

Universidad Nacional de Ingeniería

Facultad de Ingeniería Civil



TESIS

**Metodología para obtener un modelo no lineal del concreto que
simplifica el cálculo del diagrama momento-curvatura en vigas
rectangulares**

Para obtener el título profesional de Ingeniero Civil.

Elaborado por

Carlos Alberto Acuña Asenjo

 [0009-0003-8197-3874](https://orcid.org/0009-0003-8197-3874)

Asesor

Dr. Roy Ericksen Reyna Salazar

 [0000-0003-1378-1769](https://orcid.org/0000-0003-1378-1769)

LIMA – PERÚ

2025

Citar/How to cite	Acuña Asenjo [1]
Referencia/Reference	[1] C. Acuña Asenjo, “ <i>Metodología para obtener un modelo no lineal del concreto que simplifica el cálculo del diagrama momento-curvatura en vigas rectangulares</i> ” [Tesis de pregrado]. Lima (Perú): Universidad Nacional de Ingeniería, 2025.
Estilo/Style: IEEE (2020)	

Citar/How to cite	(Acuña, 2025)
Referencia/Reference	Acuña, C. (2025). <i>Metodología para obtener un modelo no lineal del concreto que simplifica el cálculo del diagrama momento-curvatura en vigas rectangulares</i> . [Tesis de pregrado, Universidad Nacional de Ingeniería]. Repositorio institucional Cybertesis UNI.
Estilo/Style: APA (7ma ed.)	

Dedicatoria

Dedico este trabajo a todas las mentes curiosas que, como yo, alguna vez se han sentido abrumadas por la incertidumbre, pero que continúan avanzando. A Dios por darme la fortaleza para superarme cada día, y a mis abuelitos Agustín y Jovita, por su inmenso amor y apoyo incondicional.

Agradecimientos

Detrás de este trabajo de investigación, lleno de retos y arduo trabajo, me complace dirigirme a las personas que, al estar presentes en mi vida, hicieron posible alcanzar mi meta. A todas ellas, mi más sincero agradecimiento.

- Agradezco a mis padres por su apoyo incondicional, y por hacer de los sacrificios algo invisible, permitiéndome poder concentrarme en mis sueños.
- Expreso mi especial gratitud a mi asesor, el Dr. Roy Reyna, por su confianza, apoyo y guía profesional. Su experiencia y conocimiento científico fueron fundamentales para la realización de esta tesis.
- A mis profesores Luis Lavado y Edison Moscoso, gracias por ser una gran fuente de orientación y apoyo, compartiéndome sus conocimientos técnicos y permitiéndome aprender trabajando a su lado.
- También quiero expresar mi agradecimiento al Laboratorio de Estructuras del Centro Peruano-Japonés de Investigaciones Sísmicas y Mitigación de Desastres (CISMID), por darme la oportunidad de ser parte de su equipo. En este espacio, desarrollé habilidades de investigación esenciales para este trabajo. Un agradecimiento especial a su equipo técnico por el valioso apoyo durante la realización de los ensayos de laboratorio.
- A mis amigos, por las incontables horas de apoyo y motivación. Y a todos los que, de alguna manera, dejaron una huella en mi vida, incluso sin saberlo.
- A mi amigo Christiam's, gracias por tu paciencia, confianza y por compartirme tus conocimientos técnicos sobre los ensayos de laboratorio y la interpretación de resultados experimentales.
- De manera especial, expreso mi gratitud a Ibette por su constante apoyo, comprensión y confianza, que fueron decisivos para culminar esta investigación.

Resumen

El presente trabajo propone un modelo constitutivo alternativo esfuerzo–deformación para el concreto, orientado a simplificar el cálculo no lineal del diagrama momento–curvatura (DMC) en vigas rectangulares sometidas a flexión pura. El modelo permite determinar de forma analítica y directa la magnitud y posición de la fuerza de compresión del concreto y la profundidad del eje neutro, facilitando el cálculo del momento nominal para la construcción del DMC a partir de la deformación unitaria extrema en compresión. Se plantean dos enfoques: uno basado en parámetros de integración que relacionan linealmente la fuerza de compresión con la profundidad del eje neutro, y otro que emplea un bloque rectangular equivalente de esfuerzos generalizado.

Los ensayos experimentales, realizados conforme a la norma ASTM C469-94 (1994), consideran concretos con resistencias entre 180 kgf/cm² y 355 kgf/cm². El modelo se fundamenta en propiedades mecánicas del concreto como rigidez, ablandamiento postpico, densidad de energía de deformación, resistencia máxima y capacidad de deformación inelástica postpico. Se representa mediante dos variantes de funciones polinómicas de cuarto grado en coordenadas normalizadas, una para el tramo ascendente y otra para el descendente, quedando completamente definido a partir de la resistencia máxima del concreto.

El análisis estadístico mostró una alta correlación con los datos experimentales, con un coeficiente de determinación promedio R^2 mayor a 0.99 para 48 especímenes. En conclusión, el modelo propuesto simplifica el cálculo no lineal del DMC mediante métodos analíticos directos, mejorando la eficiencia del proceso de cálculo sin depender de métodos numéricos complejos.

Palabras clave – Concreto armado, mapeo matemático, propiedades mecánicas del concreto, flexión en vigas rectangulares, diagrama momento-curvatura (DMC).

Abstract

The present research proposes an alternative constitutive stress–strain model for concrete, aiming to simplify the nonlinear calculation of the moment–curvature diagram (MCD) in rectangular beams subjected to pure bending. This model allows for the analytical and direct determination of the magnitude and position of the concrete compressive force and the depth of the neutral axis, facilitating the calculation of the nominal moment to construct the MCD based on the unit strain of the extreme compression fiber. Two proposed approaches are introduced: the first relies on integration parameters, which allow for a linear relationship between the magnitude and position of the concrete compressive force as a function of the depth of the neutral axis, while the second employs an equivalent rectangular stress block.

The experimental tests, conducted according to ASTM C469-94 (1994) were restricted to concrete with compressive strengths between 180 kgf/cm² and 355 kgf/cm². The proposed constitutive model is based on the mechanical properties of the concrete, such as stiffness, post–peak softening, strain energy density, ultimate strength, and post–peak inelastic deformation capacity. This model is represented by two variants of fourth-degree polynomial functions in normalized coordinates, one for the ascending section and the other for the descending section and is fully defined by the ultimate strength of the concrete.

The statistical analysis of the trend in the experimental data obtained showed a high correlation with the proposed model, with an average coefficient of determination R^2 greater than 0.99 for 48 specimens. In conclusion, the proposed model simplifies the nonlinear calculation of the MCD by means of direct calculation methods, improving the efficiency in the DMC calculation process without depending on complex numerical methods.

Keywords – Reinforced concrete, mathematical mapping, mechanical properties of concrete, bending in rectangular beams, moment–curvature diagram.

Prólogo

El presente trabajo de investigación refleja no solo el rigor académico del autor, sino también la dedicación y pasión que ha puesto en el estudio del comportamiento del concreto. He tenido la oportunidad de conocer de cerca el esfuerzo invertido en cada etapa de este proyecto - desde los ensayos experimentales hasta la formulación del modelo constitutivo propuesto - y puedo afirmar con certeza que el resultado constituye un aporte significativo y valioso para la ingeniería estructural.

El autor ha enfrentado con solvencia un problema complejo, como es el cálculo no lineal del diagrama momento-curvatura en vigas rectangulares, y ha sabido encontrar una forma de simplificarlo sin sacrificar precisión. La propuesta de un modelo constitutivo alternativo de esfuerzo-deformación, acompañada de dos enfoques de aplicación práctica, revela no solo creatividad, sino también una visión clara de las necesidades reales que afrontan los ingenieros en el diseño estructural contemporáneo.

Resulta particularmente destacable la manera en que el autor ha logrado integrar teoría, experimentación y análisis estadístico, alcanzando resultados de altísima correlación con los datos experimentales. Ello evidencia un trabajo serio, meticuloso y confiable. Sin embargo, más allá de la solidez técnica, lo que merece resaltar es la intención de aportar soluciones prácticas que contribuyan a hacer más eficiente la labor de quienes nos dedicamos a esta disciplina.

Por lo expuesto, estoy convencido de que este estudio no solo será de gran utilidad para la comunidad científica y profesional, sino que también abrirá nuevas perspectivas de investigación y aplicaciones en la ingeniería estructural. Con el estilo claro y directo que caracteriza al autor, se nos entrega una herramienta que, sin duda, se convertirá en referencia para quienes busquen comprender y simplificar con mayor profundidad el comportamiento del concreto en flexión.

Es para mí un verdadero honor acompañar este trabajo con estas líneas, como reconocimiento a la seriedad, el compromiso y la vocación de investigación que el autor ha demostrado en el desarrollo de esta tesis.

Dr. Ing. Roy Ericksen Reyna Salazar

Asesor del trabajo de investigación

Tabla de Contenido

Resumen	v
Abstract	vi
Prólogo	vii
Capítulo I. Introducción	1
1.1 Generalidades	1
1.2 Descripción del problema de investigación	2
1.3 Objetivos del estudio.....	3
1.3.1 Objetivo general.....	3
1.3.2 Objetivos específicos	3
1.4 Antecedentes investigativos.....	3
Capítulo II. Marco teórico y conceptual	5
2.1 Comportamiento a flexión de vigas	5
2.2 Propiedades de los materiales	8
2.2.1 Concreto	8
2.2.2 Acero de refuerzo	14
Capítulo III. Modelo teórico propuesto	17
3.1 Mapeo sectorizado para parametrización de curvas	17
3.1.1 Sectorización	17
3.1.2 Mapeo.....	18
3.1.3 Asignación de condiciones sectoriales	31
3.2 Modelo basado en parámetros físicos propuesto	43
3.2.1 Sectorización de la curva del concreto.....	44
3.2.2 Parámetros físicos de la curva	46
3.2.3 Relaciones entre coordenadas físicas y normalizadas del modelo.....	48
3.2.4 Sector 1: Tramo ascendente	50
3.2.5 Sector 2: Tramo descendente	56
3.3 Cálculo del diagrama momento-curvatura.....	65

3.3.1 Cálculo directo	66
3.3.2 Cálculo por bloque equivalente generalizado	73
Capítulo IV. Estudio experimental	75
4.1 Ensayo de compresión bajo carga monotónica uniaxial	75
4.1.1 Descripción del ensayo	75
4.1.2 Descripción de los especímenes	76
4.1.3 Sistema de carga y medición	77
Capítulo V. Validación experimental del modelo	79
5.1 Procedimiento de ajuste experimental	79
5.2 Modelos experimentales de las propiedades físicas	87
Capítulo VI. Aplicación del modelo	88
6.1 Cálculo directo del diagrama momento-curvatura	88
6.2 Cálculo del momento-curvatura por bloque equivalente generalizado	97
Conclusiones	102
Recomendaciones	105
Referencias bibliográficas	107
Anexos	110

Lista de Tablas

Tabla 1: Modelos de concreto no confinado sometidos a compresión uniaxial.....	12
Tabla 2: Modelos de concreto sometidos a compresión uniaxial en coordenadas normalizadas.	13
Tabla 3: Relaciones entre sistemas SCO y SCM.	22
Tabla 4: Cálculo Directo: Comportamiento constitutivo del concreto y acero.	70
Tabla 5: Cálculo Directo: Magnitud de las fuerzas internas del concreto y acero.	71
Tabla 6: Cálculo Directo: Posición de las fuerzas internas del concreto y acero.	71
Tabla 7: Cálculo directo: Componentes de la solución.	72
Tabla 8: Cálculo directo: Condiciones especiales.	73
Tabla 9: Especímenes ensayados.	76
Tabla 10: Fórmulas Experimentales de las Propiedades Físicas.	87
Tabla 11: Comparación de resultados del bloque generalizado con la norma E.060 (2009).	101

Lista de Figuras

Figura 1: Mapa sísmico del Perú.....	2
Figura 2: Comportamiento a flexión de una viga de concreto simplemente reforzada.	5
Figura 3: Historia de deformación, esfuerzo y agrietamiento en una sección de viga.....	6
Figura 4: Distribución de esfuerzo del concreto en una viga para diseño a flexión.....	7
Figura 5: Curva constitutiva del concreto a compresión.	9
Figura 6: Curva constitutiva del acero a tracción.....	15
Figura 7: Modelo constitutivo bajo cargas cíclicas.	18
Figura 8: Casos de estudio para el método de mapeo sectorizado.	19
Figura 9: Interpretación gráfica del proceso de mapeo.	20
Figura 10: Interpretación gráfica de áreas y pendientes.....	25
Figura 11: Curva del acero: Zona de endurecimiento.....	27
Figura 12: Punto de inflexión en curva.....	31
Figura 13: Representación gráfica de las condiciones sectoriales.	33
Figura 14: Condiciones sectoriales del tramo ascendente de la curva del concreto.....	35
Figura 15: Geometría característica de la curva de concreto.	44
Figura 16: Sectorización de la curva de concreto.....	45
Figura 17: Definición gráfica de los sectores.....	45
Figura 18: Curva del concreto en distintos sistemas de coordenadas.....	46
Figura 19: Parámetros físicos de la curva en coordenadas físicas.....	47
Figura 20: Parámetros físicos de la curva en coordenadas normalizadas.....	48
Figura 21: Parámetros del sector 1 en distintos sistemas de coordenadas.	50
Figura 22: Condiciones sectoriales del sector 1 (Tramo ascendente).	51
Figura 23: Parámetros del sector 2 en distintos sistemas de coordenadas.	56
Figura 24: Condiciones sectoriales del sector 2 (Tramo descendente).	57
Figura 25: Distribución de acciones internas a flexión en la sección.....	65
Figura 26: Cálculo Directo: Componentes del concreto.	66

Figura 27: Etapas de Respuesta del Concreto Armado a Flexión.	69
Figura 28: Componentes del concreto en el cálculo por bloque equivalente generalizado.	73
Figura 29: Espécimen sujeto a compresión.	75
Figura 30: Probeta de concreto.	78
Figura 31: Sistema de adquisición de datos.	78
Figura 32: Registro Experimental del espécimen MCC-3.	79
Figura 33: Registro experimental sectorizado y normalizado.	80
Figura 34: Mapeo de coordenadas para el espécimen MCC-3.	81
Figura 35: Modelo vs datos experimentales para espécimen MCC-3.	85
Figura 36: Viga de concreto de sección geométrica de 30x50cm doblemente reforzada.	88
Figura 37: Diagrama momento-curvatura resultante.	95
Figura 38: Evolución de profundidad del eje neutro.	95
Figura 39: Evolución de fuerzas internas.	96
Figura 40: Esquema de cálculo por bloque equivalente.	100

Lista de Símbolos y Siglas

Símbolos

a_i	: Parámetros asociados a distintos modelos de concreto usados como ejemplo del uso del proceso de imposición de condiciones sectoriales del método de mapeo sectorizado.
A_i	: Coeficientes del polinomio del tramo ascendente propuesto para el concreto sometido a compresión uniaxial en el Sistema de Coordenadas Físicas Normalizadas (SCFN).
A_i^m	: Coeficientes del polinomio del tramo ascendente propuesto para el concreto sometido a compresión uniaxial en el Sistema de Coordenadas Mapeadas (SCM).
A	: Área.
A'_s, A_s	: Áreas de refuerzo longitudinal superior e inferior, respectivamente.
b	: Ancho de la sección de viga rectangular de concreto.
b_i	: Parámetros asociados a distintos modelos de concreto usados como ejemplo del uso del proceso de imposición de condiciones sectoriales del método de mapeo sectorizado.
c	: Distancia del eje neutro a la fibra extrema en compresión.
C_i	: Coeficientes genéricos del polinomio del modelo disociado propuesto para el concreto sometido a compresión uniaxial.
C_c	: Fuerza de compresión del concreto.
d_c, d'_s, d_s	: Posiciones de las fuerzas del concreto en compresión, del acero superior y del acero inferior, respectivamente, medidas desde la fibra extrema en compresión.
d, d'	: Distancias al centroide del refuerzo longitudinal inferior y superior, respectivamente, medidas desde la fibra extrema en compresión.
dA	: Diferencial de área en la sección transversal de viga rectangular.
dx, dy	: Diferenciales de deformación unitaria normalizada y esfuerzo normalizado, respectivamente.
dz	: Diferencial de posición a lo largo de la sección transversal de viga rectangular.

dX, dY	: Diferenciales en el Sistema de Coordenadas Originales (SCO) utilizados en el método de mapeo sectorizado.
$d\xi, d\eta$	: Diferenciales en el SCM utilizados en el método del mapeo sectorizado.
D	: Diámetro de una probeta de concreto.
D_i	: Coeficientes del polinomio del tramo descendente propuesto para el concreto sometido a compresión uniaxial en el SCFN.
D_i^m	: Coeficientes del polinomio del tramo descendente propuesto para el concreto sometido a compresión uniaxial en el SCM.
E	: Módulo de elasticidad.
E_c, E_0	: Módulos de elasticidad instantáneo en un punto genérico y en el punto inicial, respectivamente, asociados al concreto sometido a compresión uniaxial en el Sistema de Coordenadas Físicas (SCF).
E_s, E_{sh}	: Módulos de elasticidad instantánea en un punto genérico y al inicio del endurecimiento, respectivamente, asociados al acero sometido a tracción uniaxial en el SCF.
E_{sec}	: Módulo de elasticidad secante según ASTM C469-94 (1994) asociado al concreto sometido a compresión uniaxial
f_c, f'_s, f_s	: Esfuerzo del concreto en la fibra extrema en compresión, y esfuerzos en el acero superior e inferior, respectivamente.
f'_c, f_{50D}	: Esfuerzos de resistencia máxima y postpico asociado a una reducción del 50% de su resistencia máxima, respectivamente, asociados al concreto sometido a compresión uniaxial en el SCF.
f_y, f_{su}	: Esfuerzos de fluencia y de resistencia máxima, respectivamente, asociados al acero sometido a tracción uniaxial en el SCF.
F_s, F'_s	: Fuerzas internas del acero inferior y superior, respectivamente.
h	: Altura de la sección de viga rectangular de concreto.
h_{cr}	: Posición de la fibra extrema del concreto en tracción no fisurado medida desde la fibra extrema en compresión.
j_c	: Primer momento de área de la curva en el SCFN desde cero hasta la deformación unitaria normalizada x_c .

k_1	: Parámetro que relaciona la fuerza de compresión del concreto (C_c), con respecto a la fuerza debido al esfuerzo de máxima resistencia aplicado de manera constante en el área de concreto sometido a compresión ($f'_c \cdot b \cdot c$).
k_2	: Parámetro que relaciona la posición de la fuerza medida desde la fibra extrema del concreto en compresión (d_c), con respecto a la distancia del eje neutro a la fibra extrema en compresión (c).
M_{cr}, M_y, M_u	: Momentos nominales de agrietamiento, primera fluencia y máximo, respectivamente.
M_n	: Momento nominal o resistente a flexión.
n, n_0, n_1	: Pendientes de la curva en un punto genérico, en el punto inicial y en el punto final, respectivamente, en el SCO.
n^m, n_0^m, n_1^m	: Pendientes de la curva en un punto genérico, en el punto inicial y en el punto final, respectivamente, en el SCM.
$s, \bar{s}$	: Áreas medidas respecto a la recta $Y = Y_0$ y al eje de las abscisas, respectivamente, desde el punto inicial de la curva mapeada hasta un punto genérico de la gráfica, en el SCO.
$s_{0-1}, \bar{s}_{0-1}$	: Áreas medidas respecto a la recta $Y = Y_0$ y al eje de las abscisas, respectivamente, desde el punto inicial de la curva mapeada hasta el punto final, en el SCO.
s^m, s_{0-1}^m	: Áreas medidas respecto a la recta $Y = Y_0$ y al eje de las abscisas, respectivamente, desde el punto inicial de la curva mapeada hasta el punto final, en el SCM.
p	: Parámetro asociado al modelo de acero de Mander (1984)
P, Q, R, S	: Parámetros de regresión lineal múltiple asociados al modelo disociado propuesto.
r, r_0	: Factor de módulo de elasticidad instantánea asociado a E y factor de módulo de elasticidad inicial asociado a E_0 , respectivamente, representan pendientes en el SCFN.
T_c	: Fuerza de tracción del concreto.
u, u_A, u_{50D}	: Factor de densidad de energía de deformación asociado a U , factor de densidad de energía de deformación asociado a U_A y factor de densidad de

	energía de deformación asociado a U_{50D} , respectivamente, representan áreas en el SCFN.
u_c	: Área de la curva en el SCFN desde cero hasta la deformación unitaria normalizada, x_c .
U, U_A, U_{50D}	: Densidad de energía de deformación desde el origen hasta un punto genérico de la curva, densidad de energía de deformación en el tramo ascendente desde el origen hasta el pico y densidad de energía de deformación en el tramo descendente desde el pico hasta el punto de esfuerzo reducido hasta un 50% de su resistencia máxima, respectivamente, representan áreas en el SCF.
x, x_c	: Deformación unitaria normalizada y deformación unitaria normalizada en la fibra extrema en compresión del concreto.
x_{50D}	: Deformación unitaria normalizada postpico asociada a la deformación ε_{50D} , en el SCFN.
$[x, y]$	: Sistema de coordenadas físicas normalizadas (SCFN) de esfuerzo-deformación.
$[X, Y]$	: Sistema de coordenadas originales (SCO) del método de mapeo sectorizado.
(X_0, Y_0)	: Coordenadas del punto inicial del sector en el SCO.
(X_1, Y_1)	: Coordenadas del punto final del sector en el SCO.
$[X^T, Y^T]$	: Sistema de coordenadas originales trasladadas.
$[X^{TE}, Y^{TE}]$	: Sistema de coordenadas originales trasladadas y escaladas.
$[X^{TERx}, Y^{TERx}]$	: Sistema de coordenadas originales trasladadas, escaladas y reflejadas respecto al eje X.
$[X^{TERy}, Y^{TERy}]$	: Sistema de coordenadas originales trasladadas, escaladas y reflejadas respecto al eje Y.
$[X^{TERxy}, Y^{TERxy}]$	: Sistema de coordenadas originales trasladadas, escaladas y reflejadas respecto a los ejes X e Y.
y, y_c	: Esfuerzo normalizado y esfuerzo normalizado de la fibra extrema en compresión del concreto, respectivamente.
y_{50D}	: Esfuerzo normalizado postpico asociado al esfuerzo f_{50D} , en el SCFN.

z	: Eje de coordenadas en la sección de viga cuyo valor corresponde a la posición de las fibras medidas desde el eje neutro.
z_{50D}	: Factor de módulo de ablandamiento postpico del concreto a una reducción del 50% de su resistencia máxima (f'_c) en el SCFN.
Z_{50D}	: Módulo de ablandamiento postpico que describe la tasa de disminución de la resistencia del concreto con el aumento de la deformación, asociado a una reducción del 50% de su resistencia máxima (f'_c) en el SCF.
α_x	: Parámetro asociado al esfuerzo del bloque equivalente en el método del bloque equivalente generalizado.
β_x	: Parámetro asociado a la altura del bloque equivalente en el método del bloque equivalente generalizado.
ε	: Deformación unitaria.
$\varepsilon'_c, \varepsilon_{50D}$	: Deformación del concreto correspondiente a la resistencia máxima y deformación postpico asociada a una reducción del 50% de dicha resistencia máxima, respectivamente, en el concreto sometido a compresión uniaxial en el SCF.
$\varepsilon_c, \varepsilon_{ct}$	: Deformación unitaria de la fibra extrema en compresión del concreto y deformación unitaria de la fibra extrema en tracción no fisurado del concreto, respectivamente.
$\varepsilon_s, \varepsilon'_s$	: Deformación unitaria del acero en el centroide del refuerzo longitudinal inferior y en el centroide del refuerzo longitudinal superior de la sección, respectivamente.
$\varepsilon_{sh}, \varepsilon_{su}$	: Deformación del acero correspondientes al inicio del endurecimiento y a su resistencia máxima, respectivamente, en el acero sometido a tracción uniaxial en el SCF.
ε_y	: Deformación del acero correspondiente al inicio de la fluencia.
ε_z	: Deformación unitaria de la fibra en compresión del concreto ubicada a una distancia “z” medida desde el eje neutro.
$[\varepsilon, \sigma]$	: Sistema de coordenadas físicas (SCF) de esfuerzo-deformación.
$[\xi, \eta]$	: Sistema de coordenadas mapeadas (SCM).
σ	: Esfuerzo.
φ	: Curvatura.

Siglas

ACI	: Instituto americano del concreto (por sus siglas en inglés)
ASTM	: Sociedad americana de pruebas y materiales (por sus siglas en inglés)
CISMID	: Centro Peruano Japonés de Investigaciones Sísmicas y Mitigación de Desastres
DMC	: Diagrama momento-curvatura
E.060	: Norma Técnica E.060 Concreto Armado (2009) que forma parte del Reglamento Nacional de Edificaciones.
IGP	: Instituto Geofísico del Perú.
LVDT	: Transformador diferencial de variación lineal (por sus siglas en inglés)
SCO	: Sistema de coordenadas originales
SCF	: Sistema de coordenadas físicas
SCFN	: Sistema de coordenadas físicas normalizadas
SCM	: Sistema de coordenadas mapeadas

Capítulo I. Introducción

1.1 Generalidades

El Perú es un país el cuál se encuentra en una zona de alto movimiento sísmico, llamado “Cinturón de Fuego” o “Anillo de Fuego”, el cual se encuentra amenazado por la interacción entre la placa de Nazca y la placa Sudamericana, y debido a esto, es uno de los países de mayor potencial sísmico a nivel mundial como detalla Bernal y Tavera (2002).

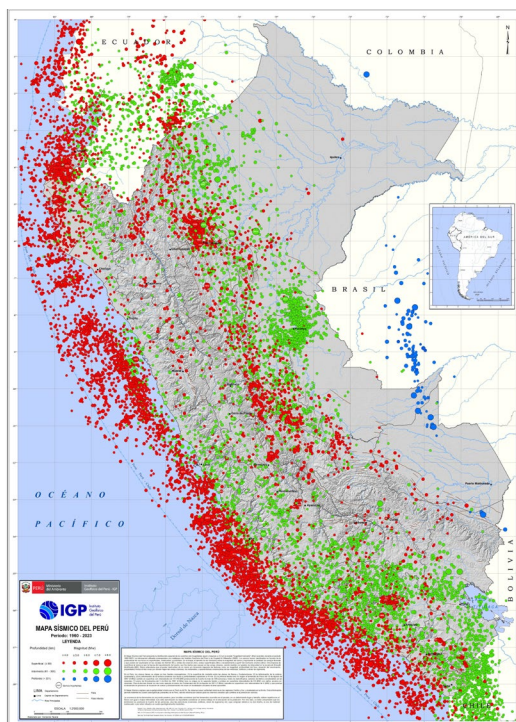
Las placas tectónicas se encuentran cerca de la región costera del Perú, esto genera que la incidencia tenga mayor impacto en las zonas costeras como se puede ver en la Figura 1, mientras que en las zonas de la sierra y selva tienen un menor potencial sísmico tectónico debido al incremento de la distancia respecto a la zona de encuentro de las placas tectónicas, siendo los eventos sísmicos presentados debido a las fallas locales.

Con respecto al concreto, es uno de los materiales más usados en el mundo, producido típicamente al mezclar cemento portland con arena, piedra y agua, cuya cantidad de consumo en el mundo se calcula en peso de unos tres mil millones de toneladas (Brunauer & Copeland, 1964, como se citó en Mehta & Monteiro, 2006). Mehta y Monteiro (2006) evidencian que cuarenta años más tarde su tasa de consumo ha crecido en gran medida en el orden de once billones de toneladas en peso.

En el diseño sismorresistente, las vigas de concreto armado de geometría rectangular son un elemento ampliamente utilizado a nivel nacional en sistemas asociados a elementos de concreto armado y también en sistemas de albañilería confinada, estas últimas son utilizadas en gran medida en el Perú, su importancia radica en la disipación de energía que estas generan en un edificio debido a la filosofía de diseño, ya que en la jerarquía de los componentes que conforman el sistema resistente, la viga es un elemento que actúa como fusible disipando energía mediante su falla por rotulación por flexión en los extremos, haciendo más segura a la estructura y economizando el reforzamiento posterior al evento sísmico.

Figura 1

Mapa sísmico del Perú.



Nota: Representa la distribución espacial de los eventos con magnitudes igual o mayores a M4.0 en la escala “magnitud momento” (Mw) ocurridos durante el periodo 1960-2023. Fuente: Instituto Geofísico del Perú.

1.2 Descripción del problema de investigación

La práctica del diseño por desempeño en estructuras de concreto armado se vuelve una práctica cada vez más común (Karthik, 2009), esto involucra el conocimiento de las propiedades no lineales del concreto armado, por lo que el uso del DMC se va volviendo una práctica cotidiana.

Los modelos constitutivos del concreto sometido a compresión uniaxial, poseen ecuaciones que no pueden ser fácilmente integradas o invertidas analíticamente (Karthik, 2009), esto genera una necesidad computacional de calcular integrales numéricas dentro del proceso de cálculo de las fuerzas resistentes a compresión del concreto en el DMC.

Muchos modelos constitutivos del concreto sometidos a compresión uniaxial poseen parámetros que se relacionan empíricamente con la resistencia de concreto, pero no presentan buenas aproximaciones con respecto a las curvas obtenidas experimentalmente en los tramos descendentes, y además carecen de significado físico, especialmente en la zona descendente. (Gao et al., 2020)

1.3 Objetivos del estudio

1.3.1 Objetivo general

El objetivo principal de este trabajo de investigación es plantear una metodología para modelar matemáticamente, con ayuda de la herramienta del análisis matemático del mapeo, las relaciones constitutivas de probetas experimentales de concreto sometidas a compresión uniaxial, de modo que sea aplicable a la construcción de una ecuación polinómica.

1.3.2 Objetivos específicos

- Aplicar la metodología para modelar el concreto en una ecuación de tipo polinómica, cuyos coeficientes se relacionen con parámetros que tengan significado físico de las propiedades mecánicas del espécimen de concreto, y además que posea un alto grado de ajuste teórico-experimental tanto en el tramo ascendente como descendente de la curva obtenida experimentalmente, para probetas de concreto ensayadas experimentalmente utilizando la norma ASTM C469-94 (1994).
- Plantear un modelo constitutivo del concreto que tenga facilidad de ser integrado analíticamente para que simplifique el proceso de obtención del diagrama momento-curvatura, generando una ecuación analítica para obtener la fuerza de compresión del concreto y su brazo de palanca asociada, respecto de la fibra extrema sometida a compresión.
- Obtener el diagrama de momento-curvatura de una viga de sección rectangular utilizando el modelo constitutivo propuesto para el concreto sometido a compresión.

1.4 Antecedentes investigativos

En la investigación “Mathematical model for complete stress-strain curve prediction of normal, light-weight and high-strength concretes” se propone un nuevo modelo constitutivo para el concreto sometido a compresión uniaxial, derivado del modelo propuesto por Popovics, proponiendo dos parámetros en el exponente con el fin de obtener un ajuste más preciso, sobre todo en la zona descendente, obteniendo de los ensayos formulaciones empíricas para modelar estos parámetros en función de la resistencia característica de la probeta de ensayo. (Tasnimi, 2004)

En la tesis de maestría “Stress-strain model of unconfined and confined concrete and stress-block parameters”, se propone un nuevo modelo de esfuerzo-deformación para el concreto confinado y no confinado, con el fin de superar la característica que presentan muchos modelos existentes de no permitir fácilmente integrar analíticamente, característica que permite alta eficiencia en el cálculo de los parámetros del bloque rectangular

equivalente de esfuerzo, simplificando la obtención del diagrama momento- curvatura de tal manera que se puede realizar cálculos manuales para obtener puntos en el diagrama, que comúnmente se realiza gracias a cálculos computacionales por la necesidad de realizar integraciones numéricas para el cálculo del bloque rectangular equivalente. (Karthik, 2009)

En la investigación “Las curvas tensión-deformación de hormigones ensayados bajo compresión uniaxial monotónica: una revisión sistemática”, se presentan y analizan distintas ecuaciones que describen el comportamiento a compresión del concreto publicadas a lo largo del tiempo, capturando características distintivas de las distintas ecuaciones que presentan. (Salguero et al., 2013)

En la investigación “Proposed constitutive law of uniaxial compression for concrete under deterioration effects” se propone un nuevo modelo constitutivo del concreto bajo compresión uniaxial, siendo la curva del tipo polinómico de tercer grado en el tramo ascendente, y del tipo racional de un polinomio de primer grado en el numerador, y un polinomio de segundo grado en el denominador, teniendo la característica de tener dos parámetros, obtenidos al realizar los ajustes de curva experimental con el modelo teórico, con la característica de ser capaces de cuantificar parámetros físicos del ensayo. (Gao et al., 2020)

Los antecedentes muestran que el planteamiento de un modelo con facilidad de integración numérica, que no pierda precisión en el estudio de los parámetros que intervienen, siendo estos modelados típicamente de manera empírica en función de la resistencia característica de la probeta de concreto ensayada a compresión uniaxial, permite mejorar el rendimiento del proceso de obtención del diagrama momento-curvatura.

Capítulo II. Marco teórico y conceptual

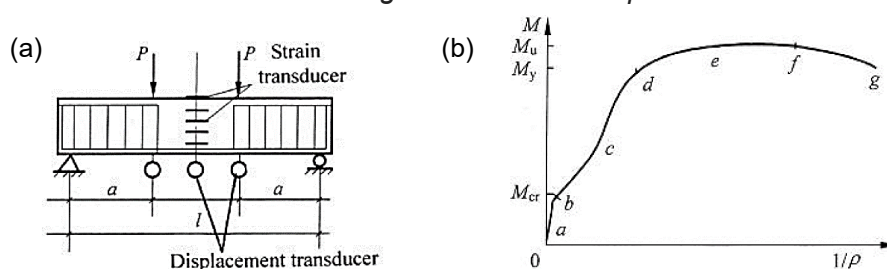
2.1 Comportamiento a flexión de vigas

Las vigas de concreto armado están hechas de dos materiales diferentes por lo que no son homogéneas. Debido a esta heterogeneidad, los métodos usados en su análisis difieren de aquellos utilizados para materiales homogéneos como el acero o la madera. No obstante, los principios fundamentales subyacentes son esencialmente los mismos. (Nilson, 1999)

El análisis por flexión en secciones de vigas rectangulares de concreto armado se representa mediante un diagrama momento-curvatura (DMC), ilustrado en la Figura 2, este diagrama, permiten diversas aplicaciones para el diseño sísmico de estructuras. Entre estas aplicaciones se incluyen el cálculo de la capacidad de ductilidad por curvatura, la redistribución de momentos, la determinación de inercias agrietadas y el cálculo de los índices de daño a nivel de los elementos. (Aguilar, 2003)

Figura 2

Comportamiento a flexión de una viga de concreto simplemente reforzada.



Nota: (a) Viga rectangular. (b) Diagrama Momento-Curvatura. Fuente: Adaptado de (Guo, Z., 2014).

Guo (2014) discute lo siguiente sobre la flexión de vigas:

El comportamiento mecánico a flexión de la viga de concreto reforzado puede ser dividido en tres etapas: comprendidas desde el momento que se aplica la carga hasta el punto de falla, en base a la deformación y agrietamiento observado en los ensayos experimentales:

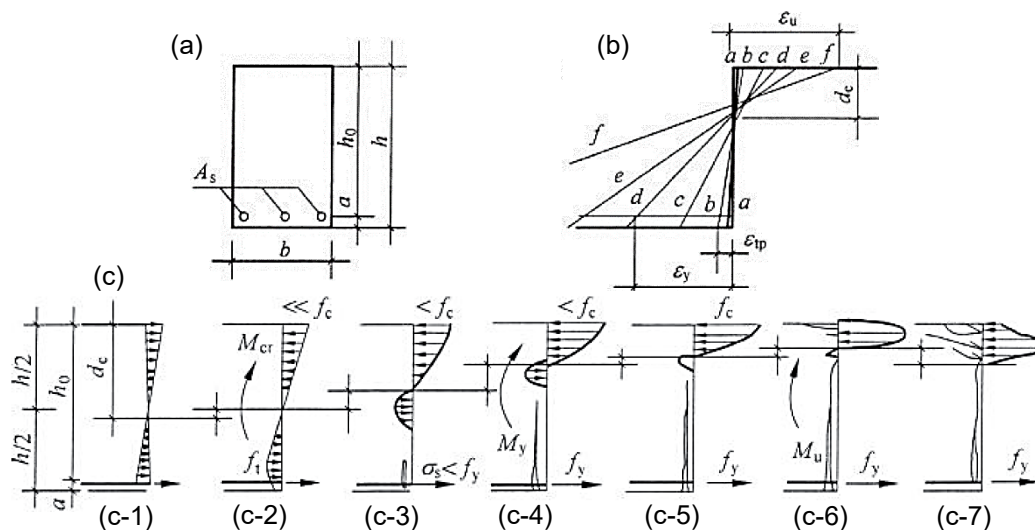
Etapa I: Antes del agrietamiento del concreto ($M_n \leq M_{cr}$). Comprende la etapa en la cual la viga está cargada inicialmente, se caracteriza en que las deformaciones y los esfuerzos permanecen proporcionales y poseen una distribución lineal en la sección, además que la viga permanece en estado elástico a flexión, es decir, la curvatura de la viga incrementa proporcionalmente a su momento flector. Ver parte (3-a) de la Figura 2.2.

Etapa II: Concreto fisurado ($M_{cr} \leq M_n \leq M_y$). En esta etapa se observan fisuras delgadas y cortas en la sección más débil, estas se caracterizan por localizarse cerca del fondo de la superficie lateral y por ser perpendiculares al eje del refuerzo (Ver parte (3-c) de la Figura 2.2). Una parte del concreto en la zona en tracción queda sin resistencia, generando que el refuerzo recibe la carga de manera súbita y que la posición del eje neutro suba. A medida que incrementa el momento flector en esta etapa, la fisura existente se expande lentamente y se extiende hacia arriba.

Etapa III: Después de la primera fluencia ($M_n \geq M_y$). En esta etapa la mayor parte del concreto en la zona de tracción está agrietada, el esfuerzo sobre el acero permanece constante, el concreto alcanza su máximo esfuerzo resistente. Ver partes (3-e), (3-f) y (3-g) de la Figura 2.2.

Figura 3

Historia de deformación, esfuerzo y agrietamiento en una sección de viga.



Nota: (a) Sección de viga. (b) Historia de deformaciones en la sección. (c) Historia de esfuerzos en la sección: (c-1) Antes del agrietamiento. (c-2) En el agrietamiento. (c-3) Después del agrietamiento. (c-4) Primera fluencia del refuerzo. (c-5) Después de la primera fluencia. (c-6) Estado último. (c-7) Tramo descendente.

Fuente: Adaptado de (Guo, Z., 2014).

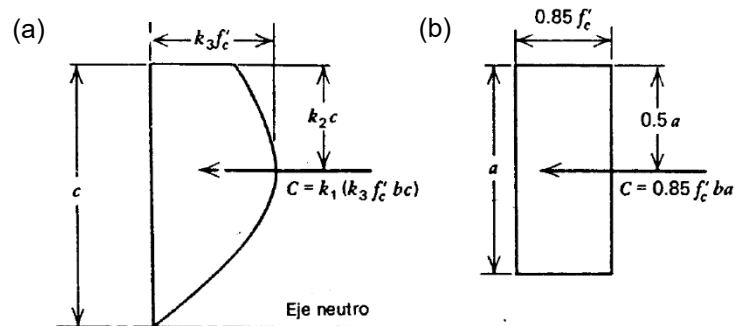
Park y Paulay (1986) indican cuatro suposiciones básicas en las que se basa la teoría general de flexión para el concreto armado:

1. El principio de Bernoulli: Las secciones planas antes de la flexión permanecen planas después de la flexión, como se ilustra en la parte (2) de la Figura 2.2.
2. Se conoce la curva esfuerzo-deformación para el acero.
3. Se puede despreciar la resistencia a tensión del concreto, como se observa en las partes (3-e), (3-f) y (3-g) de la Figura 2.2.

- Se conoce la curva esfuerzo-deformación para el concreto, que define la magnitud y distribución del esfuerzo a compresión, tal como se ilustra en la Figura 4.

Figura 4

Distribución de esfuerzo del concreto en una viga para diseño a flexión.



Nota: (a) Distribución real. (b) Distribución rectangular equivalente. Fuente: Park, R. & Paulay, T., 1988.

El cálculo del Diagrama Momento-Curvatura (DMC) puede realizarse de varias maneras; sin embargo, Aguiar (2003) sostiene que todas se fundamentan en tres principios:

- Compatibilidad de deformaciones
- Equilibrio de fuerzas
- Equilibrio de momentos.

Aguiar (2003) describe el siguiente procedimiento orientado a la elaboración de un programa de cálculo del DMC:

- Seleccionar un valor de deformación máxima del concreto, ϵ_c , para obtener un punto del DMC.
- Establecer una ubicación del eje neutro c , a partir de esta, trazar el perfil de deformación a lo largo de la profundidad de la sección.
- Calcular las deformaciones en cada región de acero y concreto a través de la compatibilidad de deformaciones, y asumiendo que las deformaciones varían linealmente.
- Utilizar las deformaciones calculadas para obtener los esfuerzos correspondientes, según las curvas constitutivas de cada material.
- Calcular las fuerzas actuantes sobre las regiones de concreto y acero, integrando el esfuerzo sobre el área de cada región.

6. Verificar el equilibrio de fuerzas sumando vectorialmente las fuerzas, asegurando que la carga axial neta coincida con la carga axial especificada. Si no se cumple el equilibrio, ajustar la profundidad del eje neutro y repetir desde el paso 2. Este proceso es iterativo.
7. Calcular el momento flector interno correspondiente a la última posición del eje neutro, multiplicando cada fuerza por su brazo de palanca respectivo.
8. Calcular la curvatura como la relación entre la deformación del concreto, ϵ_c , y la distancia al eje neutro, c .

Este procedimiento permite determinar un punto en el DMC. Para calcular un nuevo punto, se impone otro valor de ϵ_c y se repite el proceso del paso 2 al 8.

2.2 Propiedades de los materiales

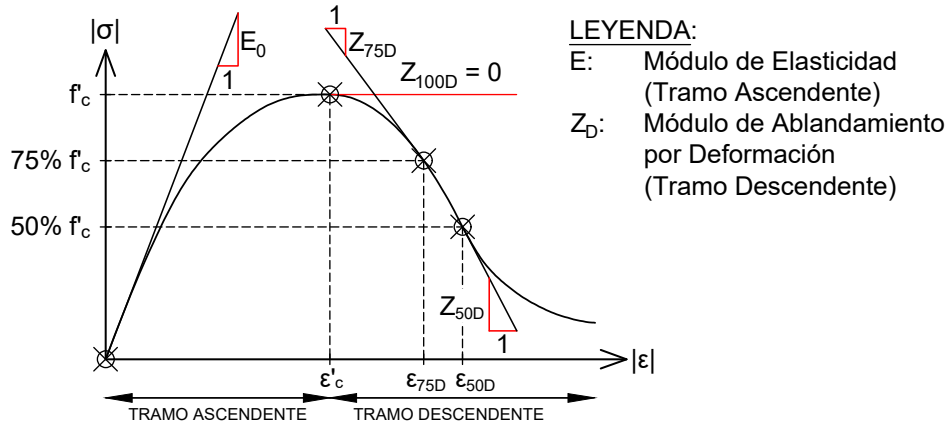
2.2.1 Concreto

En el ámbito de la construcción civil, el concreto es uno de los materiales más utilizados en el mundo, empleándose en la edificación de componentes estructurales importantes como vigas, columnas, losas y cimentaciones, pero no limitándose a elementos estructurales sino también arquitectónicos. Constituido por una mezcla homogénea de cemento Portland, agregados finos (arena), agregados gruesos (grava) y agua, el concreto se distingue por sus propiedades de versatilidad, mecánicas y de durabilidad, que le confieren una adaptabilidad física en la configuración geométrica de estructuras diversas, capacidad para soportar grandes cargas mecánicas de compresión, y capacidad de soportar condiciones adversas como la corrosión, el fuego y el agua, garantizando la longevidad de las estructuras.

La notable capacidad del concreto para resistir condiciones extremas y cargas significativas ha incentivado a desarrollar investigaciones profundas sobre sus propiedades mecánicas, orientadas a maximizar su eficacia dentro del ámbito del diseño estructural, especialmente en regiones propensas a actividad sísmica. Tradicionalmente, la relación esfuerzo-deformación, un aspecto importante en el diseño estructural, se ha abordado bajo la hipótesis del comportamiento lineal (ley de Hooke). Esta aproximación, sin embargo, es válida mientras las deformaciones sean pequeñas (Llano, 2015, como se cita en Palacios, 2017), situación que no suele ocurrir ante escenarios sísmicos de gran envergadura, ya que éstos podrían generar deformaciones significativas. Es por esto por lo que una consideración de esta naturaleza merece ser apropiadamente considerada ante cargas sísmicas (Palacios, 2017). A continuación, se presentará el estado del arte de algunos modelos propuestos que representen mediante ecuaciones a la Figura 5.

Figura 5

Curva constitutiva del concreto a compresión.



Nota: Elaboración Propia.

Modelo de Hognestad (1955)

El modelo de Hognestad representa un avance significativo en la comprensión del comportamiento del concreto bajo carga de compresión, propone una ecuación simple para representar la curva de esfuerzo-deformación del concreto bajo carga monótona de compresión desde la carga inicial hasta el punto de falla. Se caracteriza por ser una ecuación polinómica, adimensional, sin parámetros de ajuste, y unificada para el tramo ascendente y descendente (Hognestad et al., 1995, como se citó en Gao et al., 2020).

La expresión matemática del modelo se presenta en la ecuación (2.1).

$$\frac{\sigma}{f'_c} = 2 \cdot \frac{\epsilon}{\epsilon'_c} - \left(\frac{\epsilon}{\epsilon'_c} \right)^2 \quad (2.1)$$

Modelo de Smith y Young (1956)

De acuerdo a Salguero et al. (2013), el modelo propuesto por Smith y Young es una de las ecuaciones más citadas sobre el comportamiento esfuerzo-deformación del concreto. Propone una ecuación exponencial, adimensional, sin parámetros de ajuste, y unificada para el tramo ascendente y descendente.

La expresión matemática del modelo se presenta en la ecuación (2.2).

$$\frac{\sigma}{f'_c} = \left(\frac{\epsilon}{\epsilon'_c} \right) \cdot e^{1 - \left(\frac{\epsilon}{\epsilon'_c} \right)} \quad (2.2)$$

De acuerdo a Salguero et al. (2013), a partir de los años sesenta, comienzan a aparecer una gran cantidad de propuestas de ecuaciones basadas en la propuesta de Smith y Young. Estas ecuaciones tienen la forma que se muestra en la ecuación (2.3).

$$\sigma = \frac{P(\varepsilon)}{Q(\varepsilon)}, \text{ donde: } P, Q: \text{Polinomios.} \quad (2.3)$$

Para obtener una función racional a partir de una función exponencial, se acomoda la ecuación (2.2) en fracción, de tal manera que el denominador se expresa en su desarrollo en series de potencias, como se observa en la ecuación (2.4).

$$\frac{\sigma}{f'_c} = \frac{\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon'_c}\right) \cdot e}{e^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon'_c}}} = \frac{\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon'_c}\right) \cdot e}{1 + \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon'_c}\right) + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon'_c}\right)^2 + \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon'_c}\right)^3 + \dots} \quad (2.4)$$

A través de truncamientos, transformaciones y desarrollos algebraicos, han ido surgiendo diversas propuestas de ecuaciones de tipo racional, cuya estructura general se observa en la ecuación (2.3).

Modelo de Saenz (1964)

El modelo propuesto por Saenz en 1964 representa una formulación racional derivada del modelo de Smith y Young (1956), en la cual se aplica un truncamiento de la ecuación (2.4) hasta el término cuadrático. Este modelo se caracteriza por ser una ecuación racional, adimensional, sin parámetros de ajuste, única expresión continua para describir tanto el tramo ascendente como el descendente de la curva esfuerzo-deformación del concreto.

La expresión matemática del modelo se presenta en la ecuación (2.5).

$$\frac{\sigma}{f'_c} = \frac{\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon'_c}\right) \cdot e}{1 + (e - 2) \cdot \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon'_c}\right) + \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon'_c}\right)^2} \quad (2.5)$$

Modelo de Desayi y Krishnan (1964)

El modelo de Desayi y Krishnan es otro caso de propuesta de ecuación basado en la propuesta anterior de Smith y Young (1956). Este modelo es un caso paradigmático del enfoque de truncamiento, en el cual se modifica la estructura de la ecuación (2.4) mediante tres modificaciones claves: Se elimina el término lineal de primer orden, se omite el factor 1/2 del término cuadrático y se reemplaza la constante “e” por el valor de 2 (Salguero et al., 2013).

La expresión matemática del modelo se presenta en la ecuación (2.6).

$$\frac{\sigma}{f'_c} = \frac{2 \cdot \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon'_c}\right)}{1 + \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon'_c}\right)^2} \quad (2.6)$$

Esta expresión se caracteriza por ser una función racional, adimensional, sin parámetros de ajuste, y válida para describir tanto el tramo ascendente como descendente de la curva esfuerzo-deformación.

Modelo de Popovics (1973)

El modelo propuesto por Popovics en 1973 constituye un aporte relevante al estudio del comportamiento no lineal del concreto bajo compresión. A diferencia de otros modelos previamente presentados, esta formulación incorpora un parámetro de ajuste n que no posee un valor fijo, generando que este modelo tenga flexibilidad para la aproximación a los datos de ensayo experimental.

Una de las principales innovaciones del modelo es la introducción de relaciones empíricas tanto de la deformación unitaria correspondiente al esfuerzo máximo, ε'_c , como para el parámetro n en función de la resistencia máxima del concreto, f'_c (Salguero et al., 2013). Dichas relaciones permiten expresar el comportamiento del concreto a partir de propiedades que pueden obtenerse experimentalmente (Popovics, 1973).

Además, la ecuación normalizada permite representar al concreto confinado y no confinado, dependiendo de la resistencia y deformación utilizadas en el proceso de normalización. Esta versatilidad fue posteriormente aprovechada por Mander (1983) en su modelo de concreto confinado, donde se mantuvo la estructura racional de la ecuación original de Popovics.

La expresión matemática del modelo se presenta en la ecuación (2.7).

$$\frac{\sigma}{f'_c} = \frac{\frac{n}{n-1} \cdot \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon'_c}\right)^{\frac{n}{n-1}}}{\frac{1}{n-1} + \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon'_c}\right)^{\frac{n}{n-1}}}, \text{ donde: } n = 0.4 \cdot 10^{-3} \cdot f'_c + 1 \quad (2.7)$$

La ecuación (2.7) se caracteriza por ser una variante del modelo racional presentado en la ecuación (2.4), incorporando un término multiexponencial en el denominador, es decir, un exponente genérico no necesariamente natural, a diferencia de los exponentes propios de expresiones polinómicas.

En resumen, la ecuación (2.7) se clasifica como una función racional con denominador multiexponencial, adimensional, con un parámetro de ajuste expresado como

función empírica de la resistencia a compresión del concreto, f'_c , y formulada de forma continua para describir el tramo ascendente y descendente.

Modelo de Carreira y Chu (1985)

El modelo de Carreira y Chu mantiene la misma estructura funcional que el modelo de Popovics (1973), pero introduce una modificación en la forma de definir el exponente de la ecuación. En lugar de emplear la relación empírica de Popovics para el parámetro n , Carreira y Chu plantean una nueva expresión empírica basado en sus propios ensayos experimentales sobre el concreto no confinado.

La expresión matemática del modelo se presenta en la ecuación (2.8).

$$\frac{\sigma}{f'_c} = \frac{\beta \cdot \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon'_c}\right)}{\beta - 1 + \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon'_c}\right)^\beta}, \text{ donde: } \beta = \left(\frac{f'_c}{36.69}\right)^3 + 1.55 \quad (2.8)$$

Finalmente, cabe resaltar que a lo largo de la historia se han propuesto más de treinta expresiones diferentes para representar las curvas constitutivas de especímenes de concreto no confinado sometidos a compresión uniaxial. En su estudio, Salguero et al. (2013) recopilan y comparan algunas de las formulaciones más representativas, las cuales se presentan en la Tabla 1. Esta tabla resume los modelos descritos previamente.

Tabla 1

Modelos de concreto no confinado sometidos a compresión uniaxial.

Año	Autor	Ecuación
1955	Hognestad	$\frac{\sigma}{f'_c} = 2 \cdot \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon'_c}\right) - \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon'_c}\right)^2$
1956	Smith y Young	$\sigma = \frac{f'_c}{\varepsilon'_c} \cdot \varepsilon \cdot e^{\left(1 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon'_c}\right)}$
1964	Saenz	$\sigma = \frac{f'_c \cdot \varepsilon}{\varepsilon'_c \cdot \left[1 + (e - 2) \cdot \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon'_c}\right) + \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon'_c}\right)^2\right]}$
1964	Desayi y Krishnan	$\sigma = \frac{f'_c \cdot \varepsilon \cdot e}{\varepsilon'_c \cdot \left[1 + (e - 2) \cdot \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon'_c}\right) + \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon'_c}\right)^2\right]}$
1973	Popovics	$\frac{\sigma}{f'_c} = \frac{\frac{n}{n-1} \cdot \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon'_c}\right)}{\frac{1}{n-1} + \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon'_c}\right)^{\frac{n}{n-1}}}$

Año	Autor	Ecuación
		$n = K_1 \cdot f'_c + 1 \quad \varepsilon'_c = K_2 \cdot \sqrt[4]{f'_c}$
1985	Carreira y Chu	$\frac{\sigma}{f'_c} = \frac{\beta \cdot \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon'_c}\right)}{\beta - 1 + \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon'_c}\right)^\beta}$ $\beta = \left(\frac{f'_c}{36.69}\right)^3 + 1.55$

Nota: Adaptado de (Salguero, F. et al., 2013).

Por otro lado, los modelos existentes pueden clasificarse de diversas maneras. En particular, la Tabla 2, presentada por Guo (2014), organiza estos modelos según el tipo de función representativa, empleando coordenadas adimensionales. Esta clasificación se basa en la normalización de las coordenadas físicas de esfuerzo y deformación respecto al punto de resistencia máxima, lo que permite un enfoque sistemático y comparativo entre diferentes formulaciones constitutivas.

Tabla 2

Modelos de concreto sometidos a compresión uniaxial en coordenadas normalizadas.

Tipo de Función	Expresión Matemática	Autor
Polinomial	$y = 2 \cdot x - x^2$	Hognestad
	$y^2 + c_1 \cdot x^2 + c_2 \cdot x \cdot y + c_3 \cdot y + c_4 \cdot x = 0$	Kriz-Lee
Exponencial	$y = x \cdot e^{1-x}$	Sahlin et al.
	$y = 6.75(e^{-0.812 \cdot x} - e^{-1.218 \cdot x})$	Umemura
Trigonométrica	$y = \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right)$	Young
	$y = \sin\left[\frac{\pi}{2} \cdot (-0.27 \cdot x - 1 + 0.73 \cdot x + 0.27)\right]$	Okayama
Fracción Racional	$y = \frac{2 \cdot x}{1 + x^2}$	Desayi et al.
	$y = \frac{(c_1 + 1) \cdot x}{c_1 + x^n}$	Tulin-Gerstle
	$y = \frac{x}{c_1 + c_2 \cdot x + c_3 \cdot x^2 + c_4 \cdot x^3}$	Saenz
	$y = \frac{c_1 + (c_2 - 1) \cdot x^2}{1 + (c_1 - 2) \cdot x + c_2 \cdot x^2}$	Sargin

Tipo de Función	Expresión Matemática		Autor
	Ascendente ($x < 1$)	Descendente ($x > 1$)	
Funciones Separadas	$y = 2 \cdot x - x^2$	$y = 1 - 0.15 \cdot \frac{(x-1)}{(x_u-1)}$	Hognestad
	$y = 2 \cdot x - x^2$	$y = 1$	Rüsch

Nota: Adaptado de (Guo, Z., 2014).

x: Deformación normalizada respecto a la deformación asociada al máximo de resistencia.

y: Esfuerzo normalizado respecto a la máxima resistencia.

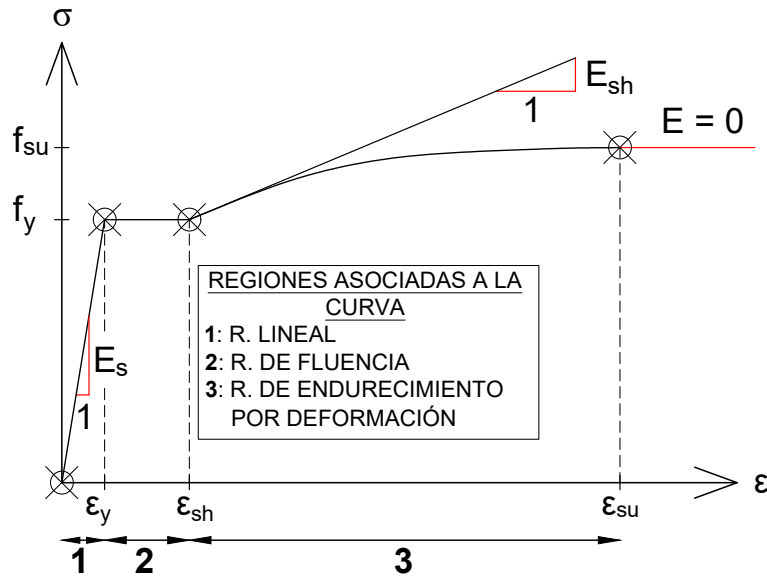
2.2.2 Acero de refuerzo

Guo (2014) afirma que la principal función del acero de refuerzo adherido a las estructuras de concreto es la de compensar la baja resistencia a la tracción y ductilidad deficiente del concreto como material, permitiéndoles absorber en conjunto y distribuir mejor las cargas y los movimientos estructurales, especialmente en condiciones sísmicas. Este refuerzo se integra en forma de varillas corrugadas de acero, que se colocan en los puntos críticos de la estructura donde se anticipan esfuerzos de tracción. El acero, al tener una alta capacidad de elongación antes de llegar a su límite de fluencia, es capaz de soportar deformaciones considerables sin fallar, lo que es fundamental para la integridad estructural durante eventos extremos.

En la Figura 6 muestra la relación esfuerzo-deformación para el acero sometido a tracción, esta curva está definida por las siguientes regiones: Región lineal, región de fluencia plástica y región de endurecimiento por deformación. A continuación, se describirán las regiones más a detalle.

Figura 6

Curva constitutiva del acero a tracción.



Nota: Elaboración Propia.

1. Región lineal: Inicia desde la ausencia de deformación axial ($\epsilon = 0$) y se extiende hasta la deformación asociada al esfuerzo de fluencia (ϵ_y). Se caracteriza por su relación lineal entre esfuerzo y deformación. La relación esfuerzo-deformación de esta región está modelada en la ecuación (2.9).

$$\sigma = E_s \cdot \epsilon, \quad 0 \leq \epsilon \leq \epsilon_y \quad (2.9)$$

2. Región de fluencia: Se extiende desde la deformación asociada al esfuerzo de fluencia (ϵ_y) hasta el inicio del endurecimiento por deformación (ϵ_{sh}). Se caracteriza por su capacidad de deformarse plásticamente manteniendo un esfuerzo constante. La relación esfuerzo-deformación de esta región está modelada en la ecuación (2.10).

$$\sigma = f_y, \quad \epsilon_y \leq \epsilon \leq \epsilon_{sh} \quad (2.10)$$

3. Región de endurecimiento por deformación: Se extiende hasta la deformación asociada al punto de máxima resistencia previo a la estricción (ϵ_{su}). Se caracteriza por un incremento en la resistencia del acero a medida que la deformación continúa. Es importante destacar que esta región no se utiliza para propósitos de diseño en flexión como puede verse en el apartado 10.2.4 de la Norma Técnica E.060 Concreto Armado (2009).

Una de las principales diferencias entre los diversos modelos constitutivos para el acero de refuerzo radica precisamente en la forma en que se representa matemáticamente esta región, como lo detalla Suintaxi (2016).

A continuación, se presentan dos de los modelos más representativos para esta región.

Modelo de Mander (1983)

El modelo propuesto por Mander (1983), define el comportamiento del acero en la región de endurecimiento por medio de una expresión de tipo exponencial, como se muestra en la siguiente ecuación (2.11).

$$\sigma = f_{su} + (f_y - f_{su}) \cdot \left(\frac{\varepsilon_{su} - \varepsilon}{\varepsilon_{su} - \varepsilon_{sh}} \right)^p, \quad \varepsilon_{sh} \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{su} \quad (2.11)$$

Modelo de Priestley et al. (2007)

Por su parte, Priestley et al. (2007) proponen una expresión cuadrática más simplificada para representar esta misma región, su expresión se muestra en la ecuación (2.12).

$$\sigma = f_{su} - (f_{su} - f_y) \cdot \left(\frac{\varepsilon_{su} - \varepsilon}{\varepsilon_{su} - \varepsilon_{sh}} \right)^2, \quad \varepsilon_{sh} \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{su} \quad (2.12)$$

Este modelo asume una transición entre el esfuerzo de fluencia y el esfuerzo máximo, con una estructura matemática más sencilla al no incluir parámetros de ajuste adicionales.

Capítulo III. Modelo teórico propuesto

3.1 Mapeo sectorizado para parametrización de curvas

En esta investigación, se propone una metodología para desarrollar modelos matemáticos no lineales a partir de datos experimentales, empleando el mapeo como herramienta principal de análisis. El objetivo principal es optimizar y agilizar la generación de modelos que satisfagan criterios específicos de tendencia aplicado en entornos experimentales.

Este método se fundamenta en tres procedimientos principales: La sectorización, el mapeo de coordenadas y la asignación de condiciones sectoriales, el esquema de aplicación se puede observar en la Figura 1 del Anexo 1. A continuación, se describirán cada uno de estos procesos.

3.1.1 Sectorización

3.1.1.1 Descripción.

El primer proceso del método es la sectorización. Este proceso implica la delimitación de un conjunto de puntos en sectores o tramos, basándose en características condicionantes de su tendencia. Estas características que deben cumplir los sectores son las siguientes:

1. La tendencia del conjunto de puntos que pertenecen al sector debe ser estrictamente creciente o decreciente.
2. El conjunto de puntos en el tramo no debe presentar cambios abruptos de pendiente en su tendencia que sean equivalentes a funciones discontinuas.
3. En caso de existir un punto de inflexión (un punto de separación entre una zona cóncava y una zona convexa), este debe estar localizado dentro del tercio central del sector aproximadamente.

3.1.1.2 Aplicación.

Las curvas o modelos matemáticos son representaciones de la tendencia que posee un conjunto de puntos obtenidos experimentalmente en cierta región o sector, a continuación, se utilizarán curvas para ejemplificar el proceso entendiendo a estas como un equivalente al conjunto de puntos en el sector.

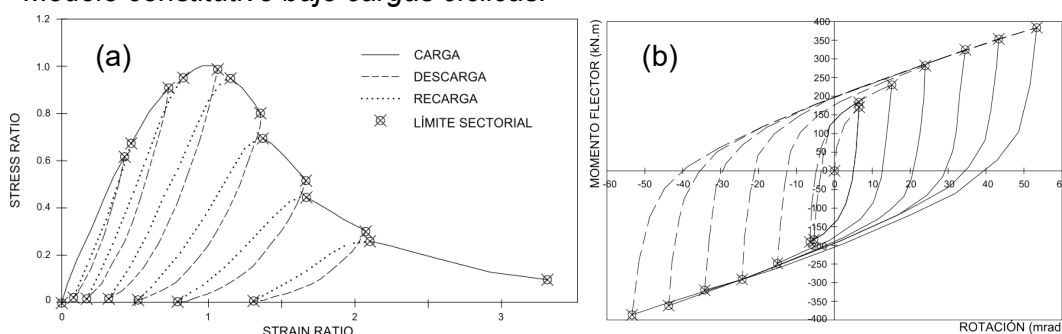
Para entender el proceso de sectorización, se puede ver la Figura 6, que representa a la curva de esfuerzo-deformación del acero sometido a tracción monotónica, para esta curva (representación equivalente a una secuencia de puntos en el caso de data obtenida

experimentalmente), el proceso de sectorización podría implicar generar tres sectores: El sector lineal ascendente (correspondiente a la región lineal), el sector lineal constante (correspondiente a la región de fluencia), y por último el sector parabólico ascendente (correspondiente a la región de endurecimiento por deformación). Estos tres sectores cumplen con las tres características condicionantes.

De la misma manera, se puede ilustrar otros ejemplos presentados en la Figura 7, los cuales incluyen la curva de esfuerzo-deformación del concreto bajo compresión cíclica o la curva histerética de una conexión metálica. Para la curva de concreto (Figura 7 (a)), es factible sectorizarla en función de la carga y descarga del tramo ascendente en dos sectores, cada uno correspondiente a la carga y descarga de cada ciclo de desplazamiento impuesto. En cuanto al tramo descendente, este puede ser sectorizado en tres sectores que representen la recarga, carga y descarga para cada ciclo de desplazamiento impuesto. Por otro lado, en el caso de la curva histerética de la conexión metálica, mostrada en la Figura 7 (b), cada semiciclo de desplazamiento impuesto puede ser dividido en dos sectores, correspondientes a las fases de ascenso o descenso.

Figura 7

Modelo constitutivo bajo cargas cíclicas.



Nota: (a) Concreto a compresión. Fuente: Modificado de (Bahn, B. & Hsu, C., 1998) (b) Conexión metálica. Fuente: Modificado de (Nogueiro, P. et al., 2005)

3.1.2 Mapeo

3.1.2.1 Descripción.

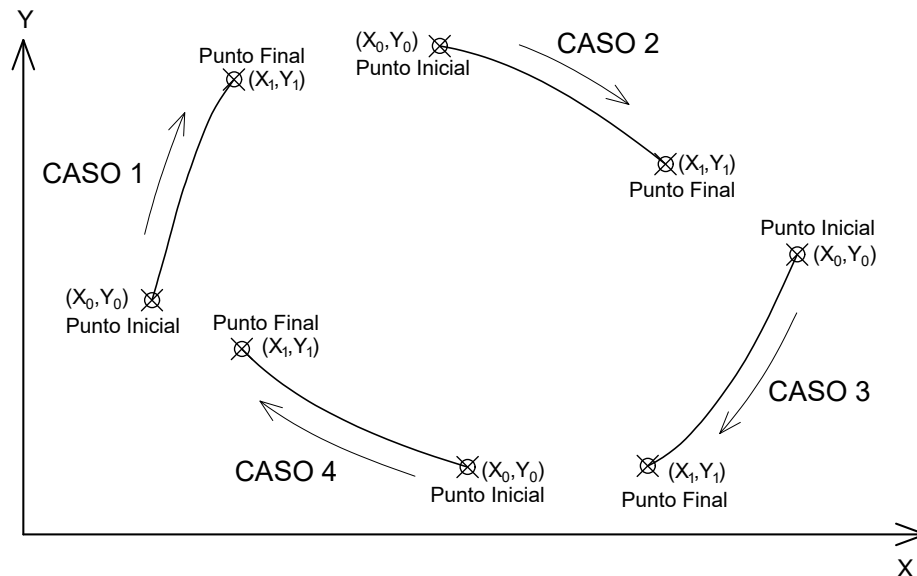
Una vez realizada la sectorización, el siguiente paso es el mapeo, el cual consiste en trasladar y transformar linealmente las coordenadas del sector. Este proceso se aplica de forma independiente en cada sector, con el objetivo de llevar al punto inicial del sector al origen de coordenadas, y llevar al punto final del sector al punto (1,1). A este proceso se le llama mapeo de coordenadas, y tiene como finalidad cambiar el sistema coordenado original (SCO) en un sistema coordenado mapeado (SCM).

Para describir matemáticamente este mapeo, se consideran cuatro posibles casos de estudio, los cuales se ilustran en la Figura 8. Estos casos están determinados por la

dirección y sentido del recorrido desde el punto inicial hacia el punto final, independientemente del sentido de la concavidad de la curva o del cuadrante del plano cartesiano en el que se ubiquen los puntos.

Figura 8

Casos de estudio para el método de mapeo sectorizado.

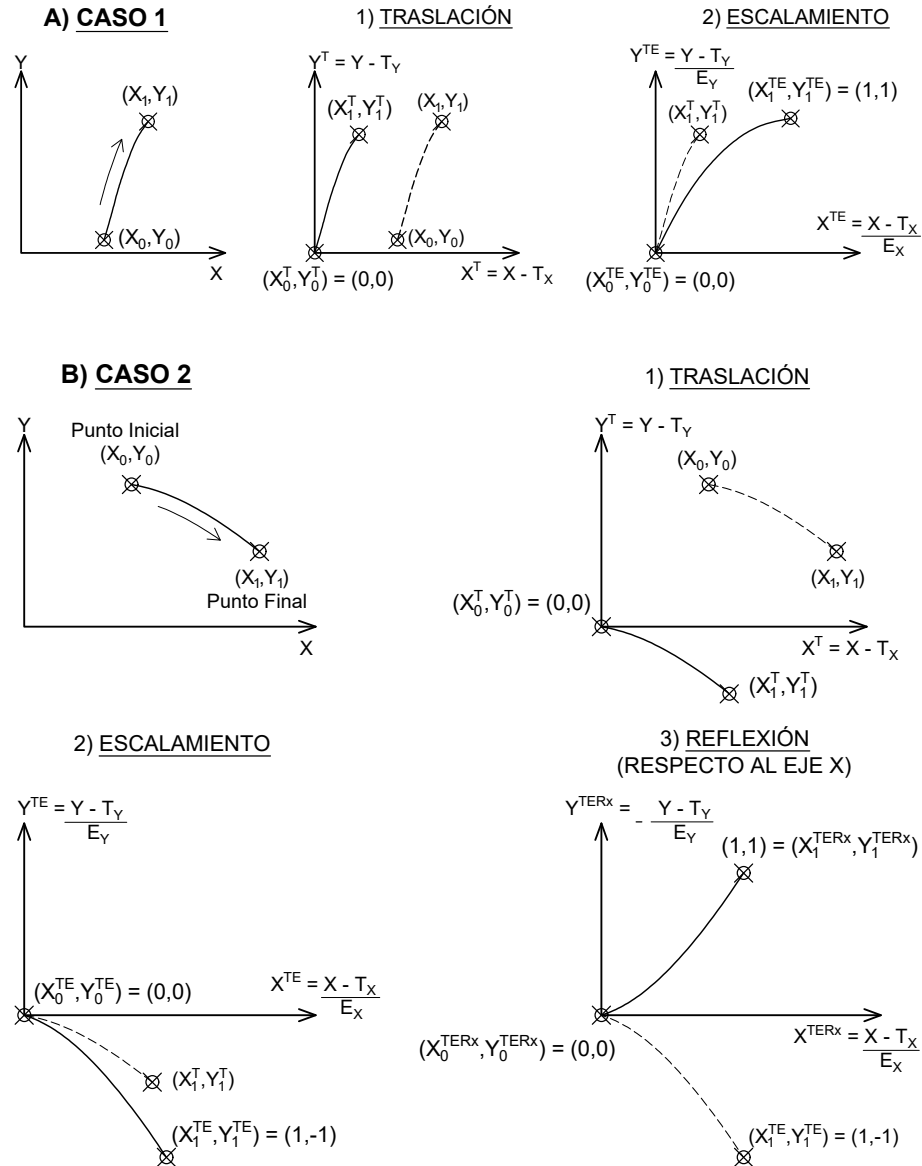


Nota: Elaboración Propia.

A continuación, se describe matemáticamente el proceso de mapeo de coordenadas en la Tabla 3 para los cuatro casos presentados anteriormente en la Figura 8, representados geoméricamente en la Figura 9.

Figura 9

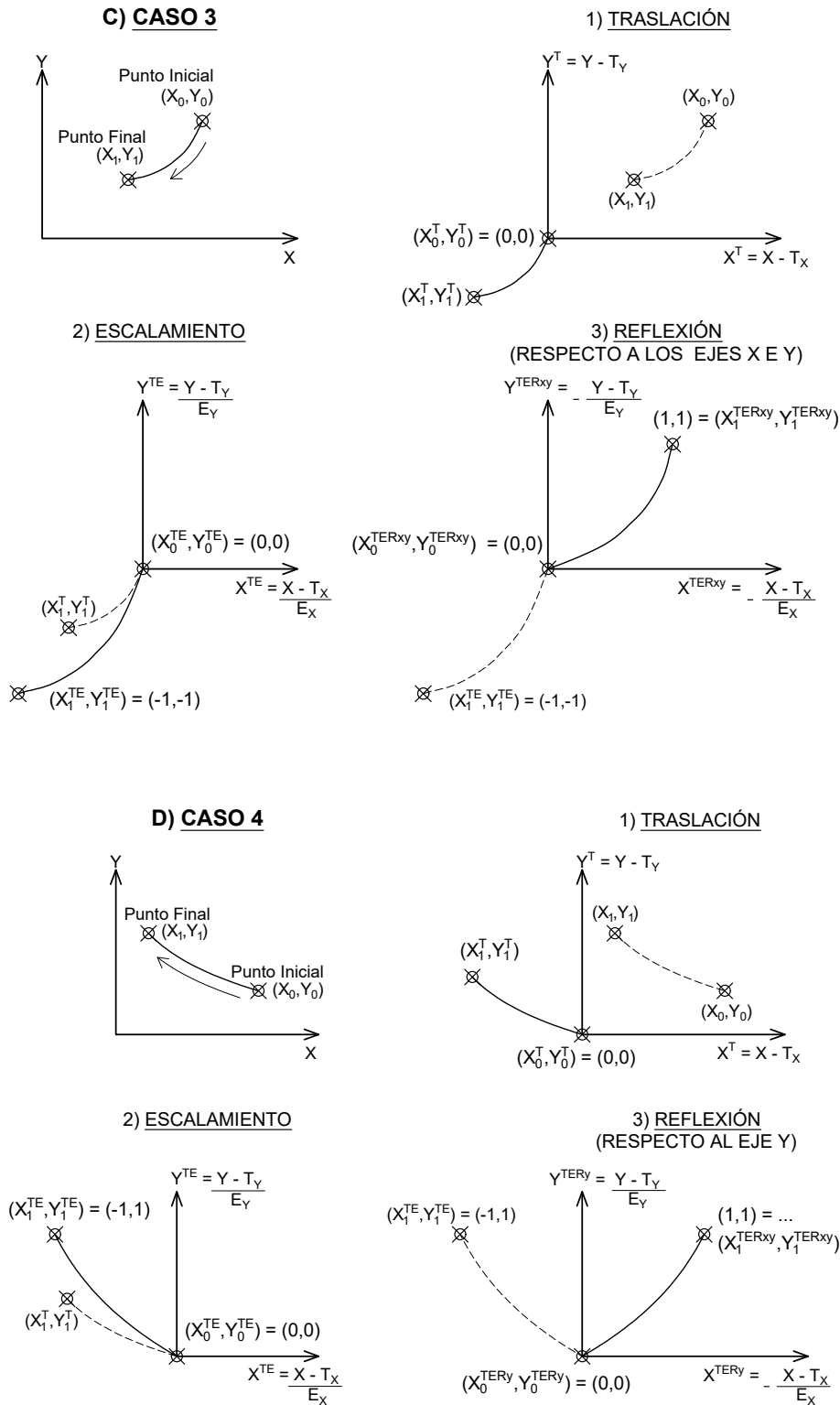
Interpretación gráfica del proceso de mapeo.



Nota: A) Caso 1: Dirección al primer cuadrante. B) Caso 2: Dirección al cuarto cuadrante. C) Caso 3: Dirección al tercer cuadrante. D) Caso 4: Dirección al segundo cuadrante. Fuente: Elaboración Propia.

Figura 9

Interpretación gráfica del proceso de mapeo.



Nota: A) Caso 1: Dirección al primer cuadrante. B) Caso 2: Dirección al cuarto cuadrante. C) Caso 3: Dirección al tercer cuadrante. D) Caso 4: Dirección al segundo cuadrante. Fuente: Elaboración Propia.

Tabla 3

Relaciones entre sistemas SCO y SCM.

Caso	Mapeo de coordenadas	Descripción
1	$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{ X_1 - X_0 } & 0 \\ 0 & \frac{1}{ Y_1 - Y_0 } \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{pmatrix} \right]$	Traslación y Escalamiento
2	$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{ X_1 - X_0 } & 0 \\ 0 & \frac{1}{ Y_1 - Y_0 } \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{pmatrix} \right]$	Traslación, Escalamiento y Reflexión respecto al eje X
3	$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{ X_1 - X_0 } & 0 \\ 0 & \frac{1}{ Y_1 - Y_0 } \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{pmatrix} \right]$	Traslación, Escalamiento y Reflexión respecto a los ejes X e Y
4	$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{ X_1 - X_0 } & 0 \\ 0 & \frac{1}{ Y_1 - Y_0 } \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{pmatrix} \right]$	Traslación, Escalamiento y Reflexión respecto al eje Y

Nota: Elaboración Propia.

3.1.2.2 Relaciones entre sistemas de coordenadas.

3.1.2.2.1 Relación entre puntos.

A continuación, al operar los casos presentados en la Tabla 3, esto permite tener una única expresión generalizada para los casos presentados. Se desarrolla el valor absoluto en la matriz de escalamiento según el sector correspondiente, y se multiplica por la matriz de reflexión para todos los casos. Como resultado, se obtiene la expresión unificada que se presenta en la ecuación (3.1).

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{X_1 - X_0} & 0 \\ 0 & \frac{1}{Y_1 - Y_0} \end{pmatrix} \cdot \left\{ \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{pmatrix} \right\} \quad (3.1)$$

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X_1 - X_0 & 0 \\ 0 & Y_1 - Y_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

3.1.2.2.2 Relaciones entre diferenciales.

A partir de la ecuación (3.1), es posible obtener relaciones entre los diferenciales de los distintos sistemas de coordenadas mediante el uso de la matriz Jacobiana. Aplicando esta herramienta, se derivan las expresiones matemáticas que se presentan en la ecuación (3.2).

$$\begin{pmatrix} d\xi \\ d\eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{X_1 - X_0} & 0 \\ 0 & \frac{1}{Y_1 - Y_0} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dX \\ dY \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

$$\begin{pmatrix} dX \\ dY \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 - X_0 & 0 \\ 0 & Y_1 - Y_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d\xi \\ d\eta \end{pmatrix}$$

3.1.2.2.3 Relaciones entre pendientes.

Una vez obtenidas las relaciones entre diferenciales, es posible derivar las expresiones que relacionan las pendientes del SCO y el SCM para cualquier punto del sector. A partir de la ecuación (3.2), se desarrollan las expresiones correspondientes que se presentan en la ecuación (3.3).

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\eta}{d\xi} &= \left(\frac{X_1 - X_0}{Y_1 - Y_0} \right) \cdot \frac{dY}{dX} \\ \frac{dY}{dX} &= \left(\frac{Y_1 - Y_0}{X_1 - X_0} \right) \cdot \frac{d\eta}{d\xi} \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

3.1.2.2.4 Relaciones entre áreas.

Como se representa en la Figura 10 (derecha), se define al área para la curva en el SCM sobre el eje de las abscisas (eje ξ) desde el origen hasta un punto cualquiera dentro del dominio como:

$$s^m = \int_0^\xi \eta \cdot d\xi \quad (3.4)$$

Para encontrar la relación con el área en el SCO visto en la Figura 10, sustituimos las relaciones que existen de las ecuaciones (3.1) y (3.2) en (3.4):

$$\begin{aligned}
s^m &= \int_{X(\xi=0)}^{X(\xi=\xi)} \left(\frac{Y - Y_0}{Y_1 - Y_0} \right) \cdot \left(\frac{dX}{X_1 - X_0} \right) \\
s^m &= \frac{1}{(X_1 - X_0) \cdot (Y_1 - Y_0)} \cdot \int_{X_0}^X (Y - Y_0) \cdot dX \\
s^m &= \frac{1}{(X_1 - X_0) \cdot (Y_1 - Y_0)} \cdot \left\{ \int_{X_0}^X Y \cdot dX - \int_{X_0}^X Y_0 \cdot dX \right\}
\end{aligned} \tag{3.5}$$

De manera similar que en la ecuación (3.4), se define al área de la curva en el SCO respecto a la recta horizontal “ $Y = Y_0$ ” (representado en la Figura 10 (izquierda)) desde el punto inicial del sector hasta el punto $X = X(\xi)$, de esta manera:

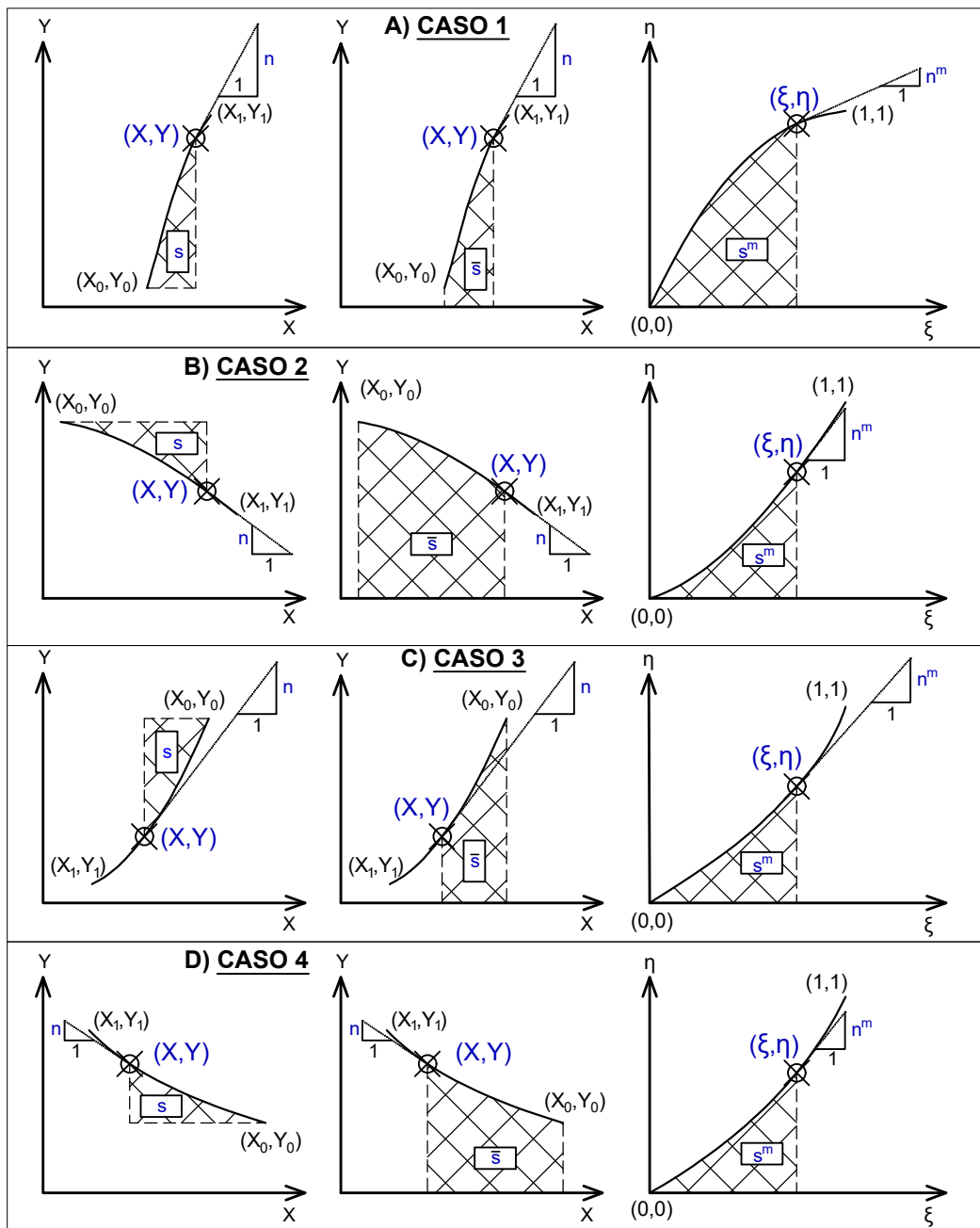
$$s = \int_{X_0}^X Y \cdot dX - \int_{X_0}^X Y_0 \cdot dX \tag{3.6}$$

Reemplazando la ecuación (3.6) en la ecuación (3.5), se puede obtener las relaciones entre áreas del SCO y el SCM:

$$\begin{aligned}
s^m &= \frac{s}{(X_1 - X_0) \cdot (Y_1 - Y_0)} \\
s &= (X_1 - X_0) \cdot (Y_1 - Y_0) \cdot s^m
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Figura 10

Interpretación gráfica de áreas y pendientes.



Nota: Sistema de coordenadas SCO (izquierda y centro) y SCM (derecha). Fuente: Elaboración Propia.

Es importante destacar que el signo del valor de “ s ” (SCO) será negativo para los casos 2 y 4, y positivo para los casos 1 y 3, de acuerdo a la definición que considera el área de la curva respecto a la recta horizontal $Y = Y_0$. Además, se debe resaltar que el valor de “ s^m ” en el SCM será siempre positiva, debido a su definición como el área de la curva sobre el eje de las abscisas (eje ξ) del SCM.

De esto se deduce una relación entre un área positiva en el SCM y una negativa en el SCO para los casos 2 y 4, lo cual es consecuencia de la reflexión realizada durante el mapeo de las coordenadas originales. En el caso 3, la doble reflexión genera que se conserve su signo positivo.

A continuación, se presenta una definición alternativa de área “ $\bar{s}$ ”, relevante en ciertos casos donde resulta conveniente representar el área de la curva en el SCO con respecto al eje de las abscisas (eje X), como se muestra en la Figura 10. Esta definición es significativa cuando representa un valor físico, tal como la energía de deformación (en el análisis de fuerza-desplazamiento) o la densidad de energía de deformación (en el análisis de esfuerzo-deformación).

Para comenzar, se define el nuevo concepto de área como el área de la curva en el sector con respecto al eje de las abscisas en el SCO, ver Figura 10 (centro).

$$\bar{s} = \int_{X_0}^X Y \cdot dX \quad (3.8)$$

Se puede relacionar la anterior definición de área en el SCO, relacionando las ecuaciones (3.6) y (3.8):

$$\begin{aligned} \bar{s} &= s + \int_{X_0}^{X_1} Y_0 \cdot dX \\ \bar{s} &= s + Y_0 \cdot (X_1 - X_0) \end{aligned} \quad (3.9)$$

Se reemplaza la ecuación (3.7) en la ecuación (3.9) y se obtiene la relación que existe entre el área sobre el eje de las abscisas en el SCO para el método, y el área en el SCM:

$$\left. \begin{aligned} \bar{s} &= (X_1 - X_0) \cdot (Y_1 - Y_0) \cdot s^m + Y_0 \cdot (X_1 - X_0) \\ s^m &= \frac{\bar{s}}{(X_1 - X_0) \cdot (Y_1 - Y_0)} - \frac{Y_0}{(Y_1 - Y_0)} \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

Cabe resaltar que el signo del valor de “ $\bar{s}$ ” en el SCO será positivo para los casos 1 y 2 (cuando el punto inicial se encuentra a la izquierda del punto final) siempre que la curva esté por encima del eje de las abscisas. Asimismo, será negativo en los casos 3 y 4

(cuando el punto inicial se encuentra a la derecha del punto final) siempre que la curva esté por encima del eje de las abscisas. Además, cuando la curva atraviesa el eje de las abscisas, su valor puede ser positivo, negativo o cero, dependiendo de la magnitud de las áreas de la curva por encima y por debajo del eje de las abscisas.

3.1.2.3 Aplicación.

Para ilustrar el proceso de mapeo, se pueden describir algunas ecuaciones típicas. Como ejemplo, se utilizarán las ecuaciones que describen el endurecimiento por deformación del acero sometido a tracción, correspondientes a la tercera región en la Figura 6. Para comenzar, se correlaciona el SCO del método con la notación mostrada en la Figura 11:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon \\ \sigma \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

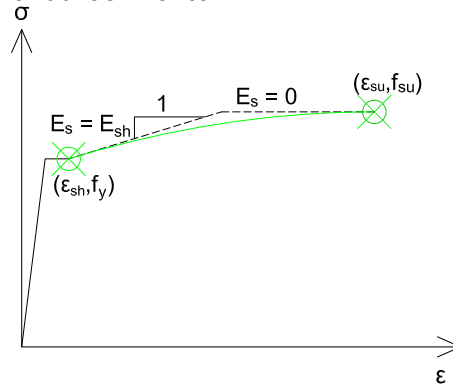
$$n = dY/dX = d\sigma/d\varepsilon \rightarrow n = E_s \quad (3.12)$$

Se correlacionan los puntos extremos y las pendientes con la notación presentada en la Figura 11 para describir el comportamiento del acero en dicho sector. Cabe resaltar que en el punto de máxima resistencia, su pendiente es cero. A continuación, se presentarán las correlaciones en formato matricial.

$$\begin{bmatrix} X_0 & X_1 \\ Y_0 & Y_1 \\ n_0 & n_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{sh} & \varepsilon_{su} \\ f_y & f_{su} \\ E_s & 0 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

Figura 11

Curva del acero: Zona de endurecimiento.



Nota: Elaboración Propia.

Se puede obtener la siguiente relación del SCM en función del SCO al reemplazar los puntos de la ecuación (3.13) en la ecuación (3.1).

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\epsilon - \epsilon_{sh}}{\epsilon_{su} - \epsilon_{sh}} \\ \frac{\sigma - f_y}{f_{su} - f_y} \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

$$\begin{pmatrix} \epsilon \\ \sigma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_{sh} + (\epsilon_{su} - \epsilon_{sh}) \cdot \xi \\ f_y + (f_{su} - f_y) \cdot \eta \end{pmatrix}$$

Además, se puede obtener la relación entre pendientes para cualquier punto al reemplazar la ecuación (3.13) en la ecuación (3.5).

$$\left. \begin{aligned} n^m &= \frac{d\eta}{d\xi} = \left(\frac{\epsilon_{su} - \epsilon_{sh}}{f_{su} - f_y} \right) \cdot E_s \\ E_s &= \left(\frac{f_{su} - f_y}{\epsilon_{su} - \epsilon_{sh}} \right) \cdot n^m \end{aligned} \right\} \quad (3.15)$$

Una vez obtenidas las relaciones entre puntos y pendientes, se procede a analizar distintas ecuaciones propuestas en el sistema de coordenadas mapeado - SCM.

3.1.2.3.1 Modelo de Mander (1983).

Mander (1983) propone la siguiente ecuación para modelar el endurecimiento por deformación del acero sometido a tracción uniaxial:

$$\sigma = f_{su} + (f_y - f_{su}) \cdot \left(\frac{\epsilon_{su} - \epsilon}{\epsilon_{su} - \epsilon_{sh}} \right)^p \quad (3.16)$$

Al reemplazar las relaciones entre coordenadas de la ecuación (3.14) en la ecuación (3.16), se obtiene:

$$f_y + (f_{su} - f_y) \cdot \eta = f_{su} + (f_y - f_{su}) \cdot \left(\frac{\epsilon_{su} - (\epsilon_{sh} + (\epsilon_{su} - \epsilon_{sh}) \cdot \xi)}{\epsilon_{su} - \epsilon_{sh}} \right)^p \quad (3.17)$$

Finalmente, al operar la ecuación (3.17), se obtiene la ecuación en el SCM:

$$\eta = 1 - (1 - \xi)^p \quad (3.18)$$

A partir de la ecuación (3.18), se obtiene la pendiente en el SCM:

$$n^m = \frac{d\eta}{d\xi} = p \cdot (1 - \xi)^{p-1} \quad (3.19)$$

A partir de la ecuación (3.19), se pueden evaluar las pendientes en los extremos:

$$\begin{Bmatrix} n_0^m \\ n_1^m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.20)$$

De los resultados obtenidos en la ecuación (3.20), se puede observar que la curva en el SCM tiene una pendiente inicial de valor “p”, y una pendiente en el punto final de cero, esto último se interpreta como un máximo de la curva.

Finalmente, al reemplazar lo obtenido de la ecuación (3.20) en la ecuación (3.3), se pueden obtener las pendientes en el SCO:

$$\begin{Bmatrix} E_{sh} \\ E_{su} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} n_0 \\ n_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \left(\frac{f_{su} - f_y}{\varepsilon_{su} - \varepsilon_{sh}} \right) \cdot p \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.21)$$

3.1.2.3.2 Modelo de Priestley et al. (2007).

Priestley et al. (2007) proponen otra ecuación para modelar el endurecimiento por deformación del acero bajo tracción uniaxial:

$$\sigma = f_{su} - (f_{su} - f_y) \cdot \left(\frac{\varepsilon_{su} - \varepsilon}{\varepsilon_{su} - \varepsilon_{sh}} \right)^2 \quad (3.22)$$

Al igual que en el ejemplo anterior, al reemplazar las relaciones entre coordenadas de la ecuación (3.14), se obtiene:

$$f_y + (f_{su} - f_y) \cdot \eta = f_{su} - (f_{su} - f_y) \cdot \left(\frac{\varepsilon_{su} - (\varepsilon_{sh} + (\varepsilon_{su} - \varepsilon_{sh}) \cdot \xi)}{\varepsilon_{su} - \varepsilon_{sh}} \right)^2 \quad (3.23)$$

Se obtiene la ecuación en el SCM al operar la ecuación (3.23):

$$\eta = 1 - (1 - \xi)^2 \quad (3.24)$$

Al igual que el modelo anterior, al operar la ecuación (3.24) se obtiene la siguiente ecuación en el SCM:

$$\eta = 2 \cdot \xi - \xi^2 \quad (3.25)$$

Se puede observar que dicho modelo es equivalente, en coordenadas mapeadas, al modelo de Hognestad et al. (1955) para la curva. Además, es importante destacar que la curva descrita por la ecuación (3.24) es una particularidad del modelo de Mander en coordenadas mapeadas, cuando se reemplaza el valor de $p = 2$ en la ecuación (3.18).

A partir de la ecuación (3.25), se obtiene la pendiente en el SCM:

$$n^m = \frac{d\eta}{d\xi} = 2 - 2 \cdot \xi \quad (3.26)$$

A partir de la ecuación (3.26), se pueden evaluar las pendientes en los extremos:

$$\begin{Bmatrix} n_0^m \\ n_1^m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.27)$$

En la ecuación (3.24), se observa que el modelo está asociado a una parábola de segundo grado con pendiente inicial en el SCM de dos y pendiente final de cero. Esto último puede interpretarse como un máximo de la curva en el punto final.

Finalmente, reemplazando la ecuación (3.27) en la ecuación (3.3), se puede obtener las pendientes en el SCO:

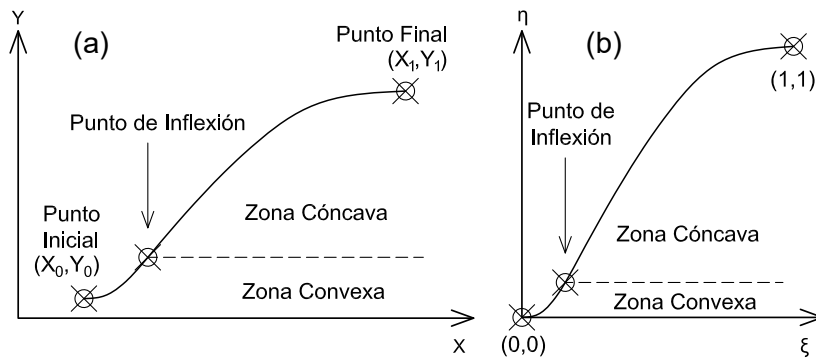
$$\begin{Bmatrix} n_0 \\ n_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} E_{sh} \\ E_{su} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \cdot \left(\frac{f_{su} - f_y}{\varepsilon_{su} - \varepsilon_{sh}} \right) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.28)$$

3.1.2.4 Problema con el uso del mapeo.

En ciertas curvas de comportamiento, tanto crecientes como decrecientes, puede existir un punto de inflexión, como se observa en la Figura 12 (a). Este punto de inflexión puede generar inestabilidad numérica, dependiendo de la ecuación de la curva en el SCM y de su ubicación (especialmente si se encuentra cerca de los extremos). Estas condiciones presentadas pueden causar problemas al aplicar la metodología, especialmente durante el proceso de escalamiento en el mapeo, como se ilustra en la Figura 12 (b). El escalamiento reduce la zona convexa cercana al punto inicial, lo que podría llevar a ignorar esta tendencia en la zona al ajustar los datos a una ecuación, asumiendo erróneamente que todo el comportamiento es cóncavo hacia abajo, lo que resultaría en pérdida de información. Además, dependiendo de la ecuación predominante de ajuste, podría generarse artificialmente puntos de inflexión artificiales, lo que distorsionaría el modelo al introducir características no inherentes a la tendencia original.

Figura 12

Punto de inflexión en curva.



Nota: (a) En SCO. (b) En SCM. Fuente: Elaboración Propia.

Para evitar estos inconvenientes al usar el procedimiento, se sugieren las siguientes recomendaciones:

1. El punto de inflexión debe ubicarse preferentemente en el tercio central del tramo sectorizado.
2. La ecuación que gobierne al modelo debe reflejar la cantidad de puntos de inflexión visibles en la tendencia de los datos.

Se recomienda, siempre que sea posible, dividir el sector de análisis en dos partes al identificar una tendencia con puntos de inflexión: Desde el punto inicial hasta el punto de inflexión, y desde el punto de inflexión hasta el punto final.

3.1.3 Asignación de condiciones sectoriales

3.1.3.1 Descripción.

El último paso del método presentado consiste en asignar condiciones de borde y de forma (denominadas **condiciones sectoriales**) a la ecuación que gobierna la curva en el SCM. Estas condiciones se considera durante el ajuste de datos, lo que permite un ajuste efectivo con parámetros que, aunque no necesariamente sean conocidos, dependerán de la tendencia de la serie de puntos conocidos.

A continuación, se describen las condiciones sectoriales que se pueden imponer a la curva que representa a la serie de puntos en el SCM:

- Condiciones de Borde Esenciales (Puntos)

Estas condiciones son fundamentales para cualquier ecuación gobernante, ya que el mapeo requiere que los puntos extremos del sector cumplan con ellas (como se muestra en la Figura 9):

$$\left. \begin{array}{l} \eta(\xi = 0) = 0 \\ \eta(\xi = 1) = 1 \end{array} \right\} \quad (3.29)$$

- Condiciones de Borde Impuestas (Pendientes)

Estas condiciones sectoriales podrían ser esenciales si se conoce el valor de alguna o ambas pendientes (como se pudo ver en la Figura 11, donde la pendiente final es cero). Si no se conocen, su valor dependerá de la tendencia de la serie de puntos conocidos al ajustar la data, dichas condiciones son:

$$\left. \begin{array}{l} d\eta/d\xi (\xi = 0) = n^m(\xi = 0) = n_0^m \\ d\eta/d\xi (\xi = 1) = n^m(\xi = 1) = n_1^m \end{array} \right\} \quad (3.30)$$

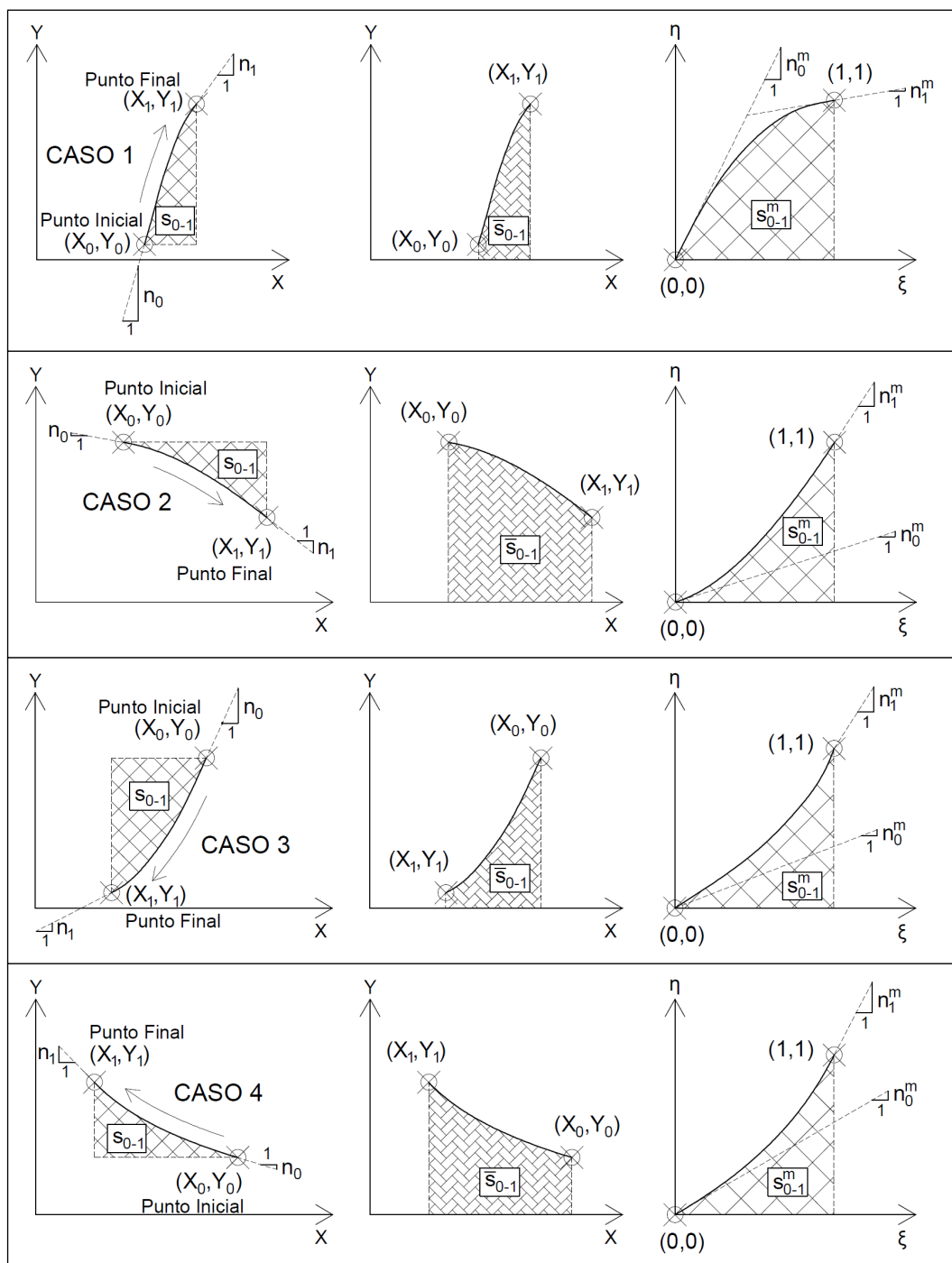
- Condición de Forma Impuesta (Área)

Esta condición corresponde al área bajo la curva en el sector de coordenadas mapeadas. Generalmente su valor no es conocido, por lo que su valor dependerá de la tendencia de la serie de puntos conocidos al ajustar la data, la condición es:

$$s^m(\xi = 1) = \int_0^1 \eta \cdot d\xi = s_{0-1}^m \quad (3.31)$$

Figura 13

Representación gráfica de las condiciones sectoriales.



Nota: Sistema de coordenadas SCO (izquierda y centro) y SCM (derecha). Fuente: Elaboración Propia.

El proceso comienza exigiendo que la ecuación propuesta cumpla con las condiciones sectoriales esenciales (puntos y pendientes extremas conocidas), como se ilustra en la Figura 13. Dependiendo del número de parámetros desconocidos en la ecuación, el método permite imponer hasta tres condiciones sectoriales no esenciales (pendientes extremas desconocidas y/o área del sector).

La imposición de condiciones sectoriales en condiciones no esenciales genera una correlación entre la ecuación y los parámetros desconocidos. Al aplicar un método de ajuste (como la minimización de errores), se minimiza el error respecto a las condiciones impuestas, lo que permite obtener una medida indirecta de estos valores asociados a la ecuación gobernante.

3.1.3.2 Aplicación.

Se tomará como aplicación del proceso de asignación de condiciones sectoriales en ecuaciones que describen el tramo ascendente de la curva del concreto usando coordenadas en valor absoluto (para tomar en cuenta que los esfuerzos y deformaciones a compresión del concreto son positivos).

Para comenzar, se correlaciona el SCO con la notación de la Figura 14:

$$\begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} |\varepsilon| \\ |\sigma| \end{Bmatrix} \quad (3.32)$$

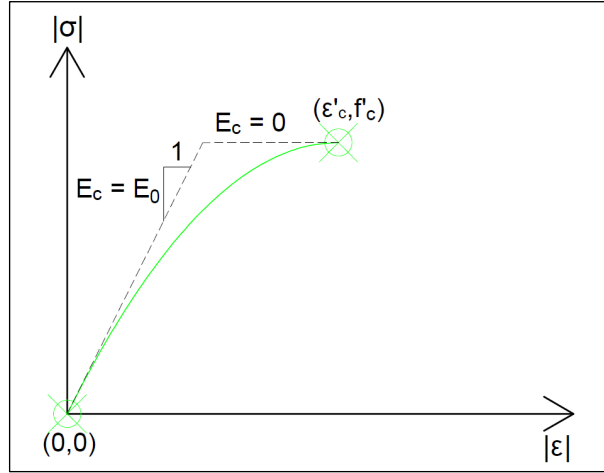
$$n = \frac{dY}{dX} = \frac{d|\sigma|}{d|\varepsilon|} = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = E_c \quad (3.33)$$

A continuación, se correlacionan los puntos en el extremo y las pendientes con la notación vista en la Figura 14 para describir al comportamiento del concreto en dicho sector, cabe resaltar que en el punto máximo de resistencia su pendiente es cero. A continuación, se presentarán las correlaciones en formato matricial:

$$\begin{bmatrix} X_0 & X_1 \\ Y_0 & Y_1 \\ n_0 & n_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon'_c \\ 0 & f'_c \\ E_0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

Figura 14

Condiciones sectoriales del tramo ascendente de la curva del concreto.



Nota: Elaboración Propia.

Para definir la relación entre coordenadas mapeadas y coordenadas originales, se aplican las ecuaciones (3.32) y (3.34) en la ecuación (3.1):

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon'_c} & 0 \\ 0 & \frac{1}{f'_c} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} |\varepsilon| \\ |\sigma| \end{pmatrix} \quad (3.35)$$

$$\begin{pmatrix} |\varepsilon| \\ |\sigma| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon'_c & 0 \\ 0 & f'_c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

Para obtener las relaciones entre pendientes se aplican las definiciones (3.32), (3.33) y (3.34) en las ecuaciones (3.3):

$$n^m = \frac{d\eta}{d\xi} = \left(\varepsilon'_c / f'_c \right) \cdot E_c \quad (3.36)$$

Se define al módulo secante del concreto de la siguiente manera:

$$E_{sec} = \frac{f'_c}{\varepsilon'_c} \quad (3.37)$$

Reemplazando la ecuación (3.37) en la ecuación (3.36):

$$\begin{aligned} n^m &= \left(1/E_{sec} \right) \cdot E_c \\ E_c &= E_{sec} \cdot n^m \end{aligned} \quad (3.38)$$

Con respecto a las pendientes en los bordes en coordenadas mapeadas:

$$\begin{Bmatrix} n_0^m \\ n_1^m \end{Bmatrix} = \left(1/E_{sec} \right) \cdot \begin{Bmatrix} E_0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} E_0/E_{sec} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.39)$$

Ahora, se presentan las condiciones sectoriales relativas a las ecuaciones (3.29), (3.30) y (3.31):

$$\left. \begin{aligned} \eta(\xi = 0) &= 0 \\ \eta(\xi = 1) &= 1 \\ \frac{d\eta}{d\xi}(\xi = 0) &= n_0^m \\ \frac{d\eta}{d\xi}(\xi = 1) &= n_1^m = 0 \\ \int_0^1 \eta \cdot d\xi &= s_{0-1}^m \end{aligned} \right\} \quad (3.40)$$

Una vez correlacionadas las coordenadas originales del sector de curva a utilizar con las notaciones utilizadas en la metodología y definidas las relaciones que hay entre las coordenadas originales con las coordenadas mapeadas, se supone un modelo de comportamiento de los puntos obtenidos de la data experimental en coordenadas mapeadas.

3.1.3.2.1 Modelo polinómico de segundo grado.

Para comenzar, se supone un modelo polinómico de segundo grado cualquiera para describir al tramo ascendente del concreto hasta el punto de resistencia máxima:

$$\eta = a_0 + a_1 \cdot \xi + a_2 \cdot \xi^2 \quad (3.41)$$

$$n^m = \frac{d\eta}{d\xi} = a_1 + 2 \cdot a_2 \cdot \xi \quad (3.42)$$

Para obtener los parámetros del modelo presentado en la ecuación (3.41), los coeficientes del polinomio, se aplica este último proceso de imposición de condiciones de borde. Dado que hay tres parámetros desconocidos en la ecuación propuesta (los coeficientes del polinomio de segundo grado), y que son tres condiciones sectoriales esenciales con las que siempre se deben cumplir, este ejemplo no podrá considerar alguna condición sectorial no esencial extra. Reemplazando tres de las condiciones sectoriales presentadas en la ecuación (3.40) en las ecuaciones (3.41) y (3.42), con el fin de obtener los parámetros desconocidos:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \eta(\xi = 0) \\ \eta(\xi = 1) \\ n^m(\xi = 1) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.43)$$

Por lo tanto, reemplazando los valores de los coeficientes obtenidos en la ecuación (3.43) en la ecuación (3.41) (polinómica de segundo grado), se tendrá:

$$\eta = 2 \cdot \xi - \xi^2 \quad (3.44)$$

Transformando las coordenadas mapeadas en coordenadas originales, utilizando las relaciones en (3.35), entonces se tendrá la ecuación:

$$\frac{|\sigma|}{f'_c} = 2 \cdot \left(\frac{|\varepsilon|}{\varepsilon'_c} \right) - \left(\frac{|\varepsilon|}{\varepsilon'_c} \right)^2 \quad (3.45)$$

Como se puede observar, la ecuación (3.45) es la presentada por Hognestad et al. (1955) para la curva de compresión del concreto en el sector del tramo ascendente. Es decir, el modelo se basa en una ecuación polinómica de segundo grado que asegura que se cumpla con las condiciones físicas del ensayo presentado: Los puntos inicial y final, y además exige que el punto de máxima resistencia posea una pendiente igual a cero.

Adicionalmente, se puede evaluar la pendiente en el punto inicial reemplazando los coeficientes de la ecuación (3.43) colocándolos en la ecuación (3.42):

$$n^m = 2 - 2 \cdot \xi \quad (3.46)$$

Evaluando la ecuación (3.46) en el punto inicial:

$$n_0^m = n^m(\xi = 0) = 2 \quad (3.47)$$

Convirtiendo a coordenadas originales utilizando la ecuación (3.39):

$$E_0 = 2 \cdot E_{sec} \quad (3.48)$$

Por lo que se puede concluir que el módulo de elasticidad inicial solo depende del módulo de elasticidad secante, definido en la ecuación (3.37), para la ecuación de Hognestad et al. (1955), por este motivo esta ecuación no tiene forma ajustarse experimentalmente para aproximarse más a la secuencia de puntos, ya que no hay variables en la ecuación con las que se pueda generar algún ajuste.

3.1.3.2.2 Modelo exponencial.

Se supone otro modelo de comportamiento de los puntos obtenidos de la data experimental en coordenadas mapeadas, ahora se supone un modelo exponencial para describir al tramo ascendente del concreto hasta el punto de resistencia máxima:

$$\eta = (a_0 + a_1 \cdot \xi) \cdot e^{b_1 \cdot \xi} \quad (3.49)$$

A partir de la ecuación (3.49) se obtiene la pendiente en coordenadas mapeadas:

$$n^m = \frac{d\eta}{d\xi} = (a_1) \cdot e^{b_1 \cdot \xi} + (a_0 + a_1 \cdot \xi) \cdot (b_1) \cdot e^{b_1 \cdot \xi}$$

$$n^m = (a_1 + a_0 \cdot b_1 + a_1 \cdot b_1 \cdot \xi) \cdot e^{b_1 \cdot \xi} \quad (3.50)$$

Para obtener las constantes del modelo presentado, de manera similar al ejemplo anterior, en las ecuaciones (3.49) y (3.50) se aplica el proceso de imposición de condiciones de borde, iniciando con las condiciones sectoriales esenciales.

Para comenzar, se impondrá la primera condición de las relaciones (3.40) reemplazando en la ecuación (3.49):

$$\eta(\xi = 0) = 0 \rightarrow a_0 = 0 \quad (3.51)$$

Imponiendo la segunda condición de las relaciones (3.40) reemplazando en la ecuación (3.49):

$$\eta(\xi = 1) = 1 = a_1 \cdot e^{b_1} \rightarrow a_1 = e^{-b_1} \quad (3.52)$$

Imponiendo la cuarta condición de las relaciones (3.40) en la ecuación (3.50):

$$n^m(\xi = 1) = 0 = 1 + b_1 \rightarrow b_1 = -1 \quad (3.53)$$

Reemplazando ecuaciones (3.51), (3.52) y (3.53) en las ecuaciones (3.49) y (3.50):

$$\eta = \xi \cdot e^{1-\xi} \quad (3.54)$$

$$n^m = (1 - \xi) \cdot e^{1-\xi} \quad (3.55)$$

Revisando la pendiente inicial de la ecuación (3.55):

$$n^m(\xi = 0) = n_0^m = e \approx 2.718 \quad (3.56)$$

A continuación, se muestra la ecuación gobernante en coordenadas originales utilizando las relaciones en (3.35):

$$\frac{|\sigma|}{f'_c} = \left(\frac{|\varepsilon|}{\varepsilon'_c} \right) \cdot e^{1 - \left(\frac{|\varepsilon|}{\varepsilon'_c} \right)} \quad (3.57)$$

El valor de su pendiente instantánea inicial se obtiene reemplazando la ecuación (3.56) en la ecuación (3.39):

$$E_0 = e \cdot E_s \quad (3.58)$$

La ecuación (3.57) fue originalmente propuesta por Smith y Young (1956). Esta ecuación es una de las más citadas que han existido en la historia de los modelos de concreto sometido a compresión uniaxial (Salguero et al., 2013).

Se puede observar que tiene una pendiente inicial en las coordenadas mapeadas constante de valor igual a la base de los logaritmos naturales, a diferencia de la ecuación propuesta por Hognestad et al. (1955) que es de dos.

3.1.3.2.3 Modelo racional.

A partir de la ecuación propuesta en el ejemplo anterior se han propuesto diversos modelos del tipo racional (Salguero et al., 2013) de la siguiente forma:

$$\eta = \frac{P(\xi)}{Q(\xi)} \quad (3.59)$$

Donde el denominador de la ecuación (3.59) está relacionado al desarrollo de las series de potencias de la función exponencial de la ecuación (3.54), comúnmente truncado hasta el término de segundo grado, como se muestra a continuación:

$$\eta = \frac{a_1 \cdot \xi}{b_0 + b_1 \cdot \xi + b_2 \cdot \xi^2} \quad (3.60)$$

A partir de la ecuación (3.60) se obtiene la pendiente en coordenadas mapeadas:

$$n^m = \frac{d\eta}{d\xi} = \frac{(a_1) \cdot (b_0 + b_1 \cdot \xi + b_2 \cdot \xi^2) - (a_1 \cdot \xi) \cdot (b_1 + 2 \cdot b_2 \cdot \xi)}{(b_0 + b_1 \cdot \xi + b_2 \cdot \xi^2)^2}$$

$$n^m = \frac{a_1 \cdot (b_0 - b_2 \cdot \xi^2)}{(b_0 + b_1 \cdot \xi + b_2 \cdot \xi^2)^2} \quad (3.61)$$

Se verifica que la ecuación (3.60) cumple con la primera condición de las relaciones (3.40). A continuación, imponiendo la segunda condición de las relaciones (3.40), se reemplaza en la ecuación (3.60):

$$\eta(\xi = 1) = 1 = \frac{a_1}{b_0 + b_1 + b_2} \rightarrow a_1 = b_0 + b_1 + b_2 \quad (3.62)$$

Se obtuvo una relación entre las distintas variables. A continuación, se impone la cuarta condición de las relaciones (3.40) en la ecuación (3.61):

$$n^m(\xi = 1) = 0 = \frac{a_1 \cdot (b_0 - b_2)}{(b_0 + b_1 + b_2)^2} \rightarrow b_0 = b_2 \quad (3.63)$$

En este ejemplo, a diferencia de los demás en los que la pendiente inicial era constante, se obtiene al imponer la tercera condición de las relaciones (3.40) en la ecuación (3.61):

$$n^m(\xi = 0) = n_0^m = \frac{a_1 \cdot b_0}{(b_0)^2} = \frac{a_1}{b_0} \rightarrow a_1 = n_0^m \cdot b_0 \quad (3.64)$$

Reemplazando las relaciones obtenidas en las ecuaciones (3.62), (3.63) y (3.64) en la ecuación (3.60):

$$\eta = \frac{n_0^m \cdot \xi}{1 + (n_0^m - 2) \cdot \xi + \xi^2} \quad (3.65)$$

Reemplazando la ecuación gobernante en coordenadas originales utilizando las relaciones en (3.35):

$$\frac{|\sigma|}{f_c'} = \frac{n_0^m \cdot \left(\frac{|\varepsilon|}{\varepsilon_c'}\right)}{1 + (n_0^m - 2) \cdot \left(\frac{|\varepsilon|}{\varepsilon_c'}\right) + \left(\frac{|\varepsilon|}{\varepsilon_c'}\right)^2} \quad (3.66)$$

La ecuación (3.66) obtenida pertenece a Saenz (1964, como se citó en Salguero et al., 2013) con una notación alternativa para la relación entre el módulo de elasticidad instantáneo inicial y el módulo secante de elasticidad, presentándolo originalmente con la notación de “k”, además, si la relación entre módulos es igual a dos, la ecuación (3.66) pertenece a Desayi y Krishnan (1964).

Se puede observar que en la ecuación obtenida por Saenz se desconoce el módulo de elasticidad instantáneo inicial, por lo que a diferencia de los otros modelos que tiene una relación constante con el módulo secante, en esta ecuación se presenta como una variable que dependerá del ajuste que se les hagan a los puntos experimentales.

3.1.3.2.4 Modelo multiexponencial.

Al igual que en el ejemplo anterior, otra forma de representar al modelo exponencial presentado es un modelo multiexponencial que, en lugar de truncar el polinomio desarrollado por series de potencias se coloca un solo término, pero con exponente no necesariamente natural propio de un polinomio. Este tipo de modelamiento de parábola ascendente fue presentado por primera vez por Tulin y Gerstle (1964, como se citó en Salguero et al., 2013) como generalización de la ecuación de Desayi y Krishnan.

A continuación, se presenta la ecuación gobernante:

$$\eta = \frac{a_1 \cdot \xi}{b_0 + \xi^{b_1}} \quad (3.67)$$

A partir de la ecuación (3.60) se obtiene la pendiente en coordenadas mapeadas:

$$n^m = d\eta/d\xi = \frac{(a_1) \cdot (b_0 + \xi^{b_1}) - (a_1 \cdot \xi) \cdot (b_1 \cdot \xi^{b_1-1})}{(b_0 + \xi^{b_1})^2}$$

$$n^m = \frac{a_1 \cdot b_0 + a_1 \cdot (1 - b_1) \cdot \xi^{b_1}}{(b_0 + \xi^{b_1})^2} \quad (3.68)$$

De la misma manera que en el ejemplo anterior, se verifica que la ecuación (3.67) cumple con la primera condición de las relaciones (3.40). A continuación, se impone la segunda condición de las relaciones (3.40), reemplazando en la ecuación (3.67):

$$\eta(\xi = 1) = 1 = \frac{a_1}{b_0 + 1} \rightarrow a_1 - b_0 = 1 \quad (3.69)$$

Se encontró una relación entre las variables. A continuación, se prosigue imponiendo la cuarta condición de las relaciones (3.40) en la ecuación (3.68):

$$n^m(\xi = 1) = 0 = \frac{a_1 \cdot b_0 + a_1 \cdot (1 - b_1)}{(b_0 + 1)^2} \rightarrow b_1 = b_0 + 1 \quad (3.70)$$

Se impone la tercera condición de las relaciones (3.40) en la ecuación (3.55):

$$n^m(\xi = 0) = n_0^m = \frac{a_1 \cdot b_0}{(b_0)^2} = \frac{a_1}{b_0} \rightarrow a_1 = n_0^m \cdot b_0 \quad (3.71)$$

Resolviendo las ecuaciones (3.69), (3.70) y (3.71), se obtienen los coeficientes:

$$\begin{Bmatrix} a_1 \\ b_0 \\ b_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{n_0^m}{n_0^m - 1} \\ 1 \\ \frac{n_0^m}{n_0^m - 1} \end{Bmatrix} \quad (3.72)$$

Reemplazando los coeficientes en la ecuación (3.67):

$$\eta = \frac{\frac{n_0^m}{n_0^m - 1} \cdot \xi}{\frac{1}{n_0^m - 1} + \xi^{\frac{n_0^m}{n_0^m - 1}}} \quad (3.73)$$

Reemplazando la ecuación gobernante en coordenadas originales utilizando las relaciones de la ecuación (3.35):

$$\frac{|\sigma|}{f'_c} = \frac{\frac{n_0^m}{n_0^m - 1} \cdot \left(\frac{|\varepsilon|}{\varepsilon'_c}\right)}{\frac{1}{n_0^m - 1} + \left(\frac{|\varepsilon|}{\varepsilon'_c}\right)^{\frac{n_0^m}{n_0^m - 1}}} \quad (3.74)$$

Cabe resaltar que el parámetro “ n_0^m ” tiene que ver con la notación presentada para la pendiente instantánea inicial en el SCM, y se puede observar de la ecuación (3.74) obtenida, que es la misma ecuación que planteó Popovics (1973) con la notación para la pendiente instantánea inicial, que representa a la relación entre el módulo de elasticidad instantáneo inicial y el módulo secante de elasticidad, de “n”, y pertenece a Carreira y Chu (1985) con la notación de “ β ”.

Cabe resaltar que, Popovics introduce como novedad una forma de conocer el módulo de elasticidad instantáneo inicial mediante una relación empírica entre dicho valor y la resistencia máxima de la probeta de concreto obtenida de sus ensayos experimentales como afirma Salguero et al. (2013).

3.2 Modelo basado en parámetros físicos propuesto

Como caso particular de la aplicación de la metodología propuesta, ésta se usará para proponer un modelo disociado (variantes de la misma ecuación) del comportamiento del concreto no confinado sometido a compresión uniaxial para el tramo ascendente y descendente de la curva, sobre una ecuación del tipo polinómica de cuarto grado en el SCM como se puede observar a continuación:

$$\eta = C_0 + C_1 \cdot \xi + C_2 \cdot \xi^2 + C_3 \cdot \xi^3 + C_4 \cdot \xi^4 \quad (3.75)$$

Se describen a continuación sus propiedades del cálculo de derivada e integral:

$$n^m = d\eta/d\xi = C_1 + 2 \cdot C_2 \cdot \xi + 3 \cdot C_3 \cdot \xi^2 + 4 \cdot C_4 \cdot \xi^3 \quad (3.76)$$

$$s^m = \int_0^\xi \eta \cdot d\xi = C_0 \cdot \xi + \frac{C_1}{2} \cdot \xi^2 + \frac{C_2}{3} \cdot \xi^3 + \frac{C_3}{4} \cdot \xi^4 + \frac{C_4}{5} \cdot \xi^5 \quad (3.77)$$

A continuación, se describen las condiciones sectoriales que se puede observar en la Figura 14:

$$\begin{pmatrix} \eta(\xi = 0) \\ \eta(\xi = 1) \\ n^m(\xi = 0) \\ n^m(\xi = 1) \\ s^m(\xi = 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ n_0^m \\ n_1^m \\ s_{0-1}^m \end{pmatrix} \quad (3.78)$$

A partir de las ecuaciones (3.75), (3.76) y (3.77), se pueden obtener las condiciones sectoriales para el modelo polinómico de cuarto grado propuesto al reemplazar en la ecuación (3.78):

$$\begin{pmatrix} \eta(\xi = 0) \\ \eta(\xi = 1) \\ n^m(\xi = 0) \\ n^m(\xi = 1) \\ s^m(\xi = 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ n_0^m \\ n_1^m \\ s_{0-1}^m \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -18 & -12 & -4.5 & 1.5 & 30 \\ 32 & 28 & 6 & -4 & -60 \\ -15 & -15 & -2.5 & 2.5 & 30 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ n_0^m \\ n_1^m \\ s_{0-1}^m \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -12 \\ 28 \\ -15 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -4.5 & 1.5 & 30 \\ 6 & -4 & -60 \\ -2.5 & 2.5 & 30 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_0^m \\ n_1^m \\ s_{0-1}^m \end{pmatrix} \quad (3.79)$$

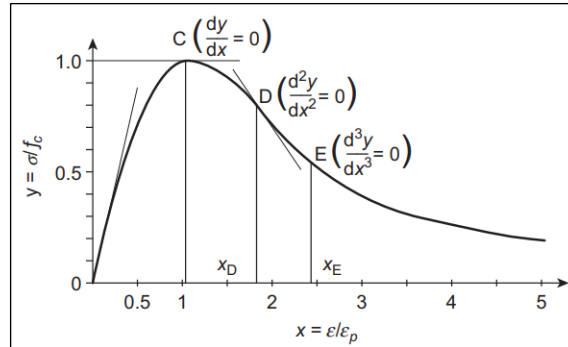
De esta manera, se tiene la relación de las constantes del modelo propuesto con las variables asociadas a las condiciones sectoriales.

3.2.1 Sectorización de la curva del concreto

Para poder aplicar la metodología, a continuación se debe sectorizar la curva característica del concreto. Para el tramo ascendente, acorde a la metodología, se asemeja al caso 1 (Figura 8) y se sectoriza desde el punto cero inicial hasta el punto de máxima resistencia. Para el tramo descendente, se debe considerar que existe un punto de inflexión en la curva (como se puede observar en la Figura 15), por lo que en el tramo descendente se dividirá en dos sectores con el propósito de seguir las recomendaciones dadas en la metodología para curvas con un punto de inflexión dentro de la curva. De esta manera, la sectorización será como se muestra en la Figura 16.

Figura 15

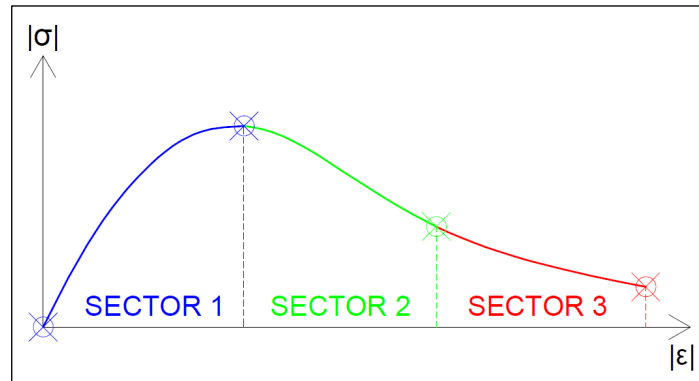
Geometría característica de la curva de concreto.



Nota: Adaptado de (Guo, Z., 2014).

Figura 16

Sectorización de la curva de concreto.

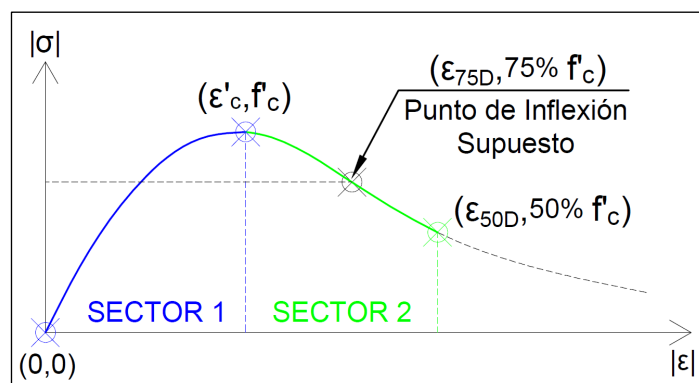


Nota: Elaboración Propia.

Para conocer el punto que limita a los sectores 2 y 3 (Figura 16) se necesita fijar la posición del punto límite en base a la recomendación presentada en el capítulo 3.1 de la metodología, la cual recomienda que se centre el punto de inflexión respecto al punto inicial y punto final del sector. Para esto, esta investigación se apoyará en la geometría característica propuesta por Guo (2014), en la que se puede observar que el punto de inflexión se encuentra aproximadamente entre el 75% y el 80% del punto de resistencia máxima, por lo que se definirá al punto final del sector 2 como aquel punto que se encuentre al 50% de la resistencia máxima, de tal manera que el punto de inflexión quede centrado como se muestra en la Figura 17. Esta investigación solo considerará dos sectores, los sectores 1 y 2 de la Figura 16, y deja presente que, aunque el tercer sector no sea presentado, si alguna investigación lo requiere, podría realizar el mismo procedimiento presentado a continuación para modelarlo.

Figura 17

Definición gráfica de los sectores.

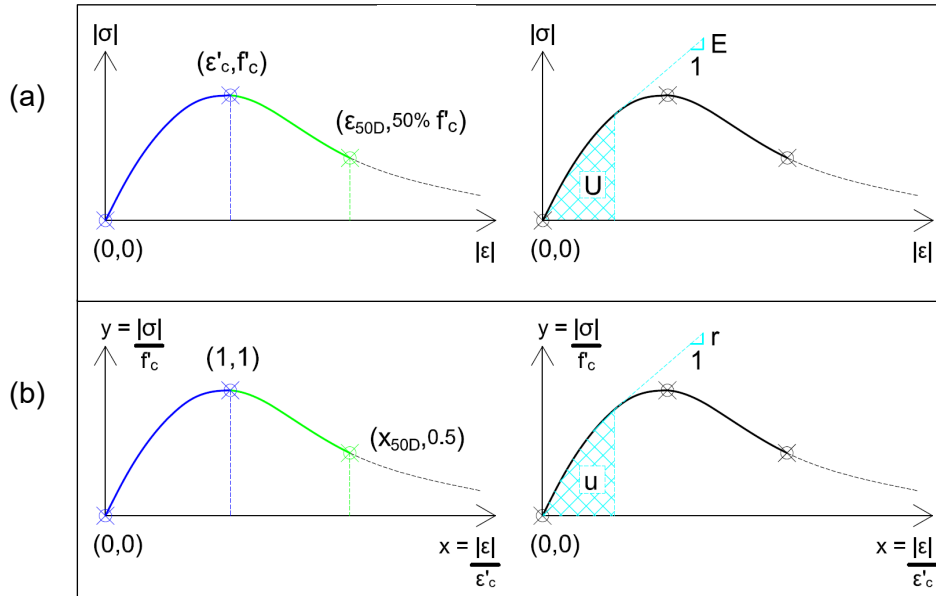


Nota: Elaboración Propia.

Para alinear esta investigación a diversas investigaciones presentadas que han propuesto modelos, se presentará al comportamiento del concreto no confinado sometido a compresión en función de las coordenadas físicas (esfuerzo-deformación) normalizadas respecto al punto de máxima resistencia como se puede ver en la Figura 15, esta investigación seguirá ese lineamiento clásico de representación de comportamiento con el uso de coordenadas físicas esfuerzo-deformación normalizadas respecto al punto de resistencia máxima, como se muestra en la Figura 18 (b).

Figura 18

Curva del concreto en distintos sistemas de coordenadas.



Nota: (a) Coordenadas físicas. (b) Coordenadas físicas normalizadas. Fuente: Elaboración Propia.

De esta manera, se correlaciona el sistema de coordenadas físicas normalizadas (ver Figura 18 (b)) con la notación presentada en la metodología como coordenadas originales (ver Figura 8):

$$\begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} \quad (3.80)$$

$$n = dY/dX = dy/dx = r \quad (3.81)$$

$$u = \int_0^x y \cdot dx \quad (3.82)$$

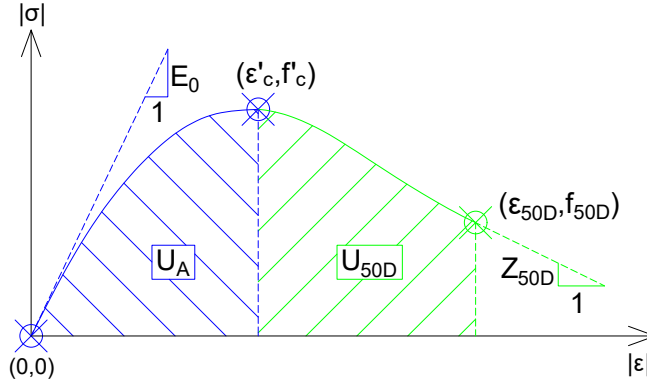
3.2.2 Parámetros físicos de la curva

Antes de comenzar a aplicar el método, se necesitan realizar algunas definiciones de los parámetros físicos de la curva. A continuación, se detallarán algunas definiciones correspondientes a características físicas del concreto presentado en su curva constitutiva.

Como se puede ver en la Figura 19 y Figura 20, se presentan algunas variables que se utilizarán a lo largo de la presente investigación relacionadas al comportamiento del concreto.

Figura 19

Parámetros físicos de la curva en coordenadas físicas.



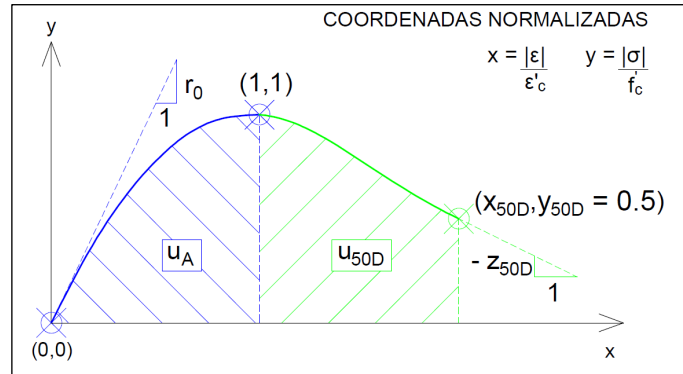
Nota: Elaboración Propia.

Respecto a las variables presentadas en la Figura 19, que corresponden a la curva de comportamiento del concreto no confinado a compresión uniaxial en coordenadas físicas esfuerzo-deformación, se presentan las definiciones matemáticas de los puntos, pendientes y áreas en la Ecuación (3.83):

$$\left. \begin{aligned} |\sigma|(|\varepsilon| = \varepsilon'_c) &= f'_c \\ |\sigma|(|\varepsilon| = \varepsilon_{50D}) &= f_{50D} = 50\% \cdot f'_c \\ \frac{d|\sigma|}{d|\varepsilon|}(|\varepsilon| = 0) &= E_0 \\ \frac{d|\sigma|}{d|\varepsilon|}(|\varepsilon| = \varepsilon_{50D}) &= -Z_{50D} \\ U_A &= \int_0^{\varepsilon'_c} |\sigma| \cdot d|\varepsilon| \\ U_{50D} &= \int_{\varepsilon'_c}^{\varepsilon_{50D}} |\sigma| \cdot d|\varepsilon| \end{aligned} \right\} \quad (3.83)$$

Figura 20

Parámetros físicos de la curva en coordenadas normalizadas.



Nota: Elaboración Propia.

Respecto a las variables presentadas en la Figura 20, que corresponden a la curva de comportamiento del concreto no confinado a compresión uniaxial en coordenadas físicas esfuerzo-deformación normalizadas respecto al punto de resistencia máxima a compresión, se presentan las definiciones matemáticas de los puntos, pendientes y áreas presentados:

$$\left. \begin{aligned} y(x=1) &= 1 \\ y(x=x_{50D}) &= y_{50D} = 0.5 \\ \frac{dy}{dx}(x=0) &= r_0 \\ \frac{dy}{dx}(x=x_{50D}) &= -z_{50D} \\ u_A &= \int_0^1 y \cdot dx \\ u_{50D} &= \int_1^{x_{50D}} y \cdot dx \end{aligned} \right\} \quad (3.84)$$

3.2.3 Relaciones entre coordenadas físicas y normalizadas del modelo

La normalización respecto al punto de resistencia máxima presentada anteriormente corresponde a un comportamiento matemático de escalamiento para los valores horizontales y verticales, a continuación, se presentarán las relaciones que tendrán los puntos, las pendientes y áreas entre distintos sistemas de coordenadas (sistema de coordenadas físicas y sistema de coordenadas físicas normalizadas):

Puntos

$$\left. \begin{aligned} |\sigma| &= (f'_c) \cdot y \\ |\varepsilon| &= (\varepsilon'_c) \cdot x \end{aligned} \right\} \quad (3.85)$$

Diferenciales

$$\left. \begin{aligned} d|\sigma| &= (f'_c) \cdot dy \\ d|\varepsilon| &= (\varepsilon'_c) \cdot dx \end{aligned} \right\} \quad (3.86)$$

Pendientes

$$E = \frac{d|\sigma|}{d|\varepsilon|} = \frac{(f'_c) \cdot dy}{(\varepsilon'_c) \cdot dx} = \left(\frac{f'_c}{\varepsilon'_c} \right) \cdot \frac{dy}{dx} \rightarrow E = \left(\frac{f'_c}{\varepsilon'_c} \right) \cdot r \quad (3.87)$$

Áreas

$$\begin{aligned} U &= \int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon} |\sigma| \cdot d|\varepsilon| = \int_{x(\varepsilon_0)}^{x(\varepsilon)} (f'_c) \cdot y \cdot (\varepsilon'_c) \cdot dx = (f'_c \cdot \varepsilon'_c) \cdot \int_{x_0}^x y \cdot dx \\ &\rightarrow U = (f'_c \cdot \varepsilon'_c) \cdot u \end{aligned} \quad (3.88)$$

Reemplazando los parámetros físicos definidos anteriormente:

Puntos característicos

$$\left. \begin{aligned} f_{50D} &= (f'_c) \cdot y_{50D} \\ \varepsilon_{50D} &= (\varepsilon'_c) \cdot x_{50D} \end{aligned} \right\} \quad (3.89)$$

Pendientes características

$$\left. \begin{aligned} E_0 &= \left(\frac{f'_c}{\varepsilon'_c} \right) \cdot r_0 \\ Z_{50D} &= \left(\frac{f'_c}{\varepsilon'_c} \right) \cdot z_{50D} \end{aligned} \right\} \quad (3.90)$$

Áreas características

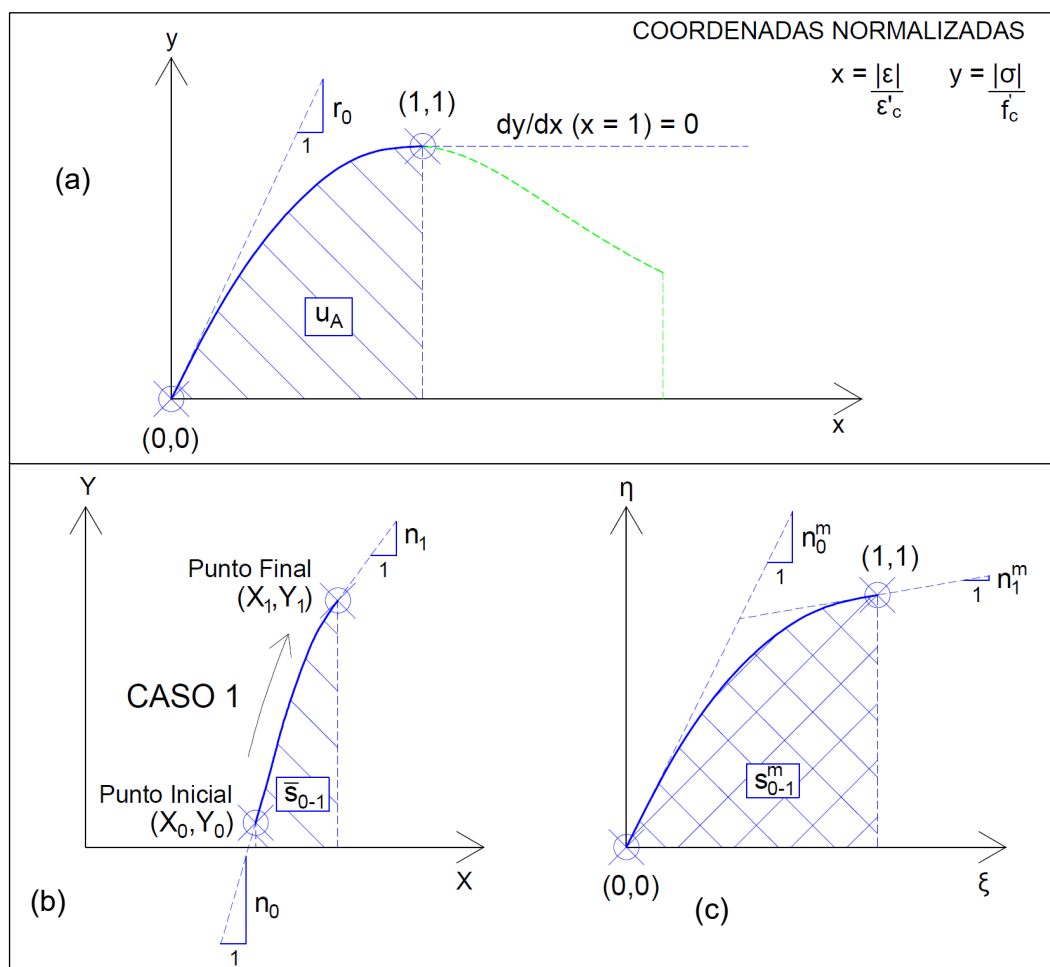
$$\left. \begin{aligned} U_A &= \int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon'_c} \sigma \cdot d\varepsilon = (f'_c \cdot \varepsilon'_c) \cdot \int_0^1 y \cdot dx = (f'_c \cdot \varepsilon'_c) \cdot u_A \\ U_{50D} &= \int_{\varepsilon'_c}^{\varepsilon_{50D}} \sigma \cdot d\varepsilon = (f'_c \cdot \varepsilon'_c) \cdot \int_1^{x_{50D}} y \cdot dx = (f'_c \cdot \varepsilon'_c) \cdot u_{50D} \end{aligned} \right\} \quad (3.91)$$

3.2.4 Sector 1: Tramo ascendente

A continuación, se utilizará la metodología presentada para modelar al tramo ascendente (zona prepico) como un polinomio de cuarto grado en coordenadas mapeadas como se presentó en la Ecuación (3.75). Para iniciar, se deben correlacionar las definiciones previamente definidas con la metodología como se observa en la Figura 21.

Figura 21

Parámetros del sector 1 en distintos sistemas de coordenadas.



Nota: (a) Coordenadas físicas normalizadas. (b) SCO según metodología. (c) SCM. Fuente: Elaboración Propia.

3.2.4.1 Sectorización.

Se correlacionan los puntos en el extremo y las pendientes con la notación vistas en la Figura 22, cabe resaltar que en el punto máximo de resistencia su pendiente es cero. A continuación, se presentarán las correlaciones de notación en formato matricial:

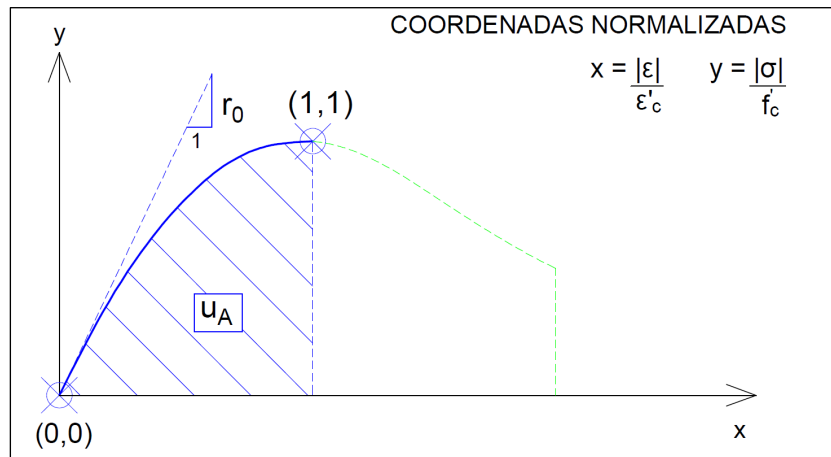
$$\begin{bmatrix} X_0 & X_1 \\ Y_0 & Y_1 \\ n_0 & n_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ r_0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.92)$$

Una vez conocidos los límites del sector, se alinea el concepto de área definido en la ecuación (3.84) con el concepto presentado en la metodología, reemplazando las ecuaciones (3.92) y (3.80) en la ecuación (3.8):

$$\bar{s}_{0-1} = \int_0^1 y \cdot dx = u_A \quad (3.93)$$

Figura 22

Condiciones sectoriales del sector 1 (Tramo ascendente).



Nota: Elaboración Propia.

3.2.4.2 Mapeo.

Una vez alineadas las variables con la metodología, se procede a correlacionar el SCM y el SCO (coordenadas físicas normalizadas) reemplazando la ecuación (3.92) en la ecuación (3.1) para correlacionar los puntos:

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (3.94)$$

Además, la relación entre pendientes para cualquier punto la obtenemos reemplazando la ecuación (3.92) en la ecuación (3.3):

$$n^m = \frac{d\eta}{d\xi} = \frac{dy}{dx} = r \quad (3.95)$$

De la misma manera, se puede obtener la relación entre áreas totales del sector, reemplazando la ecuación (3.93) en la ecuación (3.10):

$$s_{0-1}^m = u_A \quad (3.96)$$

3.2.4.3 Asignación de condiciones sectoriales.

Continuando con la metodología, las condiciones sectoriales del tramo ascendente presentadas en las ecuaciones (3.92) y (3.93) relacionadas a las condiciones (3.29), (3.30) y (3.31) para asignar en la ecuación gobernante (3.75), y sus propiedades vistas en las ecuaciones (3.76) y (3.77) son:

$$\left. \begin{aligned} \eta(\xi = 0) &= 0 \\ \eta(\xi = 1) &= 1 \\ \frac{d\eta}{d\xi}(\xi = 0) &= n_0^m = r_0 \\ \frac{d\eta}{d\xi}(\xi = 1) &= n_1^m = 0 \\ \int_0^1 \eta \cdot d\xi &= s_{0-1}^m = u_A \end{aligned} \right\} \quad (3.97)$$

Para obtener las relaciones entre los coeficientes del modelo polinómico de cuarto grado presentado para el tramo ascendente ($C_i = A_i$) y los parámetros físicos de la curva definidos, se imponen las condiciones presentadas en la ecuación (3.97), en las ecuaciones (3.75), (3.76) y (3.77) y se obtiene:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \eta(\xi=0) \\ \eta(\xi=1) \\ n^m(\xi=0) \\ n^m(\xi=1) \\ s_{0-1}^m \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ r_0 \\ 0 \\ u_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_0^m \\ A_1^m \\ A_2^m \\ A_3^m \\ A_4^m \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} A_0^m \\ A_1^m \\ A_2^m \\ A_3^m \\ A_4^m \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -18 & -12 & -4.5 & 1.5 & 30 \\ 32 & 28 & 6 & -4 & -60 \\ -15 & -15 & -2.5 & 2.5 & 30 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ r_0 \\ 0 \\ u_A \end{pmatrix} \\
\rightarrow \begin{pmatrix} A_1^m \\ A_2^m \\ A_3^m \\ A_4^m \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -12 & -4.5 & 30 \\ 28 & 6 & -60 \\ -15 & -2.5 & 30 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ r_0 \\ u_A \end{pmatrix} \tag{3.98}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, reemplazando los valores de los coeficientes obtenidos en (3.98), en la ecuación (3.75), se obtendrá el modelo en coordenadas mapeadas:

$$\begin{aligned}
\eta &= (1 \quad \xi \quad \xi^2 \quad \xi^3 \quad \xi^4) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ r_0 \\ -12 - 4.5 \cdot r_0 + 30 \cdot u_A \\ 28 + 6 \cdot r_0 - 60 \cdot u_A \\ -15 - 2.5 \cdot r_0 + 30 \cdot u_A \end{pmatrix} \\
y &= (1 \quad x \quad x^2 \quad x^3 \quad x^4) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ r \\ -12 - 4.5 \cdot r_0 + 30 \cdot u_A \\ 28 + 6 \cdot r_0 - 60 \cdot u_A \\ -15 - 2.5 \cdot r_0 + 30 \cdot u_A \end{pmatrix} \tag{3.99}
\end{aligned}$$

Al final del proceso, se transformaron las coordenadas mapeadas en coordenadas físicas normalizadas usando las relaciones de la ecuación (3.94). De esta forma, se tiene la ecuación:

$$y = A_1 \cdot x + A_2 \cdot x^2 + A_3 \cdot x^3 + A_4 \cdot x^4 \tag{3.100}$$

donde:
$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -12 & -4.5 & 30 \\ 28 & 6 & -60 \\ -15 & -2.5 & 30 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ r_0 \\ u_A \end{pmatrix}$$

Se puede apreciar que el modelo para el tramo ascendente depende de dos variables no conocidas que son la densidad de energía de deformación total hasta el pico “ u_A ”, y la pendiente instantánea inicial “ r_0 ”. El esquema para el cálculo de los coeficientes de este tramo ascendente se encuentra en la Figura 2 del Anexo 1.

3.2.4.4 Regresión lineal múltiple.

El ajuste de la data obtenida experimentalmente para el tramo ascendente del modelo se realiza sobre la data mapeada. A partir del modelo propuesto en la ecuación (3.99), se reordena el polinomio de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \eta &= (1 \quad \xi \quad \xi^2 \quad \xi^3 \quad \xi^4) \cdot \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -12 \\ 28 \\ -15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4.5 \\ 6 \\ -2.5 \end{pmatrix} \cdot r_0 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 30 \\ -60 \\ 30 \end{pmatrix} \cdot u_A \right] \\ &\rightarrow \eta + 12 \cdot \xi^2 - 28 \cdot \xi^3 + 15 \cdot \xi^4 = \dots \\ \dots ([\xi - 4.5 \cdot \xi^2 + 6 \cdot \xi^3 - 2.5 \cdot \xi^4] \quad [30 \cdot \xi^2 - 60 \cdot \xi^3 + 30 \cdot \xi^4]) \cdot \begin{pmatrix} r_0 \\ u_A \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.101)$$

A continuación, se realiza un cambio de variable:

$$P(\xi, \eta) = (Q(\xi) \quad R(\xi)) \cdot \begin{pmatrix} r_0 \\ u_A \end{pmatrix} \quad (3.102)$$

Donde: $P(\xi, \eta) = \eta + 12 \cdot \xi^2 - 28 \cdot \xi^3 + 15 \cdot \xi^4$

$$Q(\xi) = \xi - 4.5 \cdot \xi^2 + 6 \cdot \xi^3 - 2.5 \cdot \xi^4$$

$$R(\xi) = 30 \cdot \xi^2 - 60 \cdot \xi^3 + 30 \cdot \xi^4$$

Para cada punto se tendrá:

$$\begin{pmatrix} P(\xi_1, \eta_1) \\ \vdots \\ P(\xi_i, \eta_i) \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q(\xi_1) & R(\xi_1) \\ \vdots & \vdots \\ Q(\xi_i) & R(\xi_i) \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_0 \\ u_A \end{pmatrix} \quad (3.103)$$

Para resolver el sistema sobredeterminado, se usa el método de regresión lineal múltiple con matrices. Es decir, se resuelve multiplicando a ambos lados por la transpuesta de la matriz, como se observa en la Ecuación (3.104):

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} \cdots & Q(\xi_i) & \cdots \\ \cdots & R(\xi_i) & \cdots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vdots \\ P(\xi_i, \eta_i) \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdots & Q(\xi_i) & \cdots \\ \cdots & R(\xi_i) & \cdots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vdots & \vdots \\ Q(\xi_i) & R(\xi_i) \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_0 \\ u_A \end{pmatrix} \\
& \rightarrow \begin{pmatrix} \sum_i P(\xi_i, \eta_i) \cdot Q(\xi_i) \\ \sum_i P(\xi_i, \eta_i) \cdot R(\xi_i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_i Q^2(\xi_i) & \sum_i Q(\xi_i) \cdot R(\xi_i) \\ \sum_i Q(\xi_i) \cdot R(\xi_i) & \sum_i R^2(\xi_i) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_0 \\ u_A \end{pmatrix} \\
& \rightarrow \begin{pmatrix} r_0 \\ u_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_i Q^2(\xi_i) & \sum_i Q(\xi_i) \cdot R(\xi_i) \\ \sum_i Q(\xi_i) \cdot R(\xi_i) & \sum_i R^2(\xi_i) \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \sum_i P(\xi_i, \eta_i) \cdot Q(\xi_i) \\ \sum_i P(\xi_i, \eta_i) \cdot R(\xi_i) \end{pmatrix} \quad (3.104)
\end{aligned}$$

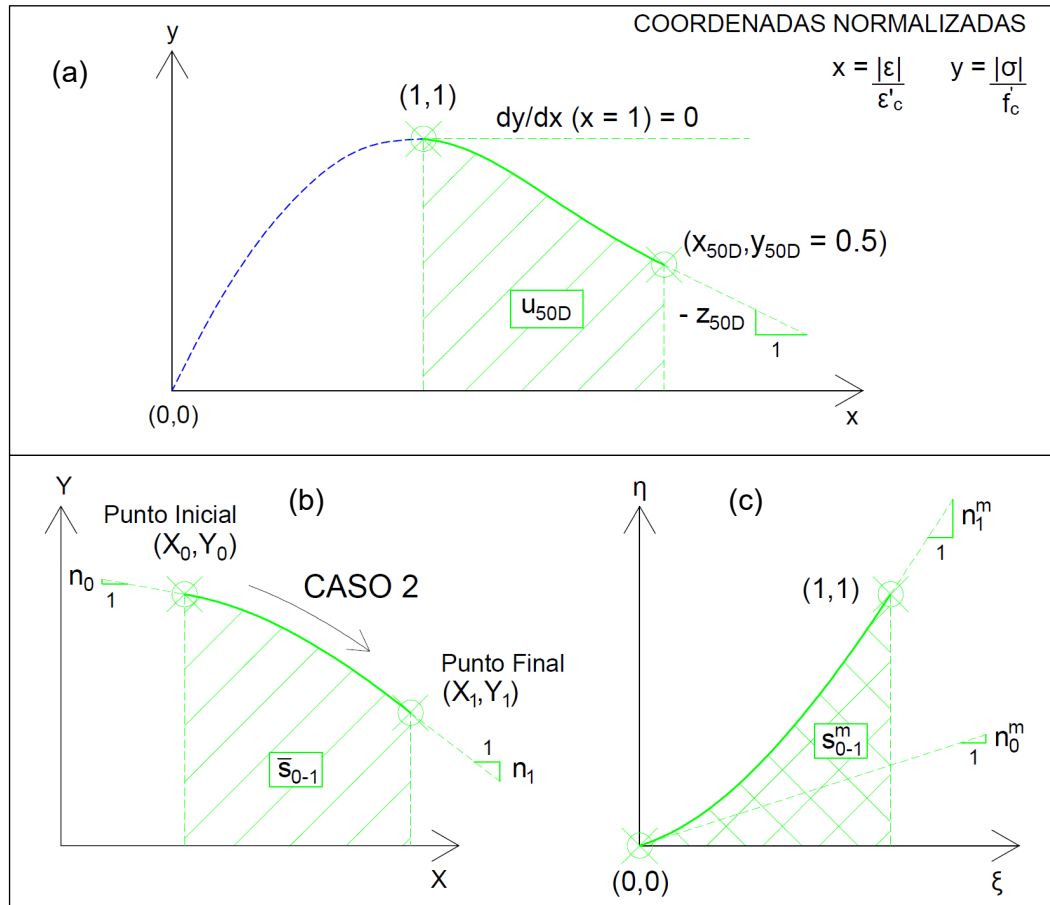
Se puede observar que, para el tramo ascendente, las coordenadas físicas normalizadas y las coordenadas físicas normalizadas mapeadas coinciden, se trata del caso 1 del método, pero no necesita traslación debido a que el punto inicial se encuentra en la coordenada de origen, tampoco necesita ser escalado debido a que el punto final se encuentra en el punto (1,1), por lo que las variables de pendiente inicial y área fueron las mismas. El esquema para el uso del ajuste experimental de este tramo ascendente se encuentra a modo de resumen en la Figura 3 del Anexo 1.

3.2.5 Sector 2: Tramo descendente

De la misma manera, se utilizará la metodología presentada para modelar al tramo descendente (zona postpico) como un polinomio de cuarto grado en coordenadas mapeadas como se presentó en la ecuación (3.75). Para iniciar, se deben correlacionar las definiciones previamente definidas con la metodología como se observa en la Figura 23.

Figura 23

Parámetros del sector 2 en distintos sistemas de coordenadas.



Nota: (a) Coordenadas físicas normalizadas. (b) SCO según metodología. (c) SCM. Fuente: Elaboración Propia.

3.2.5.1 Sectorización.

De la misma forma que antes, se correlacionan los puntos en el extremo y las pendientes con la notación vistas en la Figura 24, cabe resaltar que en este caso el punto inicial es el punto máximo de resistencia cuya pendiente es cero. A continuación, se presentarán las correlaciones en formato matricial:

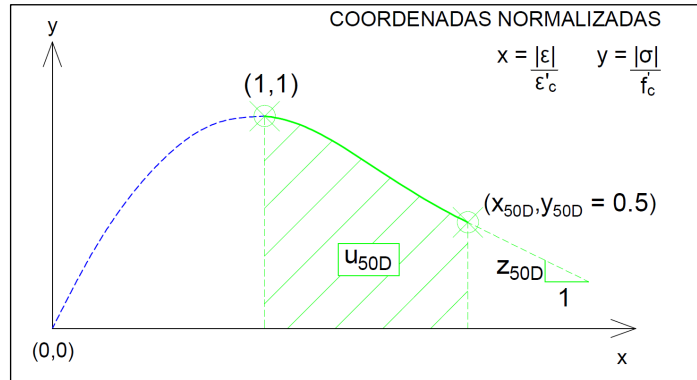
$$\begin{bmatrix} X_0 & X_1 \\ Y_0 & Y_1 \\ n_0 & n_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_{50D} \\ 1 & y_{50D} \\ 0 & z_{50D} \end{bmatrix} \quad (3.105)$$

Una vez ya conocidos los límites del sector, se puede alinear el concepto de área definido en la ecuación (3.87) con el concepto presentado en la metodología, reemplazando las ecuaciones (3.105) y (3.80) en la ecuación (3.8):

$$\bar{s}_{0-1} = \int_1^{x_{50D}} y \cdot dx = u_{50D} \quad (3.106)$$

Figura 24

Condiciones sectoriales del sector 2 (Tramo descendente).



Nota: Elaboración Propia.

3.2.5.2 Mapeo.

Se procede a correlacionar los sistemas de coordenadas SCM y el SCO reemplazando la ecuación (3.105) en (3.1) para correlacionar los puntos:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{x_{50D} - 1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{y_{50D} - 1} \end{pmatrix} \cdot \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \\ \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{x - 1}{x_{50D} - 1} \\ \frac{y - 1}{y_{50D} - 1} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_{50D} - 1 & 0 \\ 0 & y_{50D} - 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.107)$$

Además, la relación entre pendientes para cualquier punto la obtenemos reemplazando la ecuación (3.105) en la ecuación (3.3):

$$\begin{aligned} n^m &= \frac{d\eta}{d\xi} = \left(\frac{x_{50D} - 1}{y_{50D} - 1} \right) \cdot \frac{dy}{dx} \\ \frac{dy}{dx} &= \left(\frac{y_{50D} - 1}{x_{50D} - 1} \right) \cdot n^m \end{aligned} \quad (3.108)$$

De la misma manera, se puede obtener la relación entre áreas totales del sector, reemplazando la ecuación (3.106) en la ecuación (3.10):

$$\begin{aligned} u_{50D}^m &= \frac{u_{50D}}{(x_{50D} - 1) \cdot (y_{50D} - 1)} - \frac{1}{y_{50D} - 1} \\ u_{50D} &= (x_{50D} - 1) \cdot (y_{50D} - 1) \cdot u_{50D}^m + (x_{50D} - 1) \end{aligned} \quad (3.109)$$

Se necesitan evaluar las pendientes mapeadas en los extremos, se utilizarán las relaciones obtenidas en (3.108):

$$\begin{aligned} n_0^m &= n^m(\xi = 0) = \left(\frac{x_{50D} - 1}{y_{50D} - 1} \right) \cdot \frac{dy}{dx} \left(\frac{x - 1}{x_{50D} - 1} = 0 \right) \\ &\rightarrow n_0^m = \left(\frac{x_{50D} - 1}{y_{50D} - 1} \right) \cdot \frac{dy}{dx} (x = 1) \\ &\rightarrow n_0^m = \left(\frac{x_{50D} - 1}{y_{50D} - 1} \right) \cdot n_0 \\ &\rightarrow n_0^m = 0 \end{aligned} \quad (3.110)$$

De la misma manera, para el otro extremo:

$$\begin{aligned}
 n_1^m &= n^m(\xi = 1) = \left(\frac{x_{50D} - 1}{y_{50D} - 1} \right) \cdot \frac{dy}{dx} \left(\frac{x - 1}{x_{50D} - 1} = 1 \right) \\
 \rightarrow n_1^m &= \left(\frac{x_{50D} - 1}{y_{50D} - 1} \right) \cdot \frac{dy}{dx} (x = x_{50D}) \\
 \rightarrow n_1^m &= z_{50D}^m = \left(\frac{x_{50D} - 1}{y_{50D} - 1} \right) \cdot n_1 \\
 \left. \begin{aligned} z_{50D}^m &= \left(\frac{x_{50D} - 1}{y_{50D} - 1} \right) \cdot z_{50D} \\ z_{50D} &= \left(\frac{y_{50D} - 1}{x_{50D} - 1} \right) \cdot z_{50D}^m \end{aligned} \right\} \quad (3.111)
 \end{aligned}$$

3.2.5.3 Asignación de condiciones sectoriales.

Al igual que para el tramo ascendente, las condiciones sectoriales del modelo mapeado presentadas en las ecuaciones (3.109), (3.110) y (3.111), relativas a las condiciones (3.29), (3.30) y (3.31) para asignar en la ecuación gobernante (3.75), y sus propiedades vistas en las ecuaciones (3.76) y (3.77) son:

$$\left. \begin{aligned} \eta(\xi = 0) &= 0 \\ \eta(\xi = 1) &= 1 \\ d\eta/d\xi (\xi = 0) &= n_0^m = 0 \\ d\eta/d\xi (\xi = 1) &= n_1^m = z_{50D}^m \\ \int_0^1 \eta \cdot d\xi &= s_{0-1}^m = u_{50D}^m \end{aligned} \right\} \quad (3.112)$$

Para obtener las relaciones entre los coeficientes del modelo polinómico de cuarto grado presentado para el tramo descendente ($C_i = D_i$) y los parámetros físicos de la curva definidos, se imponen las condiciones presentadas en la ecuación (3.112), en las ecuaciones (3.75), (3.76) y (3.77):

$$\begin{pmatrix} \eta(\xi=0) \\ \eta(\xi=1) \\ n^m(\xi=0) \\ n^m(\xi=1) \\ \int_0^1 \eta \cdot d\xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ z_{50D}^m \\ u_{50D}^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} D_0^m \\ D_1^m \\ D_2^m \\ D_3^m \\ D_4^m \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} D_0^m \\ D_1^m \\ D_2^m \\ D_3^m \\ D_4^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -18 & -12 & -4.5 & 1.5 & 30 \\ 32 & 28 & 6 & -4 & -60 \\ -15 & -15 & -2.5 & 2.5 & 30 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ z_{50D}^m \\ u_{50D}^m \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} D_0^m \\ D_1^m \\ D_2^m \\ D_3^m \\ D_4^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -12 & 1.5 & 30 \\ 28 & -4 & -60 \\ -15 & 2.5 & 30 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ z_{50D}^m \\ u_{50D}^m \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} D_2^m \\ D_3^m \\ D_4^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & 1.5 & 30 \\ 28 & -4 & -60 \\ -15 & 2.5 & 30 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ z_{50D}^m \\ u_{50D}^m \end{pmatrix} \quad (3.113)$$

Se puede observar que el término independiente y el término lineal (D_0^m, D_1^m) en el SCM son iguales a cero. Por lo tanto, reemplazando los valores de los coeficientes de (3.113) en la ecuación (3.75), se obtendrá el modelo en coordenadas mapeadas:

$$\eta = (\xi^2 \quad \xi^3 \quad \xi^4) \cdot \begin{pmatrix} D_2^m \\ D_3^m \\ D_4^m \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \eta = (\xi^2 \quad \xi^3 \quad \xi^4) \cdot \begin{pmatrix} -12 & 1.5 & 30 \\ 28 & -4 & -60 \\ -15 & 2.5 & 30 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ z_{50D}^m \\ u_{50D}^m \end{pmatrix} \quad (3.114)$$

A continuación, se transformarán las coordenadas mapeadas en coordenadas físicas normalizadas usando las relaciones descritas en la ecuación (3.107):

$$\frac{y-1}{y_{50D}-1} = \left(\left(\frac{x-1}{x_{50D}-1} \right)^2 \left(\frac{x-1}{x_{50D}-1} \right)^3 \left(\frac{x-1}{x_{50D}-1} \right)^4 \right) \dots$$

$$\dots \cdot \begin{pmatrix} -12 & 1.5 & 30 \\ 28 & -4 & -60 \\ -15 & 2.5 & 30 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{(x_{50D}-1)}{(y_{50D}-1)} \cdot z_{50D} \\ \frac{u_{50D}}{(x_{50D}-1) \cdot (y_{50D}-1)} - \frac{1}{y_{50D}-1} \end{pmatrix} \quad (3.115)$$

Para el vector fila que contiene la información de los polinomios de “x”:

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{x-1}{x_{50D}-1}\right)^2 \\ \left(\frac{x-1}{x_{50D}-1}\right)^3 \\ \left(\frac{x-1}{x_{50D}-1}\right)^4 \end{pmatrix}^T = (1 \quad x \quad x^2 \quad x^3 \quad x^4) \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -4 \\ 1 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \dots$$

$$\dots \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{(x_{50D}-1)^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{(x_{50D}-1)^3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{(x_{50D}-1)^4} \end{pmatrix}$$
(3.116)

Del vector columna que contiene a las variables del área y la pendiente:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\left(\frac{x_{50D}-1}{y_{50D}-1}\right) \cdot z_{50D}} \\ \frac{u_{50D}}{(x_{50D}-1) \cdot (y_{50D}-1)} - \frac{1}{y_{50D}-1} \end{pmatrix} = \dots$$

$$\dots = \frac{1}{y_{50D}-1} \cdot \begin{pmatrix} y_{50D}-1 & 0 & 0 \\ 0 & x_{50D}-1 & 0 \\ -1 & 0 & \frac{1}{x_{50D}-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ z_{50D} \\ u_{50D} \end{pmatrix}$$
(3.117)

Reemplazando lo obtenido en (3.116) y (3.117) en (3.115):

$$y = 1 + (1 \quad x \quad x^2 \quad x^3 \quad x^4) \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -4 \\ 1 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \dots$$

$$\dots \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{(x_{50D}-1)^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{(x_{50D}-1)^3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{(x_{50D}-1)^4} \end{pmatrix} \cdot \dots$$

$$\dots \cdot \begin{pmatrix} -12 & 1.5 & 30 \\ 28 & -4 & -60 \\ -15 & 2.5 & 30 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_{50D}-1 & 0 & 0 \\ 0 & x_{50D}-1 & 0 \\ -1 & 0 & \frac{1}{x_{50D}-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ z_{50D} \\ u_{50D} \end{pmatrix}$$
(3.118)

Esta ecuación podría escribirse de la forma:

$$y = 1 + (1 \quad x \quad x^2 \quad x^3 \quad x^4) \cdot \begin{pmatrix} D_0 - 1 \\ D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \end{pmatrix} \quad (3.119)$$

Por lo tanto, la ecuación en coordenadas físicas normalizadas podría escribirse como:

$$y = D_0 + D_1 \cdot x + D_2 \cdot x^2 + D_3 \cdot x^3 + D_4 \cdot x^4 \quad (3.120)$$

donde:

$$\begin{pmatrix} D_0 \\ D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -4 \\ 1 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{(x_{50D} - 1)^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{(x_{50D} - 1)^3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{(x_{50D} - 1)^4} \end{pmatrix} \cdot \dots$$

$$\dots \cdot \begin{pmatrix} -12 & 1.5 & 30 \\ 28 & -4 & -60 \\ -15 & 2.5 & 30 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_{50D} - 1 & 0 & 0 \\ 0 & x_{50D} - 1 & 0 \\ -1 & 0 & \frac{1}{x_{50D} - 1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ z_{50D} \\ u_{50D} \end{pmatrix}$$

Se puede apreciar que el modelo para el tramo descendente depende de las siguientes variables no conocidas: La deformación postpico normalizada “ x_{50D} ”, la pendiente instantánea “ z_{50D} ” y la densidad de energía de deformación “ u_{50D} ”, todas las variables al 50% de caída de resistencia. Para un ensayo experimental, la deformación normalizada al 50% postpico “ x_{50D} ” y el esfuerzo normalizado al 50% postpico “ y_{50D} ” son conocidos y su valor corresponde al punto más próximo a una caída de resistencia del 50%. En cambio, para el uso analítico del modelo, “ x_{50D} ” es una variable no conocida, mientras que $y_{50D} \equiv 0.5$ es una constante conocida cuyo valor es el resultado de su definición. El esquema para el cálculo de los coeficientes de este tramo descendente se encuentra a modo de resumen en la Figura 2 del Anexo 1.

3.2.5.4 Regresión lineal múltiple.

Así como en el tramo ascendente, el ajuste de la data obtenida experimentalmente para el tramo descendente del modelo se realiza sobre la data mapeada, utilizando la ecuación (3.107) sobre la data obtenida experimentalmente para el tramo descendente. A partir del modelo propuesto en la ecuación (3.114), se reordena el polinomio de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \eta &= (\xi^2 \quad \xi^3 \quad \xi^4) \cdot \left[\begin{pmatrix} -12 \\ 28 \\ -15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1.5 \\ -4 \\ 2.5 \end{pmatrix} \cdot z_{50D}^m + \begin{pmatrix} 30 \\ -60 \\ 30 \end{pmatrix} \cdot u_{50D}^m \right] \\ &\rightarrow \eta + 12 \cdot \xi^2 - 28 \cdot \xi^3 + 15 \cdot \xi^4 = \dots \\ \dots &= ([1.5 \cdot \xi^2 - 4 \cdot \xi^3 + 2.5 \cdot \xi^4] \quad [30 \cdot \xi^2 - 60 \cdot \xi^3 + 30 \cdot \xi^4]) \cdot \begin{pmatrix} z_{50D}^m \\ u_{50D}^m \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.121)$$

A continuación, se realiza un cambio de variable:

$$P(\xi, \eta) = (S(\xi) \quad R(\xi)) \cdot \begin{pmatrix} z_{50D}^m \\ u_{50D}^m \end{pmatrix} \quad (3.122)$$

Donde: $P(\xi, \eta) = \eta + 12 \cdot \xi^2 - 28 \cdot \xi^3 + 15 \cdot \xi^4$

$$R(\xi) = 30 \cdot \xi^2 - 60 \cdot \xi^3 + 30 \cdot \xi^4$$

$$S(\xi) = 1.5 \cdot \xi^2 - 4 \cdot \xi^3 + 2.5 \cdot \xi^4$$

Observación: $P(\xi, \eta)$ y $R(\xi)$ son las mismas variables que están definidas en la ecuación (3.102). Por tanto, para cada punto se tendrá:

$$\begin{pmatrix} P(\xi_1, \eta_1) \\ \vdots \\ P(\xi_i, \eta_i) \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S(\xi_1) & R(\xi_1) \\ \vdots & \vdots \\ S(\xi_i) & R(\xi_i) \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_{50D}^m \\ u_{50D}^m \end{pmatrix} \quad (3.123)$$

Para resolver el sistema sobredeterminado, al igual que en el caso del tramo ascendente, se usa el método de regresión lineal múltiple con matrices:

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} \cdots & S(\xi_i) & \cdots \\ \cdots & R(\xi_i) & \cdots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vdots \\ P(\xi_i, \eta_i) \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdots & S(\xi_i) & \cdots \\ \cdots & R(\xi_i) & \cdots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vdots & \vdots \\ S(\xi_i) & R(\xi_i) \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_{50D}^m \\ u_{50D}^m \end{pmatrix} \\
& \rightarrow \begin{pmatrix} \sum_i P(\xi_i, \eta_i) \cdot S(\xi_i) \\ \sum_i P(\xi_i, \eta_i) \cdot R(\xi_i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_i S^2(\xi_i) & \sum_i S(\xi_i) \cdot R(\xi_i) \\ \sum_i S(\xi_i) \cdot R(\xi_i) & \sum_i R^2(\xi_i) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_{50D}^m \\ u_{50D}^m \end{pmatrix} \\
& \rightarrow \begin{pmatrix} z_{50D}^m \\ u_{50D}^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_i S^2(\xi_i) & \sum_i S(\xi_i) \cdot R(\xi_i) \\ \sum_i S(\xi_i) \cdot R(\xi_i) & \sum_i R^2(\xi_i) \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \sum_i P(\xi_i, \eta_i) \cdot S(\xi_i) \\ \sum_i P(\xi_i, \eta_i) \cdot R(\xi_i) \end{pmatrix} \quad (3.124)
\end{aligned}$$

Una vez obtenido las variables en coordenadas físicas normalizadas mapeadas, se pueden transformar las variables con las relaciones (3.109) y (3.111):

$$\begin{pmatrix} z_{50D} \\ u_{50D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{y_{50D} - 1}{x_{50D} - 1} & 0 \\ 0 & (x_{50D} - 1) \cdot (y_{50D} - 1) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_{50D}^m \\ u_{50D}^m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ x_{50D} - 1 \end{pmatrix} \quad (3.125)$$

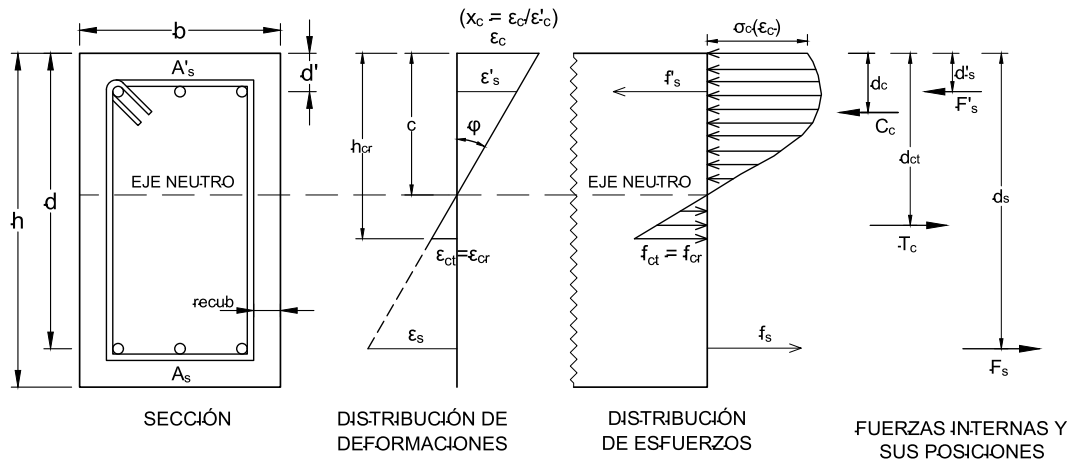
El esquema para el uso del ajuste experimental de este tramo descendente se encuentra a modo de resumen en la Figura 3 del Anexo 1.

3.3 Cálculo del diagrama momento-curvatura

Esta investigación propone dos métodos alternativos para determinar la posición y magnitud de la fuerza de compresión del concreto, con el objetivo de simplificar el cálculo del Diagrama Momento-Curvatura (DMC) en vigas rectangulares. Ambos métodos se basan en la integración analítica de la curva de esfuerzo-deformación del concreto, estableciendo la relación entre el área de la curva esfuerzo-deformación normalizada del concreto a compresión y la deformación en la fibra extrema en compresión asociada, así como entre el centroide geométrico de la curva esfuerzo-deformación normalizada del concreto a compresión y la deformación de la fibra extrema en compresión asociada. Estos enfoques, desarrollados para vigas rectangulares, buscan simplificar el cálculo de los puntos del DMC (ver Figura 25).

Figura 25

Distribución de acciones internas a flexión en la sección.



Nota: Elaboración Propia.

3.3.1 Cálculo directo

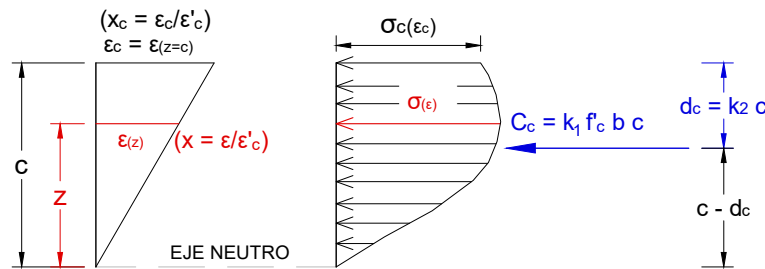
El método del cálculo directo es una propuesta para obtener analíticamente los puntos del diagrama momento-curvatura en vigas de sección rectangular. Se basa en el cálculo analítico de la posición y magnitud de la fuerza de compresión del concreto mediante parámetros de integración k_1 y k_2 , y el cálculo directo de la profundidad del eje neutro mediante una solución analítica.

3.3.1.1 Componentes de la compresión del concreto.

Para el cálculo analítico de las componentes del concreto (ver Figura 26), que son la fuerza del concreto (C_c) y su posición respecto a la fibra extrema en compresión (d_c), se proponen expresiones en función de la curva del concreto en coordenadas normalizadas, permitiendo utilizar las expresiones propuestas.

Figura 26

Cálculo Directo: Componentes del concreto.



Nota: Elaboración Propia.

3.3.1.1.1 Fuerza de compresión del concreto.

La fuerza de compresión del concreto se calcula mediante integrales, utilizando la distribución de esfuerzo en la porción de la sección rectangular sometida a compresión. La fuerza de compresión del concreto será:

$$C_c = \int_0^{A(z=c)} \sigma \cdot dA \rightarrow C_c = \int_0^c \sigma \cdot (b \cdot dz) \rightarrow C_c = b \cdot \int_0^c \sigma \cdot dz \quad (3.126)$$

A continuación, se emplea un cambio de variable bajo la condición de linealidad en deformaciones (compatibilidad de deformaciones), y se evalúan las condiciones de contorno en su nueva variable:

$$\varphi \cdot z = \varepsilon_{(z)} \rightarrow \varphi = \frac{\varepsilon_{(z)}}{z} = \frac{\varepsilon_c}{c}$$

$$\rightarrow \left. \begin{aligned} \varepsilon(z=0) &= 0 \\ \varepsilon(z=c) &= \varepsilon_c \\ z &= \frac{c}{\varepsilon_c} \cdot \varepsilon \\ dz &= \frac{c}{\varepsilon_c} \cdot d\varepsilon \end{aligned} \right\} \quad (3.127)$$

Se incorpora la ecuación (3.127) en la ecuación (3.126):

$$C_c = b \cdot \frac{c}{\varepsilon_c} \cdot \int_{\varepsilon(z=0)}^{\varepsilon(z=c)} \sigma \cdot d\varepsilon \rightarrow C_c = \frac{b \cdot c}{\varepsilon_c} \cdot \int_0^{\varepsilon_c} \sigma \cdot d\varepsilon \quad (3.128)$$

Se emplea otro cambio de variable usando las relaciones entre el SCN y SCF (ver Figura 18), y se evalúan los extremos en el nuevo sistema de esfuerzo-deformación normalizado:

$$\left\{ \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \varepsilon / \varepsilon'_c \\ \sigma / f'_c \end{matrix} \right\} \quad , \quad \left\{ \begin{matrix} x_c \\ y_c \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} x(\varepsilon = \varepsilon_c) \\ y(\sigma = f_c) \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \varepsilon_c / \varepsilon'_c \\ f_c / f'_c \end{matrix} \right\}$$

$$\rightarrow \left. \begin{aligned} x(\varepsilon = 0) &= 0 \\ x(\varepsilon = \varepsilon_c) &= x_c \\ \varepsilon &= \varepsilon'_c \cdot x \\ \sigma &= f'_c \cdot y \\ d\varepsilon &= \varepsilon'_c \cdot dx \end{aligned} \right\} \quad (3.129)$$

Se reemplaza la Ecuación (3.129) en la Ecuación (3.128):

$$C_c = \frac{b \cdot c}{\varepsilon_c} \cdot \int_{x(\varepsilon=0)}^{x(\varepsilon=\varepsilon_c)} f'_c \cdot y \cdot \varepsilon'_c \cdot dx \rightarrow C_c = \frac{b \cdot c}{\varepsilon_c} \cdot \varepsilon'_c \cdot f'_c \cdot \int_0^{x_c} y \cdot dx$$

$$\rightarrow C_c = \frac{\int_0^{x_c} y \cdot dx}{\varepsilon_c / \varepsilon'_c} \cdot f'_c \cdot b \cdot c \rightarrow C_c = \frac{\int_0^{x_c} y \cdot dx}{x_c} \cdot f'_c \cdot b \cdot c$$

$$\text{Sea: } u_c = \int_0^{x_c} y \cdot dx \rightarrow C_c = \frac{u_c}{x_c} \cdot f'_c \cdot b \cdot c$$

$$\text{Sea: } k_1 = \frac{u_c}{x_c} \rightarrow C_c = k_1 \cdot f'_c \cdot b \cdot c \quad (3.130)$$

Se definió el área de la curva del concreto desde cero hasta la deformación normalizada asociada a la fibra extrema de compresión del concreto (x_c) en SCN como " u_c ". Además, se definió el parámetro " k_1 ", que represente la relación entre la fuerza de compresión del concreto (C_c) obtenida por integración directa y el área de concreto en compresión sometida al esfuerzo resistente máximo de manera constante ($f'_c \cdot b \cdot c$).

3.3.1.1.2 Posición de la fuerza de compresión del concreto.

La posición de la fuerza de compresión del concreto también se calcula mediante integrales, utilizando la distribución de esfuerzo en la porción de la sección sometida a compresión. La posición de la fuerza de compresión del concreto será:

$$\begin{aligned}
 c - d_c &= \frac{\int_0^{A(z=c)} \sigma \cdot z \cdot dA}{\int_0^{A(z=c)} \sigma \cdot dA} \rightarrow d_c = c - \frac{\int_0^c \sigma \cdot z \cdot (b \cdot dz)}{\int_0^c \sigma \cdot (b \cdot dz)} \\
 &\rightarrow d_c = c - \frac{b \cdot \int_0^c \sigma \cdot z \cdot dz}{b \cdot \int_0^c \sigma \cdot dz} \rightarrow d_c = c - \frac{\int_0^c \sigma \cdot z \cdot dz}{\int_0^c \sigma \cdot dz} \quad (3.131)
 \end{aligned}$$

A continuación, se realiza un cambio de variable bajo la condición de linealidad en deformaciones (compatibilidad de deformaciones), esto se realiza utilizando las relaciones escritas en la Ecuación (3.127):

$$\begin{aligned}
 d_c &= c - \frac{\left(\frac{c}{\varepsilon_c}\right)^2 \cdot \int_0^{\varepsilon(z=c)} \sigma \cdot \varepsilon \cdot d\varepsilon}{\frac{c}{\varepsilon_c} \cdot \int_0^{\varepsilon(z=c)} \sigma \cdot d\varepsilon} \rightarrow d_c = c - \frac{c}{\varepsilon_c} \cdot \frac{\int_0^{\varepsilon_c} \sigma \cdot \varepsilon \cdot d\varepsilon}{\int_0^{\varepsilon_c} \sigma \cdot d\varepsilon} \\
 d_c &= \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_c} \cdot \frac{\int_0^{\varepsilon_c} \sigma \cdot \varepsilon \cdot d\varepsilon}{\int_0^{\varepsilon_c} \sigma \cdot d\varepsilon}\right) \cdot c \quad (3.132)
 \end{aligned}$$

A continuación, se realiza un cambio de variable con las relaciones entre el SCN y SCF (ver Figura 18), con las relaciones escritas en la Ecuación (3.129):

$$\begin{aligned}
 d_c &= \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_c} \cdot \frac{f'_c \cdot \varepsilon_c'^2 \cdot \int_{x(\varepsilon=0)}^{x(\varepsilon=\varepsilon_c)} y \cdot x \cdot dx}{f'_c \cdot \varepsilon_c' \cdot \int_{x(\varepsilon=0)}^{x(\varepsilon=\varepsilon_c)} y \cdot dx}\right) \cdot c \rightarrow d_c = \left(1 - \frac{1}{x_c} \cdot \frac{\int_0^{x_c} y \cdot x \cdot dx}{\int_0^{x_c} y \cdot dx}\right) \cdot c \\
 \text{Sea: } j_c &= \int_0^{x_c} y \cdot x \cdot dx \rightarrow d_c = \left(1 - \frac{1}{x_c} \cdot \frac{j_c}{u_c}\right) \cdot c \\
 \text{Sea: } k_2 &= 1 - \frac{j_c}{u_c \cdot x_c} \rightarrow d_c = k_2 \cdot c \quad (3.133)
 \end{aligned}$$

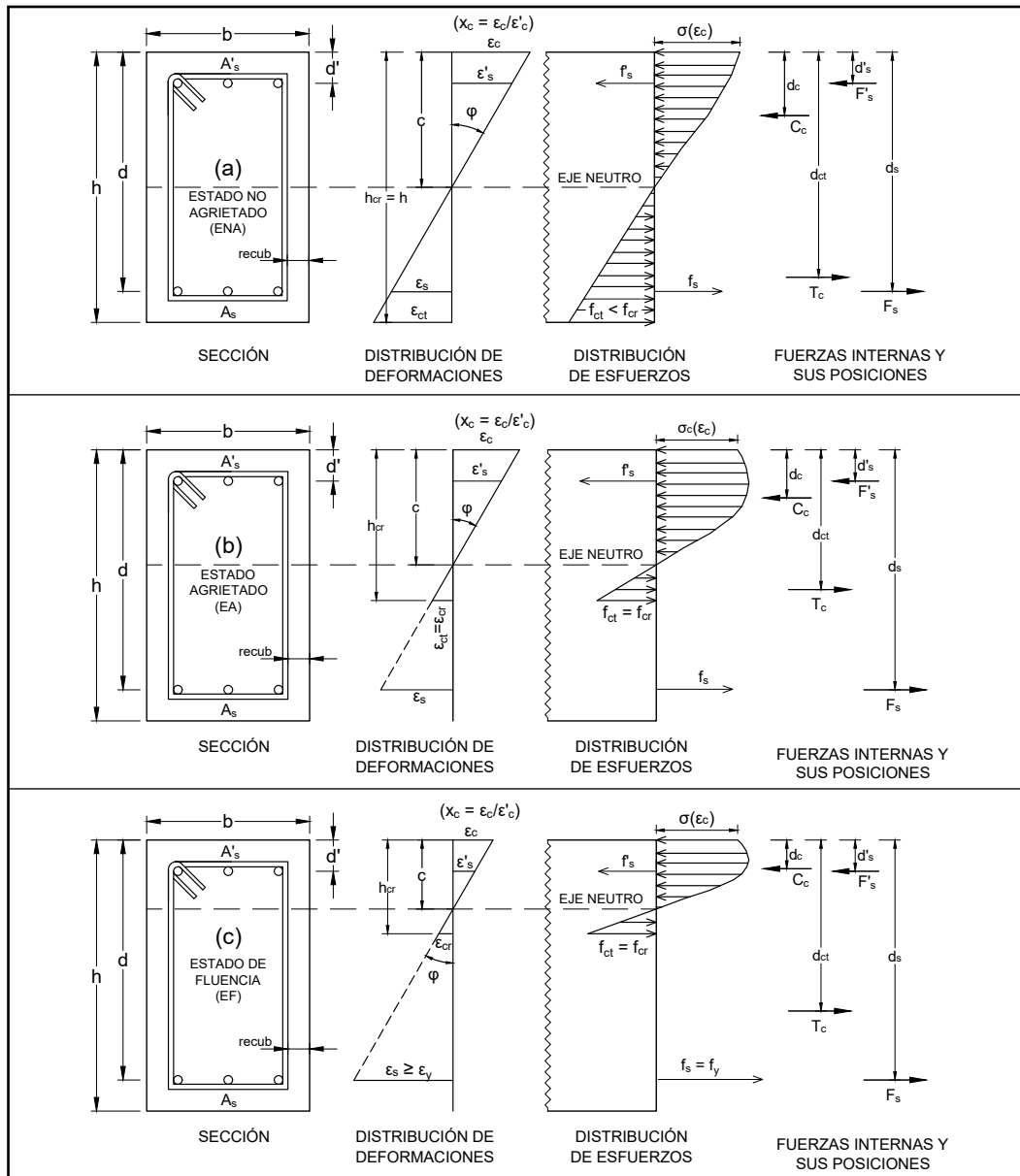
Se definió el momento de área de la curva de concreto hasta la deformación normalizada asociada a la fibra extrema de compresión del concreto (x_c) en SCN como j_c . Además, se definió k_2 , que represente la relación entre la posición de la fuerza de compresión del concreto (d_c) obtenida por integración directa y la profundidad del eje neutro medida desde la fibra extrema en compresión (c).

3.3.1.1.3 Profundidad del eje neutro.

El cálculo directo de la profundidad del eje neutro se realiza a partir del equilibrio de fuerzas considerando la participación del acero superior y del concreto a tracción, y se da para tres etapas de respuesta del concreto armado a flexión: (a) Estado No Agrietado ($x_c \leq x_c^{cr}$). (b) Estado Agrietado ($x_c^{cr} < x_c \leq x_c^y$). (c) Estado de Fluencia ($x_c^y < x_c$). Ver la Figura 27.

Figura 27

Etapas de Respuesta del Concreto Armado a Flexión.



Nota: (a) Estado No Agrietado (ENA). (b) Estado Agrietado (EA). (c) Estado de Fluencia (EF). Fuente: Elaboración Propia.

a) Comportamiento de los Materiales

El comportamiento constitutivo del concreto y acero a considerar para el cálculo directo se describe en la Tabla 4. Cabe resaltar que el acero superior, que inicialmente está en compresión, pasa a estar en tracción a medida que se incrementa la flexión. Se asume que su esfuerzo no alcanzará un nivel suficientemente alto como para inducir la fluencia, por lo que se considerará en estado elástico.

Tabla 4

Cálculo Directo: Comportamiento constitutivo del concreto y acero.

Componente interno	Comportamiento constitutivo
Concreto a Tracción	
Elástico-Frágil	$\sigma_c = \begin{cases} E_c \cdot \varepsilon_{ct}, & 0 \leq \varepsilon_{ct} \leq \varepsilon_{cr} \\ 0, & \varepsilon_{ct} > \varepsilon_{cr} \end{cases}$
Concreto a Compresión	
Parabólico	$\sigma_c = \begin{cases} -\sum_{i=0}^4 A_i \cdot \varepsilon_c ^i, & 0 \leq \varepsilon_c \leq \varepsilon'_c \\ -\sum_{i=0}^4 D_i \cdot \varepsilon_c ^i, & \varepsilon'_c \leq \varepsilon_c \leq \varepsilon_{50D} \end{cases}$
Acero a Tracción	
Elastoplástico	$\sigma_s = \begin{cases} E_s \cdot \varepsilon_s, & 0 \leq \varepsilon_s \leq \varepsilon_y \\ f_y, & \varepsilon_s > \varepsilon_y \end{cases}$
Acero a Compresión	
Elástico	$\sigma_s = E_s \cdot \varepsilon'_s, 0 \leq \varepsilon'_s \leq \varepsilon_y$

Nota: Elaboración Propia.

b) Compatibilidad de Deformaciones

La suposición de compatibilidad de deformaciones a flexión se puede representar con la siguiente relación presentada en la Ecuación (3.134).

$$\varphi = \frac{|\varepsilon_c|}{c} = \frac{|\varepsilon'_s|}{c - d'} = \frac{\varepsilon_s}{d - c} = \frac{\varepsilon_{ct}}{h_{cr} - c} \quad (3.134)$$

c) Magnitud de las Fuerzas

Las magnitudes de las fuerzas del concreto y acero a considerar para el cálculo directo se describe en la Tabla 5. Las ecuaciones fueron ordenadas para que las fuerzas estén en función de la profundidad del eje neutro “c”, deformación unitaria del concreto en la fibra extrema en compresión normalizada “ χ_c ”, y parámetros de ingreso de la sección como la geometría, acero de refuerzo, resistencia del concreto y resistencia del acero.

Tabla 5

Cálculo Directo: Magnitud de las fuerzas internas del concreto y acero.

Componente interno	Magnitud de la fuerza interna
	$T_c = \frac{1}{2} \cdot f_{ct} \cdot b \cdot (h_{cr} - c)$
Concreto a Tracción (Zona Inferior)	$* \text{ Donde: } h_{cr} = \begin{cases} h, & x_c \leq x_c^{cr} \\ \left(1 + \frac{\varepsilon_{cr}}{ \varepsilon_c }\right) \cdot c, & x_c > x_c^{cr} \end{cases}$ $\rightarrow T_c = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot E_c \cdot \varepsilon'_c \cdot x_c \cdot \frac{b \cdot (h - c)^2}{c}, & x_c \leq x_c^{cr} \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{E_c}{f'_c / \varepsilon'_c} \cdot \left(\frac{\varepsilon_{cr}}{\varepsilon'_c}\right)^2 \cdot \frac{1}{x_c} \cdot f'_c \cdot b \cdot c, & x_c > x_c^{cr} \end{cases}$
Concreto a Compresión (Zona Superior)	$\rightarrow C_c = -k_1 \cdot f'_c \cdot b \cdot c, \forall x_c$
	$F_s = A_s \cdot f_s$
Acero Inferior	$\rightarrow F_s = \begin{cases} A_s \cdot E_s \cdot x_c \cdot \varepsilon'_c \cdot \left(\frac{d - c}{c}\right), & x_c \leq x_c^y \\ A_s \cdot f_y, & x_c > x_c^y \end{cases}$
	$F'_s = A'_s \cdot f'_s$
Acero Superior	$\rightarrow F'_s = -A'_s \cdot E_s \cdot x_c \cdot \varepsilon'_c \cdot \left(\frac{c - d'}{c}\right), \forall x_c$

Nota: * h_{cr} : Posición de la fibra extrema del concreto en tracción no fisurado respecto de la fibra extrema en compresión. Fuente: Elaboración Propia.

d) Posición de las Fuerzas

Las posiciones de las fuerzas del concreto y acero respecto a la fibra extrema en compresión considerados para el cálculo directo se describe en la Tabla 6.

Tabla 6

Cálculo Directo: Posición de las fuerzas internas del concreto y acero.

Componente interno	Posición de la fuerza
Concreto a Tracción (Zona Inferior)	$d_{ct} = c + \frac{2}{3} \cdot (h_{cr} - c) \rightarrow d_{ct} = \frac{c + 2 \cdot h_{cr}}{3}, \forall x_c$
Concreto a Compresión (Zona Superior)	$d_c = k_2 \cdot c, \forall x_c$
Acero Inferior	$d_s = d, \forall x_c$
Acero Superior	$d'_s = d', \forall x_c$

Nota: Elaboración Propia.

e) Solución: Equilibrio de fuerzas internas

A partir de las ecuaciones presentadas en la Tabla 5, se realiza el equilibrio de fuerzas internas como se observa en la Ecuación (3.135).

$$C_c + F'_s + F_s + T_c = 0 \quad (3.135)$$

A partir de esta ecuación, se obtienen las ecuaciones reordenadas en función de la profundidad del eje neutro "c", deformación unitaria del concreto en la fibra extrema en compresión normalizada "x_c" y el parámetro "k₁". Reemplazando, se describe de la forma presentada en la Ecuación (3.136).

$$c^2 - S_r \cdot c + P_r = 0 \quad (3.136)$$

Donde: S_r: Suma de raíces de "c". P_r: Producto de raíces de "c".

Donde las componentes dependen de la etapa de respuesta del concreto armado frente a la flexión (ver Figura 27), y sus valores se describen en la Tabla 7.

Tabla 7

Cálculo directo: Componentes de la solución.

Etapa	Componente S _r	Componente P _r
ENA <i>x_c ≤ x_c^{cr}</i>	$\left(\frac{A'_s + A_s}{b} \right) \cdot \frac{E_s}{f'_c/\epsilon'_c} + h \cdot \frac{E_c}{f'_c/\epsilon'_c}$ $- \frac{k_1}{x_c} + \frac{1}{2} \cdot \frac{E_c}{f'_c/\epsilon'_c}$	$\left(\frac{A'_s \cdot d' + A_s \cdot d}{b} \right) \cdot \frac{E_s}{f'_c/\epsilon'_c} + \frac{h^2}{2} \cdot \frac{E_c}{f'_c/\epsilon'_c}$ $- \frac{k_1}{x_c} + \frac{1}{2} \cdot \frac{E_c}{f'_c/\epsilon'_c}$
EA <i>x_c ≤ x_c^y</i>	$\left(\frac{A'_s + A_s}{b} \right) \cdot \frac{E_s}{f'_c/\epsilon'_c}$ $- \frac{k_1}{x_c} + \frac{1}{2} \cdot \frac{E_c}{f'_c/\epsilon'_c} \cdot \left(\frac{\epsilon_{cr}}{\epsilon'_c} \right)^2 \cdot \frac{1}{x_c^2}$	$\left(\frac{A'_s \cdot d' + A_s \cdot d}{b} \right) \cdot \frac{E_s}{f'_c/\epsilon'_c}$ $- \frac{k_1}{x_c} + \frac{1}{2} \cdot \frac{E_c}{f'_c/\epsilon'_c} \cdot \left(\frac{\epsilon_{cr}}{\epsilon'_c} \right)^2 \cdot \frac{1}{x_c^2}$
EF <i>x_c > x_c^y</i>	$\frac{A'_s}{b} \cdot \frac{E_s}{f'_c/\epsilon'_c} - \frac{A_s}{b} \cdot \frac{f_y}{f'_c} \cdot \frac{1}{x_c}$ $- \frac{k_1}{x_c} + \frac{1}{2} \cdot \frac{E_c}{f'_c/\epsilon'_c} \cdot \left(\frac{\epsilon_{cr}}{\epsilon'_c} \right)^2 \cdot \frac{1}{x_c^2}$	$\frac{A'_s \cdot d'}{b} \cdot \frac{E_s}{f'_c/\epsilon'_c}$ $- \frac{k_1}{x_c} + \frac{1}{2} \cdot \frac{E_c}{f'_c/\epsilon'_c} \cdot \left(\frac{\epsilon_{cr}}{\epsilon'_c} \right)^2 \cdot \frac{1}{x_c^2}$

Nota: Elaboración Propia.

De esta manera, la solución de la ecuación se representa en la Ecuación (3.137).

$$c = \frac{S_r}{2} - \text{signo}(P_r) \cdot \sqrt{\left(\frac{S_r}{2} \right)^2 - P_r} \quad (3.137)$$

Como se puede observar, la solución del cálculo directo depende de conocer a las deformaciones normalizadas asociadas al agrietamiento (x_c^{cr}) y a la fluencia (x_c^y), cuyo valor marca el límite de las etapas. La solución de estos puntos se hace mediante cálculos iterativos, su esquema de cálculo se presenta en la Figura 4 del Anexo 1.

Las ecuaciones presentadas en la Tabla 7 pueden ser utilizadas también para resolver la Ecuación (3.137) al considerar que no existe concreto en tracción o que no se considere acero en compresión cumpliendo las condiciones descritas en la Tabla 8.

Tabla 8

Cálculo directo: Condiciones especiales.

Descripción	Condición matemática
No considerar la tracción del concreto.	$E_c = 0$
No considerar el acero superior.	$A'_s = 0$

Nota: Elaboración Propia.

El cálculo del momento resistente a flexión de la sección (M_n) se calcula a partir de la Ecuación (3.138), cuyos valores se obtienen de la Tabla 5 y la Tabla 6.

$$M_n = d_c \cdot C_c + d'_s \cdot F'_s + d_s \cdot F_s + d_{ct} \cdot T_c \quad (3.138)$$

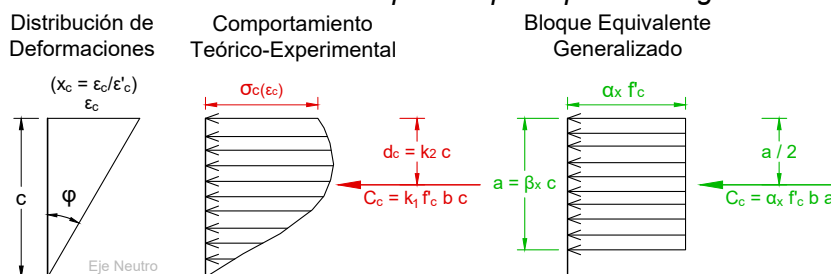
Finalmente, se presenta el esquema de cálculo directo para la construcción del DMC en la Figura 6 del Anexo 1.

3.3.2 Cálculo por bloque equivalente generalizado

El cálculo por bloque equivalente generalizado se basa en la idea de simplificar el cálculo de las componentes del concreto a compresión (ver Figura 28): La fuerza (C_c) y su posición ($a/2$), transformando la distribución de esfuerzos no lineal en un bloque de esfuerzos rectangular cuya área y centroide sean equivalentes al formado en la distribución no lineal, de tal manera que solo depende del nivel de deformación unitaria del concreto en la fibra extrema a compresión (x_c).

Figura 28

Componentes del concreto en el cálculo por bloque equivalente generalizado.



Nota: Elaboración Propia.

3.3.2.1 Altura del bloque de esfuerzo equivalente generalizado.

Para obtener el parámetro " β_x " asociado a la altura del bloque de esfuerzo equivalente generalizado, se utilizará una equivalencia geométrica entre el centroide del

bloque y la posición de la fuerza de compresión del concreto obtenido del método directo, tal como se observa en la Figura 28. De esta manera se tendrá:

$$d_c = \frac{a}{2} \rightarrow k_2 \cdot c = \frac{\beta_x \cdot c}{2} \rightarrow \beta_x = 2 \cdot k_2$$

$$\rightarrow \beta_x = 2 - \frac{2 \cdot j_c}{u_c \cdot x_c} \quad (3.139)$$

3.3.2.2 Esfuerzo del bloque equivalente generalizado.

Para obtener el parámetro " α_x " asociado al esfuerzo del bloque equivalente generalizado, se utilizará una equivalencia de la fuerza de compresión del concreto obtenida del bloque equivalente generalizado con la obtenida con el método de directo, tal como se observa en la Figura 28. De esta manera se tendrá:

$$k_1 \cdot f'_c \cdot b \cdot c = \alpha_x \cdot f'_c \cdot b \cdot a \rightarrow k_1 \cdot c = \alpha_x \cdot a \rightarrow k_1 \cdot c = \alpha_x \cdot \beta_x \cdot c$$

$$\rightarrow \alpha_x \cdot \beta_x = k_1 \rightarrow \alpha_x \cdot \left(2 - \frac{2 \cdot j_c}{u_c \cdot x_c}\right) = \frac{u_c}{x_c}$$

$$\rightarrow \alpha_x = \frac{u_c^2}{2 \cdot (u_c \cdot x_c - j_c)} \quad (3.140)$$

Para este cálculo se proponen los parámetros " α_x " y " β_x ", que están en función de la deformación normalizada asociada a la fibra extrema de compresión del concreto (x_c), y del área y momento de área de la curva del concreto en SCN desde cero hasta " x_c ", definidas como " u_c " y " j_c " respectivamente.

Finalmente, se presenta el esquema de cálculo por bloque equivalente generalizado para la construcción del DMC en la Figura 7 del Anexo 1.

Capítulo IV. Estudio experimental

En este capítulo se describe el ensayo experimental realizado y la metodología utilizada. El estudio experimental fue realizado en el Laboratorio de Estructuras del CISMID, incluyendo 48 especímenes de distintas resistencias entre 180kgf/cm² y 360kgf/cm², sometidas a carga monotónica.

4.1 Ensayo de compresión bajo carga monotónica uniaxial

Los ensayos de compresión del concreto estudian su comportamiento esfuerzo-deformación, usando probetas cilíndricas de 15cm de diámetro y 30cm de altura. Este proceso cuantifica la respuesta del material ante incrementos de deformación de compresión, permitiendo evaluar parámetros esenciales del comportamiento del material: Resistencia, ductilidad, rigidez y energía de deformación.

4.1.1 Descripción del ensayo

El ensayo consiste en aplicar de manera monótona incrementos de deformación de compresión a una probeta de concreto. Se controla la velocidad de incremento de carga dentro de un rango de 35 ± 5 psi/seg, conforme a lo requerido por la norma ASTM C469-94 (1994). Para monitorear las variaciones de deformación, se colocan sensores de desplazamiento en el núcleo central de la probeta. Además, se emplea una celda de carga para registrar la carga aplicada.

Figura 29

Especímen sujeto a compresión.



Nota: Elaboración Propia en el laboratorio del CISMID.

4.1.2 Descripción de los especímenes

Los especímenes ensayados fueron 48 muestras elaboradas de distintas resistencias en el rango de 15 MPa a 42 MPa, elaboradas in situ sobre moldes cilíndricos de diámetro de 15 cm y altura de 30 cm.

Tabla 9

Especímenes ensayados.

Nro.	ID	Diámetro D (cm)	Resistencia f'_c (kgf/cm ²)
1	C210M	14.948	250.4
2	C220M	15.066	249.3
3	C230M	15.015	282.9
4	CCA-1	15.087	221.7
5	CCA-2	15.093	252.3
6	CCA-3	15.110	205.7
7	CCC-1	15.079	247.2
8	CCC-2	15.097	190.4
9	CCC-3	15.024	206.9
10	M1-P1	14.990	315.9
11	M1-P2	15.021	321.9
12	M1-P3	15.027	327.3
13	M2-P1	15.015	293.6
14	M2-P2	14.986	292.5
15	M2-P3	14.986	281.1
16	MCA-1	15.082	289.4
17	MCA-2	15.040	259.4
18	MCA-3	15.024	302.6
19	MCC-1	15.057	261.9
20	MCC-2	15.054	282.8
21	MCC-3	15.052	253.4
22	MCC-4	15.084	247.0
23	MCC-5	15.041	240.5
24	P01-A	14.989	205.0
25	P02-A	15.047	189.4
26	P03-A	15.026	201.5
27	P01-B	15.009	284.3
28	P02-B	15.042	292.0

Nro.	ID	Diámetro D (cm)	Resistencia f'_c (kgf/cm ²)
29	P01-C	14.967	285.3
30	P02-C	15.001	263.6
31	P01-D	15.009	237.9
32	P02-D	14.997	224.1
33	P01-E	14.993	183.7
34	P02-E	15.057	184.4
35	P03-E	15.010	191.2
36	P01-F	14.995	217.4
37	P02-F	15.035	230.3
38	P03-F	15.005	225.0
39	P01-G	15.025	210.3
40	P02-G	14.981	208.4
41	P03-G	15.037	207.4
42	P01-H	15.036	211.9
43	P02-H	15.043	227.2
44	P03-H	14.989	180.1
45	V1-P1	15.480	310.8
46	V2-P1	15.054	340.5
47	V2-P2	15.048	348.9
48	V2-P3	15.020	355.3

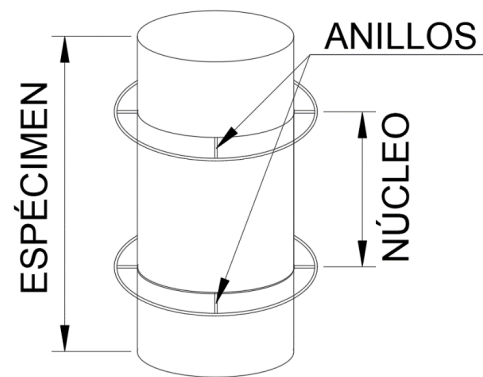
Nota: Elaboración Propia.

4.1.3 Sistema de carga y medición

Para la medición de carga y desplazamiento, se utilizaron sensores específicos, detallados en la Figura 31. Los sensores de desplazamiento, denominados LVDT (linear variable differential transformer), están posicionados para medir las variaciones de deformación en el núcleo central de la probeta de concreto. Esto se logra mediante anillos separados a una distancia igual 15 cm (ver Figura 30), que corresponde a la mitad de la altura del espécimen, conforme con lo estipulado por la norma ASTM C469-94 (1994). Esta norma requiere que la separación no sea menor a tres veces el tamaño máximo nominal del agregado del concreto, ni mayor a dos tercios de la altura del espécimen. Por otro lado, la celda de carga fue empleada para registrar la carga aplicada. Es importante mencionar que los dispositivos de medición registraron los datos del ensayo experimental a una frecuencia de adquisición de 1 Hz.

Figura 30

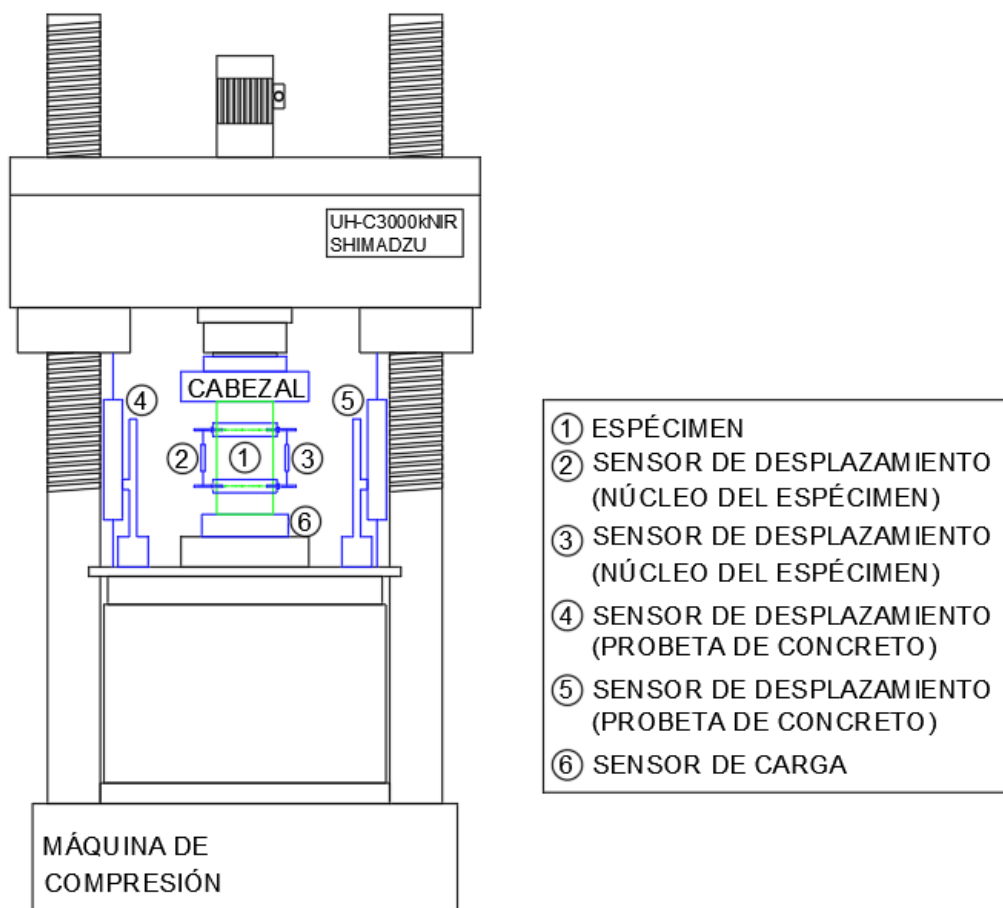
Probeta de concreto.



Nota: Elaboración Propia.

Figura 31

Sistema de adquisición de datos.



Nota: Elaboración Propia.

Capítulo V. Validación experimental del modelo

Con base a los datos obtenidos en el estudio experimental, en este capítulo ilustra el procedimiento empleado para ajustar los resultados experimentales al modelo propuesto del tipo polinómico de cuarto grado, disociado en dos sectores, que representa el comportamiento del concreto no confinado sometido a compresión uniaxial. Su esquema se presenta en la Figura 3 del Anexo 1.

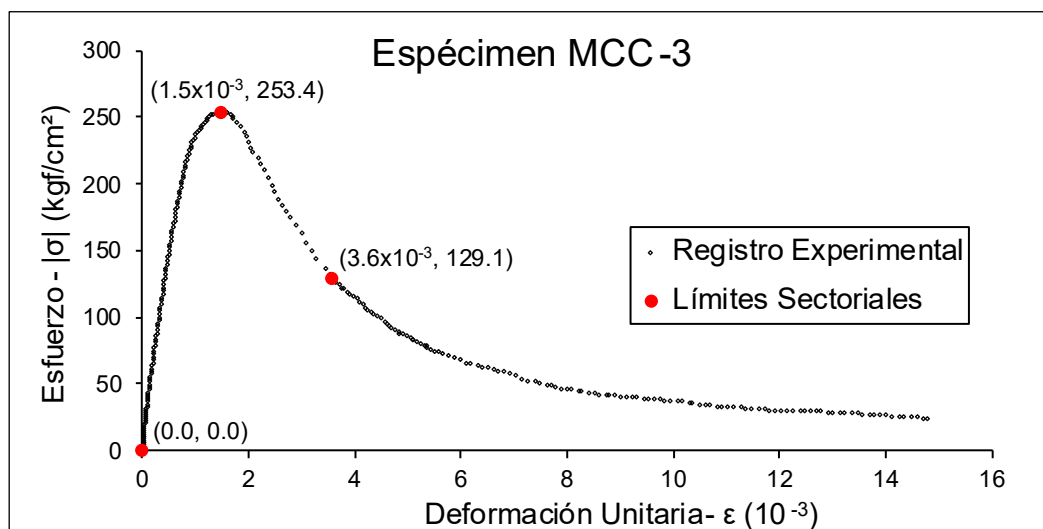
Asimismo, en este capítulo se presentan formulaciones empíricas de los parámetros físicos normalizados necesarios para definir al modelo ($r, u_A, x_{50D}, z_{50D}, u_{50D}$) en función de la resistencia del espécimen (f'_c), generadas a partir de la base de los resultados experimentales estudiados para concretos de resistencias entre 180kgf/cm² y 360kgf/cm². Adicionalmente, se presenta una formulación empírica de la deformación unitaria pico (ϵ'_c) en función de la resistencia del espécimen (f'_c). Los resultados de los registros experimentales de los especímenes se presentan en el ANEXO 3.

5.1 Procedimiento de ajuste experimental

Para mostrar el procedimiento de ajuste experimental, se utilizará como ejemplo los resultados del espécimen MCC-3 (ver Figura 32).

Figura 32

Registro Experimental del espécimen MCC-3.



Nota: Elaboración Propia.

A partir de los datos experimentales, se extraen los siguientes puntos:

$$\text{Resistencia máxima a compresión: } f'_c = 253.4 \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2}$$

$$\text{Deformación unitaria en el pico: } \varepsilon'_c = 0.001489$$

$$\text{Esfuerzo postpico asociado al 50\% de su resistencia: } f_{50D} = 129.1 \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2}$$

$$\text{Deformación unitaria postpico asociada al 50\% de su resistencia: } \varepsilon_{50D} = 0.003577$$

Paso 1: Normalizar y Sectorizar

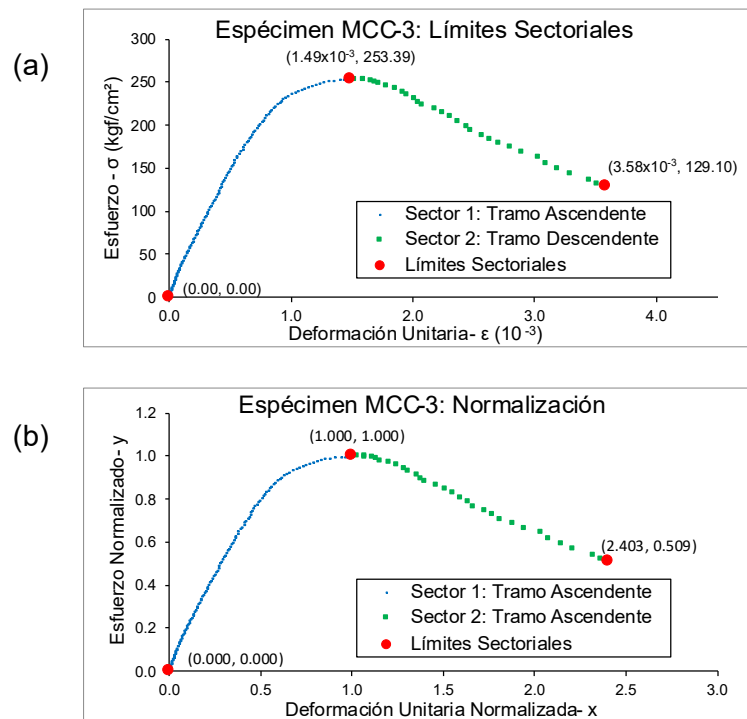
$$\text{Deformaciones normalizadas, Ecuación (3.85): } x_i = \frac{|\varepsilon_i|}{0.001489}$$

$$\text{Esfuerzos normalizados, Ecuación (3.85): } y_i = \frac{|\sigma_i|}{253.4 \text{ (kgf/cm}^2\text{)}}$$

La representación gráfica de estos valores se muestra en la Figura 33.

Figura 33

Registro experimental sectorizado y normalizado.



Nota: (a) Registro en SCF. (b) Registro en SCFN. Fuente: Elaboración Propia.

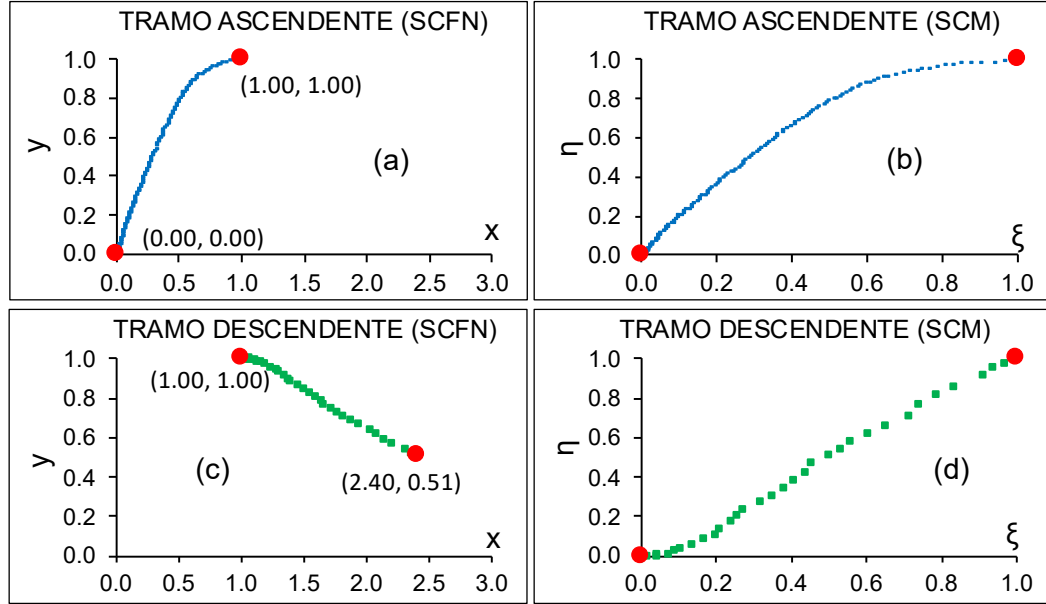
Una vez normalizado, se sectoriza para separar la información en dos tramos: El tramo ascendente y el tramo descendente, tal como se observa en la Figura 33 (b).

Paso 2: Mapeo

La representación gráfica del proceso de mapeo se observa en la Figura 34.

Figura 34

Mapeo de coordenadas para el espécimen MCC-3.



Nota: (a) Tramo Ascendente (SCFN). (b) Tramo Ascendente (SCM). (c) Tramo Descendente (SCFN). (d) Tramo Descendente (SCM). *(Fuente: Elaboración Propia)*

Deformaciones mapeadas del Tramo Ascendente,
Ecuación (3.94):

$$\xi_i = x_i$$

Esfuerzos mapeados del Tramo Ascendente, Ecuación
(3.94):

$$\eta_i = y_i$$

Deformaciones mapeadas del Tramo Descendente,
Ecuación (3.107):

$$\xi_i = \frac{x_i - 1}{1.403}$$

Esfuerzos mapeados del Tramo Descendente,
Ecuación (3.107):

$$\eta_i = \frac{1 - y_i}{0.491}$$

Paso 3.1: Regresión Lineal Múltiple – Tramo Ascendente

A continuación, se realiza el procedimiento de regresión lineal múltiple para el tramo ascendente presentado en el capítulo 3.2.

Parámetro “P”, Ecuación (3.102): $P(\xi_i, \eta_i) = \eta_i + 12 \cdot \xi_i^2 - 28 \cdot \xi_i^3 + 15 \cdot \xi_i^4$

Parámetro “Q”, Ecuación (3.102): $Q(\xi_i) = \xi_i - 4.5 \cdot \xi_i^2 + 6 \cdot \xi_i^3 - 2.5 \cdot \xi_i^4$

Parámetro “R”, Ecuación (3.102): $R(\xi_i) = 30 \cdot \xi_i^2 - 60 \cdot \xi_i^3 + 30 \cdot \xi_i^4$

Evaluando los parámetros anteriores en cada punto registrado, se construirán los siguientes términos sumatorios:

Número de datos registrados: $n = 144$

Sumatoria de “PQ”: $\sum_{i=1}^{144} P(\xi_i, \eta_i) \cdot Q(\xi_i) = 0.497572$

Sumatoria de “PR”: $\sum_{i=1}^{144} P(\xi_i, \eta_i) \cdot R(\xi_i) = 109.125913$

Sumatoria de “Q²”: $\sum_{i=1}^{144} Q^2(\xi_i) = 0.227228$

Sumatoria de “R²”: $\sum_{i=1}^{144} R^2(\xi_i) = 157.604985$

Sumatoria de “QR”: $\sum_{i=1}^{144} Q(\xi_i) \cdot R(\xi_i) = 0.033206$

Parámetros físicos normalizados del tramo ascendente, Ecuación (3.104):

$$\begin{pmatrix} r_0 \\ u_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.227228 & 0.033206 \\ 0.033206 & 157.604985 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0.497572 \\ 109.125913 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} r_0 \\ u_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.089 \\ 0.692 \end{pmatrix}$$

Paso 4.1: Cálculo de los Coeficientes – Tramo Ascendente

A continuación se realiza la construcción del modelo polinómico de cuarto grado para el tramo ascendente a partir de los parámetros físicos normalizados (r_0, u_A) calculados en el paso anterior.

Coeficientes del modelo para el tramo ascendente, Ecuación (3.100):

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -12 & -4.5 & 30 \\ 28 & 6 & -60 \\ -15 & -2.5 & 30 \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ 2.089 \\ 0.692 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2.089 \\ -0.641 \\ -0.986 \\ 0.537 \end{pmatrix}$$

Paso 3.2: Regresión Lineal Múltiple – Tramo Descendente

A continuación, se realiza el procedimiento de regresión lineal múltiple para el tramo descendente presentado en el capítulo 3.2.

$$\text{Parámetro "P", Ecuación (3.122): } P(\xi_i, \eta_i) = \eta_i + 12 \cdot \xi_i^2 - 28 \cdot \xi_i^3 + 15 \cdot \xi_i^4$$

$$\text{Parámetro "R", Ecuación (3.122): } R(\xi_i) = 30 \cdot \xi_i^2 - 60 \cdot \xi_i^3 + 30 \cdot \xi_i^4$$

$$\text{Parámetro "S", Ecuación (3.122): } S(\xi_i) = 1.5 \cdot \xi_i^2 - 4 \cdot \xi_i^3 + 2.5 \cdot \xi_i^4$$

Evaluando los parámetros anteriores en cada punto registrado, se construirán los siguientes términos sumatorios:

$$\text{Número de datos registrados: } n = 32$$

$$\text{Sumatoria de "PS": } \sum_{i=1}^{32} P(\xi_i, \eta_i) \cdot S(\xi_i) = 0.309486$$

$$\text{Sumatoria de "PR": } \sum_{i=1}^{32} P(\xi_i, \eta_i) \cdot R(\xi_i) = 20.489237$$

$$\text{Sumatoria de "S²": } \sum_{i=1}^{32} S^2(\xi_i) = 0.041088$$

$$\text{Sumatoria de "R²": } \sum_{i=1}^{32} R^2(\xi_i) = 41.454135$$

$$\text{Sumatoria de "SR": } \sum_{i=1}^{32} S(\xi_i) \cdot R(\xi_i) = 0.552669$$

Parámetros físicos normalizados en coordenadas mapeadas del tramo descendente, Ecuación (3.124):

$$\begin{pmatrix} z_{50D}^m \\ u_{50D}^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.041088 & 0.552669 \\ 0.552669 & 41.454135 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0.309486 \\ 20.489237 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} z_{50D}^m \\ u_{50D}^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.077 \\ 0.480 \end{pmatrix}$$

Deformación postpico normalizado asociado al 50% de su resistencia:

$$x_{50D} = 2.402956$$

(Tabla 1 – Anexo 3)

Esfuerzo postpico normalizado
asociada al 50% de su resistencia:

$$y_{50D} = 0.509470$$

(Tabla 1 - Anexo)

Parámetros físicos normalizados del tramo descendente, Ecuación (3.125):

$$\begin{pmatrix} z_{50D} \\ u_{50D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.349640 & 0 \\ 0 & -0.688192 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1.077166 \\ 0.479902 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1.402956 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} z_{50D} \\ u_{50D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.377 \\ 1.073 \end{pmatrix}$$

Paso 4.2: Cálculo de los Coeficientes – Tramo Descendente

A continuación se realiza la construcción del modelo polinómico de cuarto grado para el tramo descendente a partir de los parámetros físicos normalizados (z_{50D}, u_{50D}) calculados en el paso anterior y los parámetros (x_{50D}, y_{50D}) .

Coeficientes del modelo para el tramo descendente, Ecuación (3.120):

$$\begin{pmatrix} D_0 \\ D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -4 \\ 1 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.508 & 0 & 0 \\ 0 & 0.362 & 0 \\ 0 & 0 & 0.258 \end{pmatrix} \cdot \dots$$

$$\dots \cdot \begin{pmatrix} -12 & 1.5 & 30 \\ 28 & -4 & -60 \\ -15 & 2.5 & 30 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -0.491 & 0 & 0 \\ 0 & 1.403 & 0 \\ -1 & 0 & 0.713 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -0.377 \\ 1.073 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} D_0 \\ D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.163 \\ 5.755 \\ -5.284 \\ 1.955 \\ -0.263 \end{pmatrix}$$

Paso 5: Construcción del Modelo

A continuación se construye el modelo polinómico de cuarto grado disociado en dos tramos.

Ecuación polinómica para el tramo ascendente, Ecuación (3.100):

$$y = 2.089 \cdot x - 0.643 \cdot x^2 - 0.983 \cdot x^3 + 0.536 \cdot x^4, \quad \forall x \in [0,1]$$

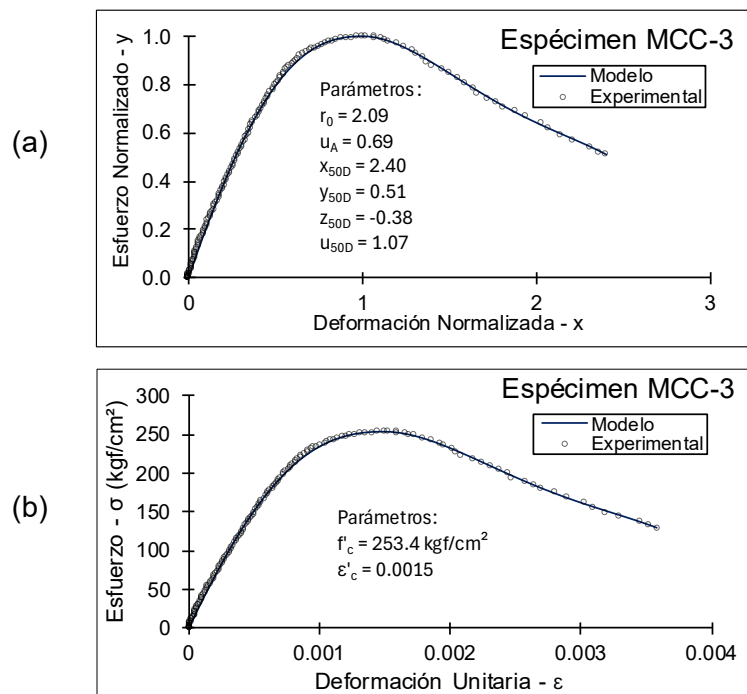
Ecuación polinómica para el tramo descendente, Ecuación (3.120):

$$y = -1.163 + 5.755 \cdot x - 5.284 \cdot x^2 + 1.955 \cdot x^3 - 0.263 \cdot x^4, \quad \forall x \in]1,2.403]$$

A continuación, se procede a comparar los datos experimentales con el gráfico formado a partir del modelo. La comparación se muestra en la Figura 35.

Figura 35

Modelo vs datos experimentales para espécimen MCC-3.



Nota: (a) SCFN. (b) SCF. Fuente: Elaboración Propia.

Finalmente, se presenta el coeficiente de determinación para cada tramo:

Coeficiente de determinación para el tramo ascendente: $R_A^2 = 0.999041$

Coeficiente de determinación para el tramo descendente: $R_D^2 = 0.999072$

El procedimiento de ajuste aplicado al espécimen MCC-3 permitió comprobar la capacidad del modelo polinómico propuesto y disociado en dos tramos, para reproducir con precisión el comportamiento del concreto no confinado bajo compresión uniaxial. La sectorización inicial de los datos experimentales permitió establecer el rango de validez del modelo, mientras que la normalización respecto al punto de resistencia máxima garantizó un escalamiento adecuado de los ejes horizontal y vertical. A su vez, el mapeo de los puntos experimentales hacia las variables normalizadas posibilitó la aplicación de la regresión lineal múltiple en ambos sectores de la curva, garantizando la coherencia del modelo con las ecuaciones planteadas en esta investigación.

Los coeficientes obtenidos en cada tramo permitieron reconstruir de manera explícita el modelo analítico, evidenciando una concordancia sobresaliente con los

registros experimentales. En la Figura 35 se observa que la curva ajustada reproduce con gran fidelidad a los datos experimentales. La bondad del ajuste se confirmó mediante los coeficientes de determinación, con valores de $R_A^2 = 0.999041$ en el ascendente y $R_D^2 = 0.999072$ en el descendente, los cuales evidencian una muy alta correlación entre el modelo y los datos experimentales. Estos resultados validan la pertinencia del modelo propuesto para capturar el comportamiento no lineal del concreto no confinado en el rango de resistencias analizadas.

Asimismo, en los demás ensayos experimentales, representados en la Figura 8 hasta la Figura 55 del Anexo 3, se obtuvieron los parámetros físicos normalizados ($r, u_A, x_{50D}, z_{50D}, u_{50D}$) y la deformación unitaria pico (ε'_c), que sirvieron de base para formular ecuaciones empíricas en función de la resistencia característica del espécimen (f'_c). Dichas expresiones, construidas a partir de la base experimental completa, consolidan y amplían la aplicabilidad del modelo a concretos con resistencias comprendidas entre 180 y 360 kgf/cm².

Finalmente, los resultados demuestran que el modelo propuesto no solo se ajusta satisfactoriamente a los datos experimentales, sino que también constituye una herramienta práctica para predecir el comportamiento esfuerzo–deformación del concreto no confinado bajo compresión uniaxial, ofreciendo una alternativa robusta frente a otros modelos existentes.

5.2 Modelos experimentales de las propiedades físicas

Se proponen relaciones experimentales para las propiedades mecánicas del concreto en función de la resistencia del concreto (f'_c). (Ver Figura 56 del Anexo 4)

Tabla 10

Fórmulas Experimentales de las Propiedades Físicas.

Propiedad Mecánica	Fórmula Experimental*
Deformación Pico, ε'_c	$\varepsilon'_c = 4.4 \cdot 10^{-4} \cdot \sqrt[4]{f'_c}$
Módulo de Elasticidad Inicial Normalizada, r_0	$r_0 = 1.10 + \frac{16.00}{\sqrt{f'_c}}$
Densidad de Energía de Deformación Normalizada - Tramo Ascendente, u_A	$u_A = 0.55 + \frac{1.60}{\sqrt{f'_c}}$
Capacidad de Deformación Normalizado - Tramo Descendente Caída al 50% f'_c , x_{50D}	$x_{50D} = 1 + 11.70 \cdot e^{-0.0082 \cdot f'_c}$
	$\left(para 210 \frac{kgf}{cm^2} \leq f'_c \leq 315 \frac{kgf}{cm^2} \right)$
	$x_{50D} = 3.09, \quad \left(f'_c < 210 \frac{kgf}{cm^2} \right)$
	$x_{50D} = 1.88, \quad \left(f'_c > 315 \frac{kgf}{cm^2} \right)$
Módulo de Ablandamiento Normalizado - Tramo Descendente Caída al 50% f'_c , z_{50D}	$z_{50D} = -0.0080 \cdot e^{0.0153 \cdot f'_c}$
	$\left(para 210 \frac{kgf}{cm^2} \leq f'_c \leq 315 \frac{kgf}{cm^2} \right)$
	$z_{50D} = -0.20, \quad \left(f'_c < 210 \frac{kgf}{cm^2} \right)$
	$z_{50D} = -0.99, \quad \left(f'_c > 315 \frac{kgf}{cm^2} \right)$
Densidad de Energía de Deformación Normalizada - Tramo Descendente Caída al 50% f'_c , u_{50D}	$u_{50D} = 8.67 \cdot e^{-0.0079 \cdot f'_c}$
	$\left(para 210 \frac{kgf}{cm^2} \leq f'_c \leq 315 \frac{kgf}{cm^2} \right)$
	$u_{50D} = 1.65, \quad \left(f'_c < 210 \frac{kgf}{cm^2} \right)$
	$u_{50D} = 0.72, \quad \left(f'_c > 315 \frac{kgf}{cm^2} \right)$

Nota: * Unidades de f'_c : kgf/cm^2 . Fuente: Elaboración Propia.

Capítulo VI. Aplicación del modelo

En este capítulo se mostrará la aplicación del modelo de concreto, empleando los métodos de cálculo presentado en el capítulo 3.3: Cálculo directo y cálculo por bloque equivalente generalizado.

6.1 Cálculo directo del diagrama momento-curvatura

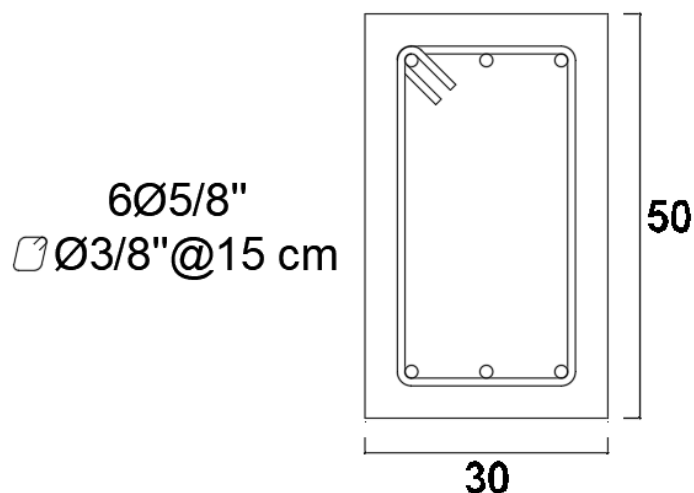
A continuación, se presenta un ejemplo práctico de la propuesta de cálculo directo del diagrama momento-curvatura (DMC) para una viga rectangular de concreto armado. La viga tiene una sección rectangular de dimensiones 30cm x 50cm reforzado longitudinalmente 6 barras de refuerzo de 5/8" de diámetro, distribuidas simétricamente entre la parte superior e inferior, como se presenta en la Figura 36. Las varillas están sujetas mediante estribos de 3/8" de diámetro y están recubiertas por una capa de concreto de 4cm de espesor.

El comportamiento de los materiales será el mismo descrito en la Tabla 4. Las propiedades del concreto en compresión se determinarán a partir de las fórmulas experimentales presentadas en la Tabla 10, considerando una resistencia a la compresión $f'_c = 210 \text{ kgf/cm}^2$. Para el concreto en tracción, se adoptará un módulo de elasticidad $E_c = 217,370 \text{ kgf/cm}^2$ y un esfuerzo de rotura $f_{cr} = 28.98 \text{ kgf/cm}^2$.

En cuanto al acero de refuerzo, tanto en tracción como en compresión, se asumirán propiedades simétricas, con un módulo de elasticidad $E_s = 2'000,000 \text{ kgf/cm}^2$ y un esfuerzo de fluencia $F_y = 4,200 \text{ kgf/cm}^2$.

Figura 36

Viga de concreto de sección geométrica de 30x50cm doblemente reforzada.



Nota: Elaboración Propia.

Cálculos Previos

1) Geometría

Ancho:	$b =$	30.00 cm
Peralte:	$h =$	50.00 cm
Recubrimiento:	$recub =$	4.00 cm
Peralte efectivo:	$d =$	44.25 cm
Distancia desde la fibra extrema a compresión al centroide del acero superior:	$d' =$	5.75 cm

2) Refuerzo Longitudinal Inferior

Número de varillas:	$n_{v,inf} =$	3
Diámetro de varilla:	$db_{inf} =$	1.59 cm
Área total de acero inferior:	$A_{s,inf} =$	5.94 cm ²

3) Refuerzo Longitudinal Superior

Número de varillas:	$n_{v,sup} =$	3
Diámetro de varilla:	$db_{sup} =$	1.59 cm
Área total de acero inferior:	$A_{s,sup} =$	5.94 cm ²

4) Refuerzo Transversal

Diámetro del estribo:	$d_{bh} =$	0.95 cm
-----------------------	------------	---------

5) Propiedades del Acero

Esfuerzo de fluencia:	$f_y =$	4200 kgf/cm ²
Módulo de elasticidad:	$E_s =$	2'000,000 kgf/cm ²
Deformación de fluencia:	$\varepsilon_y =$	0.0021

6) Propiedades del Concreto

Módulo de Elasticidad:	$E_c =$	217,371 kgf/cm ²
Esfuerzo de rotura a tracción:	$f_{cr} =$	29 kgf/cm ²

Deformación de rotura a tracción: (Tabla 4)	$\varepsilon_{cr} =$	0.000133
Resistencia a compresión:	$f'_c =$	210 kgf/cm ²
Deformación pico a compresión: (Tabla 10)	$\varepsilon'_c =$	0.001675
Parámetros físicos de tramo ascendente: (Tabla 10)	$\begin{Bmatrix} r_0 \\ u_A \end{Bmatrix} =$	$\begin{Bmatrix} 2.20 \\ 0.66 \end{Bmatrix}$
Capacidad de Deformación Normalizado: (Tabla 10)	$x_{50D} =$	3.09
Parámetros físicos de tramo descendente: (Tabla 10)	$\begin{Bmatrix} z_{50D} \\ u_{50D} \end{Bmatrix} =$	$\begin{Bmatrix} -0.20 \\ 1.65 \end{Bmatrix}$
Coeficientes del polinomio para el tramo ascendente: (Ecuación (3.100))	$\begin{Bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{Bmatrix} =$	$\begin{Bmatrix} 0.000 \\ 2.204 \\ -2.106 \\ 1.600 \\ -0.698 \end{Bmatrix}$
Coeficientes del polinomio para el tramo descendente: (Ecuación (3.120))	$\begin{Bmatrix} D_0 \\ D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \end{Bmatrix} =$	$\begin{Bmatrix} 0.757 \\ 0.506 \\ -0.275 \\ 0.005 \\ 0.007 \end{Bmatrix}$

Cálculos iterativos de deformaciones de agrietamiento y fluencia (Figura 4 del Anexo 1)

1) Punto de Agrietamiento ($\varepsilon_{ct} = \varepsilon_{cr}$)

Deformación extrema en compresión asociada al agrietamiento:	$\varepsilon_c^{cr} =$	-1.22E-04
---	------------------------	-----------

Deformación normalizada asociada al agrietamiento:	$x_c^{cr} =$	0.073
---	--------------	-------

2) Punto de Fluencia ($\varepsilon_s = \varepsilon_y$)

Deformación extrema en compresión asociada a la fluencia:	$\varepsilon_c^y =$	-6.48E-04
--	---------------------	-----------

Deformación normalizada asociada a la fluencia:	$x_c^y =$	0.387
--	-----------	-------

Punto del DMC antes del agrietamiento ($x_c < x_c^{cr} = 0.073$)

1) Ingreso de la deformación normalizada (Etapa ENA - Figura 27)

Deformación normalizada: $x_c = 0.050$

2) Cálculo Directo de la Profundidad del Eje Neutro

Deformación extrema en compresión: $\varepsilon_c = -8.37\text{E-}05$

Energía de deformación de la curva normalizada: (Ecuación (3.130)) $u_c = 0.0027$

Parámetro asociado a la fuerza del concreto: (Ecuación (3.130)) $k_1 = 0.053$

Primer momento de área de la curva normalizada: (Ecuación (3.133)) $j_c = 8.86\text{E-}05$

Parámetro asociado a la posición de la fuerza del concreto (Ecuación (3.133)): $k_2 = 0.336$

Suma de raíces solución "c" (Tabla 7): $S_r = -462.58$ cm

Producto de raíces solución "c": (Tabla 7) $P_r = -11564.53$ cm²

Profundidad del eje neutro: (Ecuación (3.137)) $c = 23.78$ cm

3) Distribución de Deformaciones

Curvatura: (Ecuación (3.134)) $\varphi = 3.52\text{E-}06$ 1/cm

Deformación del centroide de acero superior: (Ecuación (3.134)) $\varepsilon'_s = -6.35\text{E-}05$

Deformación del centroide de acero inferior: (Ecuación (3.134)) $\varepsilon_s = 7.21\text{E-}05$

Posición de la fibra extrema del concreto en tracción no fisurado: (Tabla 5) $h_{cr} = 50.00$ cm

Deformación de la fibra extrema en tracción no fisurado del concreto: (Ecuación (3.134)) $\varepsilon_{ct} = 9.24\text{E-}05$

4) Magnitud de las Fuerzas Internas (Tabla 5)

Fuerza de compresión del concreto: $C_c = -8.00$ tf

Fuerza del acero superior:	$F'_s =$	-0.75	tf
Fuerza del acero inferior:	$F_s =$	0.85	tf
Fuerza de tracción del concreto:	$T_c =$	7.90	tf

5) Posiciones de las Fuerzas Internas (Tabla 6)

Compresión del concreto:	$d_c =$	7.99	cm
Acero superior:	$d'_s =$	5.75	cm
Acero inferior:	$d_s =$	44.25	cm
Tracción del concreto:	$d_{ct} =$	41.26	cm

6) Momento nominal

Momento nominal: (Ecuación (3.138))	$M_n =$	2.95	tf-m
-------------------------------------	---------	------	------

Punto del DMC antes de la fluencia ($x_c < x_c^y = 0.387$)

1) Ingreso de la deformación normalizada (Etapa EA - Figura 27)

Deformación normalizada:	$x_c =$	0.300
--------------------------	---------	-------

2) Cálculo Directo de la Profundidad del Eje Neutro

Deformación extrema en compresión:	$\varepsilon_c =$	-5.02E-04	
Energía de deformación de la curva normalizada: (Ecuación (3.130))	$u_c =$	0.0831	
Parámetro asociado a la fuerza del concreto: (Ecuación (3.130))	$k_1 =$	0.277	
Primer momento de área de la curva normalizada: (Ecuación (3.133))	$j_c =$	0.0163	
Parámetro asociado a la posición de la fuerza del concreto: (Ecuación (3.133))	$k_2 =$	0.348	
Suma de raíces solución "c" (Tabla 7):	$S_r =$	-7.32	cm
Producto de raíces solución "c": (Tabla 7)	$P_r =$	-183.01	cm ²
Profundidad del eje neutro: (Ecuación (3.137))	$c =$	10.35	cm

3) Distribución de Deformaciones

Curvatura: (Ecuación (3.134))	$\varphi =$	4.85E-05	1/cm
Deformación del centroide de acero superior: (Ecuación (3.134))	$\varepsilon'_s =$	-2.24E-04	
Deformación del centroide de acero inferior: (Ecuación (3.134))	$\varepsilon_s =$	1.65E-03	
Posición de la fibra extrema del concreto en tracción no fisurado: (Tabla 5)	$h_{cr} =$	13.10	cm
Deformación de la fibra extrema en tracción no fisurado del concreto: (Ecuación (3.134))	$\varepsilon_{ct} =$	1.33E-04	

4) Magnitud de las Fuerzas Internas (Tabla 5)

Fuerza de compresión del concreto:	$C_c =$	-18.08	tf
Fuerza del acero superior:	$F'_s =$	-2.65	tf
Fuerza del acero inferior:	$F_s =$	19.54	tf
Fuerza de tracción del concreto:	$T_c =$	1.19	tf

5) Posiciones de las Fuerzas Internas (Tabla 6)

Compresión del concreto:	$d_c =$	3.60	cm
Acero superior:	$d'_s =$	5.75	cm
Acero inferior:	$d_s =$	44.25	cm
Tracción del concreto:	$d_{ct} =$	12.19	cm

6) Momento nominal

Momento nominal: (Ecuación (3.138))	$M_n =$	7.99	tf-m
-------------------------------------	---------	------	------

Punto del DMC después de la fluencia ($x_c > x_c^y = 0.387$)

1) Ingreso de la deformación normalizada (Etapa EF - Figura 27)

Deformación normalizada:	$x_c =$	1.791
--------------------------	---------	-------

2) Cálculo Directo de la Profundidad del Eje Neutro

Deformación extrema en compresión:	$\varepsilon_c =$	-3.00E-3
------------------------------------	-------------------	----------

Energía de deformación de la curva normalizada: (Ecuación (3.130))	$u_c =$	1.4194	
Parámetro asociado a la fuerza del concreto: (Ecuación (3.130))	$k_1 =$	0.793	
Primer momento de área de la curva normalizada: (Ecuación (3.133))	$j_c =$	1.4649	
Parámetro asociado a la posición de la fuerza del concreto: (Ecuación (3.133))	$k_2 =$	0.424	
Suma de raíces solución "c": (Tabla 7)	$S_r =$	-2.15	cm
Producto de raíces solución "c": (Tabla 7):	$P_r =$	-41.16	cm ²
Profundidad del eje neutro: (Ecuación (3.137))	$c =$	5.43	cm
3) Distribución de Deformaciones			
Curvatura: (Ecuación (3.134))	$\varphi =$	5.52E-04	1/cm
Deformación del centroide de acero superior: (Ecuación (3.134))	$\varepsilon'_s =$	1.74E-04	
Deformación del centroide de acero inferior: (Ecuación (3.134))	$\varepsilon_s =$	2.14E-02	
Posición de la fibra extrema del concreto en tracción no fisurado: (Tabla 5)	$h_{cr} =$	5.67	cm
Deformación de la fibra extrema en tracción no fisurado del concreto: (Ecuación (3.134))	$\varepsilon_{ct} =$	1.33E-04	
4) Magnitud de las Fuerzas Internas (Tabla 5)			
Fuerza de compresión del concreto:	$C_c =$	-27.12	tf
Fuerza del acero superior:	$F'_s =$	2.08	tf
Fuerza del acero inferior:	$F_s =$	24.94	tf
Fuerza de tracción del concreto:	$T_c =$	0.10	tf
5) Posiciones de las Fuerzas Internas (Tabla 6)			
Compresión del concreto:	$d_c =$	2.30	cm

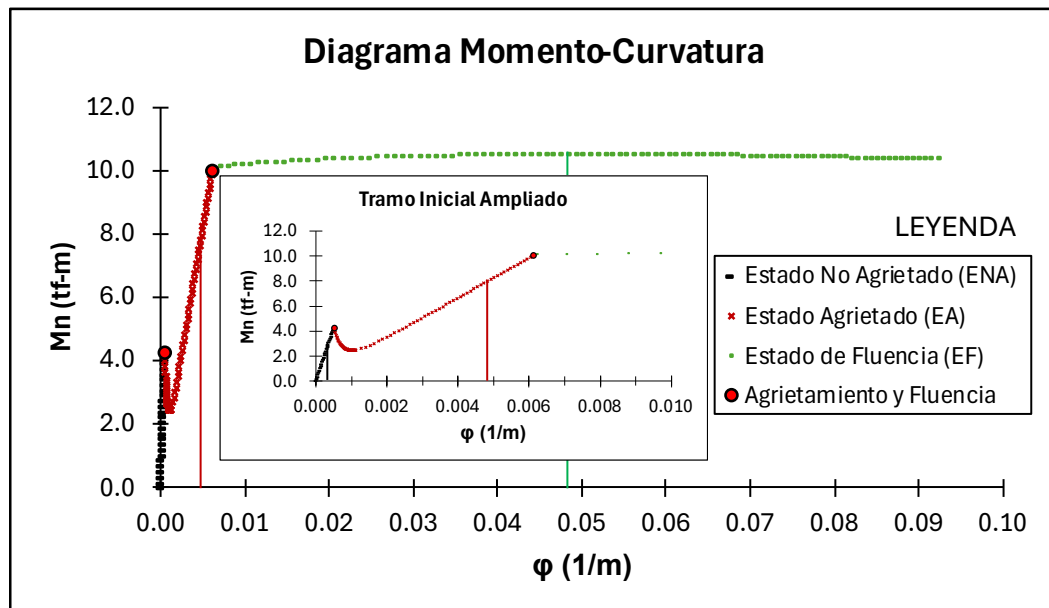
Acero superior:	$d'_s =$	5.75	cm
Acero inferior:	$d_s =$	44.25	cm
Tracción del concreto:	$d_{ct} =$	5.59	cm

6) Momento nominal

Momento nominal: (Ecuación (3.138)) $M_n = 10.54$ tf-m

Figura 37

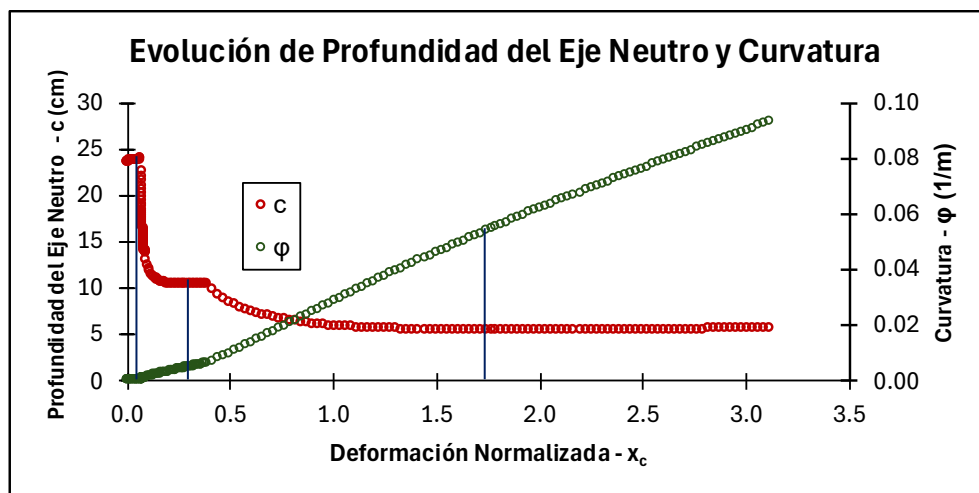
Diagrama momento-curvatura resultante.



Nota: Elaboración Propia.

Figura 38

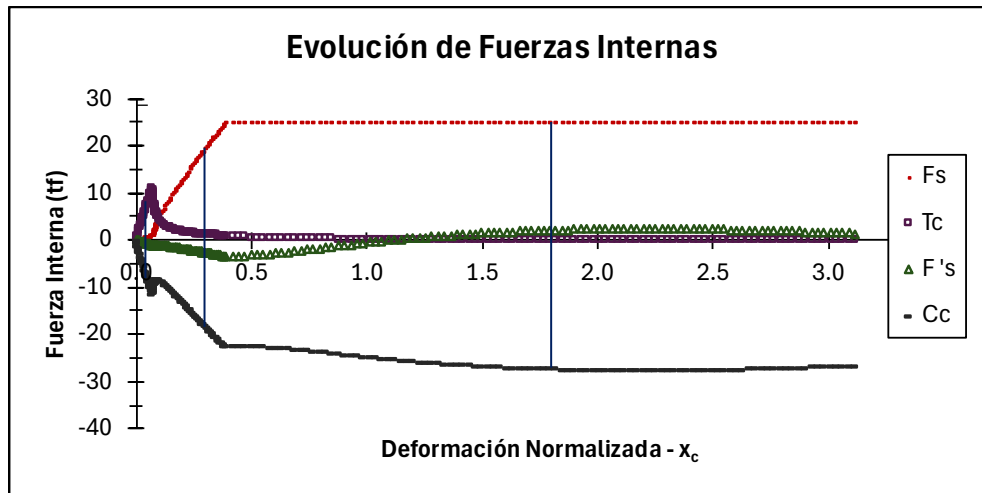
Evolución de profundidad del eje neutro.



Nota: Elaboración Propia.

Figura 39

Evolución de fuerzas internas.



Nota: Elaboración Propia.

A partir de estos resultados se ejemplifica la aplicación del método de **Cálculo Directo** para la obtención del DMC mostrada en la Figura 37. A partir la resistencia a la compresión del concreto, se determinaron los parámetros necesarios para definir la curva constitutiva desarrollada en esta investigación. Posteriormente, se calcularon **los puntos de agrietamiento y fluencia**, lo que permitió aplicar las ecuaciones correspondientes al cálculo directo de la **profundidad del eje neutro**, considerando tanto la tracción del concreto como el aporte del acero del lado de las fibras en compresión. Finalmente, **la linealización de las componentes de compresión del concreto** mediante los parámetros k_1 y k_2 , facilitó el proceso analítico, simplificando los cálculos de esta manera.

6.2 Cálculo del momento-curvatura por bloque equivalente generalizado

A continuación, se presenta un ejemplo práctico de la propuesta de cálculo por bloque equivalente generalizado al momento-curvatura para una viga rectangular de concreto armado. La viga tiene una sección rectangular de dimensiones 30cm x 50cm y se calculará considerando 3 barras de refuerzo longitudinal inferior de 5/8" de diámetro, igual como se presenta en la Figura 36 pero sin considerar el refuerzo superior para el cálculo. Las varillas se considerarán estar sujetas mediante estribos de 3/8" de diámetro y recubiertas por una capa de concreto de 4cm de espesor.

El comportamiento de los materiales será el mismo descrito en la Tabla 4. Las propiedades del concreto en compresión se determinarán a partir de las fórmulas experimentales presentadas en la Tabla 10, considerando una resistencia a la compresión $f'_c = 210 \text{ kgf/cm}^2$. Para el concreto en tracción, se adoptará un módulo de elasticidad $E_c = 217,370 \text{ kgf/cm}^2$ y un esfuerzo de rotura $f_{cr} = 28.98 \text{ kgf/cm}^2$.

En cuanto al acero de refuerzo en tracción, se considerará un módulo de elasticidad $E_s = 2'000,000 \text{ kgf/cm}^2$ y un esfuerzo de fluencia $F_y = 4,200 \text{ kgf/cm}^2$.

Cálculos Previos

1) Geometría

Ancho:	$b =$	30.00 cm
Peralte:	$h =$	50.00 cm
Recubrimiento:	$recub =$	4.00 cm
Peralte efectivo:	$d =$	44.25 cm

2) Refuerzo Longitudinal Inferior

Número de varillas:	$n_{v,inf} =$	3
Diámetro de varilla:	$db_{inf} =$	1.59 cm
Área total de acero inferior:	$A_{s,inf} =$	5.94 cm ²

4) Refuerzo Transversal

Diámetro del estribo:	$d_{bh} =$	0.95 cm
-----------------------	------------	---------

5) Propiedades del Acero

Esfuerzo de fluencia:	$f_y =$	4200 kgf/cm ²
-----------------------	---------	--------------------------

Módulo de elasticidad:	$E_s =$	2'000,000	kgf/cm ²
Deformación de fluencia:	$\varepsilon_y =$	0.0021	

6) Propiedades del Concreto

Resistencia a compresión:	$f'_c =$	210	kgf/cm ²
---------------------------	----------	-----	---------------------

Cálculo iterativo de deformación de fluencia (Figura 4 del Anexo 1)

1) Punto de Fluencia ($\varepsilon_s = \varepsilon_y$)

Deformación extrema en compresión asociada a la fluencia:	$\varepsilon_c^y =$	-6.94E-04	
---	---------------------	-----------	--

Deformación normalizada asociada a la fluencia:	$x_c^y =$	0.414	
---	-----------	-------	--

Punto del DMC antes de la fluencia ($x_c < x_c^y = 0.414$)

1) Ingreso de la deformación normalizada

Deformación normalizada:	$x_c =$	0.300	
--------------------------	---------	-------	--

2) Parámetros del bloque equivalente generalizado (Figura 60 del Anexo 5)

Deformación extrema en compresión:	$\varepsilon_c =$	-5.00E-04	
------------------------------------	-------------------	-----------	--

Parámetro de esfuerzo del bloque equivalente:	$\alpha_x =$	0.40	
---	--------------	------	--

Parámetro de profundidad del bloque equivalente:	$\beta_x =$	0.70	
--	-------------	------	--

Profundidad del eje neutro:	$c =$	10.71	cm
-----------------------------	-------	-------	----

Profundidad del bloque equivalente:	$a =$	7.45	cm
-------------------------------------	-------	------	----

3) Distribución de Deformaciones

Curvatura: (Ecuación (3.134))	$\varphi =$	4.69E-05	1/cm
-------------------------------	-------------	----------	------

Deformación del centroide de acero inferior: (Ecuación (3.134))	$\varepsilon_s =$	1.57E-03	
---	-------------------	----------	--

4) Magnitud de las Fuerzas Internas (Tabla 5)

Fuerza de compresión del concreto:	$C_c =$	-18.69	tf
------------------------------------	---------	--------	----

Fuerza del acero inferior:	$F_s =$	18.69	tf
----------------------------	---------	-------	----

5) Posiciones de las Fuerzas Internas (Tabla 6)

Compresión del concreto:	$a/2 =$	3.72	cm
Acero inferior:	$d_s =$	44.25	cm

6) Momento nominal

Momento nominal: (Ecuación (3.138))	$M_n =$	7.58	tf-m
-------------------------------------	---------	------	------

Punto del DMC después de la fluencia ($x_c > x_c^y = 0.414$)

1) Ingreso de la deformación normalizada

Deformación normalizada:	$x_c =$	1.791
--------------------------	---------	-------

2) Parámetros del bloque equivalente generalizado (Figura 60 del Anexo 5)

Deformación extrema en compresión:	$\varepsilon_c =$	-3.00E-3	
Parámetro de esfuerzo del bloque equivalente:	$\alpha_x =$	0.94	
Parámetro de profundidad del bloque equivalente:	$\beta_x =$	0.85	
Profundidad del eje neutro:	$c =$	4.99	cm
Profundidad del bloque equivalente:	$a =$	4.23	cm

3) Distribución de Deformaciones

Curvatura: (Ecuación (3.134))	$\varphi =$	6.01E-04	1/cm
Deformación del centroide de acero inferior: (Ecuación (3.134))	$\varepsilon_s =$	2.36E-02	

4) Magnitud de las Fuerzas Internas (Tabla 5)

Fuerza de compresión del concreto:	$C_c =$	-24.94	tf
Fuerza del acero inferior:	$F_s =$	24.94	tf

5) Posiciones de las Fuerzas Internas (Tabla 6)

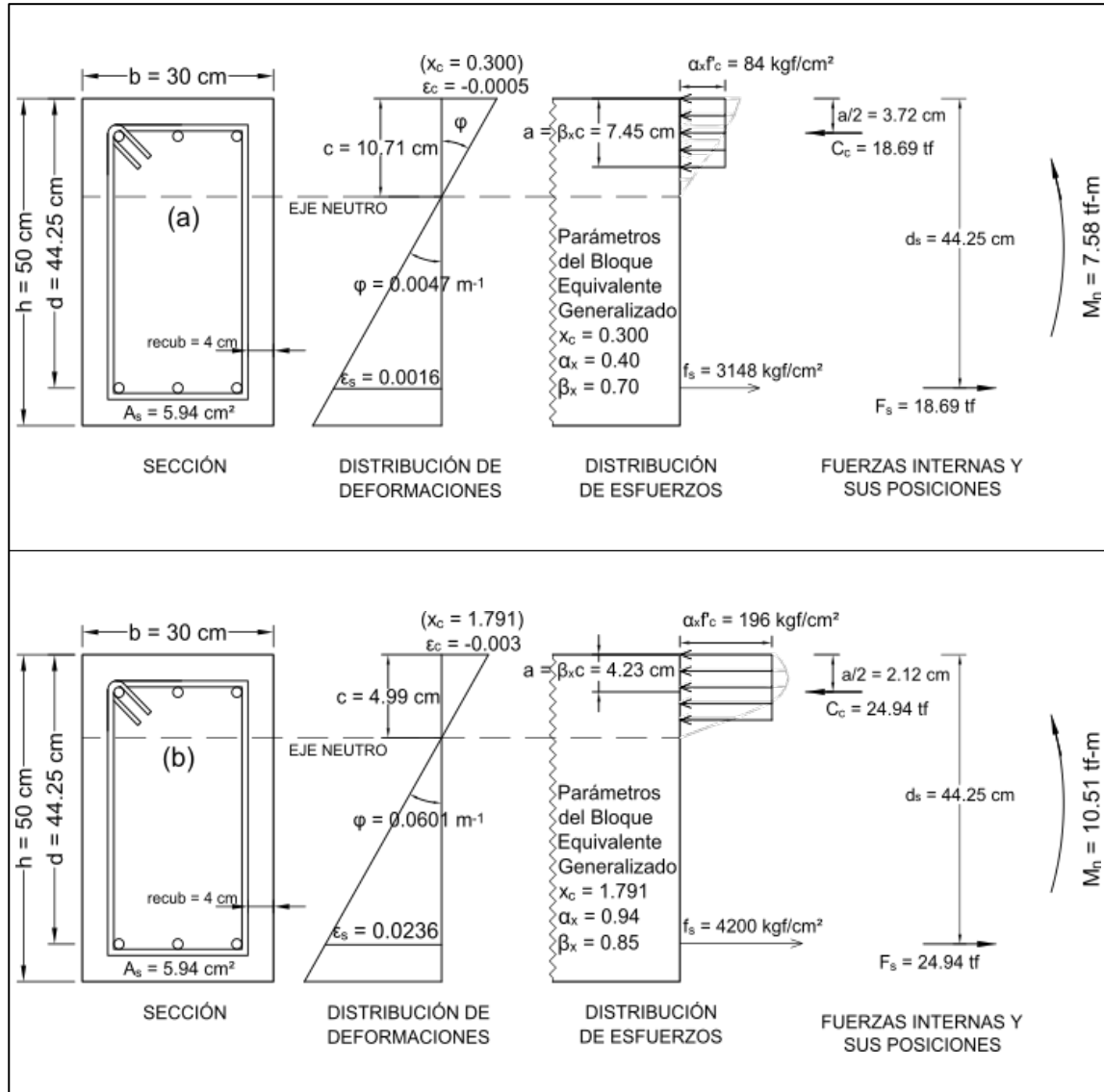
Compresión del concreto:	$a/2 =$	2.12	cm
Acero inferior:	$d_s =$	44.25	cm

6) Momento nominal

Momento nominal: (Ecuación (3.138)) $M_n = 10.51$ tf-m

Figura 40

Esquema de cálculo por bloque equivalente.



Nota: (a) Caso $\epsilon'_c = -0.0005$ / $x_c = 0.300$. (b) Caso $\epsilon'_c = -0.003$ / $x_c = 1.791$. Fuente: Elaboración Propia.

Tabla 11*Comparación de resultados del bloque generalizado con la norma E.060 (2009).*

Descripción	Bloque Equivalente Generalizado	E.060
Parámetro de esfuerzo del bloque equivalente, α_x	0.94	0.85
Parámetro de altura del bloque equivalente, β_x	0.85	0.85
Deformación extrema en compresión, ε_c	-0.0030	-0.0030
Deformación del centroide de acero inferior, ε_s	0.0236	0.0212
Profundidad del eje neutro, c	4.99 cm	5.48 cm
Profundidad del bloque equivalente, a	4.23 cm	4.66 cm
Curvatura, φ	6.01E-04 cm ⁻¹	5.48E-04 cm ⁻¹
Fuerza de compresión del concreto, C_c	-24.94 tf	-24.94 tf
Fuerza del acero inferior, F_s	24.94 tf	24.94 tf
Momento nominal, M_n	10.51 tf-m	10.46 tf-m

Nota: Elaboración Propia.

A partir de los resultados mostrados en la Tabla 11, se observa que, aunque los parámetros asociados al esfuerzo y altura del bloque equivalente presentan valores distintos, el momento nominal obtenido es prácticamente el mismo, con un error relativo de apenas 0.5%. Asimismo, las fuerzas internas del concreto y del acero coinciden hasta el segundo decimal en sus unidades de toneladas-fuerza. Esto permite concluir que la aplicación de este método es consistente con el procedimiento convencional de la Norma Técnica E.060 Concreto Armado (2009). Esto se debe a que, como se muestra en la Figura 37, el momento nominal en el Estado de Fluencia (EF) presenta variaciones poco significativas.

Conclusiones

- La metodología propuesta, denominada “*Mapeo Sectorizado para Parametrización de Curvas*”, constituye una herramienta eficaz para el desarrollo de modelos matemáticos no lineales, al combinar de manera integral tres procedimientos clave: la sectorización, que permite capturar fielmente las tendencias locales garantizando continuidad y evitando la pérdida de información; el mapeo de coordenadas, que facilita la normalización de los datos al trasladar, rotar y/o escalar un sector a un sistema de coordenadas común, lo que estandariza y simplifica el proceso de ajuste matemático; y la asignación de condiciones sectoriales, que proporciona flexibilidad y robustez al modelo, asegurando que los parámetros representen con precisión las características intrínsecas de la curva original.
- El modelo propuesto para el concreto no confinado sometido a compresión monotónico está basado en un polinomio de cuarto grado disociado para el tramo ascendente (hasta el pico máximo de resistencia) y el tramo descendente (hasta una caída del 50% de resistencia), ha demostrado una alta precisión. Su aplicación permite representar con gran fidelidad el comportamiento no lineal del concreto en los 48 ensayos experimentales analizados: **en el tramo ascendente** alcanza un coeficiente de determinación promedio de $R^2 = 0.9987$, y **en el tramo descendente** un coeficiente de determinación promedio de $R^2 = 0.9939$, tal como se muestra en la Tabla 2 (Anexo 3).
- La reducción del modelo a un número limitado de parámetros de naturaleza mecánica: **Densidad de energía de deformación** total hasta el pico “ u_A ”, y **pendiente instantánea inicial** “ r_0 ” **en el tramo ascendente**; deformación postpico normalizada “ χ_{50D} ”, **pendiente instantánea final** “ z_{50D} ” y **densidad de energía de deformación** total hasta una caída del 50% de resistencia “ u_{50D} ” **en el tramo descendente**, lo convierte en una herramienta práctica para aplicaciones analíticas y numéricas sin perder representatividad del comportamiento del material.
- El modelo propuesto mantiene consistencia con la geometría característica del tramo descendente de la curva descrita por Guo (2014), en la que el **punto de inflexión se ubica aproximadamente en el 75% de resistencia máxima**. Al considerar esta referencia para centrar el punto de inflexión, el modelo valida su aplicabilidad tanto en contextos experimentales como analíticos.
- El ensayo experimental de los 48 especímenes de concreto se realizó en el **Laboratorio de Estructuras del CISMID**, siguiendo lo establecido en la norma **ASTM C469-94**. La caracterización esfuerzo–deformación se obtuvieron de los

datos medidos mediante sensores de carga (celda de carga) y de desplazamiento (LVDT) instalados en el núcleo central de la probeta, lo que permitió registrar con precisión el comportamiento bajo compresión monotónica de concretos no confinados. Este procedimiento aseguró el control adecuado de la velocidad de carga y la representatividad de los resultados, proporcionando una base confiable para el análisis de los parámetros mecánicos fundamentales del concreto.

- Las **formulaciones experimentales propuestas** para los **parámetros físicos normalizados** y la **deformación unitaria pico**, expresadas en función de la **resistencia del concreto (f'_c)**, permiten generalizar el modelo para concretos con resistencias comprendidas entre 180 kgf/cm² y 360 kgf/cm². Estas expresiones, obtenidas a partir de los 48 especímenes ensayados, se presentan en la Tabla 10 y se ilustran en la Figura 56 del Anexo 4 para el tramo ascendente y en la Figura 57 del Anexo 4 para el tramo descendente.
- El método propuesto, mediante los enfoques de **Cálculo Directo** y de **Bloque Equivalente Generalizado**, simplifica la obtención del diagrama momento-curvatura (DMC) en vigas rectangulares al sustituir los procedimientos iterativos numéricos tradicionales por parámetros obtenidos mediante integración analítica del modelo de concreto desarrollado. Estos parámetros permiten determinar de manera explícita las componentes del concreto: **la fuerza de compresión del concreto (C_c)** y **su posición respecto a la fibra extrema en compresión (d_c)**, a través de constantes ($k_1, k_2, \alpha_x, \beta_x$) dependientes únicamente de la deformación normalizada en la fibra extrema a compresión (x_c), como se muestra en la Figura 5 del Anexo 1.
- El método de **Cálculo Directo** recibe esta denominación porque permite determinar la **profundidad del eje neutro (c)** de forma analítica como solución de una ecuación de segundo grado (Ecuación (3.137)), empleando las componentes de la Tabla 7 y siguiendo el procedimiento mostrado en la Figura 6 del Anexo 1. Con ello se evita recurrir a aproximaciones numéricas con iteraciones sucesivas, aunque el método requiere del cálculo iterativo para determinar las deformaciones normalizadas asociadas al agrietamiento (x_c^{cr}) y a la fluencia (x_c^y), conforme el esquema de cálculo presentado en la Figura 4 del Anexo 1.
- El **Cálculo Directo** garantiza el cumplimiento de los principios fundamentales de la flexión en vigas rectangulares, al respetar tanto la compatibilidad de deformaciones como el equilibrio de fuerzas. Su aplicación está condicionada a los comportamientos constitutivos en los que se fundamenta, descritos en la Tabla 4:

concreto a tracción como elástico-frágil, concreto a compresión parabólico, acero a tracción elastoplástico y acero a compresión elástico (asumiendo que su esfuerzo no alcanza niveles suficientes para inducir fluencia). Adicionalmente, se contemplan condiciones especiales para omitir la contribución del concreto a tracción y del acero a compresión mediante las condiciones matemáticas establecidas en la Tabla 8.

- El **Bloque Equivalente Generalizado** constituye un enfoque ingenieril para representar la distribución no lineal de esfuerzos del concreto mediante un bloque rectangular equivalente en la construcción del DMC. Los parámetros de esfuerzo del bloque " α_x " y de altura del bloque " β_x ", son dependientes de la deformación normalizada en la fibra extrema a compresión (x_c) para una resistencia del concreto f'_c , pueden calcularse directamente con las Ecuaciones (3.139) y (3.140), o bien emplear las gráficas presentadas en el Anexo 5 (Figura 59 a Figura 64) para concretos de resistencia: 180, 210, 245, 280, 315 y 350 kgf/cm².
- El **Bloque Equivalente Generalizado** muestra consistencia con la técnica de cálculo del bloque de esfuerzo equivalente empleada en la Norma Técnica E.060 Concreto Armado (2009) para la condición de diseño empleada: **deformación del concreto igual a 0.003**. Esta coherencia se evidencia en la estrecha aproximación entre el momento nominal obtenido de 10.51 tf-m y el calculado según la norma E.060 (2009) de 10.46 tf-m, tal como se presenta en la Tabla 11. Esta similitud se explica porque, después del punto de fluencia, la variación del momento nominal es mínima de 0.48%, tal como se observa en la Figura 37.
- En la Tabla 11 se observa que, para una resistencia $f'_c = 210 \text{ kgf/cm}^2$, el parámetro asociado a la altura del bloque equivalente β_x en el bloque equivalente generalizado es 0.8476, mientras que el valor correspondiente β_1 según la Norma Técnica E.060 Concreto Armado (2009) es 0.85, evidenciando una diferencia mínima de 0.28% entre ambos métodos para el caso de diseño.
- En la Tabla 11 se observa que, para una resistencia $f'_c = 210 \text{ kgf/cm}^2$, el parámetro asociado al esfuerzo del bloque equivalente α_x en el método del bloque equivalente generalizado es 0.9351, mientras que el valor correspondiente según la Norma Técnica E.060 Concreto Armado (2009) es 0.85, lo que representa una diferencia del 10.01% entre ambos métodos. A pesar de esta diferencia, es importante destacar que su impacto en el cálculo del momento nominal resulta insignificante.

Recomendaciones

- Aplicar la metodología del “*Mapeo Sectorizado para Parametrización de Curvas*” en tramos de comportamiento monótonico, ya sean crecientes o decrecientes, prestando especial atención a aquellos que presenten punto de inflexión. Se recomienda que estos puntos se localicen dentro del tercio central del sector, tanto en el eje horizontal como en el vertical, a fin de preservar su representatividad durante el proceso de escalamiento, y evitar la pérdida de esta característica en el ajuste.
- Al aplicar la metodología en sectores de curvas que presentan puntos de inflexión, dividir el sector en dos subsectores (antes y después del inflexión) para preservar la representatividad de las tendencias locales.
- Al aplicar la metodología, seleccionar los modelos o funciones de ajuste que representen adecuadamente los puntos de inflexión presentes en la tendencia de los datos, evitando introducir comportamientos artificiales cuando estos existen dentro del sector, siendo objetivo de esta tesis presentarlo para un modelo polinómico de cuarto grado.
- Implementar los métodos propuestos para la construcción del DMC en software de análisis estructural, de modo que se aproveche su simplicidad en el cálculo y se evalúe su desempeño en modelos de estructuras reales.
- Aplicar el método del bloque equivalente generalizado para simplificar los cálculos en vigas rectangulares considerando únicamente el acero a tracción. Para casos de doble refuerzo, se recomienda emplear el método de cálculo directo.
- Recomendar la incorporación del enfoque del bloque equivalente generalizado en la Norma Técnica E.060 Concreto Armado (2009), como una alternativa que conecta la teoría con las prácticas de diseño.
- Se recomienda poder utilizar los parámetros de bloque equivalente generalizado para utilizarlo como alternativa de diseño al bloque equivalente planteado por Whitney - que se utiliza actualmente como parte de la metodología de diseño, siendo este un caso particular de deformación unitaria en la fibra extrema sometida a compresión de 0.003.

Recomendaciones para futuras investigaciones

- Se recomienda ampliar el estudio del modelo hasta una caída de resistencia menor al 50% de la resistencia del concreto, adicionando al tercer sector descendente, con el fin de cubrir la totalidad del comportamiento postpico de la curva.
- Se recomienda ampliar el estudio de las relaciones experimentales presentadas en el capítulo 5.2 entre los parámetros físicos normalizados del concreto, explorando condiciones que puedan influir significativamente en su comportamiento, tales como la calidad de los agregados, empleo de aditivos, efectos de ciclos de hielo y deshielo, entre otros factores que se consideren pertinentes.
- Se recomienda ampliar el estudio de las relaciones experimentales entre los parámetros físicos normalizados a concretos de baja y alta resistencia, considerando que el presente estudio se limita a un rango de resistencias entre 180 kgf/cm² y 360 kgf/cm².
- Extender la aplicación del método del bloque equivalente generalizado a secciones no rectangulares (en T, en L u otras) y secciones de concreto a flexocompresión, verificando la adaptabilidad del método.
- Realizar ensayos experimentales a flexión de vigas rectangulares de concreto para validar los resultados de los parámetros físicos obtenidos a partir de ensayos de probetas de concreto.

Referencias bibliográficas

- Aguiar, R. (2003). *Análisis sísmico por desempeño*. Ediespe.
[https://www.researchgate.net/publication/280627456 Analisis Sismico por Desempeno](https://www.researchgate.net/publication/280627456_Analisis_Sismico_por_Desempeno)
- Bahn, B. Y. & Hsu, C. T. (1998). Stress-strain behavior of concrete under cyclic loading. *ACI Material Journal*, 95(2), 178-193.
- Bernal I. & Tavera H. (2002) *Geodinámica, sismicidad y energía sísmica en Perú*. Instituto Geofísico del Perú, Lima
- Carreira, D. J. & Chu, K.-H. (1985). Stress-strain relationship for plain concrete in compression. *ACI Journal Proceedings*, 82(6), 797-804.
- Desayi, P. & Krishnan, S. (1964). Equation for the stress-strain curve of concrete. *ACI Journal Proceedings*, 61(3), 345-350.
- Gao, Y., Ren, X., Zhang, J., Zhong, L., Yu, S., Yang, X. & Zhang, W. (2020). Proposed constitutive law of uniaxial compression for concrete under deterioration effects. *Materials*, 13(9), 2048. <https://doi.org/10.3390/ma13092048>
- Guo, Z. (2014). *Principles of reinforced concrete*. Elsevier.
<https://doi.org/10.13140/RG.2.1.2122.6086>
<https://www.elsevier.com/books/principles-of-reinforced-concrete/guo/978-0-12-800859-1>
- Hognestad, H. E., Hanson, N. W. & McHenry, D. (1955). Concrete stress distribution in ultimate strength design. *ACI Journal Proceedings*, 52(12), 455-480.
<https://doi.org/10.14359/11609>
- Instituto Geofísico del Perú (2017). *Mapa sísmico del Perú*. Gobierno del Perú.
<https://sinia.minam.gob.pe/mapas/mapa-sismico-peru-periodo-1960-2017>
- Karthik, M. (2009). *Stress-strain model of unconfined and confined concrete and stress block parameters* [Tesis de Maestría, Universidad de Texas A&M]. Repositorio Institucional – Universidad de Texas A&M.
- Llano, A. (2015). *Diseño estructural de una edificación de seis pisos, mediante un análisis lineal controlado por derivas inelásticas y una comprobación con un análisis estático no lineal, aplicando la técnica del Pushover* [Tesis de Grado, Escuela Politécnica Nacional]. Repositorio Institucional – Escuela Politécnica Nacional, Facultad de Ingeniería Civil y Ambiental.

- Mander, J. B. (1983). *Seismic design of bridge piers* [Tesis de Doctorado, Universidad de Canterbury]. Repositorio Institucional – Universidad de Canterbury.
- Mehta, P. K. & Monteiro, P. J. M. (2006). *Concrete microstructure, properties, and materials* (3ª ed.). McGraw-Hill. <https://doi.org/10.1036/0071462899>
- Ministerio de Vivienda, Construcción y Saneamiento. (2009). *Norma Técnica E.060: Concreto Armado*. (1.ª ed.).
- Nilson, A. H. (1999). *Diseño de Estructuras de Concreto* (12ª ed.). McGraw-Hill Interamericana Editores.
- Nogueiro, P., Silva, L. & Bento, R. (2005). Comportamento sísmico de ligações metálicas: influência na resposta dinâmica de estruturas metálicas. https://www.researchgate.net/publication/277112741_Comportamento_sismico_de_ligacoes_metalicas_influencia_na_resposta_dinamica_de_estruturas_metalicas
- Palacios Benavides, P. X. (2017). *Análisis de la variación de ductilidad en columnas cuadrangulares de hormigón armado debido a su comportamiento biaxial usando el diagrama momento-curvatura* [Tesis de Grado, Escuela Politécnica Nacional]. Repositorio Institucional – Escuela Politécnica Nacional, Facultad de Ingeniería Civil y Ambiental.
- Park, R. & Paulay, T. (1988). *Estructuras de Concreto Reforzado*. Limusa.
- Popovics, S. (1973). A numerical approach to the complete stress-strain curve of concrete. *Cement and Concrete Research*, 3(5), 583-599. [https://doi.org/10.1016/0008-8846\(73\)90096-3](https://doi.org/10.1016/0008-8846(73)90096-3)
- Priestley, M. J. N., Calvi, G. M. & Kowalsky, M. J. (2007). Displacement-based seismic design of structures. IUSS Press.
- Saenz, L. P. (1964). Discussion of “equation for the stress-strain curve of concrete” by P. Desayi and S. Krishnan. *ACI Journal Proceedings*, 61(9), 1229-1235.
- Salguero, F., Romero, S., Melgar, S. G., Prat, F. & Moreno, F. (2013). Las curvas tensión-deformación de hormigones ensayados bajo compresión uniaxial monotónica: una revisión sistemática. *Informes De La Construcción*, 65(529), 41–54. <https://doi.org/10.3989/ic.11.114>
- Smith, G. M. & Young, L. E. (1956). Ultimate flexural analysis on stress-strain curves for cylinders. *ACI Journal Proceedings*, 53(12), 597-609. <https://doi.org/10.14359/11531>

- Suntaxi Tipan, J. L. (2016). *Análisis de un Edificio con Aisladores de Base y su Influencia en la Curva de Capacidad*. [Tesis de grado, Escuela Politécnica Nacional]. Repositorio Institucional - Escuela Politécnica Nacional, Quito, Ecuador. <https://bibdigital.epn.edu.ec/handle/15000/16828>
- Tulin, L. G. & Gerstle, K. H. (1964). Discussion of "Equation for the stress-strain curve of concrete" by P. Desayi and S. Krishnan. *ACI Journal Proceedings*, 61(9): 1236-1238.

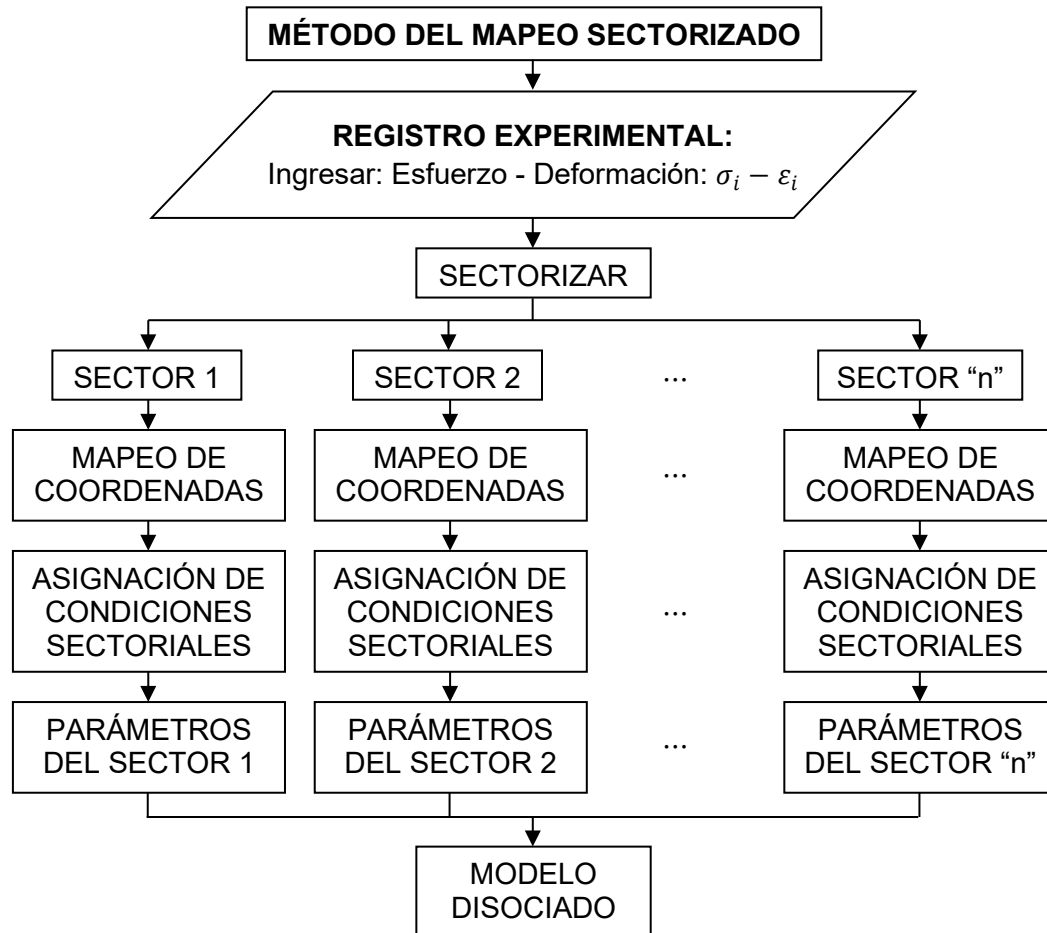
Anexos

Anexo 1: Diagramas de flujo.....	1
Anexo 2: Condición de continuidad del DMC.....	8
Anexo 3: Resultados experimentales.....	11
Anexo 4: Gráficas de la formulación experimental.....	25
Anexo 5: Parámetros del bloque equivalente generalizado.....	29

Anexo 1. Diagramas de flujo

Figura 1

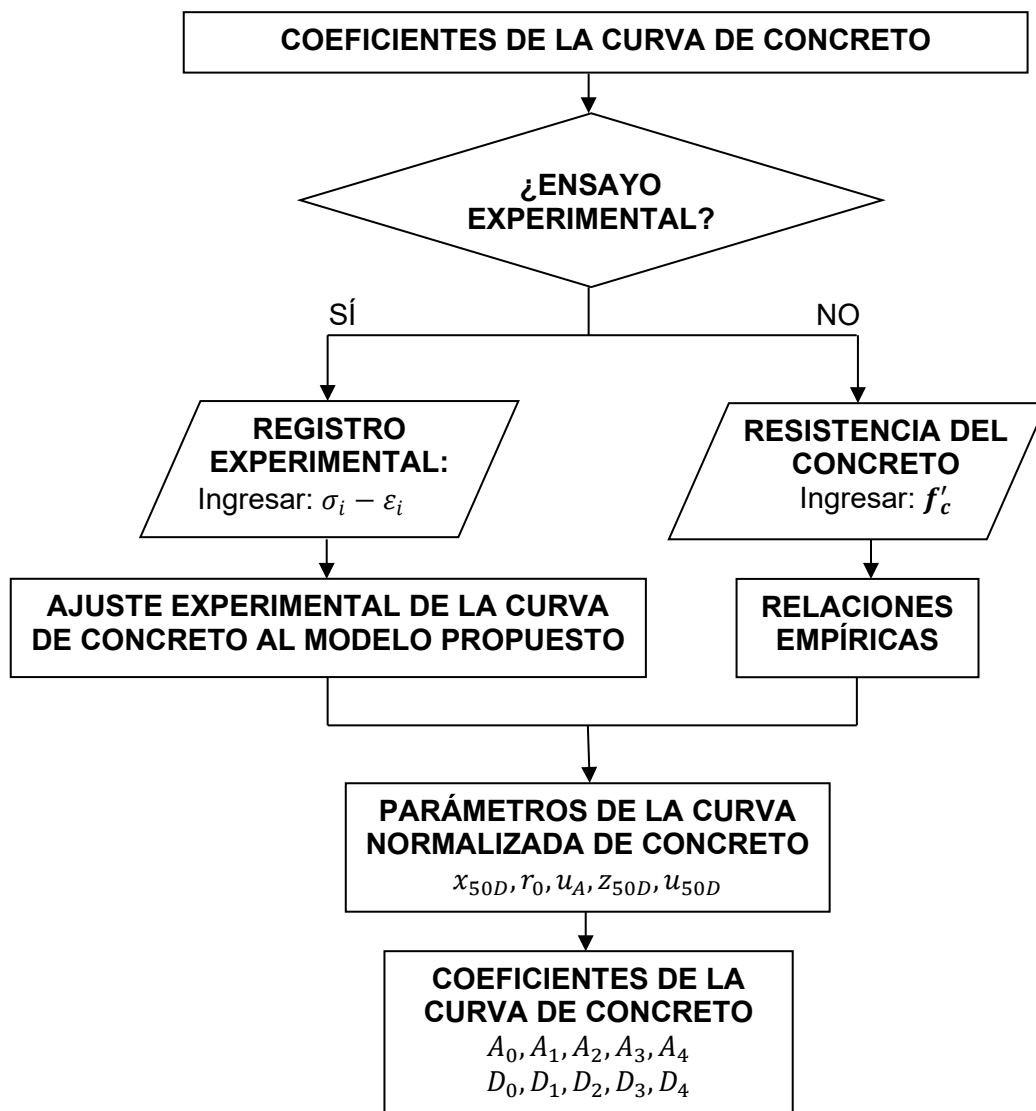
Esquema de aplicación del método del mapeo sectorizado.



Nota: Elaboración Propia.

Figura 2

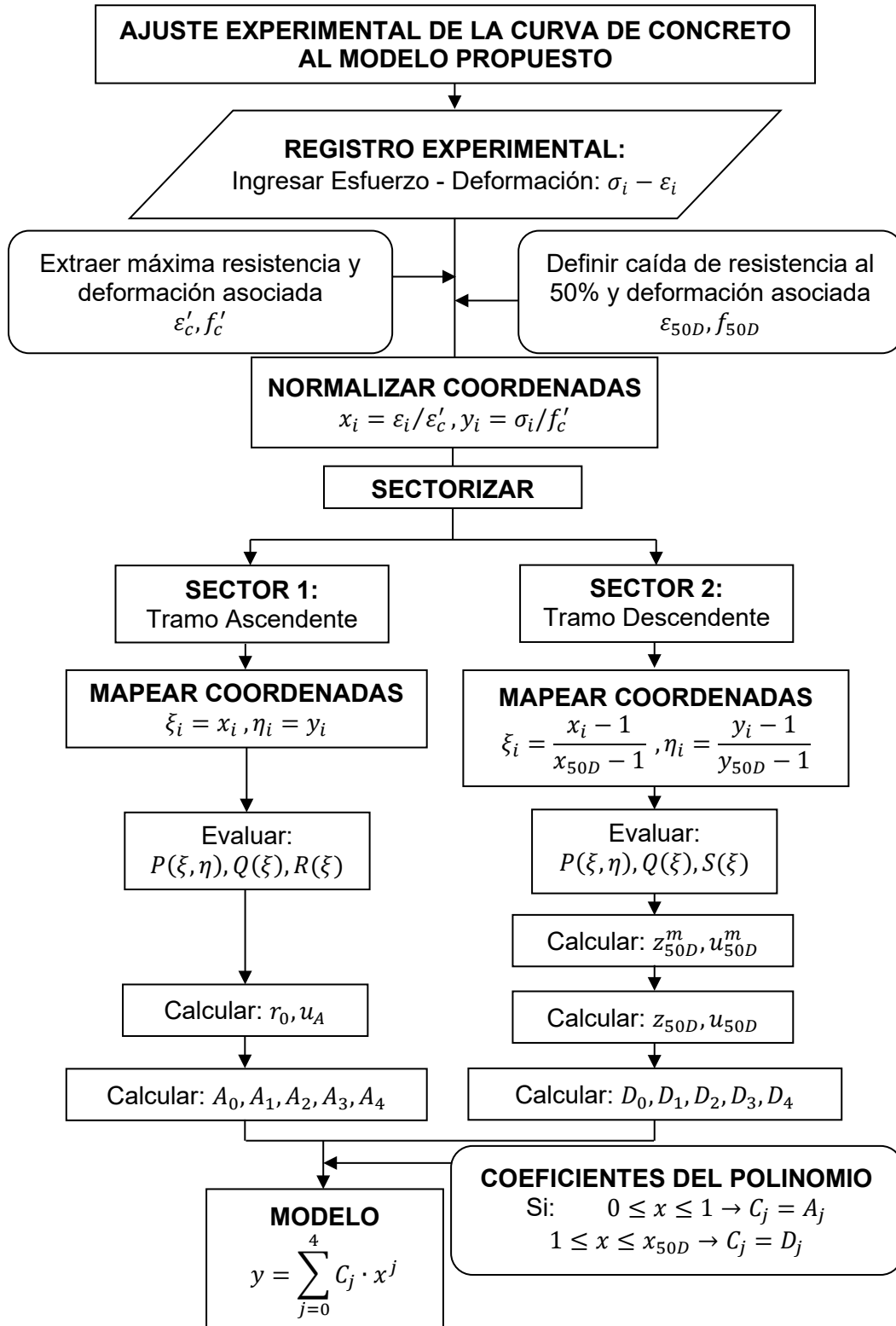
Esquema de cálculo de los coeficientes de la curva del concreto propuesta.



Nota: Elaboración Propia.

Figura 3

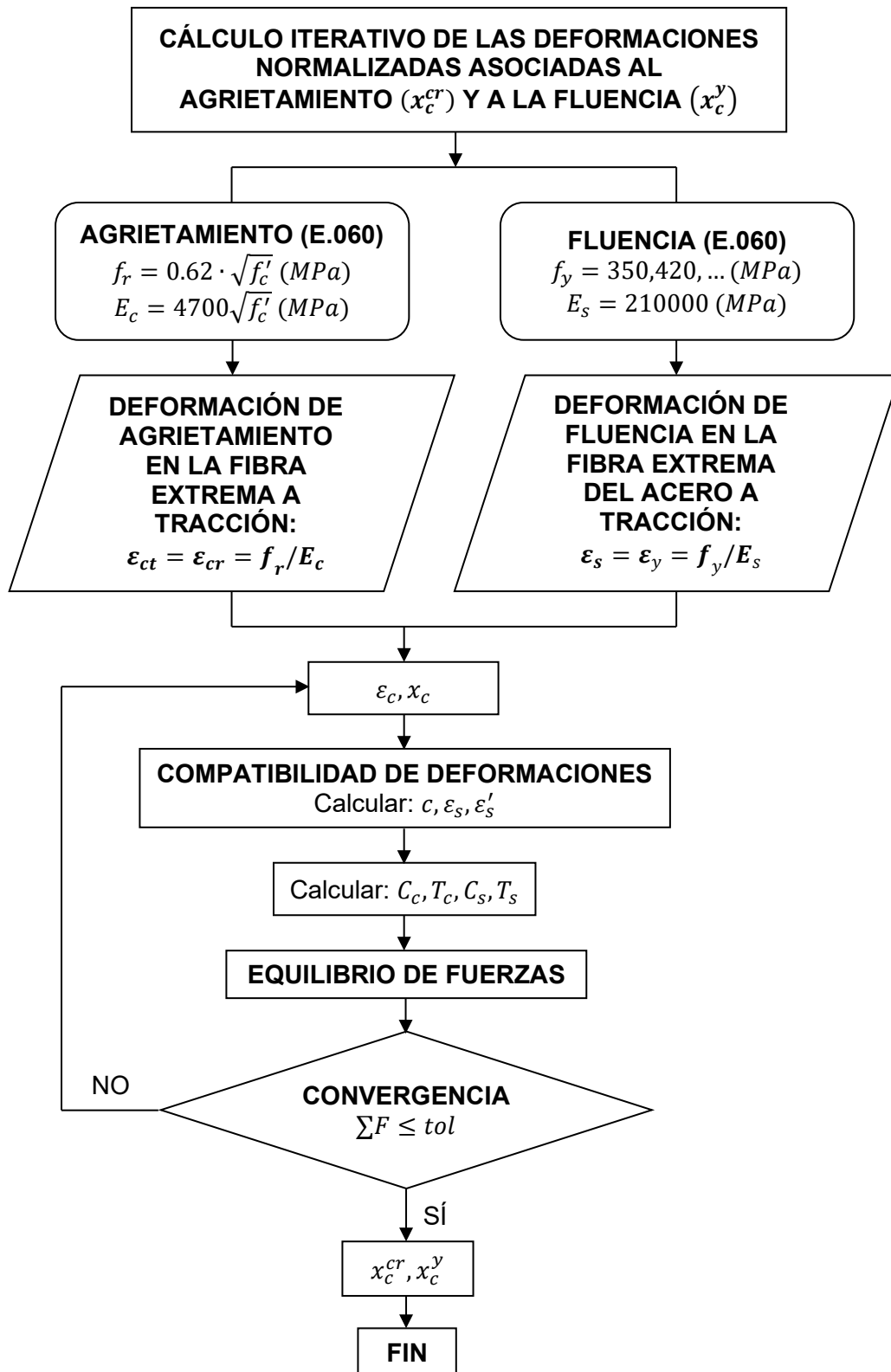
Esquema de ajuste experimental al modelo propuesto.



Nota: Elaboración Propia.

Figura 4

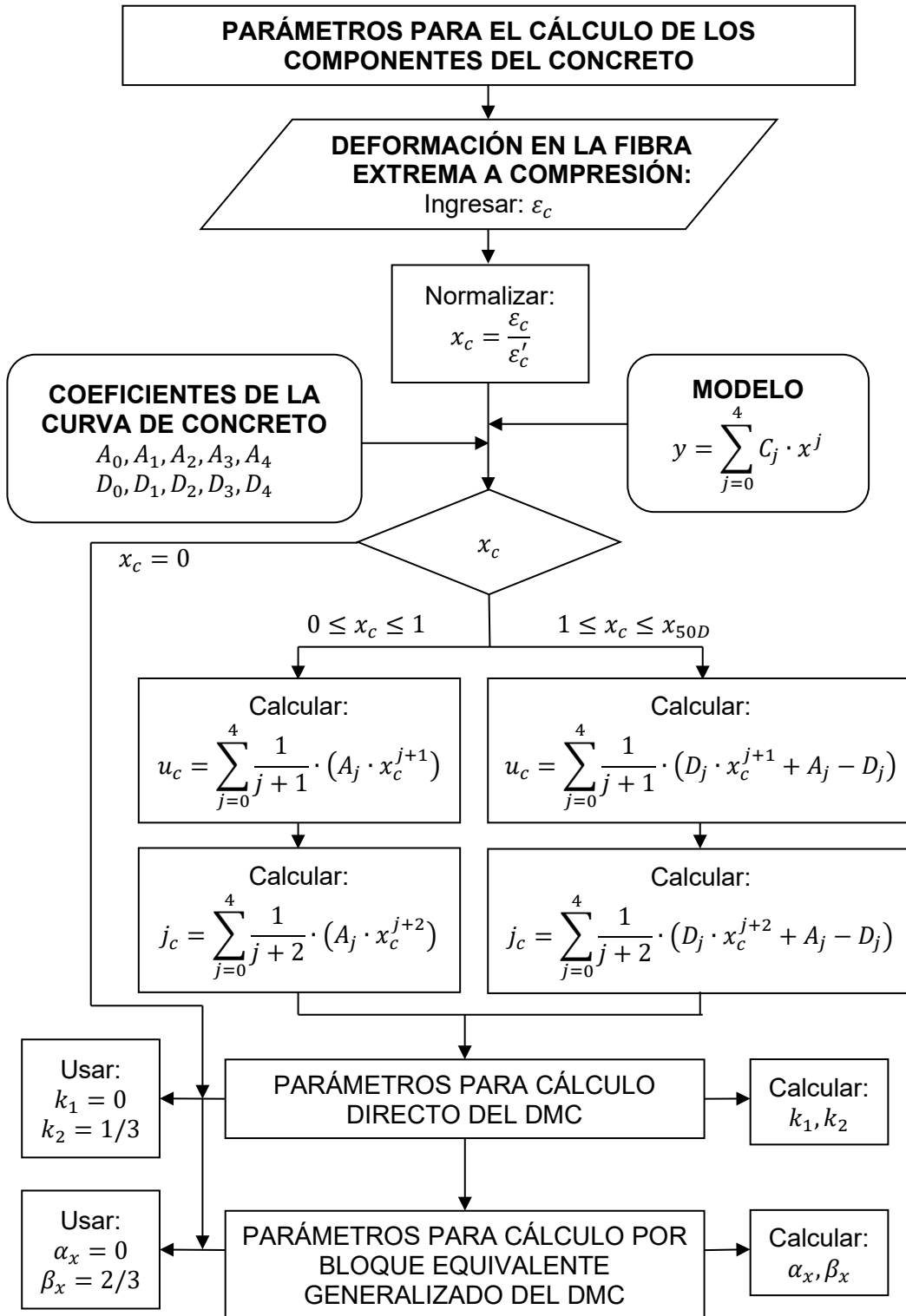
Esquema de cálculo iterativo de las deformaciones del agrietamiento y fluencia.



Nota: Elaboración Propia.

Figura 5

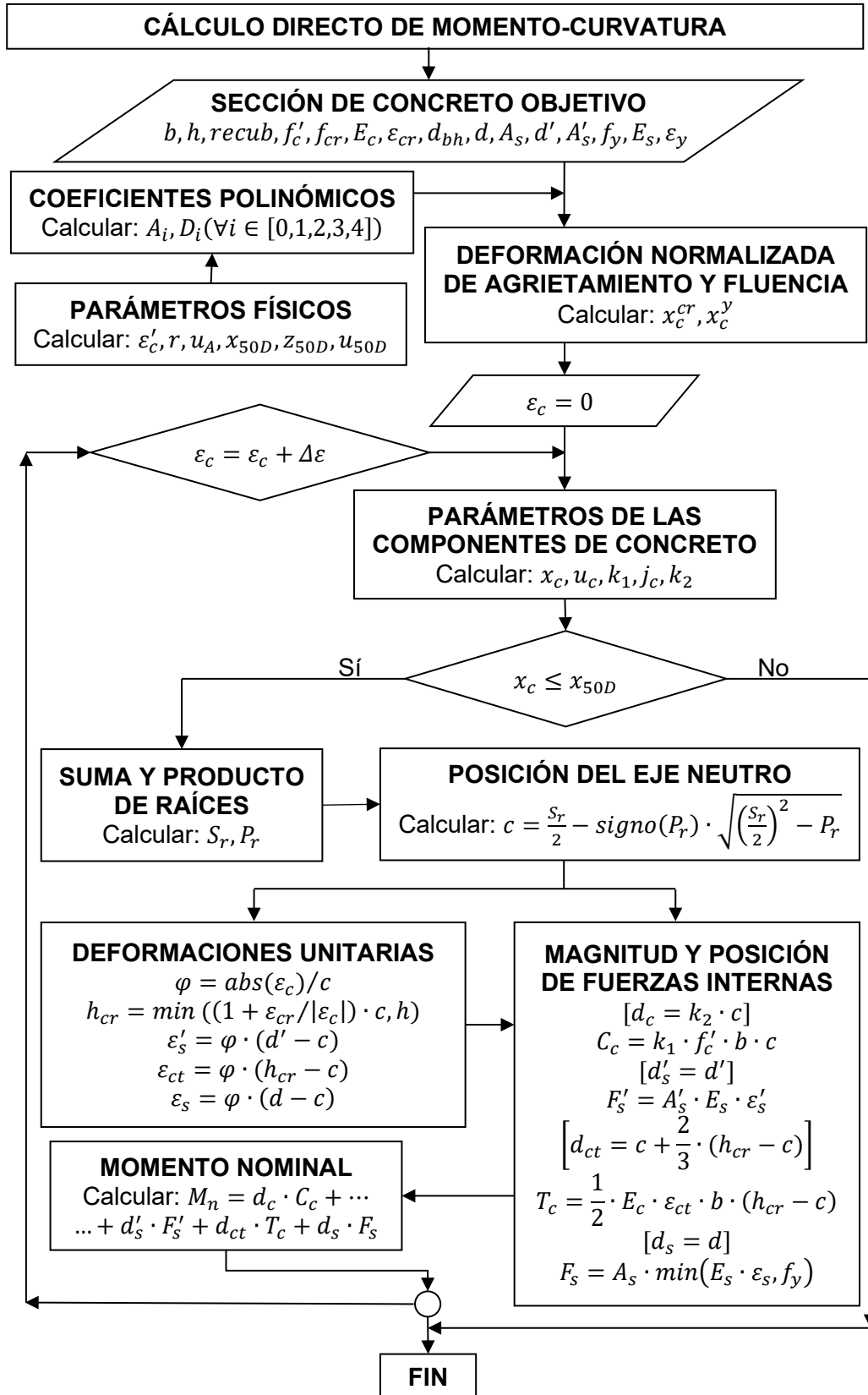
Esquema de obtención de parámetros de los componentes del concreto.



Nota: Elaboración Propia.

Figura 6

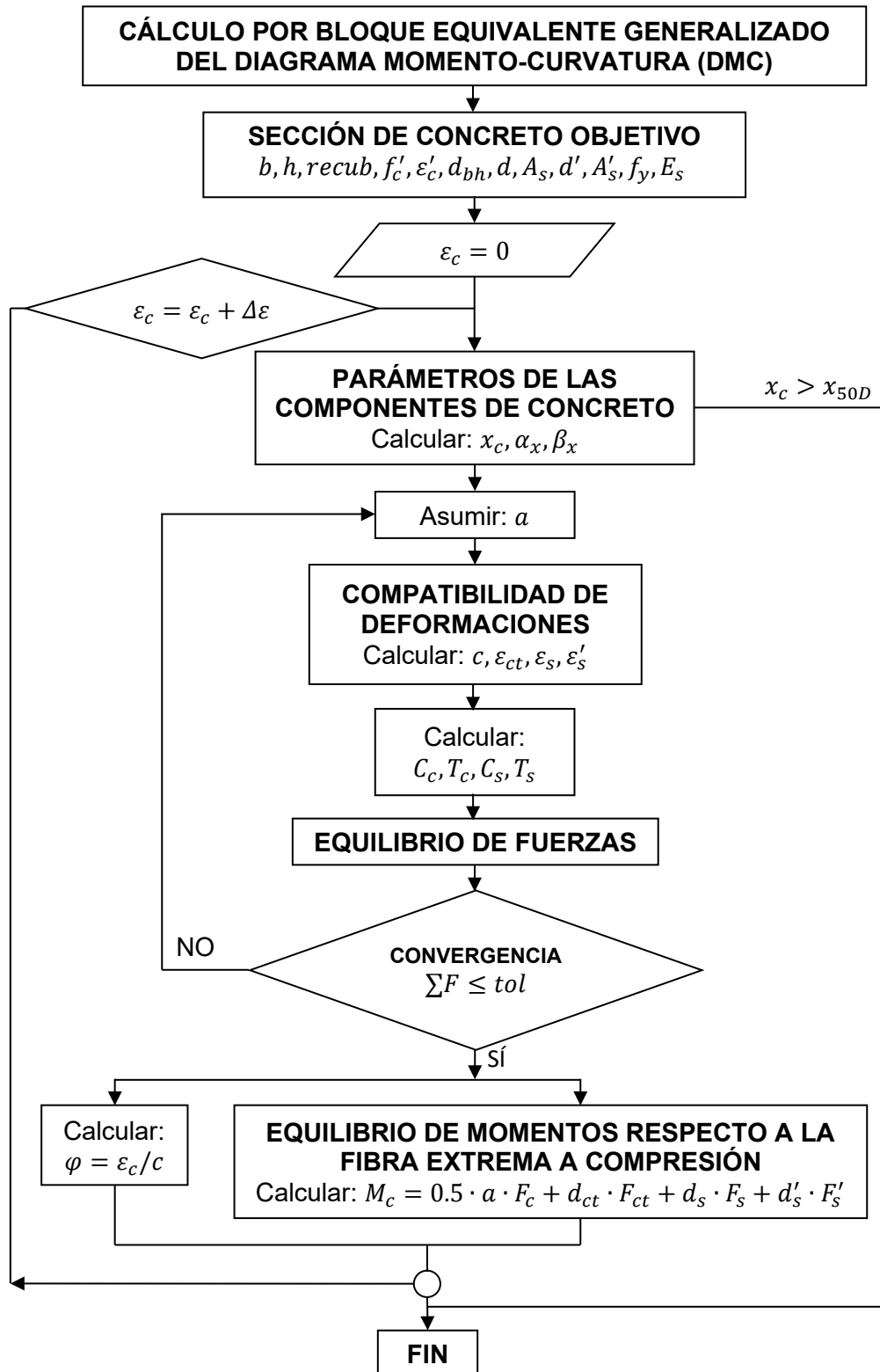
Esquema de cálculo directo del DMC.



Nota: Elaboración Propia.

Figura 7

Esquema de cálculo por bloque equivalente generalizado del DMC.



Nota: Elaboración Propia.

Anexo 2. Condición de continuidad del DMC

Los parámetros k_1 y k_2 del método del cálculo directo, así como α_x y β_x del método del bloque equivalente generalizado, presentan indeterminación en el punto cero del DMC debido a que los valores de x_c , u_c y j_c son cero en el punto $x_c \rightarrow 0^+$. A continuación, se resolverá la indeterminación utilizando el modelo polinómico propuesto en esta investigación.

A. Parámetro k_1

Mostrando la indeterminación para el parámetro k_1 a partir de la Ecuación (3.130) en el punto $x_c \rightarrow 0^+$:

$$k_1(x_c \rightarrow 0^+) = \frac{u_c}{x_c} = \frac{0}{0} \quad (\text{A2.1})$$

Como se observa en la Ecuación (A2.1), el parámetro k_1 presenta una forma indeterminada, por esto se procede a resolver la indeterminación utilizando la regla de L'Hôpital-Bernoulli:

$$\begin{aligned} k_1(x_c \rightarrow 0^+) &= \lim_{x_c \rightarrow 0^+} \frac{u_c}{x_c} \rightarrow k_1 = \lim_{x_c \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{x_c} y \cdot dx}{x_c} \\ k_1 &= \lim_{x_c \rightarrow 0^+} \frac{\frac{d}{dx_c}(\int_0^{x_c} y \cdot dx)}{\frac{d}{dx_c}(x_c)} \rightarrow k_1 = \lim_{x_c \rightarrow 0^+} y \end{aligned} \quad (\text{A2.2})$$

Reemplazando la Ecuación (3.100) en la Ecuación (B.2):

$$\rightarrow k_1(x_c \rightarrow 0^+) = 0 \quad (\text{A2.3})$$

B. Parámetro k_2

Mostrando la indeterminación para el parámetro k_2 a partir de la Ecuación (3.133) en el punto $x_c \rightarrow 0^+$:

$$k_2(x_c \rightarrow 0^+) = 1 - \frac{j_c}{u_c \cdot x_c} = 1 - \frac{0}{0 \cdot 0} \quad (\text{A2.4})$$

Como se observa en la Ecuación (B.4), al igual que en el caso anterior, el parámetro k_2 presenta una forma indeterminada, por esto se procede a resolver la indeterminación utilizando la regla de L'Hôpital-Bernoulli:

$$k_2(x_c \rightarrow 0^+) = \lim_{x_c \rightarrow 0^+} \left(1 - \frac{j_c}{u_c \cdot x_c} \right) \rightarrow k_2 = 1 - \lim_{x_c \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x_c} \cdot \frac{\int_0^{x_c} y \cdot x \cdot dx}{\int_0^{x_c} y \cdot dx} \right) \quad (\text{A2.5})$$

Nuevamente, utilizando el modelo polinómico propuesto en coordenadas normalizadas para el tramo ascendente (sector 1) de la Ecuación (3.100), reemplazando en la Ecuación (B.5):

$$\begin{aligned} k_2 &= 1 - \lim_{x_c \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x_c} \cdot \frac{\int_0^{x_c} (\sum_{i=1}^4 A_i \cdot x^i) \cdot x \cdot dx}{\int_0^{x_c} (\sum_{i=1}^4 A_i \cdot x^i) \cdot dx} \right) \\ &\rightarrow k_2 = 1 - \lim_{x_c \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x_c} \cdot \frac{\left[\sum_{i=1}^4 \frac{A_i}{i+2} \cdot x^{i+2} \right]_0^{x_c}}{\left[\sum_{i=1}^4 \frac{A_i}{i+1} \cdot x^{i+1} \right]_0^{x_c}} \right) \\ &\rightarrow k_2 = 1 - \lim_{x_c \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x_c} \cdot \frac{\sum_{i=1}^4 \frac{A_i}{i+2} \cdot x_c^{i+2}}{\sum_{i=1}^4 \frac{A_i}{i+1} \cdot x_c^{i+1}} \right) \\ &\rightarrow k_2 = 1 - \lim_{x_c \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x_c} \cdot \frac{x_c^2 \cdot \sum_{i=1}^4 \frac{A_i}{i+2} \cdot x_c^i}{x_c \cdot \sum_{i=1}^4 \frac{A_i}{i+1} \cdot x_c^i} \right) \\ &\rightarrow k_2 = 1 - \lim_{x_c \rightarrow 0^+} \left(\frac{\sum_{i=1}^4 \frac{A_i}{i+2} \cdot x_c^i}{\sum_{i=1}^4 \frac{A_i}{i+1} \cdot x_c^i} \right) \\ &\rightarrow k_2 = 1 - \lim_{x_c \rightarrow 0^+} \left(\frac{\sum_{i=1}^4 \frac{A_i}{i+2} \cdot x_c^i}{\sum_{i=1}^4 \frac{A_i}{i+1} \cdot x_c^i} \right) \end{aligned} \quad (\text{A2.6})$$

Resolviendo la Ecuación (B.6), utilizando la regla de L'Hôpital-Bernoulli:

$$\begin{aligned} k_2 &= 1 - \lim_{x_c \rightarrow 0^+} \left(\frac{\sum_{i=1}^4 \frac{A_i}{i+2} \cdot i \cdot x_c^{i-1}}{\sum_{i=1}^4 \frac{A_i}{i+1} \cdot i \cdot x_c^{i-1}} \right) \\ &\rightarrow k_2 = 1 - \lim_{x_c \rightarrow 0^+} \left(\frac{\frac{A_1}{3} + \sum_{i=2}^4 \frac{A_i}{i+2} \cdot i \cdot x_c^{i-1}}{\frac{A_1}{2} + \sum_{i=2}^4 \frac{A_i}{i+1} \cdot i \cdot x_c^{i-1}} \right) \\ &\rightarrow k_2 = 1 - \frac{A_1/3}{A_1/2} \\ &\rightarrow k_2(x_c \rightarrow 0^+) = \frac{1}{3} \end{aligned} \quad (\text{A2.7})$$

C. Parámetro β_x

Para evaluar su valor en el límite cuando la deformación tiende a cero, se evaluará partir de la Ecuación (3.139) que relaciona con el parámetro k_1 :

$$\begin{aligned}\beta_x(x_c \rightarrow 0^+) &= 2 \cdot k_2(x_c \rightarrow 0^+) \\ \rightarrow \beta_x(x_c \rightarrow 0^+) &= \frac{2}{3}\end{aligned}\tag{A2.8}$$

D. Parámetro α_x

Para evaluar su valor en el límite cuando la deformación tiende a cero, se evaluará partir de la Ecuación (3.140) que relaciona con el parámetro k_1 y β_x :

$$\begin{aligned}\alpha_x(x_c \rightarrow 0^+) &= \frac{k_1(x_c \rightarrow 0^+)}{\beta_x(x_c \rightarrow 0^+)} \\ \rightarrow \alpha_x(x_c \rightarrow 0^+) &= 0\end{aligned}\tag{A2.9}$$

Anexo 3. Resultados experimentales

A. Valores de resultados experimentales

Tabla 1

Parámetros físicos de resultados experimentales.

Espécimen	f'_c	ε'_c	r_0	u_A	x_{50D}	y_{50D}	z_{50D}	u_{50D}	* R_A^2	* R_{50D}^2
C210M	250.4	0.00167	2.212	0.679	3.188	0.502	-0.304	1.654	0.9997	0.9905
C220M	249.3	0.00207	2.348	0.706	2.481	0.505	-0.083	1.143	0.9987	0.9994
C230M	282.9	0.00245	2.058	0.709	2.104	0.504	-0.335	0.805	0.9995	0.9988
CCA-1	221.7	0.00120	2.220	0.615	4.191	0.503	-0.191	2.376	0.9988	0.9872
CCA-2	252.3	0.00205	2.250	0.692	2.596	0.506	-0.419	1.183	0.9997	0.9958
CCA-3	205.7	0.00116	1.822	0.632	4.566	0.502	-0.057	2.716	0.9969	0.9827
CCC-1	247.2	0.00249	2.517	0.703	1.893	0.501	-0.201	0.714	0.9996	0.9992
CCC-2	190.4	0.00173	2.592	0.659	3.679	0.502	-0.303	1.912	0.9990	0.9870
CCC-3	206.9	0.00163	2.121	0.667	3.321	0.502	-0.151	1.738	0.9989	0.9982
M1-P1	315.9	0.00176	2.041	0.628	2.019	0.515	-0.620	0.820	0.9983	0.9990
M1-P2	321.9	0.00158	1.816	0.591	1.681	0.512	-1.356	0.479	0.9995	0.9606
M1-P3	327.3	0.00166	2.232	0.619	2.006	0.512	-0.779	0.840	0.9983	0.9966
M2-P1	293.6	0.00176	1.536	0.613	2.110	0.504	-0.137	0.873	0.9986	0.9991
M2-P2	292.5	0.00170	2.043	0.645	1.979	0.510	-0.589	0.720	0.9889	0.9958
M2-P3	281.1	0.00162	2.178	0.636	1.686	0.516	-0.496	0.569	0.9982	0.9988
MCA-1	289.4	0.00204	1.961	0.628	2.103	0.511	-0.400	0.854	0.9994	0.9944
MCA-2	259.4	0.00148	1.642	0.595	3.097	0.502	-0.077	1.615	0.9993	0.9982
MCA-3	302.6	0.00235	2.051	0.643	1.596	0.509	-1.541	0.445	0.9994	0.9810
MCC-1	261.9	0.00234	2.442	0.673	1.836	0.505	-0.581	0.607	0.9985	0.9984
MCC-2	282.8	0.00249	2.258	0.649	1.866	0.502	-0.491	0.658	0.9996	0.9993
MCC-3	253.4	0.00149	2.089	0.692	2.403	0.509	-0.377	1.073	0.9990	0.9991
MCC-4	247.0	0.00189	1.868	0.691	2.505	0.505	-0.145	1.153	0.9990	0.9978
MCC-5	240.5	0.00226	2.469	0.683	2.316	0.504	-0.112	0.993	0.9988	0.9967
P01-A	205.0	0.00229	2.792	0.751	2.513	0.501	-0.311	1.137	0.9997	0.9994
P02-A	189.4	0.00134	2.195	0.684	3.492	0.504	-0.318	1.832	0.9982	0.9926
P03-A	201.5	0.00137	2.068	0.679	3.375	0.503	-0.184	1.735	0.9979	0.9996
P01-B	284.3	0.00166	2.101	0.640	1.980	0.503	-0.915	0.831	0.9975	0.9993
P02-B	292.0	0.00203	2.131	0.664	2.111	0.502	-0.357	0.858	0.9992	0.9987

Espécimen	f'_c	ε'_c	r_0	u_A	x_{50D}	y_{50D}	z_{50D}	u_{50D}	* R_A^2	* R_{50D}^2
P01-C	285.3	0.00169	1.989	0.630	2.181	0.506	-0.237	0.927	0.9991	0.9989
P02-C	263.6	0.00128	1.505	0.573	3.090	0.505	-0.361	1.474	0.9993	0.9990
P01-D	237.9	0.00149	1.971	0.637	2.945	0.507	-0.529	1.390	0.9991	0.9455
P02-D	224.1	0.00141	2.061	0.642	3.321	0.503	-0.243	1.746	0.9989	0.9975
P01-E	183.7	0.00164	2.393	0.692	3.304	0.502	-0.295	1.711	0.9993	0.9990
P02-E	184.4	0.00133	2.104	0.670	3.745	0.500	-0.128	2.068	0.9997	0.9977
P03-E	191.2	0.00170	2.567	0.704	3.079	0.504	-0.163	1.565	0.9992	0.9995
P01-F	217.4	0.00148	1.891	0.648	3.023	0.505	-0.435	1.459	0.9998	0.9702
P02-F	230.3	0.00170	2.060	0.674	2.557	0.502	-0.183	1.171	0.9996	0.9991
P03-F	225.0	0.00153	2.113	0.671	3.408	0.504	-0.337	1.774	0.9995	0.9863
P01-G	210.3	0.00152	2.311	0.675	3.125	0.502	-0.222	1.591	0.9995	0.9997
P02-G	208.4	0.00176	2.232	0.702	3.166	0.503	-0.231	1.634	0.9998	0.9991
P03-G	207.4	0.00173	2.123	0.689	3.301	0.504	-0.274	1.731	0.9999	0.9950
P01-H	211.9	0.00129	1.933	0.641	3.405	0.501	-0.192	1.788	0.9995	0.9965
P02-H	227.2	0.00160	1.853	0.656	2.851	0.503	-0.349	1.390	0.9996	0.9960
P03-H	180.1	0.00049	2.645	0.675	7.286	0.502	-0.055	4.789	0.9975	0.9996
V1-P1	310.8	0.00153	1.875	0.584	1.575	0.555	-1.518	0.457	0.9966	0.9939
V2-P1	340.5	0.00172	2.072	0.631	1.911	0.506	-0.378	0.722	0.9972	0.9997
V2-P2	348.9	0.00173	1.862	0.607	1.887	0.542	-0.996	0.681	0.9981	0.9920
V2-P3	355.3	0.00176	1.852	0.623	2.425	0.515	-0.301	1.131	0.9975	0.9996

Nota: * R_A^2 , R_{50D}^2 : Coeficiente de determinación del tramo ascendente y descendente, respectivamente. Fuente: Elaboración Propia.

Tabla 2

Análisis estadístico de los resultados del coeficiente de determinación.

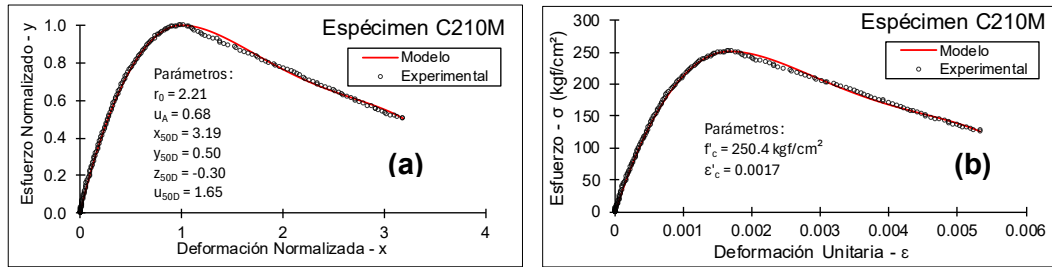
(a) Tramo Ascendente			(b) Tramo Descendente		
Descripción	R ²	Espécimen	Descripción	R ²	Espécimen
Mínimo	0.988919	M2-P2	Mínimo	0.945495	P01-D
Promedio	0.998687		Promedio	0.993891	
Máximo	0.999868	P03-G	Máximo	0.999715	P01-G

Nota: Elaboración Propia.

B. Resultados gráficos

Figura 8

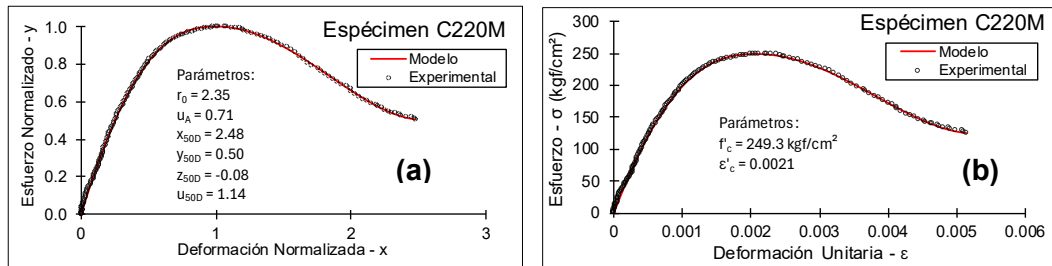
Modelo vs datos experimentales para espécimen C210M.



Nota: (a) SCFN. (b) SCF. Fuente: Elaboración Propia.

Figura 9

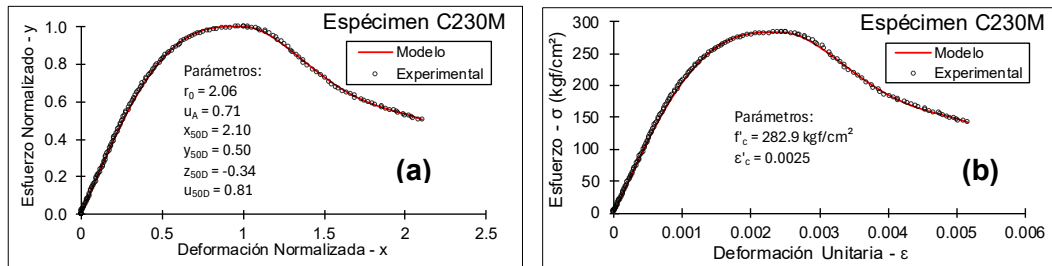
Modelo vs datos experimentales para espécimen C220M.



Nota: (a) SCFN. (b) SCF. Fuente: Elaboración Propia.

Figura 10

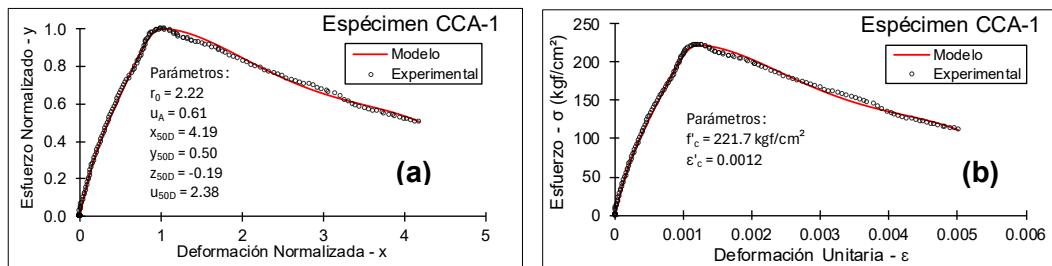
Modelo vs datos experimentales para espécimen C230M.



Nota: (a) SCFN. (b) SCF. Fuente: Elaboración Propia.

Figura 11

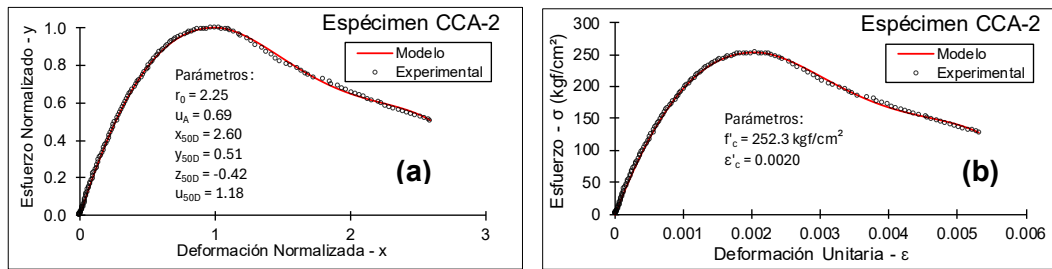
Modelo vs datos experimentales para espécimen CCA-1.



Nota: (a) SCFN. (b) SCF. Fuente: Elaboración Propia.

Figura 12

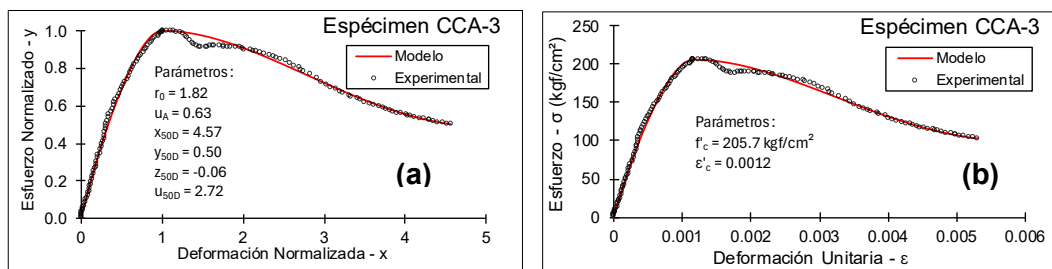
Modelo vs datos experimentales para espécimen CCA-2.



Nota: (a) SCFN. (b) SCF. Fuente: Elaboración Propia.

Figura 13

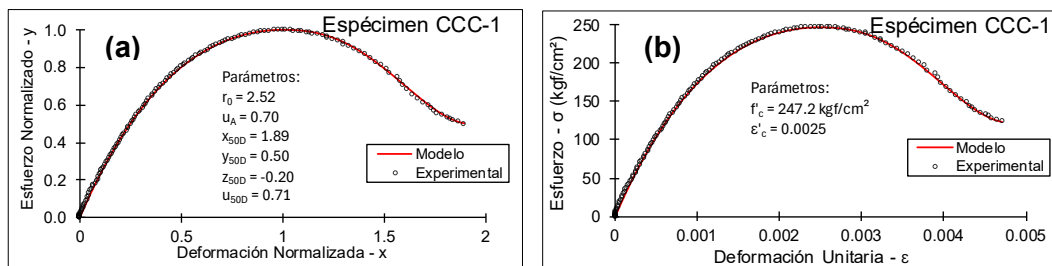
Modelo vs datos experimentales para espécimen CCA-3.



Nota: (a) SCFN. (b) SCF. Fuente: Elaboración Propia.

Figura 14

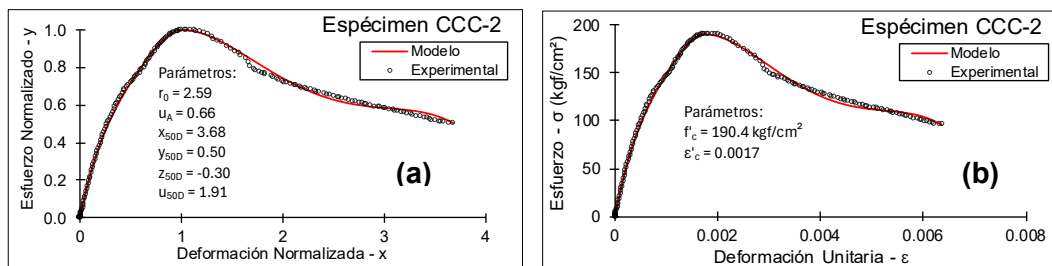
Modelo vs datos experimentales para espécimen CCC-1.



Nota: (a) SCFN. (b) SCF. Fuente: Elaboración Propia.

Figura 15

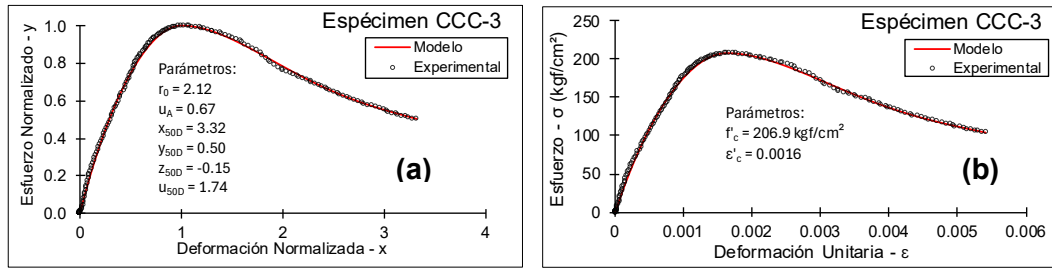
Modelo vs datos experimentales para espécimen CCC-2.



Nota: (a) SCFN. (b) SCF. Fuente: Elaboración Propia.

Figura 16

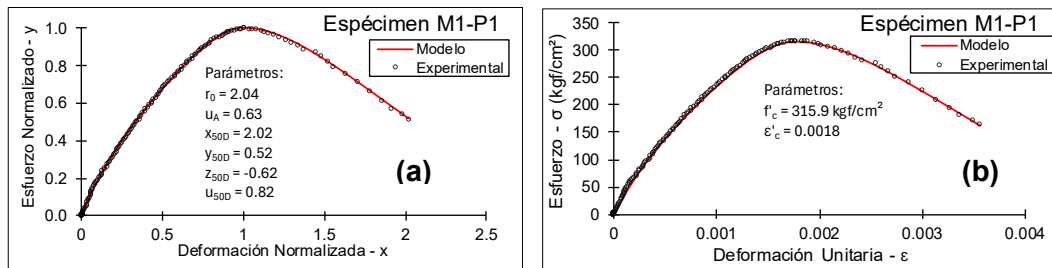
Modelo vs datos experimentales para espécimen CCC-3.



Nota: (a) SCFN. (b) SCF. Fuente: Elaboración Propia.

Figura 17

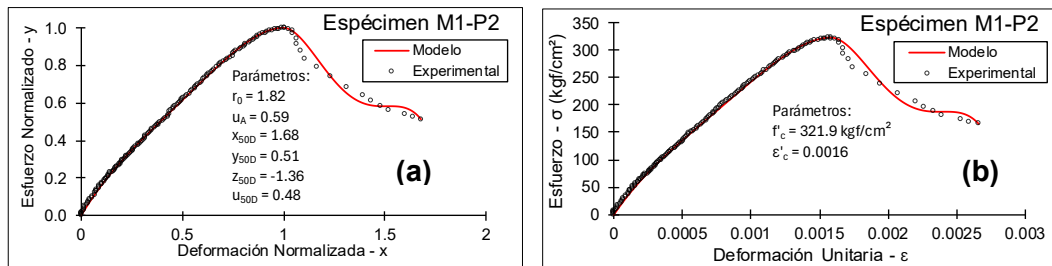
Modelo vs datos experimentales para espécimen M1-P1.



Nota: (a) SCFN. (b) SCF. Fuente: Elaboración Propia.

Figura 18

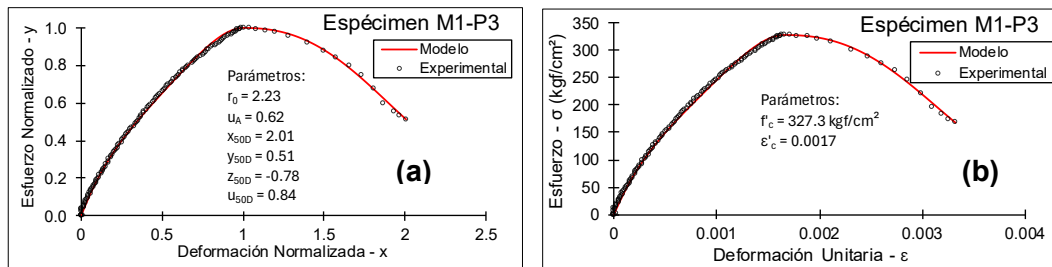
Modelo vs datos experimentales para espécimen M1-P2.



Nota: (a) SCFN. (b) SCF. Fuente: Elaboración Propia.

Figura 19

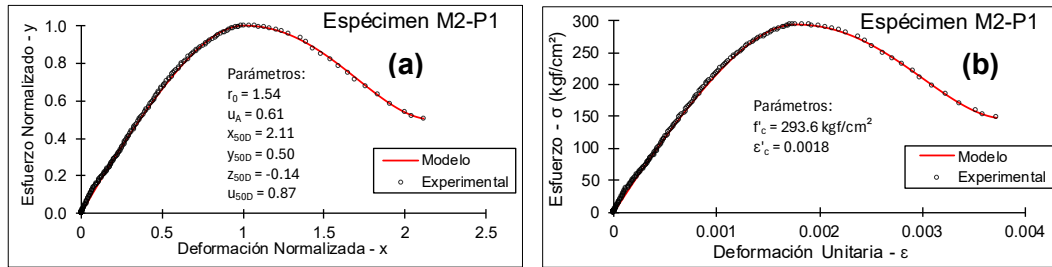
Modelo vs datos experimentales para espécimen M1-P3.



Nota: (a) SCFN. (b) SCF. Fuente: Elaboración Propia.

Figura 20

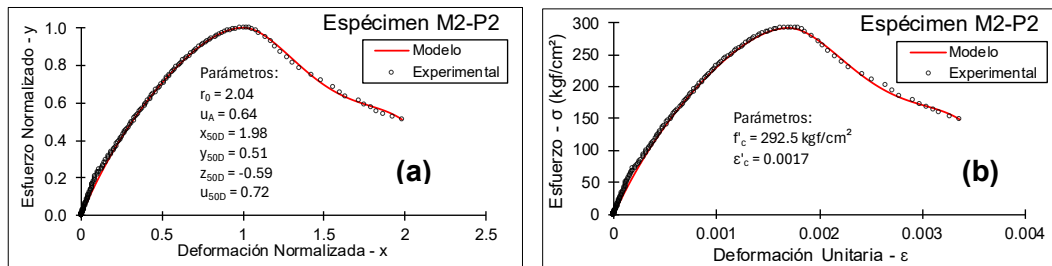
Modelo vs datos experimentales para espécimen M2-P1.



Nota: (a) SCFN. (b) SCF. Fuente: Elaboración Propia.

Figura 21

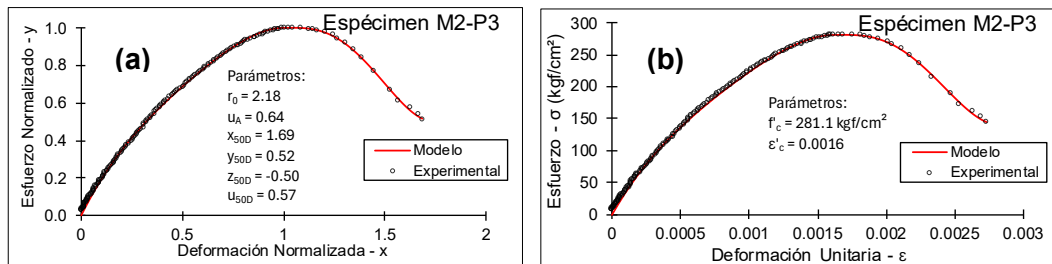
Modelo vs datos experimentales para espécimen M2-P2.



Nota: (a) SCFN. (b) SCF. Fuente: Elaboración Propia.

Figura 22

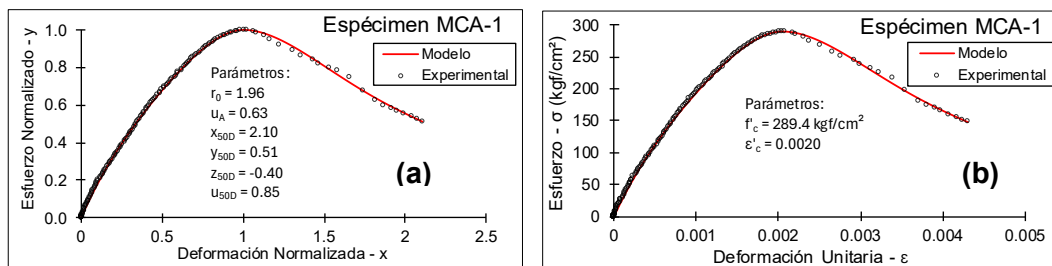
Modelo vs datos experimentales para espécimen M2-P3.



Nota: (a) SCFN. (b) SCF. Fuente: Elaboración Propia.

Figura 23

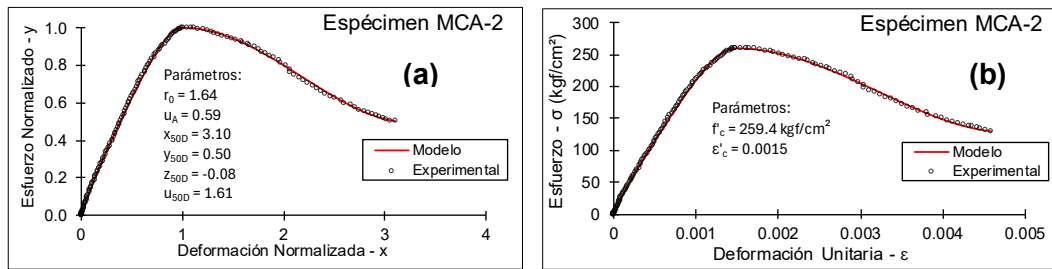
Modelo vs datos experimentales para espécimen MCA-1.



Nota: (a) SCFN. (b) SCF. Fuente: Elaboración Propia.

Figura 24

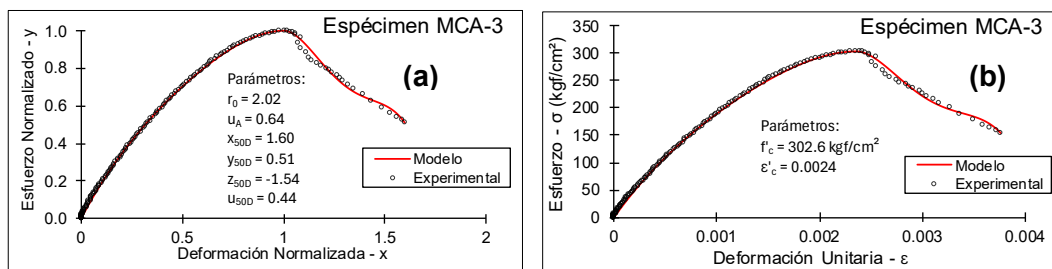
Modelo vs datos experimentales para espécimen MCA-2.



Nota: (a) SCFN. (b) SCF. Fuente: Elaboración Propia.

Figura 25

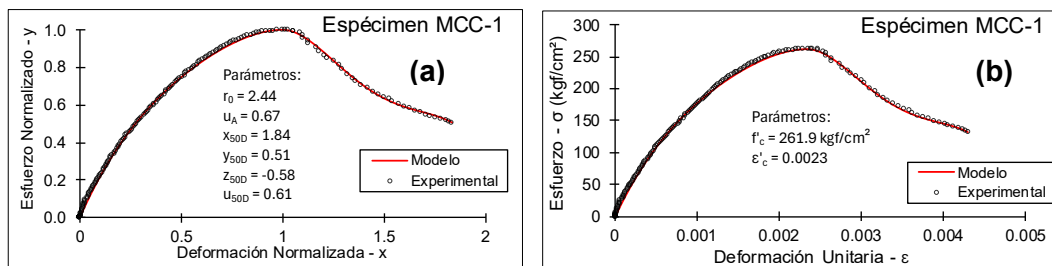
Modelo vs datos experimentales para espécimen MCA-3.



Nota: (a) SCFN. (b) SCF. Fuente: Elaboración Propia.

Figura 26

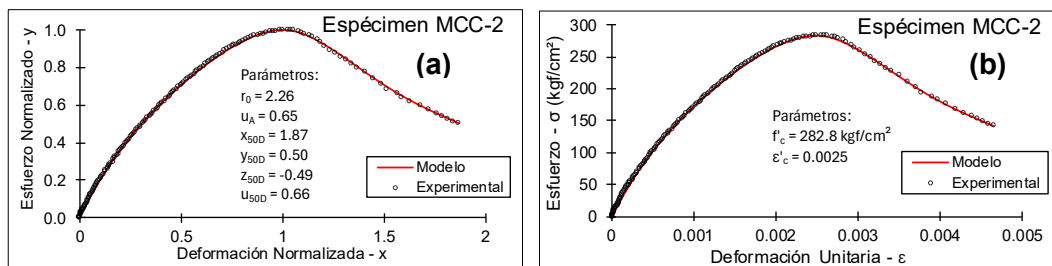
Modelo vs datos experimentales para espécimen MCC-1.



Nota: (a) SCFN. (b) SCF. Fuente: Elaboración Propia.

Figura 27

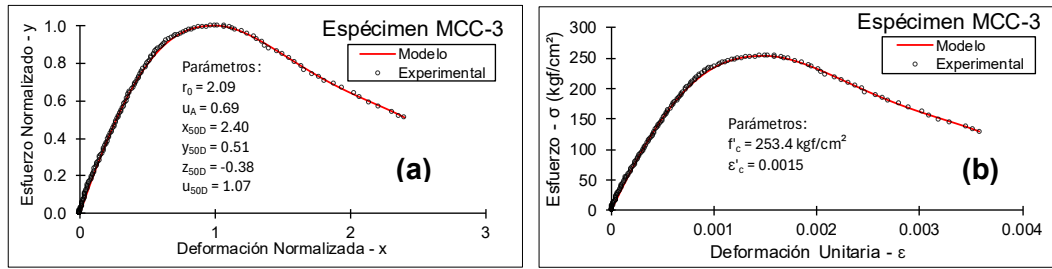
Modelo vs datos experimentales para espécimen MCC-2.



Nota: (a) SCFN. (b) SCF. Fuente: Elaboración Propia.

Figura 28

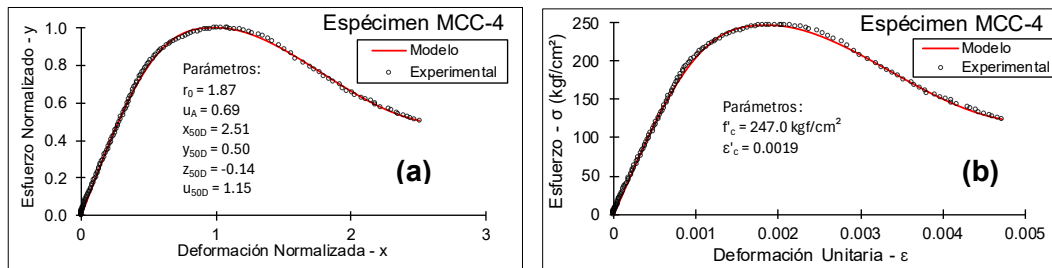
Modelo vs datos experimentales para espécimen MCC-3.



Nota: (a) SCFN. (b) SCF. Fuente: Elaboración Propia.

Figura 29

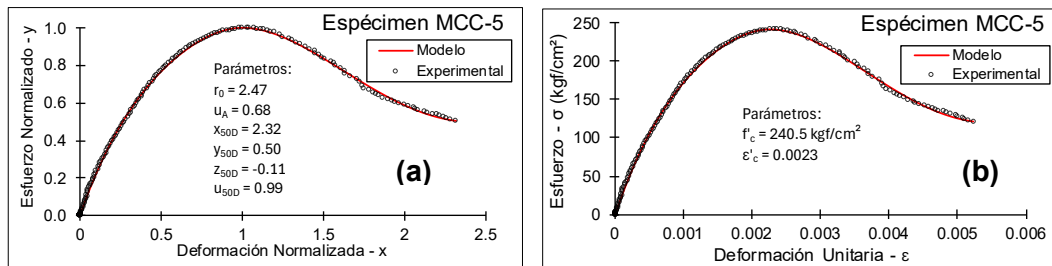
Modelo vs datos experimentales para espécimen MCC-4.



Nota: (a) SCFN. (b) SCF. Fuente: Elaboración Propia.

Figura 30

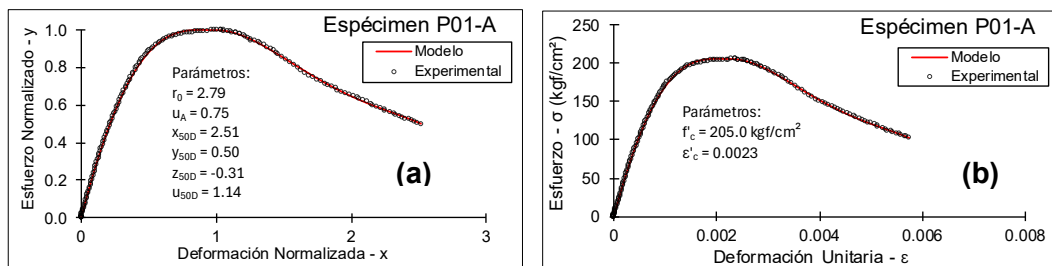
Modelo vs datos experimentales para espécimen MCC-5.



Nota: (a) SCFN. (b) SCF. Fuente: Elaboración Propia.

Figura 31

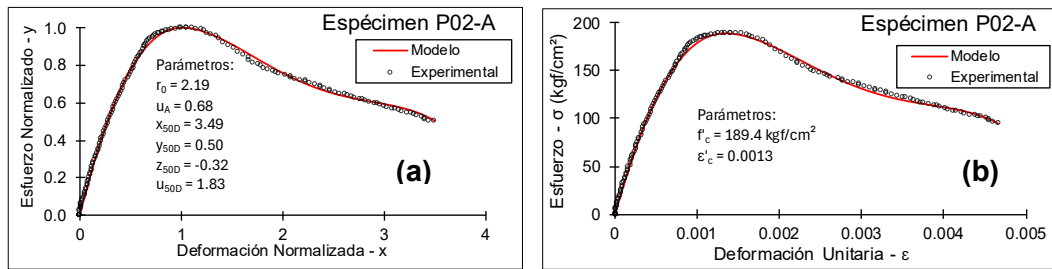
Modelo vs datos experimentales para espécimen P01-A.



Nota: (a) SCFN. (b) SCF. Fuente: Elaboración Propia.

Figura 32

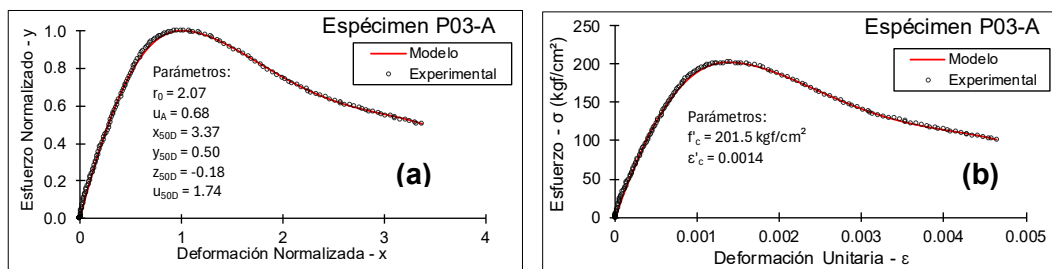
Modelo vs datos experimentales para espécimen P02-A.



Nota: (a) SCFN. (b) SCF. Fuente: Elaboración Propia.

Figura 33

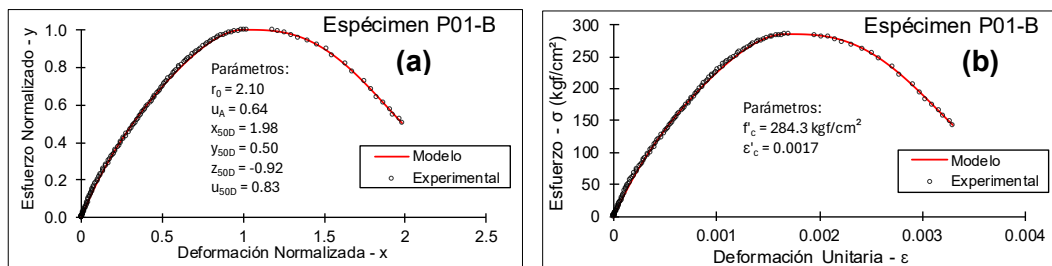
Modelo vs datos experimentales para espécimen P03-A.



Nota: (a) SCFN. (b) SCF. Fuente: Elaboración Propia.

Figura 34

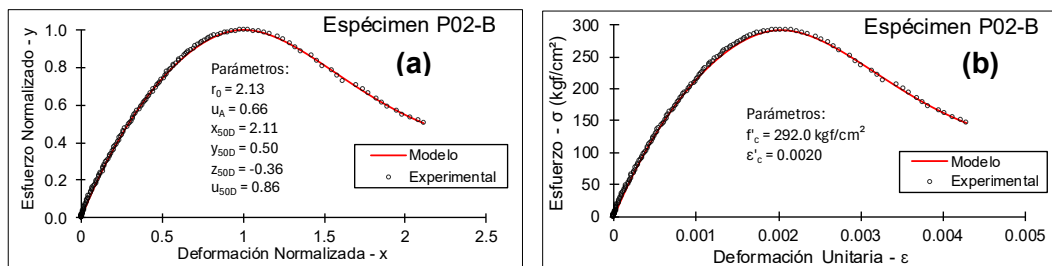
Modelo vs datos experimentales para espécimen P01-B.



Nota: (a) SCFN. (b) SCF. Fuente: Elaboración Propia.

Figura 35

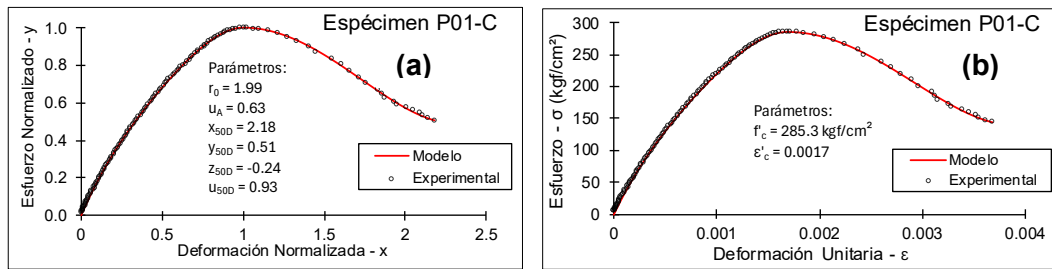
Modelo vs datos experimentales para espécimen P02-B.



Nota: (a) SCFN. (b) SCF. Fuente: Elaboración Propia.

Figura 36

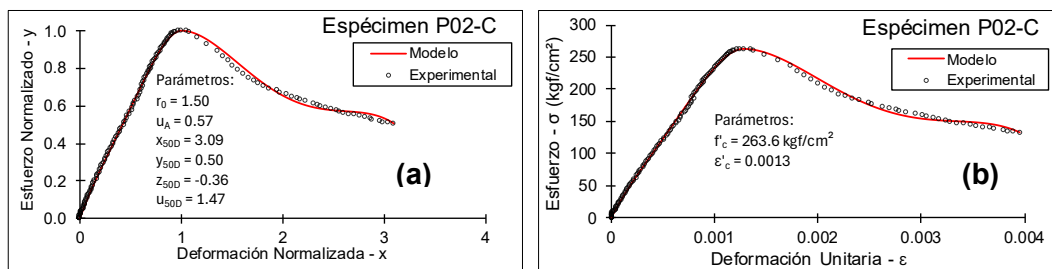
Modelo vs datos experimentales para espécimen P01-C.



Nota: (a) SCFN. (b) SCF. Fuente: Elaboración Propia.

Figura 37

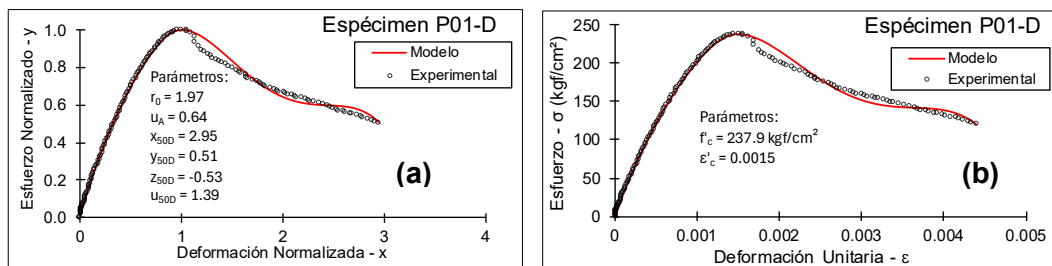
Modelo vs datos experimentales para espécimen P02-C.



Nota: (a) SCFN. (b) SCF. Fuente: Elaboración Propia.

Figura 38

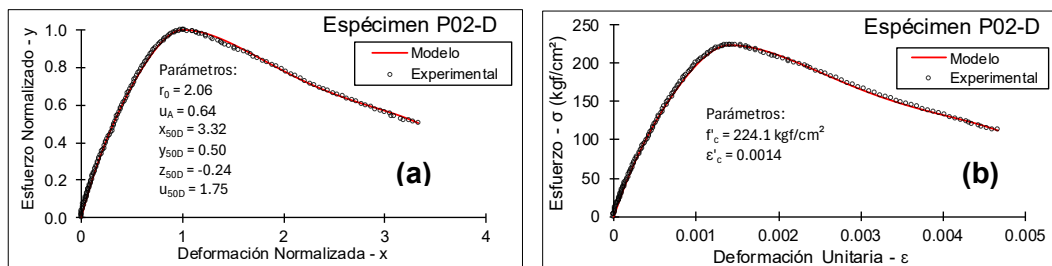
Modelo vs datos experimentales para espécimen P01-D.



Nota: (a) SCFN. (b) SCF. Fuente: Elaboración Propia.

Figura 39

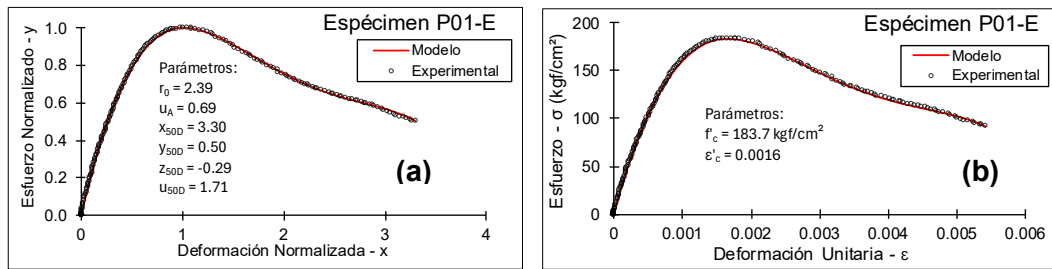
Modelo vs datos experimentales para espécimen P02-D.



Nota: (a) SCFN. (b) SCF. Fuente: Elaboración Propia.

Figura 40

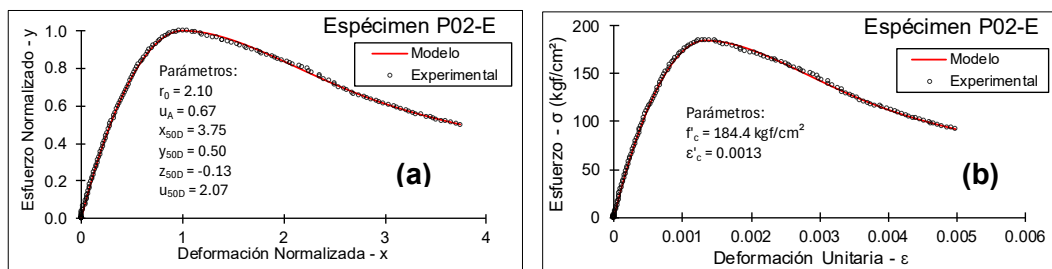
Modelo vs datos experimentales para espécimen P01-E.



Nota: (a) SCFN. (b) SCF. Fuente: Elaboración Propia.

Figura 41

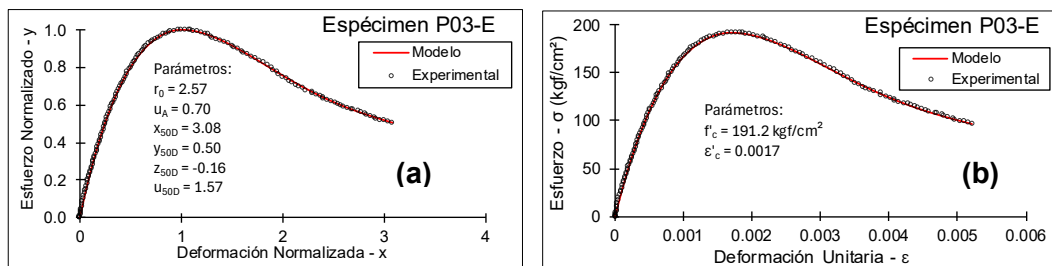
Modelo vs datos experimentales para espécimen P02-E.



Nota: (a) SCFN. (b) SCF. Fuente: Elaboración Propia.

Figura 42

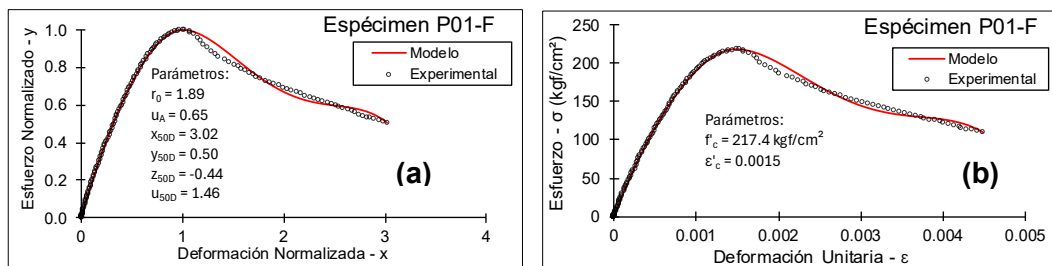
Modelo vs datos experimentales para espécimen P03-E.



Nota: (a) SCFN. (b) SCF. Fuente: Elaboración Propia.

Figura 43

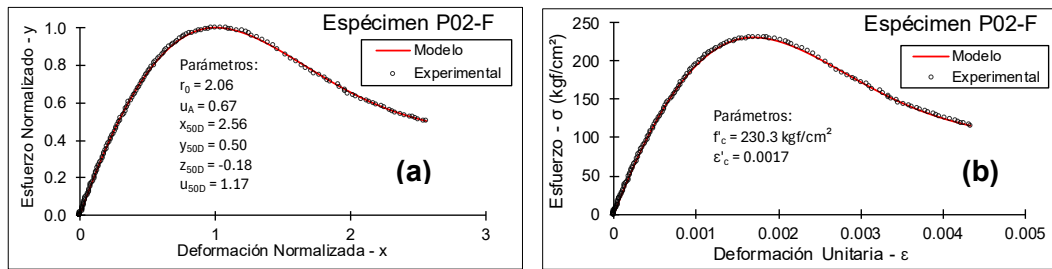
Modelo vs datos experimentales para espécimen P01-F.



Nota: (a) SCFN. (b) SCF. Fuente: Elaboración Propia.

Figura 44

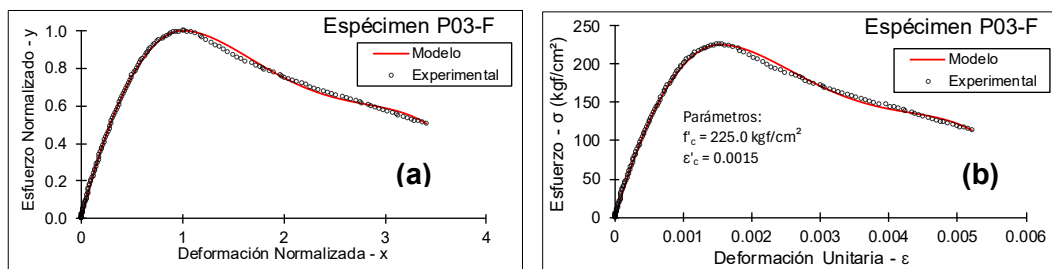
Modelo vs datos experimentales para espécimen P02-F.



Nota: (a) SCFN. (b) SCF. Fuente: Elaboración Propia.

Figura 45

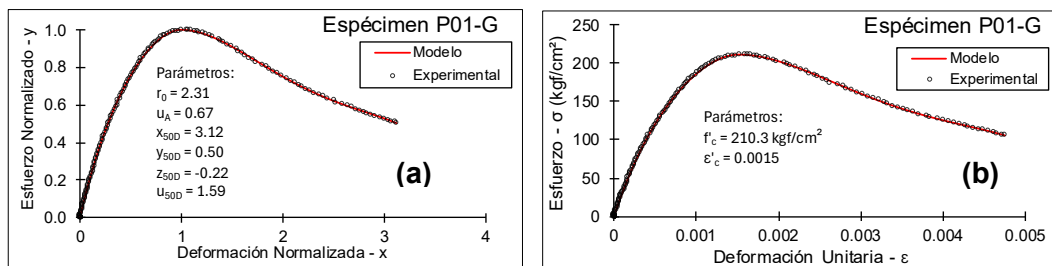
Modelo vs datos experimentales para espécimen P03-F.



Nota: (a) SCFN. (b) SCF. Fuente: Elaboración Propia.

Figura 46

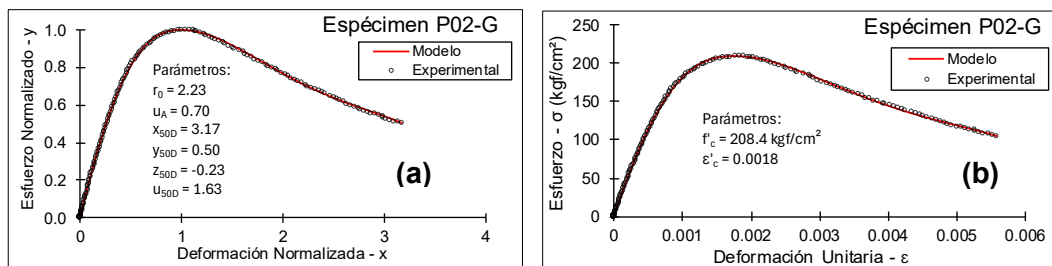
Modelo vs datos experimentales para espécimen P01-G.



Nota: (a) SCFN. (b) SCF. Fuente: Elaboración Propia.

Figura 47

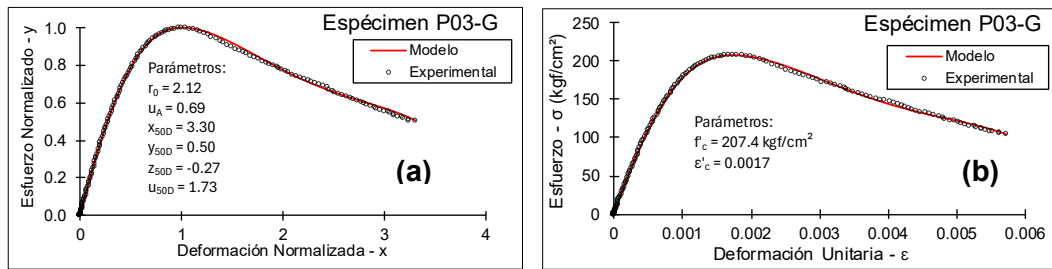
Modelo vs datos experimentales para espécimen P02-G.



Nota: (a) SCFN. (b) SCF. Fuente: Elaboración Propia.

Figura 48

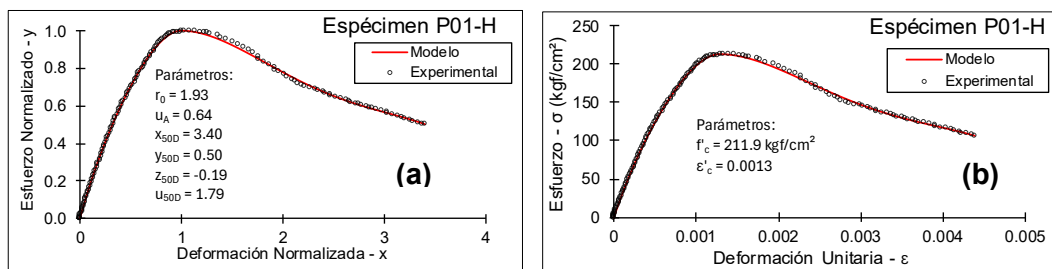
Modelo vs datos experimentales para espécimen P03-G.



Nota: (a) SCFN. (b) SCF. Fuente: Elaboración Propia.

Figura 49

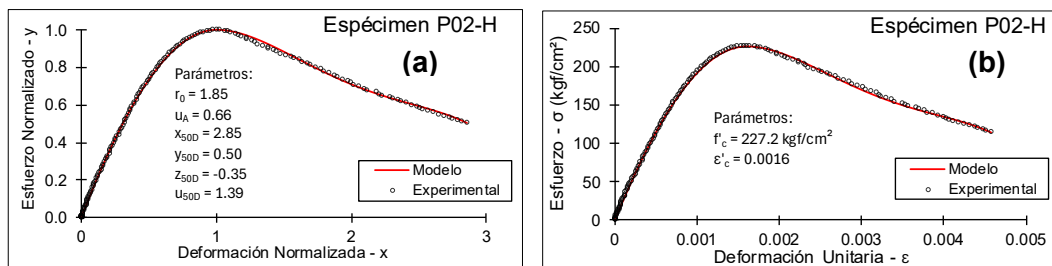
Modelo vs datos experimentales para espécimen P01-H.



Nota: (a) SCFN. (b) SCF. Fuente: Elaboración Propia.

Figura 50

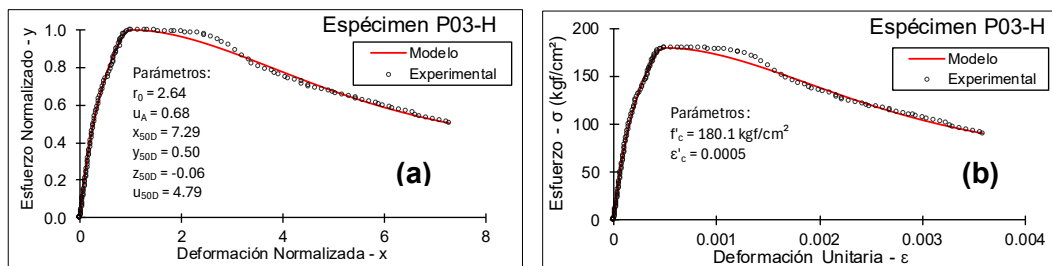
Modelo vs datos experimentales para espécimen P02-H.



Nota: (a) SCFN. (b) SCF. Fuente: Elaboración Propia.

Figura 51

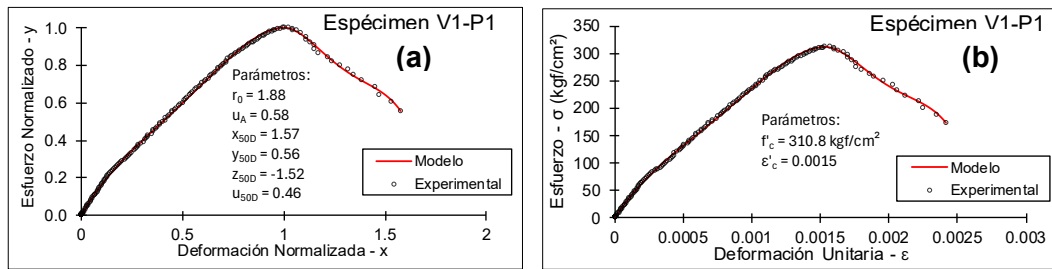
Modelo vs datos experimentales para espécimen P03-H.



Nota: (a) SCFN. (b) SCF. Fuente: Elaboración Propia.

Figura 52

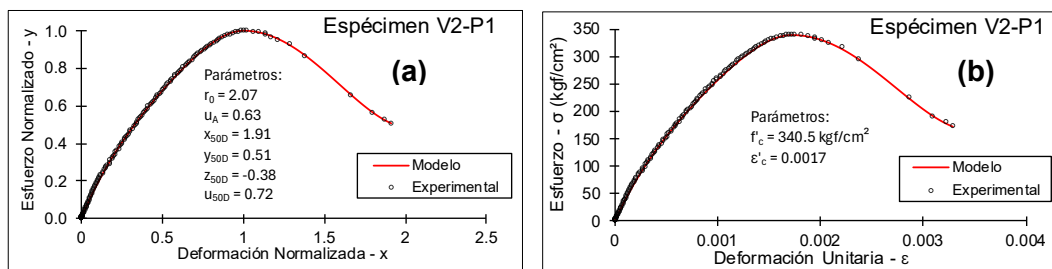
Modelo vs datos experimentales para espécimen V1-P1.



Nota: (a) SCFN. (b) SCF. Fuente: Elaboración Propia.

Figura 53

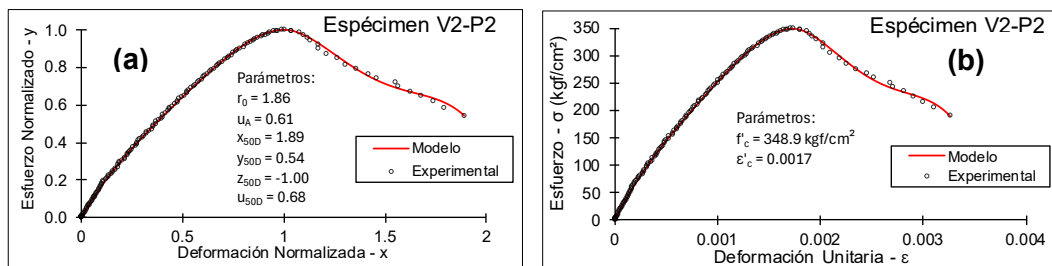
Modelo vs datos experimentales para espécimen V2-P1.



Nota: (a) SCFN. (b) SCF. Fuente: Elaboración Propia.

Figura 54

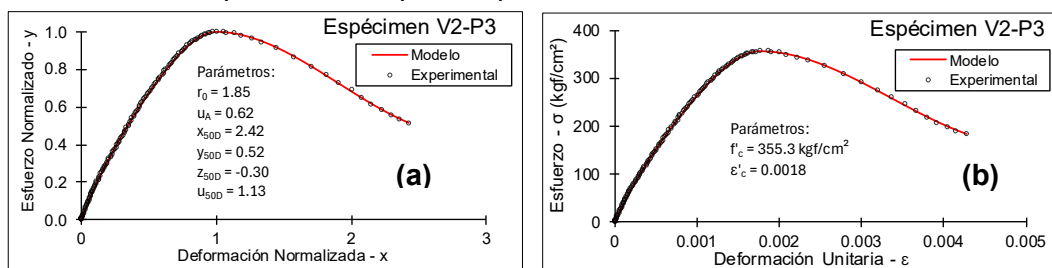
Modelo vs datos experimentales para espécimen V2-P2.



Nota: (a) SCFN. (b) SCF. Fuente: Elaboración Propia.

Figura 55

Modelo vs datos experimentales para espécimen V2-P3.



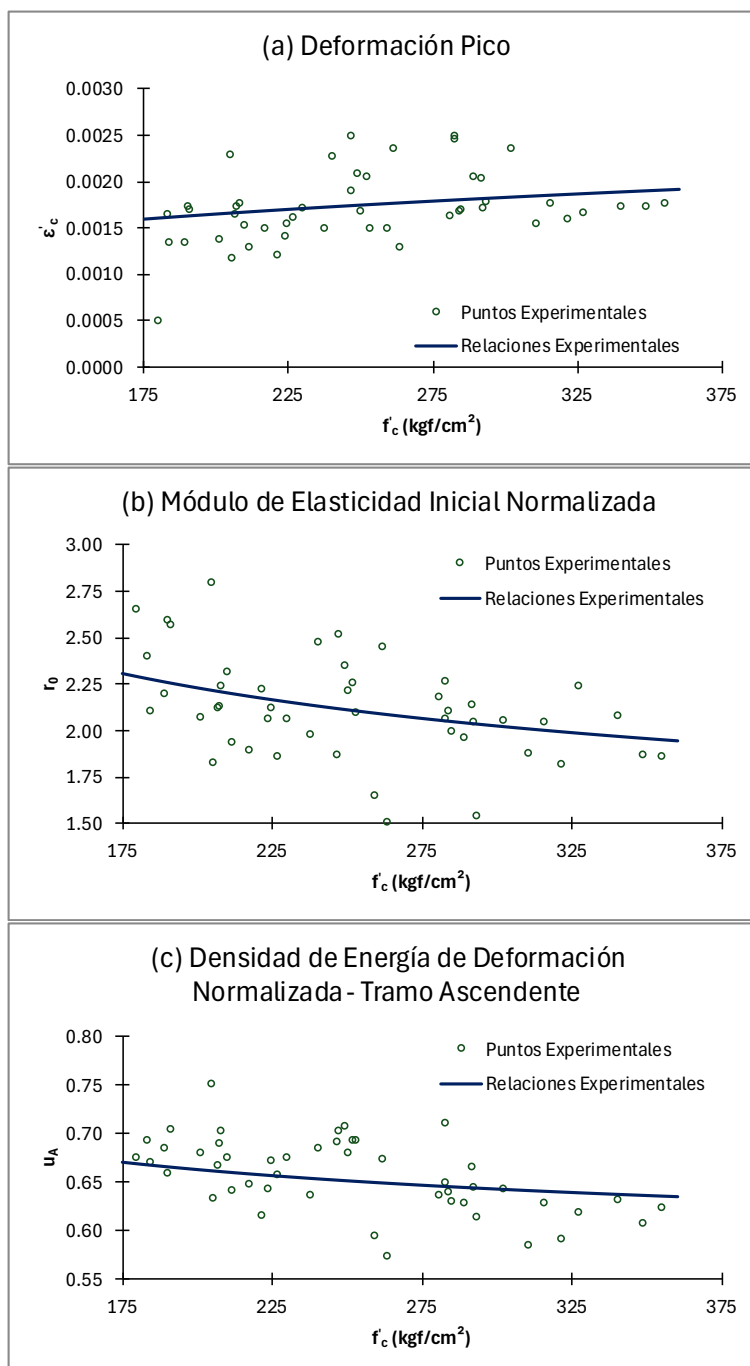
Nota: (a) SCFN. (b) SCF. Fuente: Elaboración Propia.

Anexo 4. Gráficas de la formulación experimental

A. Gráficos de la formulación experimental

Figura 56

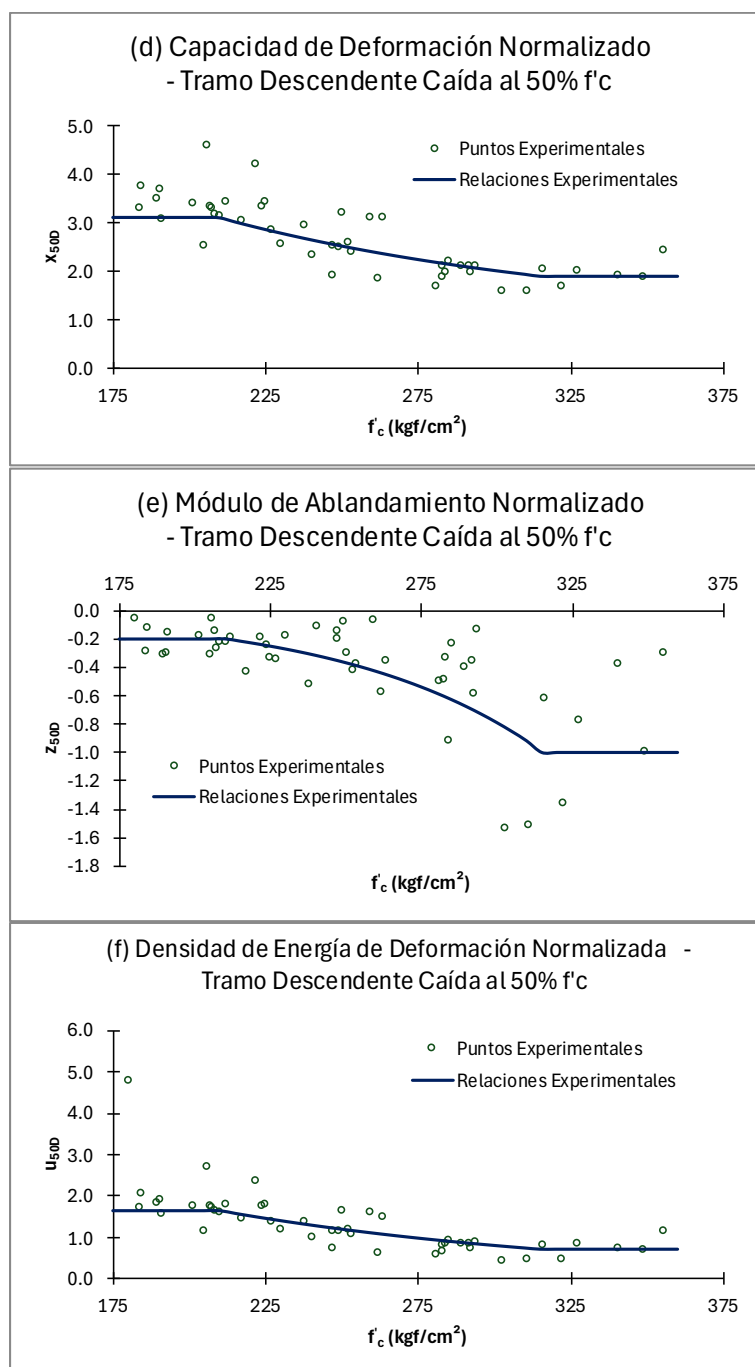
Relaciones Experimentales: Tramo Ascendente.



Nota: (a) Deformación pico. (b) Módulo de elasticidad inicial normalizada. (c) Densidad de energía de deformación normalizada – tramo ascendente. Fuente: Elaboración Propia.

Figura 57

Relaciones Experimentales: Tramo Descendente.

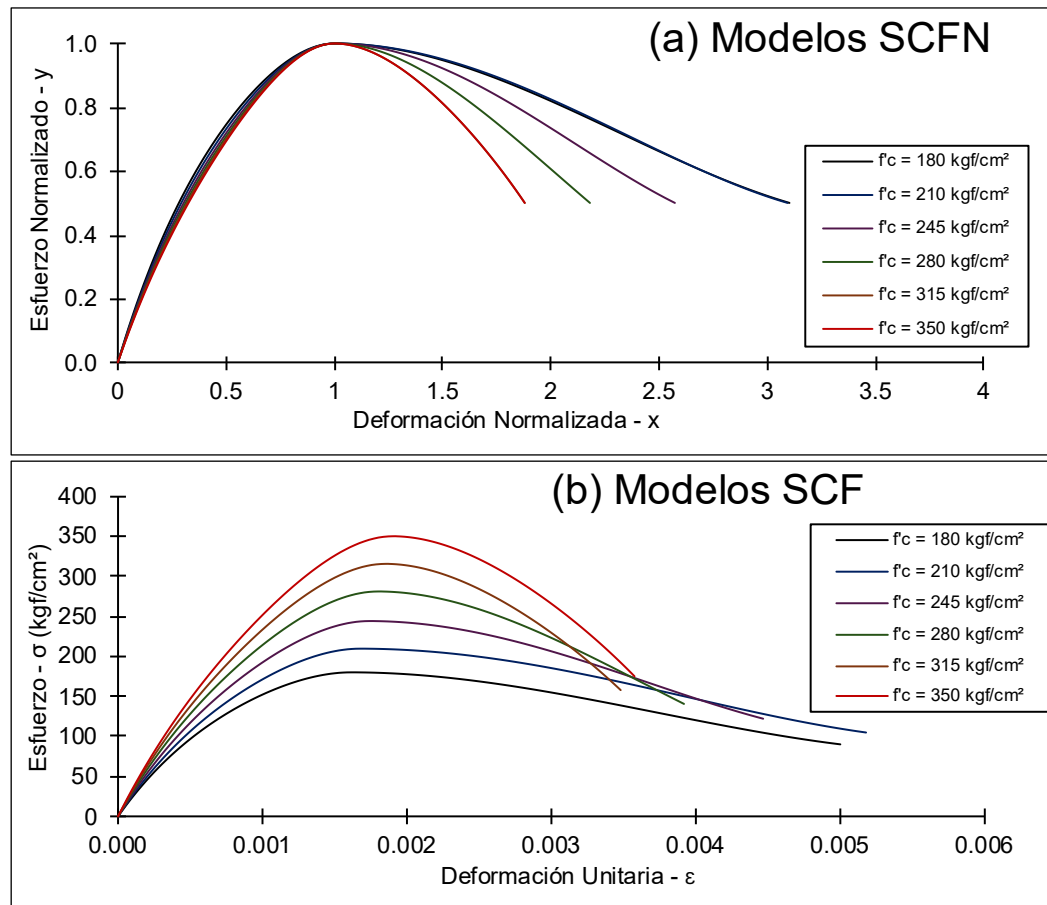


Nota: (d) Capacidad de deformación normalizado. (e) Módulo de ablandamiento normalizado. (f) Densidad de energía de deformación normalizada - tramo descendente. Fuente: Elaboración Propia.

B. Modelos de concreto contruidos a partir de las formulaciones experimentales

Figura 58

Modelos de concreto contruidos a partir de formulaciones experimentales.



Nota: (a) SCFN. (b) SCF. Fuente: Elaboración Propia.

Tabla 3

Modelos de concreto contruidos a partir de formulaciones experimentales.

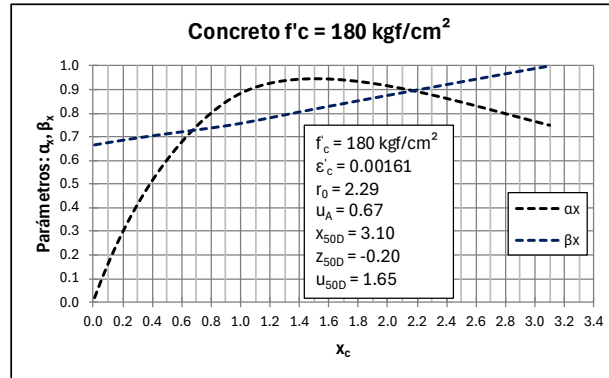
Resistencia Pico	f'_c (kgf/cm ²)	180	210	245	280	315	350
	ε'_c	0.00161	0.00167	0.00174	0.00180	0.00185	0.00190
Parámetros Físicos Normalizados	r_0	2.29	2.20	2.12	2.06	2.00	1.96
	u_A	0.67	0.66	0.65	0.65	0.64	0.64
	x_{50D}	3.09	3.09	2.57	2.18	1.88	1.88
	z_{50D}	-0.20	-0.20	-0.34	-0.58	-0.99	-0.99
	u_{50D}	1.65	1.65	1.25	0.95	0.72	0.72
Coeficientes - Tramo Ascendente	A_0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	A_1	2.293	2.204	2.122	2.056	2.001	1.955
	A_2	-2.239	-2.106	-1.983	-1.884	-1.802	-1.733
	A_3	1.600	1.600	1.600	1.600	1.600	1.600
	A_4	-0.654	-0.698	-0.739	-0.772	-0.799	-0.822
Coeficientes - Tramo Descendente	D_0	0.758	0.757	0.589	0.144	-1.468	-0.782
	D_1	0.502	0.506	0.864	1.972	6.698	4.584
	D_2	-0.272	-0.275	-0.479	-1.393	-6.411	-4.043
	D_3	0.004	0.005	0.010	0.292	2.601	1.462
	D_4	0.007	0.007	0.015	-0.015	-0.420	-0.221

Nota: Elaboración Propia.

Anexo 5. Parámetros del bloque equivalente generalizado

Figura 59

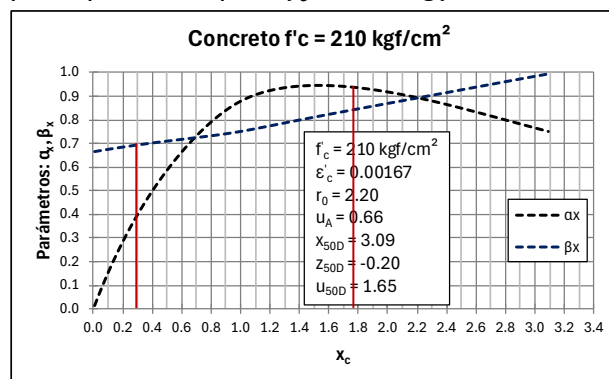
Parámetros del Bloque Equivalente para $f'_c = 180 \text{ kgf/cm}^2$.



Nota: Elaboración Propia.

Figura 60

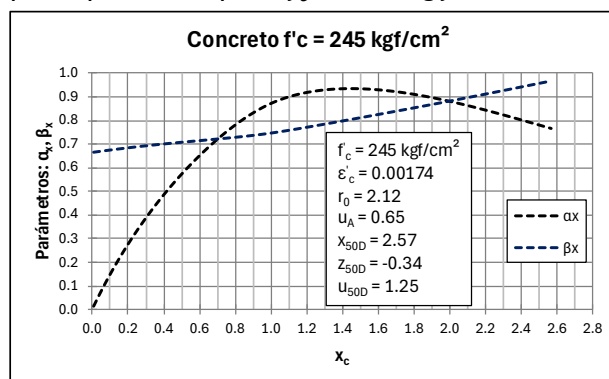
Parámetros del Bloque Equivalente para $f'_c = 210 \text{ kgf/cm}^2$.



Nota: Elaboración Propia.

Figura 61

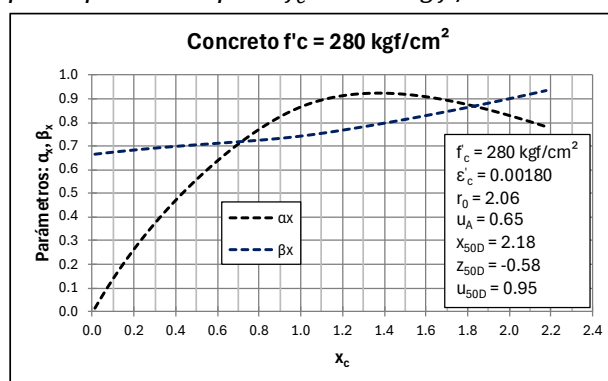
Parámetros del Bloque Equivalente para $f'_c = 245 \text{ kgf/cm}^2$.



Nota: Elaboración Propia.

Figura 62

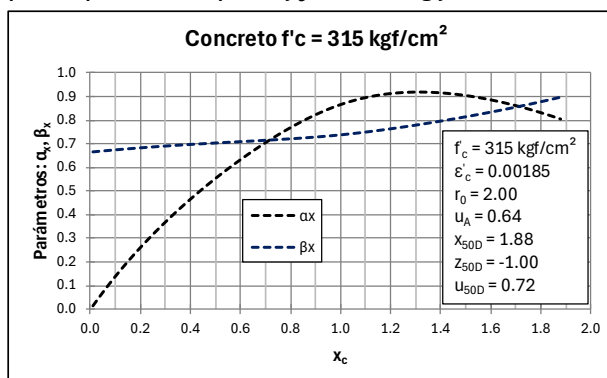
Parámetros del Bloque Equivalente para $f'_c = 280 \text{ kgf/cm}^2$.



Nota: Elaboración Propia.

Figura 63

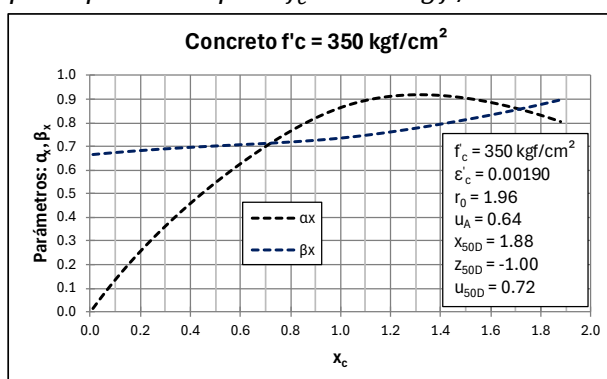
Parámetros del Bloque Equivalente para $f'_c = 315 \text{ kgf/cm}^2$.



Nota: Elaboración Propia.

Figura 64

Parámetros del Bloque Equivalente para $f'_c = 350 \text{ kgf/cm}^2$.



Nota: Elaboración Propia.