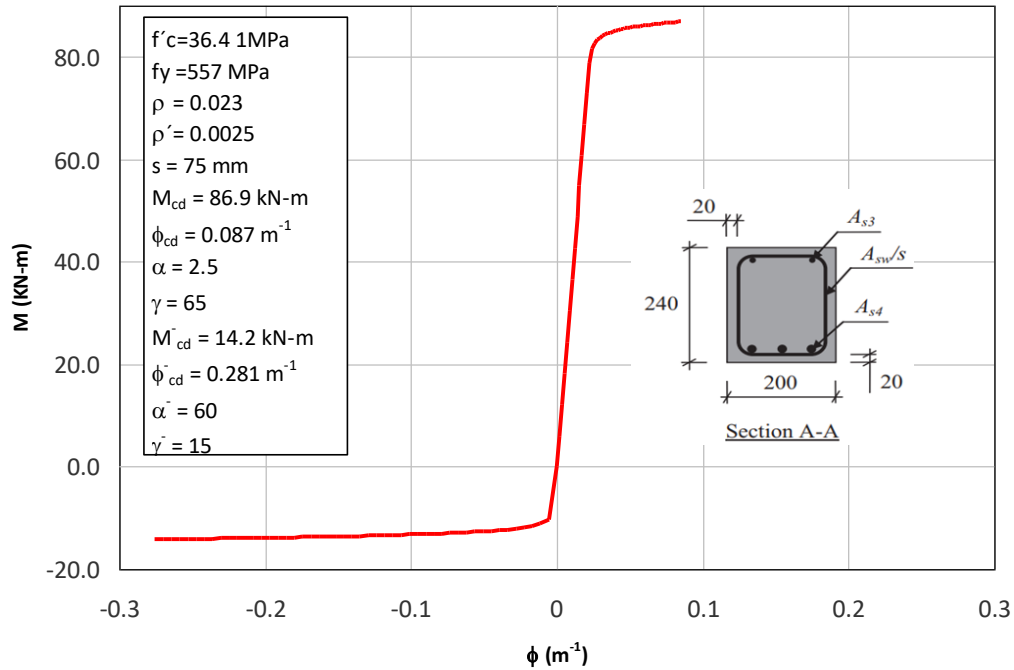
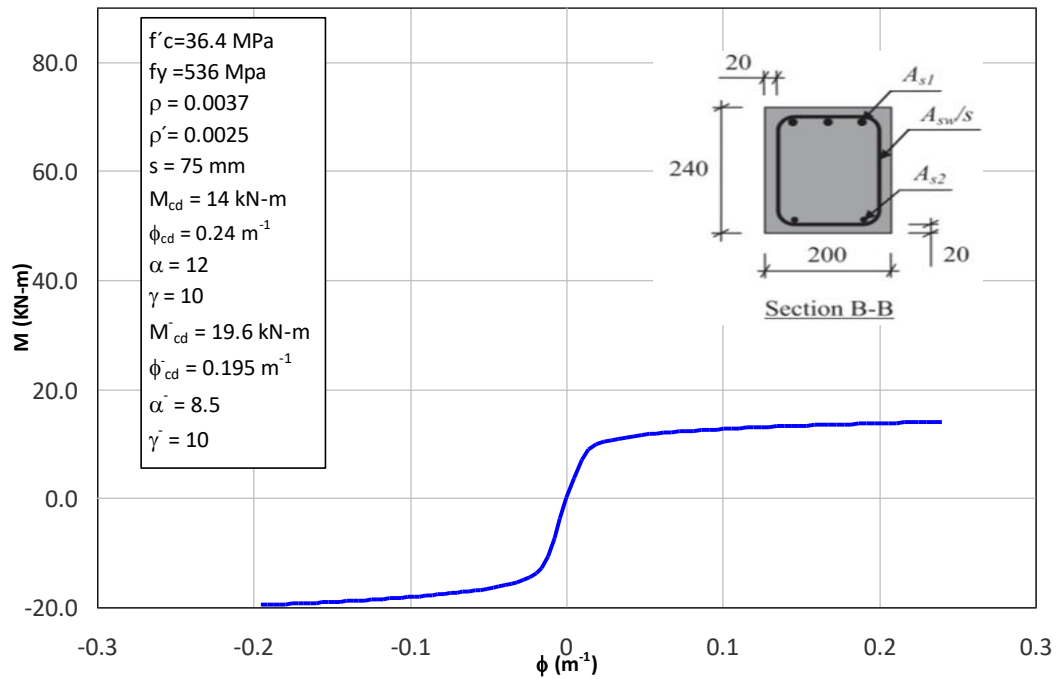


Figura 4. 12

Modelo Ramberg-Osgood del diagrama momento curvatura de la sección B-B para el momento positivo y negativo, sin tracción del concreto.



Con la finalidad de estudiar el efecto de la sobrerresistencia de los materiales, los diagramas momento curvatura, anteriormente mostrados, fueron calculados con valores para las propiedades de los materiales mayores que la media reportada por Bagge et al. (2014).

4.4 Modelos numéricos empleados para el análisis no lineal

La Figura 4.13.a muestra la viga de dos tramos, de longitud igual a 2500mm por tramo, con subdivisión en dovelas de tamaño variable. Cada tramo tiene dos zonas, con sección A y B, las que están referidas al tipo de sección, con armado distinto. En color gris claro está la zona con sección tipo A y en color gris oscuro la sección tipo B. La zona definida con la sección tipo A tiene 6 elementos de tamaño variable y la zona tipo B tiene 5 elementos de tamaño variable, en ambos tramos de la viga continua. La mayor subdivisión se concentra en las regiones donde las fuerzas internas tienen una mayor variación.

La carga puntual, representada por una carga distribuida, Δq , en un ancho relativamente pequeño, de 75mm, que viene a ser la dimensión de la placa con que se aplica la carga. El centro de la carga aplicada está ubicado en el centro de cada tramo, a 1250mm respecto del extremo de apoyo simple.

Los apoyos se modelan como puntuales. La Figura 4.13.b, muestra la longitud de cada dovela o subdivisiones de las vigas en cada tramo.

Además del modelo de dos tramos, se ha realizado un modelo de tres tramos, donde el tramo central representa el ancho del apoyo, de 75mm de ancho, idealizado como dos apoyos simples, ver Figura 4.13.c. El tramo central tiene seis elementos, con sección B, y los tramos adyacentes tienen 6 elementos de sección A y 2 elementos de sección B.

Diagrama de un elemento finito de 2500 mm de longitud, dividido en Sección A (6 elementos) y Sección B (5 elementos). Se muestra la aplicación de una carga puntual Δq y la distancia de 75 mm entre la carga y el elemento central de la sección B.

Diagrama de un elemento finito de 12 elementos con un elemento de carga triangular. El elemento está dividido en Sección A (6 elementos) y Sección B (5 elementos). Se muestran las dimensiones de los elementos y la carga triangular.

Sección A: 6 elementos. Sección B: 5 elementos. Sección B: 5 elementos. Sección A: 6 elementos.

Dimensiones de los elementos (mm): 362.5, 730, 120, 550, 580, 82.5, 580, 550, 120, 730, 362.5.

Dimensiones de los elementos (mm): 37.5, 37.5, 82.5, 25, 6.5, 6, 25, 6.5, 37.5, 37.5.

Carga triangular: Δq .

$$\eta\% = \frac{M_{elástico} - M_{inelástico}}{M_{elástico}} \times 100 \quad (4.1)$$

$M_{inelástico}$, es el momento inelástico en la misma sección

El momento inelástico, $M_{inelástico}$, calculado se obtiene mediante el análisis no lineal. En este caso se emplearon dos modelos para el análisis no lineal, con dos tramos y otro con tres tramos. De forma similar el momento elástico, $M_{elástico}$, se obtiene mediante análisis lineal elástico. Análogamente, se emplearon dos modelos elásticos con dos y tres tramos.

La Figura 4.14 muestra la redistribución experimental para el momento negativo, en la sección del apoyo central, caso B1, con línea continua y negra. La redistribución experimental, para este caso, es del orden del 70%. La misma que fue comparada contra resultados de modelos de dos tramos.

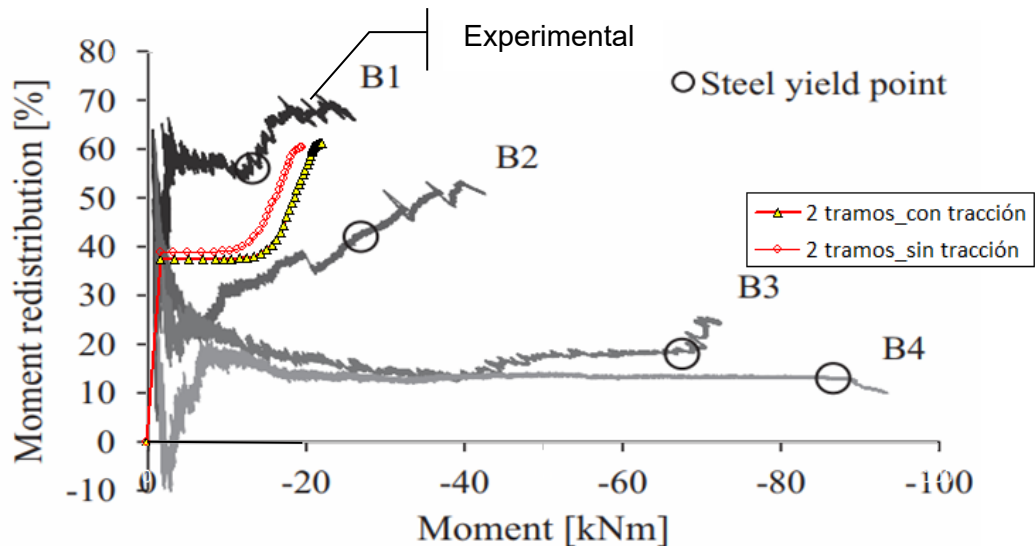
En el modelo numérico fueron considerados, para el diagrama momento curvatura de las secciones, dos casos: uno con aporte de la resistencia en tracción del concreto, indicado en línea continua y símbolo de triángulo, y otro sin el aporte de la resistencia a tracción, indicado con línea continua y símbolo de rombo. Además, se emplearon en ambos casos, los valores medios de las propiedades de materiales, reportados por Bagge et al. (2014). Los resultados calculados, con y sin tracción del concreto, muestran menor redistribución de momentos, del orden del 60% en ambos casos, con respecto a los resultados experimentales, del orden de 70%.

El considerar la resistencia a tracción del concreto, desplaza la curva calculada de redistribución hacia la derecha; aún que el desplazamiento mencionado es aparentemente poco significativo, en ambos casos la redistribución final llega a ser del mismo orden, 60%; sin embargo, para valores anteriores cercanos a la carga última, la redistribución de momentos, con el modelo sin tracción del concreto es del orden de 12% mayores que el caso con tracción.

Para el análisis no lineal, también se emplearon modelos de tres tramos. Sin embargo, para calcular el coeficiente de redistribución de momento, esta se calculó con respecto al momento obtenido mediante dos modelos elásticos, uno de dos tramos y el otro de tres tramos. Además, para el modelo de tres tramos se consideró la resistencia a tracción del concreto.

Figura 4.14

Redistribución de momentos con modelo de vigas de dos tramos vs experimental.



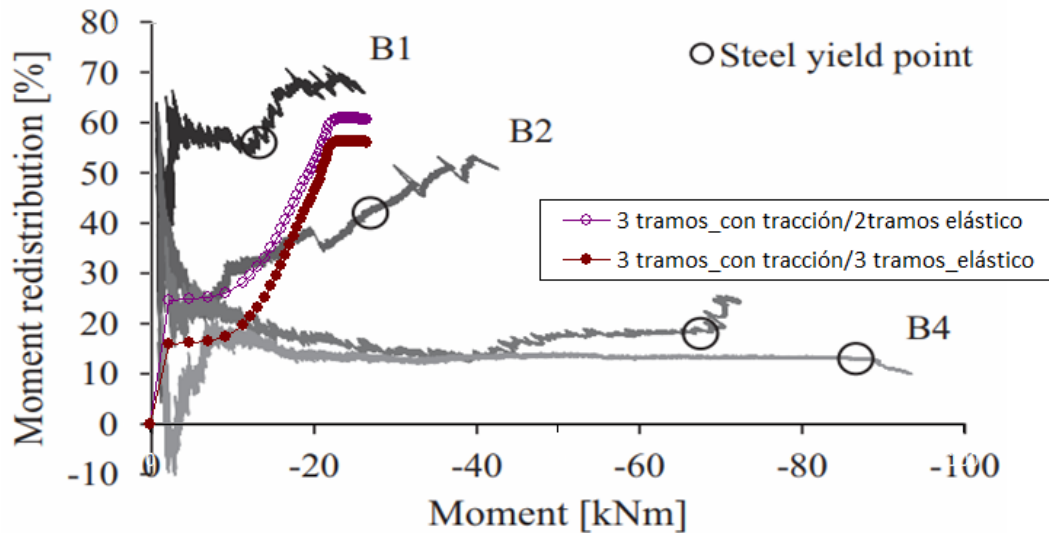
Nota: fuente adaptada de Bagge et al. (2014)

La Figura 4.15 muestra la redistribución de momento negativo, en el apoyo central, para el caso B1. Los resultados experimentales muestran una mayor redistribución, antes indicada, que los casos calculados, de orden del 60%.

La redistribución de momento negativo, en la sección del apoyo central, con respecto al momento elástico de una viga de dos tramos, 61%, es mayor que en el caso de considerar el momento elástico de una viga de tres tramos, 56%. Sin embargo, esta diferencia no es significativa. Incluso, en el modelo no lineal de tres tramos, la sección del apoyo central llega a desarrollar un momento negativo, 26.6kN-m, similar al reportado en el ensayo, por Bagge et al. (2014), igual a 25.1 kN-m, que representa un error menor que 6%.

Figura 4.15

Redistribución de momentos con modelo de vigas de tres tramos vs experimental.



Nota: fuente adaptada de Bagge et al. (2014)

En los casos estudiados, la redistribución de momentos es siempre menor que lo obtenido de forma experimental, menor que 14%, lo que representan resultados del lado de la seguridad. Por otro lado, en el caso B1, los resultados calculados y experimentales muestran redistribución de momentos mayores que la redistribución permitida por el ACI318 y la E060, de 20% como máximo. Sin embargo, hay casos en los que la redistribución puede ser menor que 20%.

4.5.1. Redistribución de momentos según el tipo de carga

Se realiza la redistribución de momento por carga puntual y carga distribuida constante. Se ha considerado como referencia los ensayos realizados por Noriega (2018); los resultados validados con la carga puntual se extendieron a resultados numéricos con carga distribuida.

4.5.1.1. Viga de un tramo empotrada-articulada con carga puntual.

Los cuatro especímenes investigados por Noriega (2018) fueron vigas de sección constante, de un tramo, con un extremo empotrado y el otro articulado. El área de acero de refuerzo de las vigas se mantuvo constante en toda la longitud de las mismas.

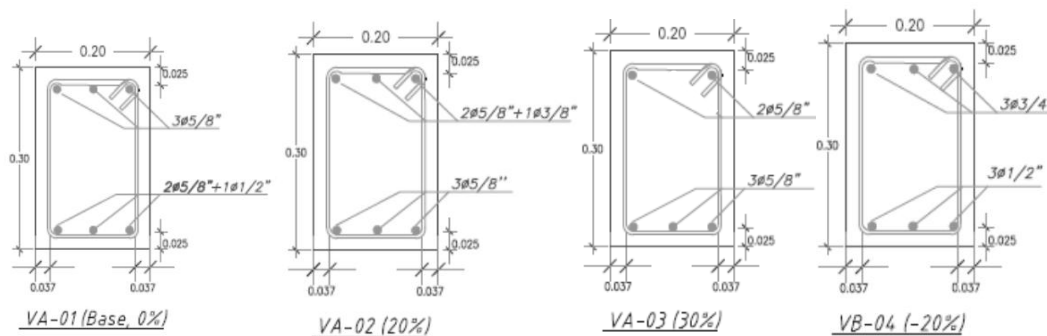
La viga de referencia, VA-01, fue diseñada para soportar una carga puntual en el claro central de la viga, sin considerar la redistribución. El acero de refuerzo de la sección de esta viga tenía en el lecho superior tres varillas de 5/8" y en el lecho inferior dos varillas de 5/8" más una varilla de 1/2".

La viga diseñada con 20% de redistribución, VA-02, en el lecho superior tenía dos varillas de 5/8" más una de 3/8" y en el lecho inferior tres varillas de 5/8".

La viga diseñada con 30% de redistribución, VA-03, en el lecho superior tenía dos varillas de 5/8" y en el lecho inferior tres varillas de 5/8".

La viga diseñada con -20% de redistribución, para el momento positivo de la sección en central, VA-04, en el lecho superior tenía tres varillas de 3/4" y en el lecho inferior tres varillas de 1/2". Ver Figura 4.16.

Figura 4.16
Secciones de vigas de un tramo.



Nota: fuente adaptada de Noriega (2018)

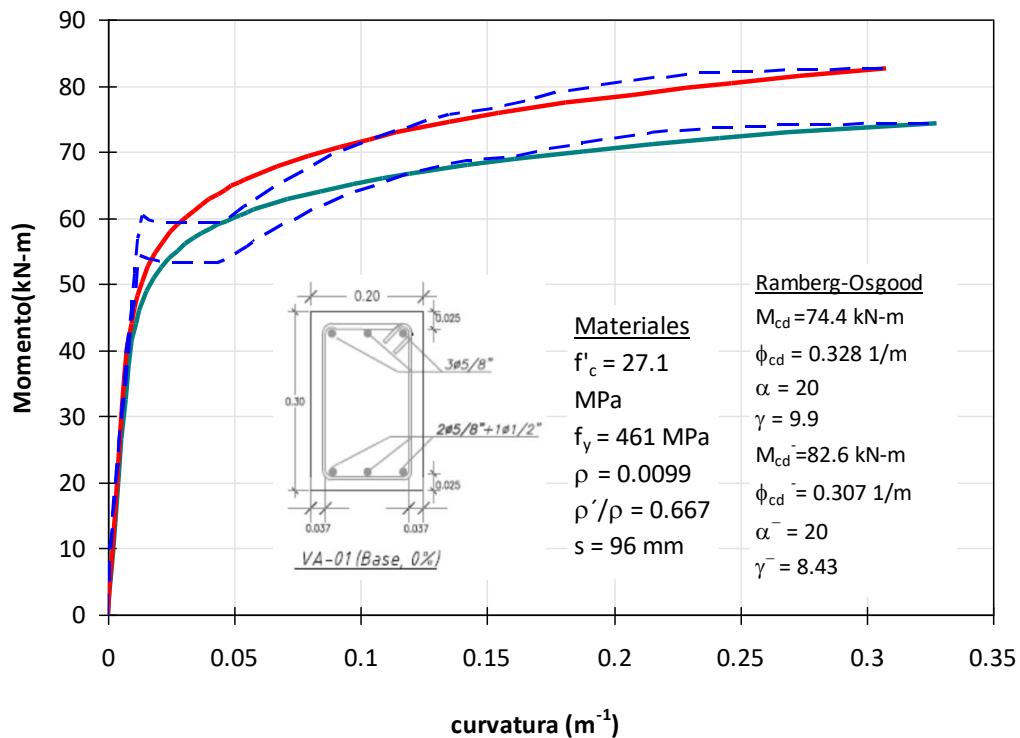
Los diagramas momento-curvatura para cada sección fueron calculados con el modelo de Mander, para el concreto confinado y no confinado. Se empleó el modelo de Dodd-Restrepo para representar el comportamiento del acero de

refuerzo. Las propiedades básicas empleadas, la resistencia a compresión del concreto, f'_c , el esfuerzo de fluencia del acero, f_y , para modelar el acero y el concreto; respectivamente, fueron adaptadas de la investigación de Noriega (2018). Se consideró el aporte de la tracción del concreto.

La curva obtenida se aproximó a un modelo tipo Ramberg-Osgood, el cual se emplea en el programa de análisis no lineal. A continuación, se muestran los diagramas momento-curvatura de las secciones antes mencionadas.

La Figura 4.17 muestra el diagrama momento-curvatura, para el momento positivo y negativo; se ha considerado el aporte de tracción del concreto. El momento positivo, indicado con línea discontinua, de color azul, y su correspondiente aproximación de tipo Ramberg-Osgood, indicada con línea continua, de color rojo. Además, el momento negativo, indicado con línea discontinua, de color azul, y su correspondiente aproximación, tipo Ramberg-Osgood, indicada con línea continua, de color verde oscuro.

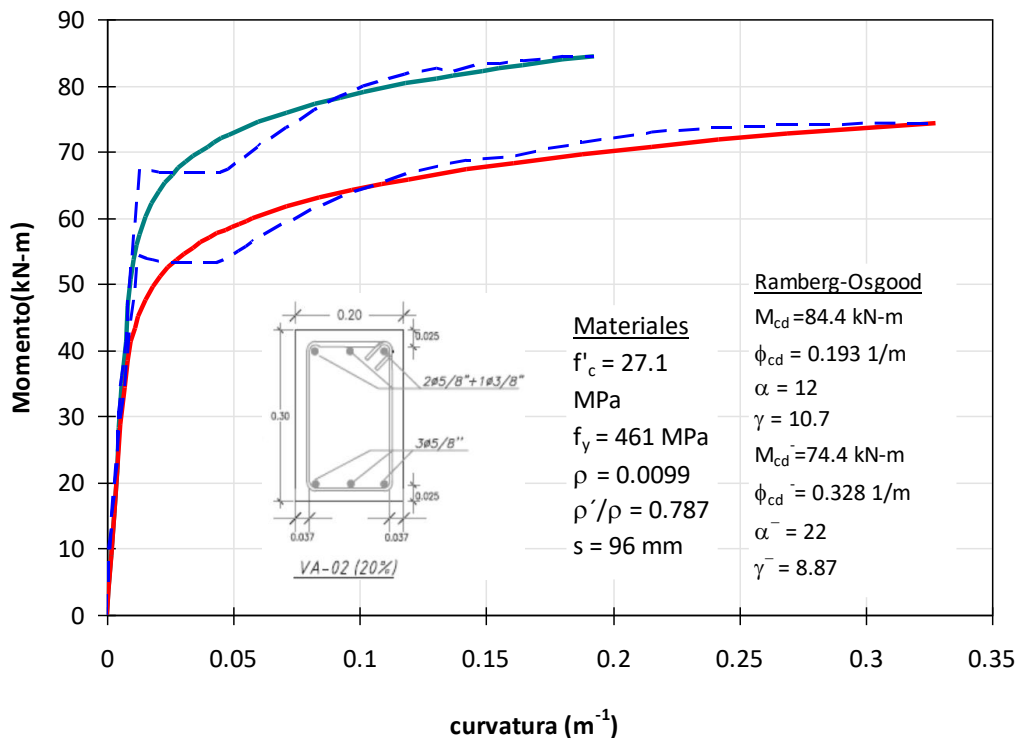
Figura 4.17
Diagrama momento-curvatura sección de viga VA-01.



La Figura 4.18 muestra diagramas momento-curvatura para la viga VA-02. Para el momento positivo y negativo, se ha considerado el aporte de tracción del concreto. El momento positivo, indicado con línea discontinua, de color azul, y su correspondiente aproximación de tipo Ramberg-Osgood, indicada con línea continua, de color rojo. Además, el momento negativo, indicado con línea discontinua, de color azul, y su correspondiente aproximación, tipo Ramberg-Osgood, indicada con línea continua, de color, verde oscuro. El momento creíble positivo, M_{cd} , es igual a 84.4 kN-m y la curvatura correspondiente es 0.193 1/m. El momento creíble negativo, M_{cd} , es igual a 74.4 kN-m y la curvatura correspondiente es 0.328 1/m. Cabe notar que la capacidad de curvatura inelástica para el momento negativo es mayor que para el caso de momento positivo.

Figura 4.18

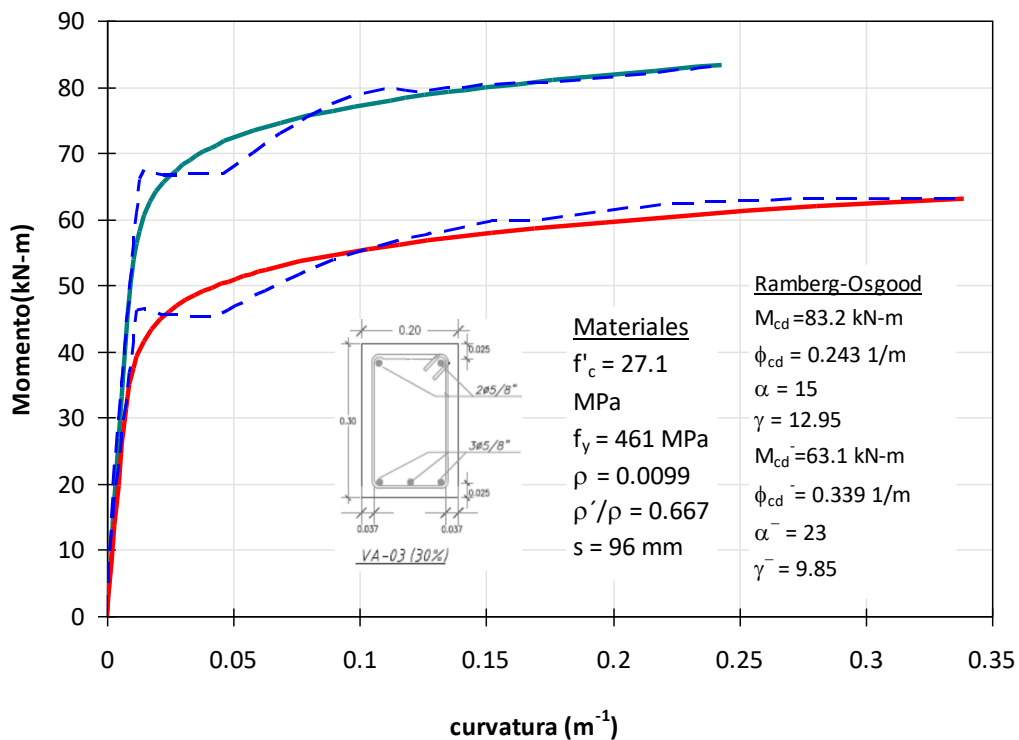
Diagrama momento-curvatura sección de viga VA-02



La Figura 4.19 muestra diagramas momento-curvatura para la viga VA-03. Para el momento positivo y negativo se ha considerado el aporte de tracción del concreto. El momento positivo, indicado con línea discontinua, de color azul, y su correspondiente aproximación de tipo Ramberg-Osgood, indicada con línea continua, de color rojo. Además, el momento negativo, indicado con línea discontinua, de color azul, y su correspondiente aproximación, tipo Ramberg-Osgood, indicada con línea continua, de color, verde oscuro. El momento creíble positivo, M_{cd} , es igual a 83.2 kN-m y la curvatura correspondiente es 0.243 1/m. El momento creíble negativo, M_{cd} , es igual a 63.1 kN-m y la curvatura correspondiente es 0.339 1/m. Cabe notar que la capacidad de curvatura inelástica para el momento negativo es mayor que para el caso de momento positivo.

Figura 4.19

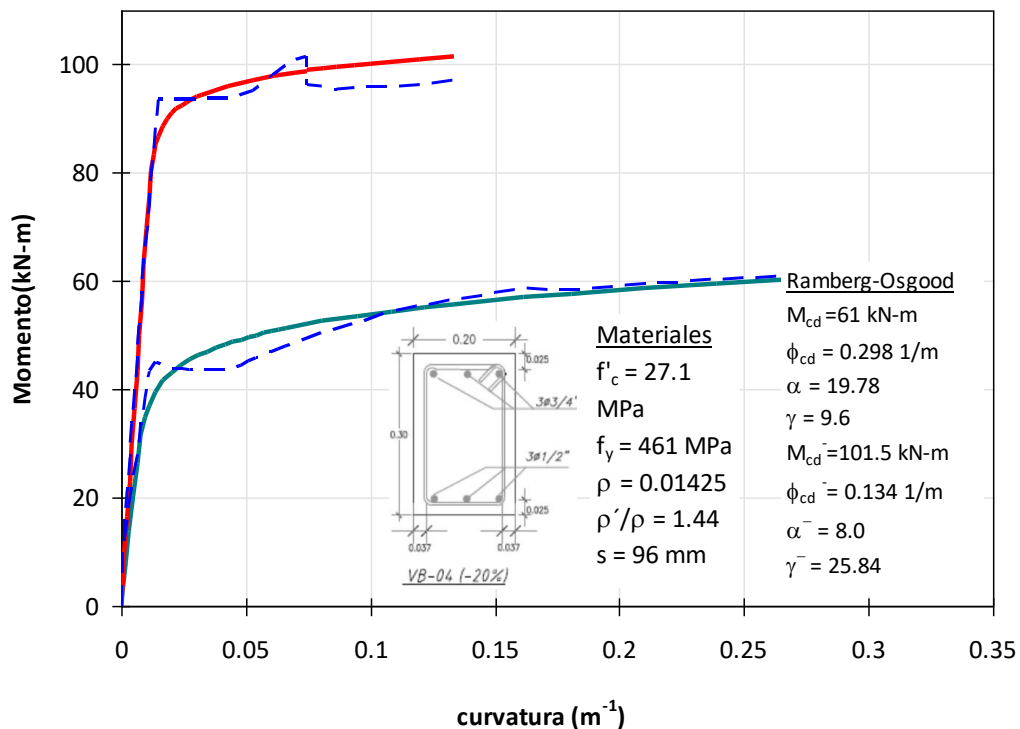
Diagrama momento-curvatura sección de viga VA-03.



La Figura 4.20 muestra diagramas momento-curvatura para la viga VA-04. Para el momento positivo y negativo se ha considerado el aporte de tracción del concreto. El momento positivo, indicado con línea discontinua, de color azul, y su correspondiente aproximación de tipo Ramberg-Osgood, indicada con línea continua, de color rojo. Además, el momento negativo, indicado con línea discontinua, de color azul, y su correspondiente aproximación, tipo Ramberg-Osgood, indicada con línea continua, de color, verde oscuro. El momento creíble positivo, M_{cd} , es igual a 61 kN-m y la curvatura correspondiente es 0.2981/m. El momento creíble negativo, M_{cd} , es igual a 101.5 kN-m y la curvatura correspondiente es 0.134 1/m. Cabe notar que la capacidad de curvatura inelástica para el momento positivo es mayor que para el caso de momento negativo, contrario a los casos anteriores.

Figura 4.20

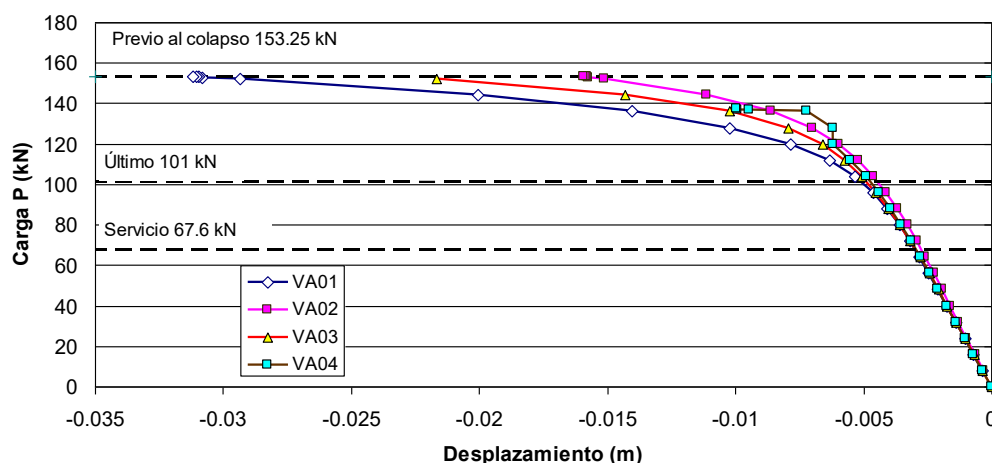
Diagrama momento-curvatura sección de viga VA-03.



Se realizó la comparación de las curvas de capacidad, carga – desplazamiento, de las vigas en estudio, con carga puntual. Los resultados mostraron que las vigas con redistribución de momento, VA02 y VA03, tienen igual capacidad de carga que la viga original, VA01, sin redistribución. La Figura 4.21, muestra la comparación de las curvas de capacidad de las vigas en estudio. Hasta el nivel de carga de servicio, 67.6 kN, se tiene igual rigidez en todos los casos. Para el nivel de carga última, 101 kN, las vigas muestran un nivel de desplazamiento similar, sin que se aprecie diferencias de desplazamiento notables. Para el caso en el que las secciones alcanzan un nivel de carga, denominada previo al colapso, 153.25 kN, la diferencia de desplazamientos es apreciable. Las vigas con redistribución de momentos, VA02 y VA03, muestran desplazamientos menores que 60% y 30% del desplazamiento de la viga VA01 (0.031m), respectivamente. La viga VA04, muestra una carga previa al colapso igual a 140 kN, menor que 153.25 kN; sin embargo, este caso no sigue una redistribución de momento similar a los casos anteriores, contrariamente busca una redistribución del momento positivo. En todos los casos la capacidad de carga previa al colapso es mayor que la capacidad asociada a la resistencia nominal por flexión, del orden de 112.2 kN.

Figura 4.21

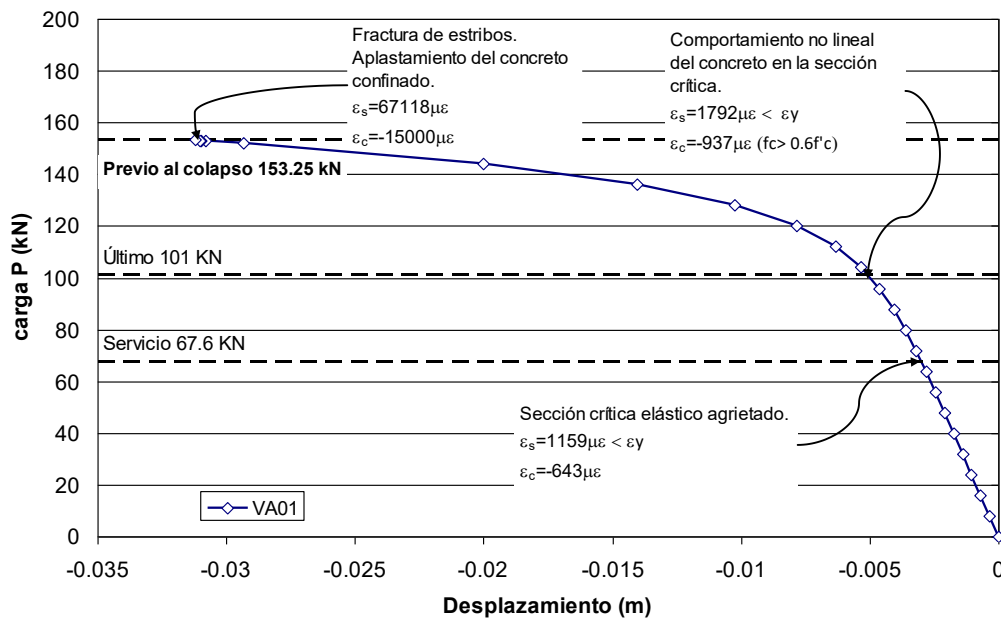
Diagrama carga-desplazamiento para las vigas de un tramo.



La Figura 4.22 muestra el estado del comportamiento de la viga VA01, para el nivel de carga de servicio, 67.6 kN. La sección crítica, ubicada en la zona de empotramiento, presenta un comportamiento de sección elástica agrietada, con deformaciones del concreto de recubrimiento del orden de $-643\mu\epsilon$, la deformación del acero en tracción es $1159\mu\epsilon$, menor que la deformación de fluencia, $2300\mu\epsilon$. Para el estado de carga última, 101 kN, el concreto en compresión tiene comportamiento no lineal, sin llegar al aplastamiento, $-937\mu\epsilon$, el acero en tracción tiene una deformación igual a $1792\mu\epsilon$, menor que el de fluencia. Para el nivel de carga previo al colapso, 153.25 kN, ocurre la fractura de los estribos asociada al aplastamiento del concreto confinado; la deformación del concreto en compresión llegó a $-15000\mu\epsilon$, el acero en tracción tiene una deformación de tracción igual a $67118\mu\epsilon$.

Figura 4.22

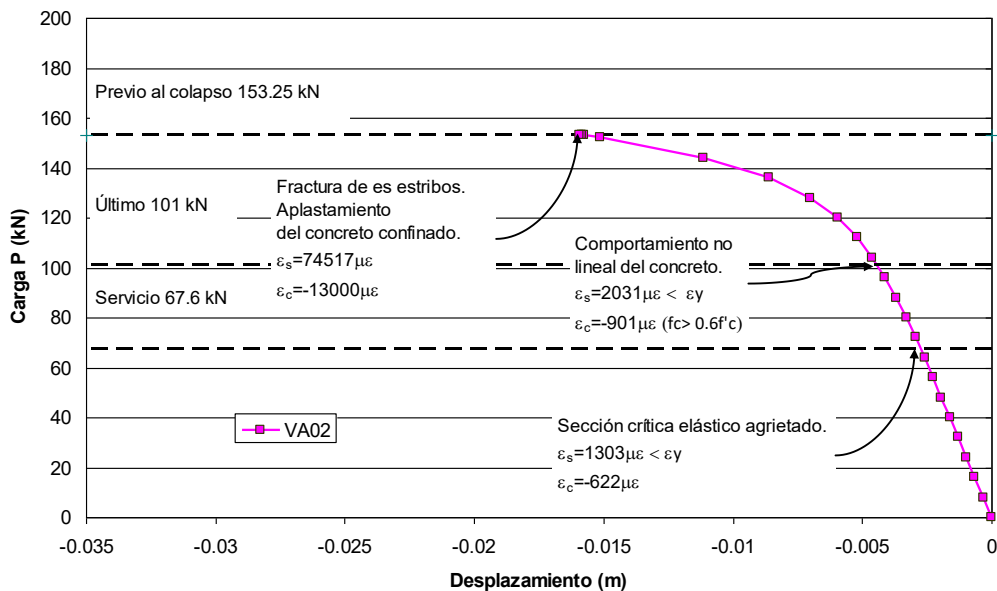
Diagrama carga-desplazamiento para las vigas de un tramo.



La Figura 4.23 muestra el estado del comportamiento de la viga VA02, para el nivel de carga de servicio, 67.6 kN. La sección crítica, ubicada en la zona de empotramiento, presenta un comportamiento de sección elástica agrietada, con deformaciones del concreto de recubrimiento del orden de $-622\mu\epsilon$, la deformación del acero en tracción es $1303\mu\epsilon$, menor que la deformación de fluencia, $2300\mu\epsilon$. Para el estado de carga última, 101 kN, el concreto en compresión tiene comportamiento no lineal, sin llegar al aplastamiento, $-901\mu\epsilon$, el acero en tracción tiene una deformación igual a $2031\mu\epsilon$, menor que la de fluencia. Para el nivel de carga previo al colapso, 153.25 kN, ocurre la fractura de los estribos asociada al aplastamiento del concreto confinado; la deformación del concreto en compresión llegó a $-13000\mu\epsilon$, el acero en tracción tiene una deformación de tracción igual a $74517\mu\epsilon$.

Figura 4.23

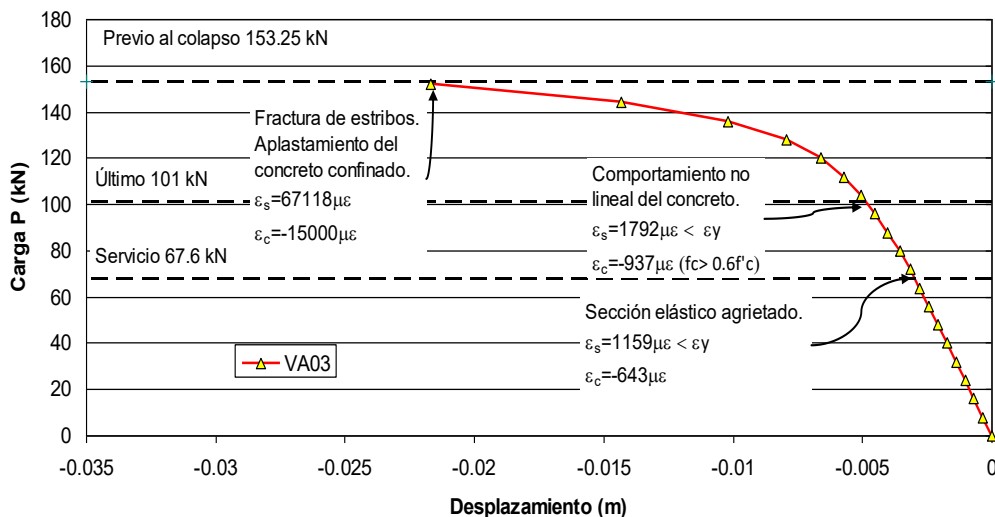
Diagrama carga-desplazamiento para la viga de un tramo VA-02.



La Figura 4.24 muestra el estado del comportamiento de la viga VA03, para el nivel de carga de servicio, 67.6 kN. La sección crítica, ubicada en la zona de empotramiento, presenta un comportamiento de sección elástica agrietada, con deformaciones del concreto de recubrimiento del orden de $-643\mu\epsilon$, la deformación del acero en tracción es $1159\mu\epsilon$, menor que la deformación de fluencia, $2300\mu\epsilon$. Para el estado de carga última, 101 kN, el concreto en compresión tiene comportamiento no lineal, sin llegar al aplastamiento, $-937\mu\epsilon$, el acero en tracción tiene una deformación igual a $1792\mu\epsilon$, menor que el de fluencia. Para el nivel de carga previo al colapso, 153.25 kN, ocurre la fractura de los estribos asociada al aplastamiento del concreto confinado; la deformación del concreto en compresión llegó a $-15000\mu\epsilon$, el acero en tracción tiene una deformación de tracción igual a $67118\mu\epsilon$.

Figura 4.24

Diagrama carga-desplazamiento para la viga de un tramo VA-03.



La Figura 4.25 compara dos curvas momento-carga actuante para la viga VA-01. Con línea continua, color azul, y símbolo de rombo, se indica la curva

asociada a la sección adjunta al empotramiento. En línea continua, color rosado, y símbolo cuadrado, se indica la asociada a la sección central debajo de la carga actuante.

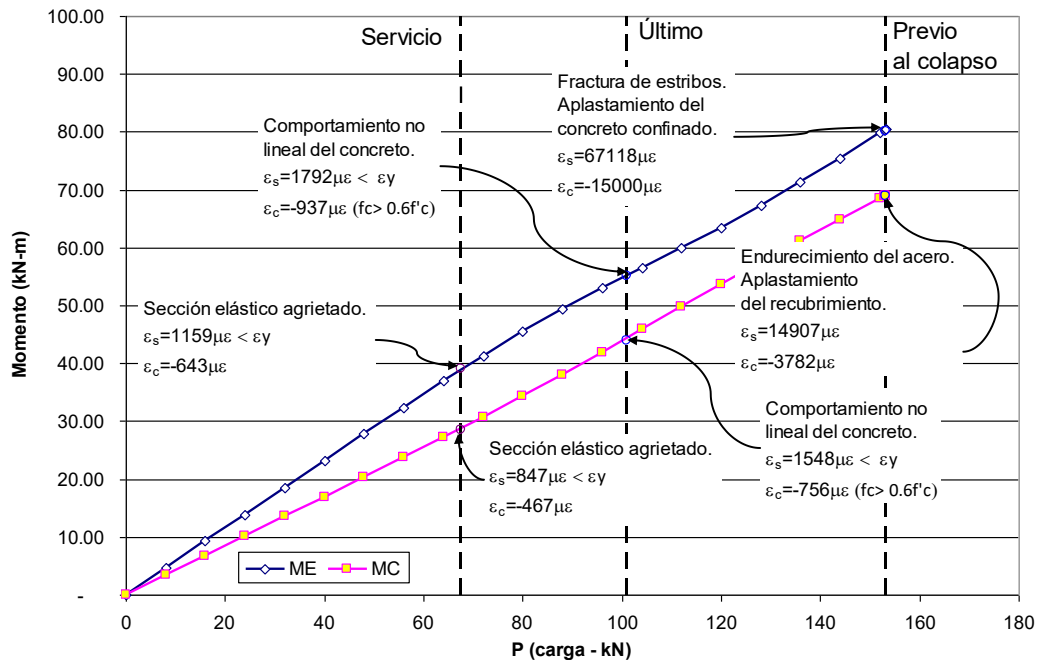
Al nivel de la carga de servicio 67.6 kN, ambas secciones tienen comportamiento elástico agrietado, con deformaciones del concreto en compresión menores que $643 \mu\epsilon$.

A nivel de la carga última, 101 kN, ambas secciones tiene deformación del concreto en compresión en el intervalo no lineal, mayor que $756 \mu\epsilon$, y deformaciones del acero en tracción menores que el de la fluencia, $1792 \mu\epsilon$.

A nivel de la carga previa al colapso, 153.25 kN, la sección con empotramiento presenta fractura de estribos a una deformación del acero en tracción igual a $67118 \mu\epsilon$.

Figura 4.25

Diagrama momento-carga para la viga de un tramo VA-01.



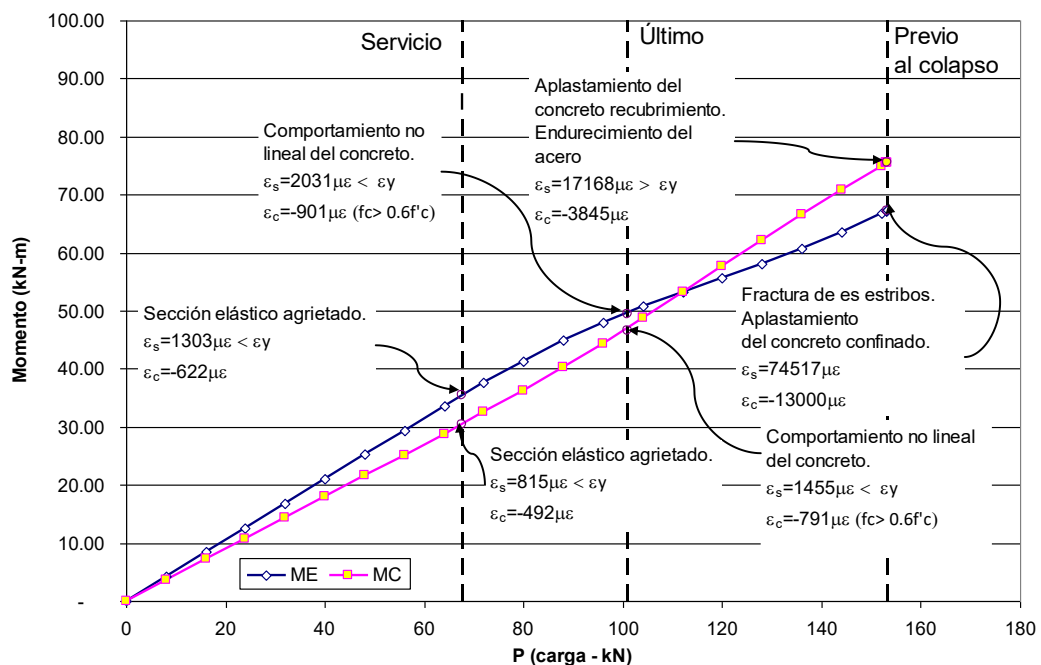
La Figura 4.26 muestra de forma análoga a los casos anteriores la comparación de dos curvas momento-carga actuante para la viga VA-02. La curva asociada a la sección adjunta al empotramiento y la asociada a la sección central debajo de la carga actuante.

Al nivel de la carga de servicio 67.6 kN, ambas secciones tienen comportamiento elástico agrietado, con deformaciones del concreto en compresión menores que $622 \mu\epsilon$.

A nivel de la carga última, 101 kN, ambas secciones tienen deformación del concreto en compresión en el intervalo no lineal, mayor que $791 \mu\epsilon$, y deformaciones del acero en tracción menores que el de la fluencia, $2031 \mu\epsilon$, para la sección del empotramiento. Mientras que en la sección central el acero sigue elástico. A nivel de la carga previa al colapso, 153.25 kN, la sección empotrada presenta fractura de estribos a una deformación del acero en tracción igual a $74517 \mu\epsilon$. Por otra parte, la sección central presenta aplastamiento del concreto de recubrimiento y fluencia del acero.

Figura 4.26

Diagrama momento-carga para la viga de un tramo VA-02.



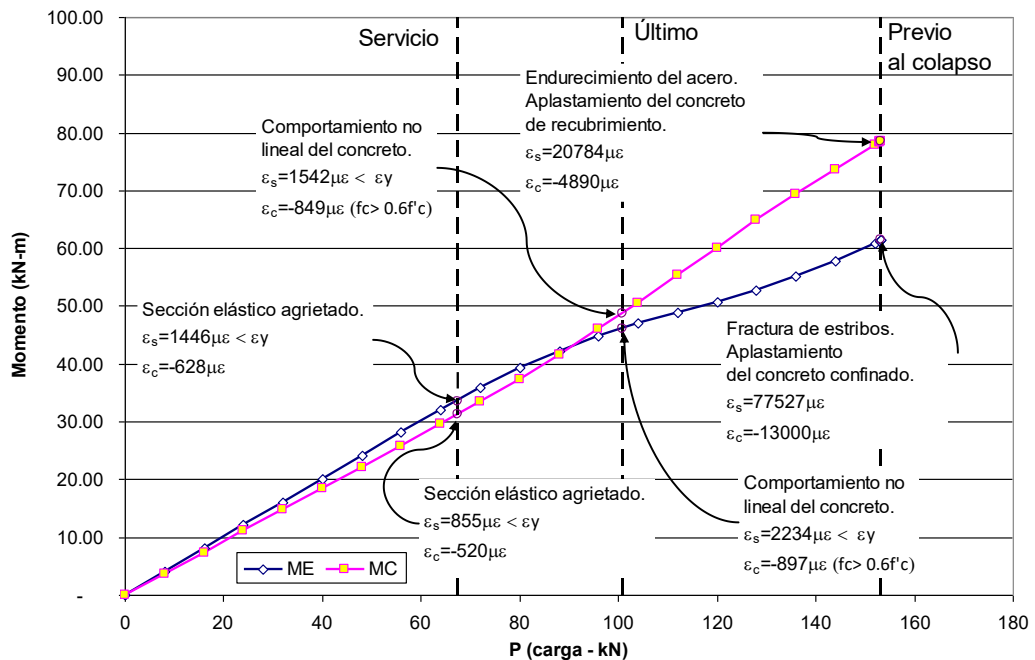
La Figura 4.27 muestra de forma análoga a los casos anteriores la comparación de dos curvas momento-carga actuante para la viga VA-03, la curva asociada a la sección adjunta al empotramiento y la asociada a la sección central debajo de la carga actuante.

Al nivel de la carga de servicio 67.6 kN, la sección empotrada tiene comportamiento elástico agrietado, con deformaciones del concreto en compresión del orden de $628\mu\epsilon$, mientras que la sección en la zona central, muestra deformaciones del orden de $520\mu\epsilon$.

A nivel de la carga última, 101 kN, ambas secciones tiene deformación del concreto en compresión en el intervalo no lineal, mayor que $849\mu\epsilon$, y deformaciones del acero en tracción menores que la de la fluencia, $2031\mu\epsilon$, para la sección del empotramiento. Mientras que en la sección central el acero sigue elástico. A nivel de la carga previa al colapso, 153.25 kN, la sección empotrada presenta fractura de estribos a una deformación del acero en tracción igual a $77527\mu\epsilon$. Por otra parte, la sección central presenta aplastamiento del concreto de recubrimiento y fluencia del acero.

Figura 4. 27

Diagrama momento-carga para la viga de un tramo VA-02.

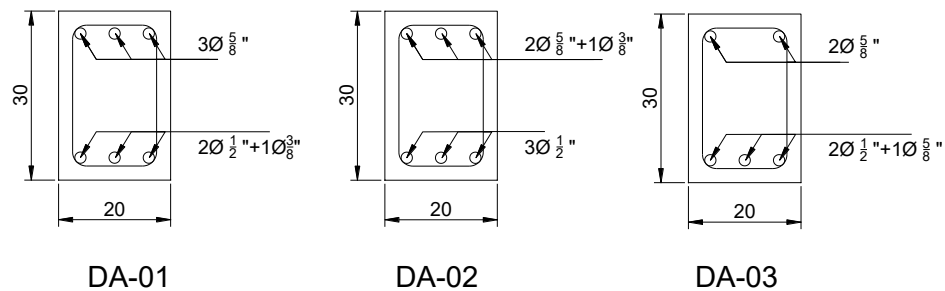


4.5.1.2. Viga de un tramo empotrada-articulada con carga distribuida.

Se realizó para la viga de un tramo estudiada por Noriega (2018) una extensión a su estudio, que consistió en realizar una redistribución de momentos flectores para el que se consideró una carga distribuida constante en toda la longitud. La Figura 4.28 muestra las secciones con el acero de refuerzo correspondiente a los casos de redistribución considerados. La sección DA-01 es el caso sin redistribución, DA-02 es el caso con 20% de redistribución y DA-03 es el caso con 30% de redistribución.

Figura 4.28

Secciones de vigas de un tramo con redistribución de momentos para el caso de carga distribuida constante.



La Figura 4.29 muestra el diagrama momento-curvatura para sección DA-01. Se calculó el diagrama con el modelo de Mander y su aproximación Ramberg-Osgood correspondiente, al momento positivo, con línea de color verde, y negativo, con línea de color rojo.

De forma similar el caso anterior, las Figuras 4.30 y 4.31 muestran los diagramas momento curvatura para las vigas DA-02 y DA-03. Cabe notar que la capacidad de resistencia a flexión a momento negativo disminuye con respecto a la capacidad mostrada por la viga DA-01.

Figura 4.29

Diagrama momento-curvatura para la viga de un tramo DA-01.

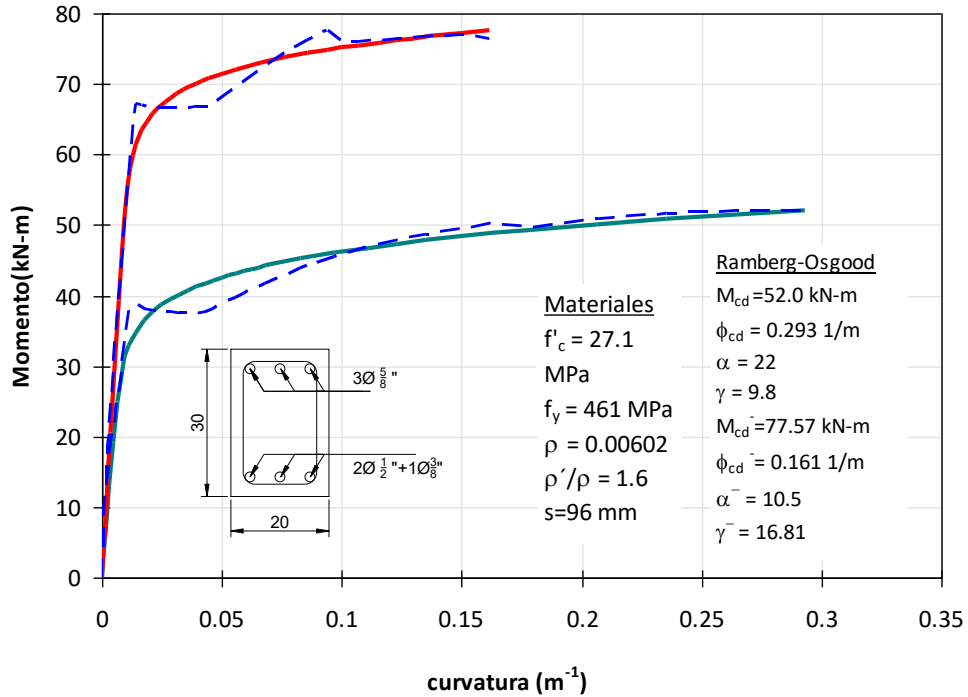


Figura 4.30

Diagrama momento-curvatura para la viga de un tramo DA-02.

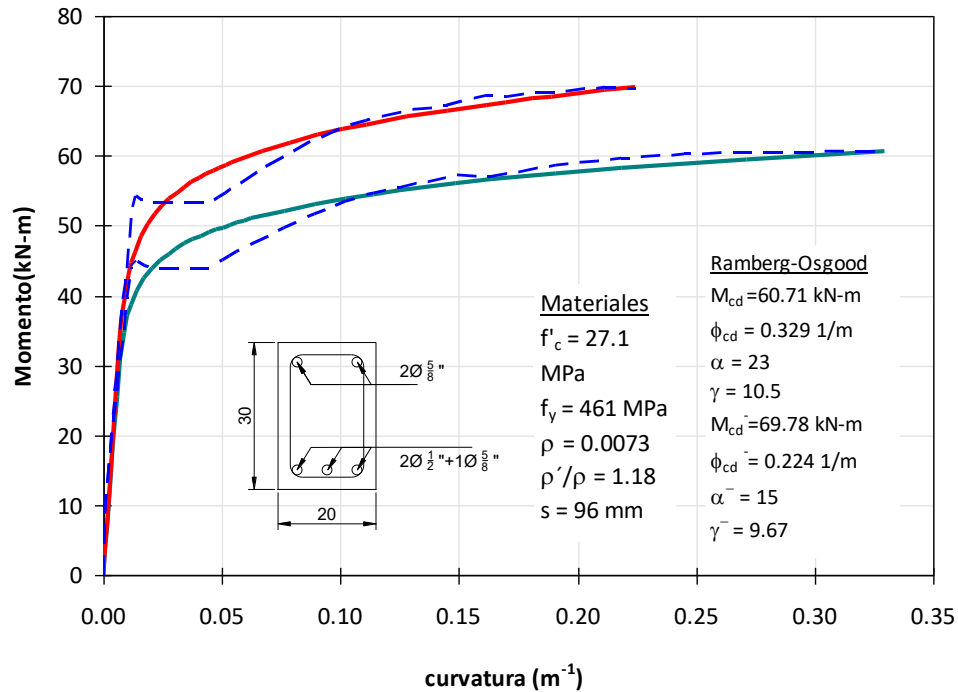
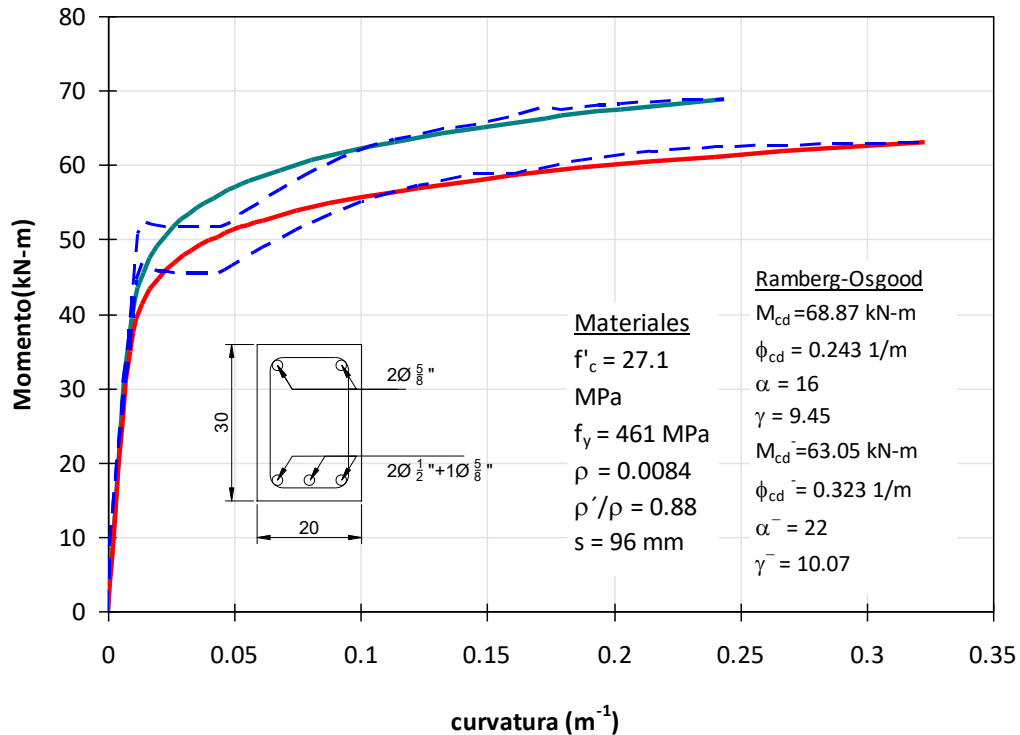


Figura 4.31

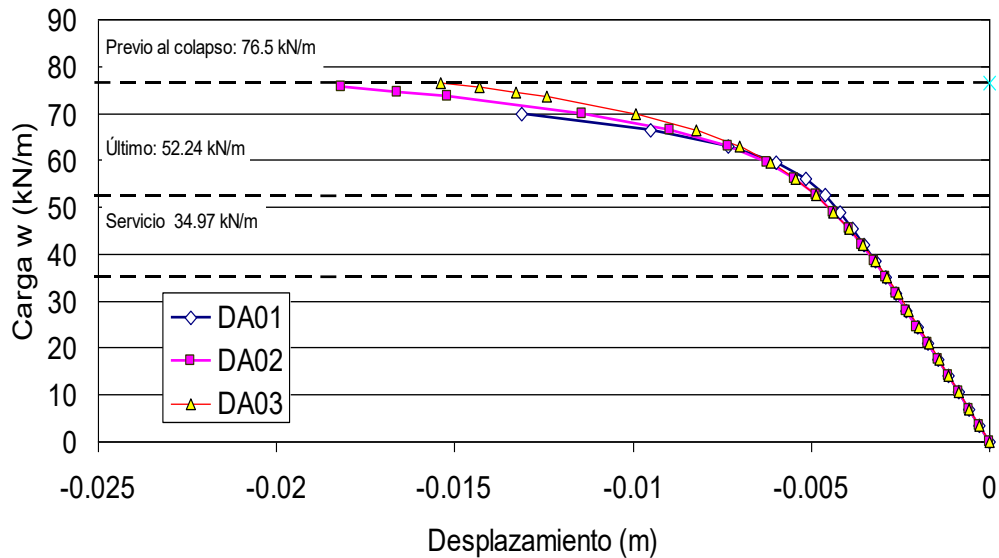
Diagrama momento-curvatura para la viga de un tramo DA-03.



Se va a mostrar nuevamente que con la redistribución de momentos realizada es posible mantener el mismo orden del nivel de carga previa al colapso, para las vigas con redistribución, con respecto a la viga de referencia DA-01. Lo que lleva a considerar que estas vigas tienen un mismo nivel en el orden de seguridad, a nivel previo al colapso, ver Figura 4.32. La viga DA-01 tiene una capacidad de carga máxima previa al colapso del orden de 70 kN/m y las vigas DA-02 y DA-03 alcanzan una capacidad de carga del orden de 76.5 kN/m, lo que representa un 9.3% de incremento de capacidad a flexión, que no es mucha diferencia. Sin embargo, cabe resaltar que las vigas con redistribución de momento tienen un mismo nivel de seguridad que la viga sin redistribución. En la misma figura, se puede observar que las curvas de comportamiento carga-desplazamiento de las tres vigas analizadas son similares.

Figura 4.32

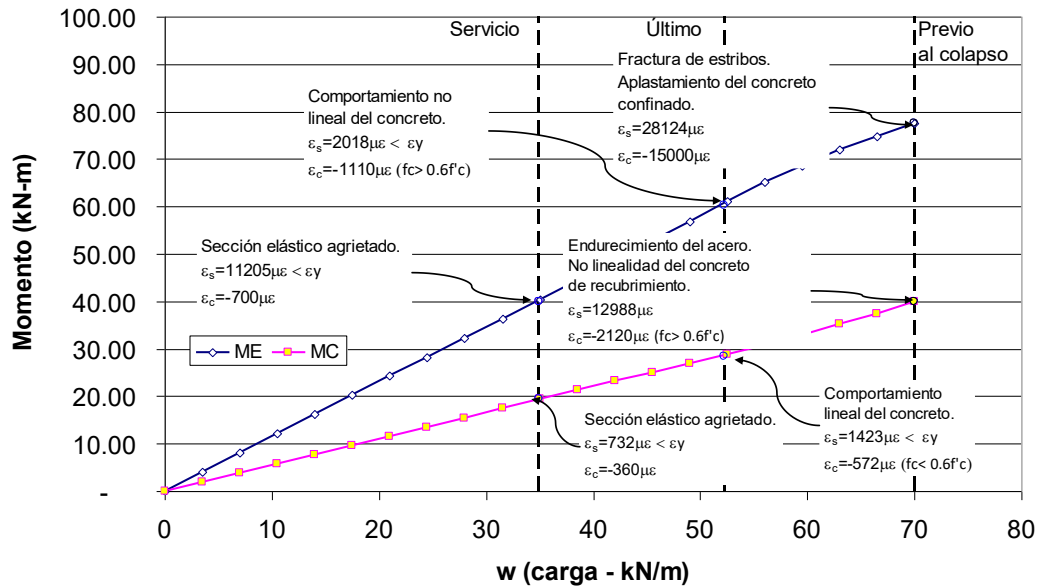
Diagrama carga-desplazamiento para las vigas de un tramo con carga distribuida.



La Figura 4.33 muestra el comportamiento de la viga DA-01 para la sección empotrada, indicada con signo de rombo, y la sección central, indicada con signo cuadrado. El comportamiento que se espera a nivel previo al colapso muestra que la sección empotrada presentaría fractura de estribos y aplastamiento del concreto confinado a una deformación del acero en tracción de $28124\mu\epsilon$. Mientras que la sección central aún no alcanza la fluencia del acero, con una deformación unitaria del orden de $1423\mu\epsilon$.

Figura 4.33

Diagrama momento-carga para la viga de un tramo DA-01 con carga distribuida.



La Figura 4.34 muestra el comportamiento de la viga DA-02 para la sección empotrada, indicada con signo de rombo, y la sección central, indicada con signo cuadrado. El comportamiento que se espera a nivel previo al colapso muestra que la sección empotrada presentaría fractura de estribos y aplastamiento del concreto confinado a una deformación del acero en tracción de $44938 \mu\epsilon$. Mientras que la sección central aún no alcanza la fluencia del acero, con una deformación unitaria del orden de $1660 \mu\epsilon$.

Finalmente, la Figura 4.35 muestra el comportamiento de la viga DA-03, de manera similar que los casos anteriores. El comportamiento que se espera a nivel previo al colapso muestra que la sección empotrada presentaría fractura de estribos y aplastamiento del concreto confinado a una deformación del acero en tracción de $42224 \mu\epsilon$. Mientras que la sección central el acero de refuerzo tiene una deformación mayor que la de fluencia, $4822 \mu\epsilon$, el concreto de recubrimiento apenas está incursionando en el intervalo de comportamiento no lineal, sin llegar al aplastamiento, con una deformación unitaria del orden de $1446 \mu\epsilon$.

Figura 4.34

Diagrama momento-carga para la viga de un tramo DA-02 con carga distribuida.

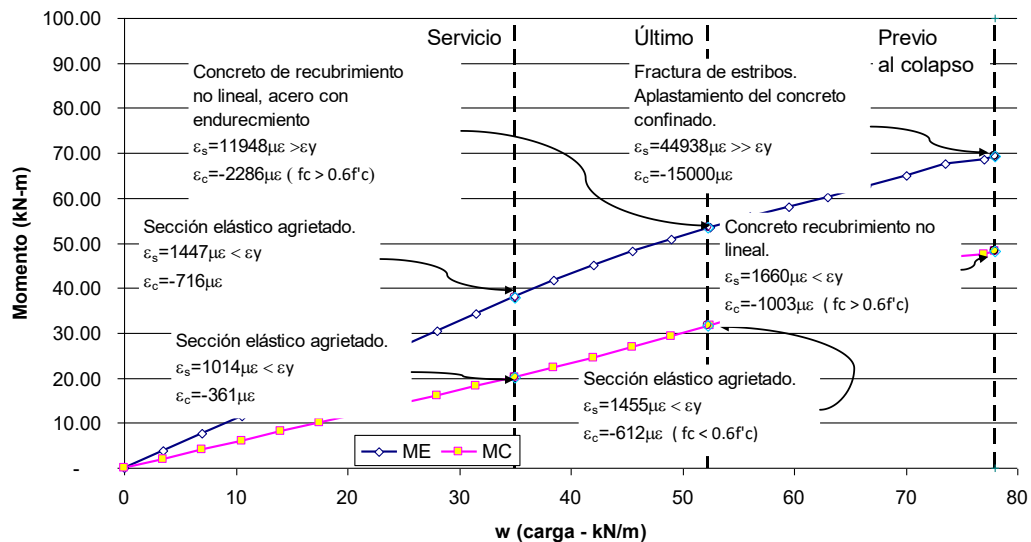
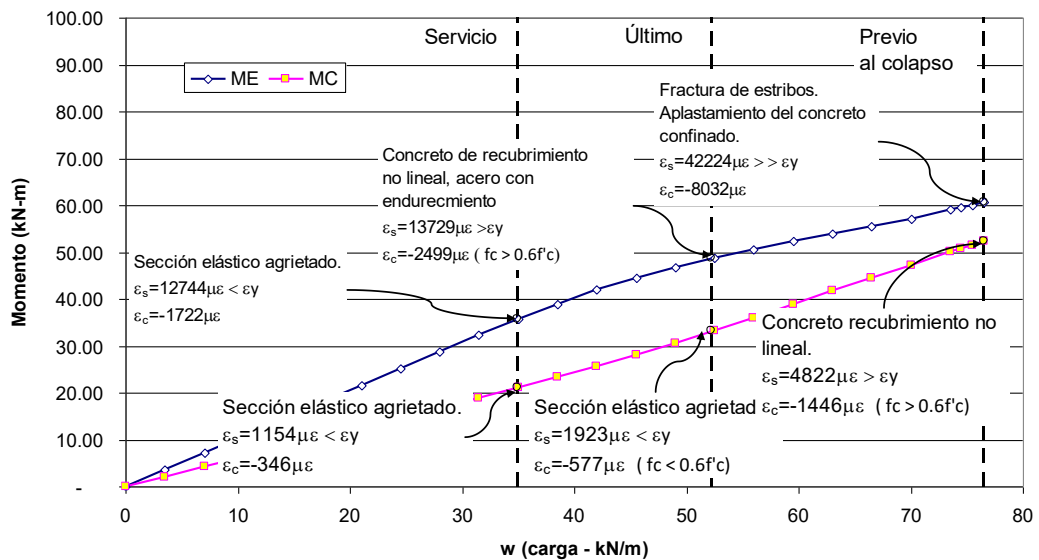


Figura 4.35

Diagrama Momento-carga para la viga de un tramo DA-03 con carga distribuida.



Conclusiones

Las conclusiones obtenidas de los aspectos numéricos del análisis son los siguientes:

1. Las matrices de rigidez de los elementos con comportamiento no lineal se determinan más eficientemente cuando los elementos se subdividen en dovelas de tamaño variable, con longitudes menores en las regiones en las zonas en las que las fuerzas internas varían más rápidamente. Si se consideran dovelas todas de igual tamaño, se requiere un mayor número de dovelas y en consecuencia la consideración de un mayor número de grados de libertad.

2. Como resultado de la no linealidad, las integrales para determinar rigideces y fuerzas deben ser realizadas en forma numérica. Al trabajar con dovelas de tamaño variable, emplear tres puntos de integración en cada dovela son suficientes para obtener resultados con una precisión aceptable. Aumentar el número de puntos de integración tiene poca influencia en los resultados.

3. Para cada incremento de cargas, se requiere iterar para equilibrar las fuerzas externas e internas. En análisis no lineales con cargas monotónicas crecientes, el proceso podría realizarse manteniendo una matriz de rigidez constante. Sin embargo, esto puede requerir un elevado número de iteraciones y, en el caso en que se tenga degradación en la rigidez, podría no tenerse convergencia.

4. La ventaja en emplear una matriz de rigidez variable en cada etapa de carga es que permite un ahorro considerable en el número de iteraciones durante el proceso de solución, por lo que, a pesar del trabajo requerido para reformar y factorizar la matriz de rigidez, se puede desarrollar el análisis en un tiempo mucho menor.

Con respecto a los resultados obtenidos a nivel de sección se han obtenido las conclusiones siguientes:

5. Los diagramas momento curvatura se pueden aproximar de forma aceptable mediante modelos paramétricos de tipo Ramberg-Osgood.

6. El diagrama momento curvatura de la sección de referencia, sin considerar la tracción del concreto, VM, tiene una forma muy similar a la de un modelo elastoplástico.

7. Los resultados muestran que considerar la tracción en el concreto influye principalmente sobre la rigidez a flexión en el intervalo de comportamiento elástico. Sin embargo, al ignorar los esfuerzos de tracción en el concreto se obtiene la misma resistencia nominal, M_n .

8. La curva de referencia, VM, calculada con datos nominales, sin tracción del concreto y sin considerar el confinamiento de los estribos, muestra menor resistencia y menor capacidad de curvatura, con respecto a las calculadas con el modelo de Mander, en las que se consideró el efecto del confinamiento, la tracción del concreto y el endurecimiento por deformación del acero de refuerzo longitudinal.

9. La capacidad de curvatura inelástica de las secciones calculadas con el modelo de Mander es del orden de tres veces mayor que la capacidad del caso de referencia, VM.

10. El incremento de la resistencia a compresión del concreto, f'_c , influye en el incremento de la rigidez a flexión, en el intervalo de comportamiento elástico e inelástico, pero se reduce la ductilidad.

11. El incremento del esfuerzo de fluencia del acero de refuerzo, f_y , influye principalmente en el intervalo de comportamiento inelástico, incrementa la resistencia a flexión, pero no influye en el intervalo elástico. La rigidez pos elástica se mantiene casi inalterada.

12. Cuando el acero incursiona en el intervalo de comportamiento inelástico, con endurecimiento por deformación, se presenta un incremento de la resistencia a flexión, hasta que se produce el desprendimiento del concreto de recubrimiento,

a $5000\mu\epsilon$. Es cuando ocurre una reducción de la resistencia a flexión. Sin embargo, a medida que se incrementa la curvatura, se sigue incrementando la resistencia a flexión hasta recuperar y en algunos casos superar la resistencia alcanzada antes del desprendimiento del concreto de recubrimiento.

13. La resistencia creíble a flexión, M_{cd} , está directamente relacionada con la sobre resistencia por deformación que alcanza el acero de refuerzo, λf_y .

14. El incremento del esfuerzo de fluencia, f_y , no influye en la curvatura asociada a la resistencia creíble a flexión, M_{cd} .

15. La rigidez efectiva a flexión depende principalmente de la cuantía de refuerzo del lecho en tracción y en la resistencia a compresión del concreto.

16. La curvatura de fluencia depende principalmente de la relación de cuantías del lecho en compresión y el lecho en tracción, de la deformación unitaria de fluencia del acero, el peralte de la sección, de la resistencia en compresión del concreto.

17. La profundidad de la resultante de los esfuerzos en compresión es un parámetro que depende principalmente de la cuantía de refuerzo del lecho en tracción y de la resistencia a compresión del concreto.

Conclusiones respecto de la redistribución de momentos en vigas continuas son las siguientes.

18. Algunos resultados experimentales muestran redistribuciones de momentos del orden de 60% antes de que el acero de refuerzo haya desarrollado la fluencia. En ese mismo intervalo con los modelos numéricos es posible lograr redistribución de momentos de hasta un 40%.

19. De acuerdo con los resultados del espécimen B1, es posible una redistribución real de momentos, para la etapa de carga última, del orden de 70%, pero con daños significativos cercanos al nivel previo al colapso de la sección. Sin embargo, para la carga de diseño la redistribución observada está en el orden de

60%, sin un nivel de daño significativo, excepto por el aplastamiento del concreto de recubrimiento en las fibras a compresión.

20. De acuerdo con el modelo de dos tramos para el espécimen B1, la redistribución de momentos teórica estaría entre 40% a 45%, para el nivel de carga de diseño. Mientras que, para la etapa de carga última, previa al colapso, sería del orden de 60%.

21. Para el caso del espécimen B1, con el modelo de dos tramos, la redistribución teórica a nivel de carga de diseño sería como máximo del orden de 45%, lo cual estaría del lado de la seguridad puesto que la redistribución real observada es del orden de 60%.

22. Para el caso del espécimen B1, el modelo de tres tramos resulta ser más conservador que el modelo de dos tramos. La redistribución de momentos para la carga de diseño es del orden de 30%, mientras que, para la carga última previa al colapso es del orden de 60%.

23. Para los casos de las vigas ensayadas por Noriega (2018) se verificó que los diseños con redistribución de momentos para el caso de carga puntual logran redistribuciones hasta de 30%, sin que disminuya la capacidad de carga ni se incremente la flecha de las vigas, para el nivel de demanda de carga última.

24. Las vigas con redistribución de momento en la sección de momento negativo del apoyo empotrado desarrollan una capacidad similar de carga, de tipo puntual, previa al colapso.

25. La capacidad de deflexión resulta 100% mayor en el elemento, VA01, diseñado sin redistribución de momentos en comparación con el elemento, VA02 diseñado con la menor redistribución, del 20%. Comparativamente con el caso de la viga con 30% de redistribución, VA03, la capacidad de deflexión fue 30% menor que la de la viga VA01. Estos resultados muestran ser conservadores respecto a los resultados experimentales obtenidos por Noriega (2018).

26. Para la etapa de carga última no hay diferencia apreciable entre la capacidad de carga y deflexión de las vigas analizadas, esto también fue observado en los resultados experimentales obtenidos por Noriega (2018). Además, en ningún caso el acero llega a la fluencia; sin embargo, el concreto de

recubriendo inicia el comportamiento en el intervalo no lineal. Lo que lleva a concluir que las vigas con redistribución de 30% tienen un comportamiento adecuado a nivel de la carga de diseño, sin pérdida de capacidad de carga ni deflexión excesiva.

27. La viga VA03, con redistribución de momento de 30%, llega al nivel de carga teórica previa al colapso, con fractura de los estribos a una carga del orden de 153 kN, lo cual es menor a la carga medida en el ensayo de Noriega (2018) igual a 180 kN, lo que supone una reserva de capacidad de carga del orden de 15%.

28. Además de lo anterior, la deflexión de la viga VA03, a nivel de carga previa al colapso es de 15.9mm, lo que es menor a lo medido por Noriega (2018), igual a 80mm. Esto supone una reserva de capacidad de deformación del 80%.

29. La viga sin redistribución, VA01, para la condición con carga puntual, en la sección de empotramiento desarrolla la resistencia a momento negativo de 80 kNm, llega al nivel de la carga previa al colapso, por la fractura de los estribos, mientras que en la sección central de la viga, esta todavía tiene reserva de resistencia y capacidad de deformación en el núcleo confinado, aunque el acero del lecho inferior incurre a un nivel de deformación de la zona de endurecimiento por deformación y ocurre el aplastamiento del concreto de recubrimiento.

30. En el caso de la VA-02, ocurre algo similar. La sección del empotramiento alcanza primero la resistencia a flexión, con la diferencia que la resistencia a flexión, previo al colapso, que se desarrolla en la sección del empotramiento es 14% menor que la que ocurre simultáneamente en la sección central. Aunque esta diferencia es poco significativa, la sección central todavía tiene reserva de resistencia y deformación, análogamente para el caso de la viga VA01.

31. En el caso de la VA-03, también ocurre un comportamiento similar a los casos anteriores. Sin embargo, la resistencia a flexión que se desarrolla en la sección de empotramiento es 33% mayor que el momento que ocurre simultáneamente en la sección central. De la misma manera que en los casos anteriores la sección central todavía tiene reserva de resistencia y deformación.

32. La viga VA-03 con menor cuantía de refuerzo que las otras vigas logra desarrollar una redistribución del orden de 30% en la etapa previa al colapso, logra sostener la misma carga que las vigas VA-01 y VA-02, lo cual supone un ahorro en acero longitudinal sin una disminución de la capacidad de carga de la viga.

33. Para el caso de carga distribuida las vigas muestran un comportamiento similar, en carga y deformación, hasta antes de llegar a la carga última. Posteriormente la viga DA01, sin redistribución, muestra menor capacidad de carga, 9.3% menos que las otras vigas. Aunque la diferencia de capacidad de carga no es significativa.

34. Las vigas, DA02 y DA03, muestran un el mismo nivel de capacidad de carga, e incluso muestran mayor capacidad de deformación, 39% y 17%; respectivamente, más capacidad de deformación que la viga sin redistribución, DA01.

35. Las vigas con redistribución tienen la misma cuantía de refuerzo total en la sección, sin embargo, la viga DA-02 muestra mayor ductilidad que la DA-03.

36. La redistribución de momentos permite algún ahorro en la cantidad de acero de refuerzo longitudinal, al poder ser mayor que 20%, también se podría disminuir o incrementar acero de refuerzo en ese orden. Pero principalmente permite lograr descongestionar el acomodo de las varillas sin la pérdida de capacidad de carga de la viga y manteniendo un comportamiento dúctil a nivel de sección y a nivel de la viga.

Recomendaciones

Con respecto al análisis no lineal se realizan las recomendaciones siguientes:

1. Se recomienda emplear modelos de barras con propiedades de no linealidad distribuida en la longitud, en contraste con modelos de plasticidad concentrada, ya que además de no requerir definir parámetros empíricos como la longitud de rótula plástica, en el cálculo se toma en cuenta la variación de la rigidez a flexión de las secciones.

2. Al subdividir cada elemento en dovelas, se recomienda hacer subdivisiones de menor longitud en las regiones en las que se espera una variación mayor de los momentos flectores, con lo que se obtienen mejores resultados con menos grados de libertad.

3. Las integrales para determinar las matrices de rigidez y de fuerzas pueden ser hechas numéricamente. Aun teniendo en cuenta la no linealidad, al realizar la integración con el método de Gauss Legendre es suficiente trabajar con tres puntos de integración en cada dovela.

4. Aunque en algunos casos las iteraciones para lograr el equilibrio en cada etapa de cargas podrían ser realizadas manteniendo una matriz de rigidez constante, se recomienda recalcular la matriz en cada etapa de carga, lo que es de fácil implementación y en general resulta en un proceso de cómputo más eficiente, que requiere mucho menos iteraciones.

Con respecto al comportamiento de sección:

5. Se recomienda emplear el modelo de Mander para el concreto confinado al calcular los diagramas momento curvatura de las secciones, debido a que representa la sobrerresistencia y capacidad de curvatura por efecto del confinamiento de manera realista.

6. En el caso de análisis no lineales estáticos incrementales se recomienda emplear modelos de tipo Ramberg-Osgood, por su fácil

implementación y debido a que pueden representar el comportamiento, a nivel de sección con sólo tres parámetros, el momento creíble, M_{cd} , los parámetros de Ramberg Osgood, α, γ .

Con respecto a la redistribución de momentos:

7. Se puede realizar la redistribución de momentos, hasta un 30% o más, como se ha concluido; sin embargo, es necesario verificar que las secciones tengan comportamiento dúctil y que la capacidad de carga sea al menos igual que el caso correspondiente sin redistribución.

8. Para evaluar la redistribución de momentos se recomienda emplear modelos para el concreto confinado como el de propuesto por Mander, para representar de forma más realista el comportamiento del concreto.

9. Para realizar la redistribución, puede ignorarse la tracción en el concreto, debido a que no influye de manera relevante en la respuesta inelástica de la estructura.

10. Para desarrollar la mayor redistribución de momentos es importante evitar cualquier tipo de falla frágil. Por lo tanto, es necesario que las secciones críticas donde se desarrollan las mayores demandas de rotación plástica tengan estribos de confinamiento. Se recomienda emplear estribos espaciados a un máximo de 6 veces el diámetro de la varilla longitudinal, lo que protege del pandeo prematuro al acero longitudinal.

Referencias bibliográficas

- American Concrete Institute. (2019). *Building code requirements for structural concrete and commentary* (ACI 318–19). American Concrete Institute.
- Aoyama, H. y Sugano, T. (1968). A generalized inelastic analysis of reinforced concrete structures based on tests of members. *Recent Researches of Structural Mechanics-Contributions in Honor of the 60th Birthday of Prof. Y. Tsuboi*, (pp.15–30). Uno-Shoten.
- Bagge, N., O'Connor, A., Elfgren, L. y Pedersen, C. (2014). Moment redistribution in RC beams – A study of the influence of longitudinal and transverse reinforcement ratios and concrete strength. *Engineering Structures*, 80, 11–23. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2014.08.029>
- Balmer, G. G. (1949). *Shearing strength of concrete under high triaxial stress-computation of Mohr's envelope as a curve*. (Structural Research Laboratory Report No. 23). U.S. Bureau of Reclamation.
- Beas, G. (2016). *Análisis no lineal de elementos de concreto armado utilizando elementos finitos*. [Tesis de pregrado, Universidad Nacional de Ingeniería]. Repositorio Institucional Universidad Nacional de Ingeniería. <http://hdl.handle.net/20.500.14076/5515>.
- Carr, A. J. (2010). *Ruaumoko 2D user manual: A computer program library*. University of Canterbury, Department of Civil Engineering.
- Clough, R.W., Benuska, K.L. y Wilson, E.L. (1965). Inelastic earthquake response of tall buildings. *Proceedings of the 3rd World Conference on Earthquake Engineering* (Vol. 2, Session II, pp. 68-89). New Zealand.
- Desayi, P. y Krishnan, S. (1964). Equation for the stress-strain curve of concrete. *ACI Journal*, 61, 345–350.
- Dodd, L.L., y Restrepo Posada, J. I. (1995). Model for predicting cyclic behavior of reinforcing steel. *Journal of Structural Engineering, ASCE*, 121(3), 433-445.
- Giberson, M.F. (1967). *The response of nonlinear multi-story structures subjected to earthquake excitation*. Earthquake Engineering Research Laboratory, California Institute of Technology.
- Hognestad, E. (1951). *A study of combined bending and axial load in reinforced concrete members* (Bulletin No. 399). Engineering Experimental Station, University of Illinois.

- Jiang, Y. y Saiidi S. M. (1990). Four-spring element for cyclic response of R/C columns. *Journal Structural Engineering Division, ASCE*, 116(4), 1018–1029.
- Kent, D.C., y Park, R. (1971). Flexural members with confined concrete. *Journal, Structural Division, ASCE*, 97 (7), 1969–1990.
- Kowalsky, M., Goodnight J.C., Feng Y., y Naw, J. (2015). The effects of load history and design variables on performance limit states of circular bridge columns. *Journal of Structural Engineering, ASCE*, 126(8).
- Lai, S., Will G.T. y Otani S. (1984) Model for inelastic bi-axial bending of concrete members. *Journal, Structural Division, ASCE, ASCE*, 110(11), 2563–2584.
- Li, K.N., Otani S. y Aoyama H. (1988). Reinforced concrete columns under varying axial load and b-directional lateral load reversals. In *Proceedings of the Ninth World Conference on Earthquake Engineering*, (Vol. 8, pp. 537–542). Tokyo-Kyoto.
- Li, K.N., Otani S. y Aoyama H. (1990). Estudio de columnas de concreto reforzado sometidas a fuerzas axiales variables y fuerzas sísmicas horizontales bidireccionales [en japonés]. Aoyama Laboratory, Departamento de Arquitectura, Facultad de Ingeniería, Universidad de Tokyo.
- Li, K.N., Otani S. y Aoyama H. (1991), R/C columns under axial and bi-directional lateral loads. In *Proceedings, Mechanics Computing in the 1990's and Beyond*, (Vol. 2, pp. 681–685). ASCE.
- Noriega, R. (2018). *Estudio experimental de redistribución de momentos en vigas de concreto armado*. [Tesis de maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú]. <http://hdl.handle.net/20.500.12404/12757>
- Mander, J.B., Priestley, M.J. y Park, R. (1984). *Seismic design of bridge piers*. (Research Report 84-2). Department of Civil Engineering, University of Canterbury.
- Mander, J.B., Priestley, M.J. y Park, R. (1988). Theoretical stress strain model for confined concrete. *Journal of Structural Engineering ASCE*, 114(8), 1804–1826. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9445\(1988\)114:8\(1804\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9445(1988)114:8(1804))
- Ministerio de Vivienda, Construcción y Saneamiento. (2009). *Norma Técnica de Edificación E.060: Concreto armado*. <https://www.gob.pe/institucion/sencico/informes-publicaciones/887225-normas-del-reglamento-nacional-de-edificaciones-rne>

- Otani, S. (2006). *Nonlinear earthquake response analysis of reinforced concrete buildings*. Department of Design and Architecture, Faculty of Engineering, Chiba University.
- Park, R., Priestley, M.J. y Gill, W.D. (1982), Ductility of square confined concrete columns. *Journal of the Structural Division, ASCE*, 108(4), 929–950.
- Powell, G. H. (1975), *Supplement to report: DRAIN-2D User's Guide*, University of California, Berkeley.
- Popovics, S. (1973). A numerical approach to the complete stress strain curve for concrete. *Cement and Concrete Research*, 3(5), 583-599.
- Paulay, T. y Priestley, M.J.N. (1992). *Seismic design of reinforced concrete and masonry buildings*. John Wiley & Sons.
- Richart, F.E., Brandtæg, A. y Brown, R.L. (1928) A study of the failure of concrete under combined compressive stresses. *University of Illinois Bulletin*.26(12).
- Roy, H.E. y Sozen M.A. (1964). Ductility of concrete. In *Proceedings of the International Symposium on the Flexural Mechanics of Reinforced Concrete* (pp. 213–224). ASCE-American Concrete Institute.
- Restrepo, J. I., y Rodríguez, M. E. (2013). On the probable moment strength of reinforced concrete columns. *Structural Journal*, 110(4), 681–690. <https://doi.org/10.14359/51685753>.
- Rodríguez, M. E., Botero, J. C., y Villa, J. (1999). Cyclic stress–strain behavior of reinforcing steel including effect of buckling, *Journal of Structural Engineering, ASCE*, 125, 605–612.
- Scott, B. D., Park, R., & Priestley, M. J. (1982). Stress-strain behavior of concrete confined by overlapping hoops at low and high strain rates. *Journal Proceedings*, 79(1), 13–27.
- Seminario, C. (2017). *Comportamiento sísmico de vigas de pórticos de concreto armado con el acero de refuerzo peruano*. [Tesis de pregrado, Universidad Nacional de Ingeniería]. Repositorio institucional Universidad Nacional de Ingeniería. <http://hdl.handle.net/20.500.14076/10949>.
- Sheikh, S.A., y Uzumeri, S. M. (1980). Strength and ductility of tied concrete columns. *Journal of the Structural Division, ASCE*, 106(5), 1079–1102.
- Sheikh, S.A., y Uzumeri, S. M. (1982). Analytical model for concrete confinement in tied columns. *Journal of the Structural Division, ASCE*, 108(12), 2703–2722.

- Suenson, E. (1912). Influence of reinforcement ratio on reinforced concrete panels. *Engineer*, 21(72), 568.
- Suko, M. y Adams P. F. (1971) Dynamic analysis of multi-bay multi-story frames. *Journal Structural Division, ASCE*, 97 (10), 2519–2533.
- Takizawa, H. (1973). Análisis de edificios de concreto armado sometidos a sismos severos [En japonés]. *Concrete Journal, Japan Concrete Institute*, 11(2), 10–21.
- Torres, M.A. (2013). *Estudio analítico-experimental de columna-cimentación prefabricada para puentes urbanos de concreto reforzado en zonas sísmicas*. [Tesis de doctorado, Universidad Nacional Autónoma de México]. Repositorio Institucional de la Universidad Nacional Autónoma de México. <https://tesiunamdocumentos.dgb.unam.mx/ptd2013/mayo/0693518/0693518.pdf>
- Takizawa, H. (1976) *Notes on some basic problems in inelastic analysis of planar R/C structures*. *Transactions, Architectural Institute of Japan*, (240), 51–62.
- Vallenas, J.M., Bertero, V.V., y Popov, E.P. (1977). *Concrete confined by rectangular hoops and subjected to axial loads* (Report 77/13). Earthquake Engineerin Research Center. University of California. Berkeley.
- Watson, S. y Park, R. (1989), *Design of reinforced concrete frames of limited ductility* (Research Report 89–4). Department of Civil Engineering, University of Canterbury.
- Wen, R.K., y Janssen J.G. (1965), Dynamic analysis of elasto-inelastic frames. In *Proceedings of the Third World Conference on Earthquake Engineering* (Vol. 2, pp. 713-729). Wellington, New Zealand.
- Whitney, C. S. (1937). Design of reinforced concrete members under flexure or combined flexure and direct compression. *Journal Proceedings*, 33(3), 483–498.
- Zeris, C. y Mahin, S.A. (1988), Analysis of reinforced concrete beam-columns under uniaxial excitation, *Journal Structures Division, ASCE*, 114(4), 804–820.
- Zienkiewicz, O.C. y Taylor, R.L. (1994). *El método de los elementos finitos. Volumen 2: Dinámica y no linealidad* (4ª ed.). McGraw Hill Interamericana de España.