

Universidad Nacional de Ingeniería

Facultad de Ingeniería Civil



TESIS

Evaluación del factor de seguridad y mecanismo de rotura de un depósito de relaves utilizando la metodología numérica del análisis límite

Para obtener el título profesional de Ingeniero Civil

Elaborado por

Jhonatan Edwar García Rojas

 [0009-0007-1929-4933](https://orcid.org/0009-0007-1929-4933)

Asesor

MSc. César Augusto Atala Abad

 [0000-0001-6781-703X](https://orcid.org/0000-0001-6781-703X)

LIMA – PERÚ

2025

| | |
|------------------------------|---|
| Citar/How to cite | Garcia Rojas [1] |
| Referencia/Reference | [1] J. Garcia Rojas, " <i>Evaluación del factor de seguridad y mecanismo de rotura de un depósito de relaves utilizando la metodología numérica del análisis límite</i> " [Tesis de pregrado]. Lima (Perú): Universidad Nacional de Ingeniería, 2025. |
| Estilo/Style: IEEE (2020) | |

| | |
|--------------------------------|--|
| Citar/How to cite | (Garcia, 2025) |
| Referencia/Reference | Garcia, J. (2025). <i>Evaluación del factor de seguridad y mecanismo de rotura de un depósito de relaves utilizando la metodología numérica del análisis límite</i> . [Tesis de pregrado, Universidad Nacional de Ingeniería]. Repositorio institucional Cybertesis UNI. |
| Estilo/Style: APA (7ma ed.) | |

Dedicatoria

*A mi esposa e hijo, que me brindan siempre
su apoyo incondicional y me motivan a seguir avanzando.*

Agradecimientos

Agradezco a mi familia y amigos por siempre estar conmigo en este camino de la vida. Quedo muy agradecido a mi asesor por su tiempo y apoyo durante el desarrollo de la tesis. Considero que el apoyo de mi asesor fue muy importante para que mi tesis pueda concretarse. Muchas gracias, Ing. César Atala

Resumen

La presente investigación desarrolla la implementación del análisis límite mediante métodos numéricos en problemas geotécnicos, empleando el criterio de Mohr-Coulomb y técnicas de optimización matemática cónica de segundo orden. El estudio se enfoca en la estabilidad de un depósito de relaves, con el objetivo de determinar el factor de seguridad y el mecanismo de falla.

El trabajo comprende cuatro capítulos. El primero aborda las generalidades, objetivos e hipótesis. El segundo, el marco teórico. En el tercero, la implementación de un algoritmo para análisis límite en MATLAB®, integrando MOSEK para optimizar y GID v17 para generar la malla, seguido de la estructuración de matrices de elementos y condiciones de borde, distribución de fuerzas y determinación del factor de seguridad y mecanismo de falla. El cuarto capítulo expone un caso práctico, aplicando el análisis límite y comparando resultados con otras metodologías convencionales.

Los resultados indican que el análisis límite, formulado como un problema de optimización cónica, proporciona factores de seguridad comparables a los métodos convencionales y permite determinar con mayor precisión el mecanismo de falla sin asumir superficies predefinidas. No obstante, en términos de tiempo de procesamiento, los enfoques tradicionales implementados en software comercial resultan más rápidos y prácticos para análisis bidimensionales, mientras que el análisis límite, al estar desarrollado mediante la integración de distintos entornos de software en esta investigación, presenta un mayor tiempo computacional. Se prevé que, en evaluaciones tridimensionales complejas, este enfoque pueda ofrecer ventajas en escalabilidad y eficiencia.

Palabras clave: análisis límite, optimización cónica de segundo orden, factor de seguridad y mecanismo de falla.

Abstract

This research develops the implementation of limit analysis using numerical methods for geotechnical problems, employing the Mohr–Coulomb criterion and second–order conic mathematical optimization techniques. The study focuses on the stability of a tailings dam, with the objective of determining the factor of safety and the failure mechanism.

The work comprises four chapters. The first addresses the generalities, objectives, and hypotheses; the second, the theoretical framework. The third, the implementation of a limit analysis algorithm in MATLAB®, integrating MOSEK for optimization and GID v17 for mesh generation, followed by the structuring of element matrices and boundary conditions, force distribution, and determination of the factor of safety and failure mechanism. The fourth chapter presents a practical case, applying limit analysis and comparing results with other conventional methodologies.

The results indicate that limit analysis, formulated as a conic optimization problem, provides factors of safety comparable to conventional methods and allows for a more accurate determination of the failure mechanism without assuming predefined surfaces. However, in terms of processing time, traditional approaches implemented in commercial software are faster and more practical for two–dimensional analyses, while limit analysis, developed by integrating different software environments in this research, requires more computational time. It is anticipated that, in complex three–dimensional evaluations, this approach may offer advantages in scalability and efficiency.

Keywords: Limit analysis, second-order conic optimization, factor of safety and failure mechanism.

Tabla de Contenido

| | |
|---|-----|
| Resumen | v |
| Abstract | vi |
| Prólogo | xiv |
| Capítulo I. Introducción | 1 |
| 1.1 Generalidades | 1 |
| 1.2 Problemática | 4 |
| 1.3 Objetivos | 4 |
| 1.3.1 Objetivo General | 4 |
| 1.3.2 Objetivos Específicos | 5 |
| 1.4 Hipótesis | 5 |
| 1.4.1 Hipótesis general..... | 5 |
| 1.4.2 Hipótesis específicas..... | 5 |
| Capítulo II. Marcos teórico y conceptual | 6 |
| 2.1 Propiedades mecánicas del suelo | 6 |
| 2.1.1 Resistencia cortante del suelo..... | 6 |
| 2.1.2 Criterio de Mohr-Coulomb | 6 |
| 2.1.3 Condiciones drenadas y no drenadas | 7 |
| 2.2 Depósitos de relaves..... | 7 |
| 2.2.1 Propiedades de los relaves | 7 |
| 2.2.2 Métodos de construcción de presas | 8 |
| 2.3 Análisis de estabilidad | 9 |
| 2.3.1 Análisis límite | 10 |
| 2.3.2 Método de equilibrio límite..... | 12 |
| 2.3.3 Método de reducción de parámetros | 14 |
| 2.4 Teoremas de Drucker y Prager | 15 |
| 2.4.1 Teorema del Límite Inferior (TLI)..... | 15 |
| 2.4.2 Teorema del Límite Superior (TLS) | 15 |
| 2.4.3 Teorema de unicidad..... | 16 |
| 2.5 Regla de flujo | 16 |
| 2.6 Principio de las potencias virtuales..... | 18 |
| 2.7 Optimización matemática | 20 |
| 2.7.1 Resumen histórico de la optimización | 21 |
| 2.7.2 Análisis límite como problema de optimización | 22 |
| 2.7.3 Programación cónica..... | 23 |

| | |
|--|----|
| Capítulo III. Implementación numérica | 26 |
| 3.1 Elementos finitos | 27 |
| 3.2 Formulación numérica | 27 |
| 3.3 Integración numérica | 28 |
| 3.4 Adaptación del criterio de rotura Mohr-Coulomb a la forma cónica de segundo orden | 32 |
| 3.5 Software para emplear | 34 |
| 3.5.1 Matlab de MathWorks 2023..... | 34 |
| 3.5.2 MOSEK 10.2 | 35 |
| 3.5.3 GiD simulation v17 | 35 |
| 3.5.4 Paraview 5.13 | 35 |
| 3.5.5 Midas | 35 |
| 3.5.6 Slide2 Modeler 2024 de Rocscience Inc..... | 35 |
| 3.5.7 Plaxis 2D de Bentley ®..... | 35 |
| Capítulo IV. Caso de aplicación y resultados | 36 |
| 4.1 Sección geotécnica | 37 |
| 4.2 Parámetros geotécnicos..... | 39 |
| 4.2.1 Basamento rocoso | 39 |
| 4.2.2 Depósito aluvial..... | 40 |
| 4.2.3 Bofedal..... | 40 |
| 4.2.4 Material orgánico..... | 40 |
| 4.2.5 Relave fino | 40 |
| 4.2.6 Relave Grueso | 41 |
| 4.2.7 Dique de arranque..... | 41 |
| 4.2.8 Muro de refuerzo y recrecimiento | 41 |
| 4.3 Modelo numérico para análisis límite..... | 42 |
| 4.3.1 Geometría de la sección transversal evaluada | 43 |
| 4.3.2 Malla de elementos finitos cuadrangulares..... | 43 |
| 4.3.3 Condiciones de borde para el análisis límite..... | 44 |
| 4.3.4 Asignación de los materiales en el modelo numérico | 45 |
| 4.4 Análisis de estabilidad con análisis límite | 46 |
| 4.4.1 Análisis estático aguas arriba | 47 |
| 4.4.2 Análisis estático aguas abajo | 47 |
| 4.4.3 Análisis postsismo aguas abajo..... | 48 |
| 4.4.4 Resumen de resultados obtenidos con análisis límite..... | 51 |

| | | |
|-----|--|----|
| 4.5 | Análisis de estabilidad con equilibrio límite..... | 51 |
| 4.6 | Análisis de estabilidad con método de reducción de parámetros..... | 55 |
| 4.7 | Comparación de resultados de análisis | 57 |
| | Conclusiones | 62 |
| | Recomendaciones | 64 |
| | Referencias Bibliográficas..... | 65 |

Lista de Tablas

| | |
|--|----|
| Tabla 1: Características de los métodos de equilibrio límite para el análisis de taludes . | 13 |
| Tabla 2: Criterios de diseño del depósito de relaves | 36 |
| Tabla 3: Propiedades de los materiales de la presa existente..... | 42 |
| Tabla 4: Factores de seguridad – Análisis Límite | 51 |
| Tabla 5: Factores de seguridad – Equilibrio Límite..... | 55 |
| Tabla 6: Factores de seguridad – Método de reducción de parámetros | 57 |
| Tabla 7: Resumen de factores de seguridad y tiempo computacional de procesamiento | 60 |

Lista de Figuras

| | |
|---|----|
| Figura 1: Esquema referencial del método constructivo aguas arriba | 9 |
| Figura 2: Curvas de esfuerzo - deformación | 11 |
| Figura 3: Fuerzas consideradas en una falla circular | 13 |
| Figura 4: Mecanismos de falla | 13 |
| Figura 5: Regla de flujo asociada..... | 17 |
| Figura 6: Cuerpo de volumen V , superficie S y vector n normal a la superficie | 18 |
| Figura 7: Subcampos de la programación cónica | 24 |
| Figura 8: Diagrama de flujo general para resolver el problema de la metodología numérica del análisis límite | 25 |
| Figura 9: Puntos de integración (X_i) y pesos de ponderación W_i para un elemento cuadrangular de 4 nodos en coordenadas locales | 29 |
| Figura 10: Diagrama de flujo simplificado del desarrollo con elementos finitos para preparar las matrices que representan el problema geotécnico | 31 |
| Figura 11: Diagrama de flujo simplificado de transformación en espacio cónico SOCP y optimización con MOSEK..... | 34 |
| Figura 12: Vista en planta del depósito de relaves | 38 |
| Figura 13: Sección A del depósito de relaves | 39 |
| Figura 14: Geometría del modelo geotécnico de la Sección A del Depósito de Relaves generado en el Software GiD v17 | 43 |
| Figura 15: Sección A Malla de elementos finitos, elementos cuadrangulares generada por el programa GiD v17..... | 44 |
| Figura 16: Refinamiento de malla en la presa y en el contacto con relave | 44 |
| Figura 17: Condiciones de borde para el análisis de estabilidad aguas abajo de la sección A..... | 45 |
| Figura 18: Condiciones de borde para el análisis de estabilidad aguas arriba de la sección A..... | 45 |
| Figura 19: Condiciones de borde para el análisis de estabilidad global postsismo de la sección A..... | 45 |
| Figura 20: Análisis de estabilidad estático por el método de Análisis límite - Aguas arriba - Sección A | 47 |
| Figura 21: Análisis de estabilidad estático por el método de Análisis límite - Aguas abajo - Sección A..... | 48 |
| Figura 22: Presión de poros estimado con Midas GTS-NX | 49 |

| | |
|--|----|
| Figura 23: Tensión vertical total estimada con Midas GTS-NX..... | 49 |
| Figura 24: Distribución de cohesión para los materiales del modelo. En el caso del relave fino, se especifica la resistencia no drenada resultante del ratio de resistencia residual | 50 |
| Figura 25: Superficie de ruptura aguas abajo, análisis postsismo | 50 |
| Figura 26: Análisis de estabilidad estático por el método de equilibrio límite - Aguas abajo – Circular - Sección A..... | 52 |
| Figura 27: Análisis de estabilidad estático por el método de equilibrio límite - Aguas abajo – No Circular - Sección A..... | 52 |
| Figura 28: Análisis de estabilidad estático por el método de equilibrio límite - Circular - Aguas arriba - Sección A | 53 |
| Figura 29: Análisis de estabilidad estático por el método de equilibrio límite - No Circular - Aguas arriba - Sección A..... | 53 |
| Figura 30: Análisis de estabilidad postsismo por el método equilibrio límite - Aguas abajo – Circular - Sección A..... | 54 |
| Figura 31: Análisis de estabilidad postsismo por el método equilibrio límite - Aguas abajo – No Circular - Sección A | 54 |
| Figura 32: Análisis de estabilidad estático por el método de reducción de parámetros - Aguas abajo - Sección A..... | 56 |
| Figura 33: Análisis de estabilidad estático por el método de reducción de parámetros - Aguas arriba - Sección A | 56 |
| Figura 34: Análisis de estabilidad postsismo por el método de reducción de parámetros - Aguas abajo - Sección A..... | 57 |
| Figura 35: Comparación de mecanismos de falla condición estática - aguas abajo | 58 |
| Figura 36: Comparación de mecanismos de falla condición estática - aguas arriba..... | 58 |
| Figura 37: Comparación de mecanismos de falla condición postsismo - aguas abajo ... | 59 |
| Figura 38: Comparación factores de seguridad..... | 61 |

Lista de Símbolos y Siglas

- $\dot{\varepsilon}^p$: Tasa de deformación plástica
- $\varepsilon_{ij}^e, \varepsilon_{ij}^p$: Deformación elástica, deformación plástica
- τ_f : Esfuerzo cortante en la falla
- $f(\sigma)$: Función de fluencia (en general)
- σ_k : Esfuerzos en las direcciones principales (en general)
- $d\lambda$: Coeficiente multiplicador o coeficiente de Lagrange
- λ : Factor de colapso
- $F(\sigma_{ij})$: Función de rotura
- $f_0(\sigma_{ij})$: Función de fluencia inicial
- $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$: Esfuerzos principales
- I_1, J_2 : Primera y segunda invariante
- α, k : Parámetros de Drucker Prager
- $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}^2, \sigma_{23}^2, \sigma_{13}^2, S_{ij}, S_{ij}$: Esfuerzos principales y tensor de esfuerzos
- ϕ, ϕ_u : Ángulo de fricción, ángulo de fricción en condiciones no drenadas
- c, c_u : Cohesión, cohesión en condiciones no drenadas
- σ, σ' : Esfuerzo normal total, esfuerzo normal efectivo
- $\sigma_{ij,j}$: Derivada de tensor de esfuerzos
- u : Presión de poros de agua
- b_i : Tensor de fuerza externas
- u_i, \dot{u}_i : Desplazamiento virtual, velocidad virtual
- V : Volumen
- W : Trabajo
- \dot{W} : Tasa de deformación
- \dot{P} : Potencia virtual
- S, n : Superficie, vector normal a la superficie
- B, L, P, V, Q, ρ : Matrices y vectores auxiliares para la resolución numérica
- FS : Factor de seguridad
- $\frac{s_{ur}}{\sigma'_v}$: Ratio de resistencia al corte residual y esfuerzo efectivo vertical
- Y_{sat}, Y_{seco} : Peso unitario saturado, peso unitario seco

Prólogo

La presente tesis titulada Evaluación del Factor de Seguridad y Mecanismo de Rotura de un Depósito de Relaves Utilizando la Metodología Numérica del Análisis Límite, representa una contribución relevante en el ámbito de la ingeniería geotécnica aplicada, particularmente en el análisis de estabilidad de estructuras mineras. Dado el papel crucial que la minería desempeña en la economía del Perú, la gestión segura de los depósitos de relaves es fundamental para mitigar los riesgos asociados al manejo de estos residuos.

Esta investigación analiza una problemática prioritaria en geotecnia: la necesidad de métodos precisos y eficientes que permitan evaluar la estabilidad de taludes y presas de contención en depósitos de relaves. A través de la aplicación del análisis límite combinado con herramientas avanzadas de optimización y análisis numérico, se desarrolla un modelo robusto que permite determinar tanto el factor de seguridad como los mecanismos de falla, proporcionando una base sólida para la toma de decisiones en proyectos mineros.

Más allá de los resultados específicos, esta tesis aporta una visión innovadora al integrar métodos numéricos avanzados, como la programación cónica de segundo orden, con el criterio de rotura de Mohr-Coulomb. Este enfoque mejora la precisión en los cálculos y optimiza los tiempos de procesamiento, ofreciendo una alternativa a los métodos tradicionales como el método de equilibrio límite y el método de reducción de parámetros.

La tesis busca enriquecer la literatura académica y técnica en el campo de la ingeniería geotécnica, y ser una herramienta útil para profesionales e investigadores enfocados en la evaluación de presas de relaves en operaciones mineras en el Perú y en otras regiones.

Capítulo I. Introducción

El análisis límite es una metodología empleada para la evaluación la estabilidad de taludes, fundaciones y túneles poco profundos. A diferencia de métodos tradicionales como el equilibrio límite, no requiere suponer una superficie de falla predeterminada, lo que permite identificar el mecanismo de rotura de forma más precisa. Asimismo, puede aplicarse en dos y tres dimensiones, ofreciendo una representación más realista del comportamiento de las estructuras geotécnicas.

Si bien en el pasado su uso estuvo restringido por la alta demanda computacional y la necesidad de software especializado, los avances en optimización matemática y modelación numérica han superado gran parte de estas limitaciones. Investigaciones recientes evidencian que, aplicado correctamente, el análisis límite proporciona resultados precisos y eficientes, ampliando el alcance de la evaluación geotécnica en escenarios donde los métodos convencionales tienden a subestimar o sobrestimar el factor de seguridad. En el ámbito minero, su empleo permite modelar de manera rigurosa los distintos materiales presentes como: relaves, desmontes y suelos de fundación, y evaluar con mayor exactitud, tanto el factor de seguridad como el mecanismo de rotura en estructuras críticas como presas de relaves.

1.1 Generalidades

La minería ha sido históricamente una de las principales actividades económicas en el Perú. De acuerdo con la Sociedad Nacional de Minería, Petróleo y Energía, esta actividad representó el 10.4% del Producto Bruto Interno (PBI) del país en 2023. Según el Ministerio de Energía y Minas, actualmente, Perú destaca como el principal productor de estaño en América Latina y se sitúa en la segunda posición en la producción de oro, plata, plomo y molibdeno en la región. A nivel global ocupa el segundo lugar como productor de cobre y zinc.

Un diseño inadecuado y un manejo inapropiado del depósito de relaves puede causar una falla catastrófica que devaste el medio ambiente, destruya vidas y medios de subsistencia según ICMM (2020). Por ello, estos deben ser diseñados, construidos, operados y cerrados con los más altos estándares. Algunos ejemplos de fallas en Perú incluyen Ananea en noviembre de 2021, por desbordamiento; Cobriza en julio de 2019, origen desconocido; Huancapati en marzo de 2018, origen desconocido; y Caudalosa

Chica en junio de 2010, por erosión interna. Todas estas roturas han afectado principalmente al medio ambiente.

La actividad minera genera residuos conocidos como relaves, compuestos por arenas, limos, arcillas, mineral de ganga y agua. Estos se descargan en forma de pulpa, pasta, espesados o filtrados, en orden decreciente de contenido humedad. La descarga se realiza en depósitos artificiales delimitados y contenidos a través de presas construidas con relave grueso o material de préstamo.

Los depósitos contienen millones de metros cúbicos de relaves y agua. En Perú, las presas son normalmente construidas mediante recrecimientos de acuerdo con la demanda anual que planifica cada mina. Los métodos de recrecimiento constructivo de las presas son: aguas arriba, aguas abajo y línea central. El primero ha sido prohibido desde 2014 por el Artículo 77 del Decreto Supremo N° 040-2014-EM.

Según el catálogo de fallas de presas de relaves del Centro de Participación Pública en la Ciencia (CSP¹), actualizado hasta el 2024, se han registrado 377 fallas a nivel mundial entre 1915 y 2024. Las principales causas, en orden de frecuencia, son: desbordamiento, causas desconocidas, sismos, inestabilidad de talud, fallas estructurales y erosión interna (WISE, 2024).

La inestabilidad de los taludes es la cuarta causa más fuente de falla, como se mencionó previamente. Existen diversos enfoques de modelamiento computacional que orientados a cuantificar la seguridad de la estabilidad física de un talud expresada mediante un valor numérico llamado factor de seguridad. Los métodos más empleados en la práctica profesional son el método equilibrio límite y el método reducción de parámetros, cada uno con hipótesis particulares que determinan su eficiencia computacional y precisión.

El análisis de equilibrio límite es el método más utilizado para calcular el factor de seguridad de taludes en modelos bidimensionales (2D) e incluso tridimensionales (3D). Este enfoque asume una superficie de falla predeterminada y evalúa el equilibrio de fuerzas y momentos sin considerar la relación esfuerzo-deformación de los materiales (Chen, 1975).

¹ <http://www.csp2.org/>

Por otro lado, el método de reducción de parámetros combinado con el análisis por elementos finitos permite estimar deformaciones en los taludes y presas, así como para determinar el factor de seguridad. Este método puede aplicarse en 2D y 3D; sin embargo, en tres dimensiones se observa una reducción de la eficiencia computacional al aproximarse al factor de seguridad.

Una metodología alternativa es el análisis límite, basado en la teoría del estado límite de los materiales y sustentado en los teoremas de colapso en plasticidad propuestos por Drucker y Prager en 1952. Esta técnica no requiere asumir una superficie de falla, sino que se apoya en los teoremas de límite inferior y superior (también denominados estático y cinemático), en conjunto con herramientas de elementos finitos y optimización matemática (Davis & Selvadurai, 2002).

Actualmente, el uso del método de análisis límite es menos frecuente debido a su complejidad computacional, estas dificultades pueden superarse combinando el análisis límite con métodos numéricos y una adecuada metodología de optimización. En este contexto, existen soluciones comerciales como Optum^{CE 2} para resolver diversos tipos de problemas geotécnicos con la metodología de análisis límite (2D y 3D) como estabilidad de taludes, excavaciones, rellenos y fundaciones.

Mediante el uso de elementos finitos, el análisis límite puede emplearse tanto en análisis bidimensional como tridimensional. Un ejemplo destacado es el trabajo de Camargo et al. (2016) que desarrolló una investigación sobre estabilidad de taludes aplicada a una ladera de cuenca de la Cordillera de la Costa de Oregón (EE. UU), publicada en el artículo titulado *Numerical limit analysis of three-dimensional slope stability problems in catchment areas*, donde se determina que la metodología numérica del análisis límite, tridimensional, es adecuada para determinar el factor de seguridad. Además, concluye la eficiencia computacional que se tiene al emplear la optimización cónica de segundo orden.

² <https://optumce.com/>

Otra contribución relevante, en la metodología numérica del análisis límite en taludes, es la investigación de Chahua (2013) presentada en el congreso CILAMCE 2013 en Brasil con título *Análise limite para o cálculo do fator de segurança de estabilidade de taludes utilizando programação cônica de segunda ordem*. En ella se evaluó el factor de seguridad de taludes para ejemplos genéricos, verificando así que la metodología de análisis límite es adecuada y precisa para determinar el factor de seguridad de taludes.

1.2 Problemática

El análisis de estabilidad de taludes en los depósitos de relaves, comúnmente, mediante el método de equilibrio límite cuyo objetivo es calcular el factor de seguridad asociado a una superficie de falla, tanto local como global. No obstante, existen otras metodologías que puede aplicarse, como el análisis límite.

El análisis límite, a pesar de sus fundamentos teóricos sólidos, ha enfrentado limitaciones en su implementación práctica debido a la escasez de herramientas computacionales adecuadas para resolver el problema matemático. Por ejemplo, se ha intentado resolver de manera analítica y de forma numérica, con elementos finitos y programación lineal; sin embargo, la primera solo se puede emplear para estructuras poco complejas, la segunda, para pocos elementos porque el tiempo computacional es muy largo para su resolución, haciéndola una herramienta con pocas ventajas sobre otra.

Por lo expuesto, en la presente investigación se plantea implementar una herramienta computacional de optimización llamada programación cónica de segundo orden y verificar la mejora en la metodología del análisis límite para el cálculo de factor de seguridad de la presa y mecanismos de falla.

1.3 Objetivos

1.3.1 Objetivo General

Evaluar el factor de seguridad y el mecanismo de rotura del talud de un depósito de relaves través de la metodología numérica del análisis límite, integrando herramientas de elementos finitos y optimización matemática.

1.3.2 Objetivos Específicos

Implementar la técnica elementos finitos en el programa MATLAB®, como base para la formulación del problema de estabilidad.

Adaptar y aplicar la metodología de optimización o programación cónica de segundo orden con el algoritmo MOSEK, con el fin de resolver el problema de optimización planteado por el análisis límite.

Comparar resultados de la metodología numérica del análisis límite con los métodos de equilibrio límite y de reducción de parámetros.

1.4 Hipótesis

1.4.1 Hipótesis general

La metodología numérica del análisis límite permite determinar el factor de seguridad y mecanismo de falla de un depósito de relaves con eficiencia computacional.

1.4.2 Hipótesis específicas

El empleo de la técnica de elementos finitos facilitará la formulación y resolución del problema de estabilidad de taludes, al permitir una representación discreta y flexible de la geometría y las condiciones del terreno

El uso optimización cónica de segundo orden, mediante del algoritmo MOSEK, permitirá adaptar eficazmente el criterio de rotura de Mohr – Coulomb y resolver el problema de optimización del análisis límite con alta eficacia.

Los resultados obtenidos con el análisis límite serán comparables, en términos de precisión, con los generados por el método de equilibrio límite y método reducción de parámetros.

Capítulo II. Marcos teórico y conceptual

2.1 Propiedades mecánicas del suelo

2.1.1 Resistencia cortante del suelo

La resistencia cortante del suelo es la capacidad del material para oponerse al deslizamiento o deformación entre sus partículas bajo la acción de tensiones. Es un parámetro fundamental en la ingeniería geotécnica, ya que determina la estabilidad de suelos bajo cargas y esfuerzos externos, como en el caso de taludes, cimentaciones y estructuras de retención. (Das & Sobhan, 2013).

En general, los suelos fallan por esfuerzos cortantes. Los esfuerzos de tracción generados antes de la falla pueden provocar la aparición de grietas. La falla por cortante se inicia en un punto crítico, donde se alcanza una combinación de esfuerzos cortantes y normales. Bidimensionalmente, esto se puede representar como una función del esfuerzo cortante y el esfuerzo normal.

2.1.2 Criterio de Mohr-Coulomb

El criterio de Mohr-Coulomb es el criterio comúnmente utilizado en la ingeniería geotécnica, especialmente en análisis bidimensional.

Según Coulomb (1776), mencionado en Das y Sobhan (2013), el esfuerzo cortante a la falla puede aproximarse como una función lineal del esfuerzo normal. Esta formulación se expresa como:

$$\tau_f = c + \sigma \tan\phi$$

Donde:

τ_f = esfuerzo cortante

σ = esfuerzo normal

c = cohesión

ϕ = ángulo de fricción

Según el principio de esfuerzos efectivos en suelos secos o saturados propuesto por Terzaghi (1923), el esfuerzo efectivo σ' es igual al esfuerzo total σ menos la presión de poros μ . Así, el criterio de Mohr - Coulomb se expresa en términos del esfuerzo efectivo se expresa como:

$$\sigma' = \sigma - \mu$$

$$\tau_f = c' + \sigma' \tan\phi'$$

Donde:

σ, σ' = esfuerzo total y esfuerzo efectivo

μ = presión de poros

c' = cohesión efectiva

ϕ' = ángulo de fricción efectiva

2.1.3 Condiciones drenadas y no drenadas

Es fundamental realizar una evaluación exhaustiva de las condiciones del suelo para ser analizado en condiciones drenadas o no drenadas. Esta determinación depende del tipo de suelo, condiciones de carga (corto o largo plazo) y tipo de análisis de estabilidad: estática, pseudoestática o postsismo.

El análisis en condiciones drenadas es conducido en términos de esfuerzo efectivo y emplea los parámetros de esfuerzo cortante drenado c' y ϕ' . Esta condición es aplicable generalmente a largo plazo o durante la operación de una estructura, donde el agua intersticial ha tenido tiempo suficiente para disiparse (MacGregor et al., 2014).

En contraste, las condiciones no drenadas ocurren cuando no hay tiempo suficiente para la disipación del exceso de presión de poros, como al final de la construcción o durante un vaciado rápido del depósito. En estos casos, se trabaja con esfuerzos totales y parámetros no drenados c_u y ϕ_u (Knight, 2015; Das y Sobhan, 2013).

Una de las razones principales para utilizar análisis en condiciones no drenadas es la dificultad para calcular exactamente la presión de poros. Este enfoque resulta útil en etapas constructivas o situaciones de carga rápida (MacGregor et al., 2014).

2.2 Depósitos de relaves

Los depósitos de relaves son estructuras destinadas a almacenar relaves. Estos relaves son contenidos y confinados mediante diques o presas construidos a partir de relave grueso o material de préstamo. Los métodos constructivos para las presas de relaves son: aguas arriba, línea central y aguas abajo.

2.2.1 Propiedades de los relaves

Las propiedades geotécnicas de los relaves varían considerablemente dependiendo del mineral del que provienen, del método de procesamiento del mineral y de la capacidad del mineral para oxidarse. Dentro de las propiedades de los relaves se puede

mencionar el tamaño de las partículas, la mineralogía (relacionado con composición de las partículas), densidad seca, relación de vacíos, permeabilidad, pendiente de disposición, la resistencia al corte en condiciones drenada y no drenadas (MacGregor et al., 2014).

Durante el proceso de disposición, se produce una segregación horizontal y vertical de partículas, debido a que las partículas gruesas sedimentan con mayor rapidez que las más finas. Como resultado, las partículas gruesas se depositan cerca de los puntos de descarga y en la base de las capas, pudiendo formar una capa fina de arena. Esta segregación depende del método de descarga y del contenido de sólidos del relave descargado (MacGregor et al., 2014).

En cuanto a su comportamiento mecánico, los relaves pueden presentar una respuesta contractiva, lo que implica un aumento en la presión de poros bajo cargas rápidas o eventos sísmicos. Esta característica hace necesario no solo realizar análisis en condiciones no drenadas, sino también evaluaciones postsismo que consideren una resistencia residual asociada a la post licuación (MacGregor et al., 2014).

El análisis postsismo se realiza a partir de la resistencia residual no drenada, S_{ur} , esta es la mínima resistencia de un material luego de haber sido sometido al fenómeno de licuación. Esta se obtiene a partir de ensayos cíclicos de laboratorio. Además, estudios como los de Olson y Stark (2002) han desarrollado correlaciones empíricas entre S_{ur} y parámetros obtenidos en ensayos in situ como la resistencia de punta del CPT y el número de golpes del SPT con la resistencia residual no drenada para arenas y arenas limosas.

Para esta investigación se usará la relación con SPT modificada por Olson y Johnson (2008) con una aceptación del número de golpes hasta 16, corregido por energía y contenido de finos $(N_1)_{60-CS}$.

$$S_{ur} = 0.3 + 0.0075 (N_1)_{60-CS} \pm 0.3$$
$$(N_1)_{60-CS} \leq 16$$

2.2.2 Métodos de construcción de presas

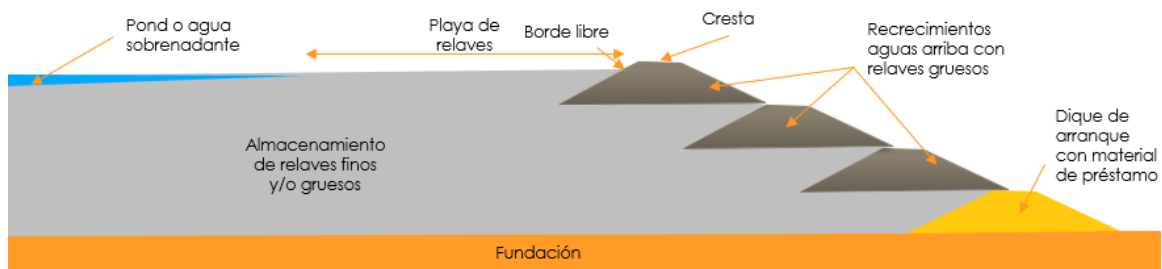
La construcción del dique o cuerpo de la presa de almacenamiento se realiza, por lo general, en fases o mediante recrecimientos, según la demanda anual de capacidad generada por los relaves. Los materiales empleados para la construcción presa de contención pueden incluir materiales de préstamo, material enrocado, material de desmonte no generador de acidez y relaves gruesos resultantes del proceso de cicloneo, dispuestos estratégicamente junto con otros materiales para garantizar un control efectivo de las filtraciones y lograr una estabilidad geotécnica.

Los métodos constructivos más comunes para recrecimiento presas son: crecimiento línea central, aguas abajo y aguas arriba. Cabe señalar que, en el Perú, el método aguas arriba se encuentra prohibido desde 2014 por el Artículo 77 del Decreto Supremo N° 040-2014-EM. Sin embargo, en esta investigación se desarrolla un caso aplicativo de una presa existente construida con el método aguas arriba, ver Figura 1, en esta se presentan algunas características de diseño de este tipo de presas:

- El dique de arranque puede estar conformado por material de préstamo, lo cual permite el drenaje de las filtraciones y el control de la erosión.
- La descarga del relave debe ser controlada para asegurar que el material más grueso del relave sea depositado cerca de la presa de arranque. Esto es importante para el control de las filtraciones.
- El agua sobrenadante debe mantenerse lejos de la presa. Para evitar inestabilidad, erosión la erosión interna o tubificación en la presa.
- Este método es poco recomendado en zonas con riesgo sísmico, dado que el material grueso del relave, con densidad relativa media o baja, puede licuar si se encuentra saturado y es sometido a un evento sísmico.

Figura 1

Esquema referencial del método constructivo aguas arriba



Nota: Fuente elaboración propia

2.3 Análisis de estabilidad

Según la norma CE.020 del Reglamento Nacional de Edificaciones del Perú, los suelos o rocas con poca capacidad de carga o susceptibles a los asentamientos, requieren ser estabilizados, ya sea cuando se realizan excavaciones o cuando se alteran las condiciones de equilibrio de los taludes, puesto que se produce inestabilidad, poniendo en riesgo la vida humana, bienes materiales y medio ambiente.

Para la evaluación de las condiciones de estabilidad de una ladera, talud en corte o relleno se tendrán en cuenta:

- Mecánica de suelos y rocas
- Comportamiento geodinámico del área
- Flujo de agua
- Geometría del talud o ladera
- Topografía del entorno
- Agentes externos

Las condiciones mencionadas serán representadas en el modelamiento del problema para poder cuantificar la estabilidad física del talud mediante un valor denominado factor de seguridad.

Las propiedades físicas y mecánicas de los materiales geotécnicos se determinarán mediante ensayos de campo y laboratorio. Será necesario tener en cuenta los modos operativos correspondientes a cada ensayo y a cada necesidad.

Las cargas sísmicas pueden generar problemas de movimientos del talud. Un sismo establece mayor probabilidad de riesgo de ocurrencias de geodinámicas externas. El profesional responsable en su estudio deberá detallar aquellas zonas identificadas como críticas.

Según indica Lottermoser (2007), en Knight (2015), “la pendiente del talud, las propiedades del material, la naturaleza de la fundación, el grado de compactación, el régimen hidráulico dentro y alrededor de la presa influyen en la estabilidad de la presa”. Esta estabilidad de la estructura usualmente se verifica usando el método de equilibrio límite y métodos numéricos, como el método de elementos finitos.

Tanchev, (2014) indica que en una presa se debe realizar el análisis de los taludes aguas abajo y aguas arriba para las condiciones más críticas. Las condiciones críticas de estabilidad de la presa indicadas son: al final de la construcción, durante la operación con un flujo estacionario establecido (llamado también condición de servicio) y durante el desembalse rápido. Para una presa de tierra, las condiciones más críticas para el talud aguas arriba son al final de la construcción y durante el desembalse rápido, para el talud aguas abajo son al final de la construcción y durante la operación.

2.3.1 Análisis límite

El análisis límite es una metodología matemática, fundamentada en la teoría de la plasticidad, que permite determinar de forma directa y eficiente la carga límite o de colapso de una estructura.

El análisis límite, basado en la teoría de plasticidad, ha demostrado ser una herramienta poderosa para abordar problemas geotécnicos (Drucker & Prager, 1952). En

geotecnia, el modelo de material rígido perfectamente plástico (RPP) es comúnmente utilizado para simplificar el comportamiento esfuerzo-deformación de los suelos y rocas.

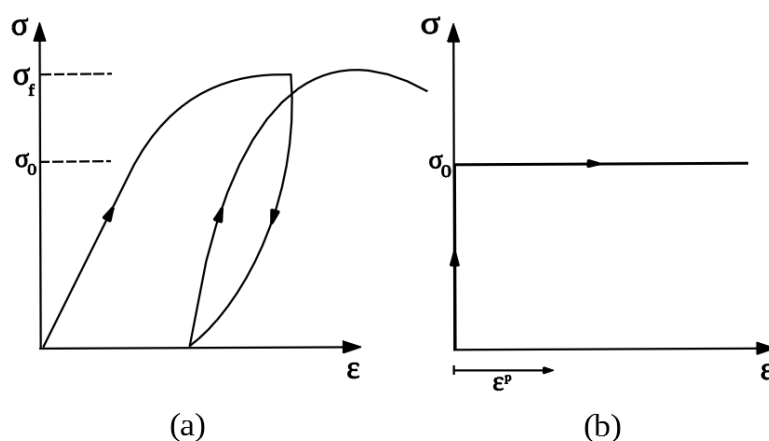
Este modelo ignora las deformaciones elásticas, considerando que al alcanzar el esfuerzo de rotura (σ_f), el material se deforma plásticamente de manera indefinida. Así, se puede estimar la carga de colapso sin considerar el campo completo de deformaciones, siendo útil, por ejemplo, para determinar la capacidad portante de cimentaciones o evaluar la estabilidad de taludes mediante el análisis límite.

Las hipótesis del análisis límite son las siguientes (Chen, 1975):

- **Comportamiento RPP del material:** No se considera el endurecimiento ni ablandamiento del material; la superficie de fluencia es fija y no depende del histórico de cargas.
- **Ausencia de deformaciones elásticas:** No existen deformaciones elásticas ($\varepsilon_{ij}^e = 0$), entonces solo existen deformaciones plásticas ε_{ij}^p , mostrado en la Figura 2. Está comprobado en Drucker et al. (1952) cuando la carga de colapso es alcanzada, las tasas de deformación son puramente plásticas, entonces podrá ser considerado el comportamiento en el colapso como del comportamiento RPP ($\varepsilon_{ij}^{total} = \varepsilon_{ij}^p$).

Figura 2

Curvas de esfuerzo - deformación



Nota: a) Resultado típico de un ensayo de carga y descarga de un suelo en laboratorio b) Curva esfuerzo - deformación para un comportamiento Rígido Perfectamente Plástico. Fuente: elaboración propia

- **Superficie de fluencia convexa y ley de flujo asociada:** Cualquier incremento de esfuerzos no atraviesa y es tangente a la superficie de fluencia.
- **Cambios de la geometría mínimos:** Se asume que las deformaciones son pequeñas incluso durante el colapso, lo que permite aplicar el principio del trabajo virtual.

El concepto de análisis límite se complementa con los teoremas de Drucker y Prager, regla de flujo, y principio de las potencias virtuales, cada uno explicado en las Secciones 2.4, 2.5 y 2.6, respectivamente.

2.3.2 Método de equilibrio límite

El método de equilibrio límite es una técnica de análisis geotécnico que evalúa la estabilidad de un macizo o suelo mediante el equilibrio estático de fuerzas y momentos, considerando una superficie de falla potencial y las condiciones de resistencia del material, con el fin de calcular el factor de seguridad.

El método de equilibrio límite es el más antiguo para el análisis de estabilidad, introducido en un contexto geotécnico por Coulomb en 1773. Este enfoque supone un mecanismo de falla específico y asume que los esfuerzos en los planos de falla están limitados por los parámetros de resistencia tradicionales: cohesión (c) y ángulo de fricción (ϕ). (Sloan, 2013)

Sus principales ventajas son: Simplicidad y facilidad de uso. Historia extensa y disponibilidad de software, lo que brinda confianza en su aplicación. Sin embargo, tiene varias limitaciones según Sloan (2013):

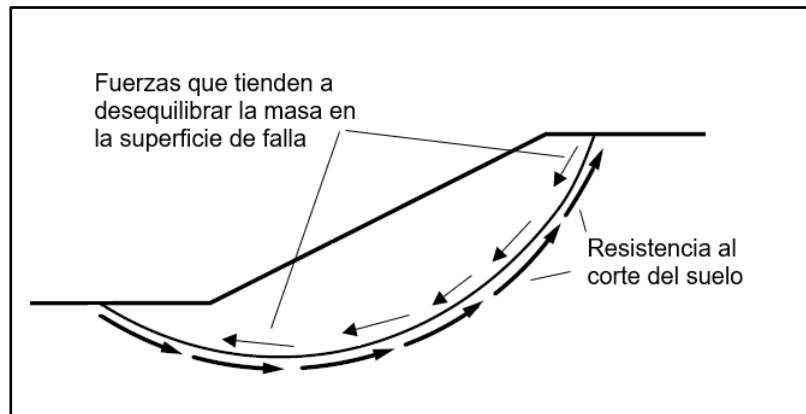
- Dependencia del mecanismo de falla asumido.
- Elegir incorrectamente la forma de la superficie de falla puede llevar a estimaciones imprecisas de la carga de falla.
- Falta de equilibrio interno: Los esfuerzos no satisfacen el equilibrio en todos los puntos del dominio.
- Limitaciones para incorporar anisotropía o heterogeneidad del terreno.
- Dificultad para extenderse a 3D.

El factor de seguridad se define como:

$$FS = \frac{\text{Esfuerzo cortante resistente del suelo}}{\text{Esfuerzo cortante actuante en la superficie de falla}}$$

Figura 3

Fuerzas consideradas en una falla circular

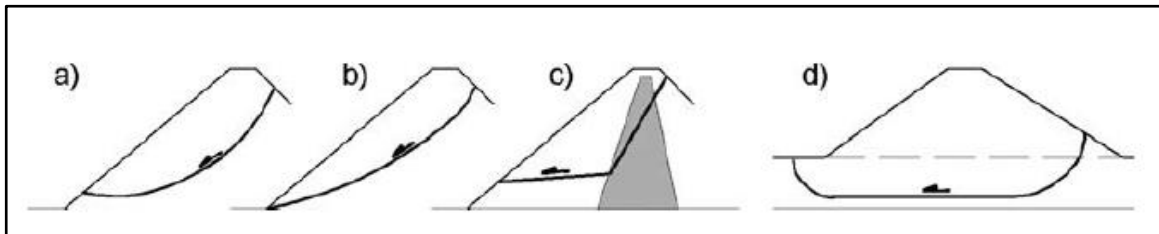


Nota: Fuente Tanchev (2014).

Para encontrar la superficie de falla más crítica, se deben evaluar múltiples superficies potenciales, considerando geometrías circulares, no circulares o en bloques (ver Figura 4).

Figura 4

Mecanismos de falla



Nota: a) Falla Circular, b) No circular c) Bloque y d) No circular profunda. Fuente Tanchev (2014).

En la Tabla 1 se muestran los diferentes métodos para resolver el equilibrio límite y sus características. La principal diferencia entre estos métodos son los valores que se asumen, debido a que los problemas son estáticamente indeterminados, es decir el número de ecuaciones de equilibrio es menor que el número de variables no conocidas.

Tabla 1

Características de los métodos de equilibrio límite para el análisis de taludes

| Métodos | Características |
|---|--|
| Tablas de estabilidad (Janbu, 1968; Duncan, et al., 1987) | <ul style="list-style-type: none">Lo suficiente preciso para algunos propósitos de estimaciones iniciales. |

| Métodos | Características |
|---|--|
| Método ordinario de dovelas (Fellenius, 1927) | <ul style="list-style-type: none"> Solo para superficies de falla circulares. Satisface el equilibrio de momentos. No satisface el equilibrio de fuerzas horizontales y verticales. En la mayoría de los casos subvalora el valor del factor de seguridad. |
| Método modificado de Bishop (1955) | <ul style="list-style-type: none"> Solo para superficies de falla circulares. Satisface el equilibrio de momento y fuerzas verticales. No satisface el equilibrio de las fuerzas horizontales. |
| Método de Janbu (1968) | <ul style="list-style-type: none"> Para cualquier superficie de falla. Satisface todas las condiciones de equilibrio. Permite que la ubicación de las fuerzas laterales varíe. Problemas numéricos más frecuentes que en otros métodos. |
| Método de Morgenstern y Price (1965) | <ul style="list-style-type: none"> Para cualquier superficie de falla. Satisface todas las condiciones de equilibrio. Permite que la ubicación de las fuerzas laterales varíe. |
| Método de Spencer (1967) | <ul style="list-style-type: none"> Para cualquier superficie de falla. Satisface todas las condiciones de equilibrio. Se asume que las fuerzas laterales son paralelas. |

Nota: fuente MacGregor et al., 2014.

Los métodos más completos que satisfacen todas las condiciones de equilibrio y que son más usados en el equilibrio límite son los métodos de Morgenstern y Price (1965) y Spencer (1967). En la presente investigación se empleará el método de Spencer implementado en el software Slide.

2.3.3 Método de reducción de parámetros

El método de reducción de resistencia al corte es una técnica numérica utilizada principalmente en el análisis por elementos finitos para evaluar la estabilidad de taludes y estructuras de suelo. Consiste en reducir progresivamente los parámetros de resistencia al corte del material hasta que el modelo alcanza una condición de falla, siendo el factor de reducción aplicado equivalente al factor de seguridad.

Otra metodología para evaluar la estabilidad es el método reducción de parámetros dentro del marco de los elementos finitos. Este método es capaz de solucionar ecuaciones

diferenciales para problemas de geometría y condiciones complicadas, tanto bidimensional como tridimensional.

En este enfoque, los parámetros de resistencia (cohesión c y ángulo de fricción ϕ) se reducen progresivamente mediante un factor de reducción hasta que el modelo colapsa (Zienkiewicz et al., 1975). El factor de seguridad (FS) es entonces la inversa del factor de reducción en el colapso.

Este análisis requiere varias iteraciones, y a medida que los parámetros se reducen, el sistema de ecuaciones se vuelve indeterminado, indicando la condición de falla.

2.4 Teoremas de Drucker y Prager

Teoremas de la plasticidad también considerados como teoremas del análisis límite, fueron propuestos por Drucker y Prager (1952).

2.4.1 Teorema del Límite Inferior (TLI)

El colapso no ocurre si el suelo presenta un estado de esfuerzos que satisfaga las ecuaciones de equilibrio y las condiciones de borde, abajo del límite ($f(\sigma_{ij}) \leq 0$). (Drucker et al., 1952).

Si un campo de esfuerzos σ_{ij} , distribuido en todo el cuerpo, satisface las condiciones de equilibrio respecto a las cargas aplicadas en el contorno y el dominio no infringe el criterio de fluencia ($f(\sigma_{ij}) \leq 0$), entonces el campo de esfuerzos es estáticamente admisible y la carga correspondiente es un límite inferior de la carga de colapso. (Chen, 1975).

En este trabajo se presenta la aplicación de este teorema, en el problema de optimización adelante descrito en la ecuación (17).

2.4.2 Teorema del Límite Superior (TLS)

El colapso ocurre para cualquier deformación plástica compatible siempre que la velocidad del trabajo externo sea igual o mayor a la velocidad de disipación de energía interna (Drucker et al., 1952)

Si un mecanismo compatible de deformación plástica satisface las condiciones de compatibilidad en velocidades en el contorno, entonces el campo de las velocidades es cinéticamente admisible. Este campo será determinado por la igualdad de la tasa de trabajo externo con la tasa de disipación de energía interna, en que ambos serán iguales o mayores que la carga límite verdadera. (Chen, 1975).

Las velocidades obtenidas con el teorema de límite superior hacen referencia a un campo de velocidades cinemáticamente admisible que describe cómo se mueve el material en el instante del colapso. Estas velocidades no representan el movimiento real del sistema bajo carga, sino un mecanismo idealizado de deformación en el momento del fallo. Sirven para construir un mecanismo teórico de falla, lo que permite determinar un límite superior de la carga crítica, asegurando que la estructura fallará bajo esta o una carga menor (Sloan, 2013).

Cabe resaltar que, aunque la metodología del equilibrio límite emplea la filosofía del teorema del límite superior, esta no satisface los requisitos del teorema, pues no considera la cinemática del medio. Por lo tanto, la solución a través del equilibrio límite no necesariamente es un límite superior ni inferior (Chen, 1975).

2.4.3 Teorema de unicidad

El teorema de unicidad es complementario para garantizar la existencia de una solución única para la carga de colapso. A partir de los dos teoremas del análisis límite, se puede encontrar una carga para satisfacer las dos condiciones (Barros, 2014):

- La existencia de un campo de esfuerzos estáticamente admisible correspondiente a los esfuerzos dentro o sobre la superficie de colapso. En este caso la carga correspondiente es menor o igual a la carga de colapso.
- La existencia de un campo de desplazamientos geoméricamente admisible. En este caso, la carga correspondiente es obtenida de la igualdad del trabajo externo y trabajo interno plástico.

Cuando ambas condiciones son satisfechas simultáneamente, la carga encontrada es igual a la carga de colapso, siendo así determinada de manera única.

2.5 Regla de flujo

La teoría de la regla de flujo se origina en la teoría de plasticidad de los metales propuesta por Hencky (1924), esta regla consiste en una relación constitutiva entre esfuerzo actual y la deformación plástica total, independientemente de la trayectoria de esfuerzos al que el material es sometido. Esta teoría es un punto de partida para los suelos que utilizan versiones ajustadas a las evidencias experimentales que depende fundamentalmente de la trayectoria de tensiones impuesta por la carga externa.

La teoría de la plasticidad incremental (o teoría de fluencia) admite como propia hipótesis básica que existe una relación lineal entre el incremento infinitesimal de esfuerzo y el incremento infinitesimal de deformaciones plásticas (Davis & Selvadurai, 2002).

La regla de flujo depende de la función de fluencia (f); si esta fuera fija, para materiales que no presentan ni endurecimiento ni ablandamiento, entonces se puede llamar de regla de flujo asociada; sin embargo, de no poseer estas características tendrá que ser empleada la regla de flujo no asociada porque la dirección de la deformación plástica no necesariamente coincide con la dirección del esfuerzo aplicado, esta última dependerá del potencial plástico (Q). (Davis & Selvadurai, 2002). Ver Figura 5.

La regla de flujo asociada mostrada en la ecuación (1) debe ser empleada solo cuando el ángulo de fricción fuera igual a cero. Es decir, para suelos cohesivos saturados en la condición no drenada.

$$\dot{\varepsilon}_k^p = d\lambda \frac{\partial f(\sigma)}{\partial \sigma_k}, \quad k=1,2,3 \quad (1)$$

donde:

$\dot{\varepsilon}^p$: Tasa de deformación plástica

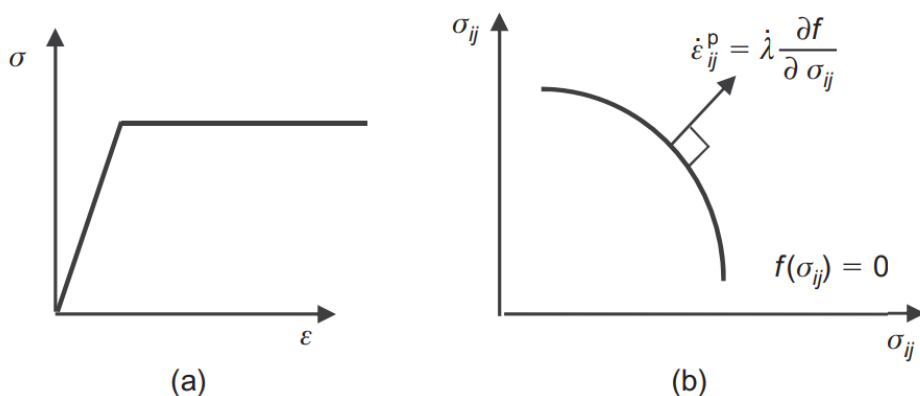
$f(\sigma)$: Función de fluencia

σ_k : Esfuerzos en las direcciones principales

$d\lambda$: Coeficiente multiplicador o coeficiente de Lagrange (No tiene relación con el factor de colapso que se verá más adelante)

Figura 5

Regla de flujo asociada



Nota: a) Diagrama esfuerzo deformación perfectamente plástico b) regla de flujo asociada. Fuente: Sloan (2013)

El potencial plástico define cómo se deforma un material de manera irreversible cuando entra en el régimen plástico. En suelos, donde las deformaciones pueden ser

complejas debido a fenómenos como la dilatación (expansión bajo corte) y las interacciones entre partículas, una regla de flujo no asociada, dado que el flujo plástico no sigue directamente el estado de esfuerzo que causa la fluencia.

2.6 Principio de las potencias virtuales

En el marco del teorema del límite superior, la carga de colapso se determina igualando la potencia interna disipada con el trabajo realizado por las fuerzas externas. Esta relación se utiliza para encontrar un límite superior de la carga que llevará al fallo de la estructura.

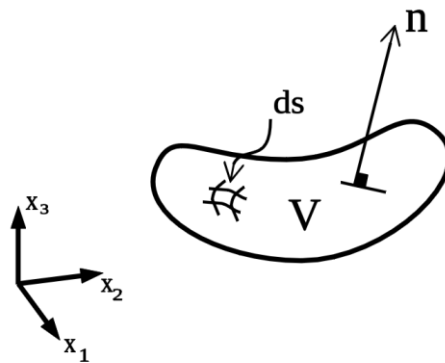
Este principio parte del hecho de que la suma de fuerzas sobre una partícula (incluida la fuerza de inercia de d'Alembert en casos dinámicos) debe ser cero. Al introducir un vector de velocidad virtual, se otorga a la ecuación el significado de potencia. Este vector no representa necesariamente la velocidad real del sistema.

La formulación fuerte de la ecuación del movimiento de un cuerpo de volumen V superficie S y vector \mathbf{n} , normal a la superficie, ver Figura 6, es presentada por Cauchy en el caso de equilibrio estático y es descrito en la ecuación (2).

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0 \quad (2)$$

Figura 6

Cuerpo de volumen V , superficie S y vector n normal a la superficie



Nota: Fuente Sloan (2013)

Para emplear la técnica de los elementos finitos, se usa el método de residuos ponderados citada en la ecuación (3). Es decir, al multiplicar las ecuaciones del movimiento por una velocidad virtual \dot{u}_i (inexistente, pero posible) y al integrar en el volumen V , resulta:

$$\int_V \dot{u}_i (\sigma_{ij,j} + b_i) dV = 0 \quad (3)$$

Recordando que:

$$(\dot{u}_i \sigma_{ij})_{,j} = \dot{u}_i \sigma_{ij,j} + \dot{u}_{i,j} \quad (4)$$

entonces,

$$\dot{u}_i \sigma_{ij,j} = (\dot{u}_i \sigma_{ij})_{,j} - \dot{u}_{i,j} \sigma_{ij} \quad (5)$$

se sustituye la ecuación (5) en la ecuación (3)

$$\int_V ((\dot{u}_i \sigma_{ij})_{,j} - \dot{u}_{i,j} \sigma_{ij}) dV + \int_V (\dot{u}_i b_i) dV = 0 \quad (6)$$

Recordando el teorema de divergencia de Gauss (aplicable solo para un medio continuo e irrotacional):

$$\int_V (\dot{u}_i \sigma_{ij})_{,j} dV = \int_S \dot{u}_i \sigma_{ij} n_j dS = \int_S \dot{u}_i t_i dS \quad (7)$$

Entonces la ecuación (6), puede ser escrita como:

$$\int_V (\dot{u}_{i,j} \sigma_{ij}) dV = \int_V \dot{u}_i b_i dV + \int_S \dot{u}_i t_i dS \quad (8)$$

Teniendo en cuenta la simetría del tensor de esfuerzos $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ para un medio isotrópico, se tiene que:

$$\begin{aligned} \dot{u}_{i,j} \sigma_{ij} &= \frac{1}{2} (\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i}) \sigma_{ij} = \frac{1}{2} (\dot{u}_{i,j} \sigma_{ij} + \dot{u}_{j,i} \sigma_{ji}) = \frac{1}{2} (\dot{u}_{i,j} \sigma_{ij} + \dot{u}_{j,i} \sigma_{ij}) \\ \dot{u}_{i,j} \sigma_{ij} &= \frac{1}{2} (\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i}) \sigma_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij} \sigma_{ij} \end{aligned} \quad (9)$$

Finalmente se llega a la formulación débil (no contiene derivadas y es comúnmente usada en la técnica de los elementos finitos):

$$\int_V \dot{\epsilon}_{ij} \sigma_{ij} dV = \int_V \dot{u}_i b_i dV + \int_S \dot{u}_i t_i dS \quad (10)$$

Para tener en cuenta lo anterior descrito en la plasticidad, se tiene que adoptar los dos postulados de Drucker (1959-1964).

- El trabajo realizado por una fuerza externa que se aplica lentamente un conjunto de tensiones debe ser positivo
- El trabajo realizado por un agente externo que se remueve un conjunto de tensiones debe ser positivo.

Ahora se puede definir la potencia virtual,

$$dP = \sigma_{ij} d\dot{\epsilon}_{ij} \quad (11)$$

donde:

$$d\dot{\epsilon}_{ij} = d\dot{\epsilon}_{ij}^e + d\dot{\epsilon}_{ij}^p \quad (12)$$

Se considera la hipótesis del comportamiento del material RPP ($\varepsilon_{ij}^e = 0$), luego se divide por (dt) las dos ecuaciones (10) y (12). Entonces se tiene la definición del principio de potencias virtuales \dot{P} por el agente externo, ecuaciones (13) y (14):

$$\dot{P}_{\text{ext}} = \int_V \dot{u}_i b_i dV + \int_S \dot{u}_i t_i dS \quad (13)$$

$$\dot{P}_{\text{int}} = \int_V \dot{\varepsilon}_{ij} \sigma_{ij} dV \quad (14)$$

Para que el sistema se encuentre en equilibrio, la potencia virtual interior debe ser menor o igual a la potencia virtual externa, ver ecuación (15) o (16).

$$\dot{P}_{\text{int}} \leq \dot{P}_{\text{ext}} \quad (15)$$

o

$$\int_V \dot{u}_i b_i dV + \int_S \dot{u}_i t_i dS \leq \int_V \dot{\varepsilon}_{ij}^p \sigma_{ij} dV \quad (16)$$

Por el teorema del límite inferior y condición de equilibrio (la potencia virtual externa es igual a la interna) se plantea el problema de optimización ecuación (17)

maximizar λ
sujeto a:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda \left(\int_V \dot{u}_i b_i dV + \int_S \dot{u}_i t_i dS \right) = \int_V \dot{\varepsilon}_{ij}^p \sigma_{ij} dV \\ f(\sigma_{ij}) \leq 0 \end{array} \right. \quad (17)$$

Donde el máximo valor de λ es denominado como factor de colapso según el teorema de límite inferior.

El principio de las potencias virtuales es usado para el problema de colapso, justificado que se asume que las deformaciones generadas durante el colapso son despreciables, entonces se puede considerar que todas las velocidades virtuales son generadas por las fuerzas externas en equilibrio y que finalmente será traducido a potencias virtuales. Aquí se relaciona un campo estáticamente admisible en equilibrio con un campo cinéticamente admisible (Chen, 1975).

2.7 Optimización matemática

La optimización, o programación matemática, es una rama de la matemática que trata de determinar distribuciones óptimas de recursos limitados para satisfacer ciertos objetivos. Específicamente trata de maximizar o minimizar alguna cantidad numérica sujeta a restricciones (Hadley, 1982).

En un sentido más amplio, las técnicas de programación matemática constituyen herramientas matemáticas para resolver los llamados problemas de optimización, que son aquellos que buscan maximizar o minimizar una función numérica de un determinado número de variables, las que están sujetas a ciertas restricciones.

2.7.1 Resumen histórico de la optimización

Los primeros problemas de optimización surgieron en la década de 1930 en el sector de Economía, donde una solución óptima de recursos generó gran interés para los economistas.

Posteriormente, la optimización evolucionó más con la industria que implicaba resolver ecuaciones lineales simultáneas. Durante la segunda guerra mundial, George B. Dantzing, miembro de la fuerza aérea de Estados Unidos, formuló el problema general de programación lineal e idealizó el método SIMPLEX en el año 1947. Este fue inaccesible hasta 1951, cuando Cowles Commission Monograph N°13 lo publicó (KOOB 51)

Desde entonces, el avance en la optimización fue vertiginoso. Figuras como David Gale, Harold William Kuhn y Albert William Tucker realizaron contribuciones fundamentales, especialmente en las teorías de la dualidad y la programación lineal y no lineal.

En el campo de la geotecnia, Lysmer (1970) fue pionero en aplicar la técnica de elementos finitos y teoría de optimización para obtener límites inferiores rigurosos en problemas geotécnicos de deformación plana. Utilizó elementos triangulares lineales de tres nodos, donde las incógnitas eran las tensiones normales en los extremos de cada lado y una tensión normal interna. Para resolver el problema de optimización, empleó programación lineal. El criterio de fluencia de Mohr-Coulomb, en su forma original, implica restricciones cuadráticas no lineales, difíciles de manejar en un problema de programación lineal. Lysmer evitó esta complejidad al aproximar la superficie de fluencia con un poliedro interno, sustituyendo las desigualdades no lineales por un conjunto de desigualdades lineales. El número de lados del poliedro determinaba la precisión de la aproximación, pero aumentaba las restricciones y los tiempos de cálculo. En la formulación, las tensiones dentro de cada elemento varían linealmente, y las restricciones de fluencia se imponen en cada nodo para cumplir el teorema del límite inferior. Además, Lysmer incluyó discontinuidades de tensión a lo largo de los bordes entre elementos adyacentes, mejorando significativamente la precisión, especialmente en puntos con singularidades (como en el borde de una cimentación rígida). Sloan (2013)

En años más recientes, un avance significativo se produjo con el desarrollo de la programación cónica, teniendo como uno de los primeros trabajos aplicativos desarrollado por Lobo et al. (1998).

2.7.2 Análisis límite como problema de optimización

Problema primal

El problema primal es el problema original de la optimización. El problema en general de optimización debe ser descrito de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} & \text{minimizar } f(x) \\ & \text{sujeto a:} \\ & \quad \begin{cases} c(x) \leq 0 \\ h(x) = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (18)$$

Entonces, el problema del análisis límite dado por la ecuación (18), es expresada de la forma de la ecuación (19), como sigue:

$$\begin{aligned} & \text{minimizar } (-\lambda) \\ & \text{sujeto a:} \\ & \quad \left\{ \begin{aligned} & \lambda \left(\int_V \dot{u}_i b_i dV + \int_S \dot{u}_i t_i dS \right) - \int_V \dot{\epsilon}_{ij}^p \sigma_{ij} dV = 0 \\ & f(\sigma_{ij}) \leq 0 \end{aligned} \right. \end{aligned} \quad (19)$$

Problema dual

El concepto de dualidad, introducido por Wolfe (1961), establece que a partir de un problema primal se puede derivar un problema dual, cuya solución está intrínsecamente relacionada con la solución del problema primal. Este vínculo entre ambos problemas es clave para mejorar la eficiencia computacional, ya que conocer la solución de uno permite derivar la solución del otro, lo cual se conoce como el teorema de la dualidad.

En el contexto del análisis límite, los teoremas del límite inferior y del límite superior actúan como problemas duales. Esto significa que, al resolver el problema primal (teorema del límite inferior), se puede obtener indirectamente la solución del problema dual (teorema del límite superior). Esta correspondencia dual proporciona un marco teórico robusto para abordar problemas de mecánica de suelos y geotecnia, optimizando el proceso de análisis.

Este enfoque no solo garantiza la validez de las soluciones, sino que también maximiza la eficiencia del cálculo, crucial en el análisis estructuras geotécnicas o no geotécnicas.

Antes de la definición del problema dual del problema primal tiene que ser definida la función lagrangeana \mathcal{L} :

$$L(\sigma, \mu, \gamma) = -\lambda + \mu \left(\lambda \left(\int_V \dot{u}_i b_i dV + \int_S \dot{u}_i t_i dS \right) - \int_V \dot{\epsilon}_{ij}^p \sigma_{ij} dV \right) + \gamma f(\sigma) \quad (20)$$

derivando la función lagrangeana (20):

$$\frac{\partial L}{\partial \sigma} = -\mu \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\int_V \dot{\epsilon}_{ij}^p \sigma_{ij} dV \right) + \gamma \frac{\partial f}{\partial \sigma} \quad (21)$$

Ahora se puede definir el problema dual en la ecuación (22)

$$\begin{aligned} &\text{maximizar } L(\sigma, \mu, \gamma) \\ &\text{sujeto a:} \\ &\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial \sigma} = 0 \\ \gamma \geq 0 \end{array} \right. \quad (22) \end{aligned}$$

donde μ, γ son los multiplicadores de lagrange.

En el análisis límite de estructuras geotécnicas, los multiplicadores de Lagrange desempeñan un papel crucial. Los multiplicadores asociados a las restricciones de igualdad corresponden a las tasas de deformación nodales en el momento del colapso, lo que revela el mecanismo de falla de la estructura. Por otro lado, los multiplicadores asociados a las restricciones de desigualdad están relacionados con los factores de plastificación presentes en la estructura (Chahua et al., 2013).

Para asegurar que el problema de optimización en el análisis límite —tanto en el límite inferior como en el superior— posea un punto crítico, es necesario que se cumplan las condiciones de primer orden, también conocidas como condiciones de Karush-Kuhn-Tucker (KKT). Para que dicho punto crítico sea un mínimo, deben satisfacerse las condiciones de mínimo de segundo orden o condiciones suficientes, tal como lo describen Lyamin y Solan (2002). Finalmente, para asegurar que el punto crítico es la solución óptima, el problema debe cumplir con las condiciones complementarias de segundo orden.

Este conjunto de condiciones garantiza que el problema de optimización esté correctamente formulado y que las soluciones obtenidas sean válidas y representen el comportamiento límite de las estructuras analizadas.

2.7.3 Programación cónica

Fundamentalmente, la programación matemática tuvo un inicio con la programación lineal por Dantzig (1949). Después de esto un gran cambio ocurrió en los últimos años, con el desarrollo de la programación cónica, teniendo como uno de los primeros trabajos aplicativos desarrollado por Lobo et al. (1998).

La programación cónica (PC) es empleada en muchos sectores de la ingeniería y economía, en cualquier problema que involucre problemas de optimización. Los problemas PC pueden ser vistos como una generalización de los problemas de programación lineal (LP) (MOSEK, 2024), donde se presenta una restricción cónica de la siguiente forma: $x \in \mathcal{K}$ donde x es una variable y \mathcal{K} es un cono convexo.

La PC emplea el método del punto interior en grande escala. Además, engloba las programaciones del tipo lineal (LP), cónica de segundo orden (SOCP) y semidefinica (SDP) como se observa en la Figura 7. Una implementación numérica paso a paso del algoritmo de puntos interiores primal dual para optimización cónica cuadrática es presentada por Andersen et al. (2003).

Figura 7

Subcampos de la programación cónica



Nota: Fuente Bruno et al. (2017)

Programación Cónica de Segundo Orden

La programación cónica de segundo orden (SOCP por las iniciales en inglés) es considera un caso particular de la PC, también es conocida como conos de Lorentz con una función objetivo lineal.

El problema de SOCP en general es colocado de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 &\text{minimizar } c^T x \\
 &\text{sujeto a:} \\
 &\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{Ax}=\mathbf{b} \\ x_1 \geq \|x_{2:n}\| \\ x_1 \geq 0 \end{array} \right. \qquad (23)
 \end{aligned}$$

donde la restricción cónica \mathcal{K} de segundo orden es:

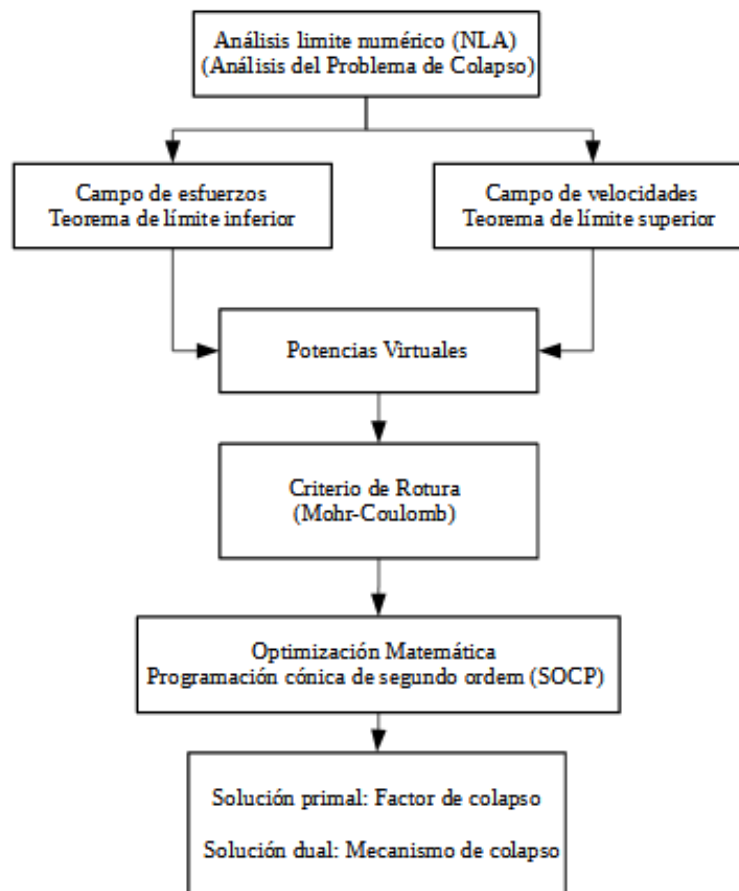
$$x_1 \geq \|x_{2:n}\| \equiv x_1 \geq \sqrt{\sum_{j=2}^n x_j^2} \qquad (24)$$

En este caso la restricción que se adapta a este tipo de programación es el criterio de Drucker- Prager y también el criterio de von Mises. El criterio de Drucker – Prager será adaptado en la sección 3.4.

El resumen del proceso en general se muestra la Figura 8 para resolver el problema de análisis límite con programación cónica de segundo orden.

Figura 8

Diagrama de flujo general para resolver el problema de la metodología numérica del análisis límite



Nota: Fuente Fernandez (2021)

Capítulo III. Implementación numérica

En el presente capítulo se explica la metodología utilizada para la implementación numérica del análisis límite. Esta implementación está basada en el desarrollo explicado en Fernandez et al. (2021), Camargo et al. (2016), Chahua et al. (2013), Sloan (2013), Pachás et al. (2008), Makrodimopoulos et al. (2006).

En seguida, se procederá a recopilar y revisar la información referente a la metodología de análisis de elementos finitos bidimensionales, teoría de la plasticidad en mecánica de suelos, teoría de optimización básica y a gran escala, como es la programación cónica de segundo orden. Se adaptará el criterio de rotura de Mohr-Coulomb a la programación cónica de segundo orden.

Se planteará e implementará el algoritmo para resolución del problema del análisis límite en el lenguaje de programación del MATLAB®, conjuntamente se implementará el algoritmo MOSEK en el código para resolver el problema de optimización del problema.

El procedimiento para resolver los problemas de estabilidad será el siguiente:

- Para el diseño de la malla bidimensional de elementos cuadrangulares empleando el software GID v17, del cual se obtendrá las coordenadas de los nodos de todos los elementos, así también las coordenadas de las condiciones de borde, todos estos ordenados en matrices.
- El código generará una matriz con el arreglo de todos los elementos de la malla, en los cuales se distribuirá las fuerzas internas y externas de acuerdo con la teoría de residuos ponderados, donde se establecerán los esfuerzos en cada elemento y el factor de colapso como variables para optimizar.
- Se optimizará las variables del problema a través del algoritmo MOSEK. Se obtendrá como resultado principal al factor de colapso que indicará el grado de seguridad que tiene la estructura, al que luego convertiremos en factor de seguridad.
- Se presentará los resultados gráficos del mecanismo de falla, a través de las velocidades de deformación de los nodos, para esto se usará el software de visualización Paraview 5.6.
- Finalmente, con fines de comparación y verificación, se desarrollará el problema propuesto de estabilidad en el software Slide Modeler 2018 de Rocscience Inc y Plaxis 2D de Bentley (R).

3.1 Elementos finitos

La técnica de los elementos finitos es un método de aproximación utilizada para resolver problemas continuos. Este método se basa en los siguientes principios:

- El continuo se divide en un número finito de elementos, cuyo comportamiento se especifica mediante un número finito de parámetros asociados a los nodos de estos elementos.
- La solución del sistema completo se obtiene siguiendo las reglas de problemas discretos. El sistema completo se forma mediante el ensamblaje de los elementos individuales.
- Las incógnitas del problema dejan de ser funciones matemáticas y pasan a ser el valor de las funciones en los nodos.
- El comportamiento en el interior de cada elemento queda definido a partir del comportamiento de los nodos mediante las adecuadas funciones de interpolación o de forma.

3.2 Formulación numérica

Para la formulación numérica del análisis límite por el límite inferior, la ecuación (17) debe tener en cuenta la relación tasa de deformación- velocidad a través de la matriz \mathbf{B} y las matrices de interpolación para desplazamiento \mathbf{N}_u y esfuerzos \mathbf{N}_σ , estas relaciones son dadas en las ecuaciones (25).

$$\dot{\epsilon}_i = \dot{u}_i \mathbf{B}, \quad \dot{u}_i = \dot{u}_i \mathbf{N}_u, \quad \sigma = \sigma \mathbf{N}_\sigma, \quad t_i = t_i \mathbf{N}_u \quad (25)$$

Al sustituir las relaciones (25) en la ecuación (17) se obtiene la siguiente expresión:

$$\dot{u}_i \int_V \sigma_{ij} \mathbf{B} dV = \dot{u}_i \lambda \left(\int_S t_i \mathbf{N}_u dS \right) \quad (26)$$

Para una velocidad diferente de cero la ecuación (26) puede expresarse como:

$$\int_V \sigma \mathbf{N}_\sigma \mathbf{B} dV = \lambda \left(\int_S t_i \mathbf{N}_u dS \right) \quad (27)$$

Donde las variables desconocidas son: el campo de esfuerzos σ_{ij} y el factor de colapso λ . Entonces el problema de análisis límite se expresa en la ecuación (28).

minimizar $(-\lambda)$

sujeto a:

$$\begin{cases} \int_V \sigma \mathbf{N}_\sigma \mathbf{B} dV = \lambda \left(\int_S \mathbf{t}_i \mathbf{N}_u dS \right) \\ f(\sigma_{ij}) \leq 0 \end{cases} \quad (28)$$

3.3 Integración numérica

El problema descrito en la ecuación (28) involucra integrales de funciones matriciales definidas, o en intervalos finitos. Aunque puede existir una expresión analítica para resolver la integral, la evaluación de dicha expresión es tan compleja (o costosa) que se torna más eficiente calcular la integral numéricamente.

La integración de la formulación de la ecuación (28) se determina mediante integración numérica, como se expresa en la ecuación (29).

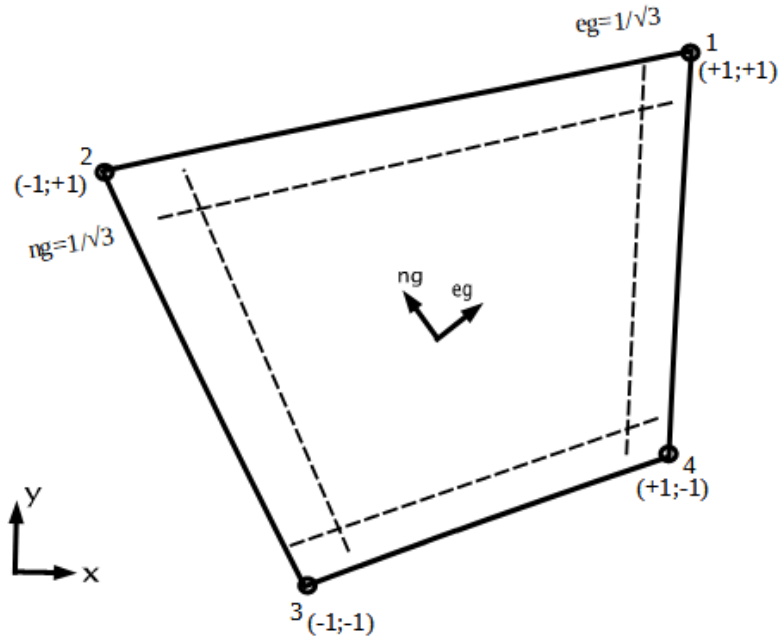
$$\int f(x) dx \cong \sum_{i=1}^n W_i \cdot f(x_i) \quad (29)$$

donde $f(x)$ es a función a integrar, W_i son los pesos de ponderación y x_i son los puntos de integración de Gauss, dependientes del tipo de elemento escogido.

Para este trabajo es escogido el elemento isoparamétrico cuadrangular de 4 nodos lineal, ya que, en comparación con los triángulos, presenta menor número de grados de libertad, por lo tanto, menor número de restricciones. En la Figura 9 muestra las coordenadas locales de cada nodo. Los pesos de ponderación y los puntos de integración para este tipo de elemento son descritos en Cruz (2013).

Figura 9

Puntos de integración (Xi) y pesos de ponderación Wi para un elemento cuadrangular de 4 nodos en coordenadas locales



Nota: Fuente adaptado de Logan (1986)

La numeración de los nodos del elemento cuadrangular de 4 nodos sigue la configuración de la generación de malla del software empleado. En este caso, GiD v17 (International Center for Numerical Methods in Engineering, 2022).

Por lo tanto, la ecuación (28) queda expresada por:

minimizar $(-\lambda)$
 sujeto a:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^4 \sigma \mathbf{N}_i \mathbf{B}_i \mathbf{J} |W_{eg_i} W_{ng_i}| = \lambda \left(\sum_{i=1}^4 t_i \mathbf{N}_i \mathbf{J} |W_{eg_i} W_{ng_i}| + \sum_{i=1}^4 b_i \mathbf{N}_i \mathbf{J} |W_{eg_i} W_{ng_i}| \right) \\ f(\sigma_{ij}) \leq 0 \end{array} \right. \quad (30)$$

Los valores de la matriz de interpolación son obtenidos mediante las siguientes ecuaciones:

$$N1 = \frac{1}{4}(1-eg)(1-ng)$$

$$N2 = \frac{1}{4}(1-eg)(1+ng)$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1+eg)(1-ng) \quad (31)$$

$$N_4 = \frac{1}{4}(1+eg)(1+ng)$$

La matriz de interpolación \mathbf{N} para un elemento, sigue el siguiente arreglo (32) de las ecuaciones (31).

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_1 \\ \vdots & \vdots \\ N_4 & 0 \\ 0 & N_4 \end{bmatrix}_{8 \times 2} \quad (32)$$

Para determinar a matriz Jacobiana, se tiene que derivar parcialmente las ecuaciones de (31) en relación con cada eje local.

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial eg} &= \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial eg} x_i & \frac{\partial x}{\partial ng} &= \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial ng} x_i \\ \frac{\partial y}{\partial eg} &= \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial eg} y_i & \frac{\partial y}{\partial ng} &= \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial ng} y_i \end{aligned} \quad (33)$$

La matriz Jacobiana presenta el siguiente arreglo (34) de las ecuaciones (33):

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \partial x / \partial eg & \partial y / \partial eg \\ \partial x / \partial ng & \partial y / \partial ng \end{bmatrix} \quad (34)$$

La matriz \mathbf{B} (relación de tasa de deformación – velocidad) es dada por:

$$\mathbf{B} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{\Gamma} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} \cdot d \quad (35)$$

donde:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (36)$$

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}^{-1}_{11} & \mathbf{J}^{-1}_{12} & 0 & 0 \\ \mathbf{J}^{-1}_{21} & \mathbf{J}^{-1}_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{J}^{-1}_{11} & \mathbf{J}^{-1}_{12} \\ 0 & 0 & \mathbf{J}^{-1}_{21} & \mathbf{J}^{-1}_{22} \end{bmatrix} \quad (37)$$

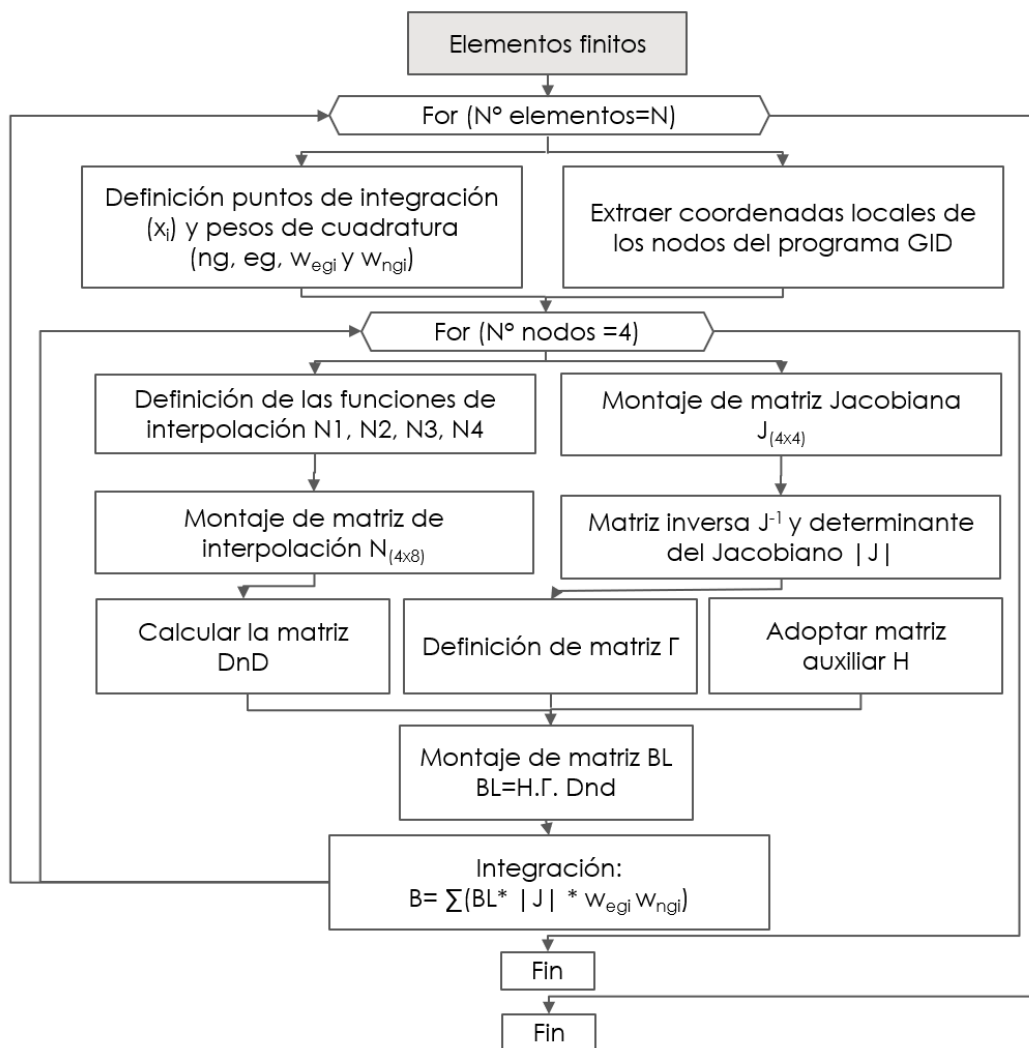
y

$$Dnd = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial eg} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial eg} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial eg} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial eg} & 0 \\ \frac{\partial N_1}{\partial ng} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial ng} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial ng} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial ng} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial eg} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial eg} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial eg} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial eg} \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial ng} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial ng} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial ng} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial ng} \end{bmatrix}_{4 \times 8} \quad (38)$$

En resumen, se presenta el diagrama de flujo para programación del procesamiento de elementos finitos en la Figura 10.

Figura 10

Diagrama de flujo simplificado del desarrollo con elementos finitos para preparar las matrices que representan el problema geotécnico



Nota: Fuente elaboración propia

3.4 Adaptación del criterio de rotura Mohr-Coulomb a la forma cónica de segundo orden

La adaptación del criterio de rotura de Mohr-Coulomb permite expresar la segunda invariante de esfuerzos desviadores, en función de la matriz \mathbf{P} y del vector de esfuerzos σ , según Makrodimopoulos, (2006) y Bruno et al. (2017)

$$J_2 = \sigma^T \mathbf{P} \sigma \quad (39)$$

donde:

$$\sigma = [\sigma_{11} \ \sigma_{22} \ \sigma_{12}] = [\sigma_x \ \sigma_y \ \tau_{xy}] \quad (40)$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (41)$$

La matriz \mathbf{P} puede ser descompuesta de la siguiente forma:

$$\mathbf{P} = \mathbf{V}^T \mathbf{D} \mathbf{V} = \mathbf{V}^T \mathbf{D}^{1/2} \mathbf{D}^{1/2} \mathbf{V} = \mathbf{L}^T \mathbf{L} \quad (42)$$

donde \mathbf{V} es la matriz de los autovectores de \mathbf{P} y \mathbf{D} es a matriz diagonal de los autovalores de \mathbf{P} . Entonces la matriz \mathbf{L} está dada por:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & -1/2 & 0 & 0 & 0 \\ -\sqrt{3}/6 & 2\sqrt{3}/6 & -\sqrt{3}/6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (43)$$

que substituyendo en la ecuación (39) resulta:

$$\sqrt{J_2} = \sqrt{\sigma^T \mathbf{L}^T \mathbf{L} \sigma} = \|\mathbf{L} \sigma\| \quad (44)$$

La primera invariante es expresado de la siguiente forma:

$$I_1 = \sigma^T \mathbf{b} \quad (45)$$

donde: $\mathbf{b} = \{1, 1, 1, 0, 0, 0\}^T$, entonces se substituye las ecuaciones (44) y (45)

$$\|\mathbf{L} \sigma\| + \alpha \sigma^T \mathbf{b} - k \leq 0 \quad (46)$$

La ecuación (46) se puede desarrollar como sigue:

$$\sqrt{\left(\frac{1}{2}\sigma_x - \frac{1}{2}\sigma_y\right)^2 + \tau_{xy}^2} + \frac{\text{Sen}\phi}{2}(\sigma_x + \sigma_y) - c \cdot \text{Cos}\phi \leq 0 \quad (47)$$

La ecuación (47) se puede expresar en función de la matriz \mathbf{Q} y los vectores ρ y σ :

$$\rho = \mathbf{Q} \sigma + q \quad (48)$$

donde el vector $\boldsymbol{\rho} = \{\rho_1, \rho_2, \rho_3\}^T$ pertenece al espacio cónico cuadrático K , $\rho_1 \geq \sqrt{\rho_2^2 + \rho_3^2}$, el vector $\mathbf{q} = \{2c \cos \phi, 0, 0\}^T$ y la matriz \mathbf{Q} es dada por:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -\text{Sen}\phi & -\text{Sen}\phi & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (49)$$

Luego:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{Q}^{-1} \boldsymbol{\rho} - \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{q} \quad (50)$$

Finalmente, sustituyendo la ecuación (50) en la formulación general del problema ecuación (28), se obtiene la formulación de la metodología numérica del análisis límite (NLA) utilizando el modelo de rotura Mohr-Coulomb en términos de programación cónica de segundo orden (SOCP):

minimizar $(-\lambda)$

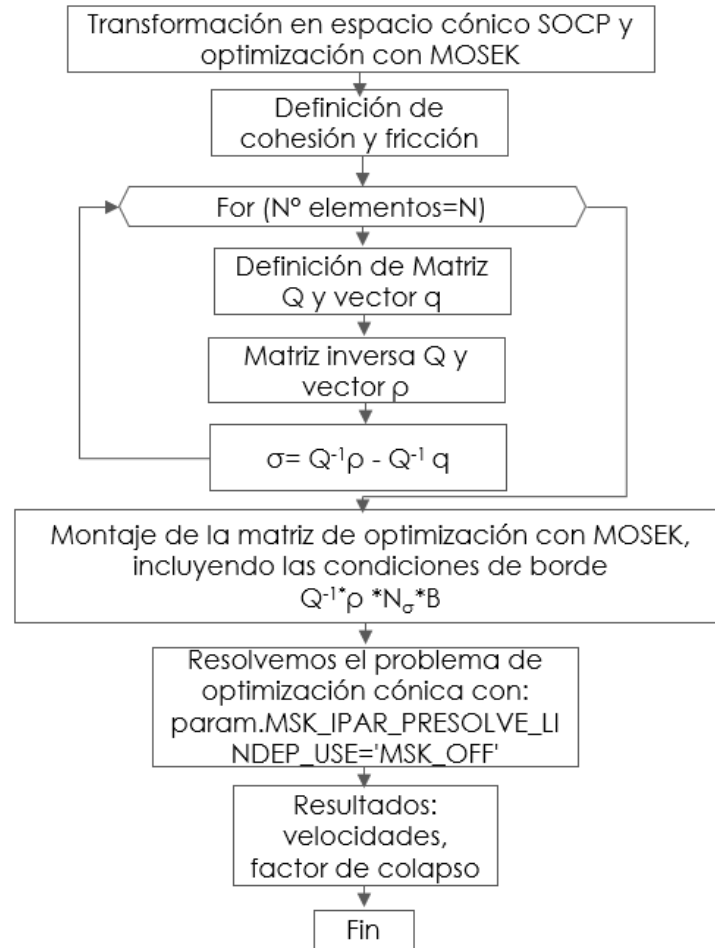
sujeto a:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_V \mathbf{Q}^{-1} \boldsymbol{\rho} \mathbf{N}_\sigma \mathbf{B} \, dV = \int_V \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{q} \mathbf{N}_\sigma \mathbf{B} \, dV + \lambda \left(\int_S t_i \mathbf{N}_u \, dS + \int_V b_i \mathbf{N}_u \, dV \right) \\ \boldsymbol{\rho} \in K \end{array} \right. \quad (51)$$

En resumen, la Figura 11 presenta el diagrama de flujo simplificado que describe el proceso de transformación al espacio cónico (SOCP) y la optimización mediante el algoritmo de MOSEK.

Figura 11

Diagrama de flujo simplificado de transformación en espacio cónico SOCP y optimización con MOSEK



Nota: Fuente elaboración propia

3.5 Software para emplear

3.5.1 Matlab de MathWorks 2023

MATLAB® es una plataforma de programación técnica para crear algoritmos computacionales. Para esta investigación es el principal software base donde se desarrollarán todos los cálculos para resolver el problema del análisis límite. El alcance de su empleo será implementar el algoritmo que permita estructurar las matrices de los elementos finitos, condiciones de borde, formular el sistema de ecuaciones para definir el problema de análisis límite, así como para implementar el algoritmo de optimización de MOSEK ApS para optimizar las variables del sistema de ecuaciones del análisis límite. La adaptación se siguió a partir de la guía MOSEK (2024).

3.5.2 MOSEK 10.2

MOSEK es un algoritmo computacional de optimización a grande escala, permite resolver problemas de optimización lineal, cuadrática, cónica y semidefinida. Este algoritmo es proporcionado en diferentes lenguajes computacionales, uno de ellos es en la interface de MATLAB®. El alcance será emplear la optimización cónica de segundo orden para resolver el problema de optimización de análisis límite.

3.5.3 GiD simulation v17

GiD es un software que de simulación numérica. En preprocesamiento permite modelar geoméricamente y crear malla de elementos finitos. En post procesamiento, permite realizar la visualización de resultados. El alcance será emplear este software para crear las mallas de elementos finitos.

3.5.4 Paraview 5.13

Paraview es un software libre de visualización numérica de post procesamiento, es decir permite realizar la visualización de resultados Kitware (2024). El alcance será emplear este software para visualización de resultados sobre la malla de elementos finitos.

3.5.5 Midas

Midas en la versión GTS NX es un software de análisis de elementos finitos para el análisis geotécnico. Midas (2024) En esta investigación se emplea para obtener datos de esfuerzos efectivos que luego se trasladan a los elementos finitos que usaremos en el cálculo de la relación de resistencia no drenada en relación con el esfuerzo efectivo.

3.5.6 Slide2 Modeler 2024 de Rocscience Inc

Slide es un software de análisis de equilibrio límite para taludes en dos dimensiones Rocscience (2024). El alcance de este software en la investigación es únicamente como comparativo de resultados.

3.5.7 Plaxis 2D de Bentley ®

Plaxis 2D es un software de análisis de esfuerzo – deformación para diversas estructuras geotécnicas en dos dimensiones. El alcance de este software en la investigación es únicamente como comparativo de resultados.

Capítulo IV. Caso de aplicación y resultados

Para el estudio se tomó como referencia las características de un depósito de relaves existente, cuyo nombre y ubicación debido a temas de confidencialidad no pueden ser mencionados. En adelante se hará referencia a este depósito con el nombre de “depósito de relaves”.

En este capítulo se desarrolla un caso aplicado correspondiente a un depósito de relaves construido mediante el método aguas arriba, el cual, si bien se encuentra prohibido en la actualidad tal como se indica en la Sección 2.2.2, representa un caso real que servirá para la aplicación del análisis límite. Este método no se restringe únicamente a este tipo de presas, sino que puede emplearse en cualquier problema de estabilidad de taludes u otras aplicaciones geotécnicas, utilizando el criterio de rotura de Mohr-Coulomb. Asimismo, se realizará una comparación de resultados con otras metodologías, como el equilibrio límite, mediante el programa Slide®, y el método de reducción de parámetros por elementos finitos, empleando el programa Plaxis®.

Con el fin de facilitar la comprensión del ejemplo, se presentarán los criterios generales de diseño del depósito de relaves, así como la sección geotécnica considerada para el análisis y las propiedades de los materiales correspondientes. Cabe destacar que el propósito de esta evaluación es comparar los factores de seguridad y los mecanismos de falla con el proyecto, por lo que no se emitirán comentarios respecto a la interpretación de los parámetros, los ensayos realizados o la sección utilizada para el análisis.

Tabla 2

Criterios de diseño del depósito de relaves

| Característica | Unidad | Valor | Fuente |
|-----------------------------------|---------------|---|---------------|
| Método de recrecimiento | - | Aguas arriba | (1) |
| Talud local de los recrecimientos | - | 1.8H:1V (Relación Horizontal: Vertical) | (1) |
| Talud global | - | 3.5H:1V | (1) |
| Último recrecimiento | - | Muro de suelo reforzado | (1) |
| Longitud de cresta | m | 520 | (1) |
| Ancho de cresta | m | 3 | (1) |
| Altura máxima de la presa | m | 14 | (1) |

| Característica | Unidad | Valor | Fuente |
|--|---------------|-------------------|---------------|
| Área del embalse | Ha | 8.94 | (1) |
| Número de recrecimientos | - | 4 | (1) |
| Altura del Dique de arranque | m | 3.5 | (1) |
| Talud aguas abajo del dique de arranque | - | 1.67H:1V | (1) |
| Ancho de cresta del dique de arranque | m | 6.0 | (1) |
| Pendiente de playa de relaves | % | 0.5% | (1) |
| Longitud de playa de relaves | m | 20 | (1) |
| Borde libre mínimo | m | 1 | (1) |
| Ancho de aliviadero de demasías | m | 20 | (1) |
| Sistema de disposición | - | Tubería - spigots | (1) |
| Factor de seguridad estática a largo plazo | - | 1.5 | (2) |
| Factor de seguridad pseudoestático | - | 1.0 | (2) |
| Factor de seguridad postsismo | - | 1.2 | (2) |

Notas:

- 1) Criterio establecido por el consultor
- 2) Criterio de diseño establecida en CDA y Norma Peruana
- 3) Fuente Informe Geotécnico - Unidad Minera

4.1 Sección geotécnica

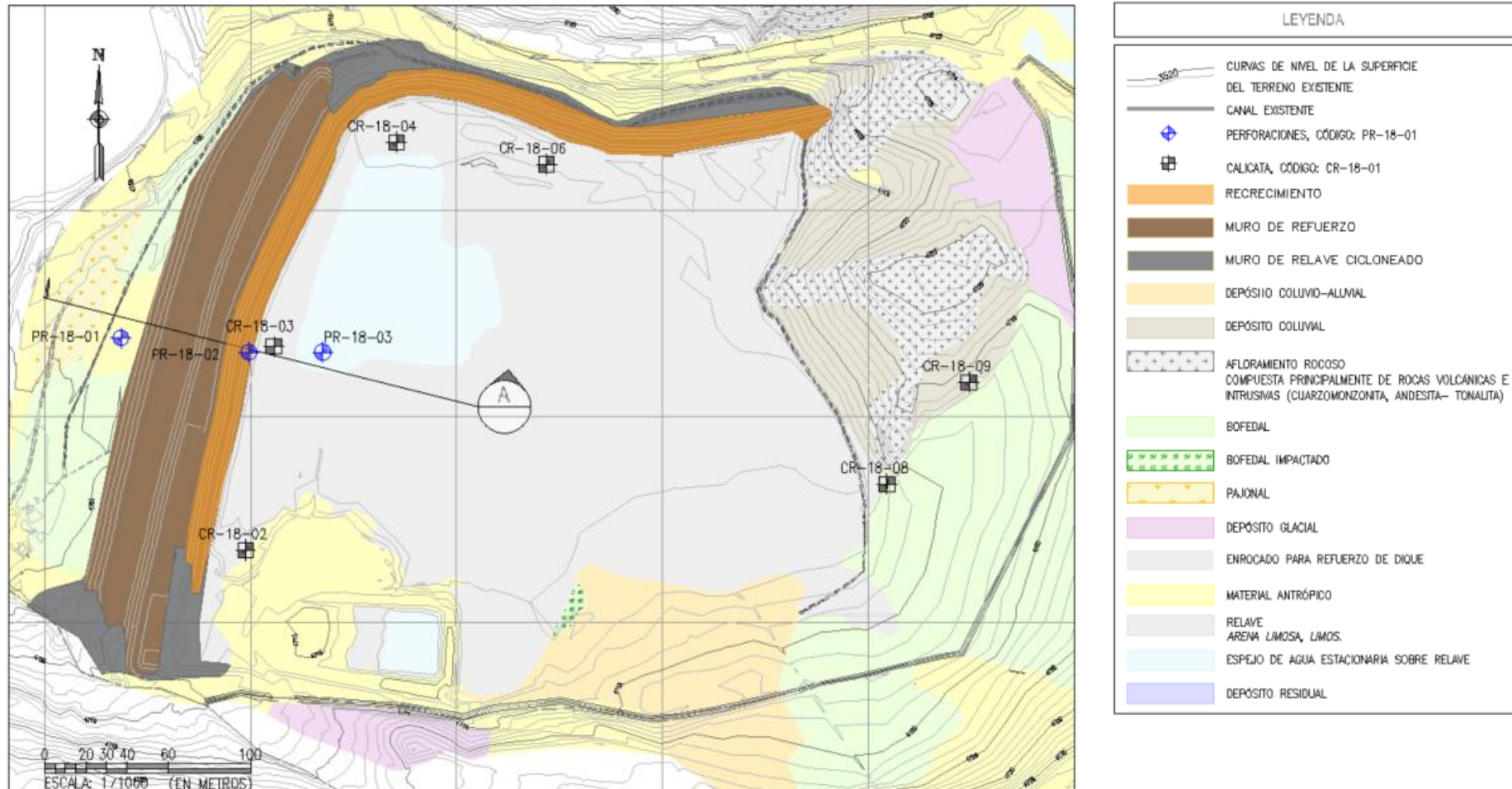
El depósito de relaves almacena relave cicloneado tipo overflow (relave fino). El dique de arranque se construyó con material de préstamo, mientras que los tres primeros recrecimientos consecutivos se ejecutaron utilizando relave cicloneado tipo underflow (relave grueso).

Posteriormente, se implementaron dos etapas de mejoramiento mediante la construcción de un muro de contención o *buttress* con material de préstamo. Finalmente, se realizó un recrecimiento adicional utilizando material de préstamo y un muro de suelo reforzado, con el propósito de extender la vida útil del depósito de relaves.

La presa se encuentra principalmente cimentada sobre material aluvial conformado por gravas arcillosas, mientras que el embalse de relaves se encuentra sobre un material aluvial arcilloso, limoso y material orgánico como se muestra en la Figura 12 y Figura 13.

Figura 12

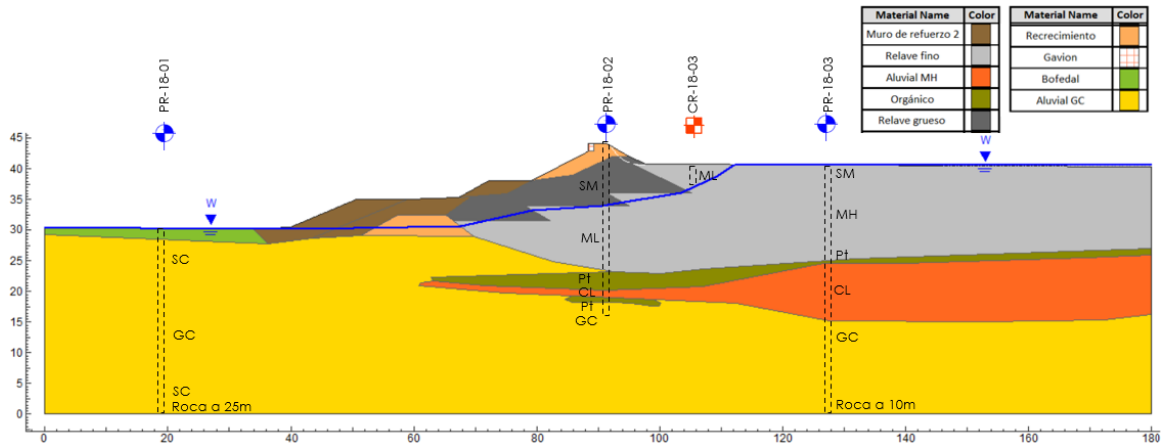
Vista en planta del depósito de relaves



Nota: Fuente Informe Geotécnico - Unidad Minera

Figura 13

Sección A del depósito de relaves



Nota: Fuente Informe Geotécnico - Unidad Minera

4.2 Parámetros geotécnicos

A continuación, se describen y se resumen en la Tabla 3 las propiedades geotécnicas de los materiales del caso de aplicación. Es importante señalar que todas estas propiedades serán empleadas tanto en análisis límite como en las metodologías convencionales para la evaluación de estabilidad.

4.2.1 Basamento rocoso

De acuerdo con perforaciones geotécnicas, se determinó que el basamento rocoso está a las profundidades de 50.2 m a 65.7 m. Está compuesto por rocas sedimentarias, lutitas rojizas con intrusión de diorita, correspondientes a la Formación Casapalca (intercalaciones de lutitas, areniscas y limolitas) que aflora al sur y sureste del depósito de relaves. El peso unitario considerado es de 24 kN/m³.

Además, se observó que la roca se encuentra en un estado de fracturada a muy fracturada, y que posee un RMR que varía de regular a mala. En la roca (lutita) los valores de permeabilidad alcanzaron valores de 1.07×10^{-7} cm/s. Para profundidad de 44 a 47m. Los parámetros empleados para el criterio de rotura de Mohr-Coulomb son: ángulo de fricción de 40° y la cohesión de 150 kPa y un peso unitario total de 24 kN/m³.

4.2.2 Depósito aluvial

El depósito aluvial presenta una composición heterogénea con presencia de gravas arcillosas, arena arcillosa, limos de alta plasticidad y bolonería. Se identificaron dos estratos diferenciados:

- Limos de alta plasticidad (MH), con cohesión de 20 kPa, ángulo de fricción de 18° , peso unitario total de 17.5 kN/m^3 y permeabilidad de $2.67 \times 10^{-7} \text{ cm/s}$ (profundidad 18–20.1 m), determinados mediante ensayos triaxiales CU.
- Grava arcillosa (GC) y arena arcillosa (SC), con ángulo de fricción estimado de 33° , cohesión nula, peso unitario total de 19 kN/m^3 , y permeabilidad de $3.91 \times 10^{-7} \text{ cm/s}$ (profundidad 24 a 25.5 m).

Los valores de N_{60} corregido oscilaron entre 17 y 43 para el estrato SC, mientras que para el estrato GC se obtuvo rechazo en el LPT, indicando una condición firme a muy rígida.

4.2.3 Bofedal

Este estrato fue caracterizado de manera conservadora, asignándole una cohesión de 20 kPa, ángulo de fricción nulo y un peso unitario total de 13 kN/m^3 , en condiciones saturadas.

4.2.4 Material orgánico

El material orgánico, encontrado a profundidad, fue identificado en las perforaciones PR18-02 y PR18-03 a 19 m y 14.5 m respectivamente, con espesores de 2.7 m.

Este material se caracterizó de forma conservadora y se le asignó parámetros de resistencia cortante en términos de esfuerzos totales de ángulo de fricción nulo, cohesión de 80 kPa y peso unitario de 13 kN/m^3 (condiciones saturadas).

4.2.5 Relave fino

El relave fino, clasificado como arena limosa (SM), presenta una compactación de suelta a media, con valores de NSPT entre 4 y 13 golpes/pie. A partir de ensayos triaxiales

CU se determinaron parámetros en esfuerzos efectivos: ángulo de fricción de 29°, cohesión nula y peso unitario total de 16 kN/m³.

La permeabilidad medida fue de 2.12×10^{-6} cm/s (profundidad 9–10 m). Para fines de análisis sísmico, se consideró una relación de resistencia no drenada residual respecto al esfuerzo vertical efectivo (S_{ur}/σ_v) de 0.11, siguiendo la metodología de Olsen et al. (2002), aplicable a arenas limosas y depósitos artificiales. Se recomienda complementar esta caracterización mediante ensayos CPT y ensayos cíclicos.

4.2.6 Relave Grueso

Este material, empleado en los recrecimientos, fue clasificado también como arena limosa (SM). A partir del ensayo CU, se obtuvo un ángulo de fricción de 35.8°, y mediante correlaciones con SPT, un valor estimado de 31.6°. Se adoptaron parámetros conservadores: ángulo de fricción de 31°, cohesión nula, y peso unitario total de 17 kN/m³.

Los ensayos SPT arrojaron valores de N_{60} corregido entre 8 y 12, indicando una compactación media.

4.2.7 Dique de arranque

El dique de arranque está compuesto por un relleno estructural clasificado como GM. Se le asignaron propiedades en términos de esfuerzos efectivos: ángulo de fricción de 35°, cohesión nula, y peso unitario de 23 kN/m³.

4.2.8 Muro de refuerzo y recrecimiento

En base a la revisión de información se considera que el material que conforma el dique de arranque corresponde a un relleno estructural (GM), y estima como parámetros 38° de ángulo de fricción y cohesión nula en términos de esfuerzos efectivos. El peso unitario es de 23 kN/m³.

Tabla 3*Propiedades de los materiales de la presa existente*

| Material | Peso unitario seco (KN/m ³) | Peso unitario saturado (KN/m ³) | Esfuerzos efectivos | | Esfuerzos Totales | | Ratio de resistencia residual $\frac{S_{ur}}{\sigma'_v}$ |
|-------------------------|---|---|---------------------|--------------------------------|-------------------|-------------------------------|---|
| | | | Cohesión c' (kPa) | Ángulo de fricción ϕ' (°) | Cohesión c (kPa) | Ángulo de fricción ϕ (°) | |
| Basamento rocoso | 24 | 24 | 150 | 40 | - | - | - |
| Aluvial GC | 19 | 20 | 0 | 33 | - | - | - |
| Aluvial MH | 17.5 | 18.5 | - | - | 20 | 18 | - |
| Bofedal | 12 | 13 | - | - | 20 | 0 | - |
| Orgánico | 12 | 13 | - | - | 80 | 0 | - |
| Dique de arranque | 21 | - | 0 | 35 | - | - | - |
| Muro de refuerzo | 21 | - | 0 | 38 | - | - | - |
| Muro de suelo reforzado | 21 | - | 150 | 36 | - | - | - |
| Relave fino | 16 | 17 | 0 | 29 | 15 | 0 | 0.11 |
| Relave grueso | 17 | 18 | 0 | 31 | - | - | - |

Nota:

- Los materiales se consideran homogéneos e isotrópicos.
- Todas las propiedades serán empleadas en el análisis límite y metodologías convencionales.

Fuente elaboración propia

4.3 Modelo numérico para análisis límite

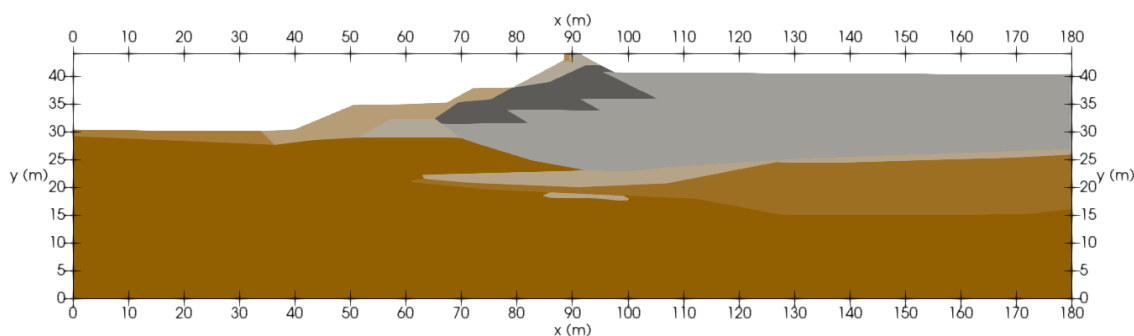
En esta subsección se presenta los pasos seguidos para la elaboración del modelo numérico para la metodología del análisis límite. Cabe señalar que los métodos de equilibrio límite y reducción de parámetros no serán detallados.

4.3.1 Geometría de la sección transversal evaluada

En el marco del análisis del depósito de relaves en evaluación, la sección descrita en la Sección 4.1 fue exportada al software GiD v17, ampliamente en el campo de los métodos numéricos. En este software, se procedió a la creación de los elementos de superficie correspondientes a cada uno de los estratos o materiales presentes en el modelo geotécnico. La correcta representación de estos estratos es fundamental para asegurar la precisión del análisis, ya que permite identificar las propiedades y comportamientos de los diferentes materiales que intervienen en la estabilidad y seguridad del depósito como se muestra en la Figura 14.

Figura 14

Geometría del modelo geotécnico de la Sección A del Depósito de Relaves generado en el Software GiD v17



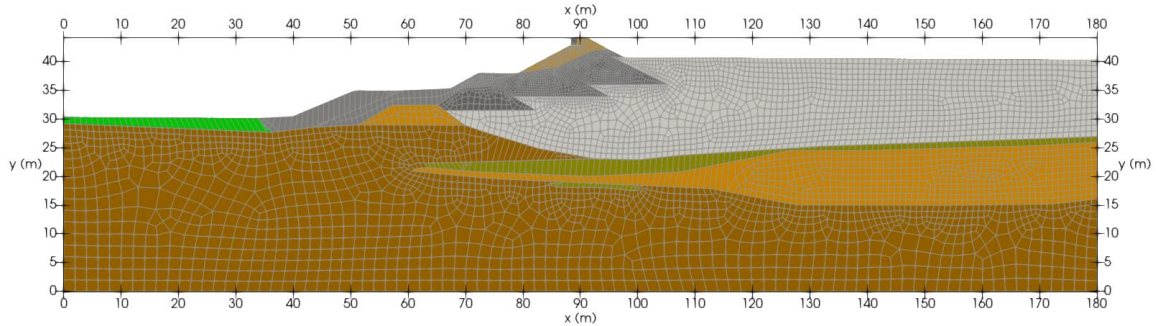
Nota: Fuente elaboración propia

4.3.2 Malla de elementos finitos cuadrangulares

Para el análisis límite utilizando el método de elementos finitos, se generó una malla de elementos finitos mediante el programa GiD v17. En este estudio, se emplea una malla de elementos cuadrangulares con una disposición no estructurada, lo que significa que los elementos no siguen un patrón de conectividad predefinido como se muestra en la Figura 15. La malla correspondiente a la sección A cuenta con 5,840 elementos y 6,055 nodos. El tamaño de los elementos varía, con un mayor refinamiento en la parte superior del modelo, particularmente en presa y el material de relave, donde el tamaño promedio de los elementos es de 0.30 m. Este refinamiento permite un análisis más preciso en las áreas críticas del modelo como se muestra en la Figura 16.

Figura 15

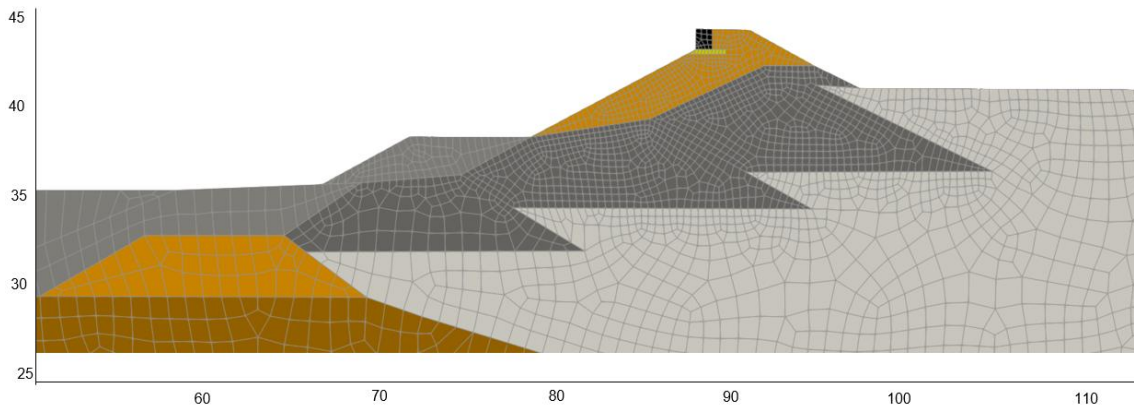
Sección A Malla de elementos finitos, elementos cuadrangulares generada por el programa GiD v17



Nota: Fuente elaboración propia

Figura 16

Refinamiento de malla en la presa y en el contacto con relave



Nota: Fuente elaboración propia

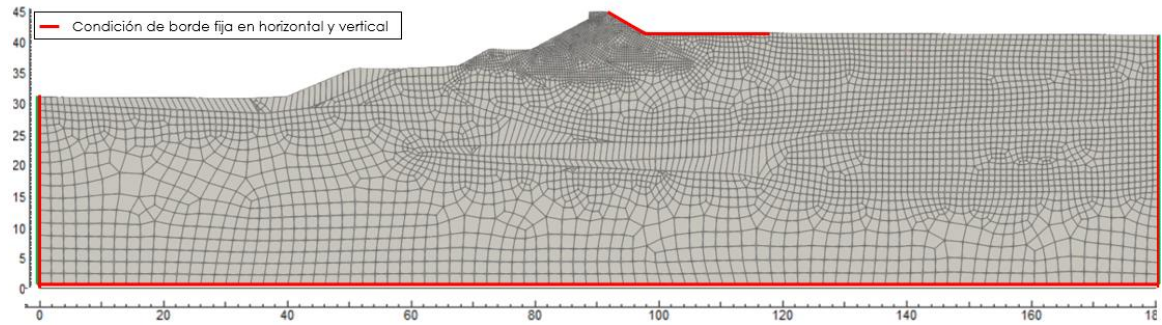
4.3.3 Condiciones de borde para el análisis límite

En el modelo de evaluación mediante análisis límite, se procedió a definir las condiciones de borde principales, las cuales restringen el movimiento en las direcciones horizontal y vertical. Este proceso se llevó a cabo manualmente en el programa GiD v17, donde se seleccionaron todos los nodos del contorno, y a través de una matriz, se asignó se impuso restricción de desplazamiento en los nodos, anulando los grados de libertad horizontal y vertical en el contorno.

En la Figura 17, Figura 18 y Figura 19 se presentan las condiciones de borde asignadas para las evaluaciones realizadas en este estudio: aguas abajo, aguas arriba y postisismo, respectivamente. Los nodos ubicados en la línea roja presentan restricciones de velocidad en los nodos en las direcciones horizontal y vertical.

Figura 17

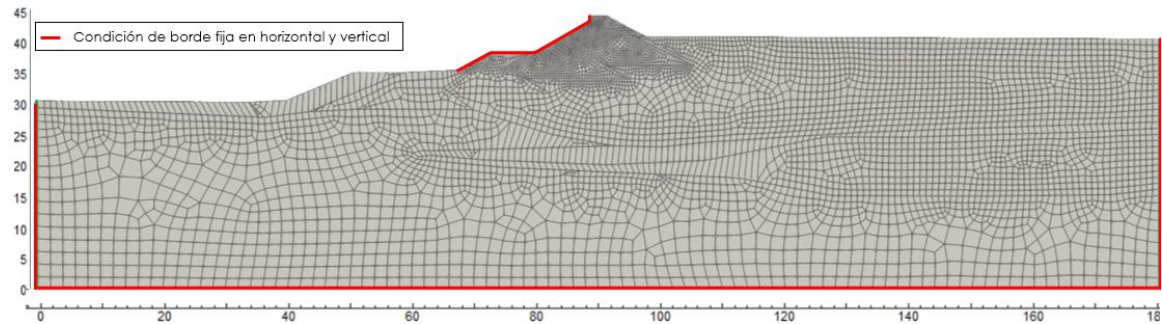
Condiciones de borde para el análisis de estabilidad aguas abajo de la sección A



Nota: Fuente elaboración propia

Figura 18

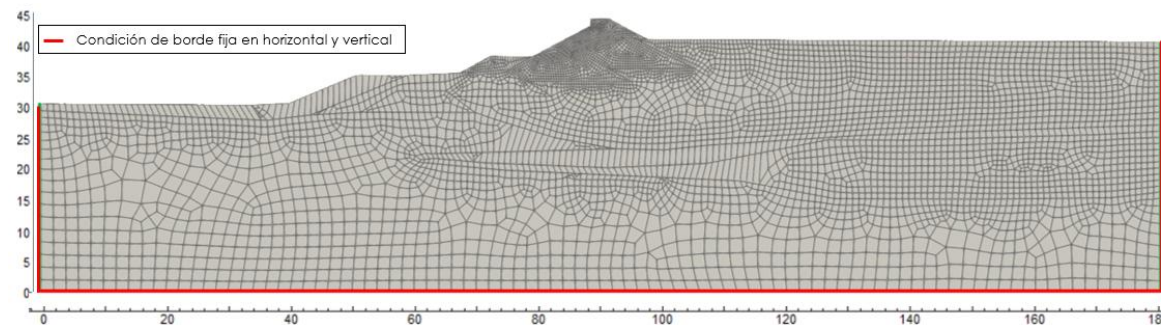
Condiciones de borde para el análisis de estabilidad aguas arriba de la sección A



Nota: Fuente elaboración propia

Figura 19

Condiciones de borde para el análisis de estabilidad global postsismo de la sección A



Nota: Fuente elaboración propia

4.3.4 Asignación de los materiales en el modelo numérico

En la siguiente etapa de construcción del modelo numérico, se procedió a la asignación de los materiales a las diferentes regiones previamente dibujadas. Este proceso

se realiza de manera matricial. Como se mencionó anteriormente, las mallas de elementos finitos fueron generadas por cada región o tipo de material. En esta fase, se seleccionaron los elementos correspondientes a cada región, obteniendo así la numeración de los elementos que pertenecen a cada material específico.

Se asigna a cada elemento los parámetros del criterio de rotura de Mohr-Coulomb establecidos mediante matrices. Estos parámetros son fundamentales para modelar el comportamiento mecánico del suelo o material bajo análisis, permitiendo una simulación precisa de las condiciones geotécnicas del modelo.

4.4 Análisis de estabilidad con análisis límite

Para la resolución del modelo numérico, se ejecutó el programa desarrollado en MATLAB®. El proceso sigue una serie de pasos detallados a continuación:

Asignación de propiedades:

- Se cargan matricialmente los datos de coordenadas, elementos y nodos del modelo geotécnico descrito en la sección 4.1.
- A través de subrutinas específicas, se asignan las propiedades de los materiales, tales como el peso unitario, la cohesión y el ángulo de fricción, a cada uno de los elementos del modelo.

Formulación del sistema:

- Las cargas internas y externas (en esta investigación, se considerará únicamente el peso propio) se distribuyen en los elementos finitos utilizando la matriz jacobiana de cada elemento.
- Posteriormente, se organiza matricialmente para la resolución del problema de elementos finitos, lo que permite formular el sistema de ecuaciones necesario para el análisis límite.

Optimización primal y dual:

- Una vez planteado el problema de análisis límite en forma matricial, se procede a optimizar las variables para determinar el factor de colapso, ajustando los esfuerzos según el criterio de rotura de Mohr-Coulomb. En este caso bidimensional, en este caso dicha optimización se realiza mediante la programación cónica de segundo orden, como se detalla en la Sección 3.4.
- El resultado del problema primal resuelto con el programa de análisis límite es el factor de colapso, el cual permite evaluar la estabilidad del modelo geotécnico.

Luego, se obtiene el factor de seguridad mediante un proceso iterativo de reducción de la resistencia de los materiales.

- En la resolución del problema de optimización, se introduce una solución denominada "dual", que corresponde a velocidades nodales normalizada, las que permiten visualizar el posible mecanismo de colapso y, por tanto, identificar la superficie de falla.

Visualización de resultados:

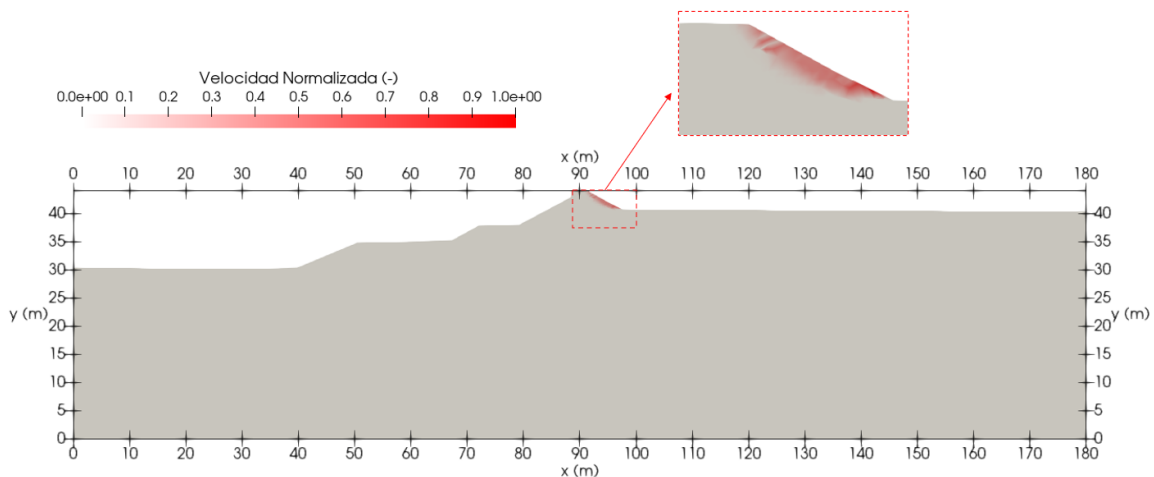
- Finalmente, los resultados de las velocidades nodales se representan mediante el software de visualización de postproceso Paraview, donde se muestran las superficies de rotura calculadas.

4.4.1 Análisis estático aguas arriba

La superficie de ruptura crítica aguas arriba del modelo posee un factor de seguridad mínimo calculado de 1.419, y se obtuvo en un tiempo computacional aproximado de 23 segundos. La ruptura identificada es de carácter local y de pequeña magnitud, concentrándose principalmente en el pie del talud. Ver Figura 20.

Figura 20

Análisis de estabilidad estático por el método de Análisis límite - Aguas arriba - Sección A



Nota: Fuente elaboración propia

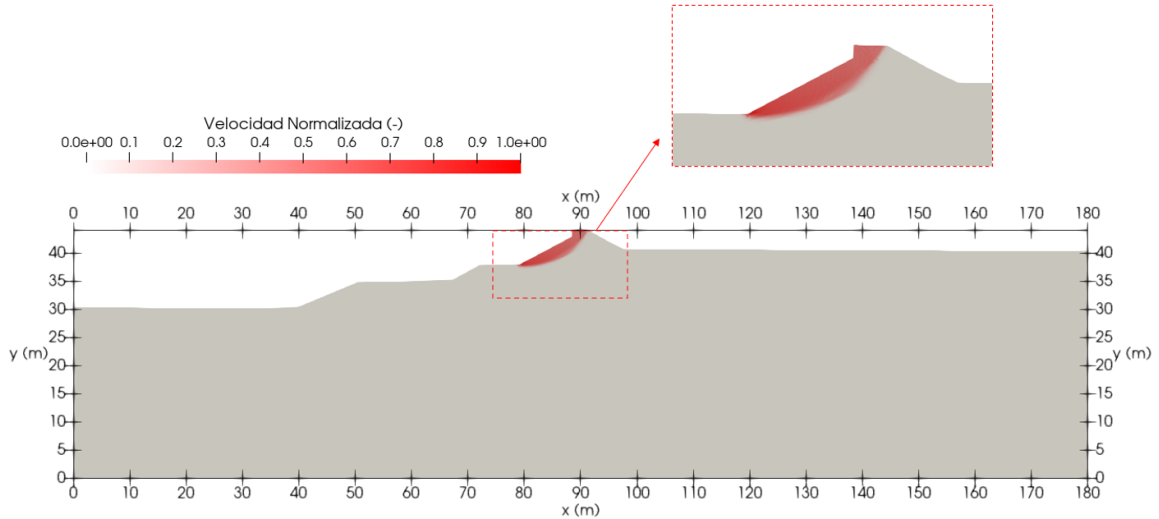
4.4.2 Análisis estático aguas abajo

La superficie de ruptura aguas abajo fue evaluada modificando las condiciones de contorno iniciales. En este análisis, se estimó un factor de seguridad de 1.460, con un

tiempo computacional de 20 segundos. La rotura se localiza en la zona del material de recrecimiento. Ver Figura 21.

Figura 21

Análisis de estabilidad estático por el método de Análisis límite - Aguas abajo - Sección A



Nota: Fuente elaboración propia

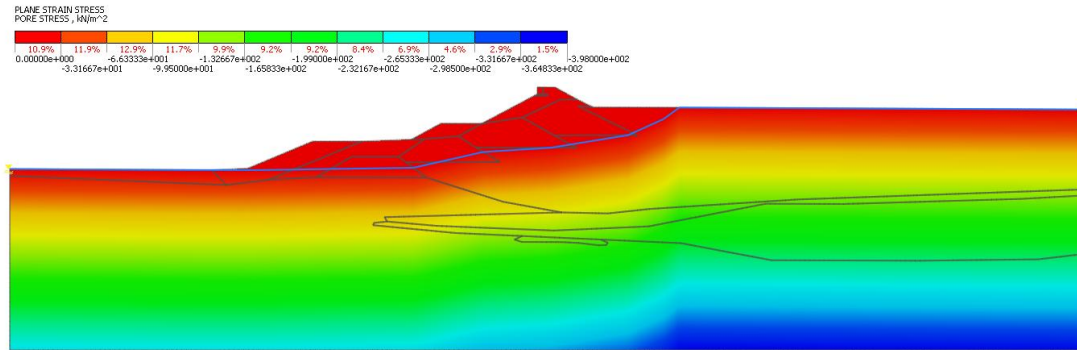
4.4.3 Análisis postsismo aguas abajo

En el análisis postsismo se consideró un ratio de resistencia residual de 0.11 para el material de relave fino. Con base en este valor y en las tensiones verticales efectivas calculadas para cada elemento finito, se estimó una resistencia no drenada, con el fin de asignar condiciones de resistencia residual después de un proceso de licuación.

El cálculo de las tensiones verticales, para la asignación de parámetros de corte variables en el medio continuo, fue realizado con el programa de elementos finitos Midas GTS-NX. En la Figura 22 se presentan las distribuciones de presión de poros y en la Figura 23, la tensión vertical total, bajo condiciones elásticas estáticas.

Figura 22

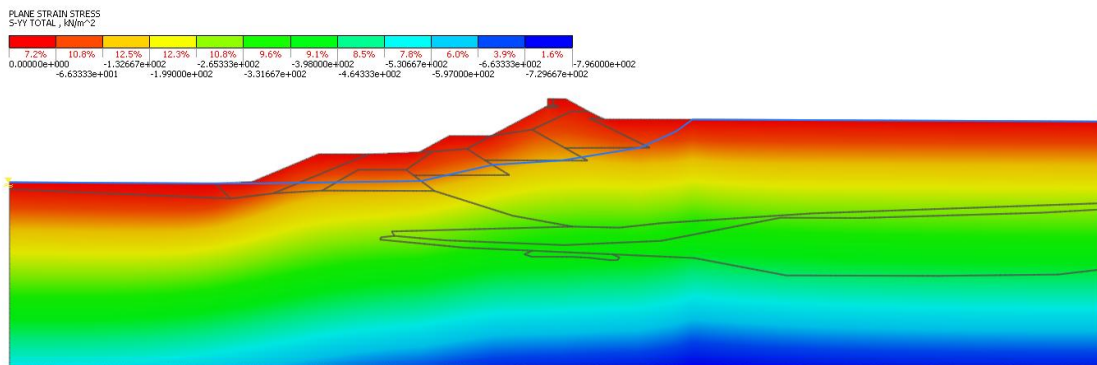
Presión de poros estimado con Midas GTS-NX



Nota: Fuente elaboración propia

Figura 23

Tensión vertical total estimada con Midas GTS-NX

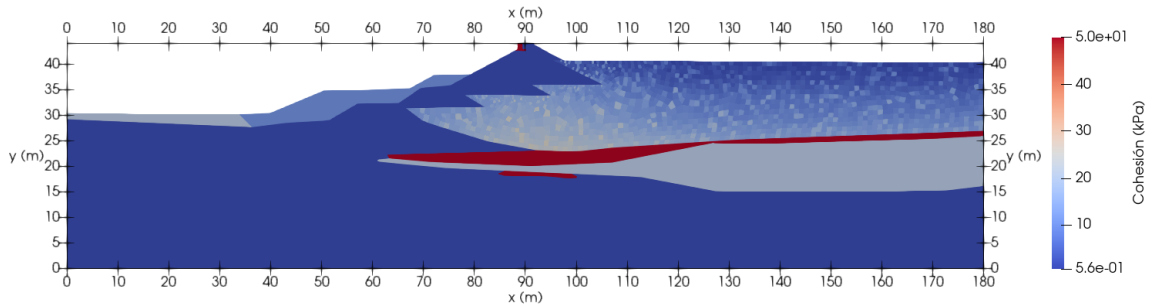


Nota: Fuente elaboración propia

Como resultado, las tensiones verticales efectivas fueron calculadas como la diferencia entre la tensión vertical total y la presión de poros, y se mapearon para cada uno de los elementos del relave fino en el modelo de análisis límite. Finalmente, utilizando el ratio de resistencia residual, se estimó la resistencia no drenada al cortante. La Figura 24 presenta la distribución de cohesión de los materiales, considerando el mencionado ratio de resistencia para el relave fino.

Figura 24

Distribución de cohesión para los materiales del modelo. En el caso del relave fino, se especifica la resistencia no drenada resultante del ratio de resistencia residual

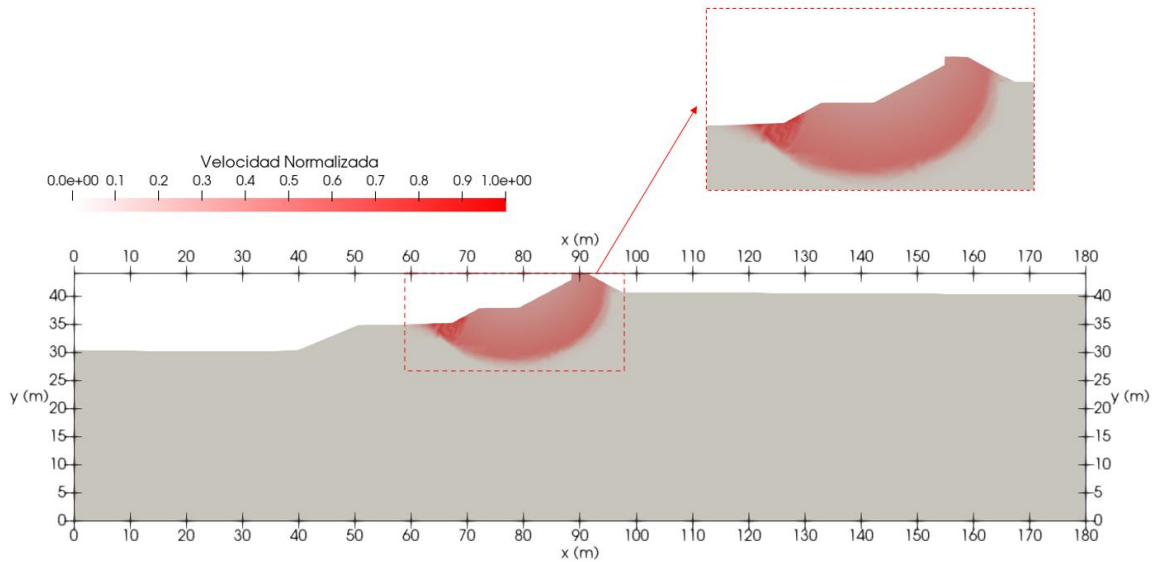


Nota: Fuente elaboración propia

En este caso fue identificada una superficie de ruptura bajo el material de relave grueso un deslizamiento constituido en su base por material de relave fino. El factor de seguridad estimado fue 1.214 y el tiempo computacional necesario fue de 35 segundos. Ver Figura 25.

Figura 25

Superficie de ruptura aguas abajo, análisis postsismo



Nota: Fuente elaboración propia

4.4.4 Resumen de resultados obtenidos con análisis límite

La Tabla 4 presenta los resultados de los factores de seguridad calculados con el análisis límite y el tiempo computacional necesario para el cálculo.

Tabla 4

Factores de seguridad – Análisis Límite

| Tipo de análisis | Talud | Factor de seguridad |
|------------------|--------------|---------------------|
| Estático | Aguas abajo | 1.460 |
| Estático | Aguas arriba | 1.419 |
| Post sismo | Aguas abajo | 1.214 |

Nota: Fuente elaboración propia

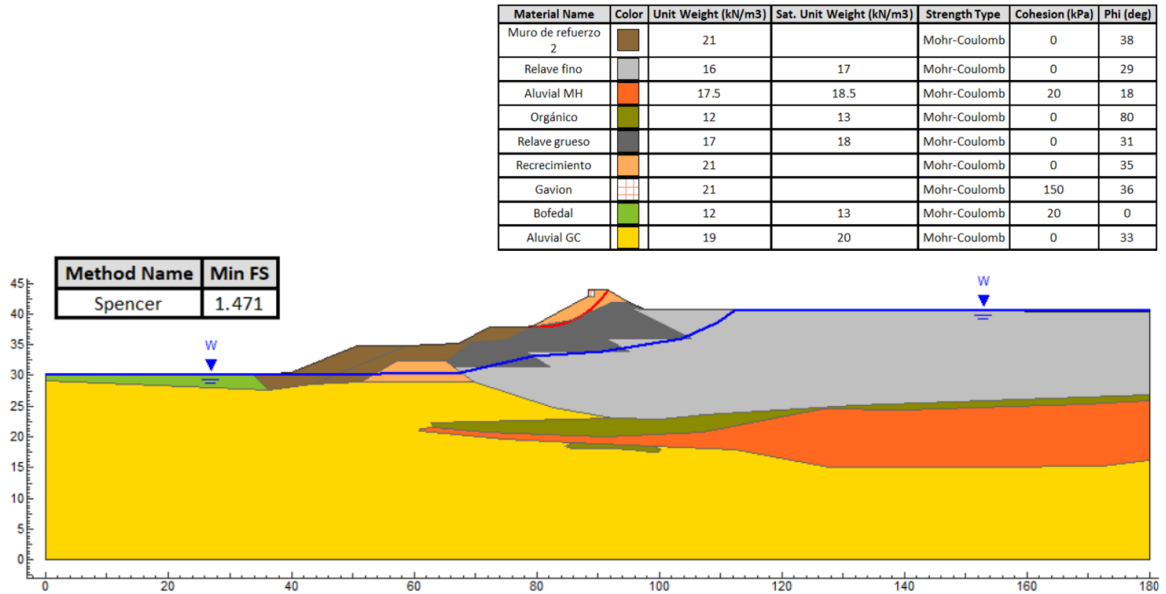
4.5 Análisis de estabilidad con equilibrio límite

Se procedió a crear un modelo en el software Slide, manteniendo las mismas características descritas en la sección 4.3. Luego, se asignaron los parámetros correspondientes a los materiales involucrados en el análisis. Finalmente, se calculó el factor de seguridad local y global; aguas arriba y aguas abajo; y con una superficie circular y no circular.

A continuación, se presentan las Figura 26 y Figura 27, donde se muestran las superficies circular y no circular, respectivamente, de falla en el talud aguas abajo obtenida con la metodología de equilibrio límite en condiciones estáticas.

Figura 26

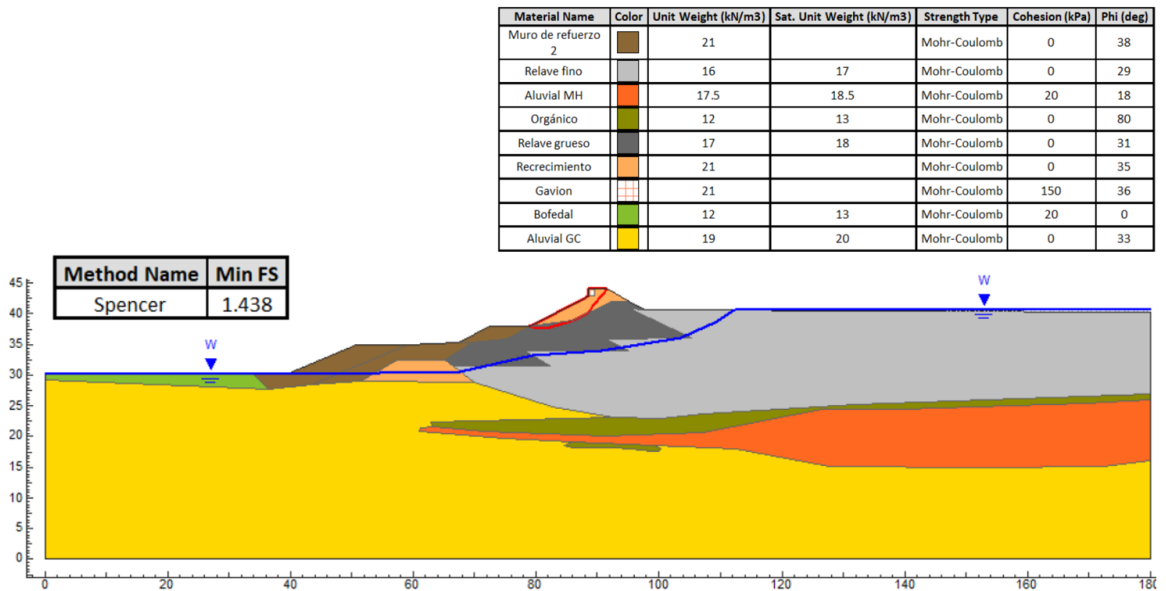
Análisis de estabilidad estático por el método de equilibrio límite - Aguas abajo – Circular - Sección A



Nota: Fuente elaboración propia

Figura 27

Análisis de estabilidad estático por el método de equilibrio límite - Aguas abajo – No Circular - Sección A



Nota: Fuente elaboración propia

A continuación, se presenta la Figura 28 y Figura 29 donde se muestran las superficies, circular y no circular de falla, respectivamente, en el talud aguas arriba obtenida con la metodología de equilibrio límite en condiciones estáticas.

Figura 28

Análisis de estabilidad estático por el método de equilibrio límite - Circular -Aguas arriba - Sección A

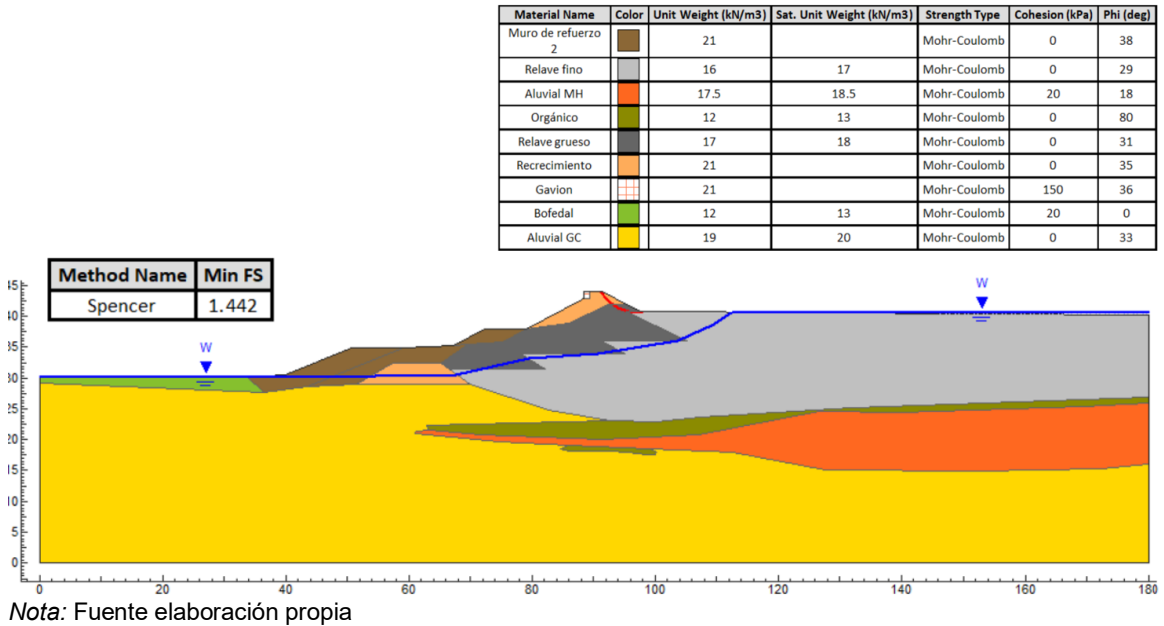
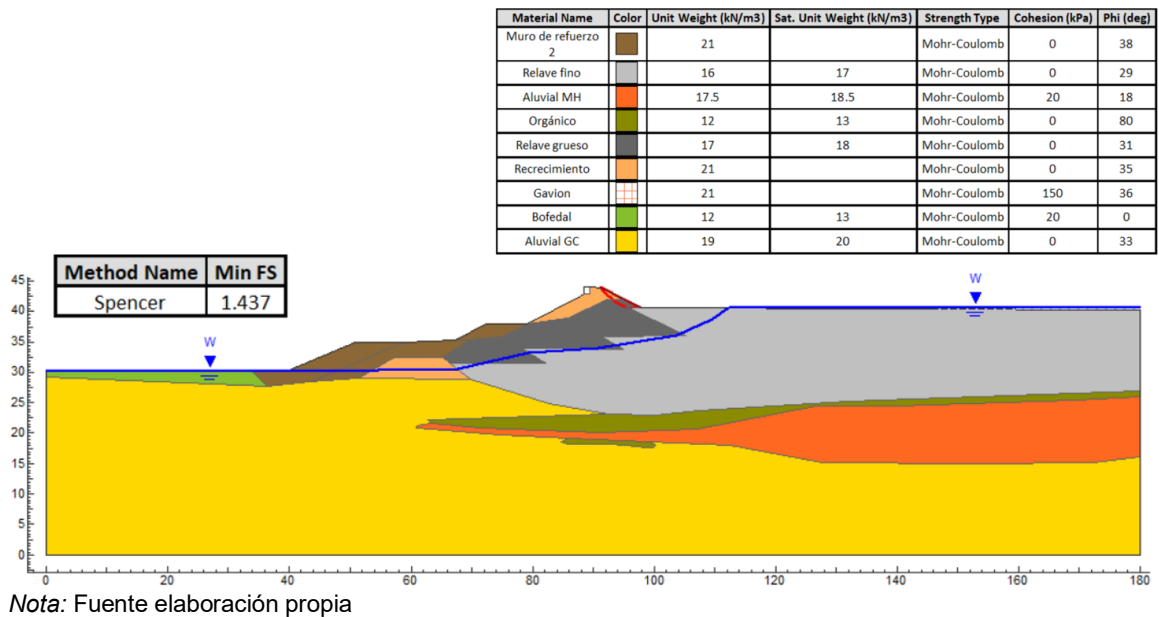


Figura 29

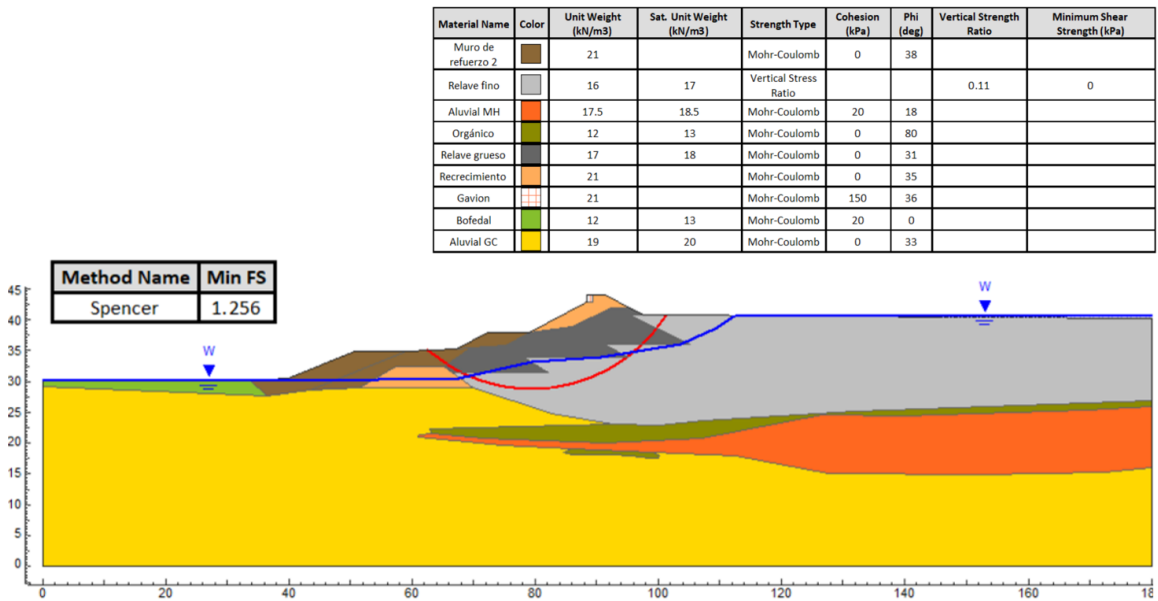
Análisis de estabilidad estático por el método de equilibrio límite - No Circular -Aguas arriba - Sección A



A continuación, se presenta la Figura 30 y Figura 31 donde se muestran la superficies, circular y no circular, respectivamente, de falla en el talud aguas abajo obtenida con la metodología de equilibrio límite en condiciones postsismo.

Figura 30

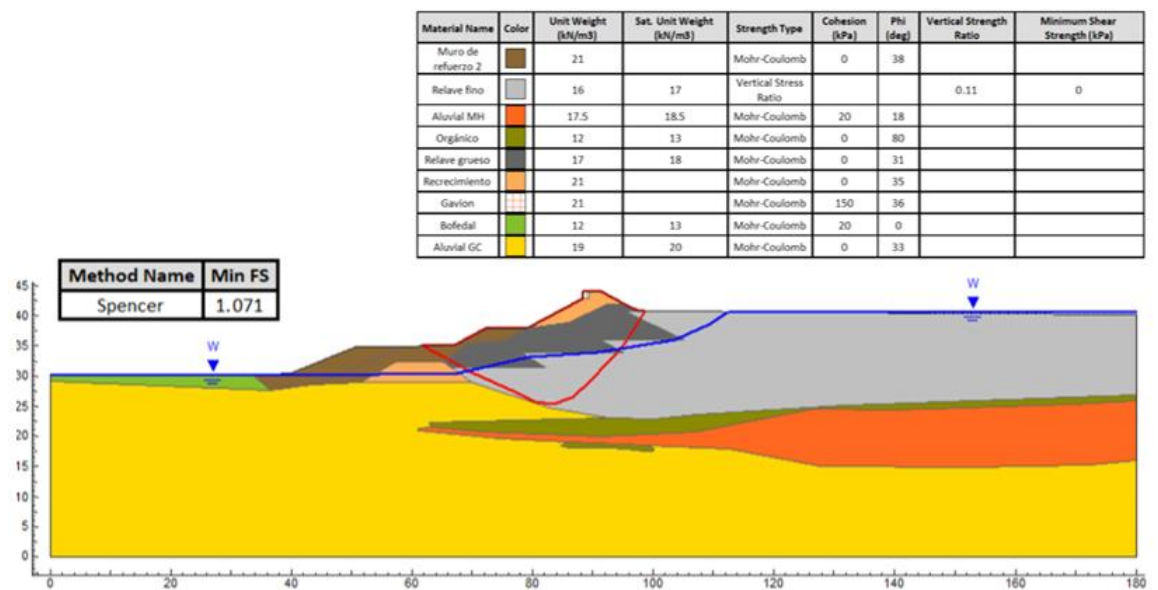
Análisis de estabilidad postsismo por el método equilibrio límite - Aguas abajo – Circular - Sección A



Nota: Fuente elaboración propia

Figura 31

Análisis de estabilidad postsismo por el método equilibrio límite - Aguas abajo – No Circular - Sección A



Nota: Fuente elaboración propia

Asimismo, en la Tabla 5 se presenta el resumen de los factores de seguridad obtenidos con la metodología de equilibrio límite

Tabla 5

Factores de seguridad – Equilibrio Límite

| Tipo de análisis | Talud | Factor de seguridad | |
|------------------|--------------|---------------------|-------------|
| | | Circular | No Circular |
| Estático | Aguas arriba | 1.471 | 1.438 |
| Estático | Aguas abajo | 1.442 | 1.442 |
| Post sismo | Aguas abajo | 1.256 | 1.071 |

Nota: Fuente elaboración propia

4.6 Análisis de estabilidad con método de reducción de parámetros

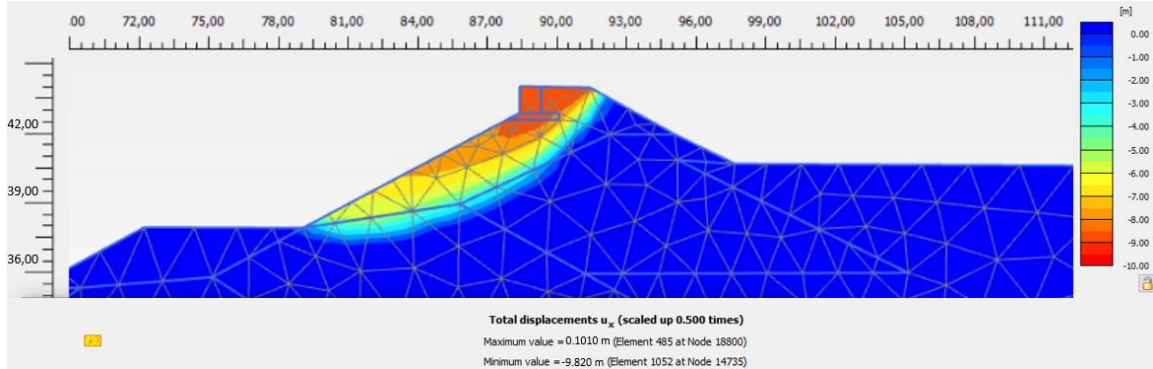
Se procedió a crear un modelo para el software Plaxis con iguales características descritas en la sección 4.3, se asignó los parámetros correspondientes a los materiales. Para las propiedades de elasticidad como: módulo de elasticidad y módulo de poisson se asumieron valores, ya que estos valores no intervienen en el cálculo del factor de seguridad.

En la Figura 32, Figura 33 y Figura 34 se muestra la demarcación del mecanismo de falla obtenido por el método de reducción de parámetros en el software Plaxis. Asimismo, los desplazamientos mostrados están amplificados y no reflejan el comportamiento real

A continuación, se presenta la Figura 32 donde se muestra la superficie de falla en el talud aguas abajo obtenida el método reducción de parámetros en condiciones estáticas.

Figura 32

Análisis de estabilidad estático por el método de reducción de parámetros - Aguas abajo - Sección A

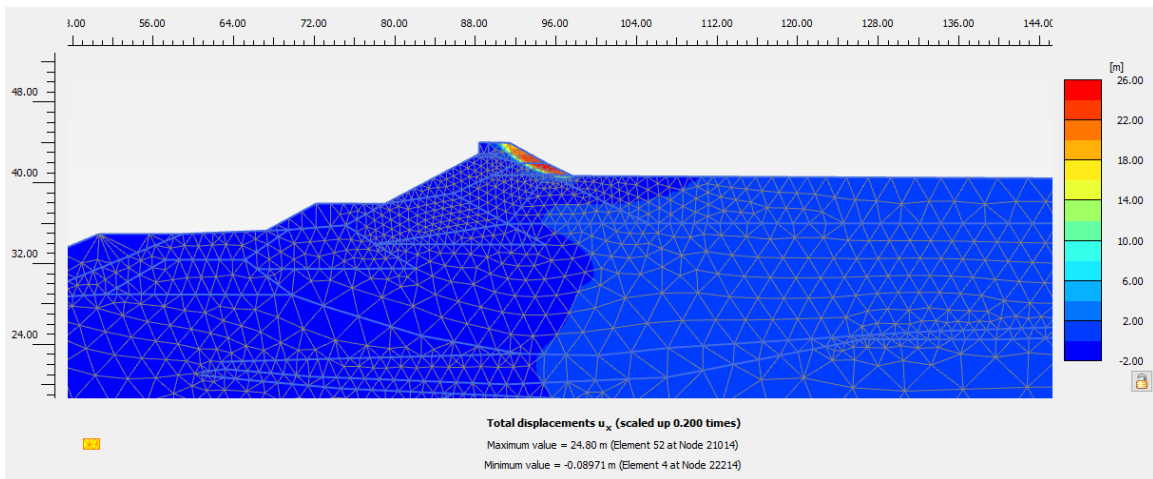


Nota: Fuente elaboración propia

A continuación, se presenta la Figura 33 donde se muestra la superficie de falla en el talud aguas arriba obtenida con el método de reducción de parámetros en condiciones estáticas.

Figura 33

Análisis de estabilidad estático por el método de reducción de parámetros - Aguas arriba - Sección A

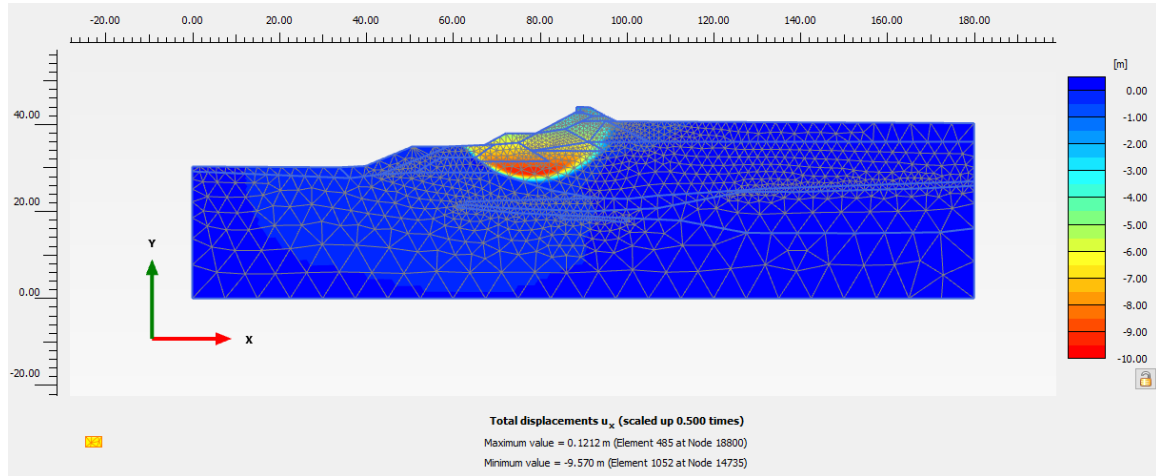


Nota: Fuente elaboración propia

A continuación, se presenta la Figura 34 donde se muestra la superficie de falla en el talud aguas abajo en condiciones postsismo obtenida el método de reducción de parámetros.

Figura 34

Análisis de estabilidad postsismo por el método de reducción de parámetros - Aguas abajo - Sección A



Nota: Fuente elaboración propia

En Tabla 6 se presenta el resumen de los factores de seguridad obtenidos con el método de reducción de parámetros.

Tabla 6

Factores de seguridad – Método de reducción de parámetros

| Tipo de análisis | Talud | Factor de seguridad |
|------------------|--------------|---------------------|
| Estático | Aguas abajo | 1.461 |
| Estático | Aguas arriba | 1.382 |
| Post sismo | Aguas abajo | 1.218 |

Nota: Fuente elaboración propia

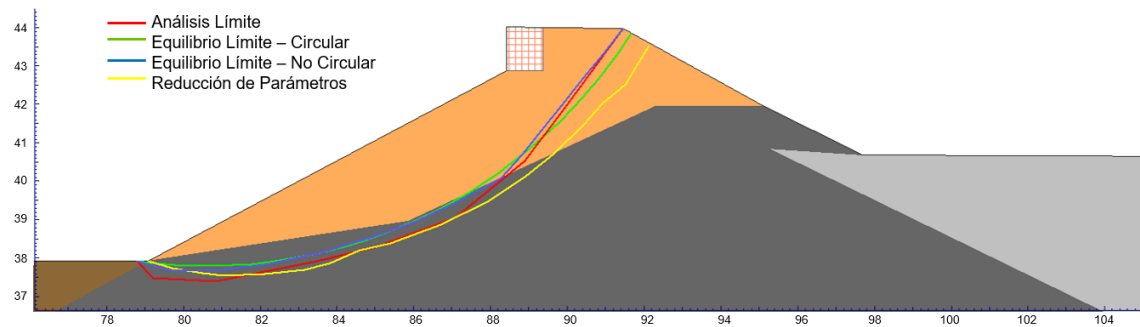
4.7 Comparación de resultados de análisis

En la presente subsección se compara los mecanismos de falla en las diferentes condiciones evaluadas, ver Figura 35, Figura 36 y Figura 37, asimismo se presenta el comparativo de factores de seguridad en la Tabla 7 y en la Figura 38.

En la Figura 35 se compara el resultado de mecanismo de falla en condiciones estáticas del talud aguas abajo se observa buena coincidencia de la superficie de falla calculada entre la metodología de equilibrio límite y análisis límite, asimismo se observa una leve profundización con el método de reducción de parámetros.

Figura 35

Comparación de mecanismos de falla condición estática - aguas abajo

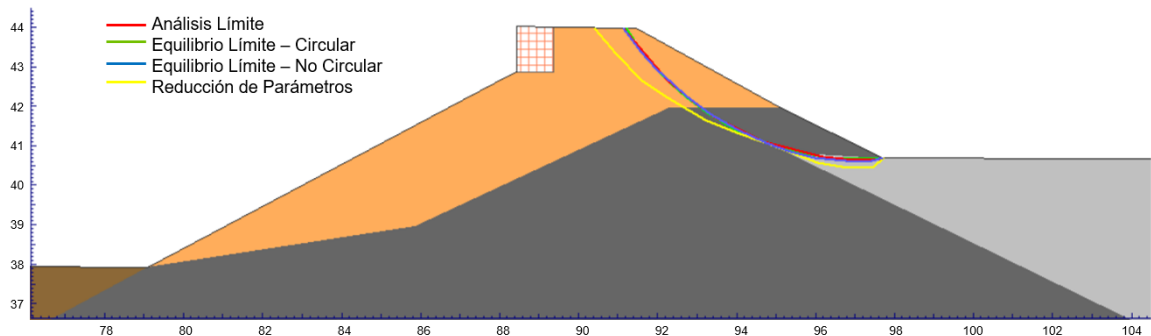


Nota: Fuente elaboración propia

En la Figura 36 se compara el resultado de mecanismo de falla en condiciones estáticas del talud aguas arriba se observa buena coincidencia de la superficie de falla calculada entre la metodología de equilibrio límite y análisis límite, asimismo se observa una leve profundización con el método de reducción de parámetros. Similar al comportamiento anterior.

Figura 36

Comparación de mecanismos de falla condición estática - aguas arriba

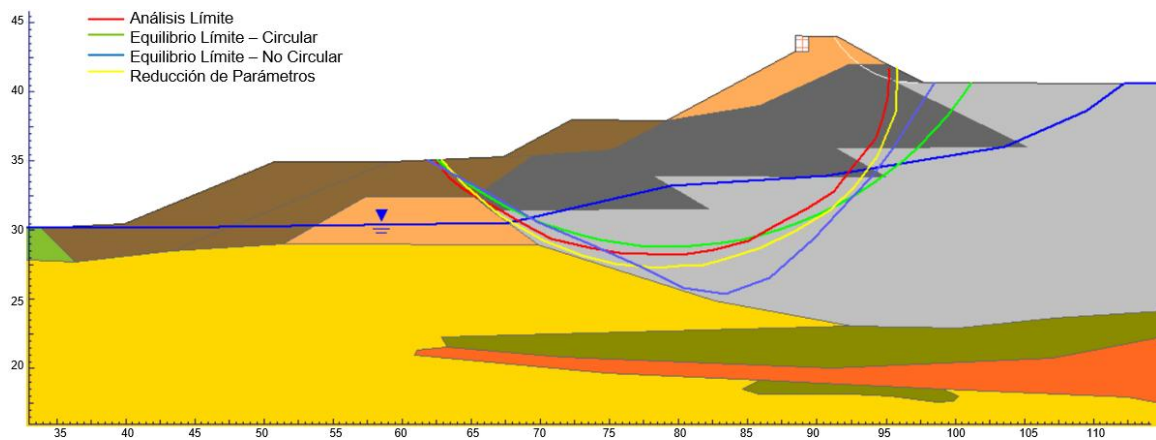


Nota: Fuente elaboración propia

En la Figura 37 se compara el resultado de mecanismo de falla en condiciones postisismo del talud aguas abajo se observa buena coincidencia de la superficie de falla calculada entre la metodología de equilibrio límite falla circular, análisis límite y método de reducción de parámetros, sin embargo, se observa una leve profundización de la superficie no circular utilizada con el método de equilibrio límite.

Figura 37

Comparación de mecanismos de falla condición postsismo - aguas abajo



Nota: Fuente elaboración propia

Los factores de seguridad obtenidos con análisis límite en relación con el equilibrio límite con falla circular, está por debajo entre 0.7 a 3.3%, asimismo en comparación al equilibrio límite con falla no circular presenta una mayor variabilidad que puede estar por debajo hasta 1.5% y por encima hasta 13.3 %. Mientras que comparado con el factor de seguridad calculado con el método reducción de parámetros tienen una menor variabilidad entre 0.07% hasta 3%.

El tiempo empleado para el procesamiento destaca en el equilibrio límite con cálculos entre 1 a 5 segundos, mientras que en el análisis límite puede durar entre 15-30 segundos. Sin embargo, comparado con el método reducción de parámetros, el análisis límite inicia a mostrar su ventaja.

La ventaja del tiempo de procesamiento en un problema bidimensional no es notoria en relación con el análisis límite. Sin embargo, según Fernandez (2021) en un procesamiento tridimensional el tiempo en relación con el método de reducción de parámetros es muy notoria.

Un hallazgo clave en el análisis postsismo es que la falla no circular con el método de equilibrio límite presenta un factor de seguridad significativamente menor en comparación con los obtenidos mediante otros métodos. Esto indica una discrepancia en los factores de seguridad y en el mecanismo de falla obtenido con los otros métodos, como se ilustra en la Figura 37. Así, el análisis de equilibrio límite destaca la dependencia del resultado en la elección de la superficie de falla, lo que puede significar un resultado muy conservador.

Tabla 7*Resumen de factores de seguridad y tiempo computacional de procesamiento*

| Sección | Condición | Talud de análisis | Análisis límite | Equilibrio Límite (Slide) | | Reducción de parámetros (Plaxis) |
|----------------------------------|--------------------|-------------------|-----------------|---------------------------|--------------|----------------------------------|
| | | | | Circular | No circular | |
| A-A | Estático | Aguas abajo | 1.460 | 1.471 | 1.438 | 1.461 |
| | | Aguas arriba | 1.419 | 1.442 | 1.442 | 1.382 |
| | Postsismo (Nota 1) | Aguas abajo | 1.214 | 1.256 | 1.071 | 1.218 |
| Tiempo de procesamiento promedio | | | 20-35 segundos | 1-2 segundos | 1-5 segundos | 30-45 segundos |

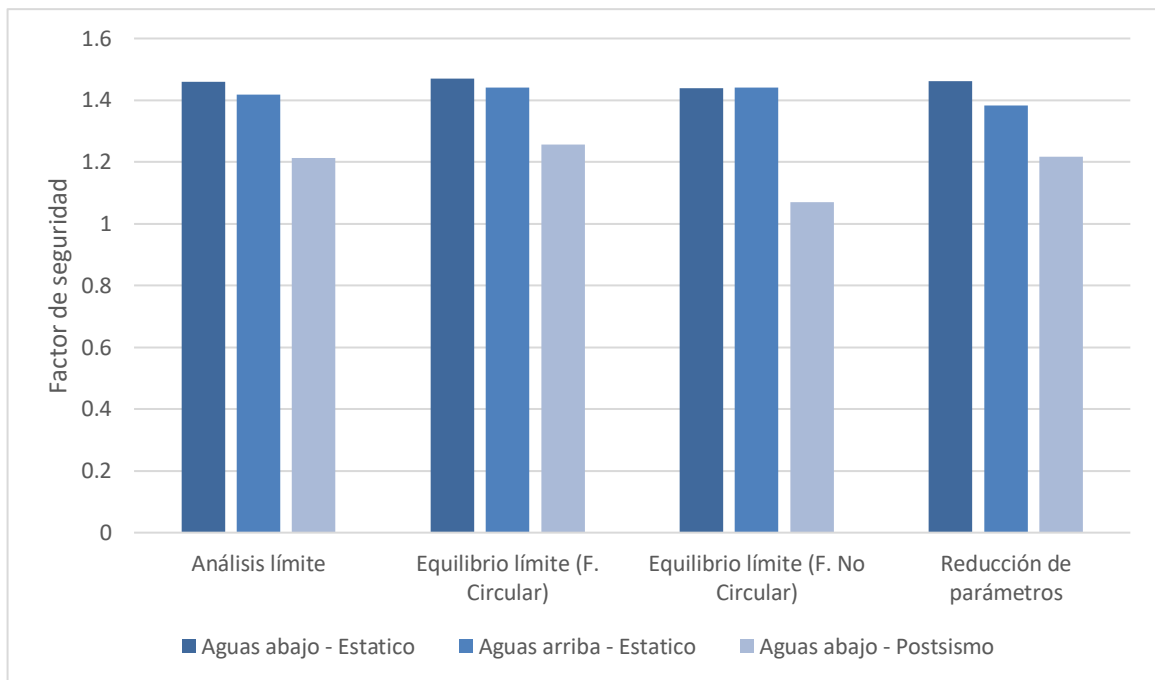
Nota:

1. Se considera que los resultados el análisis post sismo en el talud aguas arriba es equivalente al análisis estático, debido a que el relave ubicado en el pie del talud se encuentra en condiciones drenadas, lo cual minimiza la influencia de acción sísmica en dicho sector.

2. Fuente elaboración propia

Figura 38

Comparación factores de seguridad



Nota: Fuente elaboración propia

Conclusiones

La metodología numérica del análisis límite, formulada como un problema de optimización convexa e integrada con elementos finitos, cumplió con el objetivo de evaluar el factor de seguridad y mecanismo de rotura en depósitos de relaves. Los resultados fueron consistentes y comparables con los obtenidos mediante los métodos de equilibrio límite y reducción de parámetros.

Se implementó en MATLAB® la técnica de elementos finitos cumpliendo con el objetivo planeado de permite formular el problema de estabilidad. Asimismo, se logró implementar con éxito el análisis bidimensional mediante elementos finitos cuadrangulares que demostró un desempeño numérico adecuado y eficiente para el análisis computacional.

Se adaptó e implementó la optimización cónica de segundo orden, representando el criterio de rotura bidimensional de Mohr-Coulomb como una función cónica. Además, se aplicó con éxito esta metodología a gran escala mediante el uso del solver MOSEK, resolviendo de manera eficiente el problema de optimización formulado en el marco del análisis límite.

La comparación entre metodologías del análisis límite y los métodos convencionales evidenció una alta consistencia en los resultados. Frente al equilibrio límite para fallas circulares, presentan una variación de entre 0.7% y 3.3% por debajo, mientras que, para fallas no circulares, muestran una mayor variabilidad, que puede estar entre 1.5% por debajo y hasta 13.3% por encima. En relación con el método de reducción de parámetros, presentan una menor variabilidad, oscilando entre 0.07% y 3%.

En cuanto al tiempo de cómputo, el equilibrio límite resultó más rápido (1–5 s), seguido por el análisis límite (20–35 s), mientras que el método de reducción de parámetros fue el más demandante. No obstante, al incrementar la complejidad del problema, el análisis límite comienza a mostrar ventajas computacionales frente a la reducción de parámetros, aun cuando en problemas bidimensionales simples esta diferencia no es significativa.

Se logró implementar una resistencia variable en una unidad geotécnica utilizando el concepto de la relación de resistencia cortante no drenada residual y su variación con el esfuerzo vertical efectivo, complementando su determinación mediante otro software de elementos finitos.

Un hallazgo clave en el análisis postsismo es que la falla no circular con el método de equilibrio límite presenta un factor de seguridad significativamente menor en comparación con los obtenidos mediante otros métodos. Esto indica una discrepancia en los factores de seguridad y en el mecanismo de falla obtenido con los otros métodos. Esto evidencia la fuerte dependencia del resultado con respecto a la geometría asumida para la superficie de falla en el método de equilibrio límite.

Recomendaciones

Se recomienda comparar los resultados obtenidos del análisis límite bidimensional con los de un análisis tridimensional aplicado a un depósito de relaves, así como con otras metodologías existentes para análisis 3D. Para ello, se sugiere implementar el criterio de rotura de Mohr-Coulomb o Drucker-Prager en tres dimensiones, utilizando técnicas de optimización matemática como la programación semidefinida (para Mohr-Coulomb) o la optimización cónica de segundo orden (para Drucker-Prager), siguiendo el enfoque propuesto por Fernández et al. (2021) y Krabbenhoft et al. (2007).

Se sugiere implementar la metodología numérica del análisis límite utilizando elementos triangulares con mayor número de nodos o puntos de integración, lo que podría proporcionar mayor flexibilidad y precisión en la representación del problema geotécnico. Esta mejora debe ir acompañada de una adecuada selección del software de mallado, ya que la generación de elementos con ángulos muy agudos u obtusos puede comprometer la estabilidad numérica del modelo.

Referencias Bibliográficas

- Andersen, E., Roos, C. & Terlaky, T. (2003). On implementing a primal-dual interior-point method for conic quadratic optimization. *Mathematical Programming*, 95(2), 249-277. <https://doi.org/10.1007/s10107-002-0349-3>
- Barros, G., Pereira, A., Vaz, L.E. y Martha, L.F. (2014). Análise limite com o método dos elementos de contorno. *XXXV Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering (CILAMCE 2014)*, Fortaleza, CE, Brazil. <https://web.tecgraf.puc-rio.br/~lfm/papers/Barros-Cilamce2014.PDF>
- Bentley Systems, Inc. (2024). *Plaxis 2D* (versión 2024.1). <https://www.bentley.com>
- Bruno, H., Barros, G., Martha, L. y Menezes, I (2017). Formulação e solução de problemas de retorno à superfície de escoamento via programação cônica. *XXXVIII Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering (CILAMCE 2017)*, Florianópolis, SC, Brazil. <https://web.tecgraf.puc-rio.br/~lfm/papers/HugoBastos-CILAMCE2017.pdf>
- Camargo, J., Velloso, R., & Vargas, E. (2016). Numerical limit analysis of three-dimensional slope stability problems in catchment areas. *Acta Geotechnica*, 11(6), 1369-1383. <https://doi.org/10.1007/s11440-016-0459-3>
- Chahua, L. Vargas, E. y Vaz L. (2013). Análise limite para o cálculo do fator de segurança de estabilidade de taludes utilizando programação cônica de segunda ordem. *XXXIV Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering. (CILAMCE 2013)*, Pirenópolis, GO, Brazil. <https://abmec.org.br/cilamce/>
- Chen, W. (1975) *Limit Analysis and Soil Plasticity Developments in Geotechnical Engineering*. <https://doi.org/10.1016/b978-0-444-41249-2.x5001-x>
- Dantzig, G.B. (1949). Programming in a Linear Structure. *Econometrica*, 17(1), 73–74.
- Das, B. M., & Sobhan, K. (2013). *Principles of geotechnical engineering (8th ed)*. Cengage learning. <http://ci.nii.ac.jp/ncid/BB02331371>
- Davis, R. & Selvadurai, A. (2002) *Plasticity and geomechanics*. Cambridge: Cambridge Univ. <https://doi.org/10.1017/cbo9780511614958>

- Drucker, D. & Prager, W. (1952). Soil mechanics and plastic analysis or limit design. *Quarterly of Applied Mathematics*, 10(2), 157-165. <https://doi.org/10.1090/qam/48291>
- Drucker, D., Prager, W. & Greenberg, H. (1952) Extended limit design theorems for continuous media. *Quarterly of Applied Mathematics*, 9(4), 381-389. <https://doi.org/10.1090/qam/45573>
- Fernández, F., Rojas, J., Vargas, E. A., Velloso, R., & Dias, D. (2021). Three-dimensional face stability analysis of shallow tunnels using numerical limit analysis and material point method. *Tunnelling and Underground Space Technology*, 112, 103904. <https://doi.org/10.1016/j.tust.2021.103904>
- Hadley, G. (1982). *Linear programming*. Addison-Wesley.
- Hencky, H. (1924) Zur Theorie plastischer Deformationen und der hierdurch im material hervorgerufenen Nachspannungen. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 4(4), 323-335. <https://doi.org/10.1002/zamm.19240040405>
- International Center for Numerical Methods in Engineering. (2022). *GiD* (versión 17) [Software de computadora]. International Centre for Numerical Methods in Engineering (CIMNE). <https://www.gidsimulation.com>
- Kitware, Inc. (2024). *ParaView* (versión 5.13) [Software de computadora]. Kitware, Inc. <https://www.paraview.org>
- Knight, Z. (2015). *Slope stability analysis of tailings dam embankments*. Charles Darwin University.
- Krabbenhoft, K., Lyamin, A. & Sloan, S. (2007). Three-dimensional Mohr-Coulomb limit analysis using semidefinite programming. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 24(11), 1107-1119. <https://doi.org/10.1002/cnm.1017>
- MacGregor, P., Fell, R., Stapledon, D., Bell, G., & Foster, M. (2014). *Geotechnical engineering of dams*. CRC Press. <https://doi.org/10.1201/b17800>
- Midas Information Technology Co., Ltd. (2024). *MIDAS GTS NX* (versión 2024.1) [Software de computadora]. Midas Information Technology Co., Ltd. <https://www.midasoftware.com/>

- Lysmer, J. (1970). Limit analysis of plane problems in soil mechanics. *J. Soil Mech. Found. Div. ASCE* 96, No. SM4, 1311– 1334. <https://doi.org/10.1061/jsfeaq.0001441>
- Lobo, M., Vandenberghe, L., Boyd, S., & Lebet, H. (1998). Applications of second-order cone programming. *Linear Algebra and its Applications* 284, 193-228. [https://doi.org/10.1016/S0024-3795\(98\)10032-0](https://doi.org/10.1016/S0024-3795(98)10032-0).
- Lyamin, A. & Sloan, S. W. (2002) Lower bound limit analysis using non-linear programming. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 55(5), 573-611. <https://doi.org/10.1002/nme.511>
- Logan, D. (1986). *A first course in the finite element method*. (1st ed.). PWS-Kent Publishing Company.
- Makrodimopoulos, A. & Martin, C. (2006). Lower bound limit analysis of cohesive-frictional materials using second-order cone programming. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 66(4), 604-634. <https://doi.org/10.1002/nme.1567>
- MathWorks (2023). *MATLAB* (versión R2023a) [Software de computadora]. MathWorks. <https://www.mathworks.com>
- Mosek Aps (2024). *Mosek* (versión 2024) [Software de computadora]. MOSEK ApS. <http://www.mosek.com>
- Olson, S. and Johnson, C. (2008). Analyzing liquefaction-induced lateral spreads using strength ratios. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, ASCE*, 134(8),1035-1049. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)1090-0241\(2008\)134:8\(1035\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)1090-0241(2008)134:8(1035)).
- Olson, S., y Stark, T. (2002). Liquefied strength ratio from liquefaction flow failure case histories. *Canadian Geotechnical Journal*, 39(3), 629-647. <https://doi.org/10.1139/t02-026>
- Pachás, M., Vaz, L., Vargas, E. y Herskovits, J. (2008). Geotechnical Limit Analysis and Optimization. *International Conference on Engineering Optimization*, 1–5, 2008. https://www.researchgate.net/profile/Mauro_Carrion/publication/254820973_Geotechnical_Limit_Analysis_and_Optimization/links/5440ed170cf228087b69a10e.pdf

Rocscience Inc. (2024). *Slide2 Modeler* (versión 2024) [Software de computadora]. Rocscience Inc. <https://www.rocscience.com>

Tanchev, L. (2014). *Dams and appurtenant hydraulic structures y Dunnigan*. CRC Press. <https://entrospace.nilebasin.org/handle/20.500.12351/484>.

Wolfe, P. (1961). Duality Theorem for Nonlinear Programming. *Quarterly of Applied Mathematics*, 19 (1961), 239-244. <https://doi.org/10.1090/qam/135625>

World Information Service on Energy (WISE). (2024). *Chronology of major tailings dam failures*. <http://www.wise-uranium.org/mdaf.html>.